

Содержание

1	Уравнения первого порядка	3
1.1	Определения	3
1.1.1	Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка	3
1.1.2	Частное решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка	3
1.1.3	Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка	3
1.1.4	Общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка	3
1.1.5	Уравнение с разделяющимися переменными первого порядка	4
1.1.6	Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в симметричной форме	4
1.1.7	Линейное дифференциальное уравнение первого порядка	4
1.1.8	Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка	4
1.2	Теоремы и алгоритмы	5
1.2.1	Алгоритм решения уравнений с разделяющимися переменными первого порядка	5
1.2.2	Метод вариации решения линейного дифференциального уравнения первого порядка.	5
1.2.3	Основная теорема существования и единственности . .	7
1.2.4	Сведение задачи Коши к интегральному уравнению . .	7
2	Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка	8
2.1	Определения	8
2.1.1	Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка (однородные и неоднородные)	8
2.1.2	Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка	8
2.1.3	Линейно зависимые и линейно независимые функции .	9
2.1.4	Определитель Вронского функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$	9
2.1.5	Фундаментальная система решения	9
2.1.6	Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	9
2.1.7	Необходимое условие линейной зависимости	10
2.1.8	Условие линейной независимости решений	10
2.1.9	Свойство линейности и следствия из него	10
2.1.10	Существование ФСР	11
2.1.11	Вид общего решения однородного линейного уравнения	11
2.1.12	Вид общего решения неоднородного линейного уравнения	11
2.2	Алгоритм метод вариации нахождения частного решения . . .	12

2.3	Обоснование метода вариации	13
2.4	Пример: $y'' + w^2 y = f(x)$	14
2.5	Формула Остроградского-Луивилля	15
2.6	Метод Эйлера (случай простых корней)	16
3	Линейные дифференциальные уравнения второго порядка	18
3.1	Интегрирование с помощью частного решения	18
3.2	Упрощение с помощью замены функции $y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{1}{4x^2})y = 0$	19
3.3	Упрощение с помощью замены переменной $y'' + \frac{1}{2x}y' - \frac{1}{x}y = 0$	19
3.4	Метод степенных рядов $y'' - xy = 0$	20
3.5	Алгоритм решения простейшей краевой задачи	22
3.6	Существование решения краевой задачи:	23
4	Линейные системы	25
4.1	Определения	25
4.1.1	Нормальная линейная система, её векторная запись . .	25
4.2	Решение системы	26
4.3	Задача Коши для системы	26
4.4	Линейно зависимые и линейно независимые вектор-функции .	27
4.5	Определитель Вронского вектор-функций	27
4.6	Фундаментальная система решений линейной системы	27
4.7	Фундаментальная матрица решений однородной системы . . .	28
4.8	Линейные системы с постоянными коэффициентами	28

1 Уравнения первого порядка

1.1 Определения

1.1.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') \equiv 0$$

1.1.2 Частное решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

Определение частного решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

(1) $F(x, y, y') \equiv 0$ — обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка.

Частным решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка называется непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(x)$, при подстановки которой в уравнение (1) получим тождество

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$$

1.1.3 Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

Определение общего решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

Множество всех решений обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка называется его общим решением.

1.1.4 Общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка

Пусть (1) $y' = f(x, y)$ — дифференциальное уравнение первого порядка.

Определение общего интеграла дифференциального уравнения первого порядка:

Общее решение уравнения (1) в неявном виде

$$F(x, y) = C$$

называется общим интегралом уравнения (1).

1.1.5 Уравнение с разделяющимися переменными первого порядка

Определение уравнения с разделяющимися переменными первого порядка

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными первого порядка называется уравнение вида

$$y' = f_1(x)f_2(y),$$

где $f_1(x)$ и $f_2(y)$ — заданные функции.

1.1.6 Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в симметричной форме

Определение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в симметричной форме

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в симметричной форме имеет вид

$$A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0,$$

где A и B — заданные функции двух переменных, причём переменные x и y равноправны.

1.1.7 Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

Определение линейного дифференциального уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x),$$

где x — неизвестная переменная, $y = y(x)$ — неизвестная функция, $a_0(x)$ и $a_1(x)$ — известные непрерывные функции.

1.1.8 Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка

Определение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка

Пусть $y' = f(x, y)$ — дифференциальное уравнение первого порядка и $y(x_0) = y_0$ — его начальное условие. Тогда задача Коши для него имеет вид

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

где x_0, y_0 — заданные числа.

1.2 Теоремы и алгоритмы

1.2.1 Алгоритм решения уравнений с разделяющимися переменными первого порядка

1. Переходим к дифференциалам:

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad \frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y);$$

2. Делим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y) \quad | \cdot dx \frac{1}{f_2(y)}$$

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

3. Вычисляем интегралы:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C,$$

где $C \in R$ и $\int \frac{dy}{f_2(y)} = F_2(y)$, $\int f_1(x)dx = F_1(x)$.

Получим:

$$(3) \quad F_2(y) = F_1(x) + C$$

4. Разрешаем последнее уравнение относительно y :

$$(4) \quad y = \varphi(x, C), \quad C \in R,$$

где $\varphi(x, C)$ — общее решение.

5. Ответ: $\varphi(x, C)$.

1.2.2 Метод вариации решения линейного дифференциального уравнения первого порядка.

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x),$$

Тогда

$$y' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}y = \frac{f(x)}{a_0(x)}$$

Обозначим $p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}$, $q(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)}$

Следовательно уравнение примет вид:

$$(1) \quad y' + p(x) = q(x), \quad a \leq x \leq b$$

Метод вариации произвольной постоянной:

1. Этап:

Найдём общее решение соответствующего (1) однородного уравнения:

$$(2) \quad y' + p(x)y = 0$$

$$y' = -p(x)y$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int p(x)dx + C$$

$$\ln |y| = -F_1(x) + C$$

$$y = \pm e^C e^{-F_1(x)}$$

Получим: $y_0 = C e^{-F_1(x)}$ — общее решение (2).

2. Этап:

Ищем решение (1) в виде:

$$(3) \quad C(x)e^{-F_1(x)},$$

где $C(x)$ — пока неизвестная функция.

$$y' = C'(x)e^{-F_1(x)} + C(x)e^{-F_1(x)}(-p(x))$$

Подставляем в (1):

$$C'(x)e^{-F_1(x)} - C(x)e^{-F_1(x)}p(x) + p(x)C(x)e^{-F_1(x)} = q(x)$$

$$C'(x) = e^{F_1(x)}q(x)$$

$$C(x) = \int e^{F_1(x)}q(x)dx \pm c = F_2(x) + C$$

Подставим в (3):

$$y = e^{-F_1(x)}(F_2(x) + C)$$

Таким образом, $y = e^{-F_1(x)}(F_2(x) + C)$ — общее решение уравнения (1).

1.2.3 Основная теорема существования и единственности

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши:

Предположим, что $f(x, y)$ — непрерывная функция и у неё существует непрерывная частная производная $f'(x, y)$. Тогда $\forall (x_0, y_0)$ задача Коши имеет единственное решение.

1.2.4 Сведение задачи Коши к интегральному уравнению

Пусть $\varphi(x)$ — решение задачи Коши:

$$(1) \quad \varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$$

$$(2) \quad \varphi(x_0) = y_0$$

Перепишем (1) в виде:

$$(3) \quad \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$$

Фиксируем произвольный x и берём интеграл от (3):

$$\varphi' = f(t, \varphi(t)) \quad || \int_{x_0}^x dt$$

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$$

$$(4) \quad \varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$$

По определению (4) означает, что $\varphi(x)$ является решением интегрального уравнения

$$(5) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$$

Все остальные рассуждения обратимы \leftarrow задача Коши \sim уравнению (5).

2 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка

2.1 Определения

2.1.1 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка (однородные и неоднородные)

Определение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка

Однородное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид:

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y = 0,$$

где $a_0(x), \dots, a_n(x)$ — заданные непрерывные функции.

Определение линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка

Неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид:

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y = f(x),$$

где $a_0(x), \dots, a_n(x), f(x)$ — заданные непрерывные функции.

2.1.2 Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка

$$(1) \quad y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x)$$

Определение задачи Коши для дифференциального уравнения n-го порядка

Задача Коши для линейного уравнения (1) имеет вид:

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

где $y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ — начальные условия и $x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ — заданные числа.

2.1.3 Линейно зависимые и линейно независимые функции

Определение линейно зависимых функций

Функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ называются линейно зависимыми на отрезке $[a, b]$, если найдутся константы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ — числа, не все равные нулю, такие, что линейная комбинация:

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_m \varphi_m(x) \equiv 0$$

Определение линейно независимых функций

Функции $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ называются линейно независимыми на отрезке $[a, b]$, если

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_m \varphi_m(x) \equiv 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$$

2.1.4 Определитель Вронского функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$

Определение определителя Вронского функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$

Определителем Вронского функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ называется:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_m(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_m'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_m^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

2.1.5 Фундаментальная система решения

Определение фундаментальной системы решений однородного линейного уравнения

Фундаментальной системой решений однородного линейного уравнения $l(y) = 0$ называется:

$\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — линейно независимые и их количество совпадает с порядком уравнения.

2.1.6 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Определение однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами

Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0,$$

где a_0, \dots, a_n — заданные числа.

Определение неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами

Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x),$$

где a_0, \dots, a_n — заданные числа.

2.1.7 Необходимое условие линейной зависимости

Теорема (необходимое условие линейной зависимости)

Если функции $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — линейно зависимы на $[a, b]$. Тогда их определитель вронского тождественно равен нулю.

$$\mathbf{W} \equiv 0$$

Доказательство (нужно или нет?:))

2.1.8 Условие линейной независимости решений

Рассмотрим линейное уравнение:

$$(1) \quad y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_m(x)y = 0; \quad a \leq x \leq b$$

Теорема (условие линейной независимости решений линейного уравнения)

Пусть $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — линейно независимые решения уравнения (1). Тогда

$$\forall x \in [a, b] \quad \mathbf{W} \neq 0$$

Доказательство (нужно или нет?:))

2.1.9 Свойство линейности и следствия из него

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_m(x)y = f(x)$$

Обозначим $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_m(x)y$ как $l(y)$.

Свойство линейности $l(y)$

$$l(y_1(x) + y_2(x)) = l(y_1(x)) + l(y_2(x));$$

$$l\left(\sum_{k=1}^m \alpha_k \varphi_k(x)\right) = \sum_{k=1}^m \alpha_k l(\varphi_k(x))$$

Следствие свойства линейности

Пусть $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — решения уравнения $l(y) = 0$. Тогда $\varphi^\circ(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_m \varphi_m(x)$ тоже является решением этого уравнения.

Доказательство (нужно или нет?:))

2.1.10 Существование ФСР

Теорема (о существовании ФСР у любого однородного линейного уравнения)

Фундаментальная система решений существует для любого однородного линейного уравнения.

2.1.11 Вид общего решения однородного линейного уравнения

Рассмотрим однородное линейное уравнение

$$(1) \quad y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_m(x)y = 0; \quad a \leq x \leq b$$

или

$$l(y) = 0$$

Теорема (вид общего решения однородного линейного уравнения)

Пусть $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — ФСР. Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$y = c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_n \varphi_n(x),$$

где c_1, \dots, c_n — произвольные константы.

2.1.12 Вид общего решения неоднородного линейного уравнения

Рассмотрим неоднородное линейное уравнение

$$(1) \quad y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_m(x)y = f(x); \quad a \leq x \leq b$$

или

$$l(y) = f(x)$$

и соответствующее ему однородное линейное уравнение

$$(2) \quad l(y) = 0$$

Теорема (вид общего решения неоднородного линейного уравнения)

Пусть $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — ФСР (2) и $y_h(x)$ — частное решение (1). Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$y = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) + y_h(x),$$

где c_1, \dots, c_n — произвольные константы.

В $y_h(x)$ вместо **h** должна стоять буква **ч**, но латех этого сделать не позволяет.

2.2 Алгоритм метод вариации нахождения частного решения

Метод вариации произвольных постоянных нахождения $y_h(x)$

По теореме о виде общего решения линейного однородного уравнения $y_0 = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x)$ — общее решение уравнения $l(y) = 0$.

Будем искать частное решение $y_h(x)$ в виде:

$$y_h(x) = c_1(x)\varphi_1(x) + \dots + c_n(x)\varphi_n(x),$$

где $c_1(x), \dots, c_n(x)$ — пока неизвестные функции.

Рассмотрим систему уравнений

$$(5) \quad \begin{cases} c_1'(x)\varphi_1(x) + \dots + c_n'(x)\varphi_n(x) = 0 \\ c_1'(x)\varphi_1'(x) + \dots + c_n'(x)\varphi_n'(x) = 0 \\ c_1'(x)\varphi_1''(x) + \dots + c_n'(x)\varphi_n''(x) = 0 \\ \dots \\ c_1'(x)\varphi_1^{(n-2)}(x) + \dots + c_n'(x)\varphi_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ c_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases}$$

Пусть $a \leq x \leq b$, x — фиксированное \Rightarrow (5) — линейная алгебраическая система относительно $c_i'(x)$, $i = \overline{1, n}$

Определитель системы = $\mathbf{W}(x) \Rightarrow \mathbf{W}(x) \neq 0 \Rightarrow$ по теореме из алгебры (5) имеет единственное решение.

По формулам Крамера:

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \dots \\ \dots \\ f & \dots \end{vmatrix}}{\mathbf{W}} = \frac{\mathbf{W}_1(x)}{\mathbf{W}(x)}$$

...

$$(6) \quad c'_n(x) = \frac{\begin{vmatrix} \dots & 0 \\ \dots & \\ \dots & f \end{vmatrix}}{\mathbf{W}} = \frac{\mathbf{W}_n(x)}{\mathbf{W}(x)}$$

Таким образом, $c'_i(x) \quad i = \overline{1, n}$ находится по формуле (6) \Rightarrow

$$\Rightarrow \quad c_k(x) = \int \frac{\mathbf{W}_k(x)}{\mathbf{W}(x)} dx$$

2.3 Обоснование метода вариации

Рассмотрим частный случай $n = 2$:

$$(1) \quad y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$$

$$(2) \quad y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$$

— ФСР (2)

$$y_0 = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$$

$$y_h = c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x)$$

$$(5) \quad \begin{cases} c'_1(x)\varphi_1(x) + c'_2(x)\varphi_2(x) = 0 \\ c'_1(x)\varphi'_1(x) + c'_2(x)\varphi'_2(x) = f(x) \end{cases}$$

$$c_1(x) = \int \frac{\mathbf{W}_1(x)}{\mathbf{W}(x)} dx \quad c_2(x) = \int \frac{\mathbf{W}_2(x)}{\mathbf{W}(x)} dx$$

Подставляем $c_1(x)$ и $c_2(x)$ в (4) \Rightarrow

Покажем, что полученное y_h является решением (1):

$$y'_h = c'_1(x)\varphi_1(x) + c_1(x)\varphi'_1(x) + c'_2(x)\varphi_2(x) + c_2(x)\varphi'_2(x) = c_1(x)\varphi'_1(x) + c_2(x)\varphi'_2(x)$$

$$y''_h = c'_1(x)\varphi'_1(x) + c_1\varphi''_1(x) + c'_2(x)\varphi'_2(x) + c_2(x)\varphi''_2(x) = f(x) + c_1(x)\varphi''_1(x) + c_2(x)\varphi''_2(x) = y''_h \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & f(x) + c_1(x)\varphi''_1(x) + c_2(x)\varphi''_2(x) + a_1(x)(c_1(x)\varphi'_1(x) + c_2(x)\varphi'_2(x)) + a_2(x)(c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x)) = \\ & = f(x) + c_1(x)(\varphi''_1(x) + a_1(x)\varphi'_1(x) + a_2(x)\varphi_1(x)) + a_2(x)(\varphi''_2(x) + a_1(x)\varphi'_2(x) + a_2(x)\varphi_2(x)) = f(x) \end{aligned}$$

То есть

$$l(y_h) \equiv f(x)$$

2.4 Пример: $y'' + \omega^2 y = f(x)$

Пример:

Дано:

$$(1) y'' + \omega^2 y = f(x); a \leq x \leq b$$

$$\omega > 0$$

Решение:

1. Решим соответствующее ОУ:

$$(2) y'' + \omega^2 y = 0$$

Рассмотрим $y_1(x) = \cos \omega x$

$$y_1'(x) = -\omega \sin \omega x$$

$$y_1''(x) = -\omega^2 \cos \omega x \Rightarrow \text{решение (2)}$$

$y_2 = \sin \omega x$ — тоже решение

Рассмотрим W y_1 и y_2 :

$$W(y) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \omega x & \sin \omega x \\ -\omega \sin \omega x & \omega \cos \omega x \end{vmatrix} = \omega (\cos^2 \omega x + \sin^2 \omega x) = \omega \Rightarrow$$

$\Rightarrow y_1$ и y_2 образуют ФСП \Rightarrow по Т.5 общее решение (2) имеет вид

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$$

2. Будем искать частное решение уравнения (1) методом вариации:

$$y_2(x) = C_1(x) \cos \omega x + C_2(x) \sin \omega x$$

Согласно алгоритму метода вариации решаем С.О.Д

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos \omega x + C_2'(x) \sin \omega x = 0 \\ C_1'(x)(-\omega \sin \omega x) + C_2'(x)(\omega \cos \omega x) = f(x) \end{cases} \quad \text{— определим } C = \Delta = W = \omega$$

По формулам Крамера:

$$C_1'(x) = \frac{1}{\omega} \begin{vmatrix} 0 & \sin \omega x \\ f(x) & \omega \cos \omega x \end{vmatrix} = -\frac{1}{\omega} f(x) \sin \omega x$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{\omega} \begin{vmatrix} \cos \omega x & 0 \\ \omega \sin \omega x & f(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{\omega} f(x) \cos \omega x$$

Зададимся $x_0 \in [a, b]$, возьмем в качестве C_1 :

$$C_1(x) = -\frac{1}{\omega} \int_{x_0}^x f(t) \sin \omega t dt$$

Аналогично:

$$C_2(x) = \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^x f(t) \cos \omega t dt$$

Получим:

$$\begin{aligned} y_u &= \left(-\frac{1}{\omega} \int_{x_0}^x f(t) \sin \omega t dt \right) \cos \omega x + \left(\frac{1}{\omega} \int_{x_0}^x f(t) \cos \omega t dt \right) \sin \omega x = \\ &= \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^x \left[-\sin \omega t \cos \omega x + \cos \omega t \sin \omega x \right] f(t) dt = \\ &= \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^x f(t) \sin \omega(x-t) dt \end{aligned}$$

3. По теореме 6 общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x + \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^x f(t) \sin \omega(x-t) dt$$

2.5 Формула Остроградского-Луивилля

Пусть $y_1(x), \dots, y_n(x)$ — решение однородного линейного уравнения: $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$ $a \leq x \leq b$.

Рассмотрим определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = \sum (\pm) y_{j_1}^{(k_1)}(x) y_{j_2}^{(k_2)}(x) \dots y_{j_n}^{(k_n)}(x)$$

Сама формула

Пусть x_0 произвольная точка из $[a, b]$. Тогда:

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x a_1(t) dt}$$

2.6 Метод Эйлера (случай простых корней)

$$(1) \quad a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0,$$

где a_0, \dots, a_n — заданные числа.

Метод Эйлера решения однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами (случай простых корней)

1. Ищем частное решение уравнения (1) в виде

$$y(x) = e^{\lambda x},$$

λ — число.

2. Вычисляем формулы

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lambda e^{\lambda x} \\ y''(x) &= \lambda^2 e^{\lambda x} \\ &\dots \\ y^{(n)}(x) &= \lambda^n e^{\lambda x} \end{aligned}$$

3. Подставляем эти формулы в (1):

$$\begin{aligned} a_0 \lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + a_n e^{\lambda x} &\equiv 0 \\ e^{\lambda x} (a_0 \lambda^n + \dots + a_n) &\equiv 0 \end{aligned}$$

4. так как $e^{\lambda x} \neq 0$, то

$$y = e^{\lambda x} \quad \text{---}$$

является решением уравнения (1) \Leftrightarrow λ является корнем алгебраического уравнения:

$$(2) \quad a_0 \lambda^n + \dots + a_n = 0$$

5. (2) имеет n простых корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n \Rightarrow$ функции $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$ — решение (1).

6. Поажем, что $e^{\lambda_k x} \big|_{k=1}^n$ — ФСР (1)

Рассмотрим определитель Вронского \mathbf{W}

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(x) &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{(n-1)} e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n^{(n-1)} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \dots e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{(n-1)} & \dots & \lambda_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \\ &= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \dots e^{\lambda_n x} \prod (\lambda_j - \lambda_k) \neq 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$e^{\lambda_k x} \big|_{k=1}^n$ — ФСР уравнения (1) \Rightarrow общее решение (1) имеет вид:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

3 Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

3.1 Интегрирование с помощью частного решения

$$(1) \quad y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$$

1. Предположим, что $g(x)$ — частное решение уравнения (1).

Тогда переходим к новой неизвестной функции $u(x)$ по формуле:

$$y(x) = u(x)g(x)$$

$$y' = u'g + ug'$$

$$(*) y'' = u''g + u'g' + u'g' + ug'' = u''g + 2u'g' + ug''$$

2. Подставляем (*) в (1):

$$u''g + 2u'g' + ug'' + a_1(u'g + ug') + a_2ug = 0$$

$$u''g + (2g' + a_1g + a_1g')u' + (g'' + a_1g' + a_2g)u = 0$$

$$(2) \quad g(x)u'' + b(x)u' = 0$$

3. Замена $v(x) = u'(x)$. Тогда:

$$(3) \quad g(x)v' + bv = 0$$

4. Решаем (3):

$$v(x) = c_1\varphi_1(x) \quad \text{---}$$

Общее решение (3).

5. Возвращаем замену:

$$u = c_1 \int \varphi(x)dx + c_2 = c_1\Phi(x) + c_2$$

6. Возвращаем замену:

Получим:

$$y = c_1\Phi(x)g(x) + c_2g(x) \quad \text{---}$$

Общее решение уравнения (1).

3.2 Упрощение с помощью замены функции $y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{1}{4x^2})y = 0$

$$y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{1}{4x^2})y = 0$$

Пусть $y(x) = u(x)z(x)$. Тогда находим $u(x)$ как решение уравнения

$$2u' + \frac{1}{x}$$

$$u' = -\frac{1}{2x}u$$

$$\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x}; \quad \ln|u| = -\frac{1}{2} \ln|x| \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}z(x); \quad u(x) = x^{-\frac{1}{2}}$$

Наше исходное уравнение примет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}z'' + (\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{x}(\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}} + (1 + \frac{1}{\sqrt{x}})\frac{1}{\sqrt{x}})z = 0$$

$$z'' + \frac{1}{\sqrt{x}}z = 0$$

$$z'' + z = 0$$

Ответ $y = c_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + c_2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

3.3 Упрощение с помощью замены переменной $y'' + \frac{1}{2x}y' - \frac{1}{x}y = 0$

$$y'' + \frac{1}{2x}y' - \frac{1}{x}y = 0 \quad x \in (0, \infty)$$

Делаем замену $x = \varphi(t)$, $t = \psi(x)$.

Выбираем ψ как решение уравнения $\psi' z'' + a_2(x)z = 0$:

$$\psi''(x) + a_1(x)\psi'(x) = 0$$

Обозначим $v(x) = \psi'(x)$. Тогда:

$$v' + \frac{1}{2x}v = 0$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{2x} + c$$

$$\ln|v| = -\frac{1}{2} \ln|x| + c$$

$$v = x^{-\frac{1}{2}}$$

Возвращаем замену:

$$\psi'(x) = x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\psi(x) = 2\sqrt{x}$$

Возвращаем замену:

$$t = 2\sqrt{x}$$

$$x = \frac{t^2}{4}, \quad 0 < t < \infty$$

Исходное уравнение переходит в уравнение:

$$(\psi')^2(x)z'' - \frac{1}{x}z = 0$$

$$\frac{1}{x}z'' - \frac{1}{x}z = 0$$

$$z'' - z = 0$$

— линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

Решаем методом Эйлера

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -1$$

$$\begin{cases} z_1 = e^{\lambda_1 t} = e^t \\ z_2 = e^{\lambda_2 t} = e^{-t} \end{cases}$$

$$z = c_1^t + c_2 e^{-t}$$

$$y(*) = y\left(\frac{t^2}{4}\right) = z(t) = z(2\sqrt{x}) = y(x)$$

$$\text{Ответ: } y = c_1 e^{2\sqrt{x}} + c_2 e^{-2\sqrt{x}}.$$

3.4 Метод степенных рядов $y'' - xy = 0$

Рассмотрим уравнение:

$$y'' - xy = 0$$

Метод степенных рядов:

$$(1) \quad y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

Теорема

Предположим, что $a_1(x), a_2(x), f(x)$ — раскладываются в степенной ряд на $[a, b]$. Тогда любое решение уравнения (1) раскладывается в степенной ряд на $[a, b]$.

Пример

$$(1) y'' - xy = 0, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$(2) y(0) = c_1, y'(0) = c_2$$

Решаем задачу Коши 1-2 методом степенных рядов:
Ищем решение в виде:

$$(*) \begin{cases} y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots; \\ y'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n \\ y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k \end{cases}$$

$$y(0)_{(*)} = a_0 = c_1$$

$$y'(0)_{(*)} = a_1 = c_2$$

Подставим (*) в (1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - x \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k \equiv 0;$$

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{k=1}^{\infty} a_{n-1}x^n \equiv 0;$$

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}]x^n \equiv 0 = 0 + 0x + 0x^2 + \dots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a_2 = 0; \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1} = 0; \quad n = 1, 2, \dots$$

Таким образом,

$$(3) \quad a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Пусть $k = n - 1$. Тогда (3) = (4):

$$(4) a_{k+3} = \frac{a_k}{(k+3)(k+2)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Из (4)

$$a_2 = 0, a_5 = 0, a_8 = 0, \dots$$

$$a_0 = c_1, a_3 = \frac{c_1}{3 * 2}, a_6 = \frac{a_3}{6 * 5}, \dots, a_{3k} = \frac{c_1}{2 * 3 * 5 * 6 * \dots * (3k-1)3k}; k = 0, 1, \dots$$

$$a_1 = c_2, a_4 = \frac{a_1}{3 * 4} = \frac{c_2}{3 * 4}, a_7 = \frac{a_4}{6 * 7}, \dots, a_{3k+1} = \frac{c_2}{3 * 4 * 6 * 7 * \dots * (3k)(3k+1)}$$

Имеем:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k} x^{3k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k+1} x^{3k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k+2} x^{3k+2} =$$

$$= c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{2 * 3 * 5 * 6 * \dots * (3k-1)3k} + c_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k+1}}{3 * 4 * 6 * 7 * \dots * (3k)(3k+1)} =$$

$$= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

— ФСР для (1)

3.5 Алгоритм решения простейшей краевой задачи

Простейшая краевая задача имеет вид:

$$1-2 \begin{cases} y'' + q(x) = f(x), & a \leq x \leq b \\ y(a) = 0, y(b) = 0 \end{cases}$$

Алгоритм решения краевой задачи 1-2

1. Решаем соответствующее однородное уравнение:

$$(3) \quad y'' + q(x)y = 0$$

Находим его ФСР. Пусть $y_1(x), y_2(x)$ — ФСР.

2. Находим $y_h(x)$ — частное решение уравнения (1) методом вариации

3. Получаем общее решение (1)

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_h(x)$$

4. Подставляем формулу из пункта 3 в краевые условия:

$$(4) \begin{cases} c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) + y_h(a) = 0 \\ c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b) + y_h(b) = 0 \end{cases}$$

Смотрим на (4), как на линейную однородную систему относительно c_1 и c_2 .

5. Вычисляем определитель этой системы

$$\delta = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix}$$

6. Если $\delta \neq 0$, то (4) имеет единственное решение, находим и обозначим его:

$$c_1^0, \quad c_2^0$$

В этом случае функция $y(x) = c_1^0 y_1(x) + c_2^0 y_2(x) + y_h$ — является единственным решением краевой задачи.

7. Пусть $\delta = 0$. Тогда возможны подслучаи:

- (а) (4) имеет бесконечно много решений, следовательно, задача 1-2 имеет также бесконечно много решений.
- (б) (4) не имеет ни одного решения, следовательно, задача 1-2 тоже не имеет решения.

3.6 Существование решения краевой задачи:

Рассмотри простейшую краевую задачу:

$$1 - 2 \begin{cases} y'' + q(x)y = f(x), & a \leq x \leq b \\ y(a) = 0, y(b) = 0 \end{cases}$$

Если соответствующая однородная задача:

$$(3) \begin{cases} y'' + q(x)y = 0, & a \leq x \leq b \\ y(a) = 0, y(b) = 0 \end{cases}$$

имеет только нулевое решение, то исходная задача 1-2 имеет единственное решение $\forall f(x)$.

Доказательство:

Предположим, что (3) имеет только нулевое решение.

Повторим предыдущий алгоритм к (3):

Пусть $y_1(x), y_2(x), y_h(x)$ — ФСР однородного уравнения.

$$y_h(x) \equiv 0, y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

Подставляем в краевые условия:

$$(4) \begin{cases} c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) = 0, & a \leq x \leq b \\ c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b) = 0 \end{cases}$$

Вычисляем δ системы (4):

Если $\delta = 0$, то однородная система (4) всегда имеет бесконечно много решений \Rightarrow существует ненулевое решение (3) \Rightarrow противоречие $\Rightarrow \delta \neq 0 \Rightarrow$ решение 1-2 можно найти и оно будет единственным.

4 Линейные системы

4.1 Определения

4.1.1 Нормальная линейная система, её векторная запись

Нормальная неоднородная линейная система

Нормальная неоднородная линейная система имеет вид:

$$(1) \begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x); \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x); \\ \dots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x); \end{cases},$$

где x — неизвестные переменные $a \leq x \leq b$, $a_{ij}(x), f_i(x)$ — заданные непрерывные функции, y_i — неизвестные функции.

Векторная запись нормальной неоднородной линейной системы
Обозначим

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

— вектор-функция

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

— вектор-функция

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

— матрица-функция

По определению:

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \dots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}$$

$$A(x)Y(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x)y_1 + \dots + a_{1n}(x)y_n \\ \dots \\ a_{n1}(x)y_1 + \dots + a_{nn}(x)y_n \end{pmatrix}$$

$A(x)Y(x) + F(x)$ — вектор соответствующий правой части (1). Тогда

$$Y' = A(x)Y + F(X)$$

— векторная запись (1).

Определение нормальной однородной линейной системы

Линейная система (1) называется однородной, если $\forall f_n(x) = 0 \quad i = \overline{1, n}$

$$(2) \quad Y' = A(x)Y$$

или

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n; \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n; \\ \dots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n; \end{cases},$$

где x — неизвестные переменные $a \leq x \leq b$, $a_{ij}(x)$ — заданные непрерывные функции, y_i — неизвестные функции.

4.2 Решение системы

Определение решения нормальной линейной системы

Говорят, что дифференцируемые функции $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ образуют решение системы (1), если при подстановке их в уравнение вместо соответствующих y получается тождество:

$$y_k' = a_{k1}(x)\varphi_1(x) + \dots + a_{kn}(x)\varphi_n(x) + f_k(x); \quad k = \overline{1, n}$$

В векторной форме:

Дифференцируемая функция $\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \dots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}$ является решением (1),

если:

$$\Phi'(x) = A(x)\Phi(x) + F(x)$$

4.3 Задача Коши для системы

$$(1) \begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x); \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x); \\ \dots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x); \end{cases},$$

Определение задачи Коши нормальной линейной системы

Пусть $x_0 \in [a, b]$, y_1^0, \dots, y_n^0 — заданные числа.

Начальными условиями для системы (1) в точке x_0 называются равенства:

$$y_1(x_0) = y_1^0$$

$$y_2(x_0) = y_2^0$$

...

$$y_n(x_0) = y_n^0$$

Задача 1-3 называется задачей Коши для системы (1).

В векторной форме:

$$Y' = A(x)Y(x) + F(x), \quad Y(x_0) = Y^0,$$

где $Y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \dots \\ y_n^0 \end{pmatrix}$

4.4 Линейно зависимые и линейно независимые вектор-функции

Определение линейно зависимых вектор-функций

Пусть $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x) \in R^n$, $a \leq x \leq b$. Эти вектор-функции называются линейно зависимыми на $[a, b]$, если:

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ — числа не все равные } 0 : \alpha_1 \Phi_1(x) + \alpha_n \Phi_n(x) = 0$$

Определение линейно независимых вектор-функций

Пусть $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x) \in R^n$, $a \leq x \leq b$. Эти вектор-функции называются линейно независимыми на $[a, b]$, если:

$$\alpha_1 \Phi_1(x) + \alpha_n \Phi_n(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \alpha_i = 0 \quad i = \overline{1, n}$$

4.5 Определитель Вронского вектор-функций

Определение определителя Вронского вектор-функций

Пусть $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x) \in R^n$ их определителем Вронского называется следующий определитель:

$$W = |\Phi_1(x) \Phi_2(x) \dots \Phi_n(x)|$$

4.6 Фундаментальная система решений линейной системы

Определение фундаментальной системы решений нормальной линейной системы

Рассмотрим (1) $Y' = A(x)Y(x)$, $a \leq x \leq b$, $Y(x) \in R^n$ $A(x)$ — размер $n \times n$.

Линейно независимые решения $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)$ называются фундаментальной системой решений.

4.7 Фундаментальная матрица решений однородной системы

Определение фундаментальной матрицы решений нормальной однородной системы

Матрица $T(x) = (Y_1(x)Y_2(x) \dots Y_n(x))$ называется фундаментальной матрицей для однородной системы $Y' = A(X)Y(x)$, $a \leq x \leq b$, если:

$$Y_1(x), \dots, Y_n(x)$$

— ФСР однородной системы.

4.8 Линейные системы с постоянными коэффициентами

Определение однородной линейной системы с постоянными коэффициентами

Линейная однородная система с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n; \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n; \\ \dots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n; \end{cases},$$

a_{ij} — заданные числа.

В векторной записи:

$$Y' = AY$$

— где $A = (a_{ij})_{ij=1}^n$, $Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$