

Содержание

1	Длина кривой. Определение криволинейных интегралов первого и второго рода по параметризованной гладкой прямой.	3
2	Условия существования криволинейных интегралов.	5
3	Замена параметра в криволинейном интеграле первого рода.	6
4	Ориентированная гладкая кривая и криволинейный интеграл второго рода по ней.	7
5	Формула Грина.	8
6	Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.	11
7	Гладкая поверхность. Ориентация поверхности. Площадь поверхности.	11
8	Поверхностный интеграл первого рода и теорема о его существовании.	14
9	Поверхностный интеграл второго рода и его свойства.	17
10	Формула Стокса.	19
11	Формула Остроградского-Гаусса.	21
12	Тригонометрическая система. Ортогональность тригонометрической системы и свойства интеграла от периодической функции.	23
13	Тригонометрический ряд. Коэффициенты Фурье и ряд Фурье. Ядро Дирихле.	24
14	Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом Дирихле.	25
15	Теорема Римана-Лебега	26
16	Принцип локализации Римана.	26
17	Признак Дини поточечной сходимости рядов Фурье и три следствия.	26

18	Некоторые особенности рядов Фурье: ряды Фурье чётных и нечётных функций, разложение в ряд Фурье на промежутке $[0, 2\pi]$, разложение в ряд Фурье на промежутке $[-l, l]$.	27
19	Средние Фейера и их представление интегралом Фейера.	30
20	Теорема о суммируемости ряда Фурье методом средних арифметических в точках разрыва.	31
21	Теорема Фейера.	32
22	Теорема Вейштрасса о равномерном приближении непрерывной 2π -периодической функции тригонометрическими многочленами.	32
23	Теорема Вейштрасса о равномерном приближении непрерывной на отрезке функции алгебраическими многочленами.	32
24	Средне квадратичное отклонение, теорема о наилучшем приближении и неравенство Бесселя.	32
25	Равенство Парсеваля. Сходимость ряда Фурье в среднем квадратичном.	33
26	Полнота тригонометрической системы.	34

1 Длина кривой. Определение криволинейных интегралов первого и второго рода по параметризованной гладкой прямой.

1. Теорема о длине кривой:

Если функция $\bar{\gamma}$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную $\bar{\gamma}' = (\gamma'_1, \gamma'_2)$, то кривая $L = L_{\bar{\gamma}}$ спрямляема и её длина S выражается равенством

$$S = \int_a^b |\bar{\gamma}'(t)| dt.$$

Доказательство:

Для любого разбиения $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ отрезка $[a, b]$ имеем

$$\sum_{i=1}^n |\bar{\gamma}(t_i) - \bar{\gamma}(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \bar{\gamma}'(t) dt \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\bar{\gamma}'(t)| dt = \int_a^b |\bar{\gamma}'(t)| dt.$$

Переходя к верхней грани по всевозможным разбиениям отрезка, получим неравенство

$$S \leq \int_a^b |\bar{\gamma}'(t)| dt.$$

Докажем справедливость неравенства противоположного. Пусть $\epsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности функции $\bar{\gamma}' \exists \delta > 0 \quad (|s - t| < \delta \Rightarrow |\bar{\gamma}'(s) - \bar{\gamma}'(t)| < \epsilon)$. Возьмём разбиение отрезка с диаметром меньшим δ . Тогда $\forall t \in [t_{i-1}, t_i]$ имеем

$$|\bar{\gamma}'(t)| = |(\bar{\gamma}'(t) - \bar{\gamma}'(t_i)) + \bar{\gamma}'(t_i)| \leq |\bar{\gamma}'(t) - \bar{\gamma}'(t_i)| + |\bar{\gamma}'(t_i)| \leq |\bar{\gamma}'(t_i)| + \epsilon.$$

Далее получим

$$\begin{aligned} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\bar{\gamma}'(t)| dt - \epsilon \Delta t_i &\leq |\bar{\gamma}'(t_i)| \Delta t_i = \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\bar{\gamma}'(t) + \bar{\gamma}'(t_i) - \bar{\gamma}'(t)) dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \bar{\gamma}'(t) dt \right| + \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\bar{\gamma}'(t_i) - \bar{\gamma}'(t)) dt \right| \leq |\bar{\gamma}(t_i) - \bar{\gamma}(t_{i-1})| + \epsilon \Delta t_i \end{aligned}$$

и

$$\int_a^b |\bar{\gamma}'(t)| dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\bar{\gamma}'(t)| dt \leq \sum_{i=1}^n |\bar{\gamma}(t_i) - \bar{\gamma}(t_{i-1})| + 2\epsilon(b-a) \leq S + 2\epsilon(b-a)$$

Тогда в силу произвольности $\epsilon > 0$ имеем неравенство

$$\int_a^b |\vec{\gamma}'(t)| dt \leq S.$$

2-3. Определение криволинейных интегралов первого и второго рода по параметризованной гладкой прямой:

Пусть $L = L_{\vec{\gamma}}$ — гладкая кривая, а функции $f(x, y)$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$ определены на L . Пусть $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ — разбиение отрезка $[a, b]$, $M_k = (x_k, y_k) = (\gamma_1(t_k), \gamma_2(t_k))$, $k = 0, \dots, n$, и l_k — дуга $M_{k-1}M_k$ кривой L , $k = 1, \dots, n$.

На каждой дуге $M_{k-1}M_k$ выберем произвольную точку $N_k(\xi_k, \eta_k)$, соответствующую некоторому значению $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ параметра t .

Обозначим длину дуги $M_{k-1}M_k$ через

$$\Delta s_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\vec{\gamma}'(t)| dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} dt$$

и диаметром разбиения кривой L назовём число $\Delta = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta s_k$.

Определим интегральные суммы

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k.$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^n P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k.$$

$$\sigma_3 = \sum_{k=1}^n Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k,$$

где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$.

Определение криволинейных интегралов первого и второго рода:

Назовём число I_m пределом интегральных сумм σ_m ($m = 1, 2, 3$) при стремлении диаметра Δ к нулю, если

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad (\Delta < \delta \Rightarrow |\sigma - I_m| < \epsilon)$ (независимо от выбора точек N_k).

Число I_1 называют криволинейным интегралом первого рода от функции f по кривой L и обозначают символом

$$\int_L f(x, y) ds.$$

Число I_2 называют криволинейным интегралом второго рода от функции P по кривой L (в направлении от A до B) и обозначают символом

$$\int_L P(x, y) dx.$$

2 Условия существования криволинейных интегралов.

Условия существования криволинейных интегралов:

Если кривая $L = L_{\bar{\gamma}}$ является гладкой и функции f, P, Q непрерывны вдоль этой кривой, то все три криволинейных интеграла существуют и могут быть вычислены по формулам

$$\int_L f(x, y) dx = \int_a^b f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} dt, \quad (1)$$

$$\int_L P(x, y) dx = \int_a^b P(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \gamma_1'(t) dt, \quad (2)$$

$$\int_L Q(x, y) dy = \int_a^b Q(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \gamma_2'(t) dt \quad (3)$$

Доказательство:

Прежде всего отметим, что определенные интегралы, стоящие в правых частях формул, существуют, так как их подынтегральные функции непрерывны на отрезке $[a, b]$

Докажем первое равенство. Обозначим

$$I_1 = \int_a^b f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} dt$$

и оценим разность

$$\begin{aligned} \sigma_1 - I_1 &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta l_k - \int_a^b f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} dt = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (f(\gamma_1(\tau_k), \gamma_2(\tau_k)) - f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))) \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} dt \end{aligned}$$

Так как функции $\gamma_1'(t)$ и $\gamma_2'(t)$ непрерывны на $[a, b]$ и одновременно не обращаются в нуль, то

$$m = \min_{a \leq t \leq b} \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} > 0 \text{ и } \Delta s_k \geq m \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = m \Delta t_k.$$

Следовательно

$$\Delta t_k \leq \frac{1}{m} \Delta s_k$$

и при стремлении к нулю диаметра разбиения Δ кривой L стремятся к нулю и наибольшая из разностей $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$.

Поскольку функция $f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ равномерно непрерывна на отрезке $[a, b]$, то $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \Delta < \delta \Rightarrow$

$$|f(\gamma_1(\tau_k), \gamma_2(\tau_k)) - f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))| < \frac{\epsilon}{S},$$

где S — длина кривой L .

Тогда

$$|\sigma_1 - I_1| \leq \frac{\epsilon}{S} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} dt = \frac{\epsilon}{S} \sum_{k=1}^n \Delta s_k = \epsilon.$$

Таким образом мы доказали, что интегральные суммы σ_1 стремятся к числу I_1 при $\Delta \rightarrow 0$, то есть мы доказали первое равенство.

Для доказательства второго равенства оценим разность

$$\sigma_2 - I_2 = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (P(\gamma_1(\tau_k), \gamma_2(\tau_k)) - P(\gamma_1(t), \gamma_2(t))) \gamma_1'(t) dt.$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \Delta < \delta \Rightarrow$$

$$|P(\gamma_1(\tau_k), \gamma_2(\tau_k)) - P(\gamma_1(t), \gamma_2(t))| < \frac{\epsilon}{M(b-a)},$$

где $M = \max_{a \leq t \leq b} |\gamma_1'(t)|$. Тогда

$$|\sigma_2 - I_2| \leq \frac{\epsilon}{M(b-a)} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma_1'(t)| dt \leq \frac{\epsilon}{M(b-a)} M \sum_{k=1}^n \Delta t_k = \epsilon.$$

Это означает, что интегральные суммы $\sigma_2 \rightarrow I_2$ при $\Delta \rightarrow 0$, то есть мы доказали второе равенство.

Третье равенство доказывается аналогично.

3 Замена параметра в криволинейном интеграле первого рода.

Замена параметра в криволинейном интеграле первого рода:

Пусть $L = L_\gamma$ — гладкая кривая, функция $\bar{\gamma}$ определена на отрезке $[a, b]$, а функция ϕ определена на отрезке $[a_1, b_1]$, отображает его на отрезок $[a, b]$, имеет непрерывную производную и $\phi'(u) \neq 0 \quad \forall u \in [a_1, b_1]$.

Тогда функция ϕ' сохраняет знак на отрезке $[a_1, b_1]$ и функция ϕ является возрастающей, если $\phi(u) > 0$, и является убывающей, если $\phi(u) < 0$. Согласно правилу замены переменной в интеграле Римана имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} dt &= \int_a^b f(\bar{\gamma}(t)) |\bar{\gamma}'(t)| dt = \\ &= \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\bar{\gamma}(\phi(u))) |\bar{\gamma}'(\phi(u))| \phi'(u) du. \end{aligned}$$

Если $\phi'(u) > 0$, то $|\bar{\gamma}'(\phi(u))| \phi'(u) = |\bar{\gamma}'(\phi(u)) \phi'(u)| = |(\bar{\gamma} \circ \phi)'(u)|$, $\phi^{-1}(a) = a_1, \phi^{-1}(b) = b_1$

Если же $\phi'(u) < 0$, то $|\bar{\gamma}'(\phi(u))| \phi'(u) = -|\bar{\gamma}'(\phi(u)) \phi'(u)| = -|(\bar{\gamma} \circ \phi)'(u)|$, $\phi^{-1}(a) = b_1, \phi^{-1}(b) = a_1$.

Тогда в любом случае

$$\int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\bar{\gamma}(\phi(u))) |\bar{\gamma}'(\phi(u))| \phi'(u) du = \int_{a_1}^{b_1} f(\bar{\gamma}(\phi(u))) |(\bar{\gamma} \circ \phi)'(u)| du$$

Обозначим $\bar{\gamma}^*(u) = (\bar{\gamma} \circ \phi)(u)$. Очевидно, что вектор-функция $\bar{\gamma}^*$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a_1, b_1]$ и её производная ни в одной точке этого отрезка не равна вектору $(0, 0)$. Тогда вектор-функцию $\bar{\gamma}^*$ можно считать другим параметрическим представлением кривой L .

4 Ориентированная гладкая кривая и криволинейный интеграл второго рода по ней.

1. Понятие ориентированной гладкой кривой:

Пусть L - гладкая кривая. Две ее параметризации $L_{\bar{\gamma}}$, где $\bar{\gamma}$ определена на отрезке $[a, b]$, и $L_{\bar{\gamma}^}$, где $\bar{\gamma}^*$ определена на отрезке $[a_1, b_1]$, назовем положительно эквивалентными, если существует функция φ определенная на отрезке $[a_1, b_1]$, отображающая его на отрезок $[a, b]$, имеющая непрерывную производную с условием $\varphi'(u) > 0$ при всех $u \in [a_1, b_1]$, такая, что $\bar{\gamma}^* = (\bar{\gamma} \circ \varphi)$.*

Класс всех положительно эквивалентных друг другу параметризаций называют ориентированной гладкой кривой.

2. Понятие криволинейного интеграла второго рода по ориентированной гладкой кривой:

Криволинейный интеграл второго рода по ориентированной кривой определяют как интеграл по одной из ее параметризаций.

Пользуясь формулой замены переменной в интеграле Римана, легко показать, что данное определение корректно.

Обозначим одну из ориентаций гладкой кривой L через L^+ , а другую через L^- . Тогда справедливо равенство

$$\int_{L^+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = - \int_{L^-} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

5 Формула Грина.

1. Определение трапеции первого рода:

Множество D назовем трапецией первого рода, если

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \right\},$$

где функции φ_1, φ_2 - непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a, b]$.

2. Определение трапеции второго рода:

Множество D назовем трапецией второго рода, если

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \right\},$$

где функции ψ_1, ψ_2 - непрерывно дифференцируемые на отрезке $[c, d]$.

3. Формула Грина для трапеции первого рода:

(формула Грина для трапеции первого рода.) Пусть замкнутое множество D является трапецией первого рода, L - положительно ориентированная граница D , а функция P и ее частная производная $\frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывны на D . Тогда справедливо равенство

$$\oint_L P(x, y)dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)dx dy. \quad (49)$$

Доказательство. Пусть

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \right\},$$

где функции φ_1, φ_2 - непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a, b]$. Обозначим точки $A(a, \varphi_1(a))$, $B(b, \varphi_1(b))$, $E(b, \varphi_2(b))$, $F(a, \varphi_2(a))$. Тогда положительная ориентация границы L соответствует последовательности точек $ABEFA$ этого контура.

Согласно определению криволинейного интеграла второго рода имеем

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y)dx &= \int_a^b P(x, \varphi_1(x))dx, \\ \int_{EF} P(x, y)dx &= \int_b^a P(x, \varphi_2(x))dx = - \int_a^b P(x, \varphi_2(x))dx, \\ \int_{BE} P(x, y)dx &= 0, \quad \int_{FA} P(x, y)dx = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\oint_L P(x, y)dx = \int_a^b P(x, \varphi_1(x))dx - \int_a^b P(x, \varphi_2(x))dx.$$

С другой стороны, сводя двойной интеграл к повторному и используя формулу Ньютона-Лейбница, имеем

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)dx dy = \int_a^b P(x, \varphi_2(x))dx - \int_a^b P(x, \varphi_1(x))dx.$$

Таким образом справедливо равенство

$$\oint_L P(x, y)dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)dx dy.$$

□

4. Формула Грина для трапеции второго рода:

(формула Грина.) Пусть замкнутое множество D является элементарным замкнутым множеством и L - положительно ориентированная граница D , которая является простым контуром. Пусть функции P , Q и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны на D . Тогда справедливо равенство

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

5. Понятие плоского элементарного множества:

Плоское множество D назовем элементарным, если прямыми, параллельными координатным осям, его можно разбить на конечное число трапеций первого рода, а также на конечное число трапеций второго рода.

6. Формула Грина для замкнутого элементарного множества:

(формула Грина.) Пусть замкнутое множество D является элементарным замкнутым множеством и L - положительно ориентированная граница D , которая является простым контуром. Пусть функции P , Q и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны на D . Тогда справедливо равенство

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (51)$$

7. Понятие односвязной и многосвязной плоской области:

Плоскую область D называют **односвязной областью**, если она обладает следующим свойством: если простой замкнутый контур L целиком лежит в области D , то и область, ограниченная контуром L , целиком лежит в D . Плоскую область, не являющуюся односвязной, называют **многосвязной**.

8. Формула Грина для многосвязной области:

формулу Грина для многосвязной области

$$\oint_{L_0} Pdx + Qdy - \sum_{i=1}^n \oint_{L_i} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (52)$$

где все контуры L_i , $i = 0, 1, \dots, n$, обходятся против часовой стрелки.

6 Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования:

Для того чтобы криволинейный интеграл в области D не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы для любого кусочно гладкого контура L в D выполнялось равенство

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Доказательство: Пока ещё не доказал.

7 Гладкая поверхность. Ориентация поверхности. Площадь поверхности.

1. Понятие гладкой поверхности:

- 1) множество D является замкнутым ограниченным элементарным множеством, граница γ которого представляет собой простой кусочно гладкий контур, а отображение, задаваемое равенствами

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v). \end{cases} \quad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

взаимно однозначно на множестве внутренних точек множества D

- 2) функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ и их частные производные первого порядка непрерывны на множестве D вплоть до границы γ

- 3) хотя бы один из якобианов

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(z, x)}{D(u, v)}$$

отличен от нуля при любых значениях u и v

Поверхности, удовлетворяющие указанным трем условиям, будем называть кратко *гладкими поверхностями*.

2. Понятие ориентации поверхности:

Выделение одной из сторон поверхности Φ с помощью параметризации называется **ориентацией поверхности** Φ .

Для поверхности заданной явно уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, имеем

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = f(u, v). \end{cases} \quad (x, y) \in D.$$

Тогда

$$\tau'_u = (1, 0, f'_u), \quad \tau'_v = (0, 1, f'_v)$$

и

$$\tau'_u \times \tau'_v = (-f'_u, -f'_v, 1).$$

После нормировки получим

$$\cos \alpha = \frac{-f'_u}{\sqrt{1 + (f'_u)^2 + (f'_v)^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{-f'_v}{\sqrt{1 + (f'_u)^2 + (f'_v)^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_u)^2 + (f'_v)^2}},$$

Если поверхность, заданная неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, то вектор (F'_x, F'_y, F'_z) ортогонален к касательной плоскости. Следовательно,

$$\cos \alpha = \frac{F'_x}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{F'_y}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{F'_z}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}.$$

3. Понятие площади поверхности:

Предел $\sigma(T)$ при стремлении диаметра разбиения к нулю ($h \rightarrow 0$) называют **площадью поверхности** Φ . Обозначим ее через S .

В то же время сумма $\sigma(T)$ является интегральной суммой для двойного интеграла по области D от функции $|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|$. Таким образом, для площади поверхности Φ имеем равенство

$$S = \iint_D |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| dudv. \quad (11)$$

Поскольку

$$|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

то

$$S = \iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv. \quad (12)$$

Введем функции

$$E = (r'_u)^2 = (x'_u(u, v))^2 + (y'_u(u, v))^2 + (z'_u(u, v))^2,$$

$$F = r'_u r'_v = x'_u(u, v)x'_v(u, v) + y'_u(u, v)y'_v(u, v) + z'_u(u, v)z'_v(u, v),$$

$$G = (r'_v)^2 = (x'_v(u, v))^2 + (y'_v(u, v))^2 + (z'_v(u, v))^2.$$

Нетрудно проверить, что

$$|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|^2 = (r'_u)^2(r'_v)^2 - (r'_u r'_v)^2 = EG - F^2.$$

Поэтому равенство (12) можно переписать в виде

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} dudv. \quad (13)$$

В случае поверхности Φ , заданной явно уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, будем иметь равенство

$$S = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dudv. \quad (14)$$

8 Поверхностный интеграл первого рода и теорема о его существовании.

1. Понятие поверхностного интеграла первого рода:

Пусть функция $f(x, y, z)$ определена в точках гладкой поверхности Φ , имеющей параметрическое представление

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D.$$

Пусть τ - набор измеримых по Жордану множеств D_1, \dots, D_n являющийся разбиением множества D , Δ_τ - диаметр разбиения, Φ_i , $i = 1, \dots, n$, - части поверхности, соответствующие множествам D_i , $i = 1, \dots, n$, ΔS_i - их площади, и точки $(u_i, v_i) \in D_i$, $i = 1, \dots, n$.

Построим сумму

$$\sigma(\tau) = \sum_{i=1}^n f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)) \Delta S_i$$

Если существует предел I при $\Delta_\tau \rightarrow 0$ интегральной суммы $\sigma(\tau)$, то он называется **поверхностным интегралом первого рода** от функции f по поверхности Φ и обозначается символом

$$I = \iint_{\Phi} f(x, y, z) dS.$$

2. Теорема о существовании поверхностного интеграла первого рода:

Пусть Φ - гладкая поверхность, имеющая параметрическое представление (5), и функция $f(x, y, z)$ непрерывна во всех точках Φ . Тогда поверхностный интеграл первого рода существует и может быть вычислен по формуле

$$\begin{aligned} \iint_{\Phi} f(x, y, z) dS &= \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv = \\ &= \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv. \end{aligned} \quad (15)$$

Доказательство. Обозначим

$$I^* = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Имеем

"

$$\begin{aligned}
|I^* - \sigma(\tau)| &= \left| I^* - \sum_{i=1}^n f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)) \Delta S_i \right| \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} |f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) - \\
&\quad - f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i))| \sqrt{EG - F^2} du dv \leq \\
&\leq \max_{(u, v) \in D} \sqrt{EG - F^2} \sum_{i=1}^n \omega_i \mu(D_i),
\end{aligned}$$

где ω_i - колебание функции f на множестве D_i . Последняя часть цепочки неравенств стремится к нулю при $\Delta_\tau \rightarrow 0$ в силу непрерывности функций f и $\sqrt{EG - F^2}$ на замкнутом множестве D . Таким образом, предел интегральной суммы $\sigma(\tau)$ при $\Delta_\tau \rightarrow 0$ равен числу I^* . \square

9 Поверхностный интеграл второго рода и его свойства.

1-2. Понятие поверхностного интеграла второго рода и его свойства:

Пусть Φ - гладкая поверхность с параметрическим представлением
(5)

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D,$$

и на поверхности Φ заданы функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$.

Определим **поверхностные интегралы второго рода**:

$$\iint_{\Phi} P(x, y, z) dydz := \iint_D P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) A(u, v) dudv, \quad (17)$$

$$\iint_{\Phi} Q(x, y, z) dzdx := \iint_D Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) B(u, v) dudv, \quad (18)$$

$$\iint_{\Phi} R(x, y, z) dxdy := \iint_D R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) C(u, v) dudv, \quad (19)$$

или

$$\begin{aligned} & \iint_{\Phi} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy := \\ & = \iint_D (P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) A(u, v) + Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) B(u, v) + \\ & \quad + R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) C(u, v)) dudv. \end{aligned} \quad (20)$$

Используя направляющие косинусы вектора \vec{n}

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{A}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{B}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{C}{\sqrt{EG - F^2}}$$

преобразуем равенство (20)

$$\begin{aligned} & \iint_{\Phi} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy = \\ & = \iint_{\Phi} (P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma) dS. \end{aligned} \quad (21)$$

Обратим внимание на следующий факт. Введем вектор-функцию $\vec{F} = (P, Q, R)$. Тогда подынтегральная функция в интеграле из правой части равенства (21) является скалярным произведением $\vec{F}\vec{n}$.

На примере интеграла (19) сформулируем основные свойства поверхностного интеграла второго рода.

1. При изменении стороны поверхности (при смене ориентации поверхности) интеграл меняет знак.
2. Интеграл обладает свойством линейности:

$$\iint_{\Phi} \sum_{j=1}^m \alpha_j R_j(x, y, z) dx dy = \sum_{j=1}^m \alpha_j \iint_{\Phi} R_j(x, y, z) dx dy.$$

3. Если поверхность Φ разбита на конечное число частей $\Phi_k \subset \Phi$, $k = 1, \dots, N$, не имеющих общих внутренних точек, то

$$\iint_{\Phi} R(x, y, z) dx dy = \sum_{k=1}^N \iint_{\Phi_k} R(x, y, z) dx dy.$$

4. Интеграл

$$\iint_{\Phi} R(x, y, z) dx dy$$

по цилиндрической поверхности Φ с образующей, параллельной оси Oz , равен нулю.

Рассмотрим случай явного задания поверхности Φ уравнением $z = f(x, y)$. Если выбрана ее верхняя сторона, т. е.

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_u)^2 + (f'_v)^2}},$$

то

$$\iint_{\Phi} R(x, y, z) dx dy = \iint_{\Phi} R(x, y, z) \cos \gamma dS = \iint_{D_{xy}} R(x, y, f(x, y)) dx dy.$$

10 Формула Стокса.

Формула Стокса:

Пусть Φ - гладкая поверхность с параметрическим представлением

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D,$$

где функции $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ дважды непрерывно дифференцируемы в замкнутой области D , ограниченной гладким контуром L^* .

Контур L^* при отображении $\bar{r}(u, v)$ соответствует контур L , ограничивающий поверхность Φ . Обходу контура L^* на плоскости соответствует обход контура L , и наоборот. Условимся считать положительным такое направление обхода контура L , которому соответствует положительное направление обхода контура L^* . Если единичный вектор \vec{n} нормали к поверхности определить формулой (7), то при положительном обходе контура L поверхность будет оставаться слева, если смотреть с конца вектора \vec{n} . Таким образом, положительное направление обхода границы поверхности согласуется с выбором ее стороны.

Пусть в некоторой области G , целиком содержащей поверхность Φ , заданы непрерывно дифференцируемые функции P, Q, R . Тогда имеет место **формула Стокса**

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Phi} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (22)$$

Докажем, что

$$\oint_L P dx = \iint_{\Phi} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \quad (23)$$

Сначала преобразуем криволинейный интеграл второго рода по контуру L в левой части (23). Пусть контур L^* задан параметрическими уравнениями

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad t \in T = [t_1, t_2].$$

Тогда параметрические уравнения, задающие контур L , имеют вид

$$x = x(u(t), v(t)), \quad y = y(u(t), v(t)), \quad z = z(u(t), v(t)), \quad t \in T.$$

В соответствии с формулами для вычисления криволинейного интеграла второго рода имеем

$$\begin{aligned} \oint_L P dx &= \int_{t_1}^{t_2} P \left(\frac{\partial x}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v} v'(t) \right) dt = \\ &= \oint_{L^*} P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right). \end{aligned}$$

К интегралу в правой части этого равенства применим формулу Грина:

$$\begin{aligned} \oint_{L^*} P \frac{\partial x}{\partial u} du + P \frac{\partial x}{\partial v} dv &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial u} (P \frac{\partial x}{\partial v}) - \frac{\partial}{\partial v} (P \frac{\partial x}{\partial u}) \right) dudv = \\ &= \iint_D \left(\left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} + P \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \right) dudv - \\ &- \iint_D \left(\left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} + P \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} \right) dudv = \\ &= \iint_D \frac{\partial P}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) dudv - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) dudv = \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial z} B - \frac{\partial P}{\partial y} C \right) dudv = \iint_{\Phi} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \end{aligned}$$

Аналогично доказываются равенства

$$\oint_L Q dy = \iint_{\Phi} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz,$$

$$\oint_L R dx = \iint_{\Phi} \frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dz dx.$$

Складывая доказанные равенства, получим равенство (22).

Формула Стокса справедлива в случае, когда контур L^* является кусочно гладким.

Отметим, что если поверхность Φ является плоской областью и лежит в плоскости, параллельной координатной плоскости xOy , то формула Стокса переходит в формулу Грина. Доказательство формулы Стокса для поверхностей, ограниченных несколькими контурами, аналогично доказательству формулы Грина для многосвязных областей.

11 Формула Остроградского-Гаусса.

1. Понятие правильной в некотором направлении области:

Область является *правильной в направлении оси Oz* , если она ограничена двумя поверхностями Φ_1 и Φ_2 вида $z = \varphi_1(x, y)$ и $z = \varphi_2(x, y)$, где функции $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ определены в замкнутой области D_{xy} и удовлетворяют неравенству $\varphi_1(x, y) \leq \varphi_2(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, а также цилиндрической поверхностью Φ_3 с образующей, параллельной оси Oz . Положительная ориентация границы такой области будет означать выбор внешней стороны поверхности (т. е. соответствующей внешней нормали).

Аналогично определяются области, правильные относительно осей Ox и Oy .

2. Понятие простой области:

Область будем называть *простой*, если ее можно разбить на конечное число частичных областей, правильных относительно оси Ox и не имеющих общих внутренних точек. И то же самое можно сделать относительно двух других осей координат. Положительная ориентация границы простой области будет означать выбор внешней стороны поверхности.

3. Формула Остроградского-Гаусса:

Пусть V - простая замкнутая область, граница Φ которой положительно ориентирована. Если функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывно дифференцируемы в области G , содержащей V , то справедлива **формула Остроградского - Гаусса**

$$\begin{aligned} \iint_{\Phi} P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy = \\ = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz. \end{aligned} \quad (24)$$

Формула Остроградского - Гаусса распадается на три самостоятельных равенства, соответствующие трем подынтегральным функциям P , Q и R . Эти равенства доказываются схожим образом. Докажем одно из них, например, равенство

$$\iint_{\Phi} R(x, y, z)dxdy = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz.$$

Докажем это равенство сначала для замкнутой области V , являющейся правильной в направлении оси Oz . По правилу вычисления тройного интеграла имеем

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz &= \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \\ &= \iint_{D_{xy}} R(x, y, \varphi_2(x, y))dxdy - \iint_{D_{xy}} R(x, y, \varphi_1(x, y))dxdy = \\ &= \iint_{\Phi_2} R dxdy + \iint_{\Phi_1} R dxdy + \iint_{\Phi_3} R dxdy = \iint_{\Phi} R dxdy. \end{aligned}$$

Мы учли, что для поверхности Φ_2 нужно брать верхнюю сторону, а для поверхности Φ_1 - нижнюю. К этим интегралам добавили равный нулю поверхностный интеграл по внешней стороне боковой цилиндрической поверхности Φ_3 с образующей, параллельной оси Oz .

Далее, простую область V разобьем на частичные, правильные в направлении оси Oz области V_k , $k = 1, \dots, m$, ограниченные кусочно гладкими поверхностями Φ_k . В силу доказанного имеем

$$\iint_{\Phi_k} R(x, y, z) dx dy = \iiint_{V_k} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz, \quad k = 1, \dots, m.$$

Просуммировав эти равенства, получим

$$\sum_{k=1}^m \iint_{\Phi_k} R(x, y, z) dx dy = \sum_{k=1}^m \iiint_{V_k} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz.$$

Сумма в левой части равенства равна интегралу по поверхности Φ , так как по частям границ Φ_k частичных областей V_k , не входящим в поверхность Φ , интегрирование проводится дважды с выбором противоположных сторон поверхности, а такие интегралы взаимно уничтожаются.

Таким образом формула Остроградского - Гаусса полностью доказана.

12 Тригонометрическая система. Ортогональность тригонометрической системы и свойства интеграла от периодической функции.

1. Понятие тригонометрической системы.

$$1/2, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \quad (27)$$

Система функций (27) называется *тригонометрической системой*.

2. Теорема об ортогональности тригонометрической системы.

Любые две функции тригонометрической системы (27) взаимно ортогональны на отрезке $[-\pi, \pi]$.

3. Свойства интеграла от периодической функции.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2kx) dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2kx) dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}.$$

Обозначим через $R_{2\pi}$ класс функций, которые заданы на всей числовой прямой, интегрируемы на каждом конечном отрезке числовой прямой и имеют период 2π .

Пусть функция $f \in R_{2\pi}$. Тогда при любом $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

13 Тригонометрический ряд. Коэффициенты Фурье и ряд Фурье. Ядро Дирихле.

1. Понятие тригонометрического ряда.

Функциональный ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (26)$$

где $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, \dots$ - вещественные числа, называется тригонометрическим рядом, а эти числа - его коэффициентами.

2. Коэффициенты фурье и ряд Фурье.

Если 2π -периодическая функция f разлагается в равномерно сходящийся тригонометрический ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (28)$$

то его коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (29)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (30)$$

Пусть функция f определена и интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда числа $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, \dots$, найденные по формулам (29) и (30), называются коэффициентами Фурье, а ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

с этими коэффициентами называется рядом Фурье функции f .

3. Ядро Дирихле.

Функцию

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}} \quad (32)$$

называют ядром Дирихле.

14 Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом Дирихле.

Теорема Дирихле.

Пусть функция $f \in R_{2\pi}$. Тогда частная сумма ряда Фурье функции f может быть представлена в следующем виде

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (34)$$

где

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos nt = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}t}{2 \sin \frac{t}{2}}.$$

Интеграл в равенстве (34) называют *интегралом Дирихле*.

15 Теорема Римана-Лебега

Теорема Римана-Лебега.

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin \lambda t dt = 0, \quad \lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos \lambda t dt = 0.$$

16 Принцип локализации Римана.

Принцип локализации Римана.

Пусть функция $f \in R_{2\pi}$. Тогда при любом $a \in (0, \pi)$ частная сумма ряда Фурье функции f может быть представлена в следующем виде

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^a (f(x+t) + f(x-t)) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt + \alpha_n(x),$$

где

$$\alpha_n(x) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

17 Признак Дини поточечной сходимости рядов Фурье и три следствия.

1. Признак Дини поточечной сходимости рядов Фурье.

Пусть функция $f \in R_{2\pi}$. Если при некотором фиксированном x сходится интеграл

$$\int_0^\pi \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2A|}{t} dt, \quad (37)$$

где A - некоторое число, то в этой точке x ряд Фурье функции f сходится и имеет своей суммой число A .

2. Следствия признака Дени:

1. Пусть функция $f \in R_{2\pi}$ и дифференцируема в точке x . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x).$$

2. Пусть функция $f \in R_{2\pi}$ и в точке x существуют односторонние левая производная $f'_A(x)$ и правая производная $f'_B(x)$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x).$$

3. Пусть функция $f \in R_{2\pi}$ и в точке x существуют следующие четыре конечных предела

$$f(x+0) = \lim_{t \rightarrow x+0} f(t), \quad f(x-0) = \lim_{t \rightarrow x-0} f(t),$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} = \alpha, \quad \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x-t) - f(x-0)}{-t} = \beta.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

18 Некоторые особенности рядов Фурье: ряды Фурье чётных и нечётных функций, разложение в ряд Фурье на промежутке $[0, 2\pi]$, разложение в ряд Фурье на промежутке $[-l, l]$.

1. Ряды Фурье чётных и нечётных функций:

Пусть функция $f \in R([-\pi, \pi])$ является четной. Тогда

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad (39)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad (40)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (41)$$

Таким образом, ряд Фурье четной функции не содержит синусов кратных дуг, т. е.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

причем коэффициенты a_0, a_n, \dots вычисляются по формулам (39) и (40).

Пусть функция $f \in R([-\pi, \pi])$ является нечетной. Тогда

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0, \quad (42)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0, \quad (43)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (44)$$

Таким образом, ряд Фурье нечетной функции содержит только синусы кратных дуг, т. е.

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

2. Разложение в ряд Фурье на промежутке $[0, 2\pi]$:

Пусть функция f определена и интегрируема на отрезке $[0, \pi]$.

1. Построим новую функцию

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi], \\ f(-x), & x \in [-\pi, 0). \end{cases}$$

Функция F является четной, и согласно предыдущему пункту

$$F(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

причем

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Таким образом, на $[0, \pi]$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

2. Построим функцию

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi], \\ -f(-x), & x \in [-\pi, 0). \end{cases}$$

Тогда

$$F(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

причем

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Таким образом, на $[0, \pi]$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

3. Разложение в ряд Фурье на промежутке $[-l, l]$:

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[-l, l]$. Положим $x = \frac{lt}{\pi}$. Эта линейная функция осуществляет взаимно однозначное отображение отрезка $[-\pi, \pi]$ на отрезок $[-l, l]$. Поэтому функция $\varphi(t) = f(\frac{lt}{\pi})$ определена на отрезке $[-\pi, \pi]$. Поэтому

$$\varphi(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) dt,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos ntdt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \cos ntdt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin ntdt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \sin ntdt, n = 1, 2, \dots$$

Теперь вернемся к прежней переменной, т. е. положим $t = \frac{\pi x}{l}$. Будем иметь

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

и

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$n = 1, 2, \dots$$

19 Средние Фейера и их представление интегралом Фейера.

1. Понятие среднего Фейера:

Пусть функция $f \in R_{2\pi}$,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

и

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Средними Фейера называют

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \dots + S_n(x)}{n+1}. \quad (46)$$

2. Представление среднего Фейера интегралом Фейера:

Пусть функция $f \in R_{2\pi}$. Тогда верно представление

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) \Phi_n(t) dt, \quad (47)$$

где функция

$$\Phi_n(t) = \frac{\sum_{k=0}^n D_k(t)}{n+1} = \frac{\sin^2(\frac{n+1}{2}t)}{2(n+1)\sin^2 \frac{t}{2}} \quad (48)$$

называется ядром Фейера.

20 Теорема о суммируемости ряда Фурье методом средних арифметических в точках разрыва.

Теорема о суммируемости ряда Фурье методом средних арифметических в точках разрыва:

Пусть функция $f \in R_{2\pi}$ и в точке x существует предел

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} = S.$$

Тогда в точке x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = S.$$

21 Теорема Фейера.

Теорема Фейера:

Если функция f 2π -периодическая и непрерывная, то последовательность средних Фейера (σ_n) равномерно сходится к функции f .

22 Теорема Вейштрасса о равномерном приближении непрерывной 2π -периодической функции тригонометрическими многочленами.

Теорема Вейштрасса о равномерном приближении непрерывной 2π -периодической функции тригонометрическими многочленами:

Если функция f 2π -периодическая и непрерывная, то существует последовательность тригонометрических многочленов (T_n) , которая сходится к функции f равномерно на всей числовой прямой.

23 Теорема Вейштрасса о равномерном приближении непрерывной на отрезке функции алгебраическими многочленами.

Теорема Вейштрасса о равномерном приближении непрерывной на отрезке функции алгебраическими многочленами:

Если функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для любого $\epsilon > 0$ найдется алгебраический многочлен P_ϵ такой, что при всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $|f(x) - P_\epsilon(x)| < \epsilon$.

24 Средне квадратичное отклонение, теорема о наилучшем приближении и неравенство Бесселя.

1. Теорема о средне квадратичном отклонении:

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда при любом $\epsilon > 0$ существует такая непрерывная на отрезке функция g , принимающая заданные значения в точках a и b , что

$$\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx < \epsilon.$$

2. Теорема о наилучшем приближении:

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда среди всех тригонометрических многочленов порядка не выше n наименьшее среднее квадратическое отклонение от функции f имеет n -ая частная сумма ее ряда Фурье

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

При этом

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n(x))^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right]. \quad (52)$$

3. Неравенство Бесселя:

Если функция f интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, то

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

25 Равенство Парсеваля. Сходимость ряда Фурье в среднем квадратичном.

1. Равенства Парсеваля:

Равенство

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2), \quad (53)$$

справедливое для любой функции f , интегрируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$, называют равенством Парсеваля, или условием замкнутости тригонометрической системы.

2. Теорема о сходимости ряда Фурье в среднем квадратичном:

Теорема 2.8.4. *(о сходимости ряда Фурье в среднем квадратичном). Для любой функции f интегрируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$ справедливо равенство*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n(x))^2 dx = 0.$$

Доказательство. Доказательство вытекает из равенства (48) и теоремы (2.8.3). \square

26 Полнота тригонометрической системы.

Теорема о полноте тригонометрической системы:

Тригонометрическую систему

$$1/2, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

нельзя дополнить никакой непрерывной и отличной от тождественного нуля функцией $\varphi(x)$, которая была бы ортогональна всем функциям системы.