

Содержание

1	Глава 1	2
1.1	Случайные события, классификация событий, операции над ними.	2
1.2	Определения: кольцо, алгебра, σ -алгебра, минимальная σ -алгебра над классом K . Борелевская σ -алгебра.	2
1.3	Теорема Каратеодори	3
1.4	Определения: мера, конечно-аддитивная, счётно-аддитивная мера	4

1 Глава 1

1.1 Случайные события, классификация событий, операции над ними.

Определение случайного события:

Пусть Ω — множество элементарных исходов эксперимента. Случайным событием называется любое подмножество множества Ω .

Определение достоверного события:

Достоверным событием называется событие Ω , которому благоприятствует каждый исход эксперимента.

Определение невозможного события:

Невозможным событием называется пустое множество, которому не благоприятствует ни один исход эксперимента.

Определение суммы событий:

Суммой событий A и B называется событие $C = A \cup B$, которому благоприятствуют исходы, принадлежащие хотя одному из событий A или B .

Определение произведения событий:

Произведением событий A и B называется событие $C = A \cap B$, которому благоприятствуют исходы и события A , и события B .

Определение несовместных событий:

Случайные события A и B называются несовместными, если $A \cap B = \emptyset$.

Определение противоположного события:

Событием, противоположным событию A называется событие \bar{A} , которое состоит из исходов, не благоприятствующих A .

1.2 Определения: кольцо, алгебра, σ -алгебра, минимальная σ -алгебра над классом K . Борелевская σ -алгебра.

Определение кольца:

Кольцом \mathbf{R} называется непустой класс множества замкнутый относительно операций сложения и взятия разности.

Определение алгебры:

Алгеброй \mathcal{A} называется непустой класс множества замкнутый относительно сложения и отрицания.

Определение σ -алгебры:

σ -алгебра \mathcal{F} — это непустой класс множества замкнутый относительно счётного количества сумм и отрицаний:

1. Если $A \in \mathcal{F}$, то $\overline{A} \in \mathcal{F}$;
2. $\Omega \in \mathcal{F}$;
3. Если $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Определение σ -алгебры событий:

Сигма алгеброй событий называется множество \mathcal{F} подмножеств $A \subset \Omega$, удовлетворяющее условиям:

1. если $A \in \mathcal{F}$, то $\overline{A} \in \mathcal{F}$;
2. $\Omega \in \mathcal{F}$;
3. если $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Определение минимальной σ -алгебры над классом K :

Пусть K — некоторый класс подмножеств из Ω . σ -алгебра $\sigma(K)$ называется наименьшей σ -алгеброй, содержащей класс K , если $K \in \sigma(K)$; любая σ -алгебра \mathcal{F} , которая содержит K ($K \subset \mathcal{F}$), содержит и $\sigma(K) \subset \mathcal{F}$.

Определение Борелевской σ -алгебры:

Борелевской σ -алгеброй β называется минимальная σ -алгебра над классом полуинтервалов $K = \{[a, b]\}$ из R , то есть:

$$\Omega = (-\infty, \infty) = R \quad K = \{[a, b), [a, +\infty), (a, +\infty), (-\infty, b), (-\infty, b], (a, b]\}.$$

1.3 Теорема Каратеодори

Пусть $Q(A)$ — счётно аддитивная вероятностная мера на алгебре \mathcal{A} . Тогда существует единственная счётно аддитивная вероятностная мера $P(A)$, заданная на минимальной σ -алгебре \mathcal{F} и являющаяся её продолжением, то есть $\forall A \in \mathcal{A} \quad P(A) = Q(A)$.

1.4 Определения: мера, конечно-аддитивная, счётно-аддитивная мера

Пусть Ω — множество элементарных исходов эксперимента. Некоторое его подмножество $A \subset \Omega$ называется случайным событием.

Определение вероятностной меры:

Вероятностной мерой называется функция $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющая условиям:

1. $P(\Omega) = 1$;
2. $\forall A \in \mathcal{F} \quad P(A) \geq 0$;
3. $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$, такой, что $\forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset$, $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Определение конечно аддитивной вероятностной меры

Конечно аддитивной вероятностной мерой $Q(A)$ называется функция множества $Q : \mathcal{A} \rightarrow [0; 1]$, такая, что:

1. $\forall A \in \mathcal{A} \quad Q(A) \geq 0$;
2. $Q(\Omega) = 1$;
3. $\forall A, B \in \mathcal{A} : \quad A \cap B = \emptyset \quad Q(A \cup B) = Q(A) + Q(B) \quad Q\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} Q(A_i)$.

Определение счётно аддитивной вероятностной меры:

Счётно аддитивно вероятностной мерой $P(A)$ называется функция множества $P : \mathcal{F} \rightarrow [0; 1]$, такая, что:

1. $\forall A \in \mathcal{F} \quad P(A) \geq 0$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F} : \quad \forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.