Содержание

1 Мнимум 1

1.1 Глава 1

1.1.1 Билет 1

Определение случайного события:

Пусть Ω — множество элементарных исходов эксперимента. Случайным событием называется любое подмножество множества Ω.

Определение достоверного события:

Достоверным событием называется событие Ω, которому благоприятствует каждый исход эксперимента.

Определение невозможного события:

Невозможным событием называется пустое множество, которому не благоприятствует ни один исход эксперимента.

Определение противоположного события:

Событием, противоположным событию A называется событие $\overline{A}$, которое состоит из исходов, не благоприятствующих A.

1.1.2 Билет 2

Определение σ-алгебры событий:

Сигма алгеброй событий называется множество $\mathcal{F}$ подмножеств $A \subset \Omega$, удовлетворяющее условиям:

1. если $A \in \mathcal{F}$, то $\overline{A} \in \mathcal{F}$;
2. $\Omega \in \mathcal{F}$;
3. если $\{A\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

1.1.3 Билет 3

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра множеств из Ω.

Определение конечно аддитивной вероятностной меры

Конечно аддитивной вероятностной мерой $Q(A)$ называется функция множества $Q : \mathcal{A} \to [0; 1]$, такая, что:

1. $\forall A \in \mathcal{A} \quad Q(A) \geq 0$;

2. $Q(\Omega) = 1$;

3. $\forall A, B \in \mathcal{A}: \quad A \cap B = \varnothing \quad Q(A \cup B) = Q(A) + Q(B) \quad Q\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} Q(A_i)$.

Определение счётно аддитивной вероятностной меры:

Счётно аддитивно вероятностной мерой $P(A)$ называется функция множества $P : \mathcal{F} \to [0; 1]$, такая, что:

1. $\forall A \in \mathcal{F} \quad P(A) \geq 0$;

2. $P(\Omega) = 1$;

3. $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}: \quad \forall i \neq j \quad A_i \bigcap A_j = \varnothing \quad P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

1.1.4 Билет 4:

Свойства вероятности:

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

2. Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$ и $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

3. **Теория сложения вероятностей:**

   Пусть A и B некоторые события, $A, B \in \mathcal{F}$. Тогда

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

4. **Непрерывность вероятностной меры:**

   Пусть $\{A\}_{i=1}^{\infty}$ — монотонный класс событий, то есть

   1) $A_i \subset A_{i+1}$ или 2) $A_i \supset A_{i+1}$. Тогда

   $$P(\lim_{n\to\infty}(A_n)) = \lim_{n\to\infty}(A_n)$$

1.1.5 Билет 5

Определение классической вероятности:

$P(A) = \frac{k}{n}$, где k — количество благоприятных A исходов, n — количество всех возможных исходов эксперимента.

1.1.6 Билет 6

Определение условной вероятности:

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство и $A, B \in \mathcal{F}, \quad P(B) > 0$. Условной вероятностью события A при условии, что наступило событие B называется число:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ — полная группа несовменстных событий.

Назовём события A_i гипотезами, а $P(A_i)$ назовём априорные вероятности гипотез.

Теорема (формула полной вероятности):

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство и $\{A_i\}_i^{\infty} \in \mathcal{F}$ — полная группа попарно несовметных событий; $P(A_i) > 0$, пусть $A \in \mathcal{F}$ — неполное событие и $P(A|A_i) \geq 0$. Тогда

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) * P(A|A_i)$$

Теорема (формула Байеса):

Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ — полная группа попарно несовместимых событий, и пусть для некоторого $P(A) > 0$. Тогда

$$\forall i = \overline{1, \infty} \ \ P(A_i|A) = \frac{P(A_i) \cdot P(A|A_i)}{P(A)},$$

1.1.7 Билет 7

Определение независимости событий:

Случайные события A и B называются независимыми, если

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

1.1.8 Билет 8

Определение (критерий независимости событий):

Пусть A и B такие, что $P(B) > 0$. Тогда случайные события A и B независимы $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$

Теорема (о независимости противоположных событий):

Пусть A и B — независимы. Тогда события A и $\overline{B}$; $\overline{A}$ и B; $\overline{A}$ и $\overline{B}$ — попарно независимы.

1.2 Глава 2

1.2.1 Билет 1

Множество A называется элементарным, если оно представимо в виде суммы прямоугольников хотя бы 1 способом:

$$A = \bigcup P_k,$$

где P_k — покрытие.

Мерой элементарного множества A называется

$$m^{'}(A) = \sum m(P_k),$$

где P_k — разбиение A.

Определение верхней меры Лебега:

Верхней мерой Лебега называется

$$\mu^*(A) = \inf_{\{P_k\}} \sum_m (P_k)$$

Определение нижней меры Лебега:

Рассмотрим множество $E \backslash A$. $\quad (m(E) = 1)$.

Нижней мерой Лебега называется

$$\mu_*(A) = 1 - \mu^*(E \setminus A)$$

Определение измеримого по Лебегу множества и меры Лебега:

Говорят, что множество A измеримо по Лебегу, если:

$$\mu^*(A) = \mu_*(A) = \mu(A)$$

Величина $\mu(A)$ — мера Лебега множества A.

1.2.2 Билет 2

Определение измеримой функции:

Пусть X и Y — некоторые множества и пусть S_x и S_y — классы подмножества. $f : X \to Y$ — некоторая функция.

Функция $f : X \to Y$ называется (S_x, S_y) — измеримой, если:

$$\forall B \in S_y \quad \exists f^{-1}(B) \in S_x$$

Определение измеримой действительной функции:

Действительная функция $f(x)$ с областью определения $X \subset R$ называется μ-измеримой или S_μ-измеримой, если для любого борелевского множества $b \in \beta(R) \quad f^{-1}(b) \in S_\mu$.

1.2.3 Билет 3

Определение (критерий измеримости действительных функций):

Действительная функция $f(x)$ измерима $\Leftrightarrow$

$$\forall C \in R \quad f^{-1}(b) = f^{-1}(-\infty, C) \text{ — измерима}$$
$$\text{или}$$
$$\{x : f(x) < C\}$$

1.2.4 Билет 4

Определение случайной величины:

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство. Случайной величиной называется вещественно значная функция ξ такая, что

$$\xi : \Omega \to R \quad \forall x \in R \quad \{w : \xi(w) < x\} \in \mathcal{F}$$

1.2.5 Билет 5

Определение функции распределения:

Функцией распределения вероятностей случайной величины ξ называется функция $F_\xi(x) = P\{w : \xi(w) < x\}$

Свойства функции распределения:

1. $0 \leq F_\xi(x) \leq 1 \quad \forall x \in R$;
2. $F_\xi(x)$ — неубывающая, непрерывная слева функция;
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$
   $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$;
4. $P\{a \leq \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$;
5. $P\{\xi = x_0\} = F_\xi(x_0 + 0) - F_\xi(x_0)$.

1.2.6 Билет 6

Определение функции плотности распределения:

Функцией плотности распределения вероятностей случайной величины ξ называется функция $f_\xi(x)$ такая, что:

1. $\forall x \in R \quad f_\xi(x) \geq 0$;
2. $F'_\xi(x) = f_\xi(x)$;
3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = 1$;
4. $P\{a \leq \xi \leq b\} = \int\limits_{b}^{a} f_\xi(x)dx$.

1.2.7 Билет 7

Определение случайных независимых велечин:

Случайные велечины ξ и μ называются независимыми, если:

$$\forall x, y \in R \quad P\{w : \xi(w) < x; \mu(w) < y\} = P\{w : \xi(w) < x\} \cdot P\{w : \mu(w) < y\}$$

2 Минимум 2

2.1 Билет 1

Определение случайной величины:

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство. Случайной величиной называется вещественно значная функция ξ такая, что

$$\xi : \Omega \to R \quad \forall x \in R \quad \{w : \xi(w) < x\} \in \mathcal{F}$$

2.2 Билет 2

Определение функции распределения:

Функцией распределения вероятностей случайной величины ξ называется функция $F_\xi(x) = P\{w : \xi(w) < x\}$

Свойства функции распределения:

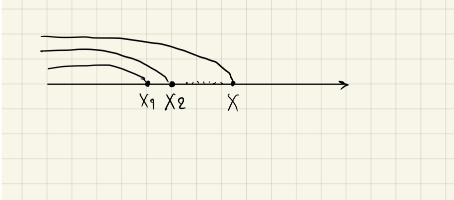
1. $0 \leq F_\xi(x) \leq 1 \quad \forall x \in R$;
2. $F_\xi(x)$ — неубывающая, непрерывная слева функция;
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$
   $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$;
4. $P\{a \leq \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$;
5. $P\{\xi = x_0\} = F_\xi(x_0 + 0) - F_\xi(x_0)$.

2.3 Билет 3

Доказательство непрерывности слева функции распределения

Требуется показать, что для возрастающей последовательности $\{x_n\}$, такой что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, последовательность $\{F(x_n)\}$ при $n \to \infty$ стремится к $F(x)$ или $\lim\limits_{n \to \infty} F(x_n) = F(x)$.

Рассмотрим последовательность событий $A_n = \{w : \xi(w) < x_n\}$



Для неё верно:

$$\forall n \quad A_n \subset A_{n+1} \quad (x_n < x_{n+1})$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A = \{w : \xi(w) < x_n\}$$

То есть последовательность $\{A_n\}$ удовлетворяет свойству непрерывности вероятностной меры $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A)$.

Тогда можем записать

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} P\{\xi \in (-\infty, x_n)\} = \lim_{n\to\infty} P\{\xi \in (-\infty, x)\} = F(x).$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x).$$

2.4 Билет 4

Доказательство неубывания функции распределения:

По определению требуется показать, что:

$$\forall x_1 < x_2 \quad F(x_1) \le F(x_2)$$

Пусть

$$(-\infty, x_2) = (-\infty, x_1) \cup [x_1, x_2]$$

Тогда

$$F(x_2) = P\{\xi \in (-\infty, x_2)\} = P\{\xi \in (-\infty, x_1) \cup \xi \in [x_1, x_2)\} = P\{\xi \in (-\infty, x_1)\} + P\{\xi$$

Учитывая, что $P\{\xi \in (-\infty, x_1)\} \ge 0$ и $P\{\xi \in [x_1, x_2]\} \ge 0$, получим

$$P\{\xi \in (-\infty, x_1)\} + P\{\xi \in [x_1, x_2]\} \ge P\{\xi \in (-\infty, x_1)\} = F(x_1)$$

То есть

$$\forall x_1 < x_2 \quad F(x_1) \leq F(x_2)$$

2.5 Билет 5

Определение функции плотности распределения:

Функцией плотности распределения вероятностей случайной величины ξ называется функция $f_\xi(x)$ такая, что:

1. $\forall x \in R \quad f_\xi(x) \geq 0$;
2. $F'_\xi(x) = f_\xi(x)$ почти всюду;
3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = 1$;
4. $P\{a \leq \xi < b\} = \int\limits_{b}^{a} f_\xi(x)dx$.

2.6 Билет 6

Определение случайных независимых велечин:

Случайные велечины ξ и μ называются независимыми, если:

$$\forall x, y \in R \quad P\{w : \xi(w) < x; \mu(w) < y\} = P\{w : \xi(w) < x\} \cdot P\{w : \mu(w) < y\}$$

2.7 Билет 7

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство и пусть ξ — случайная величина на нём.

$$\xi = \xi(w) \quad P = P(w)$$

Определение математического ожидания:

Математическим ожиданием случайной величины ξ называется

$$M\xi = \int\limits_{\Omega} \xi(w) dP(w)$$

Пусть для ξ построена функция распределения $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$.
Тогда

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x dF_\xi(x)$$

Для дискретной случайной величины математическое ожидание находится по формуле:

$$M\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

Для абсолютно непрерывной величины:

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx$$

Свойствай математического ожидания:

1. $Mc = c$, c — const;
2. $Mc\xi = cM\xi$;
3. $M(\xi \pm \eta) = M\xi \pm M\eta$;
4. Если ξ и η независимы, то

$$M\xi\eta = M\xi M\eta;$$

5. Если $\xi \geq 0 \quad (P\{\xi \geq 0\} = 1)$, то $M\xi \geq 0$;
6. Неравенство Коши-Буняковского:

$$M|\xi\eta| \leq M|\xi| M|\eta|;$$

7. Неравенство Чебышёва:

   Пусть ξ — некоторая неотрицательная величина, а $g(x)$, неубывающая на множестве значений ξ, непрерывная фунцикция. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{\xi \geq \varepsilon\} \leq \frac{Mg(\xi)}{\varepsilon};$$

Определение дисперсии случайной величины:
Пусть ξ — случайная величина и $|M\xi| < +\infty$.

Дисперсией случайной величины ξ называется число

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2$$

Свойства дисперсии:

1. $D\xi \geq 0$;
2. $Dc = 0$;
3. $Dc\xi = c^2 D\xi$;
4. Если случайные величины ξ и η независимы, то
$$D(\xi \pm \eta) = D\xi \pm D\eta;$$
5. $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$;
6. Для произвольных случайных величин ξ и η с $M|\xi| < +\infty$ и $M|\eta| < +\infty$ верно
$$D(\xi \pm \eta) = D\xi \pm D\eta \pm \text{cov}(\xi, \eta),$$
где $\text{cov}(\xi, \eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)$ — ковариация.

2.8 Билет 8

Определение дискретной случайной величины:
Дискретной случайной величиной называется случайная величина, множество значений которой конечно или счётно, то есть

$$\xi \in \{x_1, x_2, \dots\}$$

2.9 Билет 9

Распределение Бернулли ($\xi \sim Bern(p)$).

Используемые обозначения:

1. A — «успех»;
2. $\overline{A}$ — «неуспех»;

3. $\xi = 1$, если A, в противном случае $\xi = 0$;
4. p — вероятность наступления A;
5. q — вероятность наступления $\overline{A}$.

Закон распределения:

$$P\{\xi = k\} = p^k q^{n-k},$$

где $k = 0,\ 1$.

Математическое ожидание случайной величины ξ:

$$M\xi = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

Математическое ожидание случайной величины ξ^2:

$$M\xi^2 = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

Дисперсия:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

2.10 Билет 10

Биномиальное распределение $(\xi \sim Bin(n;p))$**.**

Используемые обозначения:

1. A — «успех»;
2. $\overline{A}$ — «неуспех»;
3. $\xi = 1$, если A, в противном случае $\xi = 0$;
4. p — вероятность наступления A;
5. q — вероятность наступления $\overline{A}$.

Закон распределения:

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $k = 0, 1, \ldots, n$.

Представление случайной величины ξ:

Случайная велична ξ может быть представлена в виде суммы случайных величин $\xi_i \sim Bern(p)$, каждая из которых выражает результа i-го испытания.

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n.$$

Математическое ожидание случайной величины ξ:

$$M\xi = M(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n) = M(\xi_1)+M(\xi_2)+\cdots+M(\xi_n) = p+p+\cdots+p = np.$$

Дисперсия случайной величины ξ:

$$D\xi = D(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n) = D(\xi_1)+D(\xi_2)+\cdots+D(\xi_n) = pq+pq+\cdots+pq = npq.$$

Схема Бернулли:

Эксперимент, удовлетворяющий следующим условиям, называется схемой испытаний Бернулли:

1. Случайная величина ξ — количество успехов в n независимых одинаковых испытаниях;

2. Одинаковые: $P\{\xi_i = 1\} = p(i) \simeq p$ (практически не зависящие от номера испытания);

3. Случайные величины $\xi_i \sim Bern(p)$ независимы:

$$P\{\xi_i = 1 \cap \xi_j = 1\} = P\{\xi_i = 1\}P\{\xi_j = 1\} \quad \forall i \neq j.$$

2.11 Билет 11

Докажем, что $P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Пусть $\Omega = \{\overline{w} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\}$, где $\xi_i \sim Bern(p); \quad \xi_i \in 0, 1$, то есть $\overline{w}$ — последовательность n нулей или единиц — результатов испытаний Бернулли.

Событие $\{\xi = k\} = \{\overline{w} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) : \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n = k\}$ состоит из $\overline{w}$ — векторов, состоящих из k — единиц и (n - k) — нулей.

Пусть $\overline{w^*} = (1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots, 0)$ — фиксированный исход, в котором количество единиц = k, а нулей = n - k.

Найдём верояность этого исхода.

$$p^* = P\{\xi_1 = 1; \ldots; \xi_k = 1; \xi_{k+1} = 0; \ldots; \xi_n = 0\} =$$
$$= P\{\xi_1 = 1\} \cdot \cdots \cdot P\{\xi_k = 1\} \cdot P\{\xi_{k+1} = 0\} \cdot \cdots \cdot P\{\xi_n = 0\} = p^k q^{n-k}$$

Здесь воспользовались незвисимостью испытаний и тем, что испытания предполагаются одинаковыми, то есть $p(n) = p$ вероятность «успеха» не зависит от номера шага.

Заметим, что в остальных $\overline{w} \in A$ также k единиц и (n - k) нулей, а значит у каждого $\overline{w} \in A$ вероятность $p^k q^{n-k}$.

Определим количество исходов в А. Оно будет равно количеству способов выбрать k-й мест из n для того, чтобы поставить на них 1. Остальные позиции среди n мест заполняются нулями.

Отсюда делаем вывод, что количество равно C_n^k.

Следовательно,

$$P\{\xi = k\} = P\{\overline{w} : \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n = k\} = \sum_{\overline{w} \in A} P\{\overline{w}\} = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

2.12 Билет 12

Определение абсолютно непрерывной случайной величины:

Случайная величина ξ называется абсолютно непрерывной, если существует такая неотрицательная функция $f(x)$, что

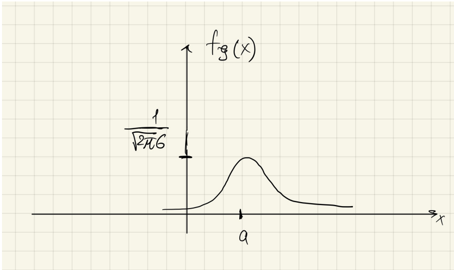
$$\forall x \in R \quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

2.13 Билет 13

Нормальное распределение $\xi \sim N(a, \sigma^2)$.

Функция плотности случайной величины $\xi \sim N(a, \sigma^2)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$



Функция плотности случайной величины $\xi_0 \sim N(0, 1)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Математическим ожиданием стандарной нормальной случайной величины $\xi_0 \sim N(0, 1)$:

$$M\xi_0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int\limits_{-\infty}^{0} xe^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$$

Математическим ожиданием случайной величины ξ_0^2:

$$M\xi_0^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

Математическим ожиданием случайной величины ξ:

$$M\xi = M(\sigma\xi_0 + a) = a$$

Дисперсия случайной величины $\xi_0 \sim N(0, 1)$:

$$D\xi_0 = M\xi_0^2 - (M\xi_0)^2 = 1 - 0 = 1.$$

Дисперсия случайной величины $\xi \sim N(a, \sigma^2)$:

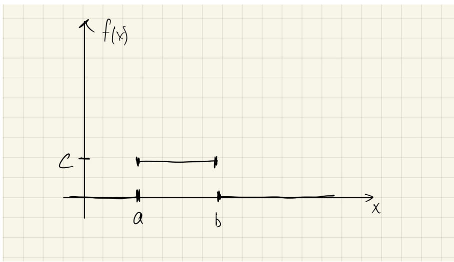
$$D\xi = D(\sigma\xi_0 + a) = \sigma^2.$$

2.14 Билет 14

Равномерное распределение $\xi \sim R[a, b]$.

Функция плотности случайной величины ξ:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b]; \\ 1/(b-a), & x \in [a, b] \end{cases}$$



Математичяеское ожидание случайной величины ξ:

$$M\xi = \int\limits_b^a x\frac{1}{b-a}dx = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}.$$

Математическое ожидание случаной величины ξ^2:

$$M\xi^2 = \int\limits_b^a x^2\frac{1}{b-a}dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}.$$

Дисперсия случайной величины ξ:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{(b+a)^2}{4} - \frac{b^2 + ab + a^2}{3} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

2.15 Билет 15

Определение случайных независимых велечин:

Случайные велечины ξ и μ называются независимыми, если:

$$\forall x, y \in R \quad P\{w : \xi(w) < x; \mu(w) < y\} = P\{w : \xi(w) < x\} \cdot P\{w : \mu(w) < y\}$$

Критерий независимости дискретной случаной величины:

Дискретные случайные величины ξ и η независимы, тогда и только тогда, когда:

$$\forall i \neq j \quad p_{ij} = p_i p_j$$

Критерий независимости абсолютно непрерывной случаной величины:

Абсолютно непрерывные дискретные случайные величины ξ и η независимы, тогда и только тогда, когда:

$$f_{\xi\eta}(x, y) = f_\xi(x) f_\eta(y).$$