1 Длина кривой. Определение криволинейных интегралов первого и второго рода по параметризованной гладкой прямой.

1. Теорема о длине кривой:

Если функция $\overline{\gamma}$ имеет на отрезке $[a,b]$ непрерывную производную $\overline{\gamma}' = (\gamma_1^{'}, \gamma_2^{'})$, то кривая $L = L_{\overline{\gamma}}$ спрямляема и её длина S выражается равенством

$$S = \int_a^b |\overline{\gamma}'(t)|dt.$$

Доказательство:

Для любого разбиения $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ отрезка $[a,b]$ имеем

$$\sum_{i=1}^n |\overline{\gamma}(t_i) - \overline{\gamma}(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \overline{\gamma}'(t)dt \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\overline{\gamma}'(t)|dt = \int_a^b |\overline{\gamma}'(t)|dt.$$

Переходя к верхней грани по всевозможным разбиениям отрезка, получим неравенство

$$S \leq \int_a^b |\overline{\gamma}'(t)|dt.$$

Докажем справедливость неравентсва противоположного. Пусть $\epsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности функции $\overline{\gamma}'$ $\exists \delta > 0$ $(|s-t| < \delta \Rightarrow |\overline{\gamma}'(s) - \overline{\gamma}'(t)| < \epsilon)$. Возьмём разбиение отрезка с диамотром меньшим δ. Тогда $\forall t \in [t_{i-1}, t_i]$ имеем

$$|\overline{\gamma}'(t)| = |(\overline{\gamma}'(t) - \overline{\gamma}'(t_i)) + \overline{\gamma}'(t_i)| \leq |\overline{\gamma}'(t) - \overline{\gamma}'(t_i)| + |\overline{\gamma}'(t_i)| \leq |\overline{\gamma}'(t_i)| + \epsilon.$$

Далее получим

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\overline{\gamma}'(t)|dt - \epsilon\Delta t_i \leq |\overline{\gamma}'(t_i)|\Delta t_i = |\int_{t_{i-1}}^{t_i} (\overline{\gamma}'(t) + \overline{\gamma}'(t_i) - \overline{\gamma}'(t))dt| \leq$$

$$\leq |\int_{t_{i-1}}^{t_i} \overline{\gamma}'(t)dt| + |\int_{t_{i-1}}^{t_i} (\overline{\gamma}')(t_i) - \overline{\gamma}'(t)dt| \leq |\overline{\gamma}(t_i) - \overline{\gamma}(t_{i-1})| + \epsilon\Delta t_i$$

и

$$\int_a^b |\overline{\gamma}'(t)|dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\overline{\gamma}'(t)|dt \leq \sum_{i=1}^n |\overline{\gamma}(t_i) - \overline{\gamma}(t_{i-1})| + 2\epsilon(b-a) \leq S + 2\epsilon(b-a)$$

Тогда в силу произвольности $\epsilon > 0$ имеем неравенство

$$\int_a^b |\overline{\gamma}'(t)|dt \le S.$$

2-3. Определение криволинейных интегралов первого и второго рода по параметризованной гладкой прямой:

Пусть $L = L_{\overline{\gamma}}$ — гладкая кривая, а функции $f(x,y), \quad P(x,y), \quad Q(x,y)$ определены на L. Пусть $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ — разбиение отрезка $[a,b], \quad M_k = (x_k, y_k) = (\gamma_1(t_k), \gamma_2(t_k)), \quad k = 0,\ldots,n$, и l_k — дуга $M_{k-1}M_k$ кривой $L, \quad k = 1,\ldots,n$.

На каждой дуге $M_{k-1}M_k$ выберем произвольную точку $N_k(\xi_k, \eta_k)$, соответсвующую некоторому значению $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ параметра t.

Обозначим длину дуги $M_{k-1}M_k$ через

$$\Delta s_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\overline{\gamma}'(t)|dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}dt$$

и диаметром разбиения кривой L назовём число $\Delta = \max_{1\le k\le n} \Delta s_k$.

Определим интегральные суммы

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k)\Delta s_k.$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^n P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k.$$

$$\sigma_3 = \sum_{k=1}^n Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k,$$

где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad \Delta y_k = y_k - y_{k-1}$.

Определение криволинейных интегралов первого и второго рода:

Назовём число I_m пределом интегральных сумм $\sigma_m \quad (m = 1,2,3)$ при стремлении диаметра Δ к нулю, если

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad (\Delta < \delta \Rightarrow |\sigma - I_m| < \epsilon)$ (независимо от выбора точек N_k).

Число I_1 называют криволинейным интегралом первого рода от функции f по кривой L и обозначают символом

$$\int_L f(x,y)ds.$$

Число I_2 называют криволинейным интегралом второго рода от функции P по кривой L (в направлении от A до B) и обозначают символом

$$\int_L P(x,y)dx.$$

2 Условия существования криволинейных интегралов.

Условия существования криволинейных интегралов:

Если кривая $L = L_{\overline{\gamma}}$ является гладкой и функции f, P, Q непрерывны вдоль этой кривой, то все три криволинейных интеграла существуют и могут быть вычислены по формулам

$$\int_L f(x,y)dx = \int_a^b f(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}dt, \qquad (1)$$

$$\int_L P(x,y)dx = \int_a^b P(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_1'(t)dt, \qquad (2)$$

$$\int_L Q(x,y)dy = \int_a^b Q(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_2'(t)dt \qquad (3)$$

Доказательство:

Прежде всего отметим, что определенные интегралы, стоящие в правых частях формул, существуют, так как их подынтегральные функции непрерывны на отрезке $[a, b]$

Докажем первое равенство. Обозначим

$$I_1 = \int_a^b f(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}dt$$

и оценим разность

$$\sigma_1 - I_1 = \sum_{k=1}^n f(\xi_k,\eta_k)\Delta l_k - \int_a^b f(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}dt =$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (f(\gamma_1(\tau_k),\gamma_2(\tau_k)) - f(\gamma_1(t),\gamma_2(t)))\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}dt$$

Так как функции $\gamma_1'(t)$ и $\gamma_2'(t)$ непрерывны на $[a, b]$ и одновременно не обращаются в нуль, то

$m = \min_{a \le t \le b} \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} > 0$ и $\Delta s_k \ge m \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = m\Delta t_k$.

Следовательно

$$\Delta t_k \le \frac{1}{m}\Delta s_k$$

и при стримлении к нулю диаметра разбиения Δ кривой L стемится к нулю и наибольшая из разностей $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$.

Поскольку функция $f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ равномерно непрерывна на отрезке $[a, b]$, то $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \Delta < \delta \Rightarrow$

$$|f(\gamma_1(\tau_k), \gamma_2(\tau_k)) - f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))| < \frac{\epsilon}{S},$$

где S — длина кривой L.

Тогда

$$|\sigma_1 - I_1| \leq \frac{\epsilon}{S} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\gamma_1'(t)) + (\gamma_2'(t))^2} dt = \frac{\epsilon}{S} \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k = \epsilon.$$

Таким образом мы доказали, что интегральные суммы σ_1 стемятся к числу I_1 при $\Delta \to 0$, то есть мы доказали первое равенство.

Для доказательства второго равенства оценим разность

$$\sigma_2 - I_2 = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(P(\gamma_1(\tau_k), \gamma_2(\tau_k)) - P(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\right) \gamma_1'(t) dt.$$

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \Delta < \delta \Rightarrow$

$$P(\gamma_1(\tau_k), \gamma_2(\tau_k)) - P(\gamma_1(t), \gamma_2(t))| < \frac{\epsilon}{M(b-a)},$$

где $M = \max_{a \leq t \leq b} |\gamma_1'(t)|$. Тогда

$$|\sigma_2 - I_2| \leq \frac{\epsilon}{M(b-a)} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma_1'(t)| dt \leq \frac{\epsilon}{M(b-a)} M \sum_{k=1}^{n} \Delta t_k = \epsilon.$$

Это означает, что интегральные суммы $\sigma_2 \to I_2$ при $\Delta \to 0$, то есть мы доказали второе равенство.

Третье равенство доказывается аналогично.

3 Замена параметра в криволинейном интеграле первого рода.

Замена параметра в криволинейном интеграле первого рода:

ПУсть $L = L_\gamma$ — гладкая кривая, функция $\overline{\gamma}$ определена на отрезке $[a, b]$, а функция ϕ определена на отрезке $[a_1, b_1]$, отображает его на отрезок $[a, b]$, имеет непрерывную производную и $\phi'(u) \neq 0 \quad \forall u \in [a_1, b_1]$.

Тогда функция ϕ' сохраняет знак на отрезке $[a_1, b_1]$ и функция ϕ является возрастающей, если $\phi(u) > 0$, и является убывающей, если $\phi(u) < 0$. Согласно правилу замены переменной в интеграе Римана имеем

$$\int_a^b f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}dt = \int_a^b f(\overline{\gamma}(t))|\overline{\gamma}'(t)|dt =$$

$$= \int^{\phi^{-1}(b)_{\phi^{-1}(a)}} f(\overline{\gamma}(\phi(u)))|\overline{\gamma}'(\phi(u))|\phi'(u)du.$$

Если $\phi'(u) > 0$, то $|\overline{\gamma}'(\phi(u))\phi'(u) = |\overline{\gamma}'(\phi(u))\phi'(u)| = |(\overline{\gamma}\circ\phi)'(u)|, \quad \phi^{-1}(a) = a_1, \phi^{-1}(b) = b_1$

Если же $\phi'(u) < 0$, то $|\overline{\gamma}'(\phi(u))|\phi'(u) = -|\overline{\gamma}'(\phi(u))\phi'(u)| = -|(\overline{\gamma}\circ\phi)', \quad \phi^{-1}(a) = b_1, phi^{-1}(b) = a_1$.

Тогда в любом случае

$$\int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\overline{\gamma}(\phi(u)))|\overline{\gamma}'(\phi(u))|\phi'(u)du = \int_{a_1}^{b_1} f(\overline{\gamma}(\phi(u)))|(\overline{\gamma}\circ\phi)'(u)du$$

Обозначим $\overline{\gamma^*}(u) = (\overline{\gamma}\circ\phi)(u)$. чоевидно, что вектор-функция $\overline{\gamma^*}$ непрерывно диффиренцируема на отрезке $[a_1, b_1]$ и её производная ни в одной точке этого отрезка не равна вектору $(0,0)$. Тогда вектор-функцию $\overline{\gamma^*}$ можно считать другим параметрическим представлением кривой L.

4 Ориентированная гладкая кривая и криволинейный интеграл второго рода по ней.

1. Понятие ориентированной гладкой кривой:

Пусть L - гладкая кривая. Две ее параметризации $L_{\overline{\gamma}}$, где $\overline{\gamma}$ определена на отрезке $[a, b]$, и $L_{\overline{\gamma^*}}$, где $\overline{\gamma^*}$ определена на отрезке $[a_1, b_1]$, назовем положительно эквивалентными, если существует функция φ определеная на отрезке $[a_1, b_1]$, отображающая его на отрезок $[a, b]$, имеющая непрерывную производную с условием $\varphi'(u) > 0$ при всех $u \in [a_1, b_1]$, такая, что $\overline{\gamma^*} = (\overline{\gamma}\circ\varphi)$.

Класс всех положительно эквивалентных друг другу параметризаций называют ориентированной гладкой кривой.

2. Понятие криволинейного интеграла второго рода по ориентированной гладкой кривой:

Криволинейный интеграл второго рода по ориентированной кривой определяют как интеграл по одной из ее параметризаций.

Пользуясь формулой замены переменной в интеграле Римана, легко показать, что данное определение корректно.

Обозначим одну из ориентаций гладкой кривой L через L^+, а другую через L^-. Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_{L^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{L^-} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

5 Формула Грина.

1. Определение трапеции первого рода:

Множество D назовем трапецией первого рода, если

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\right\},$$

где функции φ_1, φ_2 - непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a,b]$.

2. Определение трапеции второго рода:

Множество D назовем трапецией второго рода, если

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d],\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\right\},$$

где функции ψ_1, ψ_2 - непрерывно дифференцируемые на отрезке $[c,d]$.

3. Формула Грина для трапеции второго рода:

(формула Грина для трапеции первого рода.) Пусть замкнутое множество D является трапецией первого рода, L - положительно ориентированная граница D, а функция P и ее частная производная $\frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывны на D. Тогда справедливо равенство

$$\oint\limits_L P(x,y)dx = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy. \tag{49}$$

Доказательство. Пусть

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\right\},$$

где функции φ_1, φ_2 - непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a,b]$. Обозначим точки $A(a,\varphi_1(a)),\ B(b,\varphi_1(b)),\ E(b,\varphi_2(b)),\ F(a,\varphi_2(a))$. Тогда положительная ориентация границы L соответствует последовательности точек $ABEFA$ этого контура.

Согласно определению криволинейного интеграла второго рода имеем

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \int\limits_a^b P(x,\varphi_1(x))dx,$$

$$\int\limits_{EF} P(x,y)dx = \int\limits_b^a P(x,\varphi_2(x))dx = -\int\limits_a^b P(x,\varphi_2(x))dx,$$

$$\int\limits_{BE} P(x,y)dx = 0, \quad \int\limits_{FA} P(x,y)dx = 0.$$

Следовательно,

$$\oint\limits_L P(x,y)dx = \int\limits_a^b P(x,\varphi_1(x))dx - \int\limits_a^b P(x,\varphi_2(x))dx.$$

С другой стороны, сводя двойной интеграл к повторному и используя формулу Ньютона-Лейбница, имеем

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy = \int\limits_a^b P(x,\varphi_2(x))dx - \int\limits_a^b P(x,\varphi_1(x))dx.$$

Таким образом справедливо равенство

$$\oint\limits_L P(x,y)dx = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy.$$

$\square$

4. Понятие плоского элементарного множества:

Плоское множество D назовем элементарным, если прямыми, параллельными координатным осям, его можно разбить на конечное число трапеций первого рода, а также на конечное число трапеций второго рода.

5. Формула Грина для замкнуторго элементарного множества:

(формула Грина.) Пусть замкнутое множество D является элементарным замкнутым множеством и L - положительно ориентированная граница D, которая является простым контуром. Пусть функции P, Q и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны на D. Тогда справедливо равенство

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy. \tag{51}$$

6. Понятние односвязной и многосвязной плоской области:

Плоскую область D называют **односвязной областью,** если она обладает следующим свойством: если простой замкнутый контур L целиком лежит в области D, то и область, ограниченная контуром L, целиком лежит в D. Плоскую область, не являюшvюся односвязной, называют **многосвязной.**

7. Формула Грина для многосвязной области:

формулу Грина для многосвязной области

$$\oint\limits_{L_0} Pdx + Qdy - \sum_{i=1}^{n} \oint\limits_{L_i} Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy, \tag{52}$$

где все контуры L_i, $i - 0, 1, \ldots, n$, обходятся против часовой стрелки.

6 Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования:

Для того чтобы криволинейный интеграл в области D не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы для любого кусочно гладкого контура L в D выполнялось равенство

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Доказательство: Пока ещё не доказал.