Содержание

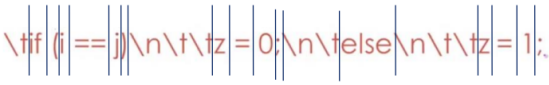
1 Билет 1

Общая структура компиляторов

Лексический анализ

Лексичсекий анализ — деление текста на слова, выделение токенов.

Задача ликсического анализа — выделить лексемы, классифицировать их и передать их на стадию синтаксического анализа.



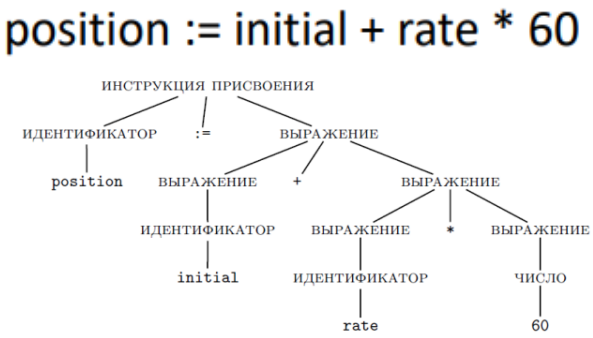
- Оператор
- Пробел
- Идентификатор
- Ключевое слово
- Число
- Спец. символы

```
|     if (i==j)
|         z=0;
|     else
|         z=1;
```

Синтаксический анализ

Синтаксический анализ — определение структуры предложения.

Задача: иерархическая группировка в соответсвии с грамматикой языка программирования.



Семантический анализ

Семантический анализ — устранение неоднозначностей.

- Пример:
  - Петя оставил её задание дома
- Из-за «несоответствия типов» между «её» и «Петя» мы узнаём, что это разные люди.

Оптимизация кода

Оптимизация кода:

1. На естественном языке отимизация не имеет строгих правил и сводится к редактированию;
2. Для программ она предполагает следующее:
   (a) Увеличение скорости работы программы;
   (b) Уменьшение объёма используемой памяти;
   (c) И так далее.

Генерация кода

Генерация кода — трансляция исходного кода на другой язык программирования.

Обычно результатом является ассемблерный код.

Дополнительную информацию смотри на слайдах 1-39 первой половины лекций.

2 Билет 2

3 Билет 3

Определение алфавита

Алфавит — это конечное множество символов.

Опредделение слова в $\sum$

Словом в алфавите $\sum$ называется любая конечная последовательность символов этого алфавита.

Операции над цепочками символов

1. Конкатенация

Опр. Если a и b — цепочки, то цепочка ab (результат приписывания цепочки b в конец цепочки a), называется *конкатенацией* (или *сцеплением*) цепочек a и b. Конкатенацию можно считать двуместной операцией над цепочками: a×b = ab.
Например, если w = *ab* и z = *cd*, то w×z = *abcd*.
Для любой цепочки a : $a\varepsilon = \varepsilon a = a$.
Для любых цепочек a, b, g справедливо свойство ассоциативности операции конкатенации (ab)g = a(bg) = abg.

2. Обращение

- **Опр**. *Обращением* (или *реверсом*) цепочки α называется цепочка, символы которой записаны в обратном порядке.

Обращение цепочки α будем обозначать α^R.
Например, если $\alpha = abcdef$, то $\alpha^R = fedcba$.
Для пустой цепочки: $\varepsilon^R = \varepsilon$.

3. Возведение в степень

- **Опр**. *n*-ой степенью цепочки α (будем обозначать α^n) называется конкатенация *n* цепочек α:
$\alpha^n = \underbrace{\alpha\alpha \ldots \alpha\alpha\alpha}_{n}$.

Свойства степени: $\alpha^0 = \varepsilon$; $\alpha^n = \alpha\alpha^{n-1} = \alpha^{n-1}\alpha$

Дополнительную информацию смотрите на слайдах 40-42 первой презентации.

4 Билет 4

• **Опр.** Обозначим через Σ^* множество, содержащее все цепочки в алфавите Σ, включая пустую цепочку ε.
Например, если $\Sigma = \{0, 1\}$, то $\Sigma^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 11, 01, 10, 000, 001, 011, \ldots\}$.

Формальное определение языка

• **Опр.** *Язык* в алфавите Σ — это подмножество множества всех цепочек в этом алфавите. Для любого языка L справедливо $L \subseteq \Sigma^*$.

Операции над языками

1. Контатенация

• **Опр**. *Конкатенацией* двух языков L_1 и L_2 называется язык
$L_3 = \{\alpha\beta | \ \alpha \in L_1, \ \beta \in L_2\}$.
Обозн.: $L_3 = L_1 L_2$
Пример: {01,111,10} {00, 01} = {0100, 0101, 11100, 11101, 1000, 1001}.

2. Объединение

• **Опр**. *Объединением* двух языков L_1 и L_2 называется язык
$L = L_1 \cup L_2 = \{\alpha | \ \alpha \in L_1 \text{ или } \alpha \in L_2\}$.
Пример: {01, 111, 10}∪{00, 01} = {01, 111, 10, 00}.

3. Степень

• **Опр**. *Степень* языка L:
1. $L^0 = \{\varepsilon\}$
2. $L^1 = L$
3. $L^k = L^{k-1} L$

4. Итерация

- **Опр**. *Итерация* языка L:

$$L^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} L^k \qquad L^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} L^k \qquad L^+ = L^* L$$

$L^* = \{\varepsilon\} \cup L \cup LL \cup LLL \cup \ldots$

Пример: $\{0,10\}^* = \{\varepsilon, 0, 10, 00, 010, 100, 1010, \ldots\}$

5 Билет 5

Способы описания языков

- Конечный язык можно описать простым перечислением его цепочек.
- Как представлять бесконечные языки?
  - спецификация (описание)
  - механизм распознавания
  - механизм порождения (генерации).
- Не каждый формальный язык можно задать с помощью конечного описания.

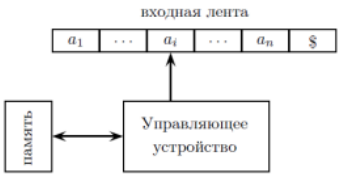
6 Билет 6

- *Спецификация* – Описание языка, как множества слов, удовлетворяющих некоторому условию. (Для регулярных языков – это регулярное выражение_.

7 Билет 7

- Механизм распознавания (*распознаватель*), по сути, является процедурой специального вида, которая по заданной цепочке определяет, принадлежит ли она языку.
- Если принадлежит, то процедура останавливается с ответом «да», т. е. *допускает* цепочку; иначе — останавливается с ответом «нет» или зацикливается.
- *Язык, определяемый распознавателем* — это множество всех цепочек, которые он допускает.

- Механизм, который является процедурой специального вида, которая по заданной цепочке определяет, принадлежит ли она языку.
- Если принадлежит, то процедура останавливается с ответом «да», т. е. *допускает* цепочку; иначе — останавливается с ответом «нет» или зацикливается.
- ***Язык, определяемый распознавателем*** — это множество всех цепочек, которые он допускает.



8 Билет 8

Опр. *Порождающая грамматика* G — это четверка $\langle T, N, P, S \rangle$, где

T — алфавит терминальных символов (терминалов);

N — алфавит нетерминальных символов (нетерминалов), $T \cap N = \varnothing$;

P — конечное подмножество множества $(T \cup N)^+ \times (T \cup N)^*$;

где элемент (α, β) записывается в виде $\alpha \to \beta$ и называется *правилом вывода*;

α называется *левой частью* правила, β — *правой частью* правила.

Левая часть любого правила из P обязана содержать хотя бы один нетерминал;

S — начальный символ грамматики, $S \in N$.

Для записи правил вывода с одинаковыми левыми частями

$$\alpha \to \beta_1 \quad \alpha \to \beta_2 \quad \dots \quad \alpha \to \beta_n$$

используют сокращенную запись $\alpha \to \beta_1 \mid \beta_2 \mid \dots \mid \beta_n$.

Опр. Цепочка $\beta \in (T \cup N)^*$ *непосредственно выводима* из цепочки $\alpha \in (T \cup N)^+$ в грамматике $G = \langle T, N, P, S \rangle$ (обозначается $\alpha \to_G \beta$), если

$$\alpha = \xi_1 \gamma \xi_2, \ \beta = \xi_1 \delta \xi_2,$$

где

$$\xi_1, \xi_2, \delta \in (T \cup N)^*, \ \gamma \in (T \cup N)^+$$

и правило вывода $\gamma \to \delta$ содержится в P.

Опр. Цепочка $\beta \in (T \cup N)^*$ *выводима* из цепочки $\alpha \in (T \cup N)^+$ в грамматике $G = \langle T, N, P, S \rangle$ (обозначается), если существуют цепочки $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ ($n \geq 0$), такие, что

$$\alpha = \gamma_0 \to \gamma_1 \to \ldots \to \gamma_n = \beta.$$

Последовательность$\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ называется *выводом длины n*.
Длину вывода n показывают обозначением:
Вывод за некоторое число шагов (м.б. 0 шагов) обозначается:

Индекс G в обозначении $\Rightarrow_G$ опускают, если понятно, какая грамматика подразумевается.

Опр. ***Языком, порождаемым грамматикой*** $G = \langle T, N, P, S \rangle$, называется множество

$$L(G) = \{\alpha \in T^* \mid S \Rightarrow \alpha\}.$$

Другими словами, $L(G)$ — это все цепочки в алфавите T, которые выводимы из S с помощью правил P.
Например, $L(G_{example}) = \{0^n 1^n \mid n > 0\}$.

Опр. Цепочка $\alpha \in (T \cup N)^*$, для которой $S \Rightarrow \alpha$, называется ***сентенциальной формой*** в грамматике $G = \langle T, N, P, S \rangle$.

Таким образом, ***язык, порождаемый грамматикой***, можно определить как ***множество терминальных сентенциальных форм***.

Дополнительную информацию смотри на слайдах 54-60 первой презентации.

9 Билет 9

Классификация грамматик и языков по Хомскому

- Тип грамматики определяется типом ограничений на вид правил вывода.
- Всего определено четыре типа грамматик:

  тип 0, тип 1, тип 2, тип 3.
- Каждому типу грамматик соответствует свой класс языков.
- Если язык порождается грамматикой типа i (для i = 0, 1, 2, 3), то он является *языком типа i*.

1. Тип 0

Тип 0

Любая порождающая грамматика является грамматикой типа 0.

На вид правил грамматик этого типа не накладывается никаких дополнительных ограничений.

Класс языков типа 0 совпадает с классом рекурсивно перечислимых языков.

2. Тип 1

Классификация грамматик и языков по Хомскому: Тип 1

Опр. Грамматика $G = \langle T, N, P, S \rangle$ называется ***неукорачивающей***, если правая часть каждого правила из P не короче левой части (т. е. для любого правила $\alpha \to \beta \in P$ выполняется неравенство $|\alpha| \le |\beta|$).

В виде исключения в неукорачивающей грамматике допускается наличие правила $S \to \varepsilon$, при условии, что S (начальный символ) не встречается в правых частях правил.

Грамматикой *типа 1* называют неукорачивающую грамматику.

Классификация грамматик и языков по Хомскому: Тип 1

Другое определение:

Опр. Грамматика $G = \langle T, N, P, S \rangle$ называется ***контекстно-зависимой (КЗ)***, если каждое правило из P имеет вид $\alpha \to \beta$,

где $\alpha = \xi_1 A \xi_2$, $\beta = \xi_1 \gamma \xi_2$, $A \in N$, $\gamma \in (T \cup N)^+$, $\xi_1, \xi_2 \in (T \cup N)^*$.

В виде исключения в КЗ-грамматике допускается наличие правила $S \to \varepsilon$, при условии, что S (начальный символ) не встречается в правых частях правил.

Язык, порождаемый контекстно-зависимой грамматикой, называется ***контекстно-зависимым языком***.

3. Тип 2

Классификация грамматик и языков по Хомскому: Тип 2

Опр. Грамматика $G = \langle T, N, P, S \rangle$ называется ***контекстно-свободной*** (*КС*), если каждое правило из P имеет вид $A \to \beta$, где $A \in N$, $\beta \in (T \cup N)^*$.
Заметим, что в КС-грамматиках допускаются правила с пустыми правыми частями. Язык, порождаемый контекстно-свободной грамматикой, называется ***контекстно-свободным*** языком.
Грамматикой ***типа 2*** будем называть контекстно-свободную грамматику.

4. Тип 3

Классификация грамматик и языков по Хомскому: Тип 3

Опр. Грамматика $G = \langle T, N, P, S \rangle$ называется ***праволинейной***, если каждое правило из P имеет вид $A \to wB$ либо $A \to w$, где $A, B \in N$, $w \in T^*$.

Опр. Грамматика $G = \langle T, N, P, S \rangle$ называется ***леволинейной***, если каждое правило из P имеет вид $A \to Bw$ либо $A \to w$, где $A, B \in N$, $w \in T^*$.

Дополнительная информация

Иерархия грамматик Хомского

Утверждение 5. Справедливы следующие утверждения:
1) любая регулярная грамматика является КС-грамматикой;
2) любая неукорачивающая КС-грамматика является КЗ-грамматикой;
3) любая неукорачивающая грамматика является грамматикой типа 0.

Утверждение 5 следует непосредственно из определений.
Рассматривая только неукорачивающие регулярные и неукорачивающие КС-грамматики, получаем следующую иерархию классов грамматик:

Регулярные неукорачивающие $\subset$ *КС неукорачивающие* $\subset$ *КЗ* $\subset$ *Тип 0*

10 Билет 10

Эквивалентность неукорачивающих и КЗ-грамматик

Утверждение 1. Пусть L — формальный язык. Следующие утверждения эквивалентны.

1) существует контекстно-зависимая грамматика G_1, такая что $L = L(G_1)$;

2) существует неукорачивающая грамматика G_2, такая что $L = L(G_2)$.

Док-во. Очевидно, что (1) $\Rightarrow$ (2): любая контекстно-зависимая грамматика удовлетворяет ограничениям неукорачивающей грамматики (см. определения).

Т.к. каждое неукорачивающее правило можно заменить эквивалентной серией контекстно-зависимых правил, следовательно (2) $\Rightarrow$ (1) .

Т.о., язык, порождаемый неукорачивающей грамматикой, - контекстно-зависимый. ■

Т.е., неукорачивающие и КЗ-грамматики определяют один и тот же класс языков.

11 Билет 11

Опр. Грамматика $G = \langle T, N, P, S \rangle$ называется ***контекстно-свободной*** (*КС*), если каждое правило из P имеет вид $A \to \beta$, где $A \in N, \beta \in (T \cup N)^*$.

Заметим, что в КС-грамматиках допускаются правила с пустыми правыми частями. Язык, порождаемый контекстно-свободной грамматикой, называется ***контекстно-свободным*** языком.

Грамматикой ***типа 2*** будем называть контекстно-свободную грамматику.

КС-грамматика может являться неукорачивающей, т.е. удовлетворять ограничениям неукорачивающей грамматики.

Утверждение 2. Для любой КС-грамматики G существует неукорачивающая КС- грамматика G', такая что $L(G) = L(G')$.

12 Билет 12

Опр. Грамматика $G = \langle T, N, P, S \rangle$ называется ***праволинейной***, если каждое правило из P имеет вид $A \to wB$ либо $A \to w$, где $A, B \in N, w \in T^*$.

Опр. Грамматика $G = \langle T, N, P, S \rangle$ называется ***леволинейной***, если каждое правило из P имеет вид $A \to Bw$ либо $A \to w$, где $A, B \in N, w \in T^*$.

Утверждение 3. Пусть L — формальный язык. Следующие два утверждения эквивалентны:

1) существует праволинейная грамматика G_1, такая что $L = L(G_1)$;
2) существует леволинейная грамматика G_2, такая что $L = L(G_2)$.

Т.е., праволинейные и леволинейные грамматики определяют один и тот же класс языков. Такие языки называются ***регулярными***.

- Право- и леволинейные грамматики также называют регулярными.
- Регулярная грамматика является грамматикой ***типа 3***.

13 Билет 13

Т.е., праволинейные и леволинейные грамматики определяют один и тот же класс языков. Такие языки называются ***регулярными***.

Опр. ***Автоматной*** грамматикой называется праволинейная (леволинейная) грамматика, такая, что каждое правило с непустой правой частью имеет вид:

$A \to a$ либо $A \to aB$ (для леволинейной, соответственно, $A \to a$ либо $A \to Ba$),

где $A, B \in N$, $a \in T$.

Автоматная грамматика является более простой формой регулярной грамматики.

Существует алгоритм, позволяющий по регулярной (право- или леволинейной) грамматике построить соответствующую автоматную грамматику.

Таким образом, любой регулярный язык может быть порожден автоматной грамматикой.

Существует алгоритм, позволяющий устранить из регулярной (автоматной) грамматики все ε-правила (кроме $S \to \varepsilon$ в случае, если пустая цепочка принадлежит языку; при этом S не будет встречаться в правых частях правил).

Утверждение 4. Для любой регулярной (автоматной) грамматики G существует неукорачивающая регулярная (автоматная) грамматика G', такая что $L(G) = L(G')$.

14 Билет 14

Иерархия языков

Утверждение 6. Справедливы следующие утверждения:

1) Каждый регулярный язык является КС-языком, но существуют КС-языки, которые не являются регулярными, например:

$$L = \{a^n b^n \mid n > 0\};$$

2) Каждый КС-язык является КЗ-языком, но существуют КЗ-языки, которые не являются КС-языками, например:

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\};$$

3) Каждый КЗ-язык является языком типа 0 (т. е. рекурсивно перечислимым языком), но существуют языки типа 0, которые не являются КЗ-языками.

Из утверждения 6 следует иерархия классов языков:

$$Тип\ 3\ (Регулярные) \subset Тип\ 2\ (КС) \subset Тип\ 1\ (КЗ) \subset Тип\ 0$$

Для $k = 1, 2, 3$ язык типа k является также и языком типа $k - 1$ (класс языков типа k является подклассом класса языков типа $k - 1$).

15 Билет 15

- **Утверждение 7.** Проблема «Можно ли язык, описанный грамматикой типа k ($k = 0, 1, 2$), описать грамматикой типа $k + 1$?» является ***алгоритмически неразрешимой***.
- Т.е., нет алгоритма, позволяющего по заданному описанию языка L (например, по грамматике), определить максимальное k, такое что L является языком типа k

16 Билет 16

Регулярные

1. Грамматика $S \to aS \mid a$ является праволинейной (неукорачивающей) грамматикой и порождает регулярный язык $\{a^n \mid n > 0\}$.

Этот язык может быть порожден и леволинейной грамматикой: $S \to Sa \mid a$.

Обе эти грамматики являются автоматными.

2. Грамматика $S \to aS \mid \varepsilon$ является праволинейной и порождает регулярный язык $\{a^n \mid n \geq 0\}$.

Для любого регулярного языка существует неукорачивающая регулярная грамматика (см. утверждение 4):

$$\begin{aligned} S &\to aA \mid a \mid \varepsilon \\ A &\to a \mid aA \end{aligned}$$

Правило с пустой правой частью может применяться только один раз и только на первом шаге вывода; остальные правила таковы, что их правая часть не короче левой, т. е. грамматика неукорачивающая.

3. Грамматика $S \to A\perp \mid B\perp$ леволинейная;
$A \to a \mid Ba$
$B \to b \mid Bb \mid Ab$

она порождает регулярный язык, состоящий из всех непустых цепочек в алфавите $\{a, b\}$, заканчивающихся символом $\perp$ (маркер конца) и не содержащих подцепочку aa.

То есть в цепочках этого языка символ a не может встречаться два раза подряд, хотя бы один символ b обязательно присутствует между любыми двумя a.

Данный язык описывается как: $L=\{\omega\perp \mid \omega \in \{a, b\}^+, aa \not\subset \omega\}$.

Контекстно-свободные

1. Грамматика $S \to aQb \mid accb$
$Q \to cSc$

является контекстно-свободной (неукорачивающей) и порождает КС-язык $\{(ac)^n (cb)^n \mid n > 0\}$, который, не является регулярным.

2. Грамматика $S \to aSa \mid bSb \mid \varepsilon$

порождает КС-язык $\{xx^R, x\in\{a, b\}^*\}$. Данный язык не является регулярным. Грамматика не удовлетворяет определению неукорачивающей, но для нее существует эквивалентная неукорачивающая грамматика (см. утверждение 2):

$S \to A \mid \varepsilon$
$A \to aAa \mid bAb \mid aa \mid bb$

Неукорачивающие и контекстно-зависимые

1. Грамматика:

$S \to aSBC \mid abC$
$CB \to BC$
$bB \to bb$
$bC \to bc$
$cC \to cc$

неукорачивающая и порождает язык $\{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$, который является языком типа 1, но не является языком типа 2.

Правило $CB \to BC$ не удовлетворяет определению КЗ-грамматики. Заменим его тремя новыми

$CB \to CD$, $CD \to BD$, $BD \to BC$. Получим эквивалентную серию контекстно-зависимых правил, которые меняют местами символы C и B. Таким образом, получаем эквивалентную КЗ- грамматику:

$S \to aSBC \mid abC$
$CB \to CD$
$CD \to BD$
$BD \to BC$
$bB \to bb$
$bC \to bc$
$cC \to cc$

1. **Грамматика типа 0** $S \to SS$
$SS \to \varepsilon$

Второе правило не удовлетворяет ограничениям неукорачивающей грамматики. В данной грамматике существует бесконечно много выводов, однако порождаемый язык конечен и состоит из единственной цепочки: $\{\varepsilon\}$.

2. Грамматика $S \to SS$
$SS \to Sa \mid S$

также не является неукорачивающей и порождает пустой язык, так как ни одна терминальная цепочка не выводится из S.

Языки $L_\varepsilon = \{\varepsilon\}$ и $L_\varnothing = \varnothing$ (пустой язык) могут быть описаны грамматиками типа 3.

17 Билет 17

Определение регулярного выражения

- **Опр.** Пусть Σ — алфавит, не содержащий символов $*, +, \varepsilon, \varnothing, (,)$.
Определим рекурсивно *регулярное выражение* γ над алфавитом Σ и регулярный язык $L(\gamma)$, задаваемый этим выражением:

Базис индукции:
1) $a \in \Sigma$ есть регулярное выражение; $L(a) = \{a\}$
2) ε есть регулярное выражение; $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
3) $\varnothing$ есть регулярное выражение; $L(\varnothing) = \varnothing$
Индукция:
Если α и β — регулярные выражения, то:
1) $(\alpha) + (\beta)$ — регулярное выражение; $L((\alpha) + (\beta)) = L(\alpha) \cup L(\beta)$;
2) $(\alpha)(\beta)$ — регулярное выражение; $L((\alpha)(\beta)) = L(\alpha)\,L(\beta)$;
3) $(\beta)^*$ — регулярное выражение; $L((\beta)^*) = (L(\beta))^*$;

Никаких других регулярных выражений, кроме тех, что построены в соответствии с описанным определением, нет.

Определение регулярного множества

- Опр. Пусть Σ - конечный алфавит. Регулярное множество в алфавите Σ определяется следующим образом:

1) $\varnothing$ – регулярное множество в алфавите Σ.
2) $\{\varepsilon\}$ – регулярное множество в алфавите Σ.
3) $\{a\}$ – регулярное множество в алфавите Σ для каждого $a \in \Sigma$.
4) Если Q и P - регулярные множества в алфавите Σ, то множества $Q \cup P$, QP и P* регулярные.
5) Ничто другое не является регулярным множеством в алфавите Σ.

Алгебраические законы для регулярных выражений

- Объединение и конкатенация ведут себя как сложение и умножение.
- + является коммутативным и ассоциативным;
- Конкатенация является ассоциативной операцией.
- Конкатенация распределяется по +.
- Исключение: Конкатенация не коммутативна.

Дополнительная информация

Лемма 1. Если α, β, γ - регулярные выражения, то справедливы следующие соотношения:

1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
2) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$
3) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$
4) $\alpha\varepsilon = \varepsilon\alpha = \alpha$
5) $\alpha^* = \alpha + \alpha^*$
6) $\alpha + \alpha = \alpha$
7) $\varnothing^* = \varepsilon$
8) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$
9) $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$
10) $\varnothing\alpha = \alpha\varnothing = \varnothing$
11) $(\alpha^*)^* = \alpha^*$
12) $\alpha + \varnothing = \alpha$

- $\varnothing$ является нейтральным элементом для +.

$R + \varnothing = R$.

- ε является «единицей» для конкатенации.

$\varepsilon R = R\varepsilon = R$.

- $\varnothing$ является «нулем» для конкатенации.

$\varnothing R = R\varnothing = \varnothing$.

18 Билет 18

Уравнения с регулярными коэффициентами

• Рассм. уравнение $X=aX+b$, где a и b – РВ.

$X=a^*b$ – решение уравнения:

$$a^*b=aa^*b+b$$
$$a^*b=(aa^*+\varepsilon)b$$
$$a^*b=a^*b$$

Если множество, определяемое рег. выражением a, содержит ε, то ур-е имеет бесконечно много решений: $X=a^*(b+c)$ для любого РВ c.

В этом случае берут «наименьшее решение» – *наименьшую неподвижную точку*.

Алгоритм решения стандартной системы уравнений с регулярными коэффициентами

• Вход. Стандартная система Q уравнений с рег. коэффициентами в алфавите Σ и множеством неизвестных $\Delta = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

• Выход. Решение системы Q в виде $X_1 = a_1,\ X_2 = a_2, \dots, X_n = a_n$, где a_i - РВ в алфавите Σ.

• Метод. (см. решение СЛУ методом Гаусса)

Шаг 1. $i=1$.

Шаг 2. Если $i=n$, перейти к шагу 4.

Иначе, с помощью тождеств РВ записать ур-е для X_i в виде $X_i = \alpha X_i + \beta$, где α - РВ в алфавите Σ, а β - РВ вида $\beta_0 + \beta_i X_{i+1} + \dots + \beta_n X_n$; β_i - РВ в алфавите Σ.

Затем, в правых частях уравнений для $X_{i+1}, \dots, X_n$ заменить X_i выражением α*β.

Шаг 3. $i=i+1$. Перейти к шагу 2.

Шаг 4. Записать ур-е для X_n в виде $X_n = \alpha X_n + \beta$, где α и β - РВ в алфавите Σ.

Перейти к шагу 5 ($i = n$).

Шаг 5. Уравнение для X_i имеет вид $X_i = \alpha X_i + \beta$, где α и β - РВ в алфавите Σ.

Записать на выходе $X_i = \alpha^* \beta$ и в ур-я для $X_{i-1}, \dots, X_1$ подставить $\alpha^* \beta$ вместо X_i.

Шаг 6. Если $i=1$, остановиться. В противном случае $i=i$ -1 и вернуться к шагу 5.

Дополнительная информация

- Опр. Система уравнений с рег. коэффициентами наз. *стандартной системой* с мн-вом неизвестных $\Delta = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, если она имеет вид:

$$X_1 = a_{10}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$X_n = a_{n0}X_1 + a_{n2}X_2 + \cdots + a_{nn}X_n$$

где все a_{ij} - регулярные выражения в алфавите, не пересекающимся с Δ.

Если a_{ij}=∅, то соотв. слагаемое отсутствует, если a_{ij}=ε, то слагаемое равно X_j.

19 Билет 19

- Язык определяется праволинейной грамматикой т.и.т.т., когда он является регулярным множеством.
- Лемма 3. Множества ∅ , $\{\varepsilon\}$ и a для всех $a \in \Sigma$ являются праволинейными языками.
- Док-во.

1) G=({S}, Σ , P , S) – праволинейная грамматика, для которой L(G)=∅ .
2) G=({S}, Σ , {S→ε}, S) – праволинейная грамматика, для которой L(G)= $\{\varepsilon\}$.
3) G_a=({S}, Σ , {S→ a}, S) – праволинейная грамматика, для которой L(G_a)={a}.

- Лемма 4. Если P и Q – праволинейные языки, то языки

1) P∪Q , 2) PQ, 3) P* тоже праволинейные.

- Док-во.

Т.к. P и Q – праволинейные, то ∃ праволинейные грамматики

$G_P = (N_1, \Sigma, P_1, S_1)$ и $G_Q = (N_2, \Sigma, P_2, S_2)$, для которых

L(G_P) = P и L(G_Q) = Q. Считаем, что $N_1 \cap N_2 = \emptyset$.

1) $G_3 = (N_1 \cup N_2, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S_3 \to S_1 | S_2\}, S_3)$ – праволинейная.

L(G_3)= L(G_P) ∪ L(G_Q) т.к. для каждого вывода $S_3 \Longrightarrow^+_{G_3} w$ существует либо вывод $S_1 \Longrightarrow^+_{G_P} w$, либо вывод $S_2 \Longrightarrow^+_{G_Q} w$ и обратно.

Т.к. G_3 - праволинейная грамматика, то L(G_3) – праволинейный язык.

2) $G_4 = (N_1 \cup N_2, \Sigma, P_4, S_1)$ – праволинейная.

P_4: (1) Если $A \longrightarrow xB$ есть в P_1, то $A \longrightarrow xB$ принадлежит P_4.

(2) Если $A \longrightarrow x$ есть в P_1, то $A \longrightarrow xS_2$ принадлежит P_4.

(3) Все правила из P_2 принадлежат P_4.

Отметим, что если $S_1 \Longrightarrow_{G_P}^{+} w$, то $S_1 \Longrightarrow_{G_4}^{+} wS_2$, а если $S_2 \Longrightarrow_{G_Q}^{+} x$, то $S_2 \Longrightarrow_{G_4}^{+} x$.

Таким образом, $L(G_P)L(G_Q) \subseteq L(G_4)$.

Пусть $S_1 \Longrightarrow_{G_4}^{+} w$. Т.к. в G_4 нет правил $A \longrightarrow x$, попавших из P_1, то этот вывод можно сделать так: $S_1 \Longrightarrow_{G_4}^{+} xS_2 \Longrightarrow_{G_4}^{+} xy$, где $w = xy$ и все правила в выводе $S_1 \Longrightarrow_{G_4}^{+} wS_2$ попали в P_4 по (1) и (2).

Следовательно, должны быть выводы $S_1 \Longrightarrow_{G_P}^{+} x$ и $S_2 \Longrightarrow_{G_Q}^{+} y$.

Отсюда $L(G_4) \subseteq L(G_P)L(G_Q)$.

3) Пусть $G_5 = (N_1 \cup \{S_5\}, \Sigma, P_5, S_5)$ такая, что $S_5 \notin N_1$ и

P_5: (1) Если $A \longrightarrow xB$ есть в P_1, то $A \longrightarrow xB$ принадлежит P_5.

(2) Если $A \longrightarrow x$ есть в P_1, то $A \longrightarrow xS_5$ и $A \longrightarrow x$ принадлежат P_5.

(3) $S_5 \longrightarrow S_1|\varepsilon$ принадлежат P_5.

Очевидно, что

$S_5 \Longrightarrow_{G_5}^{+} x_1S_5 \Longrightarrow_{G_5}^{+} x_1x_2S_5 \Longrightarrow_{G_5}^{+} \ldots \Longrightarrow_{G_5}^{+} x_1x_2 \ldots x_{n-1}x_n$

т.и.т.т., когда

$S_1 \Longrightarrow_{G_P}^{+} x_1$, $S_1 \Longrightarrow_{G_P}^{+} x_2$, … , $S_1 \Longrightarrow_{G_P}^{+} x_n$.

Отсюда следует, что $L(G_4) = (L(G_P))^*$. ■

- Теорема. Язык является регулярным множеством т.и.т.т., когда он праволинейный.
- Док-во.

Необходимость.

Следует из лемм 3 и 4, индукцией по числу шагов построения регулярного множества, где один шаг – это применение одного из правил, определяющих регулярные множества.

Достаточность.

Пусть $G = (N, \Sigma, P, S)$ – праволинейная грамматика и $N = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.

Можно построить стандартную систему уравнений с регулярными коэффициентами, неизвестными которой являются нетерминалы из N.

Уравнение для A_i будет иметь вид: $A_i = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}A_1 + \cdots + \alpha_{in}A_n$, где

(1) $\alpha_{i0} = w_1 + \cdots + w_k$, если $A_i \longrightarrow w_1| \ldots |w_k$ - все правила с левой частью A_i и правой частью, состоящей только из терминалов (если k=0, то $\alpha_{i0} = \emptyset$).

(2) Для j>0 $\alpha_{ij} = x_1 + \cdots + x_m$, если $A_i \longrightarrow x_1A_j| \ldots |x_mA_j$ - все правила с левой частью A_i и правой частью, оканчивающуюся на A_j (если m=0, то $\alpha_{ij} = \emptyset$).

Решая эту систему уравнений получаем решение f для $N = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.

Для S получаем РВ f(S) , которое определяет язык L(G).

Но алгоритм строит f(S) как язык, обозначаемый некоторым РВ.

Таким образом, L(G) – регулярное множество.

20 Билет 20

- Класс регулярных множеств – наименьший класс языков, содержащий $\varnothing$, $\{\varepsilon\}$. $\{a\}$ для всех a и замкнутый относительно операций объединения, конкатенации и итерации.
- Регулярное множества – множества, определяемые регулярными выражениями.
- Регулярное множества – языки, порождаемые праволинейными грамматиками.
- Регулярное множества – языки, распознаваемые конечными автоматами.

Допустимые входы

- Дана последовательность входов (*входная строка*).
- Начать в начальном состоянии и следовать по переходу по каждому очередному символу входной строки.
- Вход *принимается*, если вы перенеслись в финальное (принимающее) состояние после чтения всех входных символов.

Детерминированный конечный автомат

- Формализм для определения языков, состоящий из:
  - Конечного множества *состояний* (обозн. обычно Q).
  - *Входной алфавит* (Σ, обычно).
  - *Функция переходов* (δ, обычно).
  - *Начальное состояние* (q_0, в Q, обычно).
  - *Финальные состояния* ($F \subseteq Q$, обычно).
    - "Финальный" и "принимающий" является синонимами.

$$A=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

$$\delta: Q \times \Sigma \longrightarrow Q$$

Функция переходов

- Имеет два аргумента: состояние и входной символ.
- δ(q, a) = состояние, в которое КДА переходит, если он в состоянии *q* получает на вход символ *a*.
- Замечание: всегда есть следующее состояние – добавим *мёртвое состояние* если нет переходов (Пример далее).
- Форма задания: таблица переходов, граф.
- Функцию переходов можно доопределить для слов:

  $\delta^*(q, a) = \delta(q, a)$ если $|a|=1$.

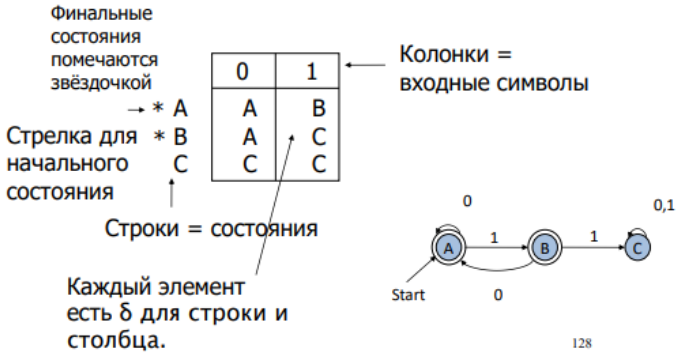
  $\delta^*(q, aw) = \delta(\delta^*(q, w), a)$

Представление КДА графом

- Вершины = состояния.
- Дуги представляют функцию переходов.
  - Дуга из состояния p в состояние q помечается всеми теми входными символами, по которым происходит переход из p в q.
- Стрелка помеченная как "Start" указывает на начальное состояние.
- Финальные состояния обозначаются двойной окружностью.

122

Альтернативное представление: Таблица переходов



128

Язык КДА

- Автоматы всех видов определяют языки.
- Если A - автомат, L(A) – его язык.
- Для КДА A, L(A) есть множество строк, помечающих пути из начального состояния в финальное.
- Формально: L(A) = множество строк w таких, что $\delta(q_0, w)$ есть в F.

Формальное определение НКА

- Конечное множество состояний, обычно Q.
- Входной алфавит, обычно Σ.
- Функция переходов, обычно δ.
- Начальное состояние в Q, обычно q_0.
- Множество конечных состояний $F \subseteq Q$.

$$A=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

$$\delta: Q \times \Sigma \longrightarrow 2^Q$$

Язык НКА

- Строка w принимается НКА если $\delta(q_0, w)$ содержит, по крайней мере, одно финальное состояние.
- Язык НКА – это множество всех принимаемых строк.

НКА с є-переходами

- Мы можем допустить переходы между состояниями по входу є.
- Эти переходы происходят спонтанно, без оглядки на входную строку.
- Иногда это удобно, но принимаются те же регулярные языки, что принимаются КДА и НКА.

Заключение

- Теорема. КДА, НКА, и є–НКА все принимают в точности одно и то же множество языков: регулярные языки.
- По этой причине эти языки ещё называют *автоматными*.
- Типы НКА проще строить и они могут иметь экспоненциально меньше состояний, чем КДА.
- Но только КДА может быть реализован!

21 Билет 21

- Лемма. Если L=L(A) для некоторого конечного автомата A, то L=L(G) для некоторой праволинейной грамматики G.
- Док-во. Пусть $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ – КДА. Определим грамматику $G = (Q, \Sigma, P, q_0)$, где P имеет вид:

Если $\delta(q, a) = r$, то P содержит правило $q \longrightarrow ar$.

Если $p \epsilon F$, то P содержит правило $p \longrightarrow \varepsilon$.

Каждый шаг вывода в грамматике G имитирует такт работы автомата A.

Индукция по i – длине вывода.

Базис. $i = 0$. $q \Longrightarrow \varepsilon$ т.и.т.т., когда $(q, \varepsilon) \vdash^0 (q, \varepsilon)$.

IH: $s \Rightarrow^i x$ т.и.т.т., когда $(s, x) \vdash^{i-1} (r, \varepsilon)$ для некоторого $r \epsilon F$.

Шаг индукции. Пусть $w = ax$, где $|x| = i$.

Тогда $q \Longrightarrow^{i+1} w$ равносильно тому, что $q \Rightarrow as \Rightarrow^i ax$ для некоторого s.

Но $q \Rightarrow as$ равносильно $\delta(q, a) = s$ или $(q, a) \vdash^1 (s, \varepsilon)$.

Это означает, что $(q, ax) \vdash^1 (s, x)$.

По индукции $s \Rightarrow^i x$ т.и.т.т., когда $(s, x) \vdash^{i-1} (r, \varepsilon)$ для некоторого $r \epsilon F$.

Следовательно, $q \Rightarrow^{i+1} w$ равносильно $(q, ax) \vdash^1 (s, x) \vdash^{i-1} (r, \varepsilon)$ или $(q, w) \vdash^i (r, \varepsilon)$ для некоторого $r \epsilon F$.

ч. т. д.

- Лемма. Если L=L(G) для некоторой праволинейной грамматики G, то L=L(A) для некоторого конечного автомата A.
- Док-во. Пусть $G = (Q, \Sigma, P, S)$ – праволинейная грамматика. Построим автомат $A = (N \cup \{q_f\}, \Sigma, \delta, S, F)$, где δ определено как:

Если $A \longrightarrow aB \in P$, то $\delta(A, a) = B$ для $A, B \in N$ и $a \in \Sigma$.

Если $A \longrightarrow a \in P$, то $\delta(A, a) = q_f$ для $A \in N$ и $a \in \Sigma$.

$F = \{S, q_f\}$, если в P есть S $\longrightarrow \varepsilon$ и $F = \{q_f\}$ – в противном случае.

Очевидно, что построенный автомат определяет тот же язык, что и исходная праволинейная грамматика.

22 Билет 22

23 Билет 23

Пусть L — регулярный язык, заданный автоматом A $= (Q, \sum, \delta, q_0, F)$ — КДА.

$$w \in L \Leftrightarrow \delta(q_0, w) \in F$$

- Таким образом, *проблема принадлежности произвольной строки* (над определенным алфавитом) *регулярному языку разрешима*.

24 Билет 24

Проблема пустоты

- Для данного регулярного языка определить, содержит ли он хотя бы одну строку ?
- Пусть предсталением языка является КДА.
- Вычислим множество состояний, достижимых из начального.
- Если хотя бы одно из конечных состояний достижимо, то ответ “да”, иначе - “нет”.
- *Проблема пустоты для регулярных языков разрешима*.

25 Билет 25

Проблема бесконечности

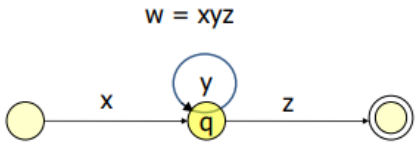
- Является данный регулярный язык бесконечным?
- Рассмотрим КДА для языка.
- Ключевая идея: если КДА имеет *n* состояний и язык содержит какую либо строку длины *n* или более, то язык бесконечный.
- В противном случае, язык, безусловно, конечный.
  - Можно ограничиться строками длины *n* или меньше.

26 Билет 26

Доказательство ключевой идеи

- Если КДА с *n* состояниями принимает строку w длины *n* или более, то должно быть состояние, в котором он окажется дважды на пути, помеченном w от начального состояния к конечному.
- Потому что существует, по крайней мере, *n*+1 состояний вдоль всего пути.

Доказательство – (2)



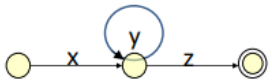
Тогда xy^iz является языком для всех $i \geq 0$.

Т.к. y не есть ϵ, мы имеем бесконечное число строк в L.

Бесконечность – продолжение

- Пока мы не имеем алгоритма.
- Существует бесконечное число строк длины > *n*, и мы не можем проверить их все.
- Вторая ключевая идея: если существует строка длины ≥ *n* (*n* = числу состояний) в L, то в L существует строка длины между *n* и 2*n*-1.

Доказательство 2-ой ключевой идеи



- Вспомним:
- y - это первый цикл в пути.
- Тогда: |xy| ≤ *n*; в частности, 1 ≤ |y| ≤ *n*.
- То есть, одно состояние среди первых n+1 повторяется.
- Т.о., если w имеет длину 2*n* или более, то существует более короткая строка в L, которая имеет длину, по крайней мере, *n*.
- Продолжим сокращение длины путём удаления циклов, пока не достигнем длины в интервале [*n*, 2*n*-1].

Завершение доказательства алгоритма

- Для доказательства бесконечности регулярного языка построим для него КДА. Пусть он имеет *n* состояний
- Протестируем на принадлежность языку всех строк длины между *n* и 2*n*-1.
  - Если какая-либо из них принимается, то язык бесконечен, иначе – конечен.
- Ужасный алгоритм. Если мы имеем *k* входных символов и *n* состояний, то число строк для проверки составит k^{2n}.
- Лучше: найти циклы между начальным и конечным состояниями. Для этого есть алгоритм сложности порядка *kn*.

Поиск циклов

1. Исключим состояния, недостижимые из начального состояния.
2. Устраним состояния, из которых не достигаются конечные состояния.
3. Проверим наличие циклов в оставшемся графе переходов.

Поиск циклов– (2)

- Простым, но менее эффективным способом поиска циклов является поиск вперед от заданного узла N.
- Если из N можно достичь N, то цикл есть.
- Сделайте это, начиная с каждого узла.
- Если есть цикл, то язык для данного КДА бесконечный. Если циклов нет, то конечный.
- *Проблема бесконечности регулярного языка разрешима*.

27 Лемма о накачке для регулярных языков

Лемма. Для каждого регулярного языка L существует целое n, такое, что для каждой строки w из L длины $\geq n$ мы можем записать ее как w = xyz так, что:

Число состояний КДА для L

Метки вдоль первого цикла пути, помеченного w

1. $|xy| \leq n$.
2. $|y| > 0$.
3. Для всех $i \geq 0$, xy^iz также принадлежит L.

28 Эквивалентность регулярных языков

Проблема: Эквивалентность

- По данным регулярным языкам L и M определить L = M?
- Алгоритм доказательства существования разрешающей процедуры базируется на построении КДА - *произведения* автоматов для L и M.

Алгоритм установления эквивалентности

- Заключительные состояния автомата-произведения - те состояний [q, r], в которых точно одно из q и r есть финальное состояние соответствующего автомата.
- Т.о., автомат-произведение принимает w т.и.т.т., когда w в точности принадлежит языку для одного из L или M.
- L = M тогда и только тогда, когда язык для автомата произведения пуст.

Таким образом, эта проблема для регулярных языков разрешима.

29 Построение произведения автоматов L и M

Построение произведения автоматов L и M

- Пусть КДА L и M имеют множества состояний Q и R, соответственно.
- $L = (Q, \Sigma, \delta_L, q_0\ F_L)$, $M = (R, \Sigma, \delta_M, r_0, F_R)$
- Автомат-произведение имеет множество состояний $Q \times R$.
  - т.е., пары [q, r], где $q \in Q$, $r \in R$.
- Начальное состояние = $[q_0, r_0]$ (начальные состояния КДА для L, M).

Произведение автоматов – прод.

- Переходы: $\delta([q,r], a) = [\delta_L(q,a), \delta_M(r,a)]$
  - δ_L, δ_M функции переходов для КДА L и M.
  - То есть, мы моделируем исходные КДА в компонентах двух состояний автомата-произведения.
- Определим заключительные состояния автомата - произведения из тех состояний [q, r], в которых точно одно из q и r есть финальное состояние соответствующего автомата.

Пример: Произведение автоматов