Содержание

1 Введение

Данный файл является простой прихотью автора, и не нуждается ни в одобрении, ни в осуждении. Если будут ошибки, пишите. И помните, что автор честно старался.

2 Краткий обзор

В данном файлике мы постараемся подготовиться, к 2 контрольной работе по диффурам.

Корнев пообещал нам 3 темы на контрольной работе:

1. Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами;
2. Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами;
3. Системы однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Каждый тип будет разобран в отдельном блоке. Приступим.

3 Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Стоит сказать, что Корнев разрешил решать однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами только методом Эйлера, и никаким больше.

3.1 Как выглядит однородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами?

Однородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y^{'} + a_n y = 0,$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — заданные числа.

3.2 Какие виды однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами могут встретиться на контрольной работе?

Я различаю следующие виды:

1. Уравнения, имеющие вещественные корни;
2. Уравнения, имеющие комплексныекорни;

Так же стоит заметить, что каждый из приведённых выше типов ещё делится на 2 случая:

1. Случай простых корней;
2. Случай кратных корней.

Дальше мы разберём каждый вид в 2 возможных случаях + ещё дополнительно разберём примеры из сборника задач, который нам дал Корнев.

3.3 Случай вещественных не кратных корней

3.3.1 Теория

В данном случае уравнения решаются по следующему алгоритму:

1. Выписываем соответствующее характеристическое уравнение.

   Оно будет иметь вид:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0;$$

2. Решаем соответствующее характеристическое уранение.

   После его решения мы получим n-1 простых вещественных корней $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$;

3. Выписываем фундаментальную систему решений исходного уравнения.

   Она будет иметь вид:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \ldots, y_{n-1} = e^{\lambda_{n-1} x};$$

4. Выписываем общее решение исходного уравнения.

   Оно будет иметь вид:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_{n-1} y_{n-1}.$$

5. Записываем ответ.

   Ответ: $y = \ldots.$

3.3.2 Практика

Пример 1:

Дано:

$$y^{''} + y^{'} - 2y = 0$$

Решение:

1. Составляем характеристичное уравнение

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

2. Решаем характеристическое уравнение

$$D = 1 - 4 * (-2) = 3^2$$
$$\lambda_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$$
$$\lambda_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

3. Выписываем ФСР

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{-2x}$$
$$y_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{x}$$

4. Выписываем общее решение исходного уравнения

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x$$

5. Ответ: $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x$

Пример 2:

Дано:

$$y^{(5)} - 10y^{(3)} + 9y^{'} = 0$$

Решение:

1. Выписываем характеристическое уравнение

$$\lambda^5 - 10\lambda^3 + 9\lambda = 0$$

2. Решаем характеристическое уравнение

   Воспользуемся Схемой Горнера:

	1	0	-10	0	9	0	
1	1	1	-9	-9	0	0	$\lambda_1 = 1$
-1	1	0	-9	0	0		$\lambda_2 = -1$
3	1	3	0	0			$\lambda_3 = 3$

   Тогда имеем:

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 3)(\lambda^2 + 3\lambda) = 0$$

   Решим $\lambda^2 + 3\lambda = 0$:

$$\lambda^2 + 3\lambda = 0$$
$$\lambda(\lambda + 3) = 0$$
$$\lambda_4 = 0, \quad \lambda_5 = -3$$

   Таким образом получим корни:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 3, \quad \lambda_4 = 0, \quad \lambda_5 = -3$$

3. Выписываем ФСР

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-x}, \quad y_3 = e^{3x}, \quad y_4 = e^0 = 1, \quad y_5 = e^{-3x}$$

4. Выписываем общее решение

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} + c_4 + c_5 e^{-3x}$$

5. Ответ: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} + c_4 + c_5 e^{-3x}$

3.4 Случай вещественных кратных корней

3.4.1 Теория

В данном случае алгоритм решения будет следующий:

1. Выписываем соответствующее характеристическое уравнение.

   Оно будет иметь вид:

   $$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0;$$

2. Решаем соответствующее характеристическое уранение.

   После его решения мы получим 1 корень λ_1 — $n-1$-кратности;

3. Выписываем фундаментальную систему решений исходного уравнения.

   Она будет иметь вид:

   $$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = xe^{\lambda_1 x}, \quad y_3 = x^2 e^{\lambda_1 x}, \quad \ldots, y_{n-1} = x^{n-1}e^{\lambda_1 x};$$

4. Выписываем общее решение исходного уравнения.

   Оно будет иметь вид:

   $$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_{n-1} y_{n-1}.$$

5. Записываем ответ.

   Ответ: $y = \ldots.$

У нас в случае кратных корней на практике встречались уравнения только с 1 корнем, поэтому, скорее всего, других случаев на контрольной работе не встретится.

3.4.2 Практика:

Пример:

Дано:

$$y^{'''} - 3y^{''} + 3y^{'} - y = 0$$

Решение:

1. Составляем характеристичное уравнение

   $$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

2. Решаем характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$
$$(\lambda - 1)^3 = 0$$
$$\lambda_1 = 1$$

3. Выписываем ФСР

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^x$$
$$y_2(x) = xe^{\lambda_1 x} = xe^x$$
$$y_3(x) = x^2 e^{\lambda_1 x} = x^2 e^x$$

4. Выписываем общее решение исходного уравнения

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) = c_1 e^x + c_2 xe^x + c_3 x^2 e^x$$

5. Ответ: $y = c_1 e^x + c_2 xe^x + c_3 x^2 e^x$

3.5 Случай комплексных не кратных корней

3.5.1 Теория

Алгоритм решения:

1. Выписываем соответствующее характеристическое уравнение.

   Оно будет иметь вид:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0;$$

2. Решаем соответствующее характеристическое уранение.

   После его решения мы получим n-1 простых вещественных и комплексных корней $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$;

3. Выписываем фундаментальную систему решений исходного уравнения.

   Она будет иметь вид:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \ldots, y_{n-1} = e^{\lambda_{n-1} x};$$

4. Преобразовываем комплексные сопряжённые решения по формуле Эйлера.

$$e^{\alpha+i\gamma} = e^{\alpha}(\cos\gamma + i\sin\gamma)$$

Для определённости предположим, что корни λ_1 и λ_2 комплекно сопряжённые, тогда из 2, соответствующих им решений, получим 1 решение:

$$y_1 = e^{\alpha}(\cos\gamma + \sin\gamma) = z_1,$$

а решение y_2 отбрасываем

5. Выписываем общее решение исходного уравнения.

Оно будет иметь вид:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_k y_k + c_{k+1} z_1 + \cdots + c_{k+m} z_m,$$

где $y_1, \ldots, y_k$ — вещественные корни, а $z_1, \ldots, z_m$ — преобразованные комплексные корни.

6. Записываем ответ.

Ответ: $y = \ldots.$

3.5.2 Практика:

Пример 1:

Дано:

$$y^{''} + 4y = 0$$

Решение:

1. Составляем характеристичное уравнение

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

2. Решаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda = -4$$

$$\lambda_1 = 2i$$

$$\lambda_2 = -2i$$

3. Выписываем ФСР

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{2ix}$$
$$y_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{-2ix}$$

4. Преобразовываем комплексные решения

   Рассматриваем y_1, а y_2, как комплексно сопряженное y_1, отбрасываем:

$$y_1 = e^{2ix} = e^0(\cos 2x + \sin 2x) = z_1$$

5. Выписываем общее решение исходного уравнения

$$y = c_1 z_1 = c_1(\cos 2x + \sin 2x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

6. Ответ: $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

Пример 2:

Дано:

$$y^{'''} - 8y = 0$$

Решение:

1. Составляем характеристичное уравнение

$$\lambda^3 - 8 = 0$$

2. Решаем характеристическое уравнение

   Для того, чтобы избавиться от куба воспользуемся схемой Горнера:

	1	0	0	-8	
2	1	2	4	0	$\lambda_1 = 2$

   Таким образом, получим:

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4) = 0$$

   Решим $\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$:

$$D = 4 - 4 * 4 = -12$$
$$\lambda_2 = \frac{-2 + \sqrt{-12}}{2} = \frac{-2 + 2\sqrt{3}i}{2} = -1 + \sqrt{3}i$$
$$\lambda_3 = -1 - \sqrt{3}i$$

3. Выписываем ФСР

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{2x}$$
$$y_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{-x+\sqrt{3}ix}$$
$$y_3(x) = e^{\lambda_3 x} = e^{-x-\sqrt{3}ix}$$

4. Преобразовываем комплексные решения

   Рассматриваем y_2, а y_3, как комплексно сопряженное y_3, отбрасываем:

$$y_2 = e^{-x+\sqrt{3}ix} = e^{-x}(\cos\sqrt{3}x + \sin\sqrt{3}x) = z_1$$

5. Выписываем общее решение исходного уравнения

$$y = c_1 y_1 + c_2 z_1 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}\cos\sqrt{3}x + c_3 e^{-x}\sin\sqrt{3}x$$

6. Ответ: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}\cos\sqrt{3}x + c_3 e^{-x}\sin\sqrt{3}x$

Пример 3:

Дано:

$$y^{(6)} + 64y = 0$$

Решение:

1. Составляем характеристичное уравнение

$$\lambda^6 + 64 = 0$$

2. Решаем характеристическое уравнение

$$\lambda^6 + 64 = 0$$
$$\lambda^6 = -64$$
$$\lambda = \sqrt[6]{-64}$$
$$\lambda_1 = \sqrt[6]{64}(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = \sqrt{3} + i$$
$$\lambda_2 = \sqrt[6]{64}(\cos(\frac{3\pi}{6}) + i\sin(\frac{3\pi}{6})) = 2i$$
$$\lambda_3 = \sqrt[6]{64}(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6})) = -\sqrt{3} + i$$
$$\lambda_4 = \sqrt[6]{64}(\cos(\frac{7\pi}{6}) + i\sin(\frac{7\pi}{6})) = -\sqrt{3} - i$$

$$\lambda_5 = \sqrt[6]{64}(\cos(\frac{9\pi}{6}) + i\sin(\frac{9\pi}{6})) = -2i$$
$$\lambda_6 = \sqrt[6]{64}(\cos(\frac{11\pi}{6}) + i\sin(\frac{11\pi}{6})) = \sqrt{3} - i$$

Таким образом, имеем 3 комплексно-сопряжённых пары корней:

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$
$$\lambda_{3,4} = \sqrt{3} \pm i$$
$$\lambda 5, 6 = -\sqrt{3} \pm i$$

3. Выписываем ФСР

$$y_{1,2} = e^{\pm 2ix}, \quad y_{3,4} = e^{\sqrt{3}\pm i}, \quad y_{5,6} = e^{-\sqrt{3}\pm i}$$

4. Преобразовываем комплексные решения

   Рассматриваем y_1, y_3, y_5, а y_2, y_4, y_6 отбрасываем.

$$z_1 = \cos 2x + \sin 2x$$
$$z_2 = e^{\sqrt{3}} \cos x + e^{\sqrt{3}} \sin x$$
$$z_3 = e^{-\sqrt{3}} \cos x + e^{-\sqrt{3}} \sin x$$

5. Выписываем общее решение исходного уравнения

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3 e^{\sqrt{3}} \cos x + c_4 e^{\sqrt{3}} \sin x + c_5 e^{-\sqrt{3}} \cos x + c_6 e^{-\sqrt{3}} \sin x$$

6. Ответ: $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3 e^{\sqrt{3}} \cos x + c_4 e^{\sqrt{3}} \sin x + c_5 e^{-\sqrt{3}} \cos x + c_6 e^{-\sqrt{3}} \sin x$

3.6 Случай комплексных кратных корней

3.6.1 Теория

Алгоритм аналогичен алгоритму решения в случае не кратных комплексных корней. С единственным различием в том, что получая кратные корни мы поступаем как в алгоритме случае вещественных кратных корней.

3.6.2 Практика

Пример:

Дано:

$$y^{(4)} + 2y^{''} + y = 0$$

Решение:

1. Составляем характеристичное уравнение

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

2. Решаем характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$
$$(\lambda^2 + 1)^2 = 0$$
$$\lambda = \pm i$$
$$\lambda_1 = i$$
$$\lambda_2 = -i$$

Таким образом, имеем 2 комплексно-сопряжённых корня второй кратности:

3. Выписываем ФСР

$$y_1 = e^{ix}, \quad y_2 = e^{-ix},$$

4. Преобразовываем комплексные решения

Рассматриваем y_1, а y_2 отбрасываем + не забываем про кратность (на 1 корень по 2 решения).

$$z_1 = \cos x + \sin x$$
$$z_2 = x \cos x + x \sin x$$

5. Выписываем общее решение исходного уравнения

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x$$

6. Ответ: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x$

4 Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами

4.1 Как выглядит неоднородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами?

Однородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y^{'} + a_n y = f(x),$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — заданные числа.

4.1.1 Теория

Подобные уравнения решаются по следующему алгоритму:

1. Этап

   (a) Выписываем соответствующее однородное уравнение.
   Оно имеет вид

   $$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y^{'} + a_n y = 0$$

   (b) Решаем его по уже описанным ранее алгоритмам.
   В итоге получим его общее, оно имеет вид:

   $$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_k y_k.$$

2. Этап

   (a) Найдём частное решение исходного неоднородного уравнения. Для этого будем считать, что $c_1, \ldots, c_k$, как пока что неизвестные функции.

   (b)

   $$y_h = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 + \cdots + c_k(x) y_k.$$

   (c) Составляем систему уравнений от $c_1^{'}(x), \ldots c_k^{'}(x)$ и находим их.
   Система будет иметь вид:

   $$\begin{cases} c_1^{'}(x) y_1 + \cdots + c_k^{'} y_k = 0 \\ c_1^{'}(x) y_1^{'} + \cdots + c_k^{'} y_k^{'} = 0 \\ \ldots \\ c_1^{'}(x) y_1^{(k-1)} + \cdots + c_k^{'} y_k^{(k-1)} = f(x) \end{cases}$$

3. Этап

   В качестве ответа записывает следующее:

   Ответ: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_k y_k + y_h$.

4.2 Практика

Пример 1:

Дано:

$$y^{''} - 2y^{''} - 3y = e^{4x}$$

Решение:

1. Этап

   (a) Выписываем соответствующее однородное уравнение

   $$y^{''} - 2y^{''} - 3y = 0$$

   (b) Решаем соответствующее однородное уравнение

   $$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

   $$D = 4 - 4(-3) = 4^2$$

   $$\lambda_1 = \frac{2+4}{2} = 3, \quad \lambda_2 = \frac{2-4}{2} = -1$$

   Общее решение однородного уравнения:

   $$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$$

2. Этап

   (a) Выписываем частное решение

   $$y_h = c_1(x)e^{3x} + c_2(x)e^{-x},$$

   где $c_1(x), c_2(x)$ — пока ещё неизвестные функции.

   (b) Составляем систему уравнений относительно $c_1^{'}(x)$ и $c_2^{'}(x)$ и находим их.

   Процесс нахождения $c_1^{'}(x)$ и $c_2^{'}(x)$ опустим, так как я всё-таки не бессмертен)

   $$\begin{cases} c_1^{'}(x)e^{3x} + c_2^{'}(x)e^{-x} = 0 \\ c_1^{'}(x)3e^{3x} - c_2^{'}(x)e^{-x} = e^{4x} \end{cases}$$

   $$\dots$$

   $$\begin{cases} c_1^{'}(x) = \frac{e^x}{4} \\ c_2^{'}(x) = -\frac{e^{5x}}{4} \end{cases}$$

(c) Находим $c_1(x), c_2(x)$

$$c_1(x) = \frac{1}{4}\int e^{4x}dx = \frac{e^{4x}}{16}$$
$$c_2(x) = -\frac{1}{4}\int e^{x}dx = -\frac{e^{x}}{4}$$

(d) Записываем полученное частное решение

$$y_h = \frac{e^{4x}}{16} - \frac{e^{x}}{4}$$

3. Этап

Ответ: $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} + \frac{e^{4x}}{16} - \frac{e^{x}}{4}$

Пример 2:

Дано:

$$y^{''} + y = 4\sin x$$

Решение:

1. Этап

(a) Выписываем соответствующее однородное уравнение

$$y^{''} + y = 0$$

(b) Решаем соответствующее однородное уравнение

$$\lambda^2 + 1 = 0$$
$$\lambda^2 = -1$$
$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i$$

ФСР:

$$y_1 = e^{ix}, \quad y_2 = e^{-ix}$$

Преобразуем комплексные корни к вещественным.
Рассмотрим y_1, а y_2 отбрасываем, как комплексно сопряжённый с y_1:

$$y_1 = e^{ix} = e^{0}(\cos x + \sin x) = \cos x + \sin x$$

Общее решение однородного уравнения:

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x$$

2. Этап

   (a) Выписываем частное решение

   $$y_h = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x,$$

   где $c_1(x), c_2(x)$ — пока ещё неизвестные функции.

   (b) Составляем систему уравнений относительно $c_1^{'}(x)$ и $c_2^{'}(x)$ и находим их.

   Процесс нахождения $c_1^{'}(x)$ и $c_2^{'}(x)$ так же опускаем.

   $$\begin{cases} c_1^{'}(x)\cos x + c_2^{'}(x)\sin x = 0 \\ -c_1^{'}(x)\sin x + c_2^{'}(x)\cos x = 4\sin x \end{cases}$$

   $$\ldots$$

   $$\begin{cases} c_1^{'}(x) = -4\sin^2 x \\ c_2^{'}(x) = 4\sin x\cos x \end{cases}$$

   (c) Находим $c_1(x), c_2(x)$

   $$c_1(x) = -4\int \sin^2 x dx = \sin 2x - 2x$$

   $$c_2(x) = 4\int \sin x\cos x dx = 2\sin^2 x$$

   (d) Записываем полученное частное решение

   $$y_h = \sin 2x\cos x - 2x\cos x + 2\sin^3 x$$

3. Этап

   Ответ: $y = c_1\cos x + c_2\sin x + \sin 2x\cos x - 2x\cos x + 2\sin^3 x$

5 система однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами

Не буду сейчас вдаваться в подробности решения, просто сразу рассмотрим пример:

Пока что всё будет с фото, потому что я уже устал жать по клавишам.

Дано:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Решение:

Рассмотрим СОЛУ с ПК

(1) $Y' = AY \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2 \end{cases}$

Решаем методом Эйлера:

1. Найдём собственные значения матрицы A:

Рассмотрим х-ое уравнение для A

$\det(A - \lambda E) = 0$

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0;$

$8 - 6\lambda + \lambda^2 - 3 = 0$

$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$

$D = 36 - 20 = 4^2$

$\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 5$ – собственные значения A

2. Найдём собственные вектора, соответствующие λ_1, λ_2.

$V_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

v_1, v_2 – образуют ненулевое решение системы (1)

$(A - \lambda_1 E)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} v_1 + v_2 = 0 \\ 3v_1 + 3v_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = -1 \\ v_2 = 1 \end{cases}$

Таким образом, $V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$V_2 = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$

v_1, v_2 – образуют ненулевое решение системы (1)

$$(A - \lambda_2 E)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} -3v_1 + v_2 = 0 \\ 3v_1 - v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_2 = 3 \end{cases}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Выписываем ФСР для (1):

$$Y_1 = e^{\lambda_1 x} V_1 = \begin{pmatrix} -e^{x} \\ e^{x} \end{pmatrix}$$

$$Y_2 = e^{\lambda_2 x} V_2 = \begin{pmatrix} e^{5x} \\ 3e^{5x} \end{pmatrix}$$

4. Общее решение системы (1):

$$Y = c_1 Y_1(x) + c_2 Y_2(x) = c_1\begin{pmatrix} e^{-x} \\ e^{x} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} e^{5x} \\ 3e^{5x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x} \\ c_1 e^{x} + c_2 3e^{5x} \end{pmatrix}$$

Ответ: $Y = \begin{pmatrix} c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x} \\ c_1 e^{x} + c_2 3e^{5x} \end{pmatrix}$