Содержание

1 Комбинаторика, правило суммы и произведения. Размещения с повторениями и без повторений.

Правило суммы:

Если объект A можно выбрать m способами, а объект B, после выбора A, можно выбрать n способами, то пару (A, B) можно выбрать $n \times m$ способами.

Правило произведения:

Если A можно выбрать n способами, а B — m способами, то объект A или B можно выбрать $n + m$ способами. (Выбор B никак не согласуется с выбором A.)

Размещения с повторениями:

Размещениями с повторениями из n типов по k элементов (k и n в произвольном соотношении) называются все такие последовательности k элементов, принадлижащих n типам, которые отличаются друг от друга составом или последовательностью элементов.

$$\overline{A_n^k} = n^k$$

Размещения без повторений:

Размещениями без повторений из n различных типов по k элементам называются все такие последовательности из k различных элементов, такие, что они различаются по составу или по порядку. Причём $k < n$.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

2 Перестановки с повторениями и без повторений. Сочетания с повторениями и без повторений, свойства биномиальных коэффициентов.

Перестановки с повторениями:

Перестановками с повторениями из $n_1, \dots, n_k$ элементов k-го типа называются всевозможные последовательности длины n, отличающиеся друг от друга последовательностью элементов.

$$\overline{P}(n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

Перестановски без повторений:

Перестановками без повторений из n элементов называются всевозможные последовательности из n элементов.

$$P_n = n!$$

Сочетания с повторениями:

Сочетаниями с повторениями из n по k (k и n в произвольном соотношении) называются все такие комбинации из k элементов $\in$ n типам, которые отличаются только составом элементов.

$$\overline{C^k}_n = C^k_{n+k-1} = \overline{P}(n-1, k)$$

Сочетания без повторений:

Сочетаниями без повторений из n по k ($k \leq n$) называются все такие комбинации из k различных элементов, выбранных из n исходных элементов, которые отличаются друг от друга составом.

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Свойства биномиальных коэффициентов:

1. $$C_n^k = \overline{P}(k, n-k)$$

2. $$C_n^k = C_n^{n-k}$$

3. $$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

4. $$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

5. $$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + C_n^n = 0$$

3 Сколькими способами можно разложить n_1 предметов одного сорта, $\ldots$, n_k предметов k-го сорта в два ящика? Следствия.

Схема: n_1 предметов 1-го типа $\ldots$ n_k предметов k-го типа раскладываются в два различных ящика:

$$(n_1+1)\cdot(n_2+1)\cdot\dots\cdot(n_k+1) \text{ способов.}$$

Следствие 1:
Если все предметы различны, то:

$$n_1 = 1 = n_2 = \dots = n_k = 1 \Rightarrow 2^k \text{ способов.}$$

Следствие 2:
Не менее r_i предметов i-го типа в каждый ящик:

$$(n_1-2r_1+1)\cdot(n_2-2r_2+1)\cdot\dots\cdot(n_k-2r_k+1) \text{ способов.}$$

4 Даны n различных предметов и k ящиков. Требуется положить в первый ящик n_1 предметов, в k-ый — n_k предметов, где $n_1+\dots+n_k = n$. Сколькими способами можно сделать такое распределение, если не интересует порядок распределения предметов в ящике?

Схема: n различных предметов раскладываются в k различных ящиков (порядок внутри ящиков не важен):

$$\tfrac{n!}{n_1!\cdot\dots\cdot n_k!} \text{ способов}$$

5 Даны n различных предметов и k одинаковых ящиков. Требуется положить в каждый ящик $n = \frac{n}{k}$ предметов. Сколькими способами можно сделать такое распределение, если не интересует порядок предметов в ящике и все ящики одинаковы?

Схема: n различных предметов в k одинаковых ящиков (порядок внутри ящиков не важен) $\frac{n}{k}$ предметов в каждый ящик:

$$\frac{n!}{k!((\frac{n}{k})!)^k} \text{ способов.}$$

6 Сколькими способами можно распределить n одинаковых предметов в k ящиков?

Схема: n одинаковых предметов в k разных ящиков:

$$\overline{P}(n, k-1) = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} \text{ способов.}$$

7 Сколько существует способов разложить n различных предметов в k ящиков, если нет никаких ограничений?

Схема: n различных предметов в k разных ящиков:

$$k^n \text{ способов.}$$

8 Сколькими способами можно положить n различных предметов в k ящиков, если не должно быть пустых ящиков?

Схема: n различных предметов в k разных ящиков, причём не должно быть пустых ящиков:

A_i — количество способов, когда i="ый ящик пустой.

$|A\setminus\cup_{i=1}^k A_i| = |A| - \sum_{i=1}^k |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{k-1}\sum_{i_1\dots i_{k-1}} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{k-1}}| + (-1)^k |A_1 \cap \dots \cap A_k| = k^n - C_k^1(k-1)^n + C_k^2(k-2)^n + \dots + (-1)^{k-1}C_k^{k-1}\cdot 1^n$ способов.

9 Имеется n_1 предметов одного сорта, $\dots, n_s$ —s-го сорта. Сколькими способами их можно разложить по k ящикам, если не должно быть пустых ящиков?

Схема n_1 предметов первого типа $\dots n_m$ предметов m-го типа по k различным ящикам, причём нет пустых ящиков:

A_i — i-ый ящик пустой $i = \overline{1,k}$.

$|A| = C_{n_1+k-1}^{k-1} \cdot C_{n_2+k-1}^{k-1} \cdot \dots \cdot C_{n_m+k-1}^{k-1}$

$|A_i| = C_{n_1+k-2}^{k-2} \cdot C_{n_2+k-2}^{k-2} \cdot \dots \cdot C_{n_m+k-2}^{k-2}$

$|A\setminus\cup_{i=1}^k A_i| = C_{n_1+k-1}^{k-1} \cdot \dots \cdot C_{n_m+k-1}^{k-1} - C_k^1 C_{n_1+k-2}^{k-2} \cdot \dots \cdot C_{n_m+k-2}^{k-2} + C_k^2 C_{n_1+k-3}^{k-3} \cdot \dots \cdot C_{n_m+k-3}^{k-3} + \dots + (-1)^{k-1}C_k^{k-1}1^n$.

10 Сколько существует способов разложить n различных предметов в k различных ящиков с учетом расположения предметов в ящиках, если все n предметов должны быть использованы? Следствие.

Схема: n различных предметов в k различных ящиков (порядок внутри ящиков важен, ящики могут быть пустыми):

$$\overline{P}(i_1,\dots,i_m,k-1) = \tfrac{(n+k-1)!}{(k-1)!} = A_{n+k-1}^n,$$

где $i_1 + \dots + i_m = n$. i_j — количество предмотов в ящике под номером j.

Следствие (та же схема, но не должно быть пустых ящиков):

$$A_n^k A_{n-k+k-1}^{n-k} = A_n^k A_{n-1}^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!} == \frac{(n-1)!}{(k-1)!} = n! C_{n-1}^{k-1}$$

11 Сколько существует способов разложить n различных предметов в k различных ящиков с учетом расположения предметов в ящиках, если не все n предметов могут быть использованы и некоторые ящики могут оказаться пустыми? Следствие.

Схема: n различных предметов в k различных ящиков (порядок внутри ящиков важен, можно использовать не все предметы):

S — в распределении учавствует s предметов. $S = \overline{0, n}$.

$$\sum_{S=0}^{n} C_n^S A_{S+k-1}^S$$

Следствие (та же схема, но не должно быть пустых ящиков):

$$\sum_{S=k}^{n} C_n^S S! C_{S-1}^{k-1}$$

12 Формула включения-исключения.

Теорема (формула включений-исключений):

$A = \{A_i\}_{i=1}^{n} \quad A_i \subseteq A$

$|A \setminus \cup_{i=1}^{n} A_i| = |A| - \sum\limits_{i=1}^{n} |A_i| + \sum\limits_{1 \le i_1 \le i_2 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| - \sum\limits_{1 \le i_1 \le i_2 \le i_3 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| + \dots + (-1)^k \sum\limits_{1 \le i_1 \le \dots \le i_k \le n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| + (-1)^n |A_1 \cap \dots \cap A_n|$.

Доказательство: (ожидается в будущем).

13 Полиномиальная формула. Свойства полиномиальных коэффициентов.

Теорема (полиномиальная формула):

$\left(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i\right) = \sum\limits_{k_1 + \dots + k_m = n} \overline{P}(k_1, \dots, k_m) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$.

Доказательство:

$$\underbrace{(x_1+x_2+\dots+x_m)\dots(x_1+x_2+\dots+x_m)}_{n} = \underbrace{x_1 x_1 \dots x_1}_{n} + \underbrace{x_1 x_1 \dots x_1}_{n-1} x_2 + \dots +$$

$$+ \underbrace{x_n x_n \dots x_n}_{n}$$

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}; \quad k_1+k_2+\dots+k_m=n$$

После приведения подобных получим $\sum\limits_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} \overline{P}(k_1,k_2,\dots,k_m)\, x_1^{k_1}\dots x_m^{k_m}$. □

Свойства полиномиальных коэффициентов:

1. $\sum\limits_{k_1+\dots+k_m=n} \overline{P}(k_1,\dots,k_m) = m^n$;
2. $\overline{P}(k_1-1,k_2,\dots,k_m) + \overline{P}(k_1,k_2-1,\dots,k_m) + \overline{P}(k_1,k_2,\dots,k_m-1) = \overline{P}(k_1,k_2,\dots,k_m)$

   Доказательство:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^{n-1} = \sum_{k_1+\dots k_m=n-1} \overline{P}(k_1,k_2,\dots,k_m)\, x_1^{k_1}\dots x_m^{k_m} \quad \Big| \cdot (x_1+x_2+\dots+x_m)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^{n} = \sum_{k_1+\dots+k_m=n-1} \overline{P}(k_1,k_2,\dots,k_m)\, x_1^{k_1}\dots x_m^{k_m} (x_1+x_2+\dots x_m)$$

$$\sum_{k_1+\dots k_m=n} \overline{P}(k_1,\dots,k_m)\, x_1^{k_1}\dots x_m^{k_m} = \left(\sum_{k_1+\dots k_m=n-1} \overline{P}(k_1\dots k_m)\, x_1^{k_1}\dots x_2^{k_m}\right)(x_1+\dots+x_m)$$

$$\left.\begin{matrix} x_1^{k_1-1}\dots x_m^{k_m} \\ \vdots \\ x_1^{k_1}\dots x_m^{k_m-1} \end{matrix}\right. * \to x^{k_1}\dots x^{k_m}$$

□

14 Рекуррентное соотношение k-го порядка, решение рекуррентного соотношения, общее решение. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение.

Определение реккурентного соотношения k-го порядка:

Под реккурентным соотношением k-го порядка понимается формула, которая выражает $f(n+k)$ через $F(n+k-1), f(n+k-2), \ldots, f(n)$ предыдущие члены последовательности.

Определение решения реккурентного соотношения:

Решением реккурентного соотношения называется числовая последовательность, при подстановке общего члена которой в реккурентное соотношение получаем верное равенство.

Определение общего решения реккурентного соотношения:

Общим решением реккурентного соотношения k-го порядка называется решение, зависящее от k постоянных, с помощью которых можно удовлетворить любое начальное условие. То есть получить любое общее решение.

Определение линейного реккурентного соотношения с постоянными коэффициентами:

Линейным реккурентным соотношением с постоянными коэффициентами k-го порядка называется:

$$f(n+k) = c_1 f(n+k-1) + c_2 f(n+k-2) + \cdots + c_k f(n)$$

Характеристическим уравнением для него называется:

$$r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \cdots + c_k$$

15 Линейные реккурентные соотношения с постоянными коэффициентами второго порядка. Свойства решений.

Определение линейного реккурентного соотношения с постоянными коэффициентами второго порядка:

$$(*) \quad f(n+2) = c_1 f(n+1) + c_2 f(n)$$

Его характеристическое уравнение имеет вид:

$$(**) \quad r^2 = c_1 r + c_2$$

Свойства решения линейного реккурентного соотношения с постоянными коэффициентами второго порядка:

1. Если последовательность $\{x_n\}$ — решение реккурентного соотношения, то $\{\alpha x_n\}$ так же является решением;
2. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — решения реккурентного соотношения, то последовательность $\{x_n + y_n\}$ так же является решением;
3. Если r_1 — это корень (**), то $\{r_1^n\}$ — решение (*).

16 Решение линейных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами второго порядка в случае равных и различных корней характеристического уравнения.

Случаи:

1) Пусть $r_1 \neq r_2$ – корни (**). Тогда

$\alpha r_1^n + \beta r_2^n$ – решение (в силу свойств)

произвольные константы

Пусть $f(0) = a$; $f(1) = b$

$\alpha r_1^n + \beta r_2^n = f(n)$ – общее решение

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha r_1 + \beta r_2 = b \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta = \dfrac{a r_1 - b}{r_1 - r_2} \\ \alpha = \dfrac{a r_2 - \beta}{r_2 - r_1} \end{cases}$$

2) Пусть $r_1 = r_2$ – корни (**)

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

По теореме Виета $\begin{cases} c_1 = 2r_1 \\ c_2 = -(r_1^2) \end{cases}$ Тогда:

$$f(n+2) = 2r_1 f(n+1) - r_1^2 f(n)$$

слева $= (n+2) \cdot r_1^{n+2}$

справа $= 2r_1 (n+1) r_1^{n+1} - r_1^2 n r_1^n = 2r_1^2 (n+1) r_1^n - r_1^2 n r_1^n = r_1^{n+2} (2(n+1) - n) = r_1^{n+2}(n+2) =$

$=$ слева $\Rightarrow$ r_1^n и $n r_1^n$ – решение

по св-вам $f(n) = \alpha r_1^n + \beta \cdot n r_1^n$ – тоже является решением