Содержание

1 Длина кривой. Определение криволинейных интегралов первого и второго рода по параметризованной гладкой прямой.

1. Теорема о длине кривой:

Если функция $\overline{\gamma}$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную $\overline{\gamma}' = (\gamma_1^{'}, \gamma_2^{'})$, то кривая $L = L_{\overline{\gamma}}$ спрямляема и её длина S выражается равенством

$$S = \int_a^b |\overline{\gamma}'(t)|dt.$$

Доказательство:

Для любого разбиения $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ отрезка $[a, b]$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} |\overline{\gamma}(t_i) - \overline{\gamma}(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \overline{\gamma}'(t)dt \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\overline{\gamma}'(t)|dt = \int_a^b |\overline{\gamma}'(t)|dt.$$

Переходя к верхней грани по всевозможным разбиениям отрезка, получим неравенство

$$S \leq \int_a^b |\overline{\gamma}'(t)|dt.$$

Докажем справедливость неравентсва противоположного. Пусть $\epsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности функции $\overline{\gamma}'$ $\exists \delta > 0$ $(|s - t| < \delta \Rightarrow |\overline{\gamma}'(s) - \overline{\gamma}'(t)| < \epsilon)$. Возьмём разбиение отрезка с диамотром меньшим δ. Тогда $\forall t \in [t_{i-1}, t_i]$ имеем

$$|\overline{\gamma}'(t)| = |(\overline{\gamma}'(t) - \overline{\gamma}'(t_i)) + \overline{\gamma}'(t_i)| \leq |\overline{\gamma}'(t) - \overline{\gamma}'(t_i)| + |\overline{\gamma}'(t_i)| \leq |\overline{\gamma}'(t_i)| + \epsilon.$$

Далее получим

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\overline{\gamma}'(t)|dt - \epsilon\Delta t_i \leq |\overline{\gamma}'(t_i)|\Delta t_i = |\int_{t_{i-1}}^{t_i} (\overline{\gamma}'(t) + \overline{\gamma}'(t_i) - \overline{\gamma}'(t))dt| \leq$$

$$\leq |\int_{t_{i-1}}^{t_i} \overline{\gamma}'(t)dt| + |\int_{t_{i-1}}^{t_i} (\overline{\gamma}')(t_i) - \overline{\gamma}'(t)dt| \leq |\overline{\gamma}(t_i) - \overline{\gamma}(t_{i-1})| + \epsilon\Delta t_i$$

и

$$\int_a^b |\overline{\gamma}'(t)|dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\overline{\gamma}'(t)|dt \leq \sum_{i=1}^{n} |\overline{\gamma}(t_i) - \overline{\gamma}(t_{i-1})| + 2\epsilon(b-a) \leq S + 2\epsilon(b-a)$$

Тогда в силу произвольности $\epsilon > 0$ имеем неравенство

$$\int_a^b |\overline{\gamma}'(t)|dt \le S.$$

2-3. Определение криволинейных интегралов первого и второго рода по параметризованной гладкой прямой:

Пусть $L = L_{\overline{\gamma}}$ — гладкая кривая, а функции $f(x,y), \quad P(x,y), \quad Q(x,y)$ определены на L. Пусть $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ — разбиение отрезка $[a,b], \quad M_k = (x_k, y_k) = (\gamma_1(t_k), \gamma_2(t_k)), \quad k = 0, \ldots, n$, и l_k — дуга $M_{k-1}M_k$ кривой $L, \quad k = 1, \ldots, n$.

На каждой дуге $M_{k-1}M_k$ выберем произвольную точку $N_k(\xi_k, \eta_k)$, соответсвующую некоторому значению $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ параметра t.

Обозначим длину дуги $M_{k-1}M_k$ через

$$\Delta s_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\overline{\gamma}'(t)|dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}dt$$

и диаметром разбиения кривой L назовём число $\Delta = \max_{1 \le k \le n} \Delta s_k$.

Определим интегральные суммы

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k)\Delta s_k.$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^n P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k.$$

$$\sigma_3 = \sum_{k=1}^n Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k,$$

где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad \Delta y_k = y_k - y_{k-1}$.

Определение криволинейных интегралов первого и второго рода:

Назовём число I_m пределом интегральных сумм $\sigma_m \quad (m = 1, 2, 3)$ при стремлении диаметра Δ к нулю, если

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad (\Delta < \delta \Rightarrow |\sigma - I_m| < \epsilon) \text{ (независимо от выбора точек } N_k).$$

Число I_1 называют криволинейным интегралом первого рода от функции f по кривой L и обозначают символом

$$\int_L f(x,y)ds.$$

Число I_2 называют криволинейным интегралом второго рода от функции P по кривой L (в направлении от A до B) и обозначают символом

$$\int_L P(x,y)dx.$$

2 Условия существования криволинейных интегралов.

Условия существования криволинейных интегралов:

Если кривая $L = L_{\overline{\gamma}}$ является гладкой и функции f, P, Q непрерывны вдоль этой кривой, то все три криволинейных интеграла существуют и могут быть вычислены по формулам

$$\int_L f(x,y)dx = \int_a^b f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}dt, \qquad (1)$$

$$\int_L P(x,y)dx = \int_a^b P(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_1'(t)dt, \qquad (2)$$

$$\int_L Q(x,y)dy = \int_a^b Q(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_2'(t)dt \qquad (3)$$

Доказательство:

Прежде всего отметим, что определенные интегралы, стоящие в правых частях формул, существуют, так как их подынтегральные функции непрерывны на отрезке $[a, b]$

Докажем первое равенство. Обозначим

$$I_1 = \int_a^b f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}dt$$

и оценим разность

$$\sigma_1 - I_1 = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k)\Delta l_k - \int_a^b f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}dt =$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (f(\gamma_1(\tau_k), \gamma_2(\tau_k)) - f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)))\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}dt$$

Так как функции $\gamma_1'(t)$ и $\gamma_2'(t)$ непрерывны на $[a, b]$ и одновременно не обращаются в нуль, то

$$m = \min_{a \le t \le b} \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} > 0 \text{ и } \Delta s_k \ge m \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = m\Delta t_k.$$

Следовательно

$$\Delta t_k \le \frac{1}{m}\Delta s_k$$

и при стримлении к нулю диаметра разбиения Δ кривой L стемится к нулю и наибольшая из разностей $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$.

Поскольку функция $f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ равномерно непрерывна на отрезке $[a, b]$, то $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \Delta < \delta \Rightarrow$

$$|f(\gamma_1(\tau_k), \gamma_2(\tau_k)) - f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))| < \frac{\epsilon}{S},$$

где S — длина кривой L.

Тогда

$$|\sigma_1 - I_1| \leq \frac{\epsilon}{S} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\gamma_1'(t)) + (\gamma_2'(t))^2} dt = \frac{\epsilon}{S} \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k = \epsilon.$$

Таким образом мы доказали, что интегральные суммы σ_1 стемятся к числу I_1 при $\Delta \to 0$, то есть мы доказали первое равенство.

Для доказательства второго равенства оценим разность

$$\sigma_2 - I_2 = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(P(\gamma_1(\tau_k), \gamma_2(\tau_k)) - P(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\right) \gamma_1'(t) dt.$$

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \Delta < \delta \Rightarrow$

$$P(\gamma_1(\tau_k), \gamma_2(\tau_k)) - P(\gamma_1(t), \gamma_2(t))| < \frac{\epsilon}{M(b-a)},$$

где $M = \max_{a \leq t \leq b} |\gamma_1'(t)|$. Тогда

$$|\sigma_2 - I_2| \leq \frac{\epsilon}{M(b-a)} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma_1'(t)| dt \leq \frac{\epsilon}{M(b-a)} M \sum_{k=1}^{n} \Delta t_k = \epsilon.$$

Это означает, что интегральные суммы $\sigma_2 \to I_2$ при $\Delta \to 0$, то есть мы доказали второе равенство.

Третье равенство доказывается аналогично.

3 Замена параметра в криволинейном интеграле первого рода.

Замена параметра в криволинейном интеграле первого рода:

Пусть $L = L_\gamma$ — гладкая кривая, функция $\overline{\gamma}$ определена на отрезке $[a, b]$, а функция ϕ определена на отрезке $[a_1, b_1]$, отображает его на отрезок $[a, b]$, имеет непрерывную производную и $\phi'(u) \neq 0 \quad \forall u \in [a_1, b_1]$.

Тогда функция ϕ' сохраняет знак на отрезке $[a_1, b_1]$ и функция ϕ является возрастающей, если $\phi(u) > 0$, и является убывающей, если $\phi(u) < 0$. Согласно правилу замены переменной в интеграе Римана имеем

$$\int_a^b f(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\sqrt{(\gamma_1'(t))^2+(\gamma_2'(t))^2}dt = \int_a^b f(\overline{\gamma}(t))|\overline{\gamma}'(t)|dt =$$

$$= \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\overline{\gamma}(\phi(u)))|\overline{\gamma}'(\phi(u))|\phi'(u)du.$$

Если $\phi'(u) > 0$, то $|\overline{\gamma}'(\phi(u))|\phi'(u) = |\overline{\gamma}'(\phi(u))\phi'(u)| = |(\overline{\gamma}\circ\phi)'(u)|, \quad \phi^{-1}(a) = a_1, \phi^{-1}(b) = b_1$

Если же $\phi'(u) < 0$, то $|\overline{\gamma}'(\phi(u))|\phi'(u) = -|\overline{\gamma}'(\phi(u))\phi'(u)| = -|(\overline{\gamma}\circ\phi)'(u)|, \quad \phi^{-1}(a) = b_1, \phi^{-1}(b) = a_1$.

Тогда в любом случае

$$\int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\overline{\gamma}(\phi(u)))|\overline{\gamma}'(\phi(u))|\phi'(u)du = \int_{a_1}^{b_1} f(\overline{\gamma}(\phi(u)))|(\overline{\gamma}\circ\phi)'(u)du$$

Обозначим $\overline{\gamma^*}(u) = (\overline{\gamma}\circ\phi)(u)$. Очевидно, что вектор-функция $\overline{\gamma^*}$ непрерывно диффиренцируема на отрезке $[a_1, b_1]$ и её производная ни в одной точке этого отрезка не равна вектору $(0,0)$. Тогда вектор-функцию $\overline{\gamma^*}$ можно считать другим параметрическим представлением кривой L.

4 Ориентированная гладкая кривая и криволинейный интеграл второго рода по ней.

1. Понятие ориентированной гладкой кривой:

Пусть L - гладкая кривая. Две ее параметризации $L_{\overline{\gamma}}$, где $\overline{\gamma}$ определена на отрезке $[a,b]$, и $L_{\overline{\gamma^*}}$, где $\overline{\gamma^*}$ определена на отрезке $[a_1,b_1]$, назовем положительно эквивалентными, если существует функция φ определеная на отрезке $[a_1,b_1]$, отображающая его на отрезок $[a,b]$, имеющая непрерывную производную с условием $\varphi'(u) > 0$ при всех $u \in [a_1,b_1]$, такая, что $\overline{\gamma^*} = (\overline{\gamma}\circ\varphi)$.

Класс всех положительно эквивалентных друг другу параметризаций называют ориентированной гладкой кривой.

2. Понятие криволинейного интеграла второго рода по ориентированной гладкой кривой:

Криволинейный интеграл второго рода по ориентированной кривой определяют как интеграл по одной из ее параметризаций.

Пользуясь формулой замены переменной в интеграле Римана, легко показать, что данное определение корректно.

Обозначим одну из ориентаций гладкой кривой L через L^+, а другую через L^-. Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_{L^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{L^-} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

5 Формула Грина.

1. Определение трапеции первого рода:

Множество D назовем трапецией первого рода, если

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\right\},$$

где функции φ_1, φ_2 - непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a,b]$.

2. Определение трапеции второго рода:

Множество D назовем трапецией второго рода, если

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d],\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\right\},$$

где функции ψ_1, ψ_2 - непрерывно дифференцируемые на отрезке $[c,d]$.

3. Формула Грина для трапеции первого рода:

(формула Грина для трапеции первого рода.) Пусть замкнутое множество D является трапецией первого рода, L - положительно ориентированная граница D, а функция P и ее частная производная $\frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывны на D. Тогда справедливо равенство

$$\oint\limits_{L} P(x,y)dx = -\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy. \tag{49}$$

Доказательство. Пусть

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\right\},$$

где функции φ_1, φ_2 - непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a,b]$. Обозначим точки $A(a,\varphi_1(a)),\ B(b,\varphi_1(b)),\ E(b,\varphi_2(b)),\ F(a,\varphi_2(a))$. Тогда положительная ориентация границы L соответствует последовательности точек $ABEFA$ этого контура.

Согласно определению криволинейного интеграла второго рода имеем

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \int\limits_a^b P(x,\varphi_1(x))dx,$$

$$\int\limits_{EF} P(x,y)dx = \int\limits_b^a P(x,\varphi_2(x))dx = -\int\limits_a^b P(x,\varphi_2(x))dx,$$

$$\int\limits_{BE} P(x,y)dx = 0, \quad \int\limits_{FA} P(x,y)dx = 0.$$

Следовательно,

$$\oint\limits_{L} P(x,y)dx = \int\limits_a^b P(x,\varphi_1(x))dx - \int\limits_a^b P(x,\varphi_2(x))dx.$$

С другой стороны, сводя двойной интеграл к повторному и используя формулу Ньютона-Лейбница, имеем

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy = \int\limits_a^b P(x,\varphi_2(x))dx - \int\limits_a^b P(x,\varphi_1(x))dx.$$

Таким образом справедливо равенство

$$\oint\limits_{L} P(x,y)dx = -\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy.$$

□

4. Формула Грина для трапеции второго рода:

(формула Грина.) Пусть замкнутое множество D является элементарным замкнутым множеством и L - положительно ориентированная граница D, которая является простым контуром. Пусть функции P, Q и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны на D. Тогда справедливо равенство

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

5. Понятие плоского элементарного множества:

Плоское множество D назовем элементарным, если прямыми, параллельными координатным осям, его можно разбить на конечное число трапеций первого рода, а также на конечное число трапеций второго рода.

6. Формула Грина для замкнуторго элементарного множества:

(формула Грина.) Пусть замкнутое множество D является элементарным замкнутым множеством и L - положительно ориентированная граница D, которая является простым контуром. Пусть функции P, Q и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны на D. Тогда справедливо равенство

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy. \qquad (51)$$

7. Понятние односвязной и многосвязной плоской области:

Плоскую область D называют **односвязной областью,** если она обладает следующим свойством: если простой замкнутый контур L целиком лежит в области D, то и область, ограниченная контуром L, целиком лежит в D. Плоскую область, не являюшуюся односвязной, называют **многосвязной.**

8. Формула Грина для многосвязной области:

формулу Грина для многосвязной области

$$\oint\limits_{L_0} Pdx + Qdy - \sum_{i=1}^{n} \oint\limits_{L_i} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy, \qquad (52)$$

где все контуры L_i, $i - 0, 1, \ldots, n$, обходятся против часовой стрелки.

6 Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования:

Для того чтобы криволинейный интеграл в области D не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы для любого кусочно гладкого контура L в D выполнялось равенство

$$\oint\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Доказательство: Пока ещё не доказал.

7 Гладкая поверхность. Ориентация поверхности. Площадь поверхности.

1. Понятие гладкой поверхности:

1) множество D является замкнутым ограниченным элементарным множеством, граница γ которого представляет собой простой кусочно гладкий контур, а отображение, задаваемое равенствами

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \qquad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2, \\ z = z(u,v). \end{cases}$$

взаимно однозначно на множестве внутренних точек множества D

2) функции $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ и их частные производные первого порядка непрерывны на множестве D вплоть до границы γ ′

3) хотя бы один из якобианов

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}, \quad \frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \quad \frac{D(z,x)}{D(u,v)}$$

отличен от нуля при любых значениях u и v

Поверхности, удовлетворяющие указанным трем условиям, будем называть кратко *гладкими поверхностями*.

2. Понятие ориентации поверхности:

Выделение одной из сторон поверхности Φ с помощью параметризации называется ***ориентацией поверхности*** Φ.

Для поверхности заданной явно уравнением $z = f(x,y),\ (x,y) \in D$, имеем

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \quad (x,y) \in D. \\ z = f(u,v). \end{cases}$$

Тогда

$$\overline{r}'_u = (1, 0, f'_u), \quad \overline{r}'_v = (0, 1, f'_v)$$

и

$$\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v = (-f'_u, -f'_v, 1).$$

После нормировки получим

$$\cos\alpha = \frac{-f'_u}{\sqrt{1 + (f'_u)^2 + (f'_v)^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{-f'_v}{\sqrt{1 + (f'_u)^2 + (f'_v)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_u)^2 + (f'_v)^2}},$$

Если поверхность,заданна неявно уравнением $F(x,y,z) = 0$, то вектор $(F_x,\ F'_y,\ F'_z)$ ортогонален к касательной плоскости. Следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{F'_x}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{F'_y}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{F'_z}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}.$$

3. Понятие площади поверхности:

Предел $\sigma(T)$ при стремлении диаметра разбиения к нулю ($h \to 0$) назывют ***площадью поверхности*** *Φ. Обозначим ее через S.*

В то же время сумма $\sigma(T)$ является интегральной суммой для двойного интеграла по области D от функции $|\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v|$. Таким образом, для площади поверхности Φ имеем равенство

$$S = \iint\limits_D |\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v| dudv. \tag{11}$$

Поскольку

$$|\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

то

$$S = \iint\limits_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv. \tag{12}$$

Введем функции

$$E = (r'_u)^2 = (x'_u(u,v))^2 + (y'_u(u,v))^2 + (z'_u(u,v))^2,$$

$$F = r'_u r'_v = x'_u(u,v)x'_v(u,v) + y'_u(u,v)y'_v(u,v) + z'_u(u,v)z'_v(u,v),$$

$$G = (r'_v)^2 = (x'_v(u,v))^2 + (y'_v(u,v))^2 + (z'_v(u,v))^2.$$

Нетрудно проверить, что

$$|\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v|^2 = (r'_u)^2 (r'_v)^2 - (r'_u r'_v)^2 = EG - F^2.$$

Поэтому равенство (12) можно переписать в виде

$$S = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2} dudv. \tag{13}$$

В случае поверхности Φ, заданной явно уравнением $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, будем иметь равенство

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + (f'_u)^2 + (f'_v)^2} dudv. \tag{14}$$

8 Поверхностный интеграл первого рода и теорема о его существовании.

1. Понятие поверхностного интеграла первого рода:

Пусть функция $f(x, y, z)$ определена в точках гладкой поверхности Φ, имеющей параметрическое представление

$$\overline{r} = \overline{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D.$$

Пусть τ - набор измеримых по Жордану множеств $D_1, \dots, D_n$ являющийся разбиением множества D, Δ_τ - диаметр разбиения, Φ_i, $i = 1, \dots, n$, - части поверхности, соответствующие множествам D_i, $i = 1, \dots, n$, ΔS_i - их площади, и точки $(u_i, v_i) \in D_i$, $i = 1, \dots, n$.

Построим сумму

$$\sigma(\tau) = \sum_{i=1}^{n} f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i))\Delta S_i$$

Если существует предел I при $\Delta_\tau \to 0$ интегральной суммы $\sigma(\tau)$, то он называется ***поверхностным интегралом первого рода*** *от функции f по поверхности Φ и обозначается символом*

$$I = \iint\limits_{\Phi} f(x, y, z) dS.$$

2. Теорема о существовании поверхностного интеграла первого рода:

Пусть Φ - гладкая поверхность, имеющая параметрическое представление (5), и функция $f(x, y, z)$ непрерывна во всех точках Φ. Тогда поверхностный интеграл первого рода существует и может быть вычислен по формуле

$$\iint\limits_{\Phi} f(x, y, z) dS = \iint\limits_{D} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv =$$

$$= \iint\limits_{D} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG - F^2} dudv. \tag{15}$$

Доказательство. Обозначим

$$I^* = \iint\limits_{D} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Имеем

n

$$\left|I^* - \sigma(\tau)\right| = \left|I^* - \sum_{i=1}^{n} f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i))\Delta S_i\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{D_i} \Big| f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) -$$

$$- f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i))\Big| \sqrt{EG - F^2} du dv \leq$$

$$\leq \max_{(u,v)\in D} \sqrt{EG - F^2} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mu(D_i),$$

где ω_i - колебание функции f на множестве D_i. Последняя часть цепочки неравенств стремится к нулю при $\Delta_\tau \to 0$ в силу непрерывности функций f и $\sqrt{EG - F^2}$ на замкнутом множестве D. Таким образом, предел интегральной суммы $\sigma(\tau)$ при $\Delta_\tau \to 0$ равен числу I^*. $\square$

9 Поверхностый интеграл второго рода и его свойства.

1-2. Понятие поверхностного интеграла второго рода и его свойства:

Пусть Φ - гладкая поверхность с параметрическим представлением (5)

$$\overline{r} = \overline{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v) \in D,$$

и на поверхности Φ заданы функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$. Определим **поверхностные интегралы второго рода:**

$$\iint\limits_{\Phi} P(x,y,z)dydz := \iint\limits_{D} P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))A(u,v)dudv, \qquad (17)$$

$$\iint\limits_{\Phi} Q(x,y,z)dzdx := \iint\limits_{D} Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v))B(u,v)dudv, \qquad (18)$$

$$\iint\limits_{\Phi} R(x,y,z)dxdy := \iint\limits_{D} R(x(u,v), y(u,v), z(u,v))C(u,v)dudv, \qquad (19)$$

или

$$\iint\limits_{\Phi} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy :=$$

$$= \iint\limits_{D} \big(P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))A(u,v) + Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v))B(u,v) +$$

$$+ R(x(u,v), y(u,v), z(u,v))C(u,v)\big)dudv. \qquad (20)$$

Используя направляющие косинусы вектора $\overline{n}$

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{A}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{B}{\sqrt{EG-F^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{C}{\sqrt{EG-F^2}}$$

преобразуем равенство (20)

$$\iint\limits_{\Phi} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Phi} \big(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\big)dS. \qquad (21)$$

Обратим внимание на следующий факт. Введем вектор-функцию $\overline{F} = (P,Q,R)$. Тогда подинтегральная функция в интеграле из правой части равенства (21) является скалярным произведением $\overline{F}\overline{n}$.

На примере интеграла (19) сформулируем основные свойства поверхностного интеграла второго рода.

1. При изменении стороны поверхности (при смене ориентации поверхности) интеграл меняет знак.

2. Интеграл обладает свойством линейности:

$$\iint\limits_{\Phi} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j R_j(x,y,z)dxdy = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \iint\limits_{\Phi} R_j(x,y,z)dxdy.$$

3. Если поверхность Φ разбита на конечное число частей $\Phi_k \subset \Phi$, $k = 1,\ldots,N$, не имеющих общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_{\Phi} R(x,y,z)dxdy = \sum_{k=1}^{N} \iint\limits_{\Phi_k} R(x,y,z)dxdy.$$

4. Интеграл
$$\iint\limits_{\Phi} R(x,y,z)dxdy$$
по цилиндрической поверхности Φ с образующей, параллельной оси Oz, равен нулю.

Рассмотрим случай явного задания поверхности Ф уравнением $z = f(x, y)$. Если выбрана ее верхняя сторона, т. е.

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_u)^2 + (f'_v)^2}},$$

то

$$\iint\limits_{\Phi} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{\Phi} R(x,y,z)\cos\gamma dS = \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,f(x,y))dxdy.$$

10 Формула Стокса.

Формула Стокса:

Пусть Ф - гладкая поверхность с параметрическим представлением

$$\overline{r} = \overline{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v) \in D,$$

где функции $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ дважды непрерывно дифференцируемы в замкнутой области D, ограниченной гладким контуром L^*.

Контуру L^* при отображении $\overline{r}(u,v)$ сответствует контур L, ограничивающий поверхность Ф. Обходу контура L^* на плоскости соответствует обход контура L, и наоборот. Условимся считать положительным такое направление обхода контура L, которому соответствует положительное направление обхода контура L^*. Если единичный вектор $\overline{n}$ нормали к поверхности определить формулой (7), то при положительном обходе контура L поверхность будет оставаться слева, если смотреть с конца вектора $\overline{n}$. Таким образом, положительное направление обхода границы поверхности согласуется с выбором ее стороны.

Пусть в некоторой области G, целиком содержащей поверхность Ф, заданы непрерывно дифференцируемые функции P, Q, R. Тогда имеет место **формула Стокса**

$$\oint\limits_{L} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint\limits_{\Phi} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy. \quad (22)$$

Докажем, что

$$\oint\limits_L Pdx = \iint\limits_\Phi \frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy. \tag{23}$$

Сначала преобразуем криволинейный интеграл второго рода по контуру L в левой части (23). Пусть контур L^* задан параметрическими уравнениями

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad t \in T = [t_1, t_2].$$

Тогда параметрические уравнения, задающие контур L, имеют вид

$$x = x(u(t), v(t)), \quad y = y(u(t), v(t)), \quad z = z(u(t), v(t)), \qquad t \in T.$$

В соответствии с формулами для вычисления криволинейного интеграла второго рода имеем

$$\oint\limits_L Pdx = \int\limits_{t_1}^{t_2} P\Big(\frac{\partial x}{\partial u}u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v}v'(t)\Big)dt =$$

$$= \oint\limits_{L^*} P\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)\Big(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\Big).$$

К интегралу в правой части этого равенства применим *формулу Грина*:

$$\oint\limits_{L^*} P\frac{\partial x}{\partial u}du + P\frac{\partial x}{\partial v}dv = \iint\limits_D \Big(\frac{\partial}{\partial u}(P\frac{\partial x}{\partial v}) - \frac{\partial}{\partial v}(P\frac{\partial x}{\partial u})\Big)dudv =$$

$$= \iint\limits_D \Big((\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u})\frac{\partial x}{\partial v} + P\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\Big)dudv -$$

$$- \iint\limits_D \Big((\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v})\frac{\partial x}{\partial u} + P\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}\Big)dudv =$$

$$= \iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial z}\Big(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\Big)dudv - \iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\Big(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\Big)dudv =$$

$$= \iint\limits_D \Big(\frac{\partial P}{\partial z}B - \frac{\partial P}{\partial y}C\Big)dudv = \iint\limits_\Phi \frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy.$$

Аналогично доказываются равенства

$$\oint\limits_L Qdy = \iint\limits_\Phi \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z}dydz,$$

$$\oint\limits_L Rdx = \iint\limits_\Phi \frac{\partial R}{\partial y}dydz - \frac{\partial R}{\partial x}dzdx.$$

Скадывая доказанные равенства, получим равенство (22).

Формула Стокса справедлива в случае, когда контур L^* является кусочно гладким.

Отметим, что если поверхность Φ является плоской областью и лежит в плоскости, параллельной координатной плоскости xOy, то формула Стокса переходит в формулу Грина. Доказательство формулы Стокса для поверхностей, ограниченных несколькими контурами, аналогично доказательству формулы Грина для многосвязных областей.

11 Формула Остроградского-Гаусса.

1. Понятие правильной в некотором направлении области:

Область является *правильной в направлении оси* Oz, если она ограничена двумя поверхностями Φ_1 и Φ_2 вида $z = \varphi_1(x, y)$ и $z = \varphi_2(x, y)$, где функции $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ определены в замкнутой области D_{xy} и удовлетворяют неравенству $\varphi_1(x, y) \le \varphi_2(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, а также цилиндрической поверхностью Φ_3 с образующей, параллельной оси Oz. Положительная ориентация границы такой области будет означать выбор внешней стороны поверхности (т. е. соответствующей внешней нормали).

Аналогично определяются области, правильные относительно осей Ox и Oy.

2. Понятие простой области:

Область будем называть *простой*, если ее можно разбить на конечное число частичных областей, правильных относительно оси Ox и не имеющих общих внутренних точек. И то же самое можно сделать относительно двух других осей координат. Положительная ориентация границы простой области будет означать выбор внешней стороны поверхности.

3. Формула Остроградского-Гаусса:

Пусть V - простая замкнутая область, граница Φ которой положительно ориентирована. Если функции $P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)$ непре рывно дифференцируемы в области G, содержащей V, то справедлива **формула Остроградского - Гаусса**

$$\iint\limits_{\Phi} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz. \qquad (24)$$

Формула Остроградского - Гаусса распадается на три самостоятельных равенства, соответствующие трем подынтегральным функциям P, Q и R. Эти равенства доказываются схожим образом. Докажем одно из них, например, равенство

$$\iint\limits_{\Phi} R(x,y,z)dxdy = \iiint\limits_{V} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz.$$

Докажем это равенство сначала для замкнутой области V, являющейся правильной в направлении оси Oz. По правилу вычисления тройного интеграла имеем

$$\iiint\limits_{V} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,\varphi_2(x,y))dxdy - \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,\varphi_1(x,y))dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Phi_2} Rdxdy + \iint\limits_{\Phi_1} Rdxdy + \iint\limits_{\Phi_3} Rdxdy = \iint\limits_{\Phi} Rdxdy.$$

Мы учли, что для поверхности Φ_2 нужно брать верхнюю сторону, а для поверхности Φ_1 - нижнюю. К этим интегралам добавили равный нулю поверхностный интеграл по внешней стороне боковой цилиндрической поверхности Φ_3 с образующей, параллельной оси Oz.

Далее, простую область V разобьем на частичные, правильные в направлении оси Oz области $V_k,\ k=1,\dots,m$, ограниченные кусочно гладкими поверхностями Φ_k. В силу доказанного имеем

$$\iint\limits_{\Phi_k} R(x,y,z)dxdy = \iiint\limits_{V_k} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz,\ k=1,\dots,m.$$

Просуммировав эти равенства, получим

$$\sum_{k=1}^{m} \iint\limits_{\Phi_k} R(x,y,z)dxdy = \sum_{k=1}^{m} \iiint\limits_{V_k} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iiint\limits_{V} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz.$$

Сумма в левой части равенства равна интегралу по поверхности Φ, так как по частям границ Φ_k частичных областей V_k, не входящим в поверхность Φ, интегрирование проводится дважды с выбором противоположных сторон поверхности, а такие интегралы взаимно уничтожаются.

Таким образом формула Остроградского - Гаусса полностью доказана.

12 Тригонометрическая система. Ортогональность тригонометрической системы и свойства интеграла от переодической функции.

1. Понятие тригонометрической системы.

$$1/2, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots. \tag{27}$$

Система функций (27) называется *тригонометрической системой.*

2. Теорема об ортогональности тригонометрической системы.

Любые две функции тригонометрической системы (27) *взаимно ортогональны на отрезке* $[-\pi,\pi]$.

3. Свойства интеграла от переодической функции.

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(1+\cos 2kx\big)dx = \pi,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(1-\cos 2kx\big)dx = \pi,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(\frac{1}{2}\big)^2 dx = \frac{\pi}{2}.$$

Обозначим через $R_{2\pi}$ класс функций, которые заданы на всей числовой прямой, интегрируемы на каждом конечном отрезке числовой прямой и имеют период 2π.

Пусть функция $f \in R_{2\pi}$. Тогда при любом $a \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_{a}^{a+2\pi} f(x)dx = \int\limits_{0}^{2\pi} f(x)dx.$$

13 Тригонометрический ряд. Коэффициенты Фурье и ряд Фурье. Ядро Дирихле.

1. Понятие тригонометрического ряда.

Функциональный ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\big), \qquad (26)$$

где $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, \dots$ - вещественные числа, называется тригонометрическим рядом, а эти числа - его коэффициентами.

2. Коэффициенты фурье и ряд Фурье.

Если 2π-периодическая функция f разлагается в равномерно сходящийся тригонометрический ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \bigl(a_n \cos nx + b_n \sin nx\bigr), \tag{28}$$

то его коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx \tag{29}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{30}$$

Пусть функция f определена и интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда числа $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots,$ найденные по формулам (29) и (30), называются коэффициентами Фурье, а ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \bigl(a_n \cos nx + b_n \sin nx\bigr)$$

с этими коэффициентами называется рядом Фурье функции f.

3. Ядро Дирихле.

Фунцию

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}} \tag{32}$$

называют ядром Дирихле.

14 Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом Дирихле.

Теорема Дирихле.

Пусть функция $f \in R_{2\pi}$. Тогда частная сумма ряда Фурье функции f может быть представлена в следующем виде

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\big(f(x+t)+f(x-t)\big)D_n(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{34}$$

где

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \ldots + \cos nt = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Интеграл в равенстве (34) называют *интегралом Дирихле.*

15 Теорема Римана-Лебега

Теорема Римана-Лебега.

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin\lambda t dt = 0, \quad \lim_{|\lambda|\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos\lambda t dt = 0.$$

16 Принцип локализации Римана.

Принцип локализации Римана.

Пусть функция $f \in R_{2\pi}$. Тогда при любом $a \in (0,\pi)$ частная сумма ряда Фурье функции f может быть представлена в следующем виде

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{a}\big(f(x+t)+f(x-t)\big)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}dt + \alpha_n(x),$$

где

$$\alpha_n(x) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

17 Признак Дини поточечной сходимости рядов Фурье и три следствия.

1. Признак Дини поточечной сходимости рядов Фурье.

Пусть функция $f \in R_{2\pi}$. Если при некотором фиксированном x сходится интеграл

$$\int_0^{\pi} \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2A|}{t}dt, \tag{37}$$

где A - некоторое число, то в этой точке x ряд Фурье функции f сходится и имеет своей суммой число A.

2. Следствия признака Дени:

1. *Пусть функция $f \in R_{2\pi}$ и дифференцируема в точке x. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x).$$

2. *Пусть функция $f \in R_{2\pi}$ и в точке x существуют односторонние левая производная $f'_Л(x)$ и правая производная $f'_П(x)$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x).$$

3. *Пусть функция $f \in R_{2\pi}$ и в точке x существуют следующие четыре конечных предела*

$$f(x+0) = \lim_{t\to x+0} f(t), \quad f(x-0) = \lim_{t\to x-0} f(t),$$

$$\lim_{t\to+0} \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} = \alpha, \ \lim_{t\to+0} \frac{f(x-t)-f(x-0)}{-t} = \beta.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$