1 Длина кривой. Определение криволинейных интегралов первого и второго рода по параметризованной гладкой прямой.

1. Теорема о длине кривой:

Если функция $\overline{\gamma}$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную $\overline{\gamma}' = (\gamma_1^{'}, \gamma_2^{'})$, то кривая $L = L_{\overline{\gamma}}$ спрямляема и её длина S выражается равенством

$$S = \int_a^b |\overline{\gamma}'(t)| dt.$$

Доказательство:

Для любого разбиения $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ отрезка $[a, b]$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} |\overline{\gamma}(t_i) - \overline{\gamma}(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \overline{\gamma}'(t) dt \right| \le \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\overline{\gamma}'(t)| dt = \int_a^b |\overline{\gamma}'(t)| dt.$$

Переходя к верхней грани по всевозможным разбиениям отрезка, получим неравенство

$$S \le \int_a^b |\overline{\gamma}'(t)| dt.$$

Докажем справедливость неравентсва противоположного. Пусть $\epsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности функции $\overline{\gamma}'$ $\quad \exists \delta > 0 \quad (|s - t| < \delta \Rightarrow |\overline{\gamma}'(s) - \overline{\gamma}'(t)| < \epsilon)$. Возьмём разбиение отрезка с диамотром меньшим δ. Тогда $\forall t \in [t_{i-1}, t_i]$ имеем

$$|\overline{\gamma}'(t)| = |(\overline{\gamma}'(t) - \overline{\gamma}'(t_i)) + \overline{\gamma}'(t_i)| \le |\overline{\gamma}'(t) - \overline{\gamma}'(t_i)| + |\overline{\gamma}'(t_i)| \le |\overline{\gamma}'(t_i)| + \epsilon.$$

Далее получим

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\overline{\gamma}'(t)| dt - \epsilon \Delta t_i \le |\overline{\gamma}'(t_i)| \Delta t_i = |\int_{t_{i-1}}^{t_i} (\overline{\gamma}'(t) + \overline{\gamma}'(t_i) - \overline{\gamma}'(t)) dt| \le$$

$$\le |\int_{t_{i-1}}^{t_i} \overline{\gamma}'(t) dt| + |\int_{t_{i-1}}^{t_i} (\overline{\gamma}')(t_i) - \overline{\gamma}'(t) dt| \le |\overline{\gamma}(t_i) - \overline{\gamma}(t_{i-1})| + \epsilon \Delta t_i$$

и

$$\int_a^b |\overline{\gamma}'(t)| dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\overline{\gamma}'(t)| dt \le \sum_{i=1}^{n} |\overline{\gamma}(t_i) - \overline{\gamma}(t_{i-1})| + 2\epsilon(b-a) \le S + 2\epsilon(b-a)$$

Тогда в силу произвольности $\epsilon > 0$ имеем неравенство

$$\int_a^b |\overline{\gamma}'(t)|dt \le S.$$

2-3. Определение криволинейных интегралов первого и второго рода по параметризованной гладкой прямой:

Пусть $L = L_{\overline{\gamma}}$ — гладкая кривая, а функции $f(x,y), \quad P(x,y), \quad Q(x,y)$ определены на L. Пусть $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ — разбиение отрезка $[a,b], \quad M_k = (x_k, y_k) = (\gamma_1(t_k), \gamma_2(t_k)), \quad k = 0, \ldots, n$, и l_k — дуга $M_{k-1}M_k$ кривой $L, \quad k = 1, \ldots, n$.

На каждой дуге $M_{k-1}M_k$ выберем произвольную точку $N_k(\xi_k, \eta_k)$, соответсвующую некоторому значению $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ параметра t.

Обозначим длину дуги $M_{k-1}M_k$ через

$$\Delta s_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\overline{\gamma}'(t)|dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}dt$$

и диаметром разбиения кривой L назовём число $\Delta = \max_{1 \le k \le n} \Delta s_k$.

Определи интегральные суммы

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k)\Delta s_k.$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^n P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k.$$

$$\sigma_3 = \sum_{k=1}^n Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k,$$

где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad \Delta y_k = y_k - y_{k-1}$.

Определение криволинейного интеграла первого рода:

Назовём число I_m пределом интегральных сумм $\sigma_m \quad (m = 1,2,3)$ при стремлении диаметра Δ к нулю, если

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad (\Delta < \delta \Rightarrow |\sigma - I_m| < \epsilon) \text{ (независимо от выбора точек } N_k).$$

Число I_1 называют криволинейным интегралом первого рода от функции f по кривой L и обозначают символом

$$\int_L f(x,y)ds.$$

Число I_2 называют криволинейным интегралом второго рода от функции P по кривой L (в направлении от A до B) и обозначают символом

$$\int_L P(x,y)dx.$$

2 Условия существования криволинейных интегралов.

Условия существования криволинейных интегралов:

Если кривая $L = L_{\overline{\gamma}}$ является гладкой и функции f, P, Q непрерывны вдоль этой кривой, то все три криволинейные интегралы существуют и могут быть вычислены по формулам

$$\int_L f(x,y)dx = \int_a^b f(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\sqrt{(\gamma_1'(t))^2+(\gamma_2'(t))^2}dt, \qquad (1)$$

$$\int_L P(x,y)dx = \int_a^b P(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_1'(t)dt, \qquad (2)$$

$$\int_L Q(x,y)dy = \int_a^b Q(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_2'(t)dt \qquad (3)$$

Доказательство:

Прежде всего отметим, что определенные интегралы, стоящие в правых частях формул, существуют, так как их подынтегральные функции непрерывны на отрезке $[a,b]/$

Докажем первое равенство. Обозначим

$$I_1 = \int_a^b f(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\sqrt{(\gamma_1'(t))^2+(\gamma_2'(t))^2}dt$$

и оценим разность

$$\sigma_1 - I_1 = \sum_{k=1}^n f(\xi_k,\eta_k)\Delta l_k - \int_a^b f(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\sqrt{(\gamma_1'(t))^2+(\gamma_2'(t))^2}dt =$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (f(\gamma_1(\tau_k),\gamma_2(\tau_k)) - f(\gamma_1(t),\gamma_2(t)))\sqrt{(\gamma_1'(t))^2+(\gamma_2'(t))^2}dt$$

Так как функции $\gamma_1'(t)$ и $\gamma_2'(t)$ непрерывны на $[a,b]$ и одновременно не обращаются в нуль, то

$m = \min_{a\le t\le b}\sqrt{(\gamma_1'(t))^2+(\gamma_2'(t))^2} > 0$ и $\Delta s_k \ge m\int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = m\Delta t_k$.

Следовательно

$$\Delta t_k \le \frac{1}{m}\Delta s_k$$

и при стримлении к нулю диаметра разбиения Δ кривой L стемится к нулю и наибольшая из разностей $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$.

Поскольку функция $f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ равномерно непрерывна на отрезке $[a, b]$, то $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \Delta < \delta \Rightarrow$

$$|f(\gamma_1(\tau_k), \gamma_2(\tau_k)) - f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))| < \frac{\epsilon}{S},$$

где S — длина кривой L.

Тогда

$$|\sigma_1 - I_1| \leq \frac{\epsilon}{S} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\gamma_1'(t)) + (\gamma_2'(t))^2} dt = \frac{\epsilon}{S} \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k = \epsilon.$$

Таким образом мы доказали, что интегральные суммы σ_1 стемятся к числу I_1 при $\Delta \to 0$, то есть мы доказали первое равенство.

Для доказательства второго равенства оценим разность

$$\sigma_2 - I_2 = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(P(\gamma_1(\tau_k), \gamma_2(\tau_k)) - P(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\right) \gamma_1'(t) dt.$$

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \Delta < \delta \Rightarrow$

$$P(\gamma_1(\tau_k), \gamma_2(\tau_k)) - P(\gamma_1(t), \gamma_2(t))| < \frac{\epsilon}{M(b-a)},$$

где $M = \max_{a \leq t \leq b} |\gamma_1'(t)|$. Тогда

$$|\sigma_2 - I_2| \leq \frac{\epsilon}{M(b-a)} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma_1'(t)| dt \leq \frac{\epsilon}{M(b-a)} M \sum_{k=1}^{n} \Delta t_k = \epsilon.$$

Это означает, что интегральные суммы $\sigma_2 \to I_2$ при $\Delta \to 0$, то есть мы доказали второе равенство.

Третье равенство доказывается аналогично.

3 Замена параметра в криволинейном интеграле первого рода

Замена параметра в криволинейном интеграле первого рода:

ПУсть $L = L_\gamma$ — гладкая кривая, функция $\overline{\gamma}$ определена на отрезке $[a, b]$, а функция ϕ определена на отрезке $[a_1, b_1]$, отображает его на отрезок $[a, b]$, имеет непрерывную производную и $\phi'(u) \neq 0 \quad \forall u \in [a_1, b_1]$.

Тогда функция ϕ' сохраняет знак на отрезке $[a_1, b_1]$ и функция ϕ является возрастающей, если $\phi(u) > 0$, и является убывающей, если $\phi(u) < 0$. Согласно правилу замены переменной в интеграе Римана имеем

$$\int_a^b f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}dt = \int_a^b f(\overline{\gamma}(t))|\overline{\gamma}'(t)|dt =$$

$$= \int^{\phi^{-1}(b)_{\phi^{-1}(a)}} f(\overline{\gamma}(\phi(u)))|\overline{\gamma}'(\phi(u))|\phi'(u)du.$$

Если $\phi'(u) > 0$, то $|\overline{\gamma}'(\phi(u))\phi'(u) = |\overline{\gamma}'(\phi(u))\phi'(u)| = |(\overline{\gamma}\circ\phi)'(u)|, \quad \phi^{-1}(a) = a_1, \phi^{-1}(b) = b_1$

Если же $\phi'(u) < 0$, то $|\overline{\gamma}'(\phi(u))|\phi'(u) = -|\overline{\gamma}'(\phi(u))\phi'(u)| = -|(\overline{\gamma}\circ\phi)', \quad \phi^{-1}(a) = b_1, phi^{-1}(b) = a_1$.

Тогда в любом случае

$$\int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\overline{\gamma}(\phi(u)))|\overline{\gamma}'(\phi(u))|\phi'(u)du = \int_{a_1}^{b_1} f(\overline{\gamma}(\phi(u)))|(\overline{\gamma}\circ\phi)'(u)du$$

Обозначим $\overline{\gamma^*}(u) = (\overline{\gamma}\circ\phi)(u)$. чоевидно, что вектор-функция $\overline{\gamma^*}$ непрерывно диффиренцируема на отрезке $[a_1, b_1]$ и её производная ни в одной точке этого отрезка не равна вектору $(0, 0)$. Тогда вектор-функцию $\overline{\gamma^*}$ можно считать другим параметрическим представлением кривой L.