Содержание

1 Глава 1

1.1 Случайные события, классификация событий, операции над ними.

Определение случайного события:

Пусть Ω — множество элементарных исходов эксперимента. Случайным событием называется любое подмножество множества Ω.

Определение достоверного события:

Достоверным событием называется событие Ω, которому благоприятствует каждый исход эксперимента.

Определение невозможного события:

Невозможным событием называется пустое множество, которому не благоприятствует ни один исход эксперимента.

Определение суммы событий:

Суммой событий A и B называется событие $C = A \cup B$, которому благоприятствуют исходы, принадлежащие хоть одному из событий A или B.

Определение произведения событий:

Произведением событий A и B называется событие $C = A \cap B$, которому благоприятствуют исходы и события A, и события B.

Определение несовместных событий:

Случайные события A и B называются несовместными, если $A \cap B = \varnothing$.

Определение противоположного события:

Событием, противоположным событию A называется событие $\overline{A}$, которое состоит из исходов, не благоприятствующих A.

1.2 Определения: кольцо, алгебра, σ-алгебра, минимальная σ-алгебра над классом K. Борелевская σ-алгебра.

Определение кольца:

Кольцом R называется непустой класс множества замкнутый относительно операций сложения и взятия разности.

Определение алгебры:

Алгеброй $\mathcal{A}$ называется непустой класс множества замкнутый относительно сложения и отрицания.

Определение σ-алгебры:

σ-алгебра $\mathcal{F}$ — это непустой класс множества замкнутый относительно счётного количества сумм и отрицаний:

1. Если $A \in \mathcal{F}$, то $\overline{A} \in \mathcal{F}$;

2. $\Omega \in \mathcal{F}$;

3. Если $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Определение σ-алгебры событий:

Сигма алгеброй событий называется множество $\mathcal{F}$ подмножеств $A \subset \Omega$, удовлетворяющее условиям:

1. если $A \in \mathcal{F}$, то $\overline{A} \in \mathcal{F}$;

2. $\Omega \in \mathcal{F}$;

3. если $\{A\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$, то $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Определение минмальной σ-алгебры над классом K:

Пусть K — некоторый класс подмножеств из Ω. σ-алгебра $\sigma(K)$ называется наименьшей σ-алгеброй, содержащей класс K, если $K \in \sigma(K)$; любая σ-алгебра $\mathcal{F}$, которая содержит $K \quad (K \subset \mathcal{F})$, содержит и $\sigma(K) \subset \mathcal{F}$.

Определение Борелевской σ-алгебры:

Борелевской σ-алгеброй β называется минимальная σ-алгебра над классом полуинтервалов $K = \{[a, b]\}$ из R, то есть:

$$\Omega = (-\infty, \infty) = R \quad K = \{[a, b), [a, +\infty), (a, +\infty), (-\infty, b), (-\infty, b], (a, b]\}.$$

1.3 Теорема Каратеодори.

Пусть $Q(A)$ — счётно аддитивная вероятностная мера на алгебре $\mathcal{A}$. Тогда существует единственная счётно аддитивная вероятностная мера $P(A)$, заданная на минимальной σ-алгебре $\mathcal{F}$ и являющаяся её продолжением, то есть $\forall A \in \mathcal{A} \quad P(A) = Q(A)$.

1.4 Определения: мера, конечно-аддитивная, счётно-аддитивная мера

Пусть Ω — множество элементарных исходов эксперимента. Некоторое его подмножество $A \subset \Omega$ называется случайным событием.

Определение конечно аддитивной вероятностной меры

Конечно аддитивной вероятностной мерой $Q(A)$ называется функция множества $Q : \mathcal{A} \to [0; 1]$, такая, что:

1. $\forall A \in \mathcal{A} \quad Q(A) \geq 0$;
2. $Q(\Omega) = 1$;
3. $\forall A, B \in \mathcal{A} : \quad A \cap B = \varnothing \quad Q(A \cup B) = Q(A) + Q(B) \quad Q\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} Q(A_i)$.

Определение счётно аддитивной вероятностной меры:

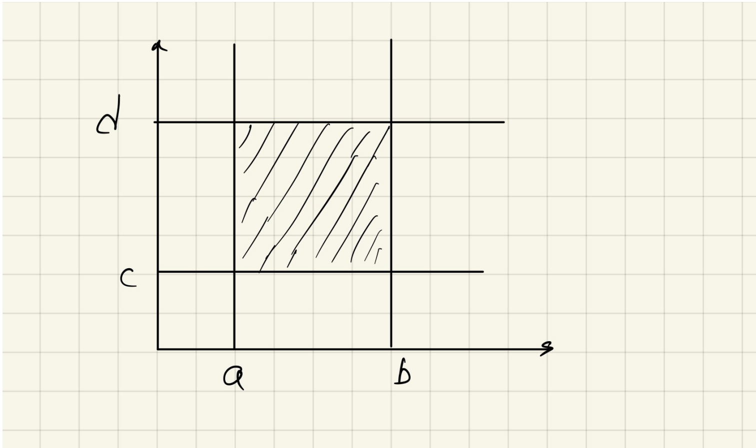
Счётно аддитивно вероятностной мерой $P(A)$ называется функция множества $P : \mathcal{F} \to [0; 1]$, такая, что:

1. $\forall A \in \mathcal{F} \quad P(A) \geq 0$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F} : \quad \forall i \neq j \quad A_i \bigcap A_j = \varnothing \quad P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

1.5 Построение меры Лебега. Верхняя мера Лебега, нижняя мера Лебега, мера Лебега. Измеримое по Лебегу множество.

Пусть $P =< a, b > \times < c, d >$. $P \subset R^2$ — прямоугольник.

Мерой прямоугольника назовём $m(P)$, где
$m(P) = (b - a)(d - c)$



Множество A назовём эелментарным, если оно представимо в виде суммы прямоугольников хотя бы 1 способом:

$$A = \bigcup P_k,$$

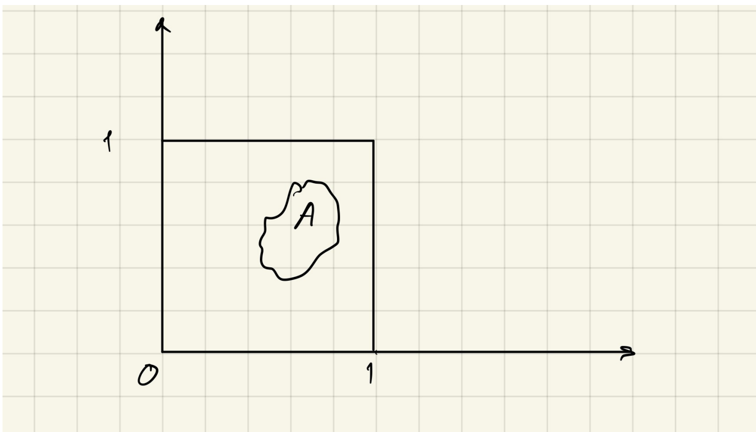
где $\{P_k\}$ — покрытие.

Мерой элементарного сножества A называется

$$m^{'}(A) = \sum m(P_k),$$

где $\{P_k\}$ — разбиение A, то есть $\forall j \neq k \quad P_k \cap P_j = \varnothing$.

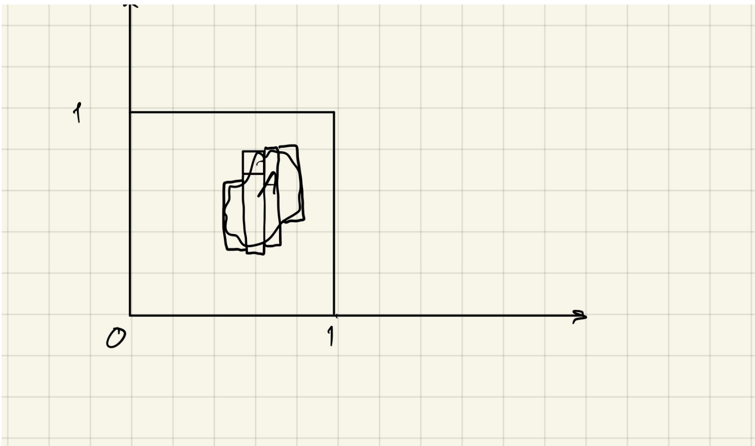
Рассмотрим множество $E = [0; 1] \times [0; 1]$



Определение верхней меры Лебега:

Пусть A — некоторое множество. Рассмотрим $\{P_k\}$, такое, что:

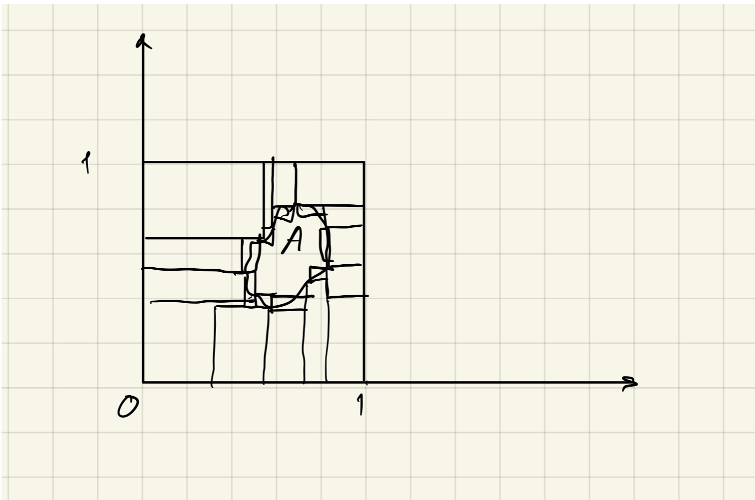
$$A \subset P_k$$



Верхней мерой Лебега называется

$$\mu^*(A) = \inf_{\{P_k\}} \sum m(P_k)$$

Определение нижней меры Лебега:
Рассмотрим множество $E \backslash A. (m(E) = 1)$



Нижней мерой Лебега называется:

$$\mu_*(A) = 1 - \mu^*(E \backslash A)$$

Определение меры Лебега и измеримого по Лебегу множества:
Говорят, что множество A измеримо по Лебегу, если $\mu^*(A) = \mu_*(A) = \mu(A)$.
Величина $\mu(A)$ — называется мерой Лебега множества A.

1.6 Вероятностная мера, её свойства, непрерывность вероятностной меры.

Определение вероятностной меры:

Вероятностной мерой называется функция $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$, удовлетворяющая условиям:

1. $P(\Omega) = 1$;
2. $\forall A \in \mathcal{F} \quad P(A) \geq 0$;
3. $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$, такой, что $\forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \varnothing$, $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Свойства вероятностной меры:

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

   Док-во:

   Ил. соб. $\Omega = A \cup \bar{A}$; $A \cap \bar{A} = \varnothing$

   Тогда $1 \overset{(P1)}{=} P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) \overset{(P3)}{=} P(A) + P(\bar{A})$

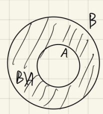
   $\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

   следствие: $P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

2. Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$

   и $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

   Док-во:

   Представим событие B в виде суммы несовместных событий: $B = A \cup (B \setminus A) \Rightarrow$

   $\Rightarrow P(B) = P(A \cup B \setminus A) = P(A) + P(B \setminus A)$

   т.к. по аксиоме (P2) $P(\cdot) \geq 0 \Rightarrow$

   $\Rightarrow P(B) \geq P(A)$

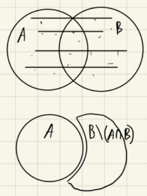
3.

Теорема сложения вероятностей:

Пусть A и B - некоторые события (могут быть совместные), $A, B \in \mathcal{F}$. Тогда

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Док-во:



$$P(A \cup B) = P(A \cup (B \setminus A \cap B)) \overset{\text{свой-во 2}}{=}$$
$$= P(A) + P(B \setminus A \cap B) =$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Следствие: $\forall A \in \mathcal{F} \quad \forall B \in \mathcal{F}$

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

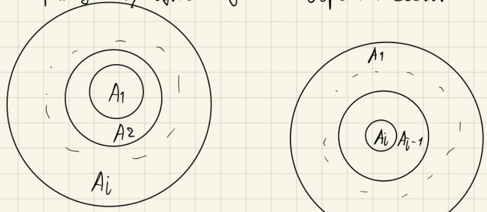
4.

Непрерывность вероятностной меры:

Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ - монотонный класс событий, т.е.

① $A_i \subset A_{i+1}$ или ② $A_i \supset A_{i+1}$

расширяющаяся / сужающаяся воронка событий



Тогда

$$P(\lim_{n \to \infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} (A_n)$$

Док-во:

Пусть $A_i \subset A_{i+1}$. Тогда

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \text{ и назовем } A = \lim_{i \to \infty} A_i$$

По аксиомам $P(A) \leq 1$. Тогда

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \left| \begin{matrix} B_1 = A_1 \\ B_i = A_i \setminus A_{i-1} \end{matrix} \right| =$$

$$\overset{(P3)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{i \to \infty} \sum_{j=1}^{i} P(B_j) = \lim_{i \to \infty} P\left(\bigsqcup_{j=1}^{i} B_j\right) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$$

Пусть $A_i \supset A_{i+1}$. Тогда

$$P(A) = P(\lim_{i \to \infty} A_i) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}\right) =$$

$$= 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}\right) = 1 - \lim_{i \to \infty} P(\overline{A_i}) = \lim_{i \to \infty} (1 - P(\overline{A_i})) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$$

1.7 Классическое вероятностное пространство. Классическое определение вероятности.

Вероятностной моделью стохастического эксперимента называется тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где Ω — множество элементарных исходов экмперимента, $\mathcal{F}$ — алгебра событий, P — вероятностная мера.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство.

Определение классического вероятностного пространства:

Классическим вероятностым пространством, называется вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, в конечном множестве элементарных исходов которого все элементарные исходы равновозможны.

Построим вероятностную меру:

Пусть $\Omega = \{w1, \ldots, w_n\}$.
Рассмотрим $\{A_i\}_{i=1}^n$, где $A_i = \{w_i\}$. Тогда

$$A_i \cap A_j = \varnothing \quad \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega.$$

$$1 = P(\Omega) = P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) = |P(A_i) = P(w_i) = p| = \sum_{i=1}^n p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{n} \Rightarrow \forall w_i \quad P(w_i) = \frac{1}{n}$$

Пусть $A = \{w_{i_1}, \ldots, w_{i_k}\}$ $0 \le k \le n$. Тогда вероятностная мера в классическом вероятностном пространстве имеет вид

$$P(A) = P\left(\bigsqcup_{j=1}^k w_{ij}\right) = \sum_{j=1}^k P(w_{ij}) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{n} = \frac{k}{n},$$

$P(A) = \frac{k}{n}$ **— называется классической вероятностью**,
где k — количество благоприятных A элементарных исходов, n — количество элементарных исходов эксперимента.

1.8 Дискретное вероятностное пространство.

Определение дискретного вероятностного пространства:

Дискретным вероятностным пространством называется вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, такое, что Ω — конечное или счётное множество неравновозможных исходов.

Вероятностную меру зададим числами $p_i = P(w_i) > 0$, такими, что $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Тогда $\forall A \in \mathcal{F}$ веротность вычисляется как $P(A) = P(\bigcup\limits_{w_i \in A} w_i) = \sum\limits_{w_i \in A} P(w_i)$.

1.9 Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей.

Определение условной вероятности:

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство и $A, B \in \mathcal{F}; \quad P(B) > 0$.

Условной вероятностью события A при условии, что наступило событие B называется число:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Теорема умножения вероятностей:

Пусть A и B — случайные события и $P(B) > 0$. Тогда

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Пусть A_1, A_2, A_3 — случайные события и $P(A_1) > 0$ и $P(A_1 \cap A_2) > 0$. Тогда

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2)$$

1.10 Формулы полной вероятности и Байеса.

Теорема (формула полной вероятности):

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство и $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$ — полная группа попарно несовместных событий; $P(A_i) \geq 0$. Пусть $A \in \mathcal{F}$ — неполное событие $P(A|A_i) \geq 0$. Тогда $P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \cdot P(A|A_i)$.

Доказательство:

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (\sqcup_{i=1}^{\infty} A_i)) = P(\sqcup_{i=1}^{\infty} (A \cap A_i)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) P(A|A_i)$$

.

Теорема (формула Байеса):

Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$ — полная группа попарно несовместных событий и пусть для некоторого $P(A) > 0$. Тогда

$$\forall i = \overline{1, \infty} \quad P(A_i|A) = \frac{P(A_i)P(A|A_i)}{P(A)}$$

Доказательство:

$$P(A_i|A) = \frac{P(A \cap A_i)}{P(A)} = \frac{P(A_i) \cdot P(A|A_i)}{P(A)}$$

1.11 Независимость событий. Независимость в совокупности.

Определение независимости событий:

Случайные события A и B называются независимыми, если:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Определение независимости в совокупности:

$\{A_i\}_{i=1}^n$ — называются независимыми в совокупности, если

$$\forall 2 \leq k \leq n \quad P(\bigcap_{j=1}^{k} A_{ij}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{ij})$$

1.12 Теорема о независимости противоположных событий. Критерий независимости случайных событий.

Теорема о независимости противоположных событий:

Пусть A и B — независимы. Тогда события A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B. $\overline{A}$ и $\overline{B}$ — попарно независимы.

Доказательство:

Рассмотрим A и $\overline{B}$. Тогда $P(A \cap \overline{B})$. Можем заметить, что $P(A \cap \overline{B}) = P(A \backslash (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B})$.

Остальные случаи аналогичны.

Критерий независимости случайных событий:

Пусть A и B такие, что $P(B) > 0$. Тогда Случайные события A и B независимы, тогда и только тогда, когда:

$$P(A|B) = P(A)$$

Доказательство:

Необходимость:
Пусть A и B независимы:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Достаточность:
Пусть выполняется: $P(A|B) = P(A)$. Тогда из определения условной вероятности следует, что $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(A) = P(A) \cdot P(B)$, то есть выполняется определение.

2 Глава 2

2.1 Определение измеримой функции, абстрактной и действительной. Критерий измеримости действительных функций.

Определение измеримой функции:

Пусть X и Y — некоторые множества и пусть S_x и S_y — классы подмножества. $f : X \to Y$ — некоторая функция.

Функция $f : X \to Y$ называется (S_x, S_y) — измеримой, если:

$$\forall B \in S_y \quad \exists f^{-1}(B) \in S_x$$

Определение измеримой действительной функции:

Действительная функция $f(x)$ с областью определения $X \subset R$ называется μ-измеримой или S_μ-измеримой, если для любого борелевского множества $b \in \beta(R) \quad f^{-1}(b) \in S_\mu$.

Определение (критерий измеримости действительных функций):

Действительная функция $f(x)$ измерима $\Leftrightarrow$

$$\forall C \in R \quad f^{-1}(b) = f^{-1}(-\infty, C) \text{ — измерима}$$
или
$$\{x : f(x) < C\}$$

2.2 Случайная величина. Виды случайных величин (дискретная и абсолютно непрерывная).

Определение случайной величины:

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство. Случайной величиной называется вещественно значная функция ξ такая, что

$$\xi : \Omega \to R \quad \forall x \in R \quad \{w : \xi(w) < x\} \in \mathcal{F}$$

Определение дискретной случайной величины:

Дискретной случайной величиной называется случайная величина ξ, множество значений которой конечно или счётно, то есть

$$\xi \in \{x_1, x_2, \dots\}$$

Определение абсолюьно непрерывной случайной величины:

Абсолютно непрерывной случайной величиной называется случайная величина ξ, такая, что

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt$$

2.3 Функция распределения и её свойства.

Определение функции распределения:

Функцией распределения вероятностей случайной величины ξ называется функция $F_\xi(x) = P\{w : \xi(w) < x\}$

Свойства функции распределения:

1. $0 \le F_\xi(x) \le 1 \quad \forall x \in R$;
2. $F_\xi(x)$ — неубывающая, непрерывная слева функция;
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$
   $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$;
4. $P\{a \le \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$;
5. $P\{\xi = x_0\} = F_\xi(x_0 + 0) - F_\xi(x_0)$.

2.4 Теорема о существовании случайной величины, соответствующей функции со свойствами функции распределения.

Теорема (о существовании случайной величины, заданной функцией распределения):

Пусть $F(x)$ принимает значение на $[0,1]$, неубывающая и $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$. Тогда $\exists$ вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и ξ на нём, для которой $P\{\xi < x\} = F(x)$.

2.5 Фукнция плотности распределения случайной величины и её свойства.

Определение функции плотности распределения:

Функцией плотности распределения вероятностей случайной величины ξ называется функция $f_\xi(x)$ такая, что:

1. $\forall x \in R \quad f_\xi(x) \geq 0$;
2. $F'_\xi(x) = f_\xi(x)$;
3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = 1$;
4. $P\{a \leq \xi \leq b\} = \int\limits_{b}^{a} f_\xi(x)dx$.

2.6 Дискретная случайная величина. Основные типы дескретных распределений (постановка задачи, закон распределения): распределение Бернулли, равномерное дискретное, биномиальное, пуассоновское, геометрическое распределения.

Распределение Бернулли $(\xi \sim Bern(p))$**:**

Пусть в множестве Ω различают два события A и $\overline{A}$. Случайное событие A — успех $P(A) = p$, $\overline{A}$ — неудача $P(\overline{A}) = q$.

$A \cup \overline{A} = \Omega$ и $A \cap \overline{A} = \varnothing$, следовательно, $p + q = 1$.

Пусть $\xi = 1$, если наступил успех и $\xi = 0$, если наступила неудача. Ряд распределения имеет вид:

ξ	0	1
P	p	q

Закон распределения: $P\{\xi = k\} = p^k q^{1-k}, \quad k \in \{0; 1\}$.

Биномиальное распределение ($\xi \sim Bin(n; p)$)**:**

Произведено n независимых, одинаковых, испытаний Бернули.

Вероятность успеха $p(n) \simeq p$ — почти не зависит от номера испытания.

$\Omega = \{\overline{w} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) : \xi_i \in \{0, 1\}\}$.

Введём случайную величину ξ — количество успехов в n испытаниях Бернули. Тогда $\xi \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Закон распределения: $P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Пуассоновское распределение ($\xi \sim Pois(\lambda)$)**:**

Произведено большое количество испытаний Бернулли, то есть $Bin(n, p)$, но n — велико $\gg 1000$.

Условие применения пуассоновского приближения: $p \leq 0,1; \quad npq \leq 9$.

$\xi = 0, 1, \ldots$

Закон распределения: $P_n(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, где $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$.

геометрическое распределение:

Испытания производятся до тех пор пока не появится первый успех.

$\xi = 1, 2, \ldots$ — количество произведённых испытаний.

Закон распределения: $P\{\xi = k\} = pq^{k-1} \quad 0 < p < 1 \quad q = 1 - p \quad k = 1, 2, \ldots$

Равномерное дискретное распределение ($\xi \sim R(N)$)**:**

Конечное множество равновозможных исходов (классическое вероятностное пространство).

ξ — номер наступившего исхода.

$P\{\xi = k\} = \frac{1}{N}; \quad k = \overline{1, N}$,

где N — общее количество исходов.

2.7 Равномерное непрерывное распределение (построение функций распределения и плоности, графики).

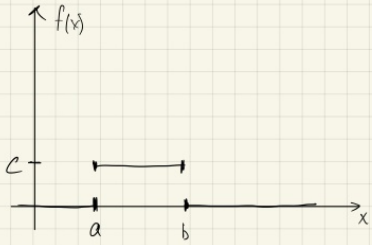
Равномерное непрерывное распределение:

$\xi \sim R[a,b] \quad (\xi \sim U[a,b])$

Случайная величина ξ – ошибка от округления измерений „прибором со шкалой"

Построим её распределение:

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$$



Из условия эксперимента следует, что $f(x) = c = const$ на $[a,b]$, и

$f(x) = 0$, вне $[a,b]$

Воспользуемся фактом $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$:

$$\int\limits_{-\infty}^{a} 0dx + \int\limits_{a}^{b} cdx + \int\limits_{b}^{+\infty} 0dx = cx\Big|_a^b = c(b-a) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{b-a}$$

Таким образом, фун-ия плотности имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}; & a < x \leq b \\ 0; & x \leq a \text{ или } x > b \end{cases}$$

Построим фун-ию распределения по фун-и плотности:

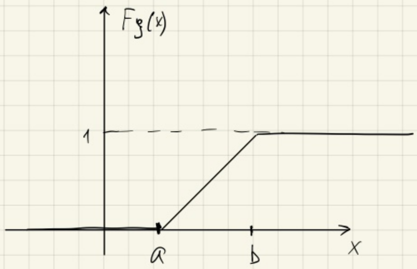
Пусть $x \leq a$. Тогда $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

Пусть $a < x \leq b$. Тогда $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{a} 0\,dt + \int\limits_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{x-a}{b-a}$

Пусть $x > b$. Тогда $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{a} 0\,dt + \int\limits_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\,dt + \int\limits_{b}^{x} 0\,dt = 1$

Фун-ия распределения имеет вид:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0; & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}; & a < x \leq b \\ 1; & x > b \end{cases}$$



2.8 Показательное (экспоненциальное) распределение (построение функции распределения, функции плотности, графики, свойство отсутствия последействия)

р-е: $\xi \sim \Pi(\lambda)$ λ – параметр распределения

ξ – время безотказной работы "прибора"

Построим распределение ξ. По условиям

$\xi \geq 0$

Предположим, что прибор проработал безотказно t времени

Предположим, что вероятность выйти из строя в следующие Δt времени $=$ $= \lambda \Delta t + o(\Delta t)$

Таким образом,

$$P\{t \leq \xi < t+\Delta t \mid \xi \geq t\} =$$

$$= \frac{P\{(t \leq \xi < t+\Delta t) \cap \xi \geq t\}}{P\{\xi \geq t\}} = \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{1 - F(t)}$$

Воспользуемся предположением и получим

$$\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{1-F(t)} = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

Решаем

$$F(t+\Delta t)-F(t) = \lambda(1-F(t))\Delta t + o(\Delta t)(1-F(t)) \quad \Big| : \Delta t$$

$$\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t} = \lambda(1-F(t)) + \frac{o(\Delta t)(1-F(t))}{\Delta t}$$

$\Delta t \to 0$

$$\frac{dF(t)}{dt} = \lambda(1-F(t))$$

$$\frac{dF(t)}{1-F(t)} = \lambda dt$$

$$\ln|1-F(t)| = -\lambda t + C \qquad ; \propto F(t) < 1$$

$$1-F(t) = C_1 e^{-\lambda t}$$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} C_1$$

Заметим, что $F(t) = P\{\xi < t\}$

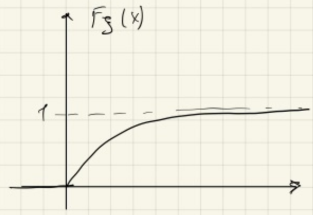
$P\{\xi < 0\} = 0$ – начальное условие

Тогда $F(0) = 1 - C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 1$

Таким образом, мы построили фун-ию распределения закона.

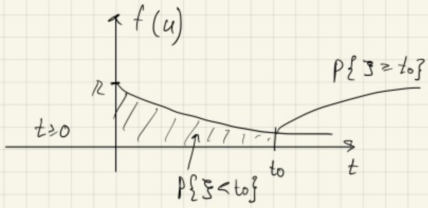
Таким образом, фун-ия рас-ия величины $\xi \sim \Pi(\lambda)$ имеет вид:

$$F(t) = \begin{cases} 0; & t \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}; & t > 0 \end{cases}$$

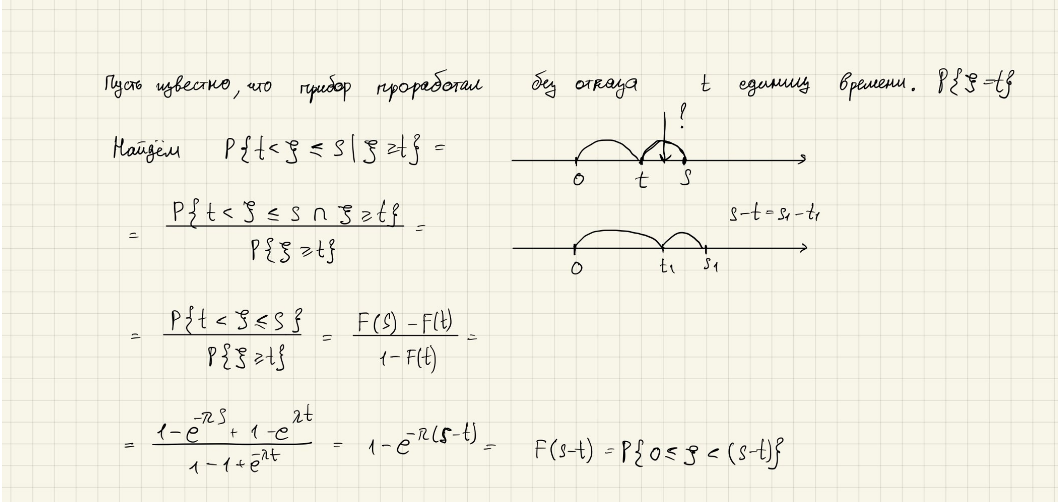


Фун-ия плотности имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} 0; & t \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0 \end{cases}$$



Свойство отсутствия последействия:



Пусть известно, что прибор проработал без отказа t единиц времени. $P\{\xi \geq t\}$

Найдём $P\{t < \xi \leq s \mid \xi \geq t\} =$

$$= \frac{P\{t < \xi \leq s \cap \xi \geq t\}}{P\{\xi \geq t\}} =$$

$$= \frac{P\{t < \xi \leq s\}}{P\{\xi \geq t\}} = \frac{F(s) - F(t)}{1 - F(t)} =$$

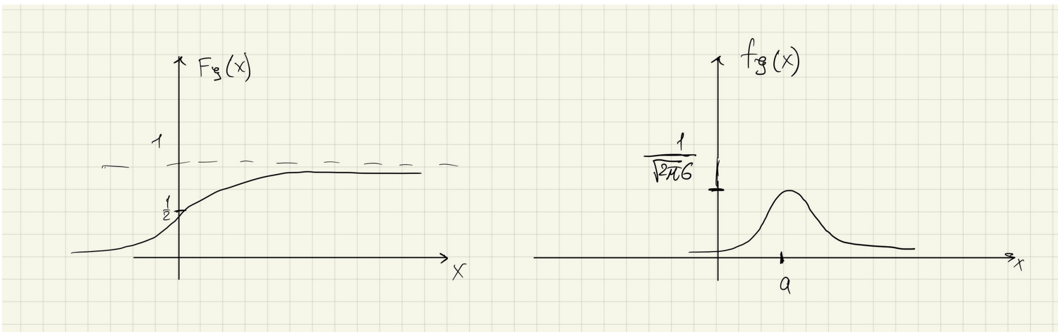
$$= \frac{1 - e^{-\lambda s} + 1 - e^{\lambda t}}{1 - 1 + e^{-\lambda t}} = 1 - e^{-\lambda(s-t)} = F(s-t) = P\{0 \leq \xi < (s-t)\}$$

2.9 Нормальное распределение (функции распределения, функции плотности, свойства).

$(\xi \sim N(a, \sigma^2))$**:**

Функция распределения: $F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$

Функция плотности: $f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$



$(\xi_0 \sim N(0, 1))$**:**

Функция распределения: $F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Функция плотности: $f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Свойства нормального распределения:

1. Связь $N(a, \sigma^2)$ и $N(0, 1)$:

   Если $\xi \sim N(a, \sigma^2)$, то $\frac{\xi - a}{\sigma} = \xi_0 \sim N(0, 1)$

   Если $\xi_0 \sim N(0, 1)$, то $\sigma\xi_0 + a = \xi \sim N(a, \sigma^2)$;

2. Связь стандартного нормального распределения с функциями Лапласа:

   С дифференциальной функцией Лапласа:

   $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow f_{\xi_0}(x) = \varphi(x)$

   С интегральной функцией Лапласа:

   $0,5 + \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = F_{\xi_0}(x);$

3. Правило трёх сигм (3):

   Почти всё нормальное распределение лежит в диапазоне $(a - 3\sigma; a + 3\sigma) \quad \xi \sim N(a, \sigma^2)$.

2.10 Случайные векторы. Функция распределения случайного вектора, её свойства. Дискретные и непрерывные случайные векторы.

Определение случайного вектора:

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — векторное пространство. Случайным вектором называется вектор со случайными координатами:

$$\overline{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n),$$

где $\xi_i \in (\Omega, \mathcal{F}, P)_i$.

Определение функции распределения случайного вектора. Её свойства:

Функцией распределения вероятностей случайного веткора называется:

$$F_{\overline{\xi}}(x_1, \ldots, x_n) = P\{w : \xi_1(w) < x_1, \ldots, \xi_n(w) < x_n\}$$
$$F_{\xi\eta}(x, y) = P\{w : \xi(w) < x, \eta(w) < y\}$$

Свойства функции распределения:

1. $\forall x, y \in R \quad 0 \leq F_{\xi\eta(x,y)} \leq 1;$

2. Пусть x_0 фиксирован. Тогда

   $F_{\xi\eta}(x_0, y)$ — неубывающая, непрерывная слева функция по y.

   Пусть y_0 фиксирован. Тогда

   $F_{\xi\eta}(x, y_0)$ — неубывающая, непрерывная слева функция по x.

3.
$$\lim_{x \to +\infty} F_{\xi\eta}(x, y) = F_{\eta}(y)$$
$$\lim_{y \to +\infty} F_{\xi\eta}(x, y) = F_{\xi}(x)$$
$$\lim_{x \to +\infty; y \to +\infty} F_{\xi\eta}(x, y) = 1$$
$$\lim_{x \to -\infty} F_{\xi\eta}(x, y) = \lim_{y \to -\infty} F_{\xi\eta}(x, y) = \lim_{x \to -\infty; y \to -\infty} F_{\xi\eta}(x, y) = 0$$

Двумерное распр-е наз. дискретным, если сл. в. ξ и η – дискретные. Тогда двумерный случ. вектор (ξ, η) может быть задан как $p_{ij} = P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}$; $p_{ij} > 0$ $\forall i, j$ $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$.

Сл. вектор наз. абсолютно непрерывным, если для его ф-ции распр-я справедливо представление $F_{\xi\eta}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{\xi\eta}(u,v)\,du\,dv$, где $f_{\xi\eta}(x,y)$ – ф-ция плотности совместного распр-я сл. в. ξ и η, т.е. $f_{\xi\eta}(x,y)$.

2.11 Независимые случайные величины. Критерий независимости случайных величин.

Определение случайных независимых велечин:

Случайные велечины ξ и μ называются независимыми, если:

$$\forall x, y \in R \quad P\{w : \xi(w) < x; \mu(w) < y\} = P\{w : \xi(w) < x\} \cdot P\{w : \mu(w) < y\}$$

Критерий независимости дискретной случаной величины:

Дискретные случайные величины ξ и η независимы, тогда и только тогда, когда:

$$\forall i \neq j \quad p_{ij} = p_i p_j$$

2.12 Числовые характеристики случайной величины: Математическое ожидание и его свойства.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство и пусть ξ — случайная величина на нём.

$$\xi = \xi(w) \quad P = P(w)$$

Определение математического ожидания:

Математическим ожиданием случайной величины ξ называется

$$M\xi = \int\limits_{\Omega} \xi(w) dP(w)$$

Пусть для ξ построена функция распределения $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$.
Тогда

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x dF_\xi(x)$$

Для дискретной случайной величины математическое ожидание находится по формуле:

$$M\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

Для абсолютно непрерывной величины:

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx$$

Свойствай математического ожидания:

1. $Mc = c$, c — const;
2. $Mc\xi = cM\xi$;
3. $M(\xi \pm \eta) = M\xi \pm M\eta$;
4. Если ξ и η независимы, то

$$M\xi\eta = M\xi M\eta;$$

5. Если $\xi \geq 0 \quad (P\{\xi \geq 0\} = 1)$, то $M\xi \geq 0$;
6. Неравенство Коши-Буняковского:

$$M|\xi\eta| \leq M|\xi| M|\eta|;$$

7. Неравенство Чебышёва:

   Пусть ξ — некоторая неотрицательная величина, а $g(x)$, неубывающая на множестве значений ξ, непрерывная функиция. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{\xi \geq \varepsilon\} \leq \frac{Mg(\xi)}{g(\varepsilon)};$$

2.13 Обобщённое неравенство Чебышёва. Следствие неравенства Чебышёва.

Неравенство Чебышёва:

Пусть ξ — некоторая неотрицательная величина, а $g(x)$, неубывающая на множестве значений ξ, непрерывная функиция. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{\xi \geq \varepsilon\} \leq \frac{Mg(\xi)}{g(\varepsilon)};$$

Доказательство:

Рассмотрим $Mg(\xi)$:

$$Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_\xi(x) = \int_0^{\infty} g(x) dF_\xi(x) \geq \int_\epsilon^{\infty} g(x) dF_\xi(x) \geq$$

$$\geq g(\epsilon) \int_\epsilon^{\infty} dF_\xi(x) = g(\epsilon) \lim_{x \to +\infty} (F_\xi(x) - F_\xi(\epsilon)) = g(\epsilon)(1 - P\{\xi > \epsilon\}) =$$

$$= g(\epsilon) P\{\xi \geq \epsilon\} \leq \frac{Mg(\xi)}{g(\epsilon)}$$

Следствие неравенства Чебышёва:

Пусть ξ — некоторая случайная величина с конечным математическим ожиданием. Тогда

$$\forall \epsilon > 0 \quad P\{|\xi - M\xi \geq \epsilon\} \leq \frac{M(\xi - M\xi)^2}{\epsilon^2}$$

2.14 Вычисление математического ожидания для распределений Бернулли, биномиального распределения, распределения Пуассона, равномерного непрерывного, показательного, нормального законов распределения.

Для распределения Бернулли:

$$M\xi = 0 \cdot q + q \cdot p = p$$

Для биномиального распределения:

$$M\xi = M(\xi_1, \ldots, \xi_n) = M\xi_1 + \ldots M\xi_n = p + \cdots + p = np$$

Для распределения Пуассона:

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

Для равномерного непрерывного распределения:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{b}^{a} x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{b+a}{2}$$

Для показательного распределения:

$$M\xi = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = -x e^{-\lambda x}|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx =$$

$$= -(\lim_{x \to +\infty} x e^{-\lambda x} - e^0) + \frac{-1}{\lambda}(\lim_{x \to +\infty} x e^{-\lambda x} - e^0) = \frac{1}{\lambda}$$

Для нормального распределения:

$$M\xi_0 = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_0^{\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$$

$$M\xi = M(\sigma\xi_0 + a) = a$$

2.15 Числовые характеристики случайных величин: Начальные, центральные и смешанные моменты. Дисперсия и её свойства. Ковариация и её свойства. Коэффициент корреляции и его свойства.

Начальным моментом k-го порядка распр-я сл. в. ξ называется $m_k = M\xi^k$, если $M|\xi|^k < +\infty$. $m_1 = M\xi$, $m_2 = M\xi^2$, $D\xi = m_2 - (m_1)^2$

[redacted]

Центральным моментом k-го порядка распр-я сл. в. ξ называется $\mu_k = M(\xi - M\xi)^k$, если $M|\xi| < +\infty$, $M|\xi - M\xi|^k < +\infty$.

$\mu_1 = M(\xi - M\xi) = M\xi - M(M\xi) = 0$ $\quad \mu_2 = M(\xi - M\xi)^2 = D\xi$

Смешанным моментом k-го порядка распр-я сл. в. ξ и η называется $\alpha_{ij} = M(\xi - M\xi)^i(\eta - M\eta)^j$, $i+j=k$, $M|\xi| < +\infty$, $M|\eta| < +\infty$.

$k=1$: $\alpha_{10} = M(\xi - M\xi) = \mu_1 = 0$ $\quad \alpha_{01} = M(\eta - M\eta) = \mu_1 = 0$

$k=2$: $\alpha_{20} = M(\xi - M\xi)^2 = D\xi = \mu_2$ $\quad \alpha_{02} = M(\eta - M\eta)^2 = D\eta = \mu_2$ $\quad \alpha_{11} = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = \mathrm{cov}(\xi, \eta)$

Определение дисперсии случайной величины:

Пусть ξ — случайная величина и $|M\xi| < +\infty$.

Дисперсией случайной величины ξ называется число

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2$$

Свойства дисперсии:

1. $D\xi \geq 0$;
2. $Dc = 0$;
3. $Dc\xi = c^2 D\xi$;
4. Если случайные величины ξ и η независимы, то

$$D(\xi \pm \eta) = D\xi \pm D\eta;$$

5. $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$;
6. Для произвольных случайных величин ξ и η с $M|\xi| < +\infty$ и $M|\eta| < +\infty$ верно

$$D(\xi \pm \eta) = D\xi \pm D\eta \pm \mathrm{cov}(\xi, \eta),$$

где $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)$ — ковариация.

Коварияция случ. величин ξ и η есть случ. величина $cov(\xi,\eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)$.

Свойства:

1) $cov(\xi,\eta) = cov(\eta,\xi)$
2) $cov(\xi,\xi) = D\xi$
3) $cov(\xi,\eta) = M\xi\eta - M\xi M\eta$
4) ξ и η независимы $\Rightarrow cov(\xi,\eta) = 0$

   Независимость $\Rightarrow$ некоррелируемость, обратное неверно.

Коэфф-т корреляции сл. в. ξ и η – $r = r(\xi,\eta) = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} = \frac{M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}$

Свойства:

1) $|r| \leq 1$ $(-1 \leq r \leq 1)$

   $|r| = \frac{|M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)|}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} \leq \frac{M|(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)|}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} \leq \frac{\sqrt{M(\xi - M\xi)^2}\sqrt{M(\eta - M\eta)^2}}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} = 1$
2) сл. в. ξ и η независимы $\Rightarrow r = 0$
3) если сл. в. ξ и η такие, что $\eta = f(\xi) = a\xi + b$, то $|r| = 1$ и обратно, если $|r| = 1$, то $\eta = a\xi + b$ $(a \neq 0)$

Вывод: коэфф-т корреляции выражает степень прямолинейности закона $\eta = f(\xi)$.