Содержание

1 Уравнения первого порядка

1.1 Определения

1.1.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y^{'}) \equiv 0$$

1.1.2 Частное решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

Определение частного решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$F(x, y, y^{'}) \equiv 0 \tag{1}$$

обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка.

Частным решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка называется непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(x)$, при подстановке которой в уравнение (1) получим тождество

$$\varphi^{'}(x) \equiv f(x, \varphi(x))$$

1.1.3 Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

Определение общего решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

Множество всех решений обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка называется его общим решением.

1.1.4 Общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, имеет вид

$$y^{'} = f(x, y) \tag{2}$$

Определение общего интеграла дифференциального уравнения первого порядка:

Общее решение уравнения (2) в неявном виде

$$F(x, y) = C$$

называется общим интегралом уравнения (2).

1.1.5 Уравнение с разделяющимися переменными первого порядка

Определение уравнения с разделяющимися переменными первого порядка

Дифференциальным уравннием с разделяющимися переменными первого порядка называется уравнение вида

$$y^{'} = f_1(x) f_2(y),$$

где $f_1(x)$ и $f_2(y)$ — заданные функции.

1.1.6 Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в симметричной форме

Определение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в симметричной форме

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в симметричной форме имеет вид

$$A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0,$$

где A и B — заданные функции двух переменных, причём переменные x и y равноправны.

1.1.7 Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

Определение линейного дифференциального уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$a_0(x)y^{'} + a_1(x)y = f(x),$$

где x — неизвестнвя переменная, $y = y(x)$ — неизвестная функция, $a_0(x)$ и $a_1(x)$ — известные непрерывные функции.

1.1.8 Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка

Определение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка

Пусть $y^{'} = f(x,y)$ — дифференциальное уравнение первого порядка и $y(x_0) = y_0$ — некоторое начальное условие. Тогда задача Коши для него имеет вид

$$\begin{cases} y^{'} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

где x_0, y_0 — заданные числа.

1.2 Теоремы и алгоритмы

1.2.1 Алгоритм решения уравнений с разделяющимися переменными первого порядка

1. Переходим к дифференциалам:

$$y^{'} = \frac{dy}{dx} \qquad \frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y);$$

2. Делим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y) \qquad \Big| \cdot dx \frac{1}{f_2(y)}$$

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

3. Вычисляем интегралы:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C,$$

где $C \in R$ и $\int \frac{dy}{f_2(y)} = F_2(y)$, $\int f_1(x)dx = F_1(x)$.

Получим:

$$F_2(y) = F_1(x) + C \tag{1}$$

4. Разрешаем последнее уравнение относительно y:

$$y = \varphi(x, C), \quad C \in R, \tag{2}$$

где $\varphi(x, C)$ — общее решение.

5. Ответ: $\varphi(x, C)$.

1.2.2 Метод вариации решния линейного дифференциального уравнения первого порядка.

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$a_0(x)y^{'} + a_1(x)y = f(x),$$

Тогда

$$y^{'} + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}y = \frac{f(x)}{a_0(x)}$$

Обозначим $p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}, \quad q(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)}$.
Следовательно уравнение примет вид:

$$y^{'} + p(x)y = q(x), \quad a \leq x \leq b \tag{3}$$

Метод вариации произвольной постоянной:

1. Этап:

   Найдём общее решение соответствующего (3) однородного уравнения:

$$y^{'} + p(x)y = 0 \tag{4}$$

$$y^{'} = -p(x)y$$

$$\frac{dx}{dy} = -p(x)y$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx + C$$

$$\ln|y| = -F_1(x) + C$$

$$y = \pm e^C e^{-F_1(x)}$$

   Получим: $y_{\text{о}} = Ce^{-F_1(x)}$ — общее решение (4).

2. Этап:

   Ищем частное решение (3) в виде:

$$y_{\text{ч}} = C(x)e^{-F_1(x)}, \tag{5}$$

   где $C(x)$ — пока неизвестная функция.

$$y^{'} = C^{'}(x)e^{-F_1(x)} + C(x)e^{-F_1(x)}(-p(x))$$

   Подставляем в (3):

$$C^{'(x)}e^{-F_1(x)} - C(x)e^{-F_1(x)}p(x) + p(x)C(x)e^{-F_1(x)} = q(x)$$

$$C^{'}(x) = e^{F_1(x)}q(x)$$

$$C(x) = \int e^{F_1(x)}q(x)dx \pm c = F_2(x) + C$$

Подставим в (3):

$$y = e^{-F_1(x)}(F_2(x) + C)$$

Таким образом, $y = e^{-F_1(x)}(F_2(x) + C)$ — общее решение уравнения (3).

1.2.3 Основная теорема существования и единственности

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши:

Пусть $f(x, y)$ — непрерывная функция и у неё существует частная производная $f_y^{'}(x, y)$. Тогда $\forall(x_0, y_0)$ задача Коши имеет единственное решение.

1.2.4 Сведение задачи Коши к интегральному уравнению

Пусть $\varphi(x)$ — решение задачи Коши:

$$\varphi^{'}(x) \equiv f(x, \varphi(x)) \tag{6}$$

$$\varphi(x_0) = y_0 \tag{7}$$

Перепишем (6) в виде:

$$\varphi^{'}(t) = f(t, \varphi(t)) \tag{8}$$

Фиксируем произвольный x и берём интеграл от (8):

$$\varphi^{'} = f(t, \varphi(t)) \quad \Big| \int_{x_0}^{x} \ldots dt$$

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt$$

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt \tag{9}$$

По определению (9) означает, что $\varphi(x)$ является решением интегрального уравнения

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt \tag{10}$$

Все остальные рассуждения обратимы $\implies$ задача Коши $\sim$ уравнению (10).

2 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка

2.1 Определения

2.1.1 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка (однородные и неоднородные)

Определение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка

Однородное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид:

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y = 0,$$

где $a_0(x), \dots, a_n(x)$ — заданные непрерывные функции.

Определение линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка

Неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид:

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y = f(x),$$

где $a_0(x), \dots, a_n(x), f(x)$ — заданные непрерывные функции.

2.1.2 Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x) \tag{1}$$

Определение задачи Коши для дифференциального уравнения n-го порядка

Задача Коши для линейного уравнения (4) имеет вид:

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y^{'}(x_0) = y_0^{'} \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

где $y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ — начальные условия и $x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ — заданные числа.

2.1.3 Линейно зависимые и линейно независимые функции

Определение линейно зависимых функций

Функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ называются линейно зависимыми на отрезке $[a, b]$, если найдутся константы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ — числа, не все равные нулю, такие, что линейная комбинация:

$$\alpha_1\varphi(x) + \dots + \alpha_m\varphi(m) \equiv 0$$

Определение линейно независимых функций

Функции $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ называются линейно независимыми на отрезке $[a, b]$, если

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \dots + \alpha_m\varphi_m(x) \equiv 0 \Longleftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$$

2.1.4 Определитель Вронского функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$

Определение определителя Вронского функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$

Определителем Вронского функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ называется:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_m(x) \\ \varphi_1^{'}(x) & \varphi_2^{'}(x) & \dots & \varphi_m^{'}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_m^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

2.1.5 Фундаментальная система решения

Определение фундаментальной системы решений однородного линейного уравнения

Фундаментальной системой решений однородного линейного уравнения n-го порядка $l(y) = 0$ называются функции $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$, являющиеся линейно независимыми решениями уравнения.

2.1.6 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Определение однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами

Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = 0,$$

где $a_0, \dots, a_n$ — заданные числа.

Определение неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами

Линейное неоднородноре уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = f(x),$$

где $a_0, \dots, a_n$ — заданные числа.

2.1.7 Необходимое условие линейной зависимости

Теорема (необходимое условие линейной зависимости)

Если функции $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — линейно зависимы на $[a, b]$. Тогда их определитель вронского тождественно равен нулю.

$$\mathbf{W} \equiv 0$$

Доказательство:

Пусть $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — линейно зависимы на $[a, b]$ и для определённости $\varphi_1(x) = \gamma_2\varphi_2(x) + \dots + \gamma_n\varphi_n(x) = \sum_{k=2}^n \gamma_k\varphi_k(x)$. Тогда

$$\begin{vmatrix} \sum_{k=2}^n \gamma_k\varphi_k(x) & \dots & \varphi_m(x) \\ \sum_{k=2}^n \gamma_k\varphi_k^{'}(x) & \dots & \varphi_m^{'}(x) \\ \dots \\ \sum_{k=2}^n \gamma_k\varphi_k^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_m^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = \sum_{k=2}^n \begin{vmatrix} \gamma_k\varphi_k(x) & \dots & \varphi_m(x) \\ \gamma_k\varphi_k^{'}(x) & \dots & \varphi_m^{'}(x) \\ \dots \\ \gamma_k\varphi_k^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_m^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{k=2}^n \gamma_k \begin{vmatrix} \varphi_k(x) & \dots & \varphi_m(x) \\ \varphi_k^{'}(x) & \dots & \varphi_m^{'}(x) \\ \dots \\ \varphi_k^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_m^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \equiv 0 \quad \forall k = \overline{2, n}$$

2.1.8 Условие линейной независимости решений

Рассмотрим однородное линейное уравнение:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_m(x)y = 0; \quad a \le x \le b \tag{2}$$

Теорема (условие линейной независимости решений линейного уравнения)

Пусть $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — линейно независимые решения уравнения (5). Тогда

$$\forall x \in [a, b] \quad \mathbf{W} \neq 0$$

Доказательство:

Предположим противное:

$\exists x_0 \in [a,b] \quad W(x_0)=0$

Имеем

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_1'(x_0) & \dots & \varphi_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

По св-ву определителя его столбцы линейно зависимы:

$\exists\, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ — числа не все равные 0, такие, что

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} \varphi_n(x) \\ \vdots \\ \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} = 0$$

Или

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha_1 \varphi_1(x_0) + \alpha_2 \varphi_2(x_0) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 \varphi_1'(x_0) + \dots + \alpha_n \varphi_n'(x_0) = 0 \\ \dots \\ \alpha_1 \varphi_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + \alpha_n \varphi_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Обозначим $\varphi(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x)$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)$$

$$\varphi'(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k'(x)$$

$$\vdots$$

$\varphi^{(n-1)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k^{(n-1)}(x)$ подставим в (1) вместо y

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k^{(k)}(x) + a_1(x)\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(\varphi_k^{(n)}(x) + a_1(x)\varphi_k^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)\varphi_k(x)\right) \equiv 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \varphi(x)$ – новое решение (1)

Из (2) следует, что
$$\begin{cases} \varphi(x_0)=0 \\ \dots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0)=0 \end{cases} \quad (3)$$

Отсюда следует, что $\varphi(x)$ – решение задачи Коши (3)

$$(4)\ \begin{cases} y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0 \\ y(x_0)=0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0)=0 \end{cases}$$

$y(x) \equiv 0$ – тривиальное решение задачи (4),
а в силу единственности решения $\varphi(x) \equiv 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x) \equiv 0 \Rightarrow$ противоречие условию $(1)^*$

2.1.9 Свойство линейности и следствия из него

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_m(x)y = f(x)$$

Обозначим $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_m(x)y$ как $l(y)$.

Свойство линейности $l(y)$

$$l(y_1(x) + y_2(x)) = l(y_1(x)) + l(y_2(x));$$
$$l(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \varphi_k(x)) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k l(\varphi_k(x))$$

Следствие свойства линейности

Пусть $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — решения уравнения $l(y) = 0$. Тогда $\varphi^{\circ}(x) = \alpha_1\varphi_1(x) + \dots + \alpha_m\varphi_m(x)$ тоже является решением этого уравнения.

2.1.10 Существование ФСР

Теорема (о существовании ФСР у любого однородного линейного уравнения)

Фундаментальная система решений существует для любого однородного линейного уравнения.

Док-во:

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} l(y)=0 \\ y(x_0)=1, \\ y'(x_0)=0 \\ y^{(n-1)}(x_0)=0 \end{cases}$$

Пусть $\varphi_1(x)$ – решение задачи Коши

Рассмотрим др. задачу

$$\begin{cases} l(y)=0 \\ y(x_0)=0, \\ y'(x_0)=1, \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0)=0 \end{cases}$$

Пусть $\varphi_2(x)$ – решение этой з/К.

. . . .

Последняя задача Коши:

$$\begin{cases} l(y)=0, \\ y'(x_0)=0, \\ \dots \\ y^{(n-1)}=1 \end{cases}$$

Пусть $\varphi_n(x)$ – решение п/з.

Покажем, что $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ образуют ФСР:

Рассмотрим:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0) & \dots & \varphi^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

Согласно теореме 2

$\Rightarrow \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ – лин. независ. решения $\Rightarrow$ ФСР $\square$

2.1.11 Вид общего решения однородноого линейного уравнения

Рассмотрим однородное линейное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_m(x)y = 0; \quad a \le x \le b \tag{3}$$

или

$$l(y) = 0$$

Теорема (вид общего решения однородного линейного уравнения)

Пусть $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — ФСР. Тогда общее решение уравнения (5) имеет вид:

$$y = c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x),$$

где $c_1, \ldots, c_n$ — произвольные константы.

Доказательство:

Очевидно, что $\forall c_1, \ldots, c_n$ формула (2) – дает решение, т.к.

$$L\left(\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k \underbrace{\left(\varphi_k(x)\right)}_{= 0} \equiv 0$$

Покажем, что все решения ур-ия (1) содержатся в (2):

Пусть $\psi(x)$ – произвольное решение уравнения (1), берем произвольное $x_0 \in [a, b]$ и рассмотрим линейную алгебраическую систему:

$$(3)\quad \begin{cases} c_1\varphi_1(x_0) + c_2\varphi_2(x_0) + \ldots + c_n\varphi_n(x_0) = \psi(x_0) \\ c_1\varphi_1'(x_0) + c_2\varphi_2'(x_0) + \ldots + c_n\varphi_n'(x_0) = \psi'(x_0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1\varphi_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + c_n\varphi_n^{(n-1)}(x_0) = \psi^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

– система относительно неизвестных c_i, $i = \overline{1, n}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_0) & \ldots & \varphi_n(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x_0) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0$$

т.к. $\varphi_i(x)$ – лин. незав. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (3) имеет решение $c_1^0, \ldots, c_n^0$

Обозначим через $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k^0 \varphi_k(x)$ – решение (1)

Имеем равенства:

$$(4)\quad \begin{cases} \varphi(x_0) = \psi(x_0) \\ \varphi'(x_0) = \psi'(x_0) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0) = \psi^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

в силу системы 3

(4) означает, что φ и ψ удв. одинаковым начальным условиям в т. x_0 $\Rightarrow$ они являются решением одной и той же задачи Коши $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ в силу ед. решения ЗК $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\psi(x)$ получается из формулы (2) $\Rightarrow$

в силу произвольность $\psi(x)$ $\square$

2.1.12 Вид общего решения неоднородноого линейного уравнения

Рассмотрим неоднородное линейное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_m(x)y = f(x); \quad a \le x \le b \tag{4}$$

или

$$l(y) = f(x)$$

и соответствующее ему однородное линейное уравнение

$$l(y) = 0 \tag{5}$$

Теорема (вид общего решения неоднородного линейного уравнения)

Пусть $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — ФСР (5) и $y_{\text{ч}}(x)$ — частное решение (4). Тогда общее решение уравнения (4) имеет вид:

$$y = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) + y_{\text{ч}}(x),$$

где $c_1, \dots, c_n$ — произвольные константы.

Доказательство:

Док-во:

$\forall c_1, \dots, c_n$ (3) дает решение (1) в c.g.

$$l\left(\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x) + y_{\text{ч}}(x)\right) = \overbrace{l\left(\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)\right)}^{\text{решение (2)}} + \overbrace{l(y_{\text{ч}}(x))}^{\equiv f(x)} = f(x)$$

Покажем, что любое решение (1) содержится в (3):

Пусть $\psi(x)$ — произвольное решение (1), то есть

$$l(\psi(x)) = f(x)$$

Обозначим через $\varphi(x) = \psi(x) - y_{\text{ч}}(x)$ (*)

Рассмотрим

$$l(\varphi(x)) = \overbrace{l(\psi(x))}^{\equiv f(x)} - \overbrace{l(y_{\text{ч}}(x))}^{\equiv f(x)} \equiv 0 \Rightarrow \varphi(x) - \text{решение } 2$$

Применим теорему 5:

$$\varphi(x) = c_1^0\varphi_1(x) + \dots + c_n^0\varphi_n(x)$$

Подставим в (*):

$$\psi(x) = c_1^0\varphi_1(x) + \dots + c_n^0\varphi_n(x) + y_{\text{ч}}(x)$$

$\square$

2.2 Алгоритм метод вариации нахождения частного решения

Метод вариации произвольных постоянных нахождения $y_{\text{ч}}(x)$

По теореме о виде общего решения линейного однородного уравнения $y_0 = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x)$ — общее решение уравнения $l(y) = 0$.

Будем искать частное решение $y_{\text{ч}}(x)$ в виде:

$$y_{\text{ч}}(x) = c_1(x)\varphi_1(x) + \dots + c_n(x)\varphi_n(x),$$

где $c_1(x), \dots, c_n(x)$ — пока неизвестные функции.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} c_1^{'}(x)\varphi_1(x) + \dots + c_n^{'}(x)\varphi_n(x) = 0 \\ c_1^{'}(x)\varphi_1^{'}(x) + \dots + c_n^{'}(x)\varphi_n^{'}(x) = 0 \\ c_1^{'}(x)\varphi_1^{''}(x) + \dots + c_n^{'}(x)\varphi_n^{''}(x) = 0 \\ \dots \\ c_1^{'}(x)\varphi_1^{(n-2)}(x) + \dots + c_n^{'}(x)\varphi_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ c_1^{'}(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n^{'}(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases} \tag{1}$$

Пусть $a \leq x \leq b$, x — фиксированное $\implies$ (1) — линейная алгебраическая система относительно $c_i^{'}(x), \quad i = \overline{1, n}$.

$\Delta = \mathbf{W}(x) \implies \mathbf{W}(x) \neq 0 \implies$ по теореме из алгебры (1) имеет единственное решение.

По формулам Крамера:

$$c_1^{'}(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \dots \\ \dots & \dots \\ f & \dots \end{vmatrix}}{\mathbf{W}} = \frac{\mathbf{W}_1(x)}{\mathbf{W}(x)}$$

$$\dots$$

$$c_n^{'}(x) = \frac{\begin{vmatrix} \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ \dots & f \end{vmatrix}}{\mathbf{W}} = \frac{\mathbf{W}_n(x)}{\mathbf{W}(x)} \tag{2}$$

Таким образом, $c_i^{'}(x) \quad i = \overline{1, n}$ находится по формуле (2) $\implies$

$$c_k(x) = \int \frac{\mathbf{W}_k(x)}{\mathbf{W}(x)} dx$$

2.3 Обоснование метода вариации

Рассмотрим частный случай $n = 2$:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \tag{1}$$

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{2}$$

$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ — ФСР (2).

$$y_0 = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$$
$$y_ч = c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x) \tag{3}$$

$$\begin{cases} c_1'(x)\varphi_1(x) + c_2'(x)\varphi_2(x) = 0 \\ c_1'(x)\varphi_1'(x) + c_2'(x)\varphi_2'(x) = f(x) \end{cases} \tag{4}$$

$$c_1(x) = \int \frac{\mathbf{W_1}(x)}{\mathbf{W}(x)}dx \quad c_2(x) = \int \frac{\mathbf{W_2}(x)}{\mathbf{W}(x)}dx$$

Подставляем $c_1(x)$ и $c_2(x)$ в (3). Покажем, что полученное $y_ч$ является решением (1):

$$y_ч' = c_1'(x)\varphi_1(x)+c_1(x)\varphi_1'(x)+c_2'(x)\varphi_2(x)+c_2(x)\varphi_2'(x) = c_1(x)\varphi_1'(x)+c_2(x)\varphi_2'(x)$$

$$y_ч'' = c_1'(x)\varphi_1'(x) + c_1\varphi_1''(x) + c_2'(x)\varphi_2'(x) + c_2(x)\varphi_2''(x) =$$
$$= f(x) + c_1(x)\varphi_1''(x) + c_2(x)\varphi_2''(x)$$

Подставляем в уравнение (1):

$$f(x) + c_1(x)\varphi_1''(x) + c_2(x)\varphi_2''(x) + a_1(x)(c_1(x)\varphi_1'(x)+$$
$$+c_2(x)\varphi_2'(x)) + a_2(x)(c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x)) =$$
$$= f(x) + c_1(x)(\varphi_1''(x) + a_1(x)\varphi_1'(x) + a_2(x)\varphi_1(x))+$$
$$+a_2(x)(\varphi_2''(x) + a_1(x)\varphi_1''(x) + a_2(x)\varphi_2(x)) = f(x).$$

То есть

$$l(y_ч) \equiv f(x).$$

2.4 Пример: $y'' + w^2 y = f(x)$

Пример:

Дано:

(1) $y'' + w^2 y = f(x)$; $a \leq x \leq b$

$w > 0$

Решение:

1. Решим соответствующее ОУ:

(2) $y'' + w^2 y = 0$

Рассмотрим $y_1(x) = \cos wx$

$y_1'(x) = -w \sin$

$y_1''(x) = -w^2 \cos wx$ => решение (2)

$y_2 = \sin wx$ – тоже решение

Рассмотрим W y_1 и y_2:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos wx & \sin wx \\ -w \sin wx & w \cos wx \end{vmatrix} = w\left(\cos^2 wx + \sin^2 wx\right) = w \Rightarrow$$

=> y_1 и y_2 образуют ФСР => по Т. 5 общее решение (2) имеет вид

$$y = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx$$

2. Будем искать частное решение уравнения (1) методом вариации:

$$y_ч(x) = C_1(x) \cos wx + C_2(x) \sin wx$$

Согласно алгоритму метода вариации решаем СОЛ

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos wx + C_2'(x) \sin wx = 0 \\ C_1'(x)(-w \sin wx) + C_2'(x)(w \cos wx) = f(x) \end{cases}$$ – определитель C $= \Delta = W = w$

По формулам Крамера:

$$C_1'(x) = \frac{1}{w} \begin{vmatrix} 0 & \sin wx \\ f(x) & w \cos wx \end{vmatrix} = -\frac{1}{w} f(x) \sin wx$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{w} \begin{vmatrix} \cos wx & 0 \\ w \sin wx & f(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{w} f(x) \cos wx$$

Задоиксируем $x_0 \in [a,b]$, возьмём в качестве C_1:

$$C_1(x) = -\frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x} f(t)\sin\omega t\,dt$$

Аналогично:

$$C_2(x) = \frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x} f(t)\cos\omega t\,dt$$

Получаем:

$$y_ч = \left(-\frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x} f(t)\sin\omega t\,dt\right)\cos\omega x + \left(\frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x} f(t)\cos\omega t\,dt\right)\sin\omega x =$$

$$= \frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x}\left[-\sin\omega t\cos\omega x + \cos\omega t\sin\omega x\right] f(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x} f(t)\sin\omega(x-t)\,dt$$

3. По теореме 6 общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x + \frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x} f(t)\sin\omega(x-t)\,dt$$

2.5 Формула Остроградского-Лиувилля

Пусть $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — решение однородного линейного уравнения: $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0 \quad a \leq x \leq b$.

Рассмотрим определитель Вронского:

$$\mathbf{W}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Сама формула

Пусть x_0 произвольная точка из $[a, b]$. Тогда:

$$\mathbf{W}(x) = \mathbf{W}(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt}.$$

2.6 Метод Эйлера (случай простых корней)

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = 0, \qquad (1)$$

где $a_0, \ldots, a_n$ — заданные числа.

Метод Эйлера решения однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами (случай простых корней)

1. Ищем частное решение уравнения (1) в виде
$$y(x) = e^{\lambda x},$$
λ — число.

2. Вычисляем формулы
$$\begin{gathered} y^{'}(x) = \lambda e^{\lambda x} \\ y^{''}(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} \\ \dots \\ y^{(n)}(x) = \lambda^n e^{\lambda x} \end{gathered}$$

3. Подставляем эти формулы в (1):
$$a_0 \lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + a_n e^{\lambda x} \equiv 0$$
$$e^{\lambda x}(a_0 \lambda^n + \dots + a_n) \equiv 0$$

4. Так как $e^{\lambda x} \neq 0$, то
$$y = e^{\lambda x}$$
является решением уравнения (1) $\Longleftrightarrow$ λ является корнем алгебраического уравнения:
$$a_0 \lambda^n + \dots + a_n = 0 \tag{2}$$

5. (2) имеет n простых корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n \implies$ функции $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$ — решения (1).

6. Покажем, что $\left\{e^{\lambda_k x}\right\}_{k=1}^n$ — ФСР (1)

   Рассмотрим определитель Вронского $\mathbf{W}$:
$$\mathbf{W}(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{(n-1)} e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n^{(n-1)} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \dots e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{(n-1)} & \dots & \lambda_n^{(n-1)} \end{vmatrix} =$$
$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \dots e^{\lambda_n x} \prod (\lambda_j - \lambda_k) \neq 0 \implies$$
   $\left\{e^{\lambda_k x}\right\}_{k=1}^n$ — ФСР уравнения (1) $\implies$ общее решение (1) имеет вид:
$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}.$$

3 Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

3.1 Интегрирование с помощью частного решения

$$y^{''} + a_1(x)y^{'} + a_2(x)y = f(x) \tag{1}$$

1. Предположим, что $g(x)$ — частное решение уравнения (1). Тогда переходим к новой неизвестной функции $u(x)$ по формулам:

$$\begin{gathered} y(x) = u(x)g(x) \\ y^{'} = u^{'}gug^{'} \\ y^{''} = u^{''}g + u^{'}g^{'} + u^{'}g^{'} + ug^{''} = u^{''}g + 2u^{'}g^{'} + ug^{''} \end{gathered} \tag{2}$$

2. Подставляем (2) в (1):

$$\begin{gathered} u^{''}g + 2u^{'}g^{'} + ug^{''} + a_1(u^{'}g + ug^{'}) + a_2ug = 0 \\ u^{''}g + (2g^{'} + a_1g + a_1g^{'})u^{'} + (g^{''} + a_1g^{'} + a_2g)u = 0 \end{gathered}$$

$$g(x)u^{''} + b(x)u^{'} = 0 \tag{3}$$

3. Замена $v(x) = u^{'}(x)$. Тогда:

$$g(x)v^{'} + b(x)v = 0 \tag{4}$$

4. Решаем (4):

$$v(x) = c_1\varphi_1(x)$$

   общее решение (4).

5. Возвращаем замену:

$$u = c_1\int \varphi(x)dx + c_2 = c_1\varPhi(x) + c_2$$

6.

$$y = c_1\varPhi(x)g(x) + c_2g(x)$$

   общее решение уравнения (1).

3.2 Упрощение с помощью замены функции $y^{''} + \frac{1}{x}y^{'} + (1 - \frac{1}{4x^2})y = 0$

$$y^{''} + \frac{1}{x}y^{'} + (1 - \frac{1}{4x^2})y = 0$$

Пусть $y(x) = u(x)z(x)$. Тогда находим $u(x)$ как решение уравнения

$$2u^{'} + \frac{1}{x}u = 0$$

$$u^{'} = -\frac{1}{2x}u$$

$$\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}; \quad \ln|u| = -\frac{1}{2}\ln|x| \implies u = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}z(x); \quad u(x) = x^{-\frac{1}{2}}$$

Наше исходное уравнение примет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}z^{''} + (\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{x}(\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}} + (1 + \frac{1}{\sqrt{x}})\frac{1}{\sqrt{x}})z = 0$$

$$z^{''} + \frac{1}{\sqrt{x}}z = 0$$

$$z^{''} + z = 0$$

Ответ $y = c_1\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + c_2\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

3.3 Упрощение с помощью замены переменной $y^{''} + \frac{1}{2x}y^{'} - \frac{1}{x}y = 0$

$$y^{''} + \frac{1}{2x}y^{'} - \frac{1}{x}y = 0 \quad x \in (0, \infty)$$

Делаем замену $x = \varphi(t), \quad t = \psi(x)$. Выбираем ψ как решение уравнения $\psi^{'}z^{''} + a_2(x)z = 0$:

$$\psi^{''}(x) + a_1(x)\psi^{'}(x) = 0$$

Обозначим $v(x) = \psi^{'}(x)$. Тогда:

$$v^{'} + \frac{1}{2x}v = 0$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{2x} + c$$

$$\ln|v| = -\frac{1}{2}\ln|x| + c$$

$$v = x^{-\frac{1}{2}}$$

Возвращаем замену:

$$\psi^{'}(x) = x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\psi(x) = 2\sqrt{x}$$

Возвращаем замену:

$$t = 2\sqrt{x}$$

$$x = \frac{t^2}{4}, \quad 0 < t < \infty$$

Исходное уравнение переходит в уравнение:

$$(\psi^{'})^2(x)z^{''} - \frac{1}{x}z = 0$$

$$\frac{1}{x}z^{''} - \frac{1}{x}z = 0$$

$$z^{''} - z = 0$$

линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

Решаем методом Эйлера

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -1$$

$$\begin{cases} z_1 = e^{\lambda_1 t} = e^t \\ z_2 = e^{\lambda_2 t} = e^{-t} \end{cases}$$

$$z = c_1^t + c_2 e^{-t}$$

$$y(*) = y(\frac{t^2}{4}) = z(t) = z(2\sqrt{x}) = y(x)$$

Ответ: $y = c_1 e^{2\sqrt{x}} + c_2 e^{-2\sqrt{x}}$.

3.4 Метод степенных рядов $y^{''} - xy = 0$

Рассмотрим уравнение:

$$y^{''} - xy = 0$$

Метод степенных рядов:

$$y^{''} + a_1(x)y^{'} + a_2(x)y = f(x), \quad a \le x \le b$$

Теорема

Предположим, что $a_1(x), a_2(x), f(x)$ раскладываются в степенной ряд на $[a, b]$. Тогда любое решение уравнения раскладывается в степенной ряд на $[a, b]$.

Пример

$$\begin{cases} y'' - xy = 0, \quad -\infty < x < +\infty & (1) \\ y(0) = c_1, y'(0) = c_2 & (2) \end{cases}$$

Решаем задачу Коши 1-5 методом степенных рядов.
Ищем решение в виде

$$\begin{cases} y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots; \\ y'(x) = a_1 + 2a_2x^2 + \dots + na_nx^n + \dots = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \\ = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k \end{cases} \quad (3)$$

$$y(0)_{(*)} = a_0 = c_1$$

$$y'(0)_{(*)} = a_1 = c_2$$

Подставим (3) в (1).

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - x\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k \equiv 0;$$

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{k=1}^{\infty}a_{n-1}x^n \equiv 0;$$

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}]x^n \equiv 0 = 0 + 0x + 0x^2 + \dots \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 2a_2 = 0; \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1} = 0; \quad n = 1, 2, \dots$$

Таким образом,

$$a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Пусть $k = n - 1$. Тогда из (4):

$$a_{k+3} = \frac{a_k}{(k+3)(k+2)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Из (5):

$$a_2 = 0, a_5 = 0, a_8 = 0, \dots$$

$$a_0 = c_1, a_3 = \frac{c_1}{3\cdot 2}, a_6 = \frac{a_3}{6\cdot 5}, \ldots, a_{3k} = \frac{c_1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot \cdots \cdot (3k-1)3k}\ k = 0, 1, \ldots$$

$$a_1 = c_2, a_4 = \frac{a_1}{3\cdot 4} = \frac{c_2}{3\cdot 4}, a_7 = \frac{a_4}{6\cdot 7}, \ldots, a_{3k+1} = \frac{c_2}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot \cdots \cdot (3k)(3k+1)}$$

Имеем:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k} x^{3k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k+1} x^{3k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k+2} x^{3k+2} =$$

$$= c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot \cdots \cdot (3k-1)3k} + c_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k-1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot (3k)(3k+1)} =$$

$$= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

ФСР для (1).

3.5 Алгоритм решения простейшей краевой задачи

Простейшая краевая задача имеет вид:

$$\begin{cases} y^{''} + q(x) = f(x), \quad a \le x \le b & (1) \\ y(a) = 0, y(b) = 0 & (2) \end{cases}$$

Алгоритм решения краевой задачи 1-2

1. Решаем соответствующее однородное уравнение:

$$y^{''} + q(x)y = 0 \tag{3}$$

   Находим его ФСР. Пусть $y_1(x), y_2(x)$ — ФСР.

2. Находим $y_ч(x)$ — частное решение уравнения (1) методом вариации.

3. Получаем общее решение (1)

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_ч(x)$$

4. Подставляем формулу из предыдущего пункта в краевые условия:

$$\begin{cases} c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) + y_ч(a) = 0 \\ c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b) + y_ч(b) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

   (5) — линейная однородная система относительно c_1 и c_2.

5. Вычисляем определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix}$$

6. Если $\Delta \neq 0$, то (5) имеет едиственное решение, обозначим его

$$c_1^0, \quad c_2^0$$

   В этом случае функция $y(x) = c_1^0 y_1(x) + c_2^0 y_2(x) + y_ч$ является единственным решением краевой задачи.

7. Пусть $\Delta = 0$. Тогда возможны подслучаи:

   (a) (5) имеет бесконечно много решений, следовательно, задача 1-5 имеет также бесконечно много решений.

   (b) (5) не имеет ни одного решения, следовательно, задача 1-5 тоже не имеет решения.

3.6 Существование решения краевой задачи

Рассмотрим простейшую краевую задачу:

$$\begin{cases} y'' + q(x) = f(x), \quad a \leq x \leq b & (1) \\ y(a) = 0, y(b) = 0 & (2) \end{cases}$$

Если соответствующая однородная задача:

$$\begin{cases} y'' + q(x)y = 0, \quad a \leq x \leq b & (3) \\ y(a) = 0, y(b) = 0 & (4) \end{cases}$$

имеет только нулевое решение, то исходная задача 1-2 имеет единственное решение $\forall f(x)$.

Доказательство:

Предположим, что 3-4 имеет только нулевое решение. Применим предыдущий алгоритм к 3-4.

Пусть $y_1(x), y_2(x), y_ч(x)$ — ФСР однородного уравнения.

$$y_ч(x) \equiv 0, y = c_1 y(x) + c_2 y_2(x)$$

Подставляем в краевые условия:

$$\begin{cases} c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) = 0, \quad a \leq x \leq b \\ c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Вычисляем Δ системы (5):

Если $\Delta = 0$, то однородная система (5) имеет бесконечно много решений $\implies$ существует ненулевое решение 3-4 $\implies$ противоречие.

Значит, $\Delta \neq 0 \implies$ решение 1-5 можно найти, и оно будет единственным.

4 Линейные системы

4.1 Определения

4.1.1 Нормальная линейная система, её векторная запись

Нормальная неоднородная линейная система

Нормальная неоднородная линейная система имеет вид:

$$\begin{cases} y_1^{'} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ y_2^{'} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\ \dots \\ y_n^{'} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases} \tag{1}$$

где x — независимая переменная $a \le x \le b$, $a_{ij}(x), f_i(x)$ — заданные непрерывные функции, y_i — неизвестные функции.

Векторная запись нормальной неоднородной линейной системы

Обозначим

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ & \dots & \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

По определению:

$$Y^{'}(x) = \begin{pmatrix} y_1^{'}(x) \\ \dots \\ y_n^{'}(x) \end{pmatrix}$$

$$A(x)Y(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x)y_1 + \dots + a_{1n}(x)y_n \\ \dots \\ a_{n1}(x)y_1 + \dots + a_{nn}(x)y_n \end{pmatrix}$$

$A(x)Y(x) + F(x)$ — вектор соответствующий правой части (1). Тогда

$$Y^{'} = A(x)Y + F(X)$$

векторная запись (1).

Определение нормальной однородной линейной системы

Линейная система (1) называется однородной, если $\forall f_n(x) = 0 \quad i = \overline{1, n}$

$$Y^{'} = A(x)Y \tag{2}$$

или

$$\begin{cases} y_1^{'} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n \\ y_2^{'} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n \\ \dots \\ y_n^{'} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n \end{cases} \tag{3}$$

где x — независимая переменная $a \le x \le b$, $a_{ij}(x)$ — заданные непрерывные функции, y_i — неизвестные функции.

4.1.2 Решение системы

Определение решения нормальной линейной системы

Говорят, что дифференцируемые функции $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ образуют решение системы (1), если при подстановке их в уравнение вместо соответствующих y_i получается тождество:

$$y_k^{'} = a_{k1}(x)\varphi_1(x) + dots + a_{kn}\varphi_n(x) + f_k(x); \quad k = \overline{1, n}$$

В векторной форме: дифференцируемая функция

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \dots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}$$

является решением (1), если

$$\Phi^{'}(x) = A(x)\Phi(x) + F(x)$$

4.1.3 Задача Коши для системы

$$\begin{cases} y_1^{'} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ y_2^{'} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\ \dots \\ y_n^{'} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases} \tag{4}$$

Определение задачи Коши нормальной линейной системы

Пусть $x_0 \in [a, b]$, $y_1^0, \dots, y_n^0$ — заданные числа.
Начальными условиями для системы (4) в точке x_0 называются равенства:

$$y_1(x_0) = y_1^0 y_2(x_0) = y_2^0 \dots y_n(x_0) = y_n^0 \tag{5}$$

Задача 4-5 называется задачей Коши для системы (4).

В векторной форме:

$$Y^{'} = A(x)Y(x) + F(x), \quad Y(x_0) = Y^0,$$

где $Y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \dots \\ y_n^0 \end{pmatrix}$.

4.1.4 Линейно зависимые и линейно независимые вектор-функции

Определение линейно зависимых вектор-функций

Пусть $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x) \in R^n, \quad a \leq x \leq b$. Эти вектор-функции называются линейно зависимыми на $[a, b]$, если:

$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$ — числа не все равные 0 : $\alpha_1 \Phi_1(x) + \dots + \alpha_n \Phi_n(x) = \overline{0}$

Определение линейно независимых вектор-функций

Пусть $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x) \in R^n, \quad a \leq x \leq b$. Эти вектор-функции называются линейно независимыми на $[a, b]$, если

$$\alpha_1 \Phi_1(x) + \dots + \alpha_n \Phi_n(x) = \overline{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

4.1.5 Определитель Вронского вектор-функций

Определение определителя Вронского вектор-функций

Пусть $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x) \in R^n$. Их определителем Вронского называется определитель

$$W = |\Phi_1(x)\Phi_2(x) \dots \Phi_n(x)|$$

4.1.6 Фундаментальная система решений линейной системы

Определение фундаментальной системы решений нормальной линейной системы

Рассмотрим $Y^{'} = A(x)Y(x), \quad a \leq x \leq b, \quad Y(x) \in R^n$, $A(x)$ размерности $n \times n$.

Линейно независимые решения $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)$ называются фундаментальной системой решений.

4.1.7 Фундаментальная матрица решений однородной системы

Определение фундаментальной матрицы решений нормальной однородной системы

Матрица $T(x) = (Y_1(x)Y_2(x) \dots Y_n(x))$ называется фундаментальной матрицей для однородной системы $Y^{'} = A(X)Y(x), \quad a \leq x \leq b$, если

$$Y_1(x), \dots, Y_n(x) \text{ — ФСР однородной системы.}$$

4.1.8 Линейные системы с постоянными коэффициентами

Определение однородной линейной системы с постоянными коэффициентами

Линейная однородная система с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n \\ \dots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n \end{cases}$$

где a_{ij} — заданные числа.

В векторной форме:

$$Y' = AY$$

где $A = (a_{ij})_{ij=1}^n, Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$.

4.1.9 Собственные значения и собственные векторы матрицы

Пусть $A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ & \dots & \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$ — числовая матрица.

Число λ называется собственным значением матрицы A, если существует вектор

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} \neq 0 \quad : \quad AV = \lambda V$$

А сам вектор V — называтся собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному значению λ.

4.1.10 Матричная экспонента

$$E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{n!}A^n + \dots \qquad (6)$$

Определение матричной экспоненты

Сумма ряда (6) обозначается

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k$$

и называется матричной экспонентой.

4.2 Извинения

Я не успеваю всё качественно проверить и напечатать, хочу спать, приношу извинения за неудобства.

4.3 Теоремы, алгоритмы, примеры

4.3.1 Свойства решений однородной системы

Теорема 1:

Пусть вектора раз-сти н $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ – решения однородной системы:

$$(2) \quad Y' = A(x) Y$$

и

$c_1, c_2, \ldots, c_m$ – произвольные фиксированные числа. Тогда

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) c_1 + \ldots + \varphi_2(x) c_m$$ – тоже решение (2)

Док-во:

Рассмотрим $\varphi'(x)$

$$\varphi'(x) = c_1 \varphi_1'(x) + \ldots + c_m \varphi_m'(x) =$$

по условию

$$= c_1 A(x) \varphi_1(x) + \ldots + c_m A(x) \varphi_m(x) =$$

$$= A(x) \left(c_1 \varphi_1(x) + \ldots + c_m \varphi_m(x) \right) =$$

$$= A(x) \varphi(x) \Rightarrow \varphi'(x) = A(x) \varphi(x) \; \square$$

4.3.2 Необходимое условие линейной зависимости вектор-функций

Теорема 2:

Если $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x) \in \mathbb{R}^n$ – линейно зависимы на $[a, b]$, то их определитель Вронского $\forall x \in [a, b]$ равен 0

Док-во:

Фиксируем произвольный $x \in [a, b]$ и рас-м W:

$$W = \left| \varphi_1(x) \varphi_2(x) \ldots \varphi_n(x) \right|$$

Столбцы этого определителя линейно зависимы (согласно условию) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow W(x) \equiv 0$$

$\square$

4.3.3 Условие линейной независимости решений однородной системы

в силу единственности решения (3) $\varphi(x) \equiv 0$, то есть

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \ldots + \alpha_n \varphi_n(x) \equiv 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \alpha_i = 0 \quad i = \overline{1,n} \quad \Rightarrow \text{противоречие} \quad \square$$

Теорема 3:

Пусть $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ – линейно независимое решение ОС (1) $Y' = A(x)Y$, $x \in [a,b]$.

Тогда:

$$\forall x \in [a,b] \quad W(x) \neq 0$$

Док-во: От противного. Предположим, что

$$\exists x_0 \in [a,b] \quad W(x_0) = 0.$$

По теореме из алгебры, его столбцы линейно зависимы, т.е.

$$\exists \alpha_1, \ldots \alpha_n \text{ – числа не все равные нулю: } \alpha_1 \varphi_1(x) + \ldots + \alpha_n \varphi_n(x) = 0 \quad (2)$$

Обозначим, через $\varphi(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \ldots + \alpha_n \varphi_n(x)$ по теореме 1 $\varphi(x)$ – решение (1) в силу (2) $\varphi(x_0) = 0$, другими словами, $\varphi(x)$ – является решением следующей задачи Коши:

$$(3) \quad Y' = A(x)Y, \quad Y(x_0) = 0$$

Фун-ия $Y(x) \equiv 0$ очевидно явл. решением (3) $\Rightarrow$

4.3.4 Существование ФСР

Рассмотрим (1) $Y' = A(x)Y$, $a \leq x \leq b$, $Y(x) \in \mathbb{R}^n$ $A(x)$ – размер $n \times n$.

Теорема 4.

Система (1) всегда имеет ФСР.

Док-во:

Пусть $x_0 \in [a,b]$. Рас-м задачу Коши для системы

$$Y' = A(x)Y, \quad Y(x_0) = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 \neq 0 \text{ – любое число}$$

Обозначим $\Phi_1(x)$ – решение этой ЗК. Рас-м другую задачу Коши:

$$Y' = A(x)Y, \quad Y(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_2 \neq 0 \text{ – любое число}$$

Обозначим $\Phi_2(x)$ – решение это ЗК.

. . . . .

Рас-м последнюю задачу Коши:

$$Y' = A(x)Y, \; Y(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}, \quad \gamma_n \neq 0$$

Обозначим через $\Phi_n(x)$ её решение

Рас-м

$$W(x_0) = \left| \Phi_1(x_0) \dots \Phi_n(x_0) \right| = \begin{vmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_n \end{vmatrix} = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \ldots \cdot \gamma_n \neq 0$$

Таким образом, решения $\Phi_1 \dots \Phi_n$ – линейно независимы $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)$ – ФСР.

Т.2.

4.3.5 Вид общего решения однородной системы

Теорема 5:

Пусть $\Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x)$ – ФСР системы

$$(1) \quad Y' = A(x)Y, \quad a \le x \le b$$

Тогда общее решение системы (1) имеет вид:

$$(2) \quad Y(x) = C_1\Phi_1(x) + \ldots + C_n\Phi_n(x),$$ где $\forall C_i$ $i=\overline{1,n}$ – произвольные константы.

Док-во:

Очевидно, что при $\forall C_i$ $i=\overline{1,n}$ (2) будет решением (1) (согласно Т. 1).

Покажем, что (2) содержит все решения (1):

Пусть $Z(x)$ – произвольное решение (1), $x_0 \in [a,b]$.

Рас-м линейную алгебраическую систему:

$$(3) \begin{cases} \alpha_1 \varphi_{11}(x_0) + \alpha_2 \varphi_{12}(x_0) + \ldots + \alpha_n \varphi_{1n}(x_0) = z_1(x_0) \\ \alpha_1 \varphi_{21}(x_0) + \alpha_2 \varphi_{22}(x_0) + \ldots + \alpha_n \varphi_{2n}(x_0) = z_2(x_0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 \varphi_{n1}(x_0) + \alpha_2 \varphi_{n2}(x_0) + \ldots + \alpha_n \varphi_{nn}(x_0) = z_n(x_0) \end{cases},$$

где φ_{ij} – координаты $\Phi_i(x)$ и z_i координаты $Z(x)$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – неизвестные величины.

Определитель этой системы:

$$\left| \Phi_1(x_0) \quad \Phi_2(x_0) \ldots \Phi_n(x_0) \right| = W(x_0) \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (3) имеет решение $C_1^0, \ldots, C_n^0$

Обозначим $\Phi(x) = C_1^0\Phi_1(x) + \ldots + C_n^0\Phi_n(x)$ по Т. 1 $\Phi(x)$ решение (1),

а в силу (3) $\Phi(x_0) = Z(x_0)$

Таким образом, $\Phi(x)$ и $Z(x)$ – решение (1) с одинаковыми н.у. в т. x_0,

другими словами, являются решениями ЗК $Y' = A(x)Y$, $Y(x_0) = Z(x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в силу свойств ЗК $Z(x) \equiv \Phi(x_0) = C_1^0\Phi_1(x) + \ldots + C_n^0\Phi_n(x)$ $\square$

4.3.6 Вид общего решение неоднородной системы

(1) $Y' = A(x)Y + F(x)$, $a \le x \le b$, $A = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^{n}$, $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$, $F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$

(2) $Y' = A(x)Y$

Т.5: Пусть $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)$ — фср (2). Тогда общее решение (2) имеет вид

(3) $Y = C_1\Phi_1(x) + \dots + C_n\Phi_n(x)$

Теорема 6:

Пусть $\{\Phi_k(x)\}_{k=1}^{n}$ — ФСР (2), $Y_\text{ч}$ — частное решение (1). Тогда общее решение (1) имеет вид

(4) $Y = C_1\Phi_1(x) + \dots + C_n\Phi_n(x) + Y_\text{ч}$

Док-во:

Рассмотрим:

$$\left(C_1\Phi_1(x) + \dots + C_n\Phi_n(x) + Y_\text{ч}(x)\right)' = C_1\Phi_1'(x) + \dots + C_n\Phi_n'(x) + Y_\text{ч}'(x) =$$

$$= C_1 A(x)\Phi_1(x) + \dots + C_n A(x)\Phi_n(x) + \underbrace{A(x)Y_\text{ч}(x) + F(x)}_{Y_\text{ч}'(x)} =$$

$$= A(x)\left[C_1\Phi_1(x) + \dots + C_n\Phi_n(x) + Y_\text{ч}(x)\right] + F(x) \equiv \left(C_1\Phi_1(x) + \dots + C_n\Phi_n(x) + Y_\text{ч}(x)\right)' \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\forall C_1, \dots, C_n$ (4) даёт решение (1).

Докажем, что (4) содержит все решения (1):

Пусть $Z(x)$ — произвольное решение (1), обозначим

$$W(x) = Z(x) - Y_\text{ч}(x)$$

Рассмотрим

$$W'(x) = Z'(x) - Y_\text{ч}(x) \equiv A(x)Z(x) + F(x) - \left(A(x)Y_\text{ч}(x) + F(x)\right) \equiv$$

$\equiv A(x)\left[Z(x) - Y_\text{ч}(x)\right] \Rightarrow W(x)$ — решение (2) по теореме 5 $\exists C_1^0, \dots, C_n^0$ $\underbrace{W(x)}_{Z(x) - Y_\text{ч}(x)} = C_1^0\Phi_1(x) + \dots + C_n^0\Phi_n(x)$;

$Z(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k^0 \Phi_k(x) + Y_\text{ч}(x) \Rightarrow Z$ содержится в (4),

следовательно (4) — общее решение. □

4.3.7 Свойства фундаментальных матриц

Свой-ва фундаментальной матрицы:

1. Пусть $T(x)$ – фунд. ма-ца, $a \le x \le b$. Тогда

$$\forall x \in [a,b] \quad \exists T^{-1}(x)$$

В самом деле

$$\det T(x) = W(x) \neq 0 \Rightarrow \exists T^{-1}(x)$$

2. $T'(x) = A(x)T(x)$

В самом деле $T'(x) = (Y_1'(x), \dots, Y_n'(x)) = (A(x)Y_1(x) \dots A(x)Y_n(x)) \ominus$

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right)_{i,j=1}^{n}$$

если $B = (B_1 \dots B_n)$, то $AB = (AB_1 \dots AB_n)$

$\ominus$ $A(x)(Y_1 \dots Y_n) = A(x)T(x)$

3. Пусть $T(x)$ – ФМ (2) $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix}$. Тогда

общее решение (2) и его можно представить

$$Y = T(x)C$$

В самом деле

$$T(x)C = (Y_1 \dots Y_n)\begin{pmatrix} C_1 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix} = C_1Y_1 + C_2Y_2(x) + \dots + C_nY_n(x)$$

4.3.8 Метод вариации нахождения частного решения

- (1) $Y' = A(x)Y + F(x)$, $a \le x \le b$, $A = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^{n}$

Нахождение $Y_ч(x)$ (1) методом вариации произвольных постоянных

Пусть $Y_1(x), \dots, Y_2(x)$ – ФСР соотв. однородной системы (2) $Y' = A(x)Y$

$$Y_o = C_1Y_1(x) + C_nY_n(x)$$

Запишем $Y_ч(x)$ в виде

$$Y_ч(x) = C_1(x)Y_1(x) + \dots + C_n(x)Y_n(x) \underset{св-во\ 3}{=} T(x)C(x),$$

где $T(x) = (Y_1(x) \dots Y_n(x))$

(3) $Y_ч = T(x)C(x)$

$$Y_ч'(x) = T'(x)C(x) + T(x)C'(x)$$

Подставим эти формулы в (1):

$$T'(x)C(x) + T(x)C'(x) = A(x)T(x)C(x);$$

Согласно свой-ву (2):

$$\cancel{A(x)T(x)C(x)} + T(x)C'(x) = \cancel{A(x)T(x)C(x)} + F(x)$$

$$T^{-1}(x)\cdot \mid T(x)C'(x) = F(x)$$

$$\underbrace{T^{-1}(x)T(x)}_{E}C'(x) = T^{-1}(x)F(x);$$

$$C'(x) = T^{-1}(x)F(x) \Rightarrow C(x) = \int_{x_0}^{x} T^{-1}(t)F(t)dt, \quad x_0 \in [a,b]$$

Подставляем C в (3) и получаем

$$Y_ч = T(x)\int_{x_0}^{x} T^{-1}(t)F(t)dt$$

4.3.9 Формула Коши

Формула Коши.

Задача Коши: $T(x) = (y_1(x) \dots y_n(x))$

$$(1)\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + \dots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), & y_1(x_0) = y_1^0 \\ \dots & \dots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + \dots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x), & y_n(x_0) = y_n^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} y' = A(x)y + F(x), \\ y(x_0) = y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \dots \\ y_n^0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Пусть $y_1(x), \dots, y_n(x)$ — ф.с.р. одн. сист. $y' = A(x)y$. По методу вариации находим $y_ч(x) = T(x)\int T^{-1}(x)F(x)dx = T(x)\int_{x_0}^{x} T^{-1}(t)F(t)dt$ — ч. реш. $y' = A(x)y + F(x)$.

По т. 5 общ. реш. системы $y' = A(x)y + F(x)$ имеет вид

$y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) + y_ч(x)$, или $y(x) = T(x)c + T(x)\int_{x_0}^{x} T^{-1}(t)F(t)dt$ (2).

Подст. эту ф-лу в нач. усл. $y(x_0) = y^0$: $T(x_0)c = y^0 \Rightarrow c = T^{-1}(x_0)y^0 \rightarrow$

$\rightarrow$ подст. в (2): $y(x) = T(x)T^{-1}(x_0)y^0 + T(x)\int_{x_0}^{x} T^{-1}(t)F(t)dt$ (3).

(3) даёт реш. задачи Коши (1), (3) — формула Коши.

4.3.10 Нахождение собственных значений и собственных векторов матрицы

Нахождение собственного значения и собственных векторов:

Пусть V – с. в. с. з. λ, т. е. $AV = \lambda V$;

$(A - \lambda E)V = 0$;

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(1) \begin{cases} (a_{11} - \lambda) v_1 + a_{12} v_2 + \dots + a_{1n} v = 0 \\ a_{21} v_2 + (a_{22} - \lambda) v_2 + \dots + a_{2n} v_2 = 0 \\ \dots \\ a_{n1} v_n + a_{n2} v_n + \dots + (a_{nn} - \lambda) v_n = 0 \end{cases}$$

– линейная однородная алгебраическая система относительно $v_1, \dots, v_n$

Т. к. $V \neq 0$, то система (1) имеет ненулевое решение $\Rightarrow$ её определитель

$$\Delta = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \iff (-1)^n \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n = 0 \quad (2)$$

Вывод: собственное значение λ должно быть корнем ур-ия (2).

4.3.11 Метод Эйлера (случай простых собственных значений)(включая лемму)

Рассмотрим:

$$Y' = AY \quad (1), \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$$

Метод Эйлера решения (1)

Идея: Будем искать частное решение нашей системы в виде $Y = e^{\lambda x} V = \begin{pmatrix} e^{\lambda x} v_1 \\ \vdots \\ e^{\lambda x} v_n \end{pmatrix}$, где

λ – пока неизвестное число, а V – пока неизвестный числовой вектор

Вычисляем $Y'(x) = \lambda e^{\lambda x} V$

Подставляем эти формулы в систему (1):

$$\lambda e^{\lambda x} V = A(e^{\lambda x} V);$$

$$\lambda e^{\lambda x} V = e^{\lambda x} A V$$

$$e^{\lambda x} \neq 0 \Rightarrow \lambda V = AV$$

или

$$(2) \quad AV = \lambda V$$

Вывод, чтобы Y – было решением системы (1) $\Leftrightarrow$ когда выполняется (2), причём $V \neq 0$. $\Leftrightarrow$ согласно отступлению и (2) λ – с.з. A и V – с.в.

Случай простых собственных значений:

Пусть $p(\lambda) = |A - \lambda E|$.

Предположим, что характеристическое ур-ие $p(\lambda) = 0$ имеет n различных корней: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

Находим соответствующие собственные вектора:

$$V_1 \sim \lambda_1$$
$$\ldots$$
$$V_n \sim \lambda_n$$

Согласно методу Эйлера мы нашли n частных решений.

$$\left.\begin{aligned} Y_1(x) &= e^{\lambda_1 x} V_1, \\ &\ldots \\ Y_n(x) &= e^{\lambda_n x} V_n. \end{aligned}\right\} \text{– решения (1)}$$

4.3.12 Пример $Y' = AY$

Пример:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 - y_3 \\ y_2' = -y_1 + y_2 + y_3 \\ y_3' = y_1 - y_3 \end{cases} \Leftrightarrow Y' = AY$$

Решаем методом Эйлера:

Рассмотрим матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Выписываем характеристическое ур-ие:

$$|A - \lambda E| = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(1-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) + 1(-2)(1) + 0 - (1)(1-\lambda)(-1) - (-1)(-2)(-1-\lambda) =$$

$$= \left((1-2\lambda+\lambda^2) - 2\right)(-1-\lambda) - 2 + 1 - \lambda = (-1-2\lambda+\lambda^2)(-1-\lambda) - 1 - \lambda =$$

$$= \cancel{1} + \cancel{\lambda} + 2\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^2 - \lambda^3 - \cancel{1} - \cancel{\lambda} = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda$$

$$\lambda_1 = 0; \ \lambda_2 = -1; \ \lambda_3 = 2$$

Найдём собственный вектор соответствующий собственному значению λ_1

Для этого решаем систему

$$(A-\lambda_1 E)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} v_1 - 2v_2 - v_3 = 0 \Rightarrow -2v_2 = 0 \\ -v_1 + v_2 + v_3 = 0 \qquad v_2 = 0 \\ v_1 - v_3 = 0 \Rightarrow v_1 = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2v_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ v_1 = v_3 \end{cases} \Rightarrow v_1 \text{ и } v_3 \text{ – любые числа}$$

Пусть $v_1 = v_3 = 1$ $\Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$(A-\lambda_2 E)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2v_1 - 2v_2 - v_3 = 0 \qquad 2v_2 + v_3 = 0 \\ -v_1 + 2v_2 + v_3 = 0 \qquad 2v_2 + v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = 2v_2 \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 0 \end{cases}$$

$$(A-\lambda_3 E)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -v_1 - 2v_2 - v_3 = 0 \\ -v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 - 3v_3 = 0 \Rightarrow v_1 = 3v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2v_2 - 4v_3 = 0 \\ -v_2 - 2v_3 = 0 \\ v_1 = 3v_3 \end{cases} \Rightarrow v_2 = -2\underbrace{v_3}_{\text{любое}} \Rightarrow V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Выписываем ФСР:

$$Y_1 = e^{\lambda_1 x} V_1 = V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = e^{-x} V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad Y_3 = e^{2x}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение:

$$Y = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ e^{-x} \\ -2e^{-x} \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 3e^{2x} \\ -2e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + 3c_3e^{2x} \\ c_2e^{-x} - 2c_3e^{2x} \\ c_1 - 2c_2e^{-x} + c_3e^{2x} \end{pmatrix}$$

Ответ: $y_1 = c_1 + 3c_3e^{2x}$, $y_2 = c_2e^{-x} - 2c_3e^{2x}$, $y_3 = c_1 - 2c_2e^{-x} + c_3e^{2x}$

4.3.13 Лемма $|a_{ij}^{(m)}| \le n^{m-1} d^m$

Лемма:

Справедливы неравенства:

(2) $|a_{ij}^{(k)}| \le n^{k-1} d^k$, где $d = \max\limits_{1 \le i,j \le n} |a_{ij}|$; $k = 1, 2, \dots$

Док-во: Докажем по индукции:

Пусть $k=1$ $\quad |a_{ij}| \le d$ – очевидно выполняется

Предположим, что (2) справедливо для некоторого k.

Докажем, что k справедливо для $k+1$:

Рассмотрим:

$$|a_{ij}^{(k+1)}| = \left|\sum_{l=1}^{n} a_{il}^{(k)} a_{lj}\right| \le \sum_{l=1}^{n} \underbrace{|a_{il}^{(k)}|}_{d^k} \overbrace{|a_{lj}|}^{\le d} \le \sum_{l=1}^{n} n^{k-1} d^k d = n d^{k+1}$$

Таким образом:

$$|a_{ij}^{(k+1)}| \le n^k d^{k+1} \quad \square$$

4.3.14 Существование e^A

$$(1) \quad E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{n!}A^n + \dots$$

Теорема 7:

Ряд (1) сходится при любой матрице A.

Док-во:

По определению сходимости (1) надо доказать, что

$$\forall\, 1 \le i, j \le n \qquad \exists \lim_{m\to\infty} \underbrace{\left(\delta_{ij} + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} a_{ij}^{(k)}\right)}_{S_{ij}^{(m)}}$$

Отметим, что i и j – фиксированные номера.

Заметим, что $S_{ij}^{(m)}$ – это частичные суммы числового ряда (3) $\delta_{ij} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_{ij}^{(k)}}{k!}$

Таким образом, надо доказать, что (3) – сходится. Будем использовать признак мажорации:

Рассмотрим $\left|\frac{a_{ij}^{(k)}}{k!}\right| \underset{\text{лемма}}{\leq} \frac{1}{k!} n^{k-1} d^k$

Следовательно, ряд (3) мажорируется следующим рядом

$$(4) \quad 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\, n^{k-1} d^k =$$

$$= 1+\frac{1}{n}\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nd)^k}{k!}}_{\text{сходится}} = 1+\frac{1}{n}\left(e^{nd}-1\right)$$

Следовательно, (3) сходится по признаку мажорации.

□

4.3.15 e^{Ax} — фундаментальная матрица системы $Y' = AY$.

Рассмотрим однородную систему с постоян. коэффициентами:

$$(1) \quad Y' = AY, \quad x\in R, \quad A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}, \quad Y=\begin{pmatrix}y_1(x)\\ \vdots \\ y_n(x)\end{pmatrix}$$

Теорема 8:

Матрица e^{Ax} является фундаментальной матрицей системы (1).

Док-во:

Пусть $e^{Ax} = \left(Y_1(x)\, Y_2(x) \dots Y_n(x)\right)$

Покажем, что $Y_1(x),\dots,Y_n(x)$ образуют ФСР (1):

Рассмотрим $\underbrace{e^{Ax}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}A^k}_{\text{степенной ряд, сходящийся для } \forall x\in R}$, x – переменная

По св-ву степенных рядов существует $\frac{d}{dx}e^{Ax} = \frac{d}{dx}\left(E+xA+\dots+\frac{x^k}{k!}A^k+\dots\right)=$

$$= A+xA^2+\frac{3x^2}{3!}A^3+\dots+\frac{kx^{k-1}}{k!}A^k+\dots = A+xA^2+\frac{x^2}{2!}A^3+\dots+\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}A^k+\dots =$$

$$= A\left(E+xA+\frac{x^2}{2!}A^2+\dots+\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}A^{k-1}+\dots\right) = Ae^{Ax}$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dx}e^{Ax} \equiv Ae^{Ax};$$

$$\left(Y_1'(x)\, Y_2'(x) \dots Y_n'(x)\right) \equiv A\left(Y_1(x)\, Y_2(x) \dots Y_n(x)\right);$$

$$\left(Y_1'(x)\, Y_2'(x) \dots Y_n'(x)\right) \equiv \left(AY_1(x) \;\; AY_2(x) \dots AY_n(x)\right);$$

$$Y_j'(x) \equiv AY_j(x), \quad j=\overline{1,n} \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $Y_1(x),\dots,Y_n(x)$ – решение (1)

Покажем, что они линейно независимы, то есть образуют ФСР:

Рассмотрим их определитель Вронского:

$$W(x) = \left| Y_1(x)\ Y_2(x) \ldots Y_n(x) \right| = \det e^{Ax}\Big|_{x=0} = \det e^0 = \det E = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_1(x), \ldots, Y_n(x) - \text{ФСР} \Rightarrow e^{Ax} - \text{фундаментальная матрица}$$

$\square$

4.3.16 Формула Коши для линейных систем с постоянными коэффициентами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$e^A = E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots + \frac{1}{k!}A^k + \ldots$$

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n \\ \ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases} \Leftrightarrow Y' = AY, \quad e^{AY} - \text{фунд. мат-ца этой системы}$$

Формула Коши решения ЛСсПК:

Рассмотрим:

$$(1)\ Y' = AY + F(x), \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

Была формула Коши для произвольной линейной системы:

$$Y' = A(x)Y + F(x), \quad -\infty < x < +\infty$$

Любое решение этой системы равно:

$$Y(x) = T(x)T^{-1}(x_0)\,Y(0) + T(x)\int_{x_0}^{x} T^{-1}(t)\,F(t)\,dt$$

В нашем случае (1):

$$x_0 = 0, \quad T(x) = e^{Ax}$$

По формуле Коши любое решение (1) даётся формулой:

$$Y(x) = e^{Ax}\left(e^0\right)^{-1} Y(0) + e^{Ax}\int_0^x \left(e^{At}\right)^{-1} F(t)\,dt =$$

$$= e^{Ax}\,Y(0) + \int_0^x e^{Ax}e^{-At}F(t)\,dt = e^{Ay}\,Y(0) + \int_0^x e^{A(x-t)}F(t)\,dt$$

$$\boxed{e^{Ay}\,Y(0) + \int_0^x e^{A(x-t)}F(t)\,dt}$$

4.3.17 Пример: нахождение e^A

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad e^A = ?$$

Решение:

Рассмотрим ОЛС с ПК для

$$(1) \quad Y' = AY \iff \begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

Решаем (1) методом Эйлера:

1. Найдём собственное значение матрицы A:

Рассмотрим х-ое ур-ие для A

$$\det(A - \lambda E) = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$8 - 6\lambda + \lambda^2 - 3 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

$$D = 36 - 20 = 4^2$$

$$\lambda_1 = \frac{6+4}{2} = 5, \quad \lambda_2 = \frac{6-4}{2} = 1$$ — собственные значения A

2. Найдём собственный вектор V соответствующий λ.

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

v_1, v_2 — образуют ненулевое решение системы

$$(A - \lambda_1 E)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 0 \\ 3v_1 + 3v_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} v_1 = -1 \\ v_2 = 1 \end{cases}$$

Таким образом, $V = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, собственный вектор $\sim \lambda_1$

Найдём с.в. для λ_2

$$(A-\lambda_2 E)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} -3v_1 + v_2 = 0 \\ 3v_1 - v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_2 = 3 \end{cases}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Выписываем ФСР для (1):

$$Y_1 = e^{\lambda_1 x} V_1 = \begin{pmatrix} -e^{x} \\ e^{x} \end{pmatrix}$$

$$Y_2 = e^{\lambda_2 x} V_2 = \begin{pmatrix} e^{5x} \\ 3e^{5x} \end{pmatrix}$$

4. Общее решение системы (1):

$$Y = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) = C_1 \begin{pmatrix} e^{-x} \\ e^{x} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{5x} \\ 3e^{5x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x} \\ C_1 e^{x} + 3C_2 e^{5x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

Общее решение (1)

$$y_1(x) = -C_1 e^{x} + C_2 e^{5x}$$
$$y_2(x) = C_2 e^{x} + 3C_2 e^{5x}$$

5. $e^{A} = ?$

6. Рассмотрим $e^{Ax} = \big(z_1(x)\ z_2(x)\big)$ – фу-ая матрица системы (1),

т.е. $z_1(x)$, $z_2(x)$ – решение (1)

Если $x=0$, то $e^{0} = E = \big(z_1(0),\ z_2(0)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow z_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ z_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Найдём $z_1(x)$:

$z_1(x)$ – решение, уд-ие нач-у усл-ю $z_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

т.е. координаты $z_1(x)$ – являются решением задачи Коши

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2, & y_1(0) = 1 \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2 & y_2(0) = 2 \end{cases} \qquad (*)\begin{cases} y_1 = -C_1 e^{x} + C_2 e^{5x} \\ y_2 = C_1 e^{x} + 3C_2 e^{5x} \end{cases}$$

Подставляем (*) в систему

$$\begin{cases} y_1(0) = -c_1 + c_2 = 1 \\ y_2(0) = c_1 + 3c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1^0 = -\frac{3}{4} \\ c_2^0 = \frac{1}{4}, \end{cases}$$

$$y_1^0 = \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{5x}$$

$$y_2^0 = -\frac{3}{4}e^x + \frac{3}{4}e^{5x} \quad \Rightarrow \quad z_1(x) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{5x} \\ -\frac{3}{4}e^x + \frac{3}{4}e^{5x} \end{pmatrix}$$

Найдём $z_2(x)$

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2, & y_1(0) = 0 \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2 & y_2(0) = 1 \end{cases} \overset{(*)}{\Rightarrow} \begin{cases} y_1 = -c_1e^x + c_2e^{5x} \\ y_2 = c_1e^x + 3c_2e^{5x} \end{cases}$$

$\ldots$

$$z_2(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{5x} \\ \frac{1}{4}e^x + \frac{3}{4}e^{5x} \end{pmatrix}$$

Таким образом,

$$e^{Ax} = \left(z_1(x), z_2(x)\right)\Big|_{x=1} = \left(z_1(1), z_2(1)\right) = e^A$$

Ответ: $e^A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}e + \frac{1}{4}e^5 & -\frac{1}{4}e + \frac{1}{4}e^5 \\ -\frac{3}{4}e + \frac{3}{4}e^5 & \frac{1}{4}e + \frac{3}{4}e^5 \end{pmatrix}$