Содержание

1 Комбинаторика, правило суммы и произведения. Размещения с повторениями и без повторений.

Правило суммы:

Если объект A можно выбрать m способами, а объект B, после выбора A, можно выбрать n способами, то пару (A, B) можно выбрать $n \times m$ способами.

Правило произведения:

Если A можно выбрать n способами, а B — m способами, то объект A или B можно выбрать $n + m$ способами. (Выбор B никак не согласуется с выбором A.)

Размещения с повторениями:

Размещениями с повторениями из n типов по k элементов (k и n в произвольном соотношении) называются все такие последовательности k элементов, принадлижащих n типам, которые отличаются друг от друга составом или последовательностью элементов.

$$\overline{A_n^k} = n^k$$

Размещения без повторений:

Размещениями без повторений из n различных типов по k элементам называются все такие последовательности из k различных элементов, такие, что они различаются по составу или по порядку. Причём $k < n$.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

2 Перестановки с повторениями и без повторений. Сочетания с повторениями и без повторений, свойства биномиальных коэффициентов.

Перестановки с повторениями:

Перестановками с повторениями из $n_1, \dots, n_k$ элементов k-го типа называются всевозможные последовательности длины n, отличающиеся друг от друга последовательностью элементов.

$$\overline{P}(n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

Перестановски без повторений:

Перестановками без повторений из n элементов называются всевозможные последовательности из n элементов.

$$P_n = n!$$

Сочетания с повторениями:

Сочетаниями с повторениями из n по k (k и n в произвольном соотношении) называются все такие комбинации из k элементов $\in$ n типам, которые отличаются только составом элементов.

$$\overline{C^k}_n = C^k_{n+k-1} = \overline{P}(n-1, k)$$

Сочетания без повторений:

Сочетаниями без повторений из n по k ($k \leq n$) называются все такие комбинации из k различных элементов, выбранных из n исходных элементов, которые отличаются друг от друга составом.

$$C^k_n = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Свойства биномиальных коэффициентов:

1. $$C^k_n = \overline{P}(k, n-k)$$

2. $$C^k_n = C^{n-k}_n$$

3. $$C^k_n = C^{k-1}_{n-1} + C^k_{n-1}$$

4. $$C^0_n + C^1_n + \dots + C^n_n = 2^n$$

5. $$C^0_n - C^1_n + C^2_n - C^3_n + \dots + C^n_n = 0$$

3 Сколькими способами можно разложить n_1 предметов одного сорта, $\ldots, n_k$ предметов k-го сорта в два ящика? Следствия.

Схема: n_1 предметов 1-го типа $\ldots$ n_k предметов k-го типа раскладываются в два различных ящика:

$$(n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot \cdots \cdot (n_k + 1) \text{ способов.}$$

Следствие 1:
Если все предметы различны, то:

$$n_1 = 1 = n_2 = \cdots = n_k = 1 \Rightarrow 2^k \text{ способов.}$$

Следствие 2:
Не менее r_i предметов i-го типа в каждый ящик:

$$(n_1 - 2r_1 + 1) \cdot (n_2 - 2r_2 + 1) \cdot \cdots \cdot (n_k - 2r_k + 1) \text{ способов.}$$