Содержание

1 Уравнения первого порядка **4**

1.1 Определения . . . 4

1.1.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка . . . 4

1.1.2 Частное решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка . . . 4

1.1.3 Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка . . . 4

1.1.4 Общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка . . . 4

1.1.5 Уравнение с разделяющимися переменными первого порядка . . . 5

1.1.6 Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в симметричной форме . . . 5

1.1.7 Линейное дифференциальное уравнение первого порядка 5

1.1.8 Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка . . . 5

1.2 Теоремы и алгоритмы . . . 6

1.2.1 Алгоритм решения уравнений с разделяющимися переменными первого порядка . . . 6

1.2.2 Метод вариации решния линейного дифференциального уравнения первого порядка. . . . 6

1.2.3 Основная теорема существования и единственности . . . 8

1.2.4 Сведение задачи Коши к интегральному уравнению . . . 8

2 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка **9**

2.1 Определения . . . 9

2.1.1 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка (однородные и неоднородные) . . . 9

2.1.2 Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка . . . 9

2.1.3 Линейно зависимые и линейно независимые функции . . 10

2.1.4 Определитель Вронского функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ 10

2.1.5 Фундаментальная система решения . . . 10

2.1.6 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами . . . 10

2.1.7 Необходимое условие линейной зависимости . . . 11

2.1.8 Условие линейной независимости решений . . . 11

2.1.9 Свойство линейности и следствия из него . . . 11

2.1.10 Существование ФСР . . . 12

2.1.11 Вид общего решения однородноого линейного уравнения 12

2.1.12 Вид общего решения неоднородноого линейного уравнения 12
2.2 Алгоритм метод вариации нахождения частного решения 13
2.3 Обоснование метода вариации 14
2.4 Пример: $y^{''} + w^2 y = f(x)$ 15
2.5 Формула Остроградского-Луивилля 16
2.6 Метод Эйлера (случай простых корней) 16

3 Линейные дифференциаьные уравнения второго порядка 19
3.1 Интегрирование с помощью частного решения 19
3.2 Упрощение с помощью замены функции $y^{''} + \frac{1}{x}y^{'} + (1 - \frac{1}{4x^2})y = 0$ 20
3.3 Упрощение с помощью замены переменной $y^{''} + \frac{1}{2x}y^{'} - \frac{1}{x}y = 0$. 20
3.4 Метод степенных рядов $y^{''} - xy = 0$ 22
3.5 Алгоритм решения простейшей краевой задачи 23
3.6 Существование решения краевой задачи: 24

4 Линейные системы 26
4.1 Определения 26
4.1.1 Нормальная линейная система, её векторная запись . . . 26
4.1.2 Решение системы 27
4.1.3 Задача Коши для системы 27
4.1.4 Линейно зависимые и линейно независимые вектор-функции 28
4.1.5 Определитель Вронского вектор-функций 28
4.1.6 Фундаментальная система решений линейной системы . 28
4.1.7 Фундаментальная матрица решений однородной системы 29
4.1.8 Линейные системы с постоянными коэффициентами . . 29
4.1.9 Собственные значения и собственные векторы матрицы . 29
4.1.10 Матричная экспонента 30
4.2 Извинения 30
4.3 Теоремы, алгоритмы, примеры 30
4.3.1 Свойства решений однородной системы 30
4.3.2 Необходимое условие линейной зависимости вектор-функций 31
4.3.3 Условие линейной независимости решений однородной системы 31
4.3.4 Существование ФСР 31
4.3.5 Вид общего решения однородной системы 33
4.3.6 Вид общего решение неоднородной системы 34
4.3.7 Свойства фундаментальных матриц 35
4.3.8 Метод вариации нахождения частного решения 35
4.3.9 Формула Коши 36
4.3.10 Нахождение собственных значений и собственных векторов матрицы 37

4.3.11 Метод Эйлера (случай простых собственных значений)(включая лемму) 38
4.3.12 Пример $Y^{'} = AY$ 39
4.3.13 Лемма $|a_{ij}^{(m)}| \leq n^{m-1}d^m$ 41
4.3.14 Существование e^A 41
4.3.15 e^{Ax} — фундаментальная матрица системы $Y^{'} = AY$. . . . 42
4.3.16 Формула Коши для линейных систем с постоянными коэффициентами 43
4.3.17 Пример: нахождение e^A 44

1 Уравнения первого порядка

1.1 Определения

1.1.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y^{'}) \equiv 0$$

1.1.2 Частное решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

Определение частного решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

(1) $F(x, y, y^{'}) \equiv 0$ — обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка.

Частным решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка называется непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(x)$, при подстановки которой в уравнение (1) получим тождество

$$\varphi^{'}(x) \equiv f(x, \varphi(x))$$

1.1.3 Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

Определение общего решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

Множество всех решений обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка называется его общим решением.

1.1.4 Общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка

Пусть (1) $y^{'} = f(x, y)$ — дифференциальное уравнение первого порядка.

Определение общего интеграла дифференциального уравнения первого порядка:

Общее решение уравнения (1) в неявном виде

$$F(x, y) = C$$

называется общим интегралом уравнения (1).

1.1.5 Уравнение с разделяющимися переменными первого порядка

Определение уравнения сразделяющимися переменными первого порядка

Дифференциальным уравннием с разделяющимися переменными первого порядка называется уравнение вида

$$y^{'} = f_1(x)f_2(y),$$

где $f_1(x)$ и $f_2(y)$ — заданные функции.

1.1.6 Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в симметричной форме

Определение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в симметричной форме

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в симметрицной форме имеет вид

$$A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0,$$

где A и B — заданные функции двух переменных, причём переменные x и y равноправны.

1.1.7 Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

Определение линейного дифференциального уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$a_0(x)y^{'} + a_1(x)y = f(x),$$

где x — неизвестнвя переменная, $y = y(x)$ — неизывестная функция, $a_0(x)$ и $a_1(x)$ — известные непрерывные функции.

1.1.8 Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка

Определение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка

Пусть $y^{'} = f(x, y)$ — дифференциальное уравнение первого порядка и $y(x_0) = y_0$ — его начальное условие. Тогда задача Коши для него имеет вид

$$\begin{cases} y^{'} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

где x_0, y_0 — заданные числа.

1.2 Теоремы и алгоритмы

1.2.1 Алгоритм решения уравнений с разделяющимися переменными первого порядка

1. Переходим к дифференциалам:

$$y^{'} = \frac{dy}{dx} \qquad \frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y);$$

2. Делим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y) \quad | \cdot dx\frac{1}{f_2(y)}$$

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

3. Вычисляем интегралы:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C,$$

где $C \in R$ и $\int \frac{dy}{f_2(y)} = F_2(y)$, $\int f_1(x)dx = F_1(x)$.

Получим:

$$(3) \quad F_2(y) = F_1(x) + C$$

4. Разрешаем последнее уравнение относительно y:

$$(4) \quad y = \varphi(x, C), \quad C \in R,$$

где $\varphi(x, C)$ — общее решение.

5. Ответ: $\varphi(x, C)$.

1.2.2 Метод вариации решния линейного дифференциального уравнения первого порядка.

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$a_0(x)y^{'} + a_1(x)y = f(x),$$

Тогда

$$y^{'} + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}y = \frac{f(x)}{a_0(x)}$$

Обозначим $p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}, \quad q(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)}$
Следовательно уравнение примет вид:

$$(1) \quad y^{'} + p(x)y = q(x), \quad a \leq x \leq b$$

Метод вариации произвольной постоянной:

1. Этап:

   Найдём общее решение соответствующего (1) однородного уравнения:

$$(2) \quad y^{'} + p(x)y = 0$$
$$y^{'} = -p(x)y$$
$$\frac{dx}{dy} = -p(x)y$$
$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx + C$$
$$\ln|y| = -F_1(x) + C$$
$$y = \pm e^C e^{-F_1(x)}$$

   Получим: $y_0 = Ce^{-F_1(x)}$ — общее решение (2).

2. Этап:

   Ищем решение (1) в виде:

$$(3) \quad C(x)e^{-F_1(x)},$$

   где $C(x)$ — пока неизвестная функция.

$$y^{'} = C^{'}(x)e^{-F_1(x)} + C(x)e^{-F_1(x)}(-p(x))$$

   Подставляем в (1):

$$C^{'(x)}e^{-F_1(x)} - C(x)e^{-F_1(x)}p(x) + p(x)C(x)e^{-F_1(x)} = q(x)$$
$$C^{'}(x) = e^{F_1(x)}q(x)$$
$$C(x) = \int e^{F_1(x)}q(x)dx \pm c = F_2(x) + C$$

Подставим в (3):

$$y = e^{-F_1(x)}(F_2(x) + C)$$

Таким образом, $y = e^{-F_1(x)}(F_2(x) + C)$ — общее решение уравнения (1).

1.2.3 Основная теорема существования и единственности

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши:

Предположим, что $f(x, y)$ — непрерывная функция и у неё существует непрерывная чатсная производная $f^{'}(x, y)$. Тогда $\forall (x_0, y_0)$ задача Коши имеет единственное решение.

1.2.4 Сведение задачи Коши к интегральному уравнению

Пусть $\varphi(x)$ — решение задачи Коши:

$$(1) \quad \varphi^{'}(x) \equiv f(x, \varphi(x))$$

$$(2) \quad \varphi(x_0) = y_0$$

Перепишем (1) в виде:

$$(3) \quad \varphi^{'}(t) = f(t, \varphi(t))$$

Фиксируем произвольный x и берём интеграл от (3):

$$\varphi^{'} = f(t, \varphi(t)) \quad l| \int_{x_0}^{x} dt$$

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt$$

$$(4) \quad \varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt$$

По определению (4) означает, что $\varphi(x)$ является решением интегрального уравнения

$$(5) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt$$

Все остальные рассуждения обратимы $\leftarrow$ задача Коши $\sim$ уравнению (5).

2 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка

2.1 Определения

2.1.1 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка (однородные и неоднородные)

Определение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка

Однородное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид:

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y = 0,$$

где $a_0(x), \dots, a_n(x)$ — заданные непрерывные функции.

Определение линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка

Неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид:

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y = f(x),$$

где $a_0(x), \dots, a_n(x), f(x)$ — заданные непрерывные функции.

2.1.2 Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка

$$(1) \quad y^{(n)+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_n(x)y=f(x)}$$

Определение задачи Коши для дифференциального уравнения n-го порядка

Задача Коши для линейного уравнения (1) имеет вид:

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y^{'}(x_0) = y_0^{'} \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

где $y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ — начальные условия и $x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ — заданные числа.

2.1.3 Линейно зависимые и линейно независимые функции

Определение линейно зависимых функций

Функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ называются линейно зависимыми на отрезке $[a, b]$, если найдутся константы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ — числа, не все равные нулю, такие, что линейная комбинация:

$$\alpha_1\varphi(x) + \dots + \alpha_m\varphi(m) \equiv 0$$

Определение линейно независимых функций

Функции $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ называются линейно независимыми на отрезке $[a, b]$, если

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \dots + \alpha_m\varphi_m(x) \equiv 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$$

2.1.4 Определитель Вронского функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$

Определение определителя Вронского функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$

Определителем Вронского функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ называется:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_m(x) \\ \varphi_1^{'}(x) & \varphi_2^{'}(x) & \dots & \varphi_m^{'}(x) \\ & & \dots & \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_m^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

2.1.5 Фундаментальная система решения

Опредеение фундаментальной системы решений однородного линейного уравнения

Фундаментальной системой решений однородного линейного уравнения $l(y) = 0$ называется:

$\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — линейно независимые и их количество совпадает с порядком уравнения.

2.1.6 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Определение однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами

Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = 0,$$

где $a_0, \dots, a_n$ — заданные числа.

Определение неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами

Линейное неоднородноре уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x),$$

где $a_0, \dots, a_n$ — заданные числа.

2.1.7 Необходимое условие линейной зависимости

Теорема (необходимое условие линейной зависимости)

Если функции $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — линейно зависимы на $[a, b]$. Тогда их определитель вронского тождественно равен нулю.

$$\mathbf{W} \equiv 0$$

Доказательство (нужно или нет?:))

2.1.8 Условие линейной независимости решений

Рассмотрим линейное уравнение:

$$(1) \quad y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_m(x) y = 0; \quad a \le x \le b$$

Теорема (условие линейной независимости решений линейного уравнения)

Пусть $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — линейно независимые решения уравнения (1). Тогда

$$\forall x \in [a, b] \quad \mathbf{W} \neq 0$$

Доказательство (нужно или нет?:))

2.1.9 Свойство линейности и следствия из него

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_m(x) y = f(x)$$

Обозначим $^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_m(x) y$ как $l(y)$.

Свойство линейности $l(y)$

$$l(y_1(x)+y_2(x)) = l(y_1(x)) + l(y_2(x));$$

$$l(\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\varphi_k(x)) = \sum_{k=1}^{m}\alpha_k l(\varphi_k(x))$$

Следствие свойства линейности

Пусть $\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x)$ — решения уравнения $l(y) = 0$. Тогда $\varphi^{\circ}(x) = \alpha_1\varphi_1(x) + \dots + \alpha_m\varphi_m(x)$ тоже является решением этого уравнения.

Доказательство (нужно или нет?:))

2.1.10 Существование ФСР

Теорема (о существовании ФСР у любого однородного линейного уравнения)

Фундаментальная система решений существует для любого однородного линейного уравнения.

2.1.11 Вид общего решения однородноого линейного уравнения

Рассмотрим однородное линейное уравнение

$$(1)\quad y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_m(x)y = 0; \quad a \le x \le b$$

или

$$l(y) = 0$$

Теорема (вид общего решения однородного линейного уравнения)

Пусть $\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x)$ — ФСР. Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$y = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x),$$

где $c_1,\dots,c_n$ — произвольные константы.

2.1.12 Вид общего решения неоднородноого линейного уравнения

Рассмотрим неоднородное линейное уравнение

$$(1)\quad y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_m(x)y = f(x); \quad a \le x \le b$$

или

$$l(y) = f(x)$$

и соответствующее ему однородное линейное уравнение

$$(2) \quad l(y) = 0$$

Теорема (вид общего решения неоднородного линейного уравнения)

Пусть $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — ФСР (2) и $y_h(x)$ — частное решение (1). Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$y = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) + y_h(x),$$

где $c_1, \dots, c_n$ — произвольные константы.

В $y_h(x)$ вместо h должна стоять буква ч, но латех этого сделать не позволяет.

2.2 Алгоритм метод вариации нахождения частного решения

Метод вариации произвольных постоянных нахождения $y_h(x)$

По теореме о виде общего решения линейного однородного уравнения $y_0 = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x)$ — общее решение уравнения $l(y) = 0$.

Будем искать частное решение $y_h(x)$ в виде:

$$y_h(x) = c_1(x)\varphi_1(x) + \dots + c_n(x)\varphi_n(x),$$

где $c_1(x), \dots, c_n(x)$ — пока неизвестные функции.

Рассмотрим систему уравнений

$$(5) \begin{cases} c_1^{'}(x)\varphi_1(x) + \dots + c_n^{'}(x)\varphi_n(x) = 0 \\ c_1^{'}(x)\varphi_1^{'}(x) + \dots + c_n^{'}(x)\varphi_n^{'}(x) = 0 \\ c_1^{'}(x)\varphi_1^{''}(x) + \dots + c_n^{'}(x)\varphi_n^{''}(x) = 0 \\ \dots \\ c_1^{'}(x)\varphi_1^{(n-2)}(x) + \dots + c_n^{'}(x)\varphi_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ c_1^{'}(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n^{'}(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases}$$

Пусть $a \leq x \leq b$, x — фиксированное $\Rightarrow$ (5) — линейная алгебраическая система относительно $c_i^{'}(x), \quad i = \overline{1, n}$

Определитель системы $= \mathbf{W}(x) \Rightarrow \mathbf{W}(x) \neq 0 \Rightarrow$ по теореме из алгебры (5) имеет единственное решение.

По формулам Крамера:

$$c_1^{'}(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \dots \\ & \dots \\ f & \dots \end{vmatrix}}{\mathbf{W}} = \frac{\mathbf{W}_1(x)}{\mathbf{W}(x)}$$

$$\dots$$

$$(6) \quad c_n^{'}(x) = \frac{\begin{vmatrix} \dots & 0 \\ \dots & \\ \dots & f \end{vmatrix}}{\mathbf{W}} = \frac{\mathbf{W}_n(x)}{\mathbf{W}(x)}$$

Таким образом, $c_i^{'}(x) \quad i = \overline{1, n}$ находится по формуле (6) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad c_k(x) = \int \frac{\mathbf{W}_k(x)}{\mathbf{W}(x)} dx$$

2.3 Обоснование метода вариации

Рассмотрим частный случай $n = 2$:

$$(1) \quad y^{''} + a_1(x)y^{'} + a_2(x)y = f(x)$$

$$(2) \quad y^{''} + a_1(x)y^{'} + a_2(x)y = 0$$

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$$

— ФСР (2)

$$y_0 = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$$

$$y_h = c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x)$$

$$(5) \begin{cases} c_1^{'}(x)\varphi_1(x) + c_2^{'}(x)\varphi_2(x) = 0 \\ c_1^{'}(x)\varphi_1^{'}(x) + c_2^{'}(x)\varphi_2^{'}(x) = f(x) \end{cases}$$

$$c_1(x) = \int \frac{\mathbf{W_1}(x)}{\mathbf{W}(x)} dx \quad c_2(x) = \int \frac{\mathbf{W_2}(x)}{\mathbf{W}(x)} dx$$

Подставляем $c_1(x)$ и $c_2(x)$ в (4) $\Rightarrow$

Покажем, что полученное y_h является решением (1):

$$y_h^{'} = c_1^{'}(x)\varphi_1(x) + c_1(x)\varphi_1^{'}(x) + c_2^{'}(x)\varphi_2(x) + c_2(x)\varphi_2^{'}(x) = c_1(x)\varphi_1^{'}(x) + c_2(x)\varphi_2^{'}(x)$$

$$y_h^{''} = c_1^{'}(x)\varphi_1^{'}(x) + c_1\varphi_1^{''}(x) + c_2^{'}(x)\varphi_2^{'}(x) + c_2(x)\varphi_2^{''}(x) = f(x) + c_1(x)\varphi_1^{''}(x) + c_2(x)\varphi_2^{''}(x) = y$$

$$f(x) + c_1(x)\varphi_1^{''}(x) + c_2(x)\varphi_2^{''}(x) + a_1(x)(c_1(x)\varphi_1^{'}(x) + c_2(x)\varphi_2^{'}(x)) + a_2(x)(c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)$$

$$= f(x) + c_1(x)(\varphi_1''(x) + a_1(x)\varphi_1'(x) + a_2(x)\varphi_1(x)) + a_2(x)(\varphi_2''(x) + a_1(x)\varphi_1''(x) + a_2(x)\varphi_2(x))$$

То есть

$$l(y_h) \equiv f(x)$$

2.4 Пример: $y'' + w^2y = f(x)$

Пример:

Дано:

(1) $y'' + w^2 y = f(x)$; $a \le x \le b$

$w > 0$

Решение:

1. Решим соответствующее ОУ:

(2) $y'' + w^2 y = 0$

Рассмотрим $y_1(x) = \cos wx$

$y_1'(x) = -w \sin$

$y_1''(x) = -w^2 \cos wx \Rightarrow$ решение (2)

$y_2 = \sin wx$ – тоже решение

Рассмотрим W y_1 и y_2:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos wx & \sin wx \\ -w \sin wx & w \cos wx \end{vmatrix} = w(\cos^2 wx + \sin^2 wx) = w \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ y_1 и y_2 образуют ФСР $\Rightarrow$ по Т. 5 общее решение (2) имеет вид

$$y = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx$$

2. Будем искать частное решение уравнения (1) методом вариации:

$$y_ч(x) = C_1(x) \cos wx + C_2(x) \sin wx$$

Согласно алгоритму метода вариации решаем СОЛ

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos wx + C_2'(x) \sin wx = 0 \\ C_1'(x)(-w \sin wx) + C_2'(x)(w \cos wx) = f(x) \end{cases}$$ – определитель $C = \Delta = W = w$

По формулам Крамера:

$$C_1'(x) = \frac{1}{w} \begin{vmatrix} 0 & \sin wx \\ f(x) & w \cos wx \end{vmatrix} = -\frac{1}{w} f(x) \sin wx$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{w} \begin{vmatrix} \cos wx & 0 \\ w \sin wx & f(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{w} f(x) \cos wx$$

Зафиксируем $x_0 \in [a,b]$, возьмём в качестве c_1:

$$C_1(x) = -\frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x} f(t)\sin\omega t\,dt$$

Аналогично:

$$C_2(x) = \frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x} f(t)\cos\omega t\,dt$$

Получаем:

$$y_ч = \left(-\frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x} f(t)\sin\omega t\,dt\right)\cos\omega x + \left(\frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x} f(t)\cos\omega t\,dt\right)\sin\omega x =$$

$$= \frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x}\left[-\sin\omega t\cos\omega x + \cos\omega t\sin\omega x\right] f(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x} f(t)\sin\omega(x-t)\,dt$$

3. По теореме 6 общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x + \frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x} f(t)\sin\omega(x-t)\,dt$$

2.5 Формула Остроградского-Луивилля

Пусть $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — решение однородного линейного уравнения: $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0 \quad a \le x \le b$.

Рассмотрим определитель Вронского:

$$\mathbf{W}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ & \ldots & \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = \sum (\pm) y_{j_1}^{(k1)}(x) y_{j_2}^{(k2)}(x) \ldots y_{j_n}^{(kn)}(x)$$

Сама формула

Пусть x_0 произвольная точка из $[a,b]$. Тогда:

$$\mathbf{W}(x) = \mathbf{W}(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt}$$

2.6 Метод Эйлера (случай простых корней)

$$(1) \quad a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0,$$

где $a_0, \ldots, a_n$ — заданные числа.

Метод Эйлера решения однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами (случай простых корней)

1. Ищем частное решение уравнения (1) в виде

$$y(x) = e^{\lambda x},$$

   λ — число.

2. Вычисляем формулы

$$y^{'}(x) = \lambda e^{\lambda x}$$
$$y^{''}(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$
$$\dots$$
$$y^{(n)}(x) = \lambda^n e^{\lambda x}$$

3. Подставляем эти формулы в (1):

$$a_0\lambda^n e^{\lambda x} + a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \dots + a_n e^{\lambda x} \equiv 0$$
$$e^{\lambda x}(a_0\lambda^n + \dots + a_n) \equiv 0$$

4. так как $e^{\lambda x} \neq 0$, то

$$y = e^{\lambda x} \ - -- $$

   является решением уравнения (1) $\Leftrightarrow$ λ является корнем алгебраического уравнения:

$$(2) \quad a_0\lambda^n + \dots + a_n = 0$$

5. (2) имеет n простых корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n \Rightarrow$ функции $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$ — решение (1).

6. Поажем, что $e^{\lambda_k x}{}_{k=1}^{n}$ — ФСР (1)

   Рассмотрим определитель Вронского $\mathbf{W}$

$$\mathbf{W}(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ & \dots & \\ \lambda_1^{(n-1)} e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n^{(n-1)} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \dots e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ & \dots & \\ \lambda_1^{(n-1)} & \dots & \lambda_n^{(n-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \dots e^{\lambda_n x} \prod (\lambda_j - \lambda_k) \neq 0 \Rightarrow$$

${e^{\lambda_k x}}_{k=1}^{n}$ — ФСР уравнения (1) $\Rightarrow$ общее решение (1) имеет вид:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

3 Линейные дифференциаьные уравнения второго порядка

3.1 Интегрирование с помощью частного решения

$$(1) \quad y^{''} + a_1(x)y^{'} + a_2(x)y = f(x)$$

1. Предположим, что $g(x)$ — частное решение уравнения (1).

   Тогда переходим к новой неизвестной функции $u(x)$ по формуле:

$$y(x) = u(x)g(x)$$
$$y^{'} = u^{'}gug^{'}$$
$$(*)y^{''} = u^{''}g + u^{'}g^{'} + u^{'}g^{'} + ug^{''} = u^{''}g + 2u^{'}g^{'} + ug^{''}$$

2. Подставляем (*) в (1):

$$u^{''}g + 2u^{'}g^{'} + ug^{''} + a_1(u^{'}g + ug^{'}) + a_2ug = 0$$
$$u^{''}g + (2g^{'} + a_1g + a_1g^{'})u^{'} + (g^{''} + a_1g^{'} + a_2g)u = 0$$
$$(2) \quad g(x)u^{''} + b(x)u^{'} = 0$$

3. Замена $v(x) = u^{'}(x)$. Тогда:

$$(3) \quad g(x)v^{'} + bv = 0$$

4. Решаем (3):

$$v(x) = c_1\varphi_1(x) \ ---$$

   Общее решение (3).

5. Возвращаем замену:

$$u = c_1 \int \varphi(x)dx + c_2 = c_1\Phi(x) + c_2$$

6. Возвращаем замену:

   Получим:

$$y = c_1\Phi(x)g(x) + c_2g(x) \ ---$$

   Общее решение уравнения (1).

3.2 Упрощение с помощью замены функции $y^{''} + \frac{1}{x}y^{'} + (1 - \frac{1}{4x^2})y = 0$

$$y^{''} + \frac{1}{x}y^{'} + (1 - \frac{1}{4x^2})y = 0$$

Пусть $y(x) = u(x)z(x)$. Тогда находим $u(x)$ как решение уравнения

$$2u^{'} + \frac{1}{x}$$

$$u^{'} = -\frac{1}{2x}u$$

$$\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}; \quad \ln|u| = -\frac{1}{2}\ln|x| \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}z(x); \quad u(x) = x^{-\frac{1}{2}}$$

Наше исходное уравнение примет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}z^{''} + (\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{x}(\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}} + (1 + \frac{1}{\sqrt{x}})\frac{1}{\sqrt{x}})z = 0$$

$$z^{''} + \frac{1}{\sqrt{x}}z = 0$$

$$z^{''} + z = 0$$

Ответ $y = c_1\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + c_2\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

3.3 Упрощение с помощью замены переменной $y^{''} + \frac{1}{2x}y^{'} - \frac{1}{x}y = 0$

$$y^{''} + \frac{1}{2x}y^{'} - \frac{1}{x}y = 0 \quad x \in (0, \infty)$$

Делаем замену $x = \varphi(t), \quad t = \psi(x)$.
Выбираем ψ как решение уравнения $\psi^{'}z^{''} + a_2(x)z = 0$:

$$\psi^{''}(x) + a_1(x)\psi^{'}(x) = 0$$

Обозначим $v(x) = \psi^{'}(x)$. Тогда:

$$v^{'} + \frac{1}{2x}v = 0$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{2x} + c$$

$$\ln|v| = -\frac{1}{2}\ln|x| + c$$
$$v = x^{-\frac{1}{2}}$$

Возвращаем замену:

$$\psi^{'}(x) = x^{-\frac{1}{2}}$$
$$\psi(x) = 2\sqrt{x}$$

Возвращаем замену:

$$t = 2\sqrt{x}$$
$$x = \frac{t^2}{4}, \quad 0 < t < \infty$$

Исходное уравнение переходит в уравнение:

$$(\psi^{'})^2(x)z^{''} - \frac{1}{x}z = 0$$
$$\frac{1}{x}z^{''} - \frac{1}{x}z = 0$$
$$z^{''} - z = 0$$

— линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

Решаем методом Эйлера

$$x^2 - 1 = 0$$
$$x_1 = 1 \quad x_2 = -1$$

$$\begin{cases} z_1 = e^{\lambda_1 t} = e^t \\ z_2 = e^{\lambda_2 t} = e^{-t} \end{cases}$$

$$z = c_1^t + c_2 e^{-t}$$
$$y(*) = y(\frac{t^2}{4}) = z(t) = z(2\sqrt{x}) = y(x)$$

Ответ: $y = c_1 e^{2\sqrt{x}} + c_2 e^{-2\sqrt{x}}$.

3.4 Метод степенных рядов $y'' - xy = 0$

Рассмотрим уравнение:

$$y'' - xy = 0$$

Метод степенных рядов:

$$(1) \quad y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

Теорема

Предположим, что $a_1(x), a_2(x), f(x)$ — раскладываются в степенной ряд на $[a, b]$. Тогда любое решение уравнения (1) раскладывается в степенной ряд на $[a, b]$.

Пример

$$(1) y'' - xy = 0, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$(2) y(0) = c_1, y'(0) = c_2$$

Решаем задачу Коши 1-2 методом степенных рядов:
Ищем решение в виде:

$$(*) \begin{cases} y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots; \\ y'(x) = a_1 + 2a_2x^2 + \dots + na_nx^n + \dots = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \\ y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k \end{cases}$$

$$y(0)_{(*)} = a_0 = c_1$$

$$y'(0)_{(*)} = a_1 = c_2$$

Подставим (*) в (1)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - x\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k \equiv 0;$$

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{k=1}^{\infty}a_{n-1}x^n \equiv 0;$$

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}]x^n \equiv 0 = 0 + 0x + 0x^2 + \dots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a_2 = 0; \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1} = 0; \quad n = 1, 2, \dots$$

Таким образом,

$$(3)\quad a_{n+2}=\frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)},\quad n=1,2,3,\dots$$

Пусть $k=n-1$. Тогда (3) = (4):

$$(4) a_{k+3}=\frac{a_k}{(k+3)(k+2)},\quad k=0,1,2,\dots$$

Из (4)

$$a_2=0, a_5=0, a_8=0,\dots$$

$$a_0=c_1, a_3=\frac{c_1}{3*2}, a_6=\frac{a_3}{6*5},\dots, a_{3k}=\frac{c_1}{2*3*5*6*\dots*(3k-1)3k}; k=0,1,\dots$$

$$a_1=c_2, a_4=\frac{a_1}{3*4}=\frac{c_2}{3*4}, a_7=\frac{a_4}{6*7},\dots, a_{3k+1}=\frac{c_2}{3*4*6*7*\dots*(3k)(3k+1)}$$

Имеем:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{k=0}^{\infty}a_{3k}x^{3k}+\sum_{k=0}^{\infty}a_{3k+1}x^{3k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}a_{3k+2}x^{3k+2}=$$

$$=c_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{3k}}{2*3*5*6*\dots*(3k-1)3k}+c_2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{3k-1}}{3*4*6*7*(3k)(3k+1)}=$$

$$=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

— ФСР для (1)

3.5 Алгоритм решения простейшей краевой задачи

Простейшая краевая задача имеет вид:

$$1-2\begin{cases}y''+q(x)=f(x), & a\le x\le b\\ y(a)=0, y(b)=0\end{cases}$$

Алгоритм решения краевой задачи 1-2

1. Решаем соответствующее однородное уравнение:

$$(3)\quad y''+q(x)y=0$$

   Находим его ФСР. Пусть $y_1(x), y_2(x)$ — ФСР.

2. Находим $y_h(x)$ — частное решение уравнения (1) методом вариации

3. Получаем общее решение (1)

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_h(x)$$

4. Подставляем формулу из пункта 3 в краевые условия:

$$(4)\begin{cases} c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) + y_h(a) = 0 \\ c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b) + y_h(b) = 0 \end{cases}$$

   Смотрим на (4), как на линейную однородную систему относительно c_1 и c_2.

5. Вычисляем определитель этой системы

$$\delta = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix}$$

6. Если $\delta \neq 0$, то (4) имеет едиственное решение, находим и обозначим его:

$$c_1^0, \quad c_2^0$$

   В этом случае функция $y(x) = c_1^0 y_1(x) + c_2^0 y_2(x) + y_h$ — является единственным решением краевой задачи.

7. Пусть $\delta = 0$. Тогда возможны подслучаи:

   (a) (4) имеет бесконечно много решений, следовательно, задача 1-2 имеет также бесконечно много решений.

   (b) (4) не имеет ни одного решения, следовательно, задача 1-2 тоже не имеет решения.

3.6 Существование решения краевой задачи:

Рассмотри простейшую краевую задачу:

$$1-2\begin{cases} y'' + q(x)y = f(x), \quad a \leq x \leq b \\ y(a) = 0, y(b = 0) \end{cases}$$

Если соответствующая однородная задача:

$$(3)\begin{cases} y'' + q(x)y = 0, \quad a \leq x \leq b \\ y(a) = 0, y(b = 0) \end{cases}$$

имеет только нулевое решение, то исходная задача 1-2 имеет единсвенное решение $\forall f(x)$.

Доказательство:

Предположим, что (3) имеет только нулевое решение.
Повторим предыдущий алгоритм к (3):
Пусть $y_1(x), y_2(x), y_h(x)$ — ФСР однородного уравнения.

$$y_h(x) \equiv 0, y = c_1 y(x) + c_2 y_2(x)$$

Подставляем в краевые условия:

$$(4) \begin{cases} c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) = 0, \quad a \le x \le b \\ c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b) = 0 \end{cases}$$

Вычисляем δ системы (4):

Если $\delta = 0$, то однородная система (4) всегда имеет бесконечно много решений $\Rightarrow$ существует ненулевое решение (3) $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow \delta \neq 0 \Rightarrow$ решение 1-2 можно найти и оно будет единственным.

4 Линейные системы

4.1 Определения

4.1.1 Нормальная линейная система, её векторная запись

Нормальная неоднородная линейная система

Нормальная неоднородная линейная система имеет вид:

$$(1)\begin{cases} y_1^{'} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x); \\ y_2^{'} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x); \\ \dots \\ y_n^{'} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x); \end{cases},$$

где x — неизветсные переменные $a \leq x \leq b$, $a_{ij}(x), f_i(x)$ — заданные непрерывные функции, y_i — неизвестные функции.

Векторная запись нормальной неоднородной линейной системы

Обозначим

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

— вектор-функция

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

— вектор-функция

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ & \dots & \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

— матрица-функция

По определению:

$$Y^{'}(x) = \begin{pmatrix} y_1^{'}(x) \\ \dots \\ y_n^{'}(x) \end{pmatrix}$$

$$A(x)Y(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x)y_1 + \dots + a_{1n}(x)y_n \\ \dots \\ a_{n1}(x)y_1 + \dots + a_{nn}(x)y_n \end{pmatrix}$$

$A(x)Y(x) + F(x)$ — вектор соответствующий правой части (1). Тогда

$$Y^{'} = A(x)Y + F(X)$$

— векторная запись (1).

Определение нормальной однородной линейной системы

Линейная система (1) называется однородной, если $\forall f_n(x) = 0 \quad i = \overline{1, n}$

$$(2) \quad Y^{'} = A(x)Y$$

или

$$\begin{cases} y_1^{'} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n; \\ y_2^{'} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n; \\ \dots \\ y_n^{'} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n; \end{cases},$$

где x — неизветсные переменные $a \leq x \leq b$, $a_{ij}(x)$ — заданные непрерывные функции, y_i — неизвестные функции.

4.1.2 Решение системы

Определение решения нормальной линейной системы

Говорят, что дифференцируемые функции $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ образуют решение системы (1), если при подстановке их в уравнение вместо соответствующих y получается тождество:

$$y_k^{'} = a_{k1}(x)\varphi_1(x) + dots + a_{kn}\varphi_n(x) + f_k(x); \quad k = \overline{1, n}$$

В векторной форме:

Дифференцируемая функция $\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \dots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}$ является решением (1), если:

$$\Phi^{'}(x) = A(x)\Phi(x) + F(x)$$

4.1.3 Задача Коши для системы

$$(1) \begin{cases} y_1^{'} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x); \\ y_2^{'} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x); \\ \dots \\ y_n^{'} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x); \end{cases},$$

Определение задачи Коши нормальной линейной системы

Пусть $x_0 \in [a, b]$, $y_1^0, \ldots, y_n^0$ — заданные числа.

Начальными условиями для системы (1) в точке x_0 называются равенства:

$$y_1(x_0) = y_1^0$$
$$y_2(x_0) = y_2^0$$
$$\ldots$$
$$y_n(x_0) = y_n^0$$

Задача 1-3 называется задачей Коши для системы (1).

В векторной форме:

$$Y' = A(x)Y(x) + F(x), \quad Y(x_0) = Y^0,$$

где $Y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \ldots \\ y_n^0 \end{pmatrix}$

4.1.4 Линейно зависимые и линейно независимые вектор-функции

Определение линейно зависимых вектор-функций

Пусть $\Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x) \in R^n, \quad a \leq x \leq b$. Эти вектор-функции называются линейно зависимыми на $[a, b]$, если:

$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — числа не все равные 0 : $\alpha_1\Phi_1(x) + \alpha_n\Phi_n(x) = 0$

Определение линейно независимых вектор-функций

Пусть $\Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x) \in R^n, \quad a \leq x \leq b$. Эти вектор-функции называются линейно независимыми на $[a, b]$, если:

$\alpha_1\Phi_1(x) + \alpha_n\Phi_n(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \alpha_i = 0 \quad i = \overline{1, n}$

4.1.5 Определитель Вронского вектор-функций

Определение определителя Вронского вектор-функций

Пусть $\Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x) \in R^n$ их определителем Вронского называется следующий определитель:

$$W = |\Phi_1(x)\Phi_2(x) \ldots \Phi_n(x)|$$

4.1.6 Фундаментальная система решений линейной системы

Определение фундаментальной системы решений нормальной линейной системы

Рассмотрим (1) $Y' = A(x)Y(x), \quad a \leq x \leq b, \quad Y(x) \in R^n$ $A(x)$ — размер nxn.

Линейно независимые решения $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)$ называются фундаментальной системой решений.

4.1.7 Фундаментальная матрица решений однородной системы

Определение фундаментальной матрицы решений нормальной однородной системы

Матрица $T(x) = (Y_1(x)Y_2(x)\dots Y_n(x))$ называется фундаментальной матрицей для однородной системы $Y^{'} = A(X)Y(x), \quad a \le x \le b$, если:

$$Y_1(x), \dots, Y_n(x)$$

— ФСР однородной системы.

4.1.8 Линейные системы с постоянными коэффициентами

Определение однородной линейной системы с постоянными коэффициентами

Линейная однородная система с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$\begin{cases} y_1^{'} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n; \\ y_2^{'} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n; \\ \dots \\ y_n^{'} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n; \end{cases},$$

a_{ij} — заданные числа.

В векторной записи:

$$Y^{'} = AY$$

— где $A = (a_{ij})_{ij=1}^{n}, Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$

4.1.9 Собственные значения и собственные векторы матрицы

Пусть

$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ & \dots & \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$ — числовая матрица.

Число λ называется собственным значением матрицы A, если существует вектор

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} \neq 0 \quad : \quad AV = \lambda V$$

А сам вектор V — называтся собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному значению λ.

4.1.10 Матричная экспонента

$$(1) \quad E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{n!}A^n + \dots$$

Определение матричной экспоненты

Сумма ряда (1) обозначается

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

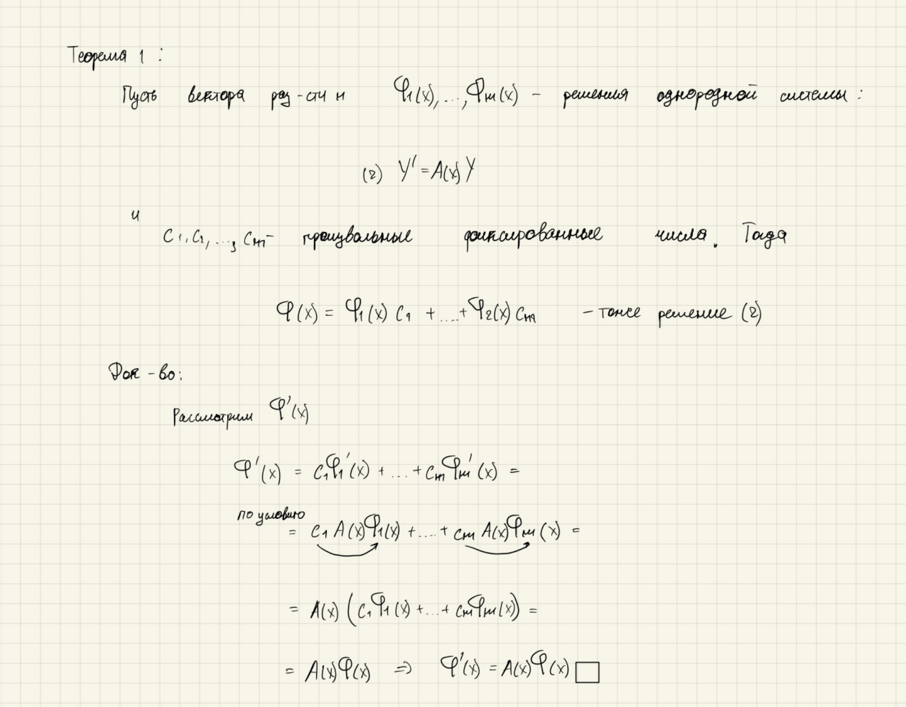
и называется матричной экспонентой.

4.2 Извинения

Я не успеваю всё качественно проверить и напечатать, хочу спать, приношу извинения за неудобства.

4.3 Теоремы, алгоритмы, примеры

4.3.1 Свойства решений однородной системы



Теорема 1:

Пусть вектора ф-ций $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ – решения однородной системы:

$$(2) \quad Y' = A(x)Y$$

и $C_1, C_2, \dots, C_m$ – произвольные фиксированные числа. Тогда

$$\varphi(x) = \varphi_1(x)C_1 + \dots + \varphi_2(x)C_m$$ – тоже решение (2)

Док-во:

Рассмотрим $\varphi'(x)$

$$\varphi'(x) = C_1\varphi_1'(x) + \dots + C_m\varphi_m'(x) =$$

по условию

$$= C_1 A(x)\varphi_1(x) + \dots + C_m A(x)\varphi_m(x) =$$

$$= A(x)\left(C_1\varphi_1(x) + \dots + C_m\varphi_m(x)\right) =$$

$$= A(x)\varphi(x) \Rightarrow \varphi'(x) = A(x)\varphi(x) \quad \square$$

4.3.2 Необходимое условие линейной зависимости вектор-функций

Теорема 2:

Если $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x) \in \mathbb{R}^n$ – линейно зависимы на $[a, b]$, то их определитель Вронского $\forall x \in [a, b]$ равен 0

Док-во:

Фиксируем произвольный $x \in [a, b]$ и рас-м W:

$$W = \left| \varphi_1(x) \varphi_2(x) \ldots \varphi_n(x) \right|$$

Столбцы этого определителя линейно зависимы (согласно условию) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow W(x) \equiv 0 \qquad \square$$

4.3.3 Условие линейной независимости решений однородной системы

в силу единственности решения (3) $\varphi(x) \equiv 0$, то есть

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \ldots + \alpha_n \varphi_n(x) \equiv 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \alpha_i = 0 \quad i = \overline{1,n} \Rightarrow \text{противоречие} \qquad \square$$

Теорема 3:

Пусть $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ – линейно независимое решение ОС (1) $Y' = A(x) Y$, $x \in [a, b]$.

Тогда:

$$\forall x \in [a, b] \quad W(x) \neq 0$$

Док-во: От противного. Предположим, что

$$\exists x_0 \in [a, b] \quad W(x_0) = 0.$$

По теореме из алгебры, его столбцы линейно зависимы, т.е.

$$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{ – числа не все равные нулю: } \alpha_1 \varphi_1(x) + \ldots + \alpha_n \varphi_n(x) = 0 \quad (2)$$

Обозначим, через $\varphi(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \ldots + \alpha_n \varphi_n(x)$ по теореме 1 $\varphi(x)$ – решение (1) в силу (2) $\varphi(x_0) = 0$, другими словами, $\varphi(x)$ – является решением следующей задачи Коши:

$$(3) \quad Y' = A(x) Y, \quad Y(x_0) = 0$$

Фун-ия $Y(x) \equiv 0$ очевидно явл. решением (3) $\Rightarrow$

4.3.4 Существование ФСР

Рассмотрим (1) $Y' = A(x) Y$, $a \leq x \leq b$, $Y(x) \in \mathbb{R}^n$ $A(x)$ – размер $n \times n$.

Теорема 4.

Система (1) всегда имеет ФСР.

Док-во:

Пусть $x_0 \in [a, b]$. Рас-м задачу Коши для системы

$$Y' = A(x)Y, \quad Y(x_0) = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 \neq 0 \text{ - любое число}$$

Обозначим $\Phi_1(x)$ - решение этой ЗК. Рас-м другую задачу Коши:

$$Y' = A(x)Y, \quad Y(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_2 \neq 0 \text{ - любое число}$$

Обозначим $\Phi_2(x)$ - решение это ЗК.

. . . . .

Рас-м последнюю задачу Коши:

$$Y' = A(x)Y, \quad Y(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}, \quad \gamma_n \neq 0$$

Обозначим через $\Phi_n(x)$ её решение

Рас-м

$$W(x_0) = \left| \Phi_1(x_0) \ldots \Phi_n(x_0) \right| = \begin{vmatrix} \gamma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \gamma_n \end{vmatrix} = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \ldots \cdot \gamma_n \neq 0$$

Таким образом, решения $\Phi_1 \ldots \Phi_n$ - линейно независимы $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x)$ - ФСР.

Т.д.

4.3.5 Вид общего решения однородной системы

Теорема 5:

Пусть $\Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x)$ – ФСР системы

$$(1) \quad Y' = A(x)Y, \quad a \le x \le b$$

Тогда общее решение системы (1) имеет вид:

$$(2) \quad Y(x) = C_1\Phi_1(x) + \ldots + C_n\Phi_n(x),$$ где $\forall C_i$ $i = \overline{1,n}$ – произвольные константы.

Док-во:

Очевидно, что при $\forall C_i$ $i = \overline{1,n}$ (2) будет решением (1) (согласно Т. 1).

Покажем, что (2) содержит все решения (1):

Пусть $Z(x)$ – произвольное решение (1), $x_0 \in [a, b]$.

Рас-м линейную алгебраическую систему:

$$(3) \begin{cases} \alpha_1 \varphi_{11}(x_0) + \alpha_2 \varphi_{12}(x_0) + \ldots + \alpha_n \varphi_{1n}(x_0) = z_1(x_0) \\ \alpha_1 \varphi_{21}(x_0) + \alpha_2 \varphi_{22}(x_0) + \ldots + \alpha_n \varphi_{2n}(x_0) = z_2(x_0) \\ \ldots \\ \alpha_1 \varphi_{n1}(x_0) + \alpha_2 \varphi_{n2}(x_0) + \ldots + \alpha_n \varphi_{nn}(x_0) = z_n(x_0) \end{cases},$$

где φ_{ij} – координаты $\Phi_i(x)$ и z_i координаты $Z(x)$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – неизвестные величины.

Определитель этой системы:

$$\left| \Phi_1(x_0) \quad \Phi_2(x_0) \ldots \Phi_n(x_0) \right| = W(x_0) \ne 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (3) имеет решение $C_1^0, \ldots, C_n^0$

Обозначим $\Phi(x) = C_1^0\Phi_1(x) + \ldots + C_n^0\Phi_n(x)$ по Т. 1 $\Phi(x)$ решение (1),

а в силу (3) $\Phi(x_0) = Z(x_0)$

Таким образом, $\Phi(x)$ и $Z(x)$ – решение (1) с одинаковыми н.у. в т. x_0,

другими словами, являются решениями ЗК $Y' = A(x)Y$, $Y(x_0) = Z(x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в силу свойств ЗК $Z(x) \equiv \Phi(x_0) = C_1^0\Phi_1(x) + \ldots + C_n^0\Phi_n(x)$ $\square$

4.3.6 Вид общего решение неоднородной системы

(1) $Y' = A(x)Y + F(x)$, $a \le x \le b$, $A = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^{n}$, $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$, $F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$

(2) $Y' = A(x)Y$

Т.5: Пусть $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)$ – фср (2). Тогда общее решение (2) имеет вид

(3) $Y = C_1\Phi_1(x) + \dots + C_n\Phi_n(x)$

Теорема 6:

Пусть $\{\Phi_k(x)\}_{k=1}^{n}$ – ФСР (2), $Y_ч$ – частное решение (1). Тогда общее решение (1) имеет вид

(4) $Y = C_1\Phi_1(x) + \dots + C_n\Phi_n(x) + Y_ч$

Док-во:

Рассмотрим:

$$\left(C_1\Phi_1(x) + \dots + C_n\Phi_n(x) + Y_ч(x)\right)' = C_1\Phi_1'(x) + \dots + C_n\Phi_n'(x) + Y_ч'(x) =$$

$$= C_1A(x)\Phi_1(x) + \dots + C_nA(x)\Phi_n(x) + \underbrace{A(x)Y_ч(x) + F(x)}_{Y_ч'(x)} =$$

$$= A(x)\left[C_1\Phi_1(x) + \dots + C_n\Phi_n(x) + Y_ч(x)\right] + F(x) \equiv \left(C_1\Phi_1(x) + \dots + C_n\Phi_n(x) + Y_ч(x)\right)' \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad \forall C_1, \dots, C_n$ (4) даёт решение (1).

Докажем, что (4) содержит все решения (1):

Пусть $Z(x)$ – произвольное решение (1), обозначим

$$W(x) = Z(x) - Y_ч(x)$$

Рассмотрим

$$W'(x) = Z'(x) - Y_ч'(x) \equiv A(x)Z(x) + F(x) - \left(A(x)Y_ч(x) + F(x)\right) \equiv$$

$$\equiv A(x)\left[Z(x) - Y_ч(x)\right] \Rightarrow W(x) \text{ – решение (2) по}$$

теореме 5 $\exists C_1^0, \dots, C_n^0$ $\underbrace{W(x)}_{Z(x) - Y_ч(x)} = C_1^0\Phi_1(x) + \dots + C_n^0\Phi_n(x)$;

$Z(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k^0\Phi_k(x) + Y_ч(x) \Rightarrow Z$ содержится в (4),

следовательно (4) – общее решение. □

4.3.7 Свойства фундаментальных матриц

Свой-ва фундаментальной матрицы:

1. Пусть $T(x)$ – фунд. ма-ца, $a \leq x \leq b$. Тогда

$$\forall x \in [a,b] \quad \exists T^{-1}(x)$$

В самом деле

$$\det T(x) = W(x) \neq 0 \Rightarrow \exists T^{-1}(x)$$

2. $T'(x) = A(x)T(x)$

В самом деле $T'(x) = (Y_1'(x), \ldots, Y_n'(x)) = (A(x)Y_1(x) \ldots A(x)Y_n(x)) \ominus$

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right)_{i,j=1}^{n}$$

если $B = (B_1 \ldots B_n)$, то $AB = (AB_1 \ldots AB_n)$

$$\ominus\ A(x)(Y_1 \ldots Y_n) = A(x)T(x)$$

3. Пусть $T(x)$ – ФМ (2) $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. Тогда

общее решение (2) и его можно представить

$$Y = T(x)C$$

В самом деле

$$T(x)C = (Y_1 \ldots Y_n)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1 Y_1 + c_2 Y_2(x) + \ldots + c_n Y_n(x)$$

4.3.8 Метод вариации нахождения частного решения

- (1) $Y' = A(x)Y + F(x)$, $a \leq x \leq b$, $A = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^{n}$

Нахождение $Y_ч(x)$ (1) методом вариации произвольных постоянных

Пусть $Y_1(x), \ldots, Y_2(x)$ – ФСР соотв. однородной системы (2) $Y' = A(x)Y$

$$Y_0 = c_1 Y_1(x) + c_n Y_n(x)$$

Запишем $Y_ч(x)$ в виде

$$Y_ч(x) = C_1(x)Y_1(x) + \ldots + C_n(x)Y_n(x) \underset{св\text{-}во\ 3}{=} T(x)C(x),$$

где $T(x) = (Y_1(x) \ldots Y_n(x))$

(3) $Y_ч = T(x)C(x)$

$$Y_ч'(x) = T'(x)C(x) + T(x)C'(x)$$

Подставим эти формулы в (1):

$$T'(x)C(x) + T(x)C'(x) = A(x)T(x)C(x);$$

Согласно свой-ву (2):

$$\cancel{A(x)T(x)C(x)} + T(x)C'(x) = \cancel{A(x)T(x)C(x)} + F(x)$$

$$T^{-1}(x)\cdot\big|\ T(x)C'(x) = F(x)$$

$$\underbrace{T^{-1}(x)T(x)}_{E}C'(x) = T^{-1}(x)F(x);$$

$$C'(x) = T^{-1}(x)F(x) \Rightarrow C(x) = \int_{x_0}^{x} T^{-1}(t)F(t)dt, \quad x_0 \in [a, b]$$

Подставляем C в (3) и получаем

$$Y_ч = T(x)\int_{x_0}^{x} T^{-1}(t)F(t)dt$$

4.3.9 Формула Коши

Формула Коши.

Задача Коши:

$$(1)\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), & y_1(x_0) = y_1^0 \\ \ldots & \ldots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x), & y_n(x_0) = y_n^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} y' = A(x)y + F(x), \\ y(x_0) = y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \ldots \\ y_n^0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$T(x) = (y_1(x) \ldots y_n(x))$

Пусть $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — ф.с.р. одн. сист. $y' = A(x)y$. По методу вариации находим $y_ч(x) = T(x)\int T^{-1}(x)F(x)dx = T(x)\int_{x_0}^{x} T^{-1}(t)F(t)dt$ — ч. реш. $y' = A(x)y + F(x)$. По т. 5 общ. реш. системы $y' = A(x)y + F(x)$ имеет вид

$y(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x) + y_ч(x)$, или $y(x) = T(x)c + T(x)\int_{x_0}^{x} T^{-1}(t)F(t)dt$ (2).

Подст. эту ф-лу в нач. усл. $y(x_0) = y^0$: $T(x_0)c = y^0 \Rightarrow c = T^{-1}(x_0)y^0 \rightarrow$

$\rightarrow$ подст. в (2): $y(x) = T(x)T^{-1}(x_0)y^0 + T(x)\int_{x_0}^{x} T^{-1}(t)F(t)dt$ (3).

(3) даёт реш. задачи Коши (1), (3) — формула Коши.

4.3.10 Нахождение собственных значений и собственных векторов матрицы

Нахождение собственного значения и собственных векторов:

Пусть V – с.в ~ с.з. λ, т.е. $AV = \lambda V$;

$(A - \lambda E)V = 0$;

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(1) \begin{cases} (a_{11} - \lambda)v_1 + a_{12} v_2 + \dots + a_{1n} v = 0 \\ a_{21} v_2 + (a_{22} - \lambda)v_2 + \dots + a_{2n} v_2 = 0 \\ \dots \\ a_{n1} v_n + a_{n2} v_n + \dots + (a_{nn} - \lambda) v_n = 0 \end{cases}$$

– линейная однородная алгебраическая система относительно $v_1, \dots, v_n$

Т.к. $V \neq 0$, то система (1) имеет ненулевое решение $\Rightarrow$ её определитель

$$\Delta = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \iff (-1)^n \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n = 0 \; (2)$$

Вывод: собственное значение λ должно быть корнем ур-ия (2).

4.3.11 Метод Эйлера (случай простых собственных значений)(включая лемму)

Рассмотрим:

$$Y' = AY \quad (1), \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$$

Метод Эйлера решения (1)

Идея: Будем искать частное решение нашей системы в виде $Y = e^{\lambda x} V = \begin{pmatrix} e^{\lambda x} v_1 \\ \vdots \\ e^{\lambda x} v_n \end{pmatrix}$, где

λ – пока неизвестное число, а V – пока неизвестный числовой вектор

Вычисляем $Y'(x) = \lambda e^{\lambda x} V$

Подставляем эти формулы в систему (1):

$$\lambda e^{\lambda x} V = A(e^{\lambda x} V);$$

$$\lambda e^{\lambda x} V = e^{\lambda x} AV$$

$$e^{\lambda x} \neq 0 \Rightarrow \lambda V = AV$$

или

$$(2) \quad AV = \lambda V$$

Вывод, чтобы Y – было решением системы (1) $\Leftrightarrow$ когда выполняется (2), причём $V \neq 0$. $\Leftrightarrow$ согласно определению и (2) λ – с.з. A и V – с.в.

Случай простых собственные значений:

Пусть $p(\lambda) = |A - \lambda E|$.

Предположим, что характеристическое ур-ие $p(\lambda) = 0$ имеет n различных корней: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

Находим соответствующие собственные вектора:

$V_1 \sim \lambda_1$

. . .

$V_n \sim \lambda_n$

Согласно методу Эйлера мы нашли n частных решений.

$$\left.\begin{aligned} Y_1(x) &= e^{\lambda_1 x} V_1, \\ &\dots \\ Y_n(x) &= e^{\lambda_n x} V_n. \end{aligned}\right. \quad \text{— решения (1)}$$

4.3.12 Пример $Y' = AY$

Пример:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 - y_3 \\ y_2' = -y_1 + y_2 + y_3 \\ y_3' = y_1 - y_3 \end{cases} \Leftrightarrow Y' = AY$$

Решаем методом Эйлера:

Рассмотрим матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Выписываем характеристическое ур-ие:

$$|A - \lambda E| = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(1-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) + 1(-2)(1) + 0 - (1)(1-\lambda)(-1) - (-1)(-2)(-1-\lambda) =$$

$$= \left((1-2\lambda+\lambda^2) - 2\right)(-1-\lambda) - 2 + 1 - \lambda = (-1-2\lambda+\lambda^2)(-1-\lambda) - 1 - \lambda =$$

$$= \cancel{1} + \cancel{\lambda} + 2\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^2 - \lambda^3 - \cancel{1} - \cancel{\lambda} = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda$$

$$\lambda_1 = 0; \ \lambda_2 = -1; \ \lambda_3 = 2$$

Найдём собственный вектор соответствующий собственному значению λ_1

Для этого решаем систему

$$(A-\lambda_1 E)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} v_1 - 2v_2 - v_3 = 0 \Rightarrow -2v_2 = 0 \\ -v_1 + v_2 + v_3 = 0 \qquad v_2 = 0 \\ v_1 - v_3 = 0 \Rightarrow v_1 = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2v_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ v_1 = v_3 \end{cases} \Rightarrow v_1 \text{ и } v_3 \text{ – любые числа} \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пусть $v_1 = v_3 = 1$

$$(A-\lambda_2 E)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2v_1 - 2v_2 - v_3 = 0 \qquad 2v_2 + v_3 = 0 \\ -v_1 + 2v_2 + v_3 = 0 \qquad 2v_2 + v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = 2v_2 \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 0 \end{cases}$$

$$(A-\lambda_3 E)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -v_1 - 2v_2 - v_3 = 0 \\ -v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 - 3v_3 = 0 \Rightarrow v_1 = 3v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2v_2 - 4v_3 = 0 \\ -v_2 - 2v_3 = 0 \\ v_1 = 3v_3 \end{cases} \Rightarrow v_2 = -2\underset{\text{любое}}{\underbrace{v_3}} \Rightarrow V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Выписываем ФСР:

$$Y_1 = e^{\lambda_1 x} V_1 = V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ Y_2 = e^{-x} V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ Y_3 = e^{2x}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение:

$$Y = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ e^{-x} \\ -2e^{-x} \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 3e^{2x} \\ -2e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + 3c_3 e^{2x} \\ c_2 e^{-x} - 2c_3 e^{2x} \\ c_1 - 2c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} \end{pmatrix}$$

Ответ: $y_1 = c_1 + 3c_3 e^{2x}$, $y_2 = c_2 e^{-x} - 2c_3 e^{2x}$, $y_3 = c_1 - 2c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$

4.3.13 Лемма $|a_{ij}^{(m)}| \leq n^{m-1}d^m$

Лемма:

Справедливы неравенства:

(2) $|a_{ij}^{(k)}| \leq n^{k-1} d^k$, где $d = \max\limits_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|$; $k = 1, 2, \ldots$

Док-во: Докажем по индукции:

Пусть $k = 1$ $|a_{ij}| \leq d$ – очевидно выполняется

Предположим, что (2) справедливо для некоторого k.

Докажем, что k справедливо для $k+1$:

Рассмотрим:

$$|a_{ij}^{(k+1)}| = \left|\sum_{l=1}^{n} a_{il}^{(k)} a_{lj}\right| \leq \sum_{l=1}^{n} \underbrace{|a_{il}^{(k)}|}_{d^k} \overbrace{|a_{lj}|}^{\leq d} \leq \sum_{l=1}^{n} n^{k-1} d^k d = n d^{k+1}$$

Таким образом:

$$|a_{ij}^{(k+1)}| \leq n^k d^{k+1} \quad \square$$

4.3.14 Существование e^A

$$(1) \quad E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \ldots$$

Теорема 7:

Ряд (1) сходится при любой матрице A.

Док-во:

По определению сходимости (1) надо доказать, что

$$\forall\, 1 \leq i, j \leq n \quad \exists \lim_{m \to \infty} \underbrace{\left(\delta_{ij} + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} a_{ij}^{(k)}\right)}_{S_{ij}^{(m)}}$$

Отметим, что i и j – фиксированные номера.

Заметим, что $S_{ij}^{(m)}$ – это частичные суммы числового ряда (3) $\delta_{ij} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_{ij}^{(k)}}{k!}$

Таким образом, надо доказать, что (3) – сходится. Будем использовать признак мажорации:

Рассмотрим $\left|\frac{a_{ij}^{(k)}}{k!}\right| \underset{\text{лемма}}{\leq} \frac{1}{k!} n^{k-1} d^k$

Следовательно, ряд (3) мажорируется следующим рядом

$$(4) \quad 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} n^{k-1} d^k =$$

$$= 1 + \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nd)^k}{k!}}_{\text{сходится}} = 1 + \frac{1}{n}\left(e^{nd} - 1\right)$$

Следовательно, (3) сходится по признаку мажорации.

$\square$

4.3.15 e^{Ax} — фундаментальная матрица системы $Y' = AY$.

Рассмотрим однородную систему с постоян. коэффициентами:

$$(1) \quad Y' = AY, \quad x \in R, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

Теорема 8:

Матрица e^{Ax} является фундаментальной матрицей системы (1).

Док-во:

Пусть $e^{Ax} = \left(Y_1(x)\; Y_2(x) \dots Y_n(x)\right)$

Покажем, что $Y_1(x), \dots, Y_n(x)$ образуют ФСР (1):

Рассмотрим $e^{Ax} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k}_{\text{степенной ряд, сходящийся для } \forall x \in R}$, x — переменная

По свой-ву степенных рядов существует $\frac{d}{dx} e^{Ax} = \frac{d}{dx}\left(E + xA + \dots + \frac{x^k}{k!}A^k + \dots\right) =$

$$= A + xA^2 + \frac{3x^2}{3!}A^3 + \dots + \frac{kx^{k-1}}{k!}A^k + \dots = A + xA^2 + \frac{x^2}{2!}A^3 + \dots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}A^k + \dots =$$

$$= A\left(E + xA + \frac{x^2}{2!}A^2 + \dots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}A^{k-1} + \dots\right) = Ae^{Ax}$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dx} e^{Ax} \equiv Ae^{Ax};$$

$$\left(Y_1'(x)\; Y_2'(x) \dots Y_n'(x)\right) \equiv A\left(Y_1(x)\; Y_2(x) \dots Y_n(x)\right);$$

$$\left(Y_1'(x)\; Y_2'(x) \dots Y_n'(x)\right) \equiv \left(AY_1(x)\;\; AY_2(x) \dots AY_n(x)\right);$$

$$Y_j'(x) \equiv AY_j(x), \quad j = \overline{1,n} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $Y_1(x), \dots, Y_n(x)$ — решение (1)

Покажем, что они линейно независимы, то есть образуют ФСР:

Рассмотрим их определитель Вронского:

$$W(x) = \left| Y_1(x)\ Y_2(x) \dots Y_n(x) \right| = \det e^{Ax}\Big|_{x=0} = \det e^{0} = \det E = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $Y_1(x), \dots, Y_n(x)$ - ФСР $\Rightarrow$ e^{Ax} – фундаментальная матрица

$\square$

4.3.16 Формула Коши для линейных систем с постоянными коэффициентами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$e^{A} = E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^k + \dots$$

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n \\ \dots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases} \Leftrightarrow Y' = AY, \quad e^{AX} \text{ - фунд. мат-ца этой системы}$$

Формула Коши решения ЛСсПК:

Рассмотрим:

$$(1)\quad Y' = AY + F(x),\ A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

Была формула Коши для произвольной линейной системы:

$$Y' = A(x)Y + F(x), \quad -\infty < x < +\infty$$

Любое решение этой системы равно:

$$Y(x) = T(x)T^{-1}(x_0)\,Y(0) + T(x)\int_{x_0}^{x} T^{-1}(t)\,F(t)\,dt$$

В нашем случае (1):

$$x_0 = 0,\ T(x) = e^{Ax}$$

По формуле Коши любое решение (1) даётся формулой:

$$Y(x) = e^{Ax}\left(e^{0}\right)^{-1} Y(0) + e^{Ax}\int_{0}^{x} \left(e^{At}\right)^{-1} F(t)\,dt =$$

$$= e^{Ax}\,Y(0) + \int_{0}^{x} e^{Ax} e^{-At} F(t)\,dt = e^{Ay}\,Y(0) + \int_{0}^{x} e^{A(x-t)} F(t)\,dt$$

$$\boxed{e^{Ay}\,Y(0) + \int_{0}^{x} e^{A(x-t)} F(t)\,dt}$$

4.3.17 Пример: нахождение e^A

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad e^A = ?$$

Решение:

Рассмотрим ОЛС с ПК для

$$(1) \quad Y' = AY \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

Решаем (1) методом Эйлера:

1. Найдём собственное значение матрицы A:

Рассмотрим х-ое ур-ие для A

$$\det(A - \lambda E) = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$8 - 6\lambda + \lambda^2 - 3 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

$$D = 36 - 20 = 4^2$$

$\lambda_1 = \frac{6+4}{2} = 5$, $\lambda_2 = \frac{6-4}{2} = 1$ — собственные значения A

2. Найдём собственный вектор V соответствующий λ.

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

v_1, v_2 — образуют ненулевое решение системы

$$(A - \lambda_1 E)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 0 \\ 3v_1 + 3v_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = -1 \\ v_2 = 1 \end{cases}$$

Таким образом, $V = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, собственный вектор $\sim \lambda_1$

Найдём с.в. для λ_2

$$(A-\lambda_2 E)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} -3v_1+v_2=0 \\ 3v_1-v_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1=1 \\ v_2=3 \end{cases}$$

$$V_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Выписываем ФСР для (1):

$$Y_1=e^{\lambda_1 x}V_1=\begin{pmatrix} -e^x \\ e^x \end{pmatrix}$$

$$Y_2=e^{\lambda_2 x}V_2=\begin{pmatrix} e^{5x} \\ 3e^{5x} \end{pmatrix}$$

4. Общее решение системы (1):

$$Y=C_1Y_1(x)+C_2Y_2(x)=C_1\begin{pmatrix} e^{-x} \\ e^x \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} e^{5x} \\ 3e^{5x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1e^{-x}+C_2e^{5x} \\ C_1e^x+3C_2e^{5x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

Общее решение (1)

$$y_1(x)=-C_1e^x+C_2e^{5x}$$
$$y_2(x)=C_2e^x+3C_2e^{5x}$$

5. $e^A=?$

6. Рассмотрим $e^{Ax}=\left(z_1(x)\ z_2(x)\right)$ — фу-ая матрица системы (1),

т.е. $z_1(x)$, $z_2(x)$ – решение (1)

Если $x=0$, то $e^0=E=\left(z_1(0),\ z_2(0)\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow z_1(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $z_2(0)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Найдём $z_1(x)$:

$z_1(x)$ – решение, уд-ие нач-у усл-ю $z_1(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

т.е. координаты $z_1(x)$ – являются решением задачи Коши

$$\begin{cases} y_1'=2y_1+y_2, & y_1(0)=1 \\ y_2'=3y_1+4y_2 & y_2(0)=2 \end{cases} \quad (*)\begin{cases} y_1=-C_1e^x+C_2e^{5x} \\ y_2=C_1e^x+3C_2e^{5x} \end{cases}$$

Подставляем (*) в систему

$$\begin{cases} y_1(0) = -c_1 + c_2 = 1 \\ y_2(0) = c_1 + 3c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1^0 = -\frac{3}{4} \\ c_2^0 = \frac{1}{4}, \end{cases}$$

$$y_1^0 = \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{5x}$$

$$y_2^0 = -\frac{3}{4}e^x + \frac{3}{4}e^{5x} \Rightarrow z_1(x) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{5x} \\ -\frac{3}{4}e^x + \frac{3}{4}e^{5x} \end{pmatrix}$$

Найдём $z_2(x)$

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2 \end{cases}, \quad \begin{matrix} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 1 \end{matrix} \quad (*) \begin{cases} y_1 = -c_1 e^x + c_2 e^{5x} \\ y_2 = c_1 e^x + 3c_2 e^{5x} \end{cases}$$

$\ldots$

$$z_2(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{5x} \\ \frac{1}{4}e^x + \frac{3}{4}e^{5x} \end{pmatrix}$$

Таким образом,

$$e^{Ax} = \left(z_1(x), z_2(x)\right)\Big|_{x=1} = \left(z_1(1), z_2(1)\right) = e^A$$

Ответ: $e^A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}e + \frac{1}{4}e^5 & -\frac{1}{4}e + \frac{1}{4}e^5 \\ -\frac{3}{4}e + \frac{3}{4}e^5 & \frac{1}{4}e + \frac{3}{4}e^5 \end{pmatrix}$