

## Содержание

1	Длина кривой. Определение криволинейных интегралов первого и второго рода по параметризованной гладкой прямой.	1
2	Условия существования криволинейных интегралов.	3
3	Замена параметра в криволинейном интеграле первого рода.	5
4	Ориентированная гладкая кривая и криволинейный интеграл второго рода по ней.	6
5	Формула Грина.	6
6	Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.	10

## 1 Длина кривой. Определение криволинейных интегралов первого и второго рода по параметризованной гладкой прямой.

### 1. Теорема о длине кривой:

Если функция  $\bar{\gamma}$  имеет на отрезке  $[a, b]$  непрерывную производную  $\bar{\gamma}' = (\gamma_1', \gamma_2')$ , то кривая  $L = L_{\bar{\gamma}}$  спрямляема и её длина  $S$  выражается равенством

$$S = \int_a^b |\bar{\gamma}'(t)| dt.$$

Доказательство:

Для любого разбиения  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  отрезка  $[a, b]$  имеем

$$\sum_{i=1}^n |\bar{\gamma}(t_i) - \bar{\gamma}(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \bar{\gamma}'(t) dt \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\bar{\gamma}'(t)| dt = \int_a^b |\bar{\gamma}'(t)| dt.$$

Переходя к верхней грани по всевозможным разбиениям отрезка, получим неравенство

$$S \leq \int_a^b |\bar{\gamma}'(t)| dt.$$

Докажем справедливость неравенства противоположного. Пусть  $\epsilon > 0$ . В силу равномерной непрерывности функции  $\bar{\gamma}'$   $\exists \delta > 0$  ( $|s - t| < \delta \Rightarrow |\bar{\gamma}'(s) - \bar{\gamma}'(t)| < \epsilon$ ). Возьмём разбиение отрезка с диаметром меньшим  $\delta$ . Тогда  $\forall t \in [t_{i-1}, t_i]$  имеем

$$|\bar{\gamma}'(t)| = |(\bar{\gamma}'(t) - \bar{\gamma}'(t_i)) + \bar{\gamma}'(t_i)| \leq |\bar{\gamma}'(t) - \bar{\gamma}'(t_i)| + |\bar{\gamma}'(t_i)| \leq |\bar{\gamma}'(t_i)| + \epsilon.$$

Далее получим

$$\begin{aligned} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\bar{\gamma}'(t)| dt - \epsilon \Delta t_i &\leq |\bar{\gamma}'(t_i)| \Delta t_i = \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\bar{\gamma}'(t) + \bar{\gamma}'(t_i) - \bar{\gamma}'(t)) dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \bar{\gamma}'(t) dt \right| + \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\bar{\gamma}'(t_i) - \bar{\gamma}'(t)) dt \right| \leq |\bar{\gamma}(t_i) - \bar{\gamma}(t_{i-1})| + \epsilon \Delta t_i \end{aligned}$$

и

$$\int_a^b |\bar{\gamma}'(t)| dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\bar{\gamma}'(t)| dt \leq \sum_{i=1}^n |\bar{\gamma}(t_i) - \bar{\gamma}(t_{i-1})| + 2\epsilon(b-a) \leq S + 2\epsilon(b-a)$$

Тогда в силу произвольности  $\epsilon > 0$  имеем неравенство

$$\int_a^b |\bar{\gamma}'(t)| dt \leq S.$$

### 2-3. Определение криволинейных интегралов первого и второго рода по параметризованной гладкой прямой:

Пусть  $L = L_{\bar{\gamma}}$  — гладкая кривая, а функции  $f(x, y)$ ,  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  определены на  $L$ . Пусть  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  — разбиение отрезка  $[a, b]$ ,  $M_k = (x_k, y_k) = (\gamma_1(t_k), \gamma_2(t_k))$ ,  $k = 0, \dots, n$ , и  $l_k$  — дуга  $M_{k-1}M_k$  кривой  $L$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

На каждой дуге  $M_{k-1}M_k$  выберем произвольную точку  $N_k(\xi_k, \eta_k)$ , соответствующую некоторому значению  $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$  параметра  $t$ .

Обозначим длину дуги  $M_{k-1}M_k$  через

$$\Delta s_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\bar{\gamma}'(t)| dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} dt$$

и диаметром разбиения кривой  $L$  назовём число  $\Delta = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta s_k$ .

Определим интегральные суммы

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k.$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^n P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k.$$

$$\sigma_3 = \sum_{k=1}^n Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k,$$

где  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ,  $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ .

**Определение криволинейных интегралов первого и второго рода:**

Назовём число  $I_m$  пределом интегральных сумм  $\sigma_m$  ( $m = 1, 2, 3$ ) при стремлении диаметра  $\Delta$  к нулю, если

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad (\Delta < \delta \Rightarrow |\sigma - I_m| < \epsilon)$  (независимо от выбора точек  $N_k$ ).

Число  $I_1$  называют криволинейным интегралом первого рода от функции  $f$  по кривой  $L$  и обозначают символом

$$\int_L f(x, y) ds.$$

Число  $I_2$  называют криволинейным интегралом второго рода от функции  $P$  по кривой  $L$  (в направлении от  $A$  до  $B$ ) и обозначают символом

$$\int_L P(x, y) dx.$$

## 2 Условия существования криволинейных интегралов.

**Условия существования криволинейных интегралов:**

Если кривая  $L = L_{\bar{\gamma}}$  является гладкой и функции  $f, P, Q$  непрерывны вдоль этой кривой, то все три криволинейных интеграла существуют и могут быть вычислены по формулам

$$\int_L f(x, y) dx = \int_a^b f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} dt, \quad (1)$$

$$\int_L P(x, y) dx = \int_a^b P(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \gamma_1'(t) dt, \quad (2)$$

$$\int_L Q(x, y) dy = \int_a^b Q(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \gamma_2'(t) dt \quad (3)$$

Доказательство:

Прежде всего отметим, что определенные интегралы, стоящие в правых частях формул, существуют, так как их подынтегральные функции непрерывны на отрезке  $[a, b]$

Докажем первое равенство. Обозначим

$$I_1 = \int_a^b f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} dt$$

и оценим разность

$$\begin{aligned} \sigma_1 - I_1 &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta l_k - \int_a^b f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} dt = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (f(\gamma_1(\tau_k), \gamma_2(\tau_k)) - f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))) \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} dt \end{aligned}$$

Так как функции  $\gamma_1'(t)$  и  $\gamma_2'(t)$  непрерывны на  $[a, b]$  и одновременно не обращаются в нуль, то

$$m = \min_{a \leq t \leq b} \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} > 0 \text{ и } \Delta s_k \geq m \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = m \Delta t_k.$$

Следовательно

$$\Delta t_k \leq \frac{1}{m} \Delta s_k$$

и при стремлении к нулю диаметра разбиения  $\Delta$  кривой  $L$  стремятся к нулю и наибольшая из разностей  $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ .

Поскольку функция  $f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  равномерно непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \Delta < \delta \Rightarrow$

$$|f(\gamma_1(\tau_k), \gamma_2(\tau_k)) - f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))| < \frac{\epsilon}{S},$$

где  $S$  — длина кривой  $L$ .

Тогда

$$|\sigma_1 - I_1| \leq \frac{\epsilon}{S} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} dt = \frac{\epsilon}{S} \sum_{k=1}^n \Delta s_k = \epsilon.$$

Таким образом мы доказали, что интегральные суммы  $\sigma_1$  стремятся к числу  $I_1$  при  $\Delta \rightarrow 0$ , то есть мы доказали первое равенство.

Для доказательства второго равенства оценим разность

$$\sigma_2 - I_2 = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (P(\gamma_1(\tau_k), \gamma_2(\tau_k)) - P(\gamma_1(t), \gamma_2(t))) \gamma_1'(t) dt.$$

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \Delta < \delta \Rightarrow$

$$|P(\gamma_1(\tau_k), \gamma_2(\tau_k)) - P(\gamma_1(t), \gamma_2(t))| < \frac{\epsilon}{M(b-a)},$$

где  $M = \max_{a \leq t \leq b} |\gamma'_1(t)|$ . Тогда

$$|\sigma_2 - I_2| \leq \frac{\epsilon}{M(b-a)} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'_1(t)| dt \leq \frac{\epsilon}{M(b-a)} M \sum_{k=1}^n \Delta t_k = \epsilon.$$

Это означает, что интегральные суммы  $\sigma_2 \rightarrow I_2$  при  $\Delta \rightarrow 0$ , то есть мы доказали второе равенство.

Третье равенство доказывается аналогично.

### 3 Замена параметра в криволинейном интеграле первого рода.

**Замена параметра в криволинейном интеграле первого рода:**

Пусть  $L = L_\gamma$  — гладкая кривая, функция  $\bar{\gamma}$  определена на отрезке  $[a, b]$ , а функция  $\phi$  определена на отрезке  $[a_1, b_1]$ , отображает его на отрезок  $[a, b]$ , имеет непрерывную производную и  $\phi'(u) \neq 0 \quad \forall u \in [a_1, b_1]$ .

Тогда функция  $\phi'$  сохраняет знак на отрезке  $[a_1, b_1]$  и функция  $\phi$  является возрастающей, если  $\phi(u) > 0$ , и является убывающей, если  $\phi(u) < 0$ . Согласно правилу замены переменной в интеграле Римана имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \sqrt{(\gamma'_1(t))^2 + (\gamma'_2(t))^2} dt &= \int_a^b f(\bar{\gamma}(t)) |\bar{\gamma}'(t)| dt = \\ &= \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\bar{\gamma}(\phi(u))) |\bar{\gamma}'(\phi(u))| \phi'(u) du. \end{aligned}$$

Если  $\phi'(u) > 0$ , то  $|\bar{\gamma}'(\phi(u))| \phi'(u) = |\bar{\gamma}'(\phi(u)) \phi'(u)| = |(\bar{\gamma} \circ \phi)'(u)|$ ,  $\phi^{-1}(a) = a_1, \phi^{-1}(b) = b_1$

Если же  $\phi'(u) < 0$ , то  $|\bar{\gamma}'(\phi(u))| \phi'(u) = -|\bar{\gamma}'(\phi(u)) \phi'(u)| = -|(\bar{\gamma} \circ \phi)'(u)|$ ,  $\phi^{-1}(a) = b_1, \phi^{-1}(b) = a_1$ .

Тогда в любом случае

$$\int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\bar{\gamma}(\phi(u))) |\bar{\gamma}'(\phi(u))| \phi'(u) du = \int_{a_1}^{b_1} f(\bar{\gamma}(\phi(u))) |(\bar{\gamma} \circ \phi)'(u)| du$$

Обозначим  $\bar{\gamma}^*(u) = (\bar{\gamma} \circ \phi)(u)$ . Чоевидно, что вектор-функция  $\bar{\gamma}^*$  непрерывно дифференцируема на отрезке  $[a_1, b_1]$  и её производная ни в одной точке этого отрезка не равна вектору  $(0, 0)$ . Тогда вектор-функцию  $\bar{\gamma}^*$  можно считать другим параметрическим представлением кривой  $L$ .

## 4 Ориентированная гладкая кривая и криволинейный интеграл второго рода по ней.

### 1. Понятие ориентированной гладкой кривой:

*Пусть  $L$  - гладкая кривая. Две ее параметризации  $L_{\bar{\gamma}}$ , где  $\bar{\gamma}$  определена на отрезке  $[a, b]$ , и  $L_{\bar{\gamma}^*}$ , где  $\bar{\gamma}^*$  определена на отрезке  $[a_1, b_1]$ , назовем положительно эквивалентными, если существует функция  $\varphi$  определенная на отрезке  $[a_1, b_1]$ , отображающая его на отрезок  $[a, b]$ , имеющая непрерывную производную с условием  $\varphi'(u) > 0$  при всех  $u \in [a_1, b_1]$ , такая, что  $\bar{\gamma}^* = (\bar{\gamma} \circ \varphi)$ .*

*Класс всех положительно эквивалентных друг другу параметризаций называют ориентированной гладкой кривой.*

### 2. Понятие криволинейного интеграла второго рода по ориентированной гладкой кривой:

*Криволинейный интеграл второго рода по ориентированной кривой определяют как интеграл по одной из ее параметризаций.*

Пользуясь формулой замены переменной в интеграле Римана, легко показать, что данное определение корректно.

Обозначим одну из ориентаций гладкой кривой  $L$  через  $L^+$ , а другую через  $L^-$ . Тогда справедливо равенство

$$\int_{L^+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = - \int_{L^-} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

## 5 Формула Грина.

### 1. Определение трапеции первого рода:

Множество  $D$  назовем трапецией первого рода,  
если

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \right\},$$

где функции  $\varphi_1, \varphi_2$  - непрерывно дифференцируемые на отрезке  $[a, b]$ .

## 2. Определение трапеции второго рода:

Множество  $D$  назовем трапецией второго рода,  
если

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \right\},$$

где функции  $\psi_1, \psi_2$  - непрерывно дифференцируемые на отрезке  $[c, d]$ .

## 3. Формула Грина для трапеции второго рода:

(формула Грина для трапеции первого рода.) Пусть замкнутое множество  $D$  является трапецией первого рода,  $L$  - положительно ориентированная граница  $D$ , а функция  $P$  и ее частная производная  $\frac{\partial P}{\partial y}$  непрерывны на  $D$ . Тогда справедливо равенство

$$\oint_L P(x, y) dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy. \quad (49)$$

Доказательство. Пусть

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \right\},$$

где функции  $\varphi_1, \varphi_2$  - непрерывно дифференцируемые на отрезке  $[a, b]$ . Обозначим точки  $A(a, \varphi_1(a))$ ,  $B(b, \varphi_1(b))$ ,  $E(b, \varphi_2(b))$ ,  $F(a, \varphi_2(a))$ . Тогда положительная ориентация границы  $L$  соответствует последовательности точек  $ABEFA$  этого контура.

Согласно определению криволинейного интеграла второго рода имеем

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y) dx &= \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx, \\ \int_{EF} P(x, y) dx &= \int_b^a P(x, \varphi_2(x)) dx = - \int_a^b P(x, \varphi_2(x)) dx, \\ \int_{BE} P(x, y) dx &= 0, \quad \int_{FA} P(x, y) dx = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\oint_L P(x, y) dx = \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx - \int_a^b P(x, \varphi_2(x)) dx.$$

С другой стороны, сводя двойной интеграл к повторному и используя формулу Ньютона-Лейбница, имеем

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy = \int_a^b P(x, \varphi_2(x)) dx - \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx.$$

Таким образом справедливо равенство

$$\oint_L P(x, y) dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy.$$

□



#### 4. Понятие плоского элементарного множества:

*Плоское множество  $D$  назовем элементарным, если прямыми, параллельными координатным осям, его можно разбить на конечное число трапеций первого рода, а также на конечное число трапеций второго рода.*

#### 5. Формула Грина для замкнутого элементарного множества:

*(формула Грина.) Пусть замкнутое множество  $D$  является элементарным замкнутым множеством и  $L$  - положительно ориентированная граница  $D$ , которая является простым контуром. Пусть функции  $P$ ,  $Q$  и их частные производные  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  непрерывны на  $D$ . Тогда справедливо равенство*

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \quad (51)$$

#### 6. Понятие односвязной и многосвязной плоской области:

Плоскую область  $D$  называют **односвязной областью**, если она обладает следующим свойством: если простой замкнутый контур  $L$  целиком лежит в области  $D$ , то и область, ограниченная контуром  $L$ , целиком лежит в  $D$ . Плоскую область, не являющуюся односвязной, называют **многосвязной**.

#### 7. Формула Грина для многосвязной области:

**формулу Грина для многосвязной области**

$$\oint_{L_0} Pdx + Qdy - \sum_{i=1}^n \oint_{L_i} Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy, \quad (52)$$

где все контуры  $L_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , обходятся против часовой стрелки.

## 6 Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

**Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования:**

Для того чтобы криволинейный интеграл в области  $D$  не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы для любого кусочно гладкого контура  $L$  в  $D$  выполнялось равенство

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Доказательство: Пока ещё не доказал.