

# Содержание

<b>1 Уравнения первого порядка</b>	<b>4</b>
1.1 Определения . . . . .	4
1.1.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка . . . . .	4
1.1.2 Частное решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка . . . . .	4
1.1.3 Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка . . . . .	4
1.1.4 Общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка . . . . .	4
1.1.5 Уравнение с разделяющимися переменными первого порядка . . . . .	5
1.1.6 Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в симметричной форме . . . . .	5
1.1.7 Линейное дифференциальное уравнение первого порядка . . . . .	5
1.1.8 Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка . . . . .	5
1.2 Теоремы и алгоритмы . . . . .	6
1.2.1 Алгоритм решения уравнений с разделяющимися переменными первого порядка . . . . .	6
1.2.2 Метод вариации решения линейного дифференциального уравнения первого порядка. . . . .	7
1.2.3 Основная теорема существования и единственности . . . . .	8
1.2.4 Сведение задачи Коши к интегральному уравнению . . . . .	8
<b>2 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка</b>	<b>9</b>
2.1 Определения . . . . .	9
2.1.1 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка (однородные и неоднородные) . . . . .	9
2.1.2 Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка . . . . .	9
2.1.3 Линейно зависимые и линейно независимые функции . . . . .	10
2.1.4 Определитель Вронского функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ . . . . .	10
2.1.5 Фундаментальная система решения . . . . .	10
2.1.6 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами . . . . .	10
2.1.7 Необходимое условие линейной зависимости . . . . .	11
2.1.8 Условие линейной независимости решений . . . . .	11
2.1.9 Свойство линейности и следствия из него . . . . .	11
2.1.10 Существование ФСР . . . . .	12
2.1.11 Вид общего решения однородного линейного уравнения	12

2.1.12	Вид общего решения неоднородного линейного уравнения	12
2.2	Алгоритм метода вариации нахождения частного решения . . . . .	13
2.3	Обоснование метода вариации . . . . .	14
2.4	Пример: $y'' + w^2y = f(x)$ . . . . .	15
2.5	Формула Остроградского-Лиувилля . . . . .	16
2.6	Метод Эйлера (случай простых корней) . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Линейные дифференциальные уравнения второго порядка</b>	<b>18</b>
3.1	Интегрирование с помощью частного решения . . . . .	18
3.2	Упрощение с помощью замены функции $y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{1}{4x^2})y = 0$	19
3.3	Упрощение с помощью замены переменной $y'' + \frac{1}{2x}y' - \frac{1}{x}y = 0$ .	19
3.4	Метод степенных рядов $y'' - xy = 0$ . . . . .	20
3.5	Алгоритм решения простейшей краевой задачи . . . . .	22
3.6	Существование решения краевой задачи . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Линейные системы</b>	<b>24</b>
4.1	Определения . . . . .	24
4.1.1	Нормальная линейная система, её векторная запись . . .	24
4.1.2	Решение системы . . . . .	25
4.1.3	Задача Коши для системы . . . . .	25
4.1.4	Линейно зависимые и линейно независимые вектор-функции . . . . .	26
4.1.5	Определитель Вронского вектор-функций . . . . .	26
4.1.6	Фундаментальная система решений линейной системы .	26
4.1.7	Фундаментальная матрица решений однородной системы	26
4.1.8	Линейные системы с постоянными коэффициентами .	27
4.1.9	Собственные значения и собственные векторы матрицы .	27
4.1.10	Матричная экспонента . . . . .	27
4.2	Извинения . . . . .	28
4.3	Теоремы, алгоритмы, примеры . . . . .	28
4.3.1	Свойства решений однородной системы . . . . .	28
4.3.2	Необходимое условие линейной зависимости вектор-функций . . . . .	28
4.3.3	Условие линейной независимости решений однородной системы . . . . .	29
4.3.4	Существование ФСР . . . . .	29
4.3.5	Вид общего решения однородной системы . . . . .	31
4.3.6	Вид общего решения неоднородной системы . . . . .	32
4.3.7	Свойства фундаментальных матриц . . . . .	33
4.3.8	Метод вариации нахождения частного решения . . . . .	33
4.3.9	Формула Коши . . . . .	34
4.3.10	Нахождение собственных значений и собственных векторов матрицы . . . . .	35

4.3.11	Метод Эйлера (случай простых собственных значений)(включая лемму) . . . . .	36
4.3.12	Пример $Y' = AY$ . . . . .	37
4.3.13	Лемма $ a_{ij}^{(m)}  \leq n^{m-1}d^m$ . . . . .	39
4.3.14	Существование $e^A$ . . . . .	39
4.3.15	$e^{Ax}$ — фундаментальная матрица системы $Y' = AY$ . . .	40
4.3.16	Формула Коши для линейных систем с постоянными коэффициентами . . . . .	41
4.3.17	Пример: нахождение $e^A$ . . . . .	42

# 1 Уравнения первого порядка

## 1.1 Определения

### 1.1.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

**Определение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка**

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') \equiv 0$$

### 1.1.2 Частное решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

**Определение частного решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка**

$$F(x, y, y') \equiv 0 \quad (1)$$

обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка.

Частным решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка называется непрерывно дифференцируемая функция  $\varphi(x)$ , при подстановке которой в уравнение (1) получим тождество

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$$

### 1.1.3 Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

**Определение общего решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка**

Множество всех решений обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка называется его общим решением.

### 1.1.4 Общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, имеет вид

$$y' = f(x, y) \quad (2)$$

**Определение общего интеграла дифференциального уравнения первого порядка:**

Общее решение уравнения (2) в неявном виде

$$F(x, y) = C$$

называется общим интегралом уравнения (2).

### 1.1.5 Уравнение с разделяющимися переменными первого порядка

#### Определение уравнения с разделяющимися переменными первого порядка

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными первого порядка называется уравнение вида

$$y' = f_1(x)f_2(y),$$

где  $f_1(x)$  и  $f_2(y)$  — заданные функции.

### 1.1.6 Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в симметричной форме

#### Определение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в симметричной форме

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в симметричной форме имеет вид

$$A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0,$$

где  $A$  и  $B$  — заданные функции двух переменных, причём переменные  $x$  и  $y$  равноправны.

### 1.1.7 Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

#### Определение линейного дифференциального уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x),$$

где  $x$  — неизвестная переменная,  $y = y(x)$  — неизвестная функция,  $a_0(x)$  и  $a_1(x)$  — известные непрерывные функции.

### 1.1.8 Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка

#### Определение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка

Пусть  $y' = f(x, y)$  — дифференциальное уравнение первого порядка и  $y(x_0) = y_0$  — некоторое начальное условие. Тогда задача Коши для него имеет вид

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

где  $x_0, y_0$  — заданные числа.

## 1.2 Теоремы и алгоритмы

### 1.2.1 Алгоритм решения уравнений с разделяющимися переменными первого порядка

1. Переходим к дифференциалам:

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad \frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y);$$

2. Делим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y) \quad \left| \cdot dx \frac{1}{f_2(y)} \right.$$

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

3. Вычисляем интегралы:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C,$$

где  $C \in R$  и  $\int \frac{dy}{f_2(y)} = F_2(y)$ ,  $\int f_1(x)dx = F_1(x)$ .

Получим:

$$F_2(y) = F_1(x) + C \tag{1}$$

4. Разрешаем последнее уравнение относительно  $y$ :

$$y = \varphi(x, C), \quad C \in R, \tag{2}$$

где  $\varphi(x, C)$  — общее решение.

5. Ответ:  $\varphi(x, C)$ .

## 1.2.2 Метод вариации решения линейного дифференциального уравнения первого порядка.

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x),$$

Тогда

$$y' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}y = \frac{f(x)}{a_0(x)}$$

$$\text{Обозначим } p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}, \quad q(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)}.$$

Следовательно уравнение примет вид:

$$y' + p(x)y = q(x), \quad a \leq x \leq b \quad (3)$$

**Метод вариации произвольной постоянной:**

1. Этап:

Найдём общее решение соответствующего (3) однородного уравнения:

$$y' + p(x)y = 0 \quad (4)$$

$$y' = -p(x)y$$

$$\frac{dx}{dy} = -p(x)y$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int p(x)dx + C$$

$$\ln |y| = -F_1(x) + C$$

$$y = \pm e^C e^{-F_1(x)}$$

Получим:  $y_0 = C e^{-F_1(x)}$  — общее решение (4).

2. Этап:

Ищем частное решение (3) в виде:

$$y_{\text{ч}} = C(x)e^{-F_1(x)}, \quad (5)$$

где  $C(x)$  — пока неизвестная функция.

$$y' = C'(x)e^{-F_1(x)} + C(x)e^{-F_1(x)}(-p(x))$$

Подставляем в (3):

$$C'(x)e^{-F_1(x)} - C(x)e^{-F_1(x)}p(x) + p(x)C(x)e^{-F_1(x)} = q(x)$$

$$C'(x) = e^{F_1(x)} q(x)$$

$$C(x) = \int e^{F_1(x)} q(x) dx \pm c = F_2(x) + C$$

Подставим в (3):

$$y = e^{-F_1(x)}(F_2(x) + C)$$

Таким образом,  $y = e^{-F_1(x)}(F_2(x) + C)$  — общее решение уравнения (3).

### 1.2.3 Основная теорема существования и единственности

#### Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши:

Пусть  $f(x, y)$  — непрерывная функция и у неё существует частная производная  $f'_y(x, y)$ . Тогда  $\forall(x_0, y_0)$  задача Коши имеет единственное решение.

### 1.2.4 Сведение задачи Коши к интегральному уравнению

Пусть  $\varphi(x)$  — решение задачи Коши:

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)) \quad (6)$$

$$\varphi(x_0) = y_0 \quad (7)$$

Перепишем (6) в виде:

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad (8)$$

Фиксируем произвольный  $x$  и берём интеграл от (8):

$$\begin{aligned} \varphi' &= f(t, \varphi(t)) \quad \left| \int_{x_0}^x \dots dt \right. \\ \varphi(x) - \varphi(x_0) &= \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt \\ \varphi(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt \end{aligned} \quad (9)$$

По определению (9) означает, что  $\varphi(x)$  является решением интегрального уравнения

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt \quad (10)$$

Все остальные рассуждения обратимы  $\implies$  задача Коши  $\sim$  уравнению (10).

## 2 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка

### 2.1 Определения

#### 2.1.1 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка (однородные и неоднородные)

**Определение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка**

Однородное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид:

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n(x)y = 0,$$

где  $a_0(x), \dots, a_n(x)$  — заданные непрерывные функции.

**Определение линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка**

Неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид:

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n(x)y = f(x),$$

где  $a_0(x), \dots, a_n(x), f(x)$  — заданные непрерывные функции.

#### 2.1.2 Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

**Определение задачи Коши для дифференциального уравнения n-го порядка**

Задача Коши для линейного уравнения (4) имеет вид:

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

где  $y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$  — начальные условия и  $x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  — заданные числа.

### 2.1.3 Линейно зависимые и линейно независимые функции

#### Определение линейно зависимых функций

Функции  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$  называются линейно зависимыми на отрезке  $[a, b]$ , если найдутся константы  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  — числа, не все равные нулю, такие, что линейная комбинация:

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \dots + \alpha_m\varphi_m(x) \equiv 0$$

#### Определение линейно независимых функций

Функции  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$  называются линейно независимыми на отрезке  $[a, b]$ , если

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \dots + \alpha_m\varphi_m(x) \equiv 0 \iff \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$$

### 2.1.4 Определитель Вронского функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$

#### Определение определителя Вронского функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$

Определителем Вронского функций  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$  называется:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_m(x) \\ \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x) & \dots & \varphi'_m(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_m^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

### 2.1.5 Фундаментальная система решения

#### Определение фундаментальной системы решений однородного линейного уравнения

Фундаментальной системой решений однородного линейного уравнения  $n$ -го порядка  $l(y) = 0$  называются функции  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ , являющиеся линейно независимыми решениями уравнения.

### 2.1.6 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

#### Определение однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами

Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = 0,$$

где  $a_0, \dots, a_n$  — заданные числа.

## **Определение неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами**

Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x),$$

где  $a_0, \dots, a_n$  — заданные числа.

### **2.1.7 Необходимое условие линейной зависимости**

#### **Теорема (необходимое условие линейной зависимости)**

Если функции  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  — линейно зависимы на  $[a, b]$ . Тогда их определитель вронского тождественно равен нулю.

$$\mathbf{W} \equiv 0$$

Доказательство: нужно знать для зачёта.

### **2.1.8 Условие линейной независимости решений**

Рассмотрим однородное линейное уравнение:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_m(x)y = 0; \quad a \leq x \leq b \quad (2)$$

#### **Теорема (условие линейной независимости решений линейного уравнения)**

Пусть  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  — линейно независимые решения уравнения (5). Тогда

$$\forall x \in [a, b] \quad \mathbf{W} \neq 0$$

Доказательство: нужно знать для зачёта.

### **2.1.9 Свойство линейности и следствия из него**

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_m(x)y = f(x)$$

Обозначим  $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_m(x)y$  как  $l(y)$ .

#### **Свойство линейности $l(y)$**

$$l(y_1(x) + y_2(x)) = l(y_1(x)) + l(y_2(x));$$

$$l\left(\sum_{k=1}^m \alpha_k \varphi_k(x)\right) = \sum_{k=1}^m \alpha_k l(\varphi_k(x))$$

### **Следствие свойства линейности**

Пусть  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  — решения уравнения  $l(y) = 0$ . Тогда  $\varphi^o(x) = \alpha_1\varphi_1(x) + \dots + \alpha_m\varphi_m(x)$  тоже является решением этого уравнения.

Доказательство: нужно знать для зачёта.

### **2.1.10 Существование ФСР**

#### **Теорема (о существовании ФСР у любого однородного линейного уравнения)**

Фундаментальная система решений существует для любого однородного линейного уравнения.

Доказательство: нужно знать для зачёта.

### **2.1.11 Вид общего решения однородного линейного уравнения**

Рассмотрим однородное линейное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_m(x)y = 0; \quad a \leq x \leq b \quad (3)$$

или

$$l(y) = 0$$

#### **Теорема (вид общего решения однородного линейного уравнения)**

Пусть  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  — ФСР. Тогда общее решение уравнения (5) имеет вид:

$$y = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x),$$

где  $c_1, \dots, c_n$  — произвольные константы.

Доказательство: нужно знать для зачёта.

### **2.1.12 Вид общего решения неоднородного линейного уравнения**

Рассмотрим неоднородное линейное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_m(x)y = f(x); \quad a \leq x \leq b \quad (4)$$

или

$$l(y) = f(x)$$

и соответствующее ему однородное линейное уравнение

$$l(y) = 0 \quad (5)$$

#### **Теорема (вид общего решения неоднородного линейного уравнения)**

Пусть  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  — ФСР (5) и  $y_{\text{ч}}(x)$  — частное решение (4). Тогда общее решение уравнения (4) имеет вид:

$$y = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) + y_{\text{ч}}(x),$$

где  $c_1, \dots, c_n$  — произвольные константы.

Доказательство: нужно знать для зачёта.

## 2.2 Алгоритм метода вариации нахождения частного решения

### Метод вариации произвольных постоянных нахождения $y_{\text{ч}}(x)$

По теореме о виде общего решения линейного однородного уравнения  $y_0 = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x)$  — общее решение уравнения  $l(y) = 0$ .

Будем искать частное решение  $y_{\text{ч}}(x)$  в виде:

$$y_{\text{ч}}(x) = c_1(x)\varphi_1(x) + \dots + c_n(x)\varphi_n(x),$$

где  $c_1(x), \dots, c_n(x)$  — пока неизвестные функции.

Рассмотрим систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} c'_1(x)\varphi_1(x) + \dots + c'_n(x)\varphi_n(x) = 0 \\ c'_1(x)\varphi'_1(x) + \dots + c'_n(x)\varphi'_n(x) = 0 \\ c'_1(x)\varphi''_1(x) + \dots + c'_n(x)\varphi''_n(x) = 0 \\ \dots \\ c'_1(x)\varphi^{(n-2)}_1(x) + \dots + c'_n(x)\varphi^{(n-2)}_n(x) = 0 \\ c'_1(x)\varphi^{(n-1)}_1(x) + \dots + c'_n(x)\varphi^{(n-1)}_n(x) = f(x) \end{array} \right. \quad (1)$$

Пусть  $a \leq x \leq b$ ,  $x$  — фиксированное  $\Rightarrow$  (1) — линейная алгебраическая система относительно  $c'_i(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

$\Delta = \mathbf{W}(x) \Rightarrow \mathbf{W}(x) \neq 0 \Rightarrow$  по теореме из алгебры (1) имеет единственное решение.

По формулам Крамера:

$$c'_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \dots \\ \dots & \dots \\ f & \dots \end{vmatrix}}{\mathbf{W}} = \frac{\mathbf{W}_1(x)}{\mathbf{W}(x)} \quad \dots$$

$$c'_n(x) = \frac{\begin{vmatrix} \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ \dots & f \end{vmatrix}}{\mathbf{W}} = \frac{\mathbf{W}_n(x)}{\mathbf{W}(x)} \quad (2)$$

Таким образом,  $c_i'(x) \quad i = \overline{1, n}$  находится по формуле (2)  $\Rightarrow$

$$c_k(x) = \int \frac{\mathbf{W}_k(x)}{\mathbf{W}(x)} dx$$

## 2.3 Обоснование метода вариации

Рассмотрим частный случай  $n = 2$ :

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \quad (1)$$

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (2)$$

$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$  — ФСР (2).

$$\begin{aligned} y_0 &= c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) \\ y_{\text{q}} &= c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{cases} c_1'(x)\varphi_1(x) + c_2'(x)\varphi_2(x) = 0 \\ c_1'(x)\varphi_1'(x) + c_2'(x)\varphi_2'(x) = f(x) \end{cases} \quad (4)$$

$$c_1(x) = \int \frac{\mathbf{W}_1(x)}{\mathbf{W}(x)} dx \quad c_2(x) = \int \frac{\mathbf{W}_2(x)}{\mathbf{W}(x)} dx$$

Подставляем  $c_1(x)$  и  $c_2(x)$  в (3). Покажем, что полученное  $y_{\text{q}}$  является решением (1):

$$y_{\text{q}}' = c_1'(x)\varphi_1(x) + c_1(x)\varphi_1'(x) + c_2'(x)\varphi_2(x) + c_2(x)\varphi_2'(x) = c_1(x)\varphi_1'(x) + c_2(x)\varphi_2'(x)$$

$$\begin{aligned} y_{\text{q}}'' &= c_1'(x)\varphi_1'(x) + c_1\varphi_1''(x) + c_2'(x)\varphi_2'(x) + c_2(x)\varphi_2''(x) = \\ &= f(x) + c_1(x)\varphi_1''(x) + c_2(x)\varphi_2''(x) \end{aligned}$$

Подставляем в уравнение (1):

$$\begin{aligned} &f(x) + c_1(x)\varphi_1''(x) + c_2(x)\varphi_2''(x) + a_1(x)(c_1(x)\varphi_1'(x) + \\ &+ c_2(x)\varphi_2'(x)) + a_2(x)(c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x)) = \\ &= f(x) + c_1(x)(\varphi_1''(x) + a_1(x)\varphi_1'(x) + a_2(x)\varphi_1(x)) + \\ &+ a_2(x)(\varphi_2''(x) + a_1(x)\varphi_2'(x) + a_2(x)\varphi_2(x)) = f(x). \end{aligned}$$

То есть

$$l(y_{\text{q}}) \equiv f(x).$$

## 2.4 Пример: $y'' + w^2y = f(x)$

Пример:

Дано:

$$(1) y'' + w^2y = f(x); a \leq x \leq b$$

$$w > 0$$

Решение:

1. Решим соответствующее ОУ:

$$(2) y'' + w^2y = 0$$

Рассмотрим  $y_1(x) = \cos wx$

$$y_1'(x) = -w \sin wx$$

$$y_1''(x) = -w^2 \cos wx \Rightarrow \text{решение (2)}$$

$y_2 = \sin wx$  — также решение

Рассмотрим ТУ  $y_1 + u y_2$ :

$$W(y) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos wx & \sin wx \\ -w \sin wx & w \cos wx \end{vmatrix} = w (\cos^2 wx + \sin^2 wx) = w \Rightarrow$$

$\Rightarrow y_1 + u y_2$  образует ОУП  $\Rightarrow$  по Т. 5 общее решение (2) имеет вид

$$y = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx$$

2. Будем искать частное решение уравнения (1) методом вариации:

$$y_1(x) = C_1(x) \cos wx + C_2(x) \sin wx$$

Составим соответствующий метод вариации решения  $C_1$

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos wx + C_2'(x) \sin wx = 0 \\ C_1'(x)(-w \sin wx) + C_2'(x)(w \cos wx) = f(x) \end{cases} \quad \text{— определяем } C = \Delta = W = w$$

По формуле Крамера:

$$C_1'(x) = \frac{1}{w} \begin{vmatrix} 0 & \sin wx \\ f(x) & w \cos wx \end{vmatrix} = -\frac{1}{w} f(x) \sin wx$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{w} \begin{vmatrix} \cos wx & 0 \\ w \sin wx & f(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{w} f(x) \cos wx$$

Заданы суждем  $x_0 \in [a, b]$ , возвратом в консисте  $C_1$ :

$$C_1(x) = -\frac{1}{\omega} \int_{x_0}^x f(t) \sin \omega t dt$$

Аналогично:

$$C_2(x) = \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^x f(t) \cos \omega t dt$$

Получаем:

$$\begin{aligned} y_u &= \left( -\frac{1}{\omega} \int_{x_0}^x f(t) \sin \omega t dt \right) \cos \omega x + \left( \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^x f(t) \cos \omega t dt \right) \sin \omega x = \\ &= \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^x \left[ -\sin \omega t \cos \omega x + \cos \omega t \sin \omega x \right] f(t) dt = \\ &= \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^x f(t) \sin \omega(x-t) dt \end{aligned}$$

3. По теореме 6 общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x + \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^x f(t) \sin \omega(x-t) dt$$

## 2.5 Формула Остроградского-Лиувилля

Пусть  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  — решение однородного линейного уравнения:  $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$   $a \leq x \leq b$ .

Рассмотрим определитель Вронского:

$$\mathbf{W}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

### Сама формула

Пусть  $x_0$  произвольная точка из  $[a, b]$ . Тогда:

$$\mathbf{W}(x) = \mathbf{W}(x_0) e^{- \int_{x_0}^x a_1(t) dt}.$$

## 2.6 Метод Эйлера (случай простых корней)

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0, \quad (1)$$

где  $a_0, \dots, a_n$  — заданные числа.

**Метод Эйлера решения однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами (случай простых корней)**

1. Ищем частное решение уравнения (1) в виде

$$y(x) = e^{\lambda x},$$

$\lambda$  — число.

2. Вычисляем формулы

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lambda e^{\lambda x} \\ y''(x) &= \lambda^2 e^{\lambda x} \\ &\dots \\ y^{(n)}(x) &= \lambda^n e^{\lambda x} \end{aligned}$$

3. Подставляем эти формулы в (1):

$$a_0 \lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + a_n e^{\lambda x} \equiv 0$$

$$e^{\lambda x} (a_0 \lambda^n + \dots + a_n) \equiv 0$$

4. Так как  $e^{\lambda x} \neq 0$ , то

$$y = e^{\lambda x}$$

является решением уравнения (1)  $\iff \lambda$  является корнем алгебраического уравнения:

$$a_0 \lambda^n + \dots + a_n = 0 \quad (2)$$

5. (2) имеет  $n$  простых корней  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \implies$  функции  $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$  — решения (1).

6. Покажем, что  $\{e^{\lambda_k x}\}_{k=1}^n$  — ФСР (1)

Рассмотрим определитель Вронского  $\mathbf{W}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(x) &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{(n-1)} e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n^{(n-1)} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \dots e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{(n-1)} & \dots & \lambda_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \\ &= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \dots e^{\lambda_n x} \prod (\lambda_j - \lambda_k) \neq 0 \implies \end{aligned}$$

$\{e^{\lambda_k x}\}_{k=1}^n$  — ФСР уравнения (1)  $\implies$  общее решение (1) имеет вид:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}.$$

### 3 Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

#### 3.1 Интегрирование с помощью частного решения

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \quad (1)$$

1. Предположим, что  $g(x)$  — частное решение уравнения (1). Тогда переходим к новой неизвестной функции  $u(x)$  по формулам:

$$\begin{aligned} y(x) &= u(x)g(x) \\ y' &= u'g + ug' \\ y'' &= u''g + u'g' + ug'' = u''g + 2u'g' + ug'' \end{aligned} \quad (2)$$

2. Подставляем (2) в (1):

$$\begin{aligned} u''g + 2u'g' + ug'' + a_1(u'g + ug') + a_2ug &= 0 \\ u''g + (2g' + a_1g + a_1g')u' + (g'' + a_1g' + a_2g)u &= 0 \end{aligned}$$

$$g(x)u'' + b(x)u' = 0 \quad (3)$$

3. Замена  $v(x) = u'(x)$ . Тогда:

$$g(x)v' + b(x)v = 0 \quad (4)$$

4. Решаем (4):

$$v(x) = c_1\varphi_1(x)$$

общее решение (4).

5. Возвращаем замену:

$$u = c_1 \int \varphi_1(x)dx + c_2 = c_1\Phi(x) + c_2$$

- 6.

$$y = c_1\Phi(x)g(x) + c_2g(x)$$

общее решение уравнения (1).

### 3.2 Упрощение с помощью замены функции $y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{1}{4x^2})y = 0$

$$y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{1}{4x^2})y = 0$$

Пусть  $y(x) = u(x)z(x)$ . Тогда находим  $u(x)$  как решение уравнения

$$2u' + \frac{1}{x}$$

$$u' = -\frac{1}{2x}u$$

$$\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x}; \quad \ln|u| = -\frac{1}{2} \ln|x| \implies u = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}z(x); \quad u(x) = x^{-\frac{1}{2}}$$

Наше исходное уравнение примет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}z'' + (\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{x}(\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}} + (1 + \frac{1}{\sqrt{x}})\frac{1}{\sqrt{x}})z = 0$$

$$z'' + \frac{1}{\sqrt{x}}z = 0$$

$$z'' + z = 0$$

Ответ  $y = c_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + c_2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ .

### 3.3 Упрощение с помощью замены переменной $y'' + \frac{1}{2x}y' - \frac{1}{x}y = 0$

$$y'' + \frac{1}{2x}y' - \frac{1}{x}y = 0 \quad x \in (0, \infty)$$

Делаем замену  $x = \varphi(t)$ ,  $t = \psi(x)$ . Выбираем  $\psi$  как решение уравнения  $\psi' z'' + a_2(x)z = 0$ :

$$\psi''(x) + a_1(x)\psi'(x) = 0$$

Обозначим  $v(x) = \psi'(x)$ . Тогда:

$$v' + \frac{1}{2x}v = 0$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{2x} + c$$

$$\ln|v| = -\frac{1}{2} \ln|x| + c$$

$$v = x^{-\frac{1}{2}}$$

Возвращаем замену:

$$\psi'(x) = x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\psi(x) = 2\sqrt{x}$$

Возвращаем замену:

$$t = 2\sqrt{x}$$

$$x = \frac{t^2}{4}, \quad 0 < t < \infty$$

Исходное уравнение переходит в уравнение:

$$(\psi')^2(x)z'' - \frac{1}{x}z = 0$$

$$\frac{1}{x}z'' - \frac{1}{x}z = 0$$

$$z'' - z = 0$$

линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

Решаем методом Эйлера

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -1$$

$$\begin{cases} z_1 = e^{\lambda_1 t} = e^t \\ z_2 = e^{\lambda_2 t} = e^{-t} \end{cases}$$

$$z = c_1^t + c_2 e^{-t}$$

$$y(*) = y\left(\frac{t^2}{4}\right) = z(t) = z(2\sqrt{x}) = y(x)$$

Ответ:  $y = c_1 e^{2\sqrt{x}} + c_2 e^{-2\sqrt{x}}$ .

### 3.4 Метод степенных рядов $y'' - xy = 0$

Рассмотрим уравнение:

$$y'' - xy = 0$$

Метод степенных рядов:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

#### Теорема

Предположим, что  $a_1(x), a_2(x), f(x)$  раскладываются в степенной ряд на  $[a, b]$ . Тогда любое решение уравнения раскладывается в степенной ряд на  $[a, b]$ .

### Пример

$$\begin{cases} y'' - xy = 0, & -\infty < x < +\infty \\ y(0) = c_1, y'(0) = c_2 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

Решаем задачу Коши 1-5 методом степенных рядов.

Ищем решение в виде

$$\begin{cases} y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \dots; \\ y'(x) = a_1 + 2a_2x^2 + \cdots + na_nx^n + \cdots = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)na_{n+1}x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k \end{cases} \quad (3)$$

$$y(0)_{(*)} = a_0 = c_1$$

$$y'(0)_{(*)} = a_1 = c_2$$

Подставим (3) в (1).

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - x \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k &\equiv 0; \\ 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}x^k &\equiv 0; \\ 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}]x^n &\equiv 0 = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots \iff \\ \iff 2a_2 = 0; \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1} = 0; \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Таким образом,

$$a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Пусть  $k = n - 1$ . Тогда из (4):

$$a_{k+3} = \frac{a_k}{(k+3)(k+2)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Из (5):

$$a_2 = 0, a_5 = 0, a_8 = 0, \dots$$

$$a_0 = c_1, a_3 = \frac{c_1}{3 \cdot 2}, a_6 = \frac{a_3}{6 \cdot 5}, \dots, a_{3k} = \frac{c_1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (3k-1)3k} \quad k=0,1,\dots$$

$$a_1 = c_2, a_4 = \frac{a_1}{3 \cdot 4} = \frac{c_2}{3 \cdot 4}, a_7 = \frac{a_4}{6 \cdot 7}, \dots, a_{3k+1} = \frac{c_2}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (3k)(3k+1)}$$

Имеем:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k} x^{3k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k+1} x^{3k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k+2} x^{3k+2} =$$

$$= c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (3k-1)3k} + c_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k-1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (3k)(3k+1)} =$$

$$= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

ФСР для (1).

### 3.5 Алгоритм решения простейшей краевой задачи

Простейшая краевая задача имеет вид:

$$\begin{cases} y'' + q(x) = f(x), & a \leq x \leq b \\ y(a) = 0, y(b) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

#### Алгоритм решения краевой задачи 1-2

1. Решаем соответствующее однородное уравнение:

$$y'' + q(x)y = 0 \quad (3)$$

Находим его ФСР. Пусть  $y_1(x), y_2(x)$  — ФСР.

2. Находим  $y_{\text{ч}}(x)$  — частное решение уравнения (1) методом вариации.

3. Получаем общее решение (1)

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_{\text{ч}}(x)$$

4. Подставляем формулу из предыдущего пункта в краевые условия:

$$\begin{cases} c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) + y_{\text{ч}}(a) = 0 \\ c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b) + y_{\text{ч}}(b) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

(5) — линейная однородная система относительно  $c_1$  и  $c_2$ .

5. Вычисляем определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix}$$

6. Если  $\Delta \neq 0$ , то (5) имеет единственное решение, обозначим его

$$c_1^0, \quad c_2^0$$

В этом случае функция  $y(x) = c_1^0 y_1(x) + c_2^0 y_2(x) + y_{\text{ч}}$  является единственным решением краевой задачи.

7. Пусть  $\Delta = 0$ . Тогда возможны подслучаи:

- (а) (5) имеет бесконечно много решений, следовательно, задача 1-5 имеет также бесконечно много решений.
- (б) (5) не имеет ни одного решения, следовательно, задача 1-5 тоже не имеет решения.

### 3.6 Существование решения краевой задачи

Рассмотрим простейшую краевую задачу:

$$\begin{cases} y'' + q(x) = f(x), & a \leq x \leq b \\ y(a) = 0, y(b) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

Если соответствующая однородная задача:

$$\begin{cases} y'' + q(x)y = 0, & a \leq x \leq b \\ y(a) = 0, y(b) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$(4)$$

имеет только нулевое решение, то исходная задача 1-2 имеет единственное решение  $\forall f(x)$ .

Доказательство:

Предположим, что 3-4 имеет только нулевое решение. Применим предыдущий алгоритм к 3-4.

Пусть  $y_1(x), y_2(x), y_{\text{ч}}(x)$  — ФСР однородного уравнения.

$$y_{\text{ч}}(x) \equiv 0, y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

Подставляем в краевые условия:

$$\begin{cases} c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) = 0, & a \leq x \leq b \\ c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Вычисляем  $\Delta$  системы (5):

Если  $\Delta = 0$ , то однородная система (5) имеет бесконечно много решений  
 $\Rightarrow$  существует ненулевое решение 3-4  $\Rightarrow$  противоречие.

Значит,  $\Delta \neq 0 \Rightarrow$  решение 1-5 можно найти, и оно будет единственным.

## 4 Линейные системы

### 4.1 Определения

#### 4.1.1 Нормальная линейная система, её векторная запись

##### Нормальная неоднородная линейная система

Нормальная неоднородная линейная система имеет вид:

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ y'_2 = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\ \dots \\ y'_n = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases} \quad (1)$$

где  $x$  — независимая переменная  $a \leq x \leq b$ ,  $a_{ij}(x), f_i(x)$  — заданные непрерывные функции,  $y_i$  — неизвестные функции.

##### Векторная запись нормальной неоднородной линейной системы

Обозначим

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ & \dots & \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

По определению:

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} y'_1(x) \\ \dots \\ y'_n(x) \end{pmatrix}$$

$$A(x)Y(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x)y_1 + \dots + a_{1n}(x)y_n \\ \dots \\ a_{n1}(x)y_1 + \dots + a_{nn}(x)y_n \end{pmatrix}$$

$A(x)Y(x) + F(x)$  — вектор соответствующий правой части (1). Тогда

$$Y' = A(x)Y + F(X)$$

векторная запись (1).

##### Определение нормальной однородной линейной системы

Линейная система (1) называется однородной, если  $\forall f_n(x) = 0 \quad i = \overline{1, n}$

$$Y' = A(x)Y \quad (2)$$

или

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n \\ y'_2 = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n \\ \dots \\ y'_n = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n \end{cases} \quad (3)$$

где  $x$  — независимая переменная  $a \leq x \leq b$ ,  $a_{ij}(x)$  — заданные непрерывные функции,  $y_i$  — неизвестные функции.

#### 4.1.2 Решение системы

##### Определение решения нормальной линейной системы

Говорят, что дифференцируемые функции  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  образуют решение системы (1), если при подстановке их в уравнение вместо соответствующих  $y_i$  получается тождество:

$$y'_k = a_{k1}(x)\varphi_1(x) + \dots + a_{kn}\varphi_n(x) + f_k(x); \quad k = \overline{1, n}$$

В векторной форме: дифференцируемая функция

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \dots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}$$

является решением (1), если

$$\Phi'(x) = A(x)\Phi(x) + F(x)$$

#### 4.1.3 Задача Коши для системы

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ y'_2 = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\ \dots \\ y'_n = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases} \quad (4)$$

##### Определение задачи Коши нормальной линейной системы

Пусть  $x_0 \in [a, b]$ ,  $y_1^0, \dots, y_n^0$  — заданные числа.

Начальными условиями для системы (4) в точке  $x_0$  называются равенства:

$$y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0, \dots, y_n(x_0) = y_n^0 \quad (5)$$

Задача 4-5 называется задачей Коши для системы (4).

В векторной форме:

$$Y' = A(x)Y(x) + F(x), \quad Y(x_0) = Y^0,$$

где  $Y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \dots \\ y_n^0 \end{pmatrix}$ .

#### 4.1.4 Линейно зависимые и линейно независимые вектор-функции

##### Определение линейно зависимых вектор-функций

Пусть  $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x) \in R^n$ ,  $a \leq x \leq b$ . Эти вектор-функции называются линейно зависимыми на  $[a, b]$ , если:

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ — числа не все равные } 0 : \alpha_1\Phi_1(x) + \dots + \alpha_n\Phi_n(x) = \bar{0}$$

##### Определение линейно независимых вектор-функций

Пусть  $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x) \in R^n$ ,  $a \leq x \leq b$ . Эти вектор-функции называются линейно независимыми на  $[a, b]$ , если

$$\alpha_1\Phi_1(x) + \dots + \alpha_n\Phi_n(x) = \bar{0} \iff \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

#### 4.1.5 Определитель Вронского вектор-функций

##### Определение определителя Вронского вектор-функций

Пусть  $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x) \in R^n$ . Их определителем Вронского называется определитель

$$W = |\Phi_1(x)\Phi_2(x) \dots \Phi_n(x)|$$

#### 4.1.6 Фундаментальная система решений линейной системы

##### Определение фундаментальной системы решений нормальной линейной системы

Рассмотрим  $Y' = A(x)Y(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ ,  $Y(x) \in R^n$ ,  $A(x)$  размерности  $n \times n$ .

Линейно независимые решения  $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)$  называются фундаментальной системой решений.

#### 4.1.7 Фундаментальная матрица решений однородной системы

##### Определение фундаментальной матрицы решений нормальной однородной системы

Матрица  $T(x) = (Y_1(x)Y_2(x) \dots Y_n(x))$  называется фундаментальной матрицей для однородной системы  $Y' = A(X)Y(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , если

$$Y_1(x), \dots, Y_n(x) — \text{ФСР однородной системы.}$$

#### 4.1.8 Линейные системы с постоянными коэффициентами

**Определение однородной линейной системы с постоянными коэффициентами**

Линейная однородная система с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n \\ \dots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n \end{cases}$$

где  $a_{ij}$  — заданные числа.

В векторной форме:

$$Y' = AY$$

$$\text{где } A = (a_{ij})_{ij=1}^n, Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}.$$

#### 4.1.9 Собственные значения и собственные векторы матрицы

Пусть  $A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$  — числовая матрица.

Число  $\lambda$  называется собственным значением матрицы  $A$ , если существует вектор

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} \neq 0 \quad : \quad AV = \lambda V$$

А сам вектор  $V$  — называется собственным вектором матрицы  $A$ , соответствующим собственному значению  $\lambda$ .

#### 4.1.10 Матричная экспонента

$$E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \dots \quad (6)$$

**Определение матричной экспоненты**

Сумма ряда (6) обозначается

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

и называется матричной экспонентой.

## 4.2 Извинения

Я не успеваю всё качественно проверить и напечатать, хочу спать, приношу извинения за неудобства.

## 4.3 Теоремы, алгоритмы, примеры

### 4.3.1 Свойства решений однородной системы

Теорема 1:

Пусть вектора раз-очи  $\Phi_1(x), \dots, \Phi_m(x)$  – решения однородной системы:

$$(2) \quad Y' = A(x)Y$$

<sup>u</sup>  $c_1, c_1, \dots, c_m$  – произвольные коэффициенты. Тогда

$$\Phi(x) = \Phi_1(x)c_1 + \dots + \Phi_m(x)c_m \quad - \text{точка решение (2)}$$

Док-бо:

Рассмотрим  $\Phi'(x)$

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= c_1\Phi'_1(x) + \dots + c_m\Phi'_m(x) = \\ &\stackrel{\text{по условию}}{=} \underbrace{c_1A(x)\Phi_1(x)}_{\substack{+ \dots + \\ \underbrace{c_mA(x)\Phi_m(x)}}} = \\ &= A(x)(c_1\Phi_1(x) + \dots + c_m\Phi_m(x)) = \\ &= A(x)\Phi(x) \Rightarrow \Phi'(x) = A(x)\Phi(x) \square \end{aligned}$$

### 4.3.2 Необходимое условие линейной зависимости вектор-функций

Теорема 2:

Если  $\Phi_1(x), \dots, \Phi_m(x) \in \mathbb{R}^n$  – линейно зависимы на  $[a, b]$ , то их определитель Вранского  $W \in [a, b]$  равен 0

Док-бо:

Рассмотрим произвольный  $x \in [a, b]$  и рас-и  $W$ :

$$W = |\Phi_1(x) \Phi_2(x) \dots \Phi_m(x)|$$

Следует что определитель линейно зависимы (согласно условию)  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow W(x) \equiv 0 \quad \square$$

### 4.3.3 Условие линейной независимости решений однородной системы

Если единственность решения (3)  $\Phi(x) \equiv 0$ , то есть

$$\alpha_1\Phi_1(x) + \dots + \alpha_n\Phi_n(x) \equiv 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i = 0 \Rightarrow \text{противоречие} \quad \square$$

Теорема 3:

Пусть  $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)$  – линейно независимое решение ОС (1)  $Y' = A(x)Y$ ,  $x \in [a, b]$ .

Тогда:

$$\forall x \in [a, b] \quad W(x) \neq 0$$

Доказ. От противного. Предположим, что

$$\exists x_0 \in [a, b] \quad W(x_0) = 0.$$

По теореме из алгебры, это следы линейно зависимы, т.е.

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n - \text{числа не все равные нулю: } \alpha_1\Phi_1(x_0) + \dots + \alpha_n\Phi_n(x_0) = 0 \quad (2)$$

Обозначим, через  $\Phi(x) = \alpha_1\Phi_1(x) + \dots + \alpha_n\Phi_n(x)$  по теореме 1  $\Phi(x)$  – решение (1) в силу (2)  $\Phi(x_0) = 0$ , при этом имеем,  $\Phi(x)$  – линейное решение однородной задачи Коши:

$$(3) \quad Y' = A(x)Y, \quad Y(x_0) = 0$$

$\Phi(x) \equiv 0$  очевидно для решения (3)  $\Rightarrow$

### 4.3.4 Существование ФСР

Рассмотрим (1)  $Y' = A(x)Y$ ,  $a \leq x \leq b$ ,  $Y(x) \in \mathbb{R}^n$   $A(x)$  – разделим на  $n$ .

Теорема 4:

Исследование (1) всегда имеет ГПСР.

Доказательство:

Пусть  $x_0 \in [a, b]$ . Рассмотрим задачу Коши для системы

$$Y' = A(x)Y, \quad Y(x_0) = \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_1 \neq 0 - \text{множество ненулевое}$$

Обозначим  $\Phi_1(x)$  — решение этой ЗК. Рассмотрим задачу Коши:

$$Y' = A(x)Y, \quad Y(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_2 \neq 0 - \text{множество ненулевое}$$

Обозначим  $\Phi_2(x)$  — решение этой ЗК.

Рассмотрим задачу Коши:

$$Y' = A(x)Y, \quad Y(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_n \end{pmatrix}, \quad y_n \neq 0$$

Обозначим, через  $\Phi_n(x)$  — решение

Рассмотрим

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} \Phi_1(x_0) & \dots & \Phi_n(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} j_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & j_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & j_n \end{vmatrix} = j_1 \cdot j_2 \cdot \dots \cdot j_n \neq 0$$

Таким образом, решения  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$  — линейно независимы  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)$  — ГПСР.

Т.2.

### 4.3.5 Вид общего решения однородной системы

Теорема 5:

Пусть  $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)$  — ОСР системы

$$(1) \quad Y' = A(x)Y, \quad a \leq x \leq b$$

Тогда общее решение системы (1) имеет вид:

$$(2) \quad Y(x) = C_1 \Phi_1(x) + \dots + C_n \Phi_n(x), \quad \text{где } \forall C_i \quad i=1, n \text{ — произвольные константы.}$$

Док-во:

Очевидно, что при  $\forall C_i \quad i=1, n$  (2) будет решением (1) (согласно Т.1).

Покажем, что (2) содержит все решения (1):

Пусть  $Z(x)$  — произвольное решение (1),  $x_0 \in [a, b]$ .

Рассмотрим алгебраическую систему:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \Phi_{11}(x_0) + \alpha_2 \Phi_{12}(x_0) + \dots + \alpha_n \Phi_{1n}(x_0) = Z_1(x_0) \\ \alpha_1 \Phi_{21}(x_0) + \alpha_2 \Phi_{22}(x_0) + \dots + \alpha_n \Phi_{2n}(x_0) = Z_2(x_0) \\ \vdots \\ \alpha_1 \Phi_{n1}(x_0) + \alpha_2 \Phi_{n2}(x_0) + \dots + \alpha_n \Phi_{nn}(x_0) = Z_n(x_0) \end{array} \right.$$

т.е.  $\Phi_{ij}$  — коэффициенты  $\Phi_i(x)$  и  $Z_i$  коэффициенты  $Z(x)$

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$  — неизвестные величины.

Определимся этой системой:

$$\left| \begin{array}{cccc} \Phi_{11}(x_0) & \Phi_{12}(x_0) & \dots & \Phi_{1n}(x_0) \end{array} \right| = W(x_0) \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  (3) имеет решение  $C_1^*, \dots, C_n^*$

Обозначим  $\Phi(x) = C_1^* \Phi_1(x) + \dots + C_n^* \Phi_n(x)$  по Т.1  $\Phi(x)$  решение (1),  
а в силу (3)  $\Phi(x_0) = Z(x_0)$

Таким образом,  $\Phi(x)$  и  $Z(x)$  — решения (1) с одинаковыми н.у. в т.  $x_0$ ,

другими словами, являются решениями  $\exists K \quad Y' = A(x)Y, Y(x_0) = Z(x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow$  в силу свойств ЗК  $Z(x) \equiv \Phi(x_0) = C_1^* \Phi_1(x) + \dots + C_n^* \Phi_n(x)$

□

### 4.3.6 Вид общего решения неоднородной системы

$$(1) \quad Y' = A(x)Y + F(x), \quad a \leq x \leq b, \quad A = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n, \quad Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad Y' = A(x)Y$$

Т.5: Решение  $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)$  — опр (2). Тогда общее решение (2) имеет вид

$$(3) \quad Y = C_1\Phi_1(x) + \dots + C_n\Phi_n(x)$$

Теорема 6:

Пусть  $\{\Phi_k(x)\}_{k=1}^n$  — ПСР (2),  $Y_u$  — частное решение (1). Тогда общее решение (1) имеет вид

$$(4) \quad Y = C_1\Phi_1(x) + \dots + C_n\Phi_n(x) + Y_u$$

Доказ-бо:

Рассмотрим:

$$\begin{aligned} (C_1\Phi_1(x) + \dots + C_n\Phi_n(x) + Y_u)' &= C_1\Phi_1'(x) + \dots + C_n\Phi_n'(x) + Y_u'(x) = \\ &= C_1A(x)\Phi_1(x) + \dots + C_nA(x)\Phi_n(x) + \underbrace{A(x)Y_u(x)}_{Y_u'(x)} + F(x) = \\ &= A(x)[C_1\Phi_1(x) + \dots + C_n\Phi_n(x) + Y_u(x)] + F(x) \equiv (C_1\Phi_1(x) + \dots + C_n\Phi_n(x) + Y_u(x))' \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{для } c_1, \dots, c_n \text{ уравнение (4) является решением (1).} \end{aligned}$$

Доказано, что (4) содержит все решения (1);

Пусть  $Z(x)$  — произвольное решение (1), обозначим

$$W(x) = Z(x) - Y_u(x)$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} W'(x) &= Z'(x) - Y_u'(x) \equiv A(x)Z(x) + F(x) - (A(x)Y_u(x) + F(x)) = \\ &= A(x)[Z(x) - Y_u(x)] \Rightarrow W(x) — решение (2) при \\ \text{теореме 5} \quad \exists c_1, \dots, c_n \quad \underbrace{W(x)}_{Z(x) - Y_u(x)} = C_1\Phi_1(x) + \dots + C_n\Phi_n(x); \end{aligned}$$

$$Z(x) = \sum_{k=1}^n C_k\Phi_k(x) + Y_u(x) \Rightarrow Z \text{ является общим решением (4),}$$

известное (u) — общее решение.  $\square$

### 4.3.7 Свойства фундаментальных матриц

Свойства фундаментальной матрицы:

- Пусть  $T(x)$  - фунд. ма-ца,  $a \leq x \leq b$ . Тогда  
 $\forall x \in [a, b] \quad \exists T^{-1}(x)$   
 В самом деле  
 $\det T(x) = W(x) \neq 0 \Rightarrow \exists T^{-1}(x)$
- $T'(x) = A(x)T(x)$   
 В самом деле  $T'(x) = (Y_1'(x), \dots, Y_n'(x)) = (A(x)Y_1(x) \dots A(x)Y_n(x)) \odot$   
 $AB = \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)_{i,j=1}^n$   
 если  $B = (B_1 \dots B_n)$ , то  $AB = (AB_1 \dots AB_n)$   
 $\Leftrightarrow A(x)(Y_1 \dots Y_n) = A(x)T(x)$
- Пусть  $T(x) - \Phi M(2) \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_n \end{pmatrix}$ . Тогда  
 общее решение (2) и сю можно представить  
 $Y = T(x)C$   
 В самом деле  
 $T(x)C = (Y_1 \dots Y_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1 Y_1 + c_2 Y_2(x) + \dots + c_n Y_n(x)$

### 4.3.8 Метод вариации нахождения частного решения

- (1)  $Y' = A(x)Y + F(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ ,  $A = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n$   
 Использование  $Y_n(x)$  (1) методом вариации произвольных постоянных  
 Пусть  $Y_1(x), \dots, Y_n(x)$  -  $\Phi CP$  совб. однородной системы (2)  $Y' = A(x)Y$   
 $Y_0 = c_1 Y_1(x) + c_n Y_n(x)$   
 Запишем  $Y_n(x)$  в виде  
 $Y_n(x) = c_1 C(x) Y_1(x) + \dots + c_n C(x) Y_n(x) \stackrel{\text{об-603}}{=} T(x) C(x)$ ,  
 где  $T(x) = (Y_1(x) \dots Y_n(x))$

$$(3) \quad Y_u = T(x) C(x)$$

$$Y'_u(x) = T'(x) C(x) + T(x) C'(x)$$

Подставим эти формулы в (1):

$$T'(x) C(x) + T(x) C'(x) = A(x) T(x) C(x);$$

Совсемично идем к (2):

$$\begin{aligned} A(x) T(x) C(x) + T(x) C'(x) &= A(x) T(x) C(x) + F(x) \\ T^{-1}(x) \cdot | T(x) C'(x) &= F(x) \\ \underbrace{T^{-1}(x) T(y) C'(y)}_E &= T^{-1}(x) F(x); \\ C'(x) &= T^{-1}(x) F(x) \Rightarrow C(x) = \int_{x_0}^x T^{-1}(t) F(t) dt, \quad x_0 \in [a, b] \end{aligned}$$

Подставляем в (3) и получаем

$$Y_u = T(x) \int_{x_0}^x T^{-1}(t) F(t) dt$$

### 4.3.9 Формула Коши

#### Формула Коши.

Задача Коши:

$$(1) \quad \begin{cases} y'_1 = a_{11}(x)y_1 + \dots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \quad y_1(x_0) = y_1^0 \\ y'_2 = a_{21}(x)y_1 + \dots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x), \quad y_2(x_0) = y_2^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y' = A(x)y + F(x), \\ y(x_0) = y^0 = (y_1^0, y_2^0) \end{cases}$$

Искомые  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  — п. с. п. для систем  $y' = A(x)y$ . Но между варияциями находятся  $y_2(x) = T(x) \int T^{-1}(x) F(x) dx = T(x) \int_{x_0}^x T^{-1}(t) F(t) dt$  — р. реш.  $y' = A(x)y + F(x)$ .

По п. 5 одн. реш. системы  $y' = A(x)y + F(x)$  имеем вид

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) + y_2(x), \text{ или } y(x) = T(x) c + T(x) \int_{x_0}^x T^{-1}(t) F(t) dt \quad (2).$$

Проверим эту п-ую в нач. усло.  $y(x_0) = y^0: T(x_0)c = y^0 \Rightarrow c = T^{-1}(x_0)y^0 \Rightarrow$   
→ н.д.см. в (2):  $y(x) = T(x)T^{-1}(x_0)y^0 + T(x) \int_{x_0}^x T^{-1}(t) F(t) dt \quad (3)$ .

(3) — г.т.м. реш. задачи Коши (1), (3) — формула Коши.

### 4.3.10 Нахождение собственных значений и собственных векторов матрицы

Нахождение собственного значения и собственных векторов.

Пусть  $V$  - с. в. с. з.  $\lambda$ , т.е.  $AV = \lambda V$ ;

$$(A - \lambda E)V = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad \begin{cases} (a_{11} - \lambda)v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1n}v_n = 0 \\ a_{21}v_1 + (a_{22} - \lambda)v_2 + \dots + a_{2n}v_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)v_n = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{множества} \\ \text{однородная} \\ \text{алгебраическая} \\ \text{система} \\ \text{относительно } v_1, \dots, v_n \end{array}$$

Т.к.  $V \neq 0$ , то система (1) имеет не平凡ое решение  $\Rightarrow$  ее определяет

$$\Delta = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-1)^n \lambda^n + a_{11}\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}a_{nn} + (-1)^n \Delta = 0 \quad (2)$$

Задача: собственное значение  $\lambda$  должно быть корнем ур-ия (2).

### 4.3.11 Метод Эйлера (случай простых собственных значений)(включая лемму)

Рассмотрим:

$$Y' = AY \quad (1), \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = (a_{ij})_{n,n}$$

Метод Эйлера решения (1)

Идея: Будем искать частное решение нашей системы в виде  $Y = e^{\lambda x} V = \begin{pmatrix} e^{\lambda x} v_1 \\ e^{\lambda x} v_2 \\ \vdots \\ e^{\lambda x} v_n \end{pmatrix}$ , где  $\lambda$  - пока неизвестное число, а  $V$  - пока неизвестный числовый вектор

Вычислим  $Y'(x) = \lambda e^{\lambda x} V$

Подставляем эти формулы в систему (1):

$$\lambda e^{\lambda x} V = A(e^{\lambda x} V);$$

$$\lambda e^{\lambda x} V = e^{\lambda x} AV$$

$$e^{\lambda x} \neq 0 \Rightarrow \lambda V = AV$$

или

$$(2) \quad AV = \lambda V$$

Вывод, чтобы  $Y$  - было решением системы (1)  $\Leftrightarrow$  когда выполняется (2),  
причем  $V \neq 0$ .  $\Leftrightarrow$  сначала отыщемо и (2)  $\lambda$  - с.з.  $A$  и  $V$  - с.в.

Случай простых собственных значений:

Пусть  $p(\lambda) = |A - \lambda E|$ .

Предположим, что характеристическое ур-ие  $p(\lambda) = 0$   
имеет н различныи корни:  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

Найдем соответствующие собственные вектора:

$$V_1 \sim \pi_1$$

$$\vdots$$

$$V_n \sim \pi_n$$

Составим методом Эйлера все наше и частные решения.

$Y_1(x) = e^{\lambda_1 x} V_1,$	- решения (1)
$Y_n(x) = e^{\lambda_n x} V_n.$	

### 4.3.12 Пример $Y' = AY$

Пример:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 - y_3 \\ y_2' = -y_1 + y_2 + y_3 \\ y_3' = y_1 - y_3 \end{cases} \Leftrightarrow Y' = AY$$

Решаем методом Эйлера:

Рассмотрим матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Вычисляем характеристическое ур-ие:

$$|A - \lambda E| = 0 ;$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 ;$$

$$(1-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) + 1(-2)(1) + 0 - (1)(1-\lambda)(-1) - (-1)(-2)(-1-\lambda) =$$

$$= ((1-\lambda+\lambda^2) - 2)(-1-\lambda) - 2 + 1 - \lambda = (-1 - 2\lambda + \lambda^2)(-1-\lambda) - 1 - \lambda =$$

$$= \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^2 - \lambda^3 - \lambda = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda$$

$$\lambda_1 = 0; \lambda_2 = -1; \lambda_3 = 2$$

Найти собственный вектор соответствующий собственному значению  $\lambda_1$ .

Решение системы

$$(A - \lambda_1 E) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} v_1 - 2v_2 - v_3 = 0 \\ -v_1 + 2v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 - 2v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ v_2 = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ v_2 = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_1 = v_3 \\ v_1 = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = 0 \\ v_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 E) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2v_1 - 2v_2 - v_3 = 0 \\ -v_1 + 2v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2v_2 + v_3 = 0 \\ 2v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = -2v_2 \\ v_3 = 2v_2 \\ v_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ v_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda_3 E) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2v_1 - 2v_2 - v_3 = 0 \\ -v_1 + 2v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 - 3v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2v_2 - 4v_3 = 0 \\ -2v_2 - 2v_3 = 0 \\ v_1 = 3v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = -2v_3 \\ v_2 = -2v_3 \\ v_1 = 3v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = -2v_3 \\ v_2 = -2v_3 \\ v_1 = 3v_3 \end{cases} \Rightarrow V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Базисная система:

$$V_1 = e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, V_2 = e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, V_3 = e^{2x} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение:

$$Y = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-x} \\ -2e^{-x} \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 3e^{2x} \\ -2e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + 3C_3 e^{2x} \\ C_2 e^{-x} - 2C_3 e^{2x} \\ C_1 - 2C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$\text{Отсюда: } Y_1 = C_1 + 3C_3 e^{2x}, Y_2 = C_2 e^{-x} - 2C_3 e^{2x}, Y_3 = C_1 - 2C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$$

### 4.3.13 Лемма $|a_{ij}^{(m)}| \leq n^{m-1} d^m$

доказательство:

Справедливо неравенство:

$$(2) |a_{ij}^{(k)}| \leq n^{k-1} d^k, \text{ где } d = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|; k=1, 2, \dots$$

Док-во: Рассмотрим по индукции:

Пусть  $k=1$   $|a_{ij}| \leq d$  — очевидно выполняется

Предположим, что (2) справедливо для некоторого  $k$ .

Рассмотрим, что  $k$  справедливо для  $k+1$ :

Рассмотрим:

$$|a_{ij}^{(k+1)}| = \left| \sum_{l=1}^n a_{il}^{(k)} a_{lj} \right| \leq \sum_{l=1}^n |a_{il}^{(k)}| |a_{lj}| \stackrel{d^k}{\leq} d^k n^{k-1} d^k d = n d^{k+1}$$

Таким образом:

$$|a_{ij}^{(k+1)}| \leq n^k d^{k+1} \quad \square$$

### 4.3.14 Существование $e^A$

$$(1) E + A + \frac{1}{2!} A^2 + \cdots + \frac{1}{n!} A^n + \dots$$

Теорема 7.

Ряд (1)сходится при любой матрице  $A$ .

Док-во:

По определению сходимости (1) надо доказать, что

$$\forall i \in I, j \in N \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{\left( s_{ij} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} a_{ij}^{(k)} \right)}_{s_{ij}^{(m)}}$$

Очевидно, что  $i, j$  — ранжированные индексы.

Заметим, что  $s_{ij}^{(m)}$  — это частичные суммы числового ряда (3)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{ij}^{(k)}}{k!}$

Таким образом, надо доказать, что (3) — сходится. Будем использовать признак конvergence:

Рассмотрим  $\left| \frac{a_n(k)}{k!} \right| \leq \frac{1}{k!} n^{k-1} d^k$

следовательно, ряд (3) монотонно убывает

$$(4) \quad 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} n^{k-1} d^k =$$

$$= 1 + \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nd)^k}{k!} \right) \xrightarrow{\text{сходится}} = 1 + \frac{1}{n} (e^{nd} - 1)$$

следовательно, (3) сходится по признаку монотонности.

□

### 4.3.15 $e^{Ax}$ — фундаментальная матрица системы $Y' = AY$ .

Рассмотрим однородную систему с постоянными коэффициентами:

$$(1) \quad Y' = AY, \quad x \in \mathbb{R}, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^n, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

Теорема 8:

Матрица  $e^{Ax}$  является фундаментальной матрицей системы (1).

Доказательство:

$$\text{Пусть } e^{Ax} = (Y_1(x) \ Y_2(x) \ \dots \ Y_n(x))$$

Покажем, что  $Y_1(x), \dots, Y_n(x)$  образуют ФСР (1):

Рассмотрим  $e^{Ax} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k$ ,  $x$  — переменная  
степенной ряда, сходящийся для  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\text{По свойству степенных рядов существует } \frac{d}{dx} e^{Ax} = \frac{d}{dx} (E + xA + \dots + \frac{x^k}{k!} A^k + \dots) = \\ &= A + xA^2 + \frac{x^2}{2!} A^3 + \dots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} A^k + \dots = A + xA^2 + \frac{x^2}{2!} A^3 + \dots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} A^k + \dots = \\ &= A(E + xA + \frac{x^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} A^{k-1} + \dots) = Ae^{Ax} \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dx} e^{Ax} = Ae^{Ax};$$

$$(Y'_1(x) \ Y'_2(x) \ \dots \ Y'_n(x)) = A(Y_1(x) \ Y_2(x) \ \dots \ Y_n(x));$$

$$(Y'_1(x) \ Y'_2(x) \ \dots \ Y'_n(x)) = (AY_1(x) \ AY_2(x) \ \dots \ AY_n(x));$$

$$Y'_j(x) = AY_j(x), \quad j = 1, \dots, n \quad \text{□}$$

□  $Y_1(x), \dots, Y_n(x)$  — решение (1)

Покажем, что они именно независимы, то есть образуют ФСР:

Рассмотрим их определитель в комплексной:

$$W(x) = \begin{vmatrix} Y_1(x) & Y_2(x) & \dots & Y_n(x) \end{vmatrix} = \det e^{Ax} \Big|_{x=0} = \det e^0 = \det E = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow Y_1(0), \dots, Y_n(0)$  - ПСР  $\Rightarrow e^{Ax}$  - фундаментальная матрица

□

### 4.3.16 Формула Коши для линейных систем с постоянными коэффициентами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$e^{Ax} = E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^k + \dots$$

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ y'_n = a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases} \Leftrightarrow Y' = AY, \quad e^{Ax} - \text{решение.} \quad \text{мат-ва этой системы}$$

Формула Коши решения ЛС с ПК:

Рассмотрим:

$$(1) Y' = AY + F(x), \quad A = (a_{ij})_{ij=1}^n, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

Была получена Коши для произвольной линейной системы:

$$Y' = A(x)Y + F(x), \quad -\infty < x < \infty$$

Новое решение этой системы равно:

$$Y(x) = T(x)T^{-1}(x_0)Y(0) + T(x) \int_{x_0}^x T^{-1}(t)F(t)dt$$

В нашем случае (1):

$$x_0 = 0, \quad T(x) = e^{Ax}$$

По формуле Коши наше решение (1) даётся формулой:

$$Y(x) = e^{Ax} (e^0)^{-1}Y(0) + e^{Ax} \int_0^x (e^{At})^{-1}F(t)dt =$$

$$= e^{Ax} Y(0) + \int_0^x e^{Ax} e^{-At} F(t)dt = e^{Ax} Y(0) + \int_0^x e^{A(x-t)} F(t)dt$$

$e^{Ax} Y(0) + \int_0^x e^{A(x-t)} F(t)dt$

### 4.3.17 Пример: нахождение $e^A$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad e^A = ?$$

Решение:

Рассмотрим ОЛСПК для

$$(1) \quad Y' = AY \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

Решаем (1) методом Эйлера:

1. Найдем собственное значение матрицы  $A$ :

Рассмотрим  $\lambda$ -ое ур-е для  $A$

$$\det(A - \lambda E) = 0 ;$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$8 - 6\lambda + \lambda^2 - 3 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

$$\mathcal{D} = 36 - 20 = 4^2$$

$$\lambda_1 = \frac{6+4}{2} = 5, \quad \lambda_2 = \frac{6-4}{2} = 1 \quad \text{— собственные значения } A$$

2. Найдем собственный вектор  $V$  соответствующий  $\lambda$ .

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$v_1, v_2$  — образуют начальное решение системы

$$(A - \lambda_1 E) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 0 \\ 3v_1 + 3v_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = -1 \\ v_2 = 1 \end{cases}$$

Таким образом,  $V = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , собственный вектор  $\sim \lambda_1$

Методом C.B. для  $\pi_2$

$$(A - \pi_2 E) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} -3v_1 + v_2 = 0 \\ 3v_1 - v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_2 = 3 \end{cases}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Вычисляем ФПР для (1):

$$Y_1 = e^{x_1 x} V_1 = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix}$$

$$Y_2 = e^{x_2 x} V_2 = \begin{pmatrix} e^{5x} \\ 3e^{5x} \end{pmatrix}$$

4. Общее решение систем (1):

$$Y = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) = C_1 \begin{pmatrix} e^{-x} \\ e^x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{5x} \\ 3e^{5x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x} \\ C_1 e^x + 3C_2 e^{5x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

Общее решение (1)

$$y_1(x) = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x}$$

$$y_2(x) = C_1 e^x + 3C_2 e^{5x}$$

5.  $e^A = ?$

6. Рассмотрим  $e^{Ax} = \begin{pmatrix} z_1(x) & z_2(x) \end{pmatrix}$  — общее решение системы (1),

т.е.  $z_1(x), z_2(x)$  — решение (1)

$$\text{Если } x=0, \text{ то } e^0 = E = \begin{pmatrix} z_1(0) & z_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow z_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Найдем  $z_1(x)$ :

$$z_1(x) — \text{решение, } y_1 — \text{не нач-е уравнения} \Rightarrow z_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

т.е. координаты  $z_1(x)$  — единичное решение задачи Коши

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2, & y_1(0) = 1 \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2, & y_2(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x} \\ y_2 = C_1 e^x + 3C_2 e^{5x} \end{cases}$$

Последуем (\*) в систему

$$\begin{cases} y_1(0) = -c_1 + c_2 = 1 \\ y_2(0) = c_1 + 3c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1^0 = -\frac{3}{4} \\ c_2^0 = \frac{1}{4}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y_1^0 &= \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{5x} \\ y_2^0 &= -\frac{3}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{5x} \end{aligned} \Rightarrow Z_1(x) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{5x} \\ -\frac{3}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{5x} \end{pmatrix}$$

Найдём  $Z_2(x)$

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2, \quad y_1(0) = 0 \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2, \quad y_2(0) = 1 \end{cases} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} y_1 = -c_1 e^x + c_2 e^{5x} \\ y_2 = c_1 e^x + 3c_2 e^{5x} \end{cases}$$

$$Z_2(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{5x} \\ \frac{1}{4}e^x + \frac{3}{4}e^{5x} \end{pmatrix}$$

Таким образом,

$$e^{Ax} = (Z_1(x), Z_2(x)) \Big|_{x=1} = (Z_1(1), Z_2(1)) = e^A$$

$$\text{Оператор: } e^A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}e + \frac{1}{4}e^5 & -\frac{1}{4}e + \frac{1}{4}e^5 \\ -\frac{3}{4}e + \frac{3}{4}e^5 & \frac{1}{4}e + \frac{3}{4}e^5 \end{pmatrix}$$