Содержание

1 Комбинаторика, правило суммы и произведения. Размещения с повторениями и без повторений.

Правило суммы:

Если A можно выбрать n способами, а B — m способами, то объект A или B можно выбрать $n + m$ способами. (Выбор B никак не согласуется с выбором A.)

Правило произведения:

Если объект A можно выбрать m способами, а объект B, после выбора A, можно выбрать n способами, то пару (A, B) можно выбрать $n \times m$ способами.

Размещения с повторениями:

Размещениями с повторениями из n типов по k элементов (k и n в произвольном соотношении) называются все такие последовательности k элементов, принадлижащих n типам, которые отличаются друг от друга составом или последовательностью элементов.

$$\overline{A_n^k} = n^k$$

Размещения без повторений:

Размещениями без повторений из n различных типов по k элементам называются все такие последовательности из k различных элементов, такие, что они различаются по составу или по порядку. Причём $k < n$.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

2 Перестановки с повторениями и без повторений. Сочетания с повторениями и без повторений, свойства биномиальных коэффициентов.

Перестановки с повторениями:

Перестановками с повторениями из $n_1, \ldots, n_k$ элементов k-го типа называются всевозможные последовательности длины n, отличающиеся друг от друга последовательностью элементов.

$$\overline{P}(n_1, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot \cdots \cdot n_k!}$$

Перестановски без повторений:

Перестановками без повторений из n элементов называются всевозможные последовательности из n элементов.

$$P_n = n!$$

Сочетания с повторениями:

Сочетаниями с повторениями из n по k (k и n в произвольном соотношении) называются все такие комбинации из k элементов $\in$ n типам, которые отличаются только составом элементов.

$$\overline{C^k}_n = C^k_{n+k-1} = \overline{P}(n-1, k)$$

Сочетания без повторений:

Сочетаниями без повторений из n по k ($k \leq n$) называются все такие комбинации из k различных элементов, выбранных из n исходных элементов, которые отличаются друг от друга составом.

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Свойства биномиальных коэффициентов:

1. $$C_n^k = \overline{P}(k, n-k)$$

2. $$C_n^k = C_n^{n-k}$$

3. $$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

4. $$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

5. $$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + C_n^n = 0$$

3 Сколькими способами можно разложить n_1 предметов одного сорта, $\ldots, n_k$ предметов k-го сорта в два ящика? Следствия.

Схема: n_1 предметов 1-го типа $\ldots$ n_k предметов k-го типа раскладываются в два различных ящика:

$$(n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot \dots \cdot (n_k + 1) \text{ способов.}$$

Следствие 1:
Если все предметы различны, то:

$$n_1 = 1 = n_2 = \dots = n_k = 1 \Rightarrow 2^k \text{ способов.}$$

Следствие 2:
Не менее r_i предметов i-го типа в каждый ящик:

$$(n_1 - 2r_1 + 1) \cdot (n_2 - 2r_2 + 1) \cdot \dots \cdot (n_k - 2r_k + 1) \text{ способов.}$$

4 Даны n различных предметов и k ящиков. Требуется положить в первый ящик n_1 предметов, в k-ый — n_k предметов, где $n_1 + \dots + n_k = n$. Сколькими способами можно сделать такое распределение, если не интересует порядок распределения предметов в ящике?

Схема: n различных предметов раскладываются в k различных ящиков (порядок внутри ящиков не важен):

$\frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}$ способов

5 Даны n различных предметов и k одинаковых ящиков. Требуется положить в каждый ящик $n = \frac{n}{k}$ предметов. Сколькими способами можно сделать такое распределение, если не интересует порядок предметов в ящике и все ящики одинаковы?

Схема: **n различных предметов в k одинаковых ящиков (порядок внутри ящиков не важен) $\frac{n}{k}$ предметов в каждый ящик:**

$$\frac{n!}{k!((\frac{n}{k})!)^k} \text{ способов.}$$

6 Сколькими способами можно распределить n одинаковых предметов в k ящиков?

Схема: **n одинаковых предметов в k разных ящиков:**

$$\overline{P}(n, k-1) = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} \text{ способов.}$$

7 Сколько существует способов разложить n различных предметов в k ящиков, если нет никаких ограничений?

Схема: **n различных предметов в k разных ящиков:**

$$k^n \text{ способов.}$$

8 Сколькими способами можно положить n различных предметов в k ящиков, если не должно быть пустых ящиков?

Схема: **n различных предметов в k разных ящиков, причём не должно быть пустых ящиков:**

A_i — количество способов, когда i-ый ящик пустой.

$|A\setminus\cup_{i=1}^k A_i| = |A| - \sum_{i=1}^k |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{k-1}\sum_{i_1\dots i_{k-1}} |A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_{k-1}}| + (-1)^k|A_1\cap\dots\cap A_k| = k^n - C_k^1(k-1)^n + C_k^2(k-2)^n + \dots + (-1)^{k-1}C_k^{k-1}\cdot 1^n$ способов.

9 Имеется n_1 предметов одного сорта$, \dots, n_s$ —s-го сорта. Сколькими способами их можно разложить по k ящикам, если не должно быть пустых ящиков?

Схема n_1 предметов первого типа $\dots n_m$ предметов m-го типа по k различным ящикам, причём нет пустых ящиков:

A_i — i-ый ящик пустой $i = \overline{1,k}$.

$|A| = C_{n_1+k-1}^{k-1} \cdot C_{n_2+k-1}^{k-1} \cdot \dots \cdot C_{n_m+k-1}^{k-1}$

$|A_i| = C_{n_1+k-2}^{k-2} \cdot C_{n_2+k-2}^{k-2} \cdot \dots \cdot C_{n_m+k-2}^{k-2}$

$|A\setminus\cup_{i=1}^k A_i| = |A| - \sum\limits_{i=1}^{n} |A_i| + \sum |A_{i_1}\cap A_{i_2}| + \dots + (-1)^{k-1}\sum\limits_{1\le i_1\le\dots\le i_{k-1}\le k} |A_{i_1}\cap \dots\cap A_{i_{k-1}}| + (-1)^k|A_1\cap\dots\cap A_k| =$

$= C_{n_1+k-1}^{k-1}\cdot\dots\cdot C_{n_m+k-1}^{k-1} - C_k^1 C_{n_1+k-2}^{k-2}\cdot\dots\cdot C_{n_m+k-2}^{k-2} + C_k^2 C_{n_1+k-3}^{k-3}\cdot\dots\cdot C_{n_m+k-3}^{k-3} + \dots + (-1)^{k-1}C_k^{k-1}1^n.$

10 Сколько существует способов разложить n различных предметов в k различных ящиков с учетом расположения предметов в ящиках, если все n предметов должны быть использованы? Следствие.

Схема: n различных предметов в k различных ящиков (порядок внутри ящиков важен, ящики могут быть пустыми):

$$\overline{P}(n, k-1) = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!} = A_{n+k-1}^n,$$

Следствие (та же схема, но не должно быть пустых ящиков):

$$A_n^k A_{n-k+k-1}^{n-k} = A_n^k A_{n-1}^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!} == \frac{(n-1)!}{(k-1)!} = n! C_{n-1}^{k-1}$$

11 Сколько существует способов разложить n различных предметов в k различных ящиков с учетом расположения предметов в ящиках, если не все n предметов могут быть использованы и некоторые ящики могут оказаться пустыми? Следствие.

Схема: n различных предметов в k различных ящиков (порядок внутри ящиков важен, можно использовать не все предметы):

S — в распределении учавствует s предметов. $S = \overline{0, n}$.

$$\sum_{S=0}^{n} C_n^S A_{S+k-1}^S$$

Следствие (та же схема, но не должно быть пустых ящиков):

$$\sum_{S=k}^{n} C_n^S S! C_{S-1}^{k-1}$$

12 Формула включения-исключения.

Теорема (формула включений-исключений):

$A = \{A_i\}_{i=1}^n \quad A_i \subseteq A$

$|A \setminus \cup_{i=1}^n A_i| = |A| - \sum\limits_{i=1}^{n} |A_i| + \sum\limits_{1 \le i_1 \le i_2 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| - \sum\limits_{1 \le i_1 \le i_2 \le i_3 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| + \dots + (-1)^k \sum\limits_{1 \le i_1 \le \dots \le i_k \le n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| + (-1)^n |A_1 \cap \dots \cap A_n|$.

Доказательство: (ожидается в будущем).

13 Полиномиальная формула. Свойства полиномиальных коэффициентов.

Теорема (полиномиальная формула):

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) = \sum_{k_1+\dots+k_m=n} \overline{P}(k_1,\dots,k_m)x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_m^{k_m}.$$

Доказательство:

$$\underbrace{(x_1+x_2+\dots+x_m)\dots(x_1+x_2+\dots+x_m)}_{n} = \underbrace{x_1x_1\dots x_1}_{n} + \underbrace{x_1x_1\dots x_1}_{n-1}x_2 + \dots +$$

$$+ \underbrace{x_nx_n\dots x_n}_{n}$$

$$x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_m^{k_m}; \quad k_1+k_2+\dots+k_m=n$$

После приведения подобных получим $\sum\limits_{k_1+k_2+\dots+k_m=n}\overline{P}(k_1,k_2,\dots,k_m)x_1^{k_1}\dots x_m^{k_m}$. $\square$

Свойства полиномиальных коэффициентов:

1. $\sum\limits_{k_1+\dots+k_m=n} \overline{P}(k_1,\dots,k_m) = m^n$;

2. $\overline{P}(k_1-1,k_2,\dots,k_m) + \overline{P}(k_1,k_2-1,\dots,k_m) + \overline{P}(k_1,k_2,\dots,k_m-1) = \overline{P}(k_1,k_2,\dots,k_m)$

   Доказательство:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^{n-1} = \sum_{k_1+\dots+k_m=n-1} \bar{P}(k_1,k_2,\dots,k_m)\, x_1^{k_1}\dots x_m^{k_m} \quad \Big|\cdot (x_1+x_2+\dots+x_m)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^{n} = \sum_{k_1+\dots+k_m=n-1} \bar{P}(k_1,k_2,\dots,k_m)\, x_1^{k_1}\dots x_m^{k_m}\,(x_1+x_2+\dots x_m)$$

$$\sum_{k_1+\dots+k_m=n} \bar{P}(k_1,\dots,k_m)\, x_1^{k_1}\dots x_m^{k_m} = \left(\sum_{k_1+\dots+k_m=n-1} \bar{P}(k_1,\dots k_m)\, x_1^{k_1}\dots x_2^{k_m}\right)(x_1+\dots+x_m)$$

$$\begin{matrix} x_1^{k_1-1}\dots x_m^{k_m} \\ \vdots \\ x_1^{k_1}\dots x_m^{k_m-1} \end{matrix} \quad * \to x^{k_1}\dots x^{k_m}$$

$\square$

14 Рекуррентное соотношение k-го порядка, решение рекуррентного соотношения, общее решение. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение.

Определение реккурентного соотношения k-го порядка:

Под реккурентным соотношением k-го порядка понимается формула, которая выражает $f(n+k)$ через $F(n+k-1), f(n+k-2), \dots, f(n)$ предыдущие члены последовательности.

Определение решения реккурентного соотношения:

Решением реккурентного соотношения называется числовая последовательность, при подстановке общего члена которой в реккурентное соотношение получаем верное равенство.

Определение общего решения реккурентного соотношения:

Общим решением реккурентного соотношения k-го порядка называется решение, зависящее от k постоянных, с помощью которых можно удовлетворить любое начальное условие. То есть получить любое общее решение.

Определение линейного реккурентного соотношения с постоянными коэффициентами:

Линейным реккурентным соотношением с постоянными коэффициентами k-го порядка называется:

$$f(n+k) = c_1 f(n+k-1) + c_2 f(n+k-2) + \cdots + c_k f(n)$$

Характеристическим уравнением для него называется:

$$r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \cdots + c_k$$

15 Линейные реккурентные соотношения с постоянными коэффициентами второго порядка. Свойства решений.

Определение линейного реккурентного соотношения с постоянными коэффициентами второго порядка:

$$(*) \quad f(n+2) = c_1 f(n+1) + c_2 f(n)$$

Его характеристическое уравнение имеет вид:

$$(**) \quad r^2 = c_1 r + c_2$$

Свойства решения линейного реккурентного соотношения с постоянными коэффициентами второго порядка:

1. Если последовательность $\{x_n\}$ — решение реккурентного соотношения, то $\{\alpha x_n\}$ так же является решением;
2. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — решения реккурентного соотношения, то последовательность $\{x_n + y_n\}$ так же является решением;
3. Если r_1 — это корень (**), то $\{r_1^n\}$ — решение (*).

16 Решение линейных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами второго порядка в случае равных и различных корней характеристического уравнения.

Случаи:

1) Пусть $r_1 \neq r_2$ — корни (**). Тогда

$$\alpha r_1^n + \beta r_2^n \text{ — решение (в силу свойств)}$$

α, β — произвольные константы

Пусть $f(0) = a$; $f(1) = b$

$$\alpha r_1^n + \beta r_2^n = f(n) \text{ — общее решение}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha r_1 + \beta r_2 = b \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta = \dfrac{a r_1 - b}{r_1 - r_2} \\ \alpha = \dfrac{a r_2 - \beta}{r_2 - r_1} \end{cases}$$

2) Пусть $r_1 = r_2$ — корни (**)

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

По теореме Виета: $c_1 = 2r_1$, $c_2 = -(r_1^2)$. Тогда:

$$f(n+2) = 2r_1 f(n+1) - r_1^2 f(n)$$

слева $= (n+2) \cdot r_1^{n+2}$

справа $= 2r_1(n+1) r_1^{n+1} - r_1^2 n r_1^n = 2r_1^2 (n+1) r_1^n - r_1^2 n r_1^n = r_1^{n+2}(2(n+1) - n) = r_1^{n+2}(n+2) =$

$=$ слева $\Rightarrow$ r_1^n и $n r_1^n$ — решение

по св-вам $f(n) = \alpha r_1^n + \beta \cdot n r_1^n$ — тоже является решением

17 Теорема об общем решении линейных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами k-го порядка. Решение рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами k-го порядка с помощью характеристического уравнения.

Теорема (общее решение линейного реккурентного соотношения k-го порядка):

Пусть (1) $f(n+k) = c_1 f(n+k-1) + \dots + c_k f(n)$ — линейное реккурентное соотношение и (2) $r^k = c_1 r^{k-1} + \dots + c_k$ его характеристическое уравнение. Тогда общее решение (1) можно записать в виде:

$f(n) = A_1 + A_2 + \dots + A_p$, где A_i выписывается по действительному корню или по паре комплексно сопряжённых корней (2).

1. Если x дествительный корень (2) кратности m, то соответствующее ему A_i имеет вид:

$$A_i = (c_{i_0} + c_{i_1} n + \dots + c_{i_{m-1}} n^{m-1}) x^n;$$

2. Если $r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$ — пара комплексно сопряжённых корней (2) кратности 1, то соответствующее им A_i имеет вид:

$$A_i = r^n(\cos(n\varphi) D_i + \sin(n\varphi) E_i),$$

где D_i и E_i — константы;

3. Если $r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$ — пара комплексно сопряжённых корней (2) кратности m, то соответсвующее им A_i имеет вид:

$$A_i = r^n[\cos(n\varphi)(D_{i_1} + D_{i_2} n + \dots + D_{i_{m-1}} n^{m-1}) +$$
$$+ \sin(n\varphi)(E_{i_1} + E_{i_2} n + \dots + E_{i_{m-1}} n^{m-1})]$$

Решение реккурентных соотношений с постоянными коэффициентами k-го порядка с помощью характеристического уравнения:

Пример:

$$f(n+5) = 4f(n+4) - 4f(n+3) - 2f(n+2) + 5f(n+1) - 2f(n)$$

$$r^5 = 4r^4 - 4r^3 - 2r^2 + 5r - 2$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1, \quad x_4 = -1, \quad x_5 = 2$$

константы

$$f(n) = 1^n(a + bn + cn^2) + d(-1)^n + e\,2^n$$

общее решение

A_1 A_2 A_3

- Пример:

$$f(n+2) = 2f(n+1) - 4f(n) \quad ; \quad f(0) = 1 \; ; \; f(1) = 2.$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$D = -12 \qquad x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{-3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}\,i$$

$$f(n) = 2^n\left(\cos\frac{\pi n}{3} \cdot a + \sin\frac{\pi n}{3} \cdot b\right)$$

$r = 2$

$\cos\varphi = \frac{1}{2}$

$\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$2^0(\cos 0 \cdot a + \sin 0 \cdot b) = 1 \; ; \; a = 1$$

$$2\cos\frac{\pi}{3} a + 2\sin\frac{\pi}{3} \cdot b = 2 \; ; \; b = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f(n) = 2^n\left(\cos\frac{\pi n}{3} + \sin\frac{\pi n}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$ – ответ

- Пример:

$$f(n+4) = -2f(n+2) - f(n)$$

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 0 \qquad (x^2+1)^2 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm i$$

$$x_{1,2} = i$$

$$x_{3,4} = -i$$

$$r = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi = 0 \\ \sin\varphi = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$x_{1-4} = \cos\frac{\pi}{2} \pm i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$f(n) = 1^n\left(\cos\frac{\pi n}{2}\cdot(an+b) + \sin\frac{\pi n}{2}(cn+d)\right)$$ — общее решение

- Пример:

$$f(n+5) = -3f(n+4) - 5f(n+3) - f(n+2) + 6f(n+1) + 4f(n)$$

$$x^5 + 3x^4 + 5x^3 + x^2 - 6x - 4 = 0$$

$$(x+1)^2(x-1)(x^2+2x+4) = 0$$

$$D = -12$$

$$x_{1,2} = -1 \qquad x_{4,5} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

$$x_3 = 1 \qquad r = 2; \quad \left.\begin{array}{l} \cos\varphi = -\frac{1}{2} \\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$$x_{4,5} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} \pm i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$f(n) = (-1)^n(an+b) + 1^n c + 2^n\left(\cos\frac{2\pi n}{3}\cdot d + \sin\frac{2\pi n}{3}\cdot e\right)$$

18 Производящая функция. Сумма производящих функций, операция подстановки.

Определение производящей функции:

Пусть $a_0, a_1, a_2, \dots$ произвольная числовая последовательность. Производящей функцией этой последовательности называется выражение вида:

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = A(t)$$

Определение суммы производящих функций:

Пусть имеются производящие функции $A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ и $B(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^n$. Суммой $A(t)$ и $B(t)$ называется производящая функция:

$$C(t) = A(t) + B(t) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) t^n$$

Определение операции подстановки в производящую функцию:

Пусть $A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ и $B(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ производящие функции, причём $B(0) = b_0 = 0$. Подстановкой в $A(t)$ $B(t)$ называется производящая функция:

$$C(t) = A(B(t)) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots = a_0 + a_1(b_1 t + b_2 t^2 + \dots) + a_2(b_1 t + b_2 t^2 + \dots) + \dots,$$

где $c_0 = a_0, c_1 = a_1 b_1, c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1^2, \dots$.

19 Произведение и деление производящих функций.

Определение произведения производящих функций:

Пусть $A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ и $B(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ производящие функции. Произведением $A(t)$ и $B(t)$ будем называть производящую функцию:

$$C(t) = A(t) \cdot B(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots,$$

где $c_0 = a_0 b_0, c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \dots, c_n = a_0 b_n + \dots + a_n b_0 = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Определение частного производящих функций:

Пусть $A(t) = a_0 + a_1 t + \dots$ и $B(t) = b_0 + b_1 t + \dots$ производящие функции, причём $B(0) = b_0 \neq 0$. Тогда частным $\frac{A(t)}{B(t)}$ называется производящая функция:

$$C(t) = \frac{A(t)}{B(t)} = c_0 + c_1 t + \dots,$$

такая, что $A(t) = B(t)C(t)$. Где $a_0 = b_0 c_0 \Rightarrow c_0 = \frac{a_0}{b_0}$
$a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0 \Rightarrow c_1 = \frac{a_1 - b_1 c_0}{b_0}$
$\dots$
$a_n = b_0 c_n + \dots b_n c_0 \Rightarrow c_n = \frac{a_n - b_1 c_{n-1} - b_2 c_{n-2} - \dots - b_n c_0}{b_0}$

20 Теорема о разложении функции.

Теорема (о разложении $\frac{1}{(1-at)^m}$):

$$\frac{1}{(1-at)^m} = 1 + C_m^1 at + C_{m+1}^2 a^2 t^2 + \dots + C_{m+n-1}^n a^n t^n + \dots \quad \forall m \geq 1$$

Доказательство (по индукции):

1. База: $m = 1$

   $\frac{1}{1-at} = 1 + at + a^2t^2 + \dots + a^n t^n + \dots | \cdot (1 + at)$

   $1 = (1 - at)(1 + at + \dots)$

   $(1 + at + a^2t^2 + a^3t^3 + \dots) - at(1 + at + a^2t^2 + \dots) = 1$

   $1 = 1$

2. Предположение: $m \geq k$

   $\frac{1}{(1-at)^k} = 1 + C_k^1 at + C_{k+1}^2 a^2t^2 + \dots + C_{k+n-1}^n a^n t^n + \dots$

3. Шаг индукции: $m \geq k + 1$

   $\frac{1}{(1-at)^{k+1}} = 1 + C_{k+1}^1 at + C_{k+2}^2 a^2 t^2 + \dots + C_{k+n}^n a^n t^n + \dots$

   $\frac{1}{(1-at)} = (1 - at)\frac{1}{(1-at)^{k+1}}$

   $(1 - at)(1 + C_{k+1}^1 at + C_{k+2}^2 a^2t^2 + \dots + C_{k+n}^n a^n t^n + \dots) =$

   $= 1 + (C_{k+1}^1 - 1)at + (C_{k+2}^2 - C_{k+1}^1)a^2t^2 + \dots + (C_{k+n}^n - C_{k+n-1}^{n-1})a^n t^n + \dots =$

   $= 1 + C_k^1 at + C_{k+1}^2 a^2t^2 + \dots + C_{k+n-1}^n a^n t^n + \dots.$

21 Теорема о производящей функции для последовательности, задаваемой линейным рекуррентным соотношением. Теорема о рациональной производящей функции.

Теорема (о производящей функции для последовательности, заданной рекурентным соотношением):

Пусть последовательность $\{a_n\}$ $a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n$ и $a_0, \dots, a_{k-1}$ заданы. Тогда производящая функция для $\{a_n\}$ будет рациональной функцией:

$$A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$$

Доказательство:

Пусть $Q(t) = 1 - c_1 t - c_2 t^2 - \dots - c_k t^k$
$P(t) = Q(t) \cdot A(t) = p_0 + p_1 t + \dots + p_n t^n + \dots$
Так как $A(t) = a_0 + a_1 t + \dots$. Тогда
$= a_0 + (a_1 - c_1 a_0)t + \dots$
$(1 - c_1 t - c_2 t^2 - \dots)(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots)$
$p_0 = a_0$
$p_1 = a_1 - c_1 a_0$
$\dots$
$p_{k-1} = a_{k-1} - c_1 a_{k-2} - \dots - c_{k-1} a_0$
$p_k = a_k - c_1 a_{k-1} - \dots - c_k a_0 = 0$
$\dots$
$p_{k+n} = a_{n+k} - c_1 a_{n+k-1} - \dots - c_k a_n = 0$
$\dots$

Теорема (о рациональных производящих функциях):

Пусть $A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$ рациональная и P и Q взаимно просты. Тогда, начиная с некоторого n, последовательность $\{a_n\}$ может быть задана линейным реккурентным соотношением $a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n$, где $c_1, c_2, \dots, c_k$ произвольные константы.

22 Решение рекуррентных соотношений с помощью производящих функций.

Алгоритм решения линейных однородных реккурентных соотношений с помощью производящих функций:

Пусть $a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + \dots + c_k a_n$

1. Выписать $Q(t) = 1 - c_1 t - c_2 t^2 - \dots - c_k t^k$
   $A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots;$
2. Найти $P(t)$: $P(t) = Q(t) \cdot A(t);$;
3. Разложить $A(t)$ на элементарные дроби:
   $$A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)};$$
4. Воспользоваться теоремой о разложении производящей функции и записать её в открытой форме, а так же выписать коэффициент при n-ом члене a_n.

23 Ориентированные и неориентированные графы.

Определение ориентированного графа:

Ориентированным графом называется:

$$\overrightarrow{G}(V, \rho) \quad \rho \subseteq V \times V,$$

где V — непустое множество вершин, ρ — отношение смежности на V.
Матрица ρ ($M(\rho)$) называется матрицей смежности $\overrightarrow{G}$.
$(u, \nu) \in \rho$ — дуга с началом в u и концом в ν.
Если $|V| = n$, то $M(\rho) = M_{n \times n} = (m_{ij})_{i,j=0}^{n}; \quad m_{ij} = \begin{cases} 1, (u_i, \nu_j) \in \rho \\ 0, (u_i, \nu_j) \notin \rho \end{cases}$

Определение неориентированного графа:

Неориентированным графом называется пара:

$$G = (V, \rho),$$

где ρ — симметричное и антирефлексивное отношение на V. $\forall \{u, \nu\} \in \rho$ — ребро графа.

24 Полный граф, дополнение, объединение, соединение графов.

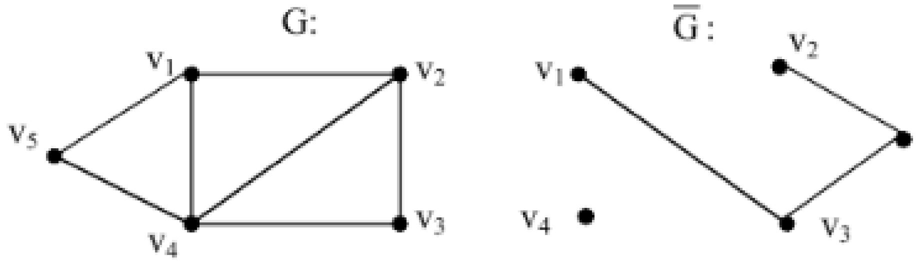
Определение полного графа:

Полным графом называется граф, в котором любые 2 вершины соединены ребром.

Замечание: степень любой вершины $d(\nu) = n - 1$.

Определение дополнения графа:

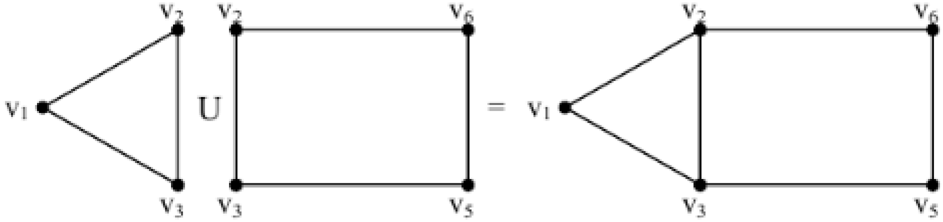
Граф $\overline{G} = (V^{'}, \rho^{'})$ называется дополнением графа $G = (V, \rho)$, если множества вершин графов $\overline{G}$ и G совпадают, то есть $V = V^{'}$, а множество рёбер $\rho^{'} = V^2 \backslash \rho$. Следовательно, любые две вершины, смежные в графе G, не смежны в его дополнении $\overline{G}$, и любые две вершины не смежные в G смежны в $\overline{G}$.



Определение объединения графов:

Пусть $G_1 = (V_1, \rho_1)$ $G_2 = (V_2, \rho_2)$

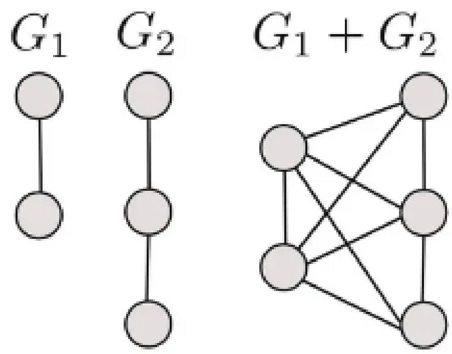
$$G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, \rho_1 \cup \rho_2)$$



Определение соединения графов:

Пусть $G_1 = (V_1, \rho_1)$ $G_2 = (V_2, \rho_2)$ и $V_1 \cap V_2 = \varnothing$

$$G_1 + G_2 = [V_1 \cup V_2, (\rho_1 \cup \rho_2) \cup (V_1 \times V_2) \cup (V_2 \times V_1)]$$



25 Теорема о степенном множестве графа.

Теорема (о степенном множестве графа):

Пусть имеется множество натуральных чисел $A = \{d_1, \ldots, d_k : k \geq 1$ и $d_1 < d_2 < \cdots < d_k\}$. Тогда найдётся неориентированный граф G с числом вершин $= d_k + 1$, для которого множество A является степенным множеством.

Доказательство:

Пока что не нашёл.

26 Теорема о соотношении суммы степеней вершин и числа рёбер (лемма о рукопожатии).

Лемма о рукопожатии:

Для любого графа $G = (V, \rho)$ справедливы утверждения:

1. $\sum\limits_{\nu \in V} d(\nu) = 2m$, где m — число рёбер;
2. Количество нечётных вершин чётно;
3. Если в графе $n \geq 2$ вершины, то найдутся по крайней мере две вершины с одинаковыми степенями;

27 Алгоритм построения графа по вектору степеней.

Процедура построения изображения графа по вектру степеней:

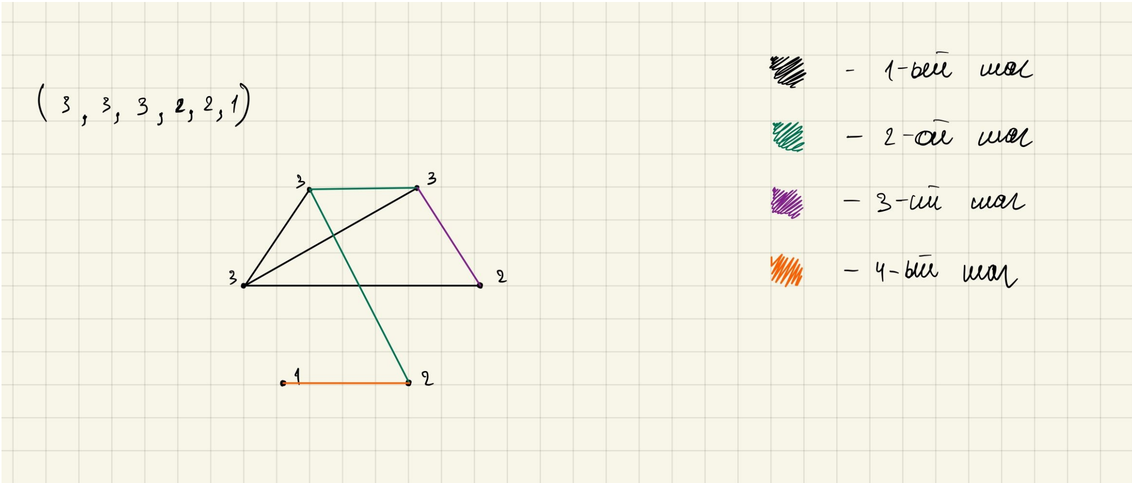
Пусть есть вектор степеней некоторого графа $(d_1, \ldots, d_n)$.

1. Изобразить n точек с метками $d_1, \ldots, d_n$. В качестве начальной точки выбрать точку с d_1;

2. Начальную точку, с меткой d_1, соединить с d точками в порядке убывания их меток;

3. Метку начальной точки положить равной 0, метки всех точек, связанных с начальной точкой, уменьшить на 1. Если метки всех точек равны 0, то завершаем алгоритм, иначе переходим к шагу 4;

4. В качестве начальной точки выбираем 1 из точек с максимальной меткой. Переходим к шагу 2.



28 Изоморфизм графов. Теорема об изоморфизме графов.

Определение изоморфизма графов:

Будем говорить, что $\overrightarrow{G}_1 = (V_1, \rho_1) \cong \overrightarrow{G_2} = (V_2, \rho_2)$, если существует однозначное соответствие $\varphi : V_1 \to V_2$, сохраняющее отношение смежности, то есть

$$\forall u \in V_1 \quad \forall \nu \in V_1 \qquad (u, \nu) \in \rho_1 \Leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(\nu)) \in \rho_2$$

Теорема (об изоморфизме графов):

Пусть $\overrightarrow{G} = (U, \alpha)$ и $\overrightarrow{H} = (V, \beta)$. Тогда $\varphi : U \to V$ — изоморфизм тогда и только тогда, когда $A\Phi = \Phi B$. То есть

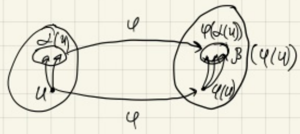
$$\alpha \cdot \varphi = \varphi \cdot \beta \Leftrightarrow \forall u \in U \quad \varphi(\alpha(u)) = \beta(\varphi(u)) \quad (*),$$

где A и B — матрицы смежности, Φ — матрица изморфизма.

Доказательство:

Необходимость:

Пусть φ — из-физм. [Нужно доказать, что $\varphi(\alpha(u)) \subseteq \beta(\varphi(u))$ и $\varphi(\alpha(u)) \supseteq \beta(\varphi(u))$]



1) ($\subseteq$) $v \in \varphi(\alpha(u)) \Rightarrow \varphi^{-1}(v) \in \alpha(u) \Rightarrow (u, \varphi^{-1}(v)) \in \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow (\varphi(u), v) \in \beta \Rightarrow v \in \beta(\varphi(u))$

2) ($\supseteq$) $v \in \beta(\varphi(u)) \Rightarrow (\varphi(u), v) \in \beta \Rightarrow (u, \varphi^{-1}(v)) \in \alpha \Rightarrow \varphi^{-1}(v) \in \alpha(u) \Rightarrow v \in \varphi(\alpha(u))$

Достаточность:

Пусть (*) $\Rightarrow (u_1, u_2) \in \alpha \Leftrightarrow (\varphi(u_1), \varphi(u_2)) \in \beta$

нужно доказать

1) ($\Rightarrow$) $(u_1, u_2) \in \alpha \Rightarrow u_2 \in \alpha(u_1) \Rightarrow \varphi(u_2) \in \varphi(\alpha(u_1)) \Rightarrow \varphi(u_2) \in \beta(\varphi(u_1)) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\varphi(u_1), \varphi(u_2)) \in \beta$

2) ($\Leftarrow$) $(\varphi(u_1), \varphi(u_2)) \in \beta \Rightarrow \varphi(u_2) \in \beta(\varphi(u_1)) \Rightarrow \varphi(u_2) \in \varphi(\alpha(u_1)) \Rightarrow u_2 \in \alpha(u_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow (u_1, u_2) \in \alpha$ $\square$

29 Проверка на изоморфизм двух графов по их матрицам смежности.

1. Выписывается матрица Φ предполагаемого изоморфизма φ как матрица с неопределёнными коэффициентами $\Phi = (\varphi_{ij})$;

2. Составляется матричное уравнение $A\Phi = \Phi B$. Решаем систему, находим Φ.

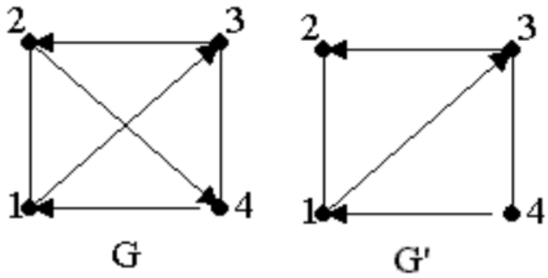
3. Если в каждом столбце и строке ровно одна единица, то изоморфизм есть, иначе — нет;

4. Если вершина u^{d^+,d^-} может перейти в вершину ν^{d^+,d^-} (равные степени исхода и захода), то в матрице пишем 1 (если из вершины первого орграфа можно лишь единожды попасть в вершину второго орграйфа, а если не единожды — пишем φ_{ij}, где i — номер столбца, j — номер строки), иначе — 0.

30 Часть графа, подграфы. Путь, цикл, цепь, длина пути и расстояние между ними. Достаточное условие связности нечётных вершин графа.

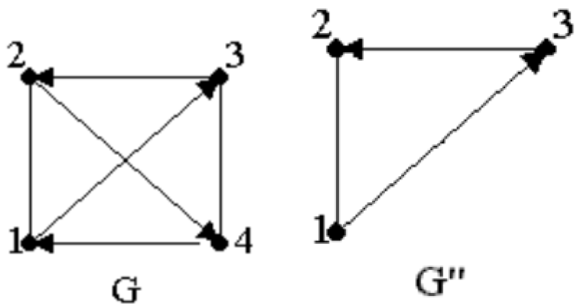
Определение части графа:

Частью графа $G = (V, \rho)$ называется граф $G^{'} = (V^{'}, \rho^{'})$, такой, что $V^{'} \subseteq V$ и $\rho^{'} \subseteq \rho \cap (V^{'} \times V^{'})$



Определение подграфа:

Подграфом графа $G = (V, \rho)$ называется граф $G^{''} = (V^{''}, \rho^{''})$, такой, что $V^{''} \subseteq V$ и $\rho^{''} = \rho \cap (V^{''} \times V^{''})$.



Определение пути в графе:

Путь — последовательность рёбер, в которой два соседних ребра имеют общую вершину, и ни одно ребро не встречается более 1 раза.

Определение цикла в графе:

Цикл — путь, в котором каждая вершина принадлежит не более, чем двум рёбрам, и начальная вершина совпадает с конечной.

Определение цепи в графе:

Цепь — путь, в котором каждая вершина принадлежит не более, чем двум рёбрам.

Определение длины пути в графе:

Длина пути — количество рёбер, входящих в путь.

Определение расстояния между двумя вершинами графа:

Расстояние между двумя вершинами — длина кратчайшего пути между ними. Если пути между вершинами нет, то принято считать расстояние между ними бесконечным.

Достаточное условие связности нечётных вершин графа:

Если две нечётные вершины u и v в графе — единственные нечётные вершины, то они связны в графе.

Доказательство (от противного):

Пусть они лежат в разных компонентах связности, тогда в каждом подграфе (компоненте связности) есть лишь одна единственная нечётная вершина — противоречие (по лемме о рукопожатии). Получаем, что число нечётных вершин, чётно.

31 Достаточное условие связности графа.

Если в n вершинном графе число рёбер равно $m > C_{n-1}^2$, то граф связный.

Доказательство (от противного):

Пусть $m > C_{n-1}^2$ и граф не связный. Рассмотрим граф $G = G_1 \cup G_2$, где G_1 — произвольная компонента, а G_2 — все вершины из графа, не находящиеся в G_1. Пусть G_1 имеет k вершин. Тогда возможны 3 случая:

1. $k = 1$, тогда в G_2 находятся $n - 1$ вершин;
2. $k = n - 1$, тогда в G_2 находится 1 вершина;
3. $2 \leq k \leq n - 2$, тогда в G_2 находятся $n - k$ вершин.

Покажем, что все 3 случая противоречивы:

1. В G_1 нет рёбер. В G_2 может быть до $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ рёбер. Тогда $m \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} = C_{n-1}^2$, следовательно, противоречие;
2. Аналогично (1);

3. Оценим m:

$$m \le C_k^2 + C_{n-k}^2 = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} =$$
$$= \frac{k^2 - k + n^2 - 2nk + k^2 - n + k}{2} = \frac{2k^2 + n^2 - 2nk - n}{2}.$$

Рассмотрим разность $C_{n-1}^2 - m$:

$$C_{n-1}^2 - m \ge C_{n-1}^2 - \frac{k^2 - k + n^2 - 2nk + k^2 - n + k}{2} =$$
$$= \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{k^2 - k + n^2 - 2nk + k^2 - n + k}{2} =$$
$$= \frac{n^2 - 3n + 2 - 2k^2 - n^2 + 2nk + n}{2} = \frac{2nk - 2n + 2 - 2k^2}{2} =$$
$$= n(k-1) - (k^2 - 1) = (k-1)(n - (k+1)) > 0, \quad k \ge 2, n \ge k+2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_{n-1}^2 - m > 0.$$

32 Точка сочленения. Неразделимый граф. Необходимое и достаточное условие неразделимости связного графа.

Определение точки сочленения:

Пусть G — связный граф. Вершина ν называется точкой сочленения, если её удаление приводит к увеличению числа компонент связности.

Определение неразделимого графа:

Граф называется неразделимым, если в нём отсутствуют точки сочленения.

Теорема (необходимое и достаточное условие неразделимости связного графа):

Связный граф с числом вершин $n \ge 3$ неразделим, тогда и только тогда, когда любые две вершины графа принадлежат некоторому циклу.

33 Планарность. Дерево, плоское изображение дерева.

Определение плоского изображения графа:

Плоское изображение графа — изображение, в котором никакие два ребра графа не пересикаются.

Определение планарного графа:

Граф называется планарным, если существует его плоское изображение.

Определение дерева:

Деревом называется связный граф без циков.