

# Содержание

- 1 Комбинаторика, правило суммы и произведения. Размещения с повторениями и без повторений. 4
- 2 Перестановки с повторениями и без повторений. Сочетания с повторениями и без повторений, свойства биномиальных коэффициентов. 4
- 3 Сколькими способами можно разложить  $n_1$  предметов одного сорта,  $\dots, n_k$  предметов  $k$ -го сорта в два ящика? Следствия. 6
- 4 Даны  $n$  различных предметов и  $k$  ящиков. Требуется положить в первый ящик  $n_1$  предметов, в  $k$ -ый —  $n_k$  предметов, где  $n_1 + \dots + n_k = n$ . Сколькими способами можно сделать такое распределение, если не интересует порядок распределения предметов в ящике? 6
- 5 Даны  $n$  различных предметов и  $k$  одинаковых ящиков. Требуется положить в каждый ящик  $n = \frac{n}{k}$  предметов. Сколькими способами можно сделать такое распределение, если не интересует порядок предметов в ящике и все ящики одинаковы? 7
- 6 Сколькими способами можно распределить  $n$  одинаковых предметов в  $k$  ящиков? 7
- 7 Сколько существует способов разложить  $n$  различных предметов в  $k$  ящиков, если нет никаких ограничений? 7
- 8 Сколькими способами можно положить  $n$  различных предметов в  $k$  ящиков, если не должно быть пустых ящиков? 7
- 9 Имеется  $n_1$  предметов одного сорта,  $\dots, n_s$  —  $s$ -го сорта. Сколькими способами их можно разложить по  $k$  ящикам, если не должно быть пустых ящиков? 8
- 10 Сколько существует способов разложить  $n$  различных предметов в  $k$  различных ящиков с учетом расположения предметов в ящиках, если все  $n$  предметов должны быть использованы? Следствие. 8
- 11 Сколько существует способов разложить  $n$  различных предметов в  $k$  различных ящиков с учетом расположения предметов в ящиках, если не все  $n$  предметов могут быть использованы и некоторые ящики могут оказаться пустыми? Следствие. 9

<b>12</b>	<b>Формула включения-исключения.</b>	<b>9</b>
<b>13</b>	<b>Полиномиальная формула. Свойства полиномиальных коэффициентов.</b>	<b>9</b>
<b>14</b>	<b>Рекуррентное соотношение <math>k</math>-го порядка, решение рекуррентного соотношения, общее решение. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение.</b>	<b>11</b>
<b>15</b>	<b>Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами второго порядка. Свойства решений.</b>	<b>11</b>
<b>16</b>	<b>Решение линейных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами второго порядка в случае равных и различных корней характеристического уравнения.</b>	<b>13</b>
<b>17</b>	<b>Теорема об общем решении линейных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами <math>k</math>-го порядка. Решение рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами <math>k</math>-го порядка с помощью характеристического уравнения.</b>	<b>14</b>
<b>18</b>	<b>Производящая функция. Сумма производящих функций, операция подстановки.</b>	<b>17</b>
<b>19</b>	<b>Произведение и деление производящих функций.</b>	<b>17</b>
<b>20</b>	<b>Теорема о разложении функции.</b>	<b>18</b>
<b>21</b>	<b>Теорема о производящей функции для последовательности, задаваемой линейным рекуррентным соотношением. Теорема о рациональной производящей функции.</b>	<b>19</b>
<b>22</b>	<b>Решение рекуррентных соотношений с помощью производящих функций.</b>	<b>20</b>
<b>23</b>	<b>Ориентированные и неориентированные графы.</b>	<b>20</b>
<b>24</b>	<b>Полный граф, дополнение, объединение, соединение графов.</b>	<b>21</b>
<b>25</b>	<b>Теорема о степенном множестве графа.</b>	<b>22</b>
<b>26</b>	<b>Теорема о соотношении суммы степеней вершин и числа рёбер (лемма о рукопожатии).</b>	<b>22</b>
<b>27</b>	<b>Алгоритм построения графа по вектору степеней.</b>	<b>22</b>

<b>28</b>	<b>Изоморфизм графов. Теорема об изоморфизме графов.</b>	<b>23</b>
<b>29</b>	<b>Проверка на изоморфизм двух графов по их матрицам смежности.</b>	<b>25</b>
<b>30</b>	<b>Часть графа, подграфы. Путь, цикл, цепь, длина пути и расстояние между ними.</b>	<b>25</b>
<b>31</b>	<b>Достаточное условие связности графа.</b>	<b>25</b>
<b>32</b>	<b>Точка сочленения. Неразделимый граф. Необходимое и достаточное условие неразделимости связного графа.</b>	<b>25</b>
<b>33</b>	<b>Планарность. Дерево, плоское изображение дерева.</b>	<b>25</b>

# 1 Комбинаторика, правило суммы и произведения. Размещения с повторениями и без повторений.

## Правило суммы:

Если  $A$  можно выбрать  $n$  способами, а  $B$  —  $m$  способами, то объект  $A$  или  $B$  можно выбрать  $n + m$  способами. (Выбор  $B$  никак не согласуется с выбором  $A$ .)

## Правило произведения:

Если объект  $A$  можно выбрать  $m$  способами, а объект  $B$ , после выбора  $A$ , можно выбрать  $n$  способами, то пару  $(A, B)$  можно выбрать  $n \times m$  способами.

## Размещения с повторениями:

Размещениями с повторениями из  $n$  типов по  $k$  элементов ( $k$  и  $n$  в произвольном соотношении) называются все такие последовательности  $k$  элементов, принадлежащих  $n$  типам, которые отличаются друг от друга составом или последовательностью элементов.

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

## Размещения без повторений:

Размещениями без повторений из  $n$  различных типов по  $k$  элементам называются все такие последовательности из  $k$  различных элементов, такие, что они различаются по составу или по порядку. Причём  $k < n$ .

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

# 2 Перестановки с повторениями и без повторений. Сочетания с повторениями и без повторений, свойства биномиальных коэффициентов.

## Перестановки с повторениями:

Перестановками с повторениями из  $n_1, \dots, n_k$  элементов  $k$ -го типа называются всевозможные последовательности длины  $n$ , отличающиеся друг от друга последовательностью элементов.

$$\overline{P}(n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$$

### **Перестановки без повторений:**

Перестановками без повторений из  $n$  элементов называются всевозможные последовательности из  $n$  элементов.

$$P_n = n!$$

### **Сочетания с повторениями:**

Сочетаниями с повторениями из  $n$  по  $k$  ( $k$  и  $n$  в произвольном соотношении) называются все такие комбинации из  $k$  элементов  $\in n$  типам, которые отличаются только составом элементов.

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \overline{P}(n-1, k)$$

### **Сочетания без повторений:**

Сочетаниями без повторений из  $n$  по  $k$  ( $k \leq n$ ) называются все такие комбинации из  $k$  различных элементов, выбранных из  $n$  исходных элементов, которые отличаются друг от друга составом.

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

### **Свойства биномиальных коэффициентов:**

1.

$$C_n^k = \overline{P}(k, n-k)$$

2.

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

3.

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

4.

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$$

5.

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + C_n^n = 0$$

### 3 Сколькими способами можно разложить $n_1$ предметов одного сорта, $\dots$ , $n_k$ предметов $k$ -го сорта в два ящика? Следствия.

**Схема:**  $n_1$  предметов 1-го типа  $\dots$   $n_k$  предметов  $k$ -го типа раскладываются в два различных ящика:

$$(n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot \dots \cdot (n_k + 1) \text{ способов.}$$

#### Следствие 1:

Если все предметы различны, то:

$$n_1 = 1 = n_2 = \dots = n_k = 1 \Rightarrow 2^k \text{ способов.}$$

#### Следствие 2:

Не менее  $r_i$  предметов  $i$ -го типа в каждый ящик:

$$(n_1 - 2r_1 + 1) \cdot (n_2 - 2r_2 + 1) \cdot \dots \cdot (n_k - 2r_k + 1) \text{ способов.}$$

### 4 Даны $n$ различных предметов и $k$ ящиков. Требуется положить в первый ящик $n_1$ предметов, в $k$ -ый — $n_k$ предметов, где $n_1 + \dots + n_k = n$ . Сколькими способами можно сделать такое распределение, если не интересует порядок распределения предметов в ящике?

**Схема:**  $n$  различных предметов раскладываются в  $k$  различных ящиков (порядок внутри ящиков не важен):

$$\frac{n!}{n_1! \dots n_k!} \text{ способов}$$

**5** Даны  $n$  различных предметов и  $k$  одинаковых ящиков. Требуется положить в каждый ящик  $n = \frac{n}{k}$  предметов. Сколькими способами можно сделать такое распределение, если не интересует порядок предметов в ящике и все ящики одинаковы?

**Схема:**  $n$  различных предметов в  $k$  одинаковых ящиков (порядок внутри ящиков не важен)  $\frac{n}{k}$  предметов в каждый ящик:

$$\frac{n!}{k! \left(\left(\frac{n}{k}\right)!\right)^k} \text{ способов.}$$

**6** Сколькими способами можно распределить  $n$  одинаковых предметов в  $k$  ящиков?

**Схема:**  $n$  одинаковых предметов в  $k$  разных ящиков:

$$\overline{P}(n, k-1) = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} \text{ способов.}$$

**7** Сколько существует способов разложить  $n$  различных предметов в  $k$  ящиков, если нет никаких ограничений?

**Схема:**  $n$  различных предметов в  $k$  разных ящиков:

$$k^n \text{ способов.}$$

**8** Сколькими способами можно положить  $n$  различных предметов в  $k$  ящиков, если не должно быть пустых ящиков?

**Схема:**  $n$  различных предметов в  $k$  разных ящиков, причём не должно быть пустых ящиков:

$A_i$  — количество способов, когда  $i$ -ый ящик пустой.

$$|A \setminus \bigcup_{i=1}^k A_i| = |A| - \sum_{i=1}^k |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{k-1} \sum_{i_1 \dots i_{k-1}} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{k-1}}| + (-1)^k |A_1 \cap \dots \cap A_k| = k^n - C_k^1 (k-1)^n + C_k^2 (k-2)^n + \dots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} \cdot 1^n$$

способов.

## 9 Имеется $n_1$ предметов одного сорта, $\dots$ , $n_s$ — $s$ -го сорта. Сколькими способами их можно разложить по $k$ ящикам, если не должно быть пустых ящиков?

**Схема  $n_1$  предметов первого типа  $\dots n_m$  предметов  $m$ -го типа по  $k$  различным ящикам, причём нет пустых ящиков:**

$A_i$  —  $i$ -ый ящик пустой  $i = \overline{1, k}$ .

$$|A| = C_{n_1+k-1}^{k-1} \cdot C_{n_2+k-1}^{k-1} \cdot \dots \cdot C_{n_m+k-1}^{k-1}$$

$$|A_i| = C_{n_1+k-2}^{k-2} \cdot C_{n_2+k-2}^{k-2} \cdot \dots \cdot C_{n_m+k-2}^{k-2}$$

$$|A \setminus \bigcup_{i=1}^k A_i| = C_{n_1+k-1}^{k-1} \cdot \dots \cdot C_{n_m+k-1}^{k-1} - C_k^1 C_{n_1+k-2}^{k-2} \cdot \dots \cdot C_{n_m+k-2}^{k-2} + C_k^2 C_{n_1+k-3}^{k-3} \cdot \dots \cdot C_{n_m+k-3}^{k-3} + \dots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} 1^n.$$

## 10 Сколько существует способов разложить $n$ различных предметов в $k$ различных ящиков с учетом расположения предметов в ящиках, если все $n$ предметов должны быть использованы? Следствие.

**Схема:  $n$  различных предметов в  $k$  различных ящиков (порядок внутри ящиков важен, ящики могут быть пустыми):**

$$\overline{P}(i_1, \dots, i_m, k-1) = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!} = A_{n+k-1}^n,$$

где  $i_1 + \dots + i_m = n$ .  $i_j$  — количество предметов в ящике под номером  $j$ .

**Следствие (та же схема, но не должно быть пустых ящиков):**

$$A_n^k A_{n-k+k-1}^{n-k} = A_n^k A_{n-1}^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!} = n! C_{n-1}^{k-1}$$



## 11 Сколько существует способов разложить $n$ различных предметов в $k$ различных ящиков с учетом расположения предметов в ящиках, если не все $n$ предметов могут быть использованы и некоторые ящики могут оказаться пустыми? Следствие.

**Схема:**  $n$  различных предметов в  $k$  различных ящиков (порядок внутри ящиков важен, можно использовать не все предметы):

$S$  — в распределении участвует  $s$  предметов.  $S = \overline{0, n}$ .

$$\sum_{S=0}^n C_n^S A_{S+k-1}^S$$

**Следствие** (та же схема, но не должно быть пустых ящиков):

$$\sum_{S=k}^n C_n^S S! C_{S-1}^{k-1}$$

## 12 Формула включения-исключения.

**Теорема (формула включений-исключений):**

$$A = \{A_i\}_{i=1}^n \quad A_i \subseteq A$$

$$|A \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i| = |A| - \sum_{i=1}^n |A_i| + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| - \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| + \dots + (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| + (-1)^n |A_1 \cap \dots \cap A_n|.$$

Доказательство: (ожидается в будущем).

## 13 Полиномиальная формула. Свойства полиномиальных коэффициентов.

**Теорема (полиномиальная формула):**

$$\left( \sum_{i=1}^m x_i \right) = \sum_{k_1 + \dots + k_m = n} \overline{P}(k_1, \dots, k_m) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}.$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{(x_1 + x_2 + \dots + x_m)}_n \dots \underbrace{(x_1 + x_2 + \dots + x_m)}_n = \underbrace{x_1 x_1 \dots x_1}_n + \underbrace{x_1 x_1 \dots x_1 x_2}_{n-1} + \dots + \\
 & + \underbrace{x_m x_m \dots x_m}_n
 \end{aligned}$$

$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}; \quad k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$

После приведения подобных получим  $\sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n} \bar{P}(k_1, k_2, \dots, k_m) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$ .

□

### Свойства полиномиальных коэффициентов:

1.  $\sum_{k_1 + \dots + k_m = n} \bar{P}(k_1, \dots, k_m) = m^n;$
2.  $\bar{P}(k_1 - 1, k_2, \dots, k_m) + \bar{P}(k_1, k_2 - 1, \dots, k_m) + \bar{P}(k_1, k_2, \dots, k_m - 1) = \bar{P}(k_1, k_2, \dots, k_m)$

Доказательство:

$$\begin{aligned}
 \left( \sum_{i=1}^m x_i \right)^{n-1} &= \sum_{k_1 + \dots + k_m = n-1} \bar{P}(k_1, k_2, \dots, k_m) x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m} \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_m) \\
 \left( \sum_{i=1}^m x_i \right)^n &= \sum_{k_1 + \dots + k_m = n-1} \bar{P}(k_1, k_2, \dots, k_m) x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m} (x_1 + x_2 + \dots + x_m) \\
 \sum_{k_1 + \dots + k_m = n} \bar{P}(k_1, \dots, k_m) x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m} &= \left( \sum_{k_1 + \dots + k_m = n-1} \bar{P}(k_1, \dots, k_m) x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m} \right) (x_1 + \dots + x_m)
 \end{aligned}$$

$\begin{array}{c} x_1^{k_1-1} \dots x_m^{k_m} \\ \vdots \\ x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m-1} \end{array} \rightarrow x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m}$

□

## 14 Рекуррентное соотношение $k$ -го порядка, решение рекуррентного соотношения, общее решение. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение.

### Определение рекуррентного соотношения $k$ -го порядка:

Под рекуррентным соотношением  $k$ -го порядка понимается формула, которая выражает  $f(n + k)$  через  $f(n + k - 1), f(n + k - 2), \dots, f(n)$  предыдущие члены последовательности.

### Определение решения рекуррентного соотношения:

Решением рекуррентного соотношения называется числовая последовательность, при подстановке общего члена которой в рекуррентное соотношение получаем верное равенство.

### Определение общего решения рекуррентного соотношения:

Общим решением рекуррентного соотношения  $k$ -го порядка называется решение, зависящее от  $k$  постоянных, с помощью которых можно удовлетворить любое начальное условие. То есть получить любое общее решение.

### Определение линейного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами:

Линейным рекуррентным соотношением с постоянными коэффициентами  $k$ -го порядка называется:

$$f(n + k) = c_1 f(n + k - 1) + c_2 f(n + k - 2) + \dots + c_k f(n)$$

Характеристическим уравнением для него называется:

$$r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \dots + c_k$$

## 15 Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами второго порядка. Свойства решений.

Определение линейного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами второго порядка:

$$(*) \quad f(n+2) = c_1 f(n+1) + c_2 f(n)$$

Его характеристическое уравнение имеет вид:

$$(**) \quad r^2 = c_1 r + c_2$$

**Свойства решения линейного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами второго порядка:**

1. Если последовательность  $\{x_n\}$  — решение рекуррентного соотношения, то  $\{\alpha x_n\}$  так же является решением;
2. Если  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  — решения рекуррентного соотношения, то последовательность  $\{x_n + y_n\}$  так же является решением;
3. Если  $r_1$  — это корень (\*\*), то  $\{r_1^n\}$  — решение (\*).

## 16 Решение линейных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами второго порядка в случае равных и различных корней характеристического уравнения.

лучше:

1) Пусть  $r_1 \neq r_2$  - корни (\*\*), Тогда

$\alpha r_1^n + \beta r_2^n$  - решение (в силу свойств)  
произвольные константы

Пусть  $f(0) = a$ ;  $f(1) = b$

$\alpha r_1^n + \beta r_2^n = f(n)$  - общее решение

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha r_1 + \beta r_2 = b \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = \frac{ar_1 - b}{r_1 - r_2} \\ \alpha = \frac{ar_2 - \beta}{r_2 - r_1} \end{cases}$$

2) Пусть  $r_1 = r_2$  - корни (\*\*)

$$r^2 - cr - c_2 = 0$$

По теореме Виета  $\begin{cases} c_1 = 2r_1 \\ c_2 = -r_1^2 \end{cases}$  Тогда:

$$f(n+2) = 2r_1 f(n+1) - r_1^2 f(n)$$

$$\text{слева} = (n+2) \cdot r_1^{n+2}$$

$$\text{справа} = 2r_1(n+1)r_1^{n+1} - r_1^2 n r_1^n = 2r_1^2(n+1)r_1^n - r_1^2 n r_1^n = r_1^{n+2}(2(n+1) - n) = r_1^{n+2}(n+2) =$$

$$= \text{слева} \Rightarrow r_1^n \text{ и } n r_1^n - \text{решение}$$

по свой-вам  $f(n) = \alpha r_1^n + \beta \cdot n r_1^n$  - тоже является решением

## 17 Теорема об общем решении линейных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами $k$ -го порядка. Решение рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами $k$ -го порядка с помощью характеристического уравнения.

**Теорема (общее решение линейного рекуррентного соотношения  $k$ -го порядка):**

Пусть (1)  $f(n+k) = c_1 f(n+k-1) + \dots + c_k f(n)$  — линейное рекуррентное соотношение и (2)  $r^k = c_1 r^{k-1} + \dots + c_k$  его характеристическое уравнение. Тогда общее решение (1) можно записать в виде:

$f(n) = A_1 + A_2 + \dots + A_p$ , где  $A_i$  выписывается по действительному корню или по паре комплексно сопряжённых корней (2).

1. Если  $x$  действительный корень (2) кратности  $m$ , то соответствующее ему  $A_i$  имеет вид:

$$A_i = (c_{i_0} + c_{i_1}n + \dots + c_{i_{m-1}}n^{m-1})x^n;$$

2. Если  $r(\cos \varphi \pm i \sin \varphi)$  — пара комплексно сопряжённых корней (2) кратности 1, то соответствующее им  $A_i$  имеет вид:

$$A_i = r^n (\cos(n\varphi)D_i + \sin(n\varphi)E_i),$$

где  $D_i$  и  $E_i$  — константы;

3. Если  $r(\cos \varphi \pm i \sin \varphi)$  — пара комплексно сопряжённых корней (2) кратности  $m$ , то соответствующее им  $A_i$  имеет вид:

$$A_i = r^n [\cos(n\varphi)(D_{i_1} + D_{i_2}n + \dots + D_{i_{m-1}}n^{m-1}) + \sin(n\varphi)(E_{i_1} + E_{i_2}n + \dots + E_{i_{m-1}}n^{m-1})]$$

**Решение рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами  $k$ -го порядка с помощью характеристического уравнения:**

Пример:

$$f(n+5) = 4f(n+4) - 4f(n+3) - 2f(n+2) + 5f(n+1) - 2f(n)$$

$$r^5 = 4r^4 - 4r^3 - 2r^2 + 5r - 2$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1, \quad x_4 = -1, \quad x_5 = 2$$

константы

$$f(n) = 1^n \underbrace{(a + bn + cn^2)}_{A_1} + \underbrace{d(-1)^n}_{A_2} + \underbrace{e2^n}_{A_3}$$

общее решение

• Пример:

$$f(n+2) = 2f(n+1) - 4f(n) \quad ; \quad f(0) = 1; \quad f(1) = 2.$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$D = -12 \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{-3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}i$$

$$f(n) = 2^n \left( \cos \frac{\pi n}{3} \cdot a + \sin \frac{\pi n}{3} \cdot b \right) \quad r=2$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}$$

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2^0 (\cos 0 \cdot a + \sin 0 \cdot b) = 1 \quad ; \quad a = 1$$

$$2 \cos \frac{\pi}{3} a + 2 \sin \frac{\pi}{3} b = 2 \quad ; \quad b = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f(n) = 2^n \left( \cos \frac{\pi n}{3} + \sin \frac{\pi n}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right) - \text{ответ}$$

• Пример:

$$f(n+4) = -2f(n+2) - f(n)$$

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 0 \quad (x^2 + 1)^2 = 0$$

$$x_{1,4} = \cos \frac{\pi}{2} \pm i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm i$$

$$x_{1,2} = i$$

$$x_{3,4} = -i$$

$$r = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \varphi = 0 \\ \sin \varphi = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$f(n) = 1^n \left( \cos \frac{\pi n}{2} \cdot (an+b) + \sin \frac{\pi n}{2} (cn+d) \right) - \text{другое решение}$$

• Пример:

$$f(n+5) = -3f(n+4) - 5f(n+3) - f(n+2) + 6f(n+1) + 4f(n)$$

$$x^5 + 3x^4 + 5x^3 + x^2 - 6x - 4 = 0$$

$$(x+1)^4 (x-1)(x^2+2x+4) = 0$$

$$x_{1,2} = -1$$

$$x_3 = 1$$

$$\begin{aligned} \Phi &= -12 \\ x_{4,5} &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i \\ r &= 2, \quad \left. \begin{array}{l} \cos \varphi = -\frac{1}{2} \\ \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

$$x_{4,5} = 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} \pm i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$f(n) = (-1)^n (an+b) + 1^n c + 2^n \left( \cos \frac{2\pi n}{3} \cdot d + \sin \frac{2\pi n}{3} \cdot e \right)$$



## 18 Производящая функция. Сумма производящих функций, операция подстановки.

### Определение производящей функции:

Пусть  $a_0, a_1, a_2, \dots$  произвольная числовая последовательность. Производящей функцией этой последовательности называется выражение вида:

$$a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nt^n = A(t)$$

### Определение суммы производящих функций:

Пусть имеются производящие функции  $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nt^n$  и  $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_nt^n$ . Суммой  $A(t)$  и  $B(t)$  называется производящая функция:

$$C(t) = A(t) + B(t) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)t^n$$

### Определение операции подстановки в производящую функцию:

Пусть  $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nt^n$  и  $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_nt^n$  производящие функции, причём  $B(0) = b_0 = 0$ . Подстановкой в  $A(t)$   $B(t)$  называется производящая функция:

$$C(t) = A(B(t)) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + \dots = a_0 + a_1(b_1t + b_2t^2 + \dots) + a_2(b_1t + b_2t^2 + \dots) + \dots,$$

где  $c_0 = a_0, c_1 = a_1b_1, c_2 = a_1b_2 + a_2b_1^2, \dots$

## 19 Произведение и деление производящих функций.

### Определение произведения производящих функций:

Пусть  $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nt^n$  и  $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_nt^n$  производящие функции. Произведением  $A(t)$  и  $B(t)$  будем называть производящую функцию:

$$C(t) = A(t) \cdot B(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + \dots,$$

где  $c_0 = a_0b_0, c_1 = a_0b_1 + a_1b_0, c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \dots, c_n = a_0b_n + \dots + a_nb_0 = \sum_{k=0}^n a_kb_{n-k}$ .

### Определение частного производящих функций:

Пусть  $A(t) = a_0 + a_1t + \dots$  и  $B(t) = b_0 + b_1t + \dots$  производящие функции, причём  $B(0) = b_0 \neq 0$ . Тогда частным  $\frac{A(t)}{B(t)}$  называется производящая функция:

$$C(t) = \frac{A(t)}{B(t)} = c_0 + c_1t + \dots,$$

такая, что  $A(t) = B(t)C(t)$ . Где  $a_0 = b_0c_0 \Rightarrow c_0 = \frac{a_0}{b_0}$

$$a_1 = b_0c_1 + b_1c_0 \Rightarrow c_1 = \frac{a_1 - b_1c_0}{b_0}$$

...

$$a_n = b_0c_n + \dots b_nc_0 \Rightarrow c_n = \frac{a_n - b_1c_{n-1} - b_2c_{n-2} - \dots - b_nc_0}{b_0}$$

## 20 Теорема о разложении функции.

**Теорема (о разложении  $\frac{1}{(1-at)^m}$ ):**

$$\frac{1}{(1-at)^m} = 1 + C_m^1 at + C_{m+1}^2 a^2 t^2 + \dots + C_{m+n-1}^n a^n t^n + \dots \quad \forall m \geq 1$$

**Доказательство (по индукции):**

1. База:  $m = 1$

$$\frac{1}{1-at} = 1 + at + a^2 t^2 + \dots + a^n t^n + \dots \mid \cdot (1 + at)$$

$$1 = (1 - at)(1 + at + \dots)$$

$$(1 + at + a^2 t^2 + a^3 t^3 + \dots) - at(1 + at + a^2 t^2 + \dots) = 1$$

$$1 = 1$$

2. Предположение:  $m \geq k$

$$\frac{1}{(1-at)^k} = 1 + C_k^1 at + C_{k+1}^2 a^2 t^2 + \dots + C_{k+n-1}^n a^n t^n + \dots$$

3. Шаг индукции:  $m \geq k + 1$

$$\frac{1}{(1-at)^{k+1}} = 1 + C_{k+1}^1 at + C_{k+2}^2 a^2 t^2 + \dots + C_{k+n}^n a^n t^n + \dots$$

$$\frac{1}{(1-at)} = (1 - at) \frac{1}{(1-at)^{k+1}}$$

$$(1 - at)(1 + C_{k+1}^1 at + C_{k+2}^2 a^2 t^2 + \dots + C_{k+n}^n a^n t^n + \dots) =$$

$$= 1 + (C_{k+1}^1 - 1)at + (C_{k+2}^2 - C_{k+1}^1)a^2 t^2 + \dots + (C_{k+n}^n - C_{k+n-1}^{n-1})a^n t^n + \dots =$$

$$= 1 + C_k^1 at + C_{k+1}^2 a^2 t^2 + \dots + C_{k+n-1}^n a^n t^n + \dots$$

## 21 Теорема о производящей функции для последовательности, задаваемой линейным рекуррентным соотношением. Теорема о рациональной производящей функции.

**Теорема (о производящей функции для последовательности, заданной рекуррентным соотношением):**

Пусть последовательность  $\{a_n\}$   $a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n$  и  $a_0, \dots, a_{k-1}$  заданы. Тогда производящая функция для  $\{a_n\}$  будет рациональной функцией:

$$A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$$

**Доказательство:**

Пусть  $Q(t) = 1 - c_1 t - c_2 t^2 - \dots - c_k t^k$

$P(t) = Q(t) \cdot A(t) = p_0 + p_1 t + \dots + p_n t^n + \dots$

Так как  $A(t) = a_0 + a_1 t + \dots$ . Тогда

$= a_0 + (a_1 - c_1 a_0)t + \dots$

$(1 - c_1 t - c_2 t^2 - \dots)(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots)$

$p_0 = a_0$

$p_1 = a_1 - c_1 a_0$

$\dots$

$p_{k-1} = a_{k-1} - c_1 a_{k-2} - \dots - c_{k-1} a_0$

$p_k = a_k - c_1 a_{k-1} - \dots - c_k a_0 = 0$

$\dots$

$p_{k+n} = a_{n+k} - c_1 a_{n+k-1} - \dots - c_k a_n = 0$

$\dots$

**Теорема (о рациональных производящих функциях):**

Пусть  $A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$  рациональная и  $P$  и  $Q$  взаимно просты. Тогда, начиная с некоторого  $n$ , последовательность  $\{a_n\}$  может быть задана линейным рекуррентным соотношением  $a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n$ , где  $c_1, c_2, \dots, c_k$  произвольные константы.

## 22 Решение рекуррентных соотношений с помощью производящих функций.

Алгоритм решения линейных однородных рекуррентных соотношений с помощью производящих функций:

Пусть  $a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + \dots + c_k a_n$

1. Выписать  $Q(t) = 1 - c_1 t - c_2 t^2 - \dots - c_k t^k$

$$A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots;$$

2. Найти  $P(t)$ :  $P(t) = Q(t) \cdot A(t)$ ;

3. Разложить  $A(t)$  на элементарные дроби:

$$A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)};$$

4. Воспользоваться теоремой о разложении производящей функции и записать её в открытой форме, а так же выписать коэффициент при  $n$ -ом члене  $a_n$ .

## 23 Ориентированные и неориентированные графы.

**Определение ориентированного графа:**

Ориентированным графом называется:

$$\vec{G}(V, \rho) \quad \rho \subseteq V \times V,$$

где  $V$  — непустое множество вершин,  $\rho$  — отношение смежности на  $V$ .

Матрица  $\rho$  ( $M(\rho)$ ) называется матрицей смежности  $\vec{G}$ .

$(u, v) \in \rho$  — дуга с началом в  $u$  и концом в  $v$ .

Если  $|V| = n$ , то  $M(\rho) = M_{n \times n} = (m_{ij})_{i,j=0}^n$ ;  $m_{ij} = \begin{cases} 1, (u_i, v_j) \in \rho \\ 0, (u_i, v_j) \notin \rho \end{cases}$

**Определение неориентированного графа:**

Неориентированным графом называется пара:

$$G = (V, \rho),$$

где  $\rho$  — симметричное и антирефлексивное отношение на  $V$ .  $\forall \{u, v\} \in \rho$  — ребро графа.

## 24 Полный граф, дополнение, объединение, соединение графов.

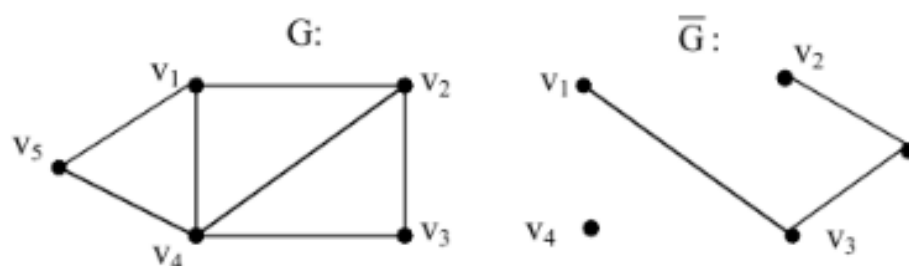
### Определение полного графа:

Полным графом называется граф, в котором любые 2 вершины соединены ребром.

Замечание: степень любой вершины  $d(v) = n - 1$ .

### Определение дополнения графа:

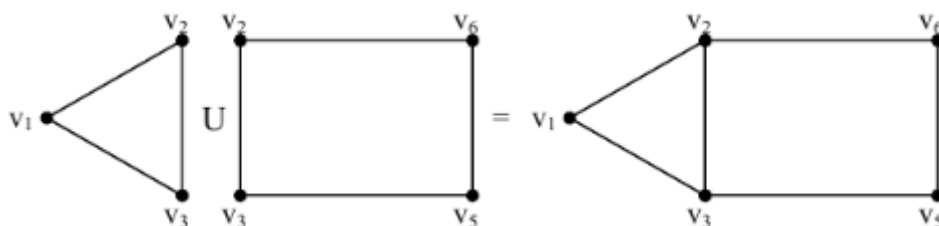
Граф  $\overline{G} = (V', \rho')$  называется дополнением графа  $G = (V, \rho)$ , если множества вершин графов  $\overline{G}$  и  $G$  совпадают, то есть  $V = V'$ , а множество рёбер  $\rho' = V^2 \setminus \rho$ . Следовательно, любые две вершины, смежные в графе  $G$ , не смежны в его дополнении  $\overline{G}$ , и любые две вершины не смежные в  $G$  смежны в  $\overline{G}$ .



### Определение объединения графов:

Пусть  $G_1 = (V_1, \rho_1)$   $G_2 = (V_2, \rho_2)$

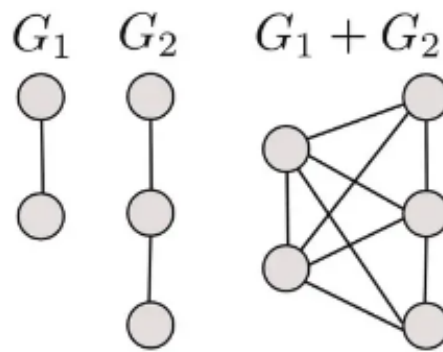
$$G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, \rho_1 \cup \rho_2)$$



### Определение соединения графов:

Пусть  $G_1 = (V_1, \rho_1)$   $G_2 = (V_2, \rho_2)$  и  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

$$G_1 + G_2 = [V_1 \cup V_2, (\rho_1 \cup \rho_2) \cup (V_1 \times V_2) \cup (V_2 \times V_1)]$$



## 25 Теорема о степенном множестве графа.

**Теорема (о степенном множестве графа):**

Пусть имеется множество натуральных чисел  $A = \{d_1, \dots, d_k : k \geq 1 \text{ и } d_1 < d_2 < \dots < d_k\}$ . Тогда найдётся неориентированный граф  $G$  с числом вершин  $= d_k + 1$ , для которого множество  $A$  является степенным множеством.

Доказательство:

Пока что не нашёл.

## 26 Теорема о соотношении суммы степеней вершин и числа рёбер (лемма о рукопожатии).

**Лемма о рукопожатии:**

Для любого графа  $G = (V, \rho)$  справедливы утверждения:

1.  $\sum_{\nu \in V} d(\nu) = 2m$ , где  $m$  — число рёбер;
2. Количество нечётных вершин чётно;
3. Если в графе  $n \geq 2$  вершины, то найдутся по крайней мере две вершины с одинаковыми степенями;

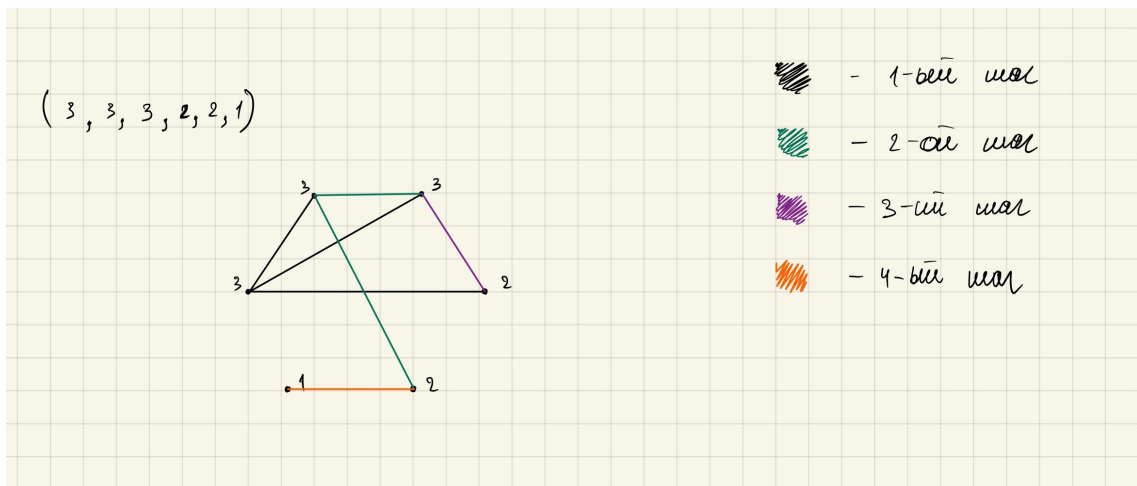
## 27 Алгоритм построения графа по вектору степеней.

**Процедура построения изображения графа по вектору степеней:**

Пусть есть вектор степеней некоторого графа  $(d_1, \dots, d_n)$ .

1. Изобразить  $n$  точек с метками  $d_1, \dots, d_n$ . В качестве начальной точки выбрать точку с  $d_1$ ;

2. Начальную точку, с меткой  $d_1$ , соединить с  $d$  точками в порядке убывания их меток;
3. Метку начальной точки положить равной 0, метки всех точек, связанных с начальной точкой, уменьшить на 1. Если метки всех точек равны 0, то завершаем алгоритм, иначе переходим к шагу 4;
4. В качестве начальной точки выбираем 1 из точек с максимальной меткой. Переходим к шагу 2.



## 28 Изоморфизм графов. Теорема об изоморфизме графов.

### Определение изоморфизма графов:

Будем говорить, что  $\vec{G}_1 = (V_1, \rho_1) \cong \vec{G}_2 = (V_2, \rho_2)$ , если существует однозначное соответствие  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ , сохраняющее отношение смежности, то есть

$$\forall u \in V_1 \quad \forall v \in V_1 \quad (u, v) \in \rho_1 \Leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in \rho_2$$

### Теорема (об изоморфизме графов):

Пусть  $\vec{G} = (U, \alpha)$  и  $\vec{H} = (V, \beta)$ . Тогда  $\varphi : U \rightarrow V$  — изоморфизм тогда и только тогда, когда  $A\Phi = \Phi B$ . То есть

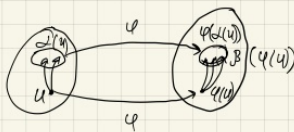
$$\alpha \cdot \varphi = \varphi \cdot \beta \Leftrightarrow \forall u \in U \quad \varphi(\alpha(u)) = \beta(\varphi(u)) \quad (*),$$

где  $A$  и  $B$  — матрицы смежности,  $\Phi$  — матрица изоморфизма.

Доказательство:

Необходимость.

Пусть  $\varphi$  - из-гому. [Нужно доказать, что  $\varphi(\alpha(u)) \subseteq \beta(\varphi(u))$  и  $\varphi(\alpha(u)) \supseteq \beta(\varphi(u))$ ]



$$1) (\subseteq) v \in \varphi(\alpha(u)) \Rightarrow \bar{\varphi}'(v) \in \alpha(u) \Rightarrow (u, \bar{\varphi}'(v)) \in \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\varphi(u), v) \in \beta \Rightarrow v \in \beta(\varphi(u))$$

$$2) (\supseteq) v \in \beta(\varphi(u)) \Rightarrow (\varphi(u), v) \in \beta \Rightarrow (u, \bar{\varphi}'(v)) \in \alpha \Rightarrow \bar{\varphi}'(v) \in \alpha(u) \Rightarrow v \in \varphi(\alpha(u))$$

Достаточность.

$$\text{Пусть } (*) \Rightarrow (u_1, u_2) \in \alpha \Leftrightarrow (\varphi(u_1), \varphi(u_2)) \in \beta$$

↑  
нужно доказать

$$1) (\Rightarrow) (u_1, u_2) \in \alpha \Rightarrow u_2 \in \alpha(u_1) \Rightarrow \varphi(u_2) \in \varphi(\alpha(u_1)) \Rightarrow \varphi(u_2) \in \beta(\varphi(u_1)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\varphi(u_1), \varphi(u_2)) \in \beta$$

$$2) (\Leftarrow) (\varphi(u_1), \varphi(u_2)) \in \beta \Rightarrow \varphi(u_2) \in \beta(\varphi(u_1)) \Rightarrow \varphi(u_2) \in \varphi(\alpha(u_1)) \Rightarrow u_2 \in \alpha(u_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (u_1, u_2) \in \alpha \quad \square$$



- 29 Проверка на изоморфизм двух графов по их матрицам смежности.**
- 30 Часть графа, подграфы. Путь, цикл, цепь, длина пути и расстояние между ними.**
- 31 Достаточное условие связности графа.**
- 32 Точка сочленения. Неразделимый граф. Необходимое и достаточное условие неразделимости связного графа.**
- 33 Планарность. Дерево, плоское изображение дерева.**