Содержание

1 Мнимум 1

1.1 Глава 1

1.1.1 Билет 1

Определение случайного события:

Пусть Ω — множество элементарных исходов эксперимента. Случайным событием называется любое подмножество множества Ω.

Определение достоверного события:

Достоверным событием называется событие Ω, которому благоприятствует каждый исход эксперимента.

Определение невозможного события:

Невозможным событием называется пустое множество, которому не благоприятствует ни один исход эксперимента.

Определение противоположного события:

Событием, противоположным событию A называется событие$\overline{A}$, которое состоит из исходов, не благоприятствующих A.

1.1.2 Билет 2

Определение σ-алгебры событий:

Сигма алгеброй событий называется множество $\mathcal{F}$ подмножеств $A \subset \Omega$, удовлетворяющее условиям:

1. если $A \in \mathcal{F}$, то $\overline{A} \in \mathcal{F}$;
2. $\Omega \in \mathcal{F}$;
3. если $\{A\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

1.1.3 Билет 3

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра множеств из Ω.

Определение конечно аддитивной вероятностной меры

Конечно аддитивной вероятностной мерой $Q(A)$ называется функция множества $Q : \mathcal{A} \to [0; 1]$, такая, что:

1. $\forall A \in \mathcal{A} \quad Q(A) \geq 0$;
2. $Q(\Omega) = 1$;

3. $\forall A, B \in \mathcal{A}: \quad A \cap B = \varnothing \quad Q(A \cup B) = Q(A) + Q(B) \quad Q(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} Q(A_i)$.

Определение счётно аддитивной вероятностной меры:

Счётно аддитивно вероятностной мерой $P(A)$ называется функция множества $P : \mathcal{F} \to [0; 1]$, такая, что:

1. $\forall A \in \mathcal{F} \quad P(A) \geq 0$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}: \quad \forall i \neq j \quad A_i \bigcap A_j = \varnothing \quad P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

1.1.4 Билет 4:

Свойства вероятности:

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
2. Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$ и $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
3. **Теория сложения вероятностей:**

   Пусть A и B некоторые события, $A, B \in \mathcal{F}$. Тогда

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

4. **Непрерывность вероятностной меры:**

   Пусть $\{A\}_{i=1}^{\infty}$ — монотонный класс событий, то есть

   1) $A_i \subset A_{i+1}$ или 2) $A_i \supset A_{i+1}$. Тогда

   $$P(\lim_{n \to \infty} (A_n)) = \lim_{n \to \infty} (A_n)$$

1.1.5 Билет 5

Определение классической вероятности:

$P(A) = \frac{k}{n}$, где k — количество благоприятных A исходов, n — количество всех возможных исходов эксперимента.

1.1.6 Билет 6

Определение условной вероятности:

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство и $A, B \in \mathcal{F}, \quad P(B) > 0$. Условной вероятностью события A при условии, что наступило событие B называется число:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ — полная группа несовменстных событий.

Назовём события A_i гипотезами, а $P(A_i)$ назовём априорные вероятности гипотез.

Теорема (формула полной вероятности):

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство и $\{A_i\}_i^{\infty} \in \mathcal{F}$ — полная группа попарно несовметных событий; $P(A_i) > 0$, пусть $A \in \mathcal{F}$ — неполное событие и $P(A|A_i) \geq 0$. Тогда

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) * P(A|A_i)$$

Теорема (формула Байеса):

Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ — полная группа попарно несовместимых событий, и пусть для некоторого $P(A) > 0$. Тогда

$$\forall i = \overline{1, \infty} \;\; P(A_i|A) = \frac{P(A_i) * P(A|A_i)}{P(A)},$$

1.1.7 Билет 7

Определение независимости событий:

Случайные события A и B называются независимыми, если

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

1.1.8 Билет 8

Определение (критерий независимости событий):

Пусть A и B такие, что $P(B) > 0$. Тогда случайные события A и B независимы $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$

Теорема (о независимости противоположных событий):

Пусть A и B — независимы. Тогда события A и $\overline{B}$; $\overline{A}$ и B; $\overline{A}$ и $\overline{B}$ — попарно независимы.

1.2 Глава 2

1.2.1 Билет 1

Множество A называется элементарным, если оно представимо в виде суммы прямоугольников хотя бы 1 способом:

$$A = \bigcup P_k,$$

где P_k — покрытие.

Мерой элементарного множества A называется

$$m^{'}(A) = \sum m(P_k),$$

где P_k — разбиение A.

Определение верхней меры Лебега:

Верхней мерой Лебега называется

$$\mu^*(A) = \inf_{\{P_k\}} \sum_m (P_k)$$

Определение нижней меры Лебега:

Рассмотри множество $E \backslash A$. $(m(E) = 1)$.
Нижней мерой Лебега называется

$$\mu_*(A) = 1 - \mu^*(E \setminus A)$$

Определение измеримого по Лебегу множества и меры Лебега:

Говорят, что множество A измеримо по Лебегу, если:

$$\mu^*(A) = \mu_*(A) = \mu(A)$$

Величина $\mu(A)$ — мера Лебега множества A.

1.2.2 Билет 2

Определение измеримой функции:

Пусть X и Y — некоторые множества и пусть S_x и S_y — классы подмножества. $f : X \to Y$ — некоторая функция.

Функция $f : X \to Y$ называется (S_x, S_y) — измеримой, если:

$$\forall B \in S_y \quad \exists f^{-1}(B) \in S_x$$

Определение измеримой действительной функции:

Действительная функция $f(x)$ с областью определения $X \subset R$ называется μ-измеримой или S_μ-измеримой, если для любого борелевского множества $b \in \beta(R) \quad f^{-1}(b) \in S_\mu$.

1.2.3 Билет 3

Определение (критерий измеримости действительных функций):

Действительная функция $f(x)$ измерима $\Leftrightarrow$

$$\forall C \in R \quad f^{-1}(b) = f^{-1}(-\infty, C) \text{ — измерима}$$
$$\text{или}$$
$$\{x : f(x) < C\}$$

1.2.4 Билет 4

Определение случайной величины:

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство. Случайной величиной называется вещественно значная функция ξ такая, что

$$\xi : \Omega \to R \quad \forall x \in R \quad \{w : \xi(w) < x\} \in \mathcal{F}$$

1.2.5 Билет 5

Определение функции распределения:

Функцией распределения вероятностей случайной величины ξ называется функция $F_\xi(x) = P\{w : \xi(w) < x\}$

Свойства функции распределения:

1. $0 \leq F_\xi(x) \leq 1 \quad \forall x \in R$;
2. $F_\xi(x)$ — неубывающая, непрерывная слева функция;
3. $\lim_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$
   $\lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$;
4. $P\{a \leq \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$;
5. $P\{\xi = x_0\} = F_\xi(x_0 + 0) - F_\xi(x_0)$.

1.2.6 Билет 6

Определение функции плотности распределения:

Функцией плотности распределения вероятностей случайной величины ξ называется функция $f_\xi(x)$ такая, что:

1. $\forall x \in R \quad f_\xi(x) \geq 0$;
2. $F_\xi^{'}(x) = f_\xi(x)$;
3. $\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = 1$;
4. $P\{a \leq \xi \leq b\} = \int_b^a f_\xi(x)dx$.

1.2.7 Билет 7

Определение случайных независимых велечин:

Случайные велечины ξ и μ называются независимыми, если:

$$\forall x, y \in R \quad P\{w : \xi(w) < x; \mu(w) < y\} = P\{w : \xi(w) < x\} * P\{w : \mu(w) < y\}$$

2 Минимум 2

2.1 Билет 1

Определение случайной величины:

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство. Случайной величиной называется вещественно значная функция ξ такая, что

$$\xi : \Omega \to R \quad \forall x \in R \quad \{w : \xi(w) < x\} \in \mathcal{F}$$

2.2 Билет 2

Определение функции распределения:

Функцией распределения вероятностей случайной величины ξ называется функция $F_\xi(x) = P\{w : \xi(w) < x\}$

Свойства функции распределения:

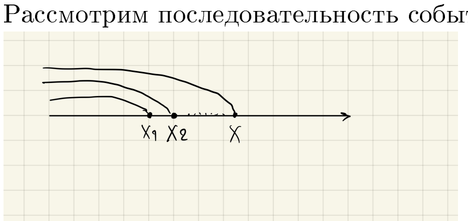
1. $0 \le F_\xi(x) \le 1 \quad \forall x \in R$;
2. $F_\xi(x)$ — неубывающая, непрерывная слева функция;
3. $\lim_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$
   $\lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$;
4. $P\{a \le \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$;
5. $P\{\xi = x_0\} = F_\xi(x_0 + 0) - F_\xi(x_0)$.

2.3 Билет 3

Доказательство непрерывности слева функции распределения

Требуется показать, что для возрастающей последовательности $\{x_n\}$, такой что $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, последовательность $\{F(x_n)\}$ при $n \to \infty$ стремится к $F(x)$ или $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x)$.

Рассмотрим последовательность событий $A_n = \{w : \xi(w) < x_n\}$



Для неё верно:

$$\forall n \quad A_n \subset A_{n+1} \quad (x_n < x_{n+1})$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A = \{w : \xi(w) < x_n\}$$

То есть последовательность $\{A_n\}$ удовлетворяет свойству непрерывности вероятностной меры $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A)$.

Тогда можем записать

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} P\{\xi \in (-\infty, x_n)\} = \lim_{n\to\infty} P\{\xi \in (-\infty, x)\} = F(x).$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x).$$

2.4 Билет 4

Доказательство неубывания функции распределения:

По определению требуется показать, что:

$$\forall x_1 < x_2 \quad F(x_1) \leq F(x_2)$$

Пусть

$$(-\infty, x_2) = (-\infty, x_1) \cup [x_1, x_2]$$

Тогда

$$F(x_2) = P\{\xi \in (-\infty, x_2)\} = P\{\xi \in (-\infty, x_1) \cup \xi \in [x_1, x_2)\} = P\{\xi \in (-\infty, x_1)\} + P\{\xi \in [x_1, x_2]\}$$

Учитывая, что $P\{\xi \in (-\infty, x_1)\} \geq 0$ и $P\{\xi \in [x_1, x_2]\} \geq 0$, получим

$$P\{\xi \in (-\infty, x_1)\} + P\{\xi \in [x_1, x_2]\} \geq P\{\xi \in (-\infty, x_1)\} = F(x_1)$$

То есть

$$\forall x_1 < x_2 \quad F(x_1) \leq F(x_2)$$

2.5 Билет 5

Определение функции плотности распределения:

Функцией плотности распределения вероятностей случайной величины ξ называется функция $f_\xi(x)$ такая, что:

1. $\forall x \in R \quad f_\xi(x) \geq 0$;
2. $F_\xi^{'}(x) = f_\xi(x)$;
3. $\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = 1$;
4. $P\{a \leq \xi \leq b\} = \int_b^a f_\xi(x)dx$.

2.6 Билет 6

Определение случайных независимых велечин:

Случайные велечины ξ и μ называются независимыми, если:

$$\forall x, y \in R \quad P\{w : \xi(w) < x; \mu(w) < y\} = P\{w : \xi(w) < x\} * P\{w : \mu(w) < y\}$$