Содержание

1 Глава 1

1.1 Случайные события, классификация событий, операции над ними.

Определение случайного события:

Пусть Ω — множество элементарных исходов эксперимента. Случайным событием называется любое подмножество множества Ω.

Определение достоверного события:

Достоверным событием называется событие Ω, которому благоприятствует каждый исход эксперимента.

Определение невозможного события:

Невозможным событием называется пустое множество, которому не благоприятствует ни один исход эксперимента.

Определение суммы событий:

Суммой событий A и B называется событие $C = A \cup B$, которому благоприятствуют исходы, принадлежащие хоть одному из событий A или B.

Определение произведения событий:

Произведением событий A и B называется событие $C = A \cap B$, которому благоприятствуют исходы и события A, и события B.

Определение несовместных событий:

Случайные события A и B называются несовместными, если $A \cap B = \varnothing$.

Определение противоположного события:

Событием, противоположным событию A называется событие $\overline{A}$, которое состоит из исходов, не благоприятствующих A.

1.2 Определения: кольцо, алгебра, σ-алгебра, минимальная σ-алгебра над классом K. Борелевская σ-алгебра.

Определение кольца:

Кольцом R называется непустой класс множества замкнутый относительно операций сложения и взятия разности.

Определение алгебры:

Алгеброй $\mathcal{A}$ называется непустой класс множества замкнутый относительно сложения и отрицания.

Определение σ-алгебры:

σ-алгебра $\mathcal{F}$ — это непустой класс множества замкнутый относительно счётного количества сумм и отрицаний:

1. Если $A \in \mathcal{F}$, то $\overline{A} \in \mathcal{F}$;
2. $\Omega \in \mathcal{F}$;
3. Если $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Определение σ-алгебры событий:

Сигма алгеброй событий называется множество $\mathcal{F}$ подмножеств $A \subset \Omega$, удовлетворяющее условиям:

1. если $A \in \mathcal{F}$, то $\overline{A} \in \mathcal{F}$;
2. $\Omega \in \mathcal{F}$;
3. если $\{A\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$, то $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Определение минмальной σ-алгебры над классом K:

Пусть K — некоторый класс подмножеств из Ω. σ-алгебра $\sigma(K)$ называется наименьшей σ-алгеброй, содержащей класс K, если $K \in \sigma(K)$; любая σ-алгебра $\mathcal{F}$, которая содержит $K \quad (K \subset \mathcal{F})$, содержит и $\sigma(K) \subset \mathcal{F}$.

Определение Борелевской σ-алгебры:

Борелевской σ-алгеброй β называется минимальная σ-алгебра над классом полуинтервалов $K = \{[a, b]\}$ из R, то есть:

$$\Omega = (-\infty, \infty) = R \quad K = \{[a, b), [a, +\infty), (a, +\infty), (-\infty, b), (-\infty, b], (a, b]\}.$$

1.3 Теорема Каратеодори.

Пусть $Q(A)$ — счётно аддитивная вероятностная мера на алгебре $\mathcal{A}$. Тогда существует единственная счётно аддитивная вероятностная мера $P(A)$, заданная на минимальной σ-алгебре $\mathcal{F}$ и являющаяся её продолжением, то есть $\forall A \in \mathcal{A} \quad P(A) = Q(A)$.

1.4 Определения: мера, конечно-аддитивная, счётно-аддитивная мера

Пусть Ω — множество элементарных исходов эксперимента. Некоторое его подмножество $A \subset \Omega$ называется случайным событием.

Определение конечно аддитивной вероятностной меры

Конечно аддитивной вероятностной мерой $Q(A)$ называется функция множества $Q : \mathcal{A} \to [0; 1]$, такая, что:

1. $\forall A \in \mathcal{A} \quad Q(A) \geq 0$;
2. $Q(\Omega) = 1$;
3. $\forall A, B \in \mathcal{A} : \quad A \cap B = \varnothing \quad Q(A \cup B) = Q(A) + Q(B) \quad Q\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} Q(A_i)$.

Определение счётно аддитивной вероятностной меры:

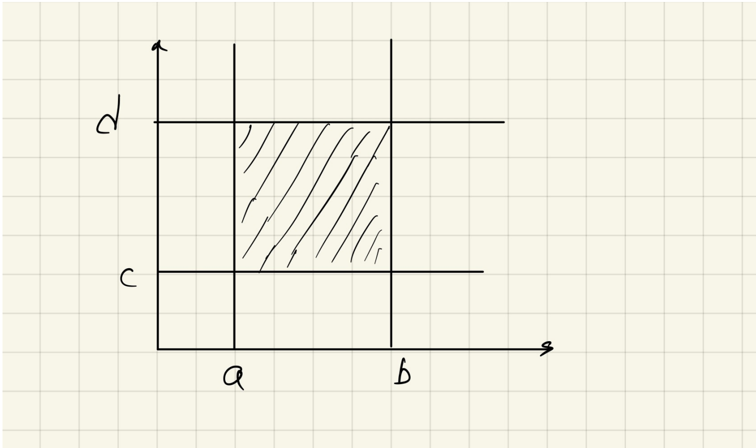
Счётно аддитивно вероятностной мерой $P(A)$ называется функция множества $P : \mathcal{F} \to [0; 1]$, такая, что:

1. $\forall A \in \mathcal{F} \quad P(A) \geq 0$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F} : \quad \forall i \neq j \quad A_i \bigcap A_j = \varnothing \quad P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

1.5 Построение меры Лебега. Верхняя мера Лебега, нижняя мера Лебега, мера Лебега. Измеримое по Лебегу множество.

Пусть $P =< a, b > \times < c, d >$. $P \subset R^2$ — прямоугольник.

Мерой прямоугольника назовём $m(P)$, где
$m(P) = (b - a)(d - c)$



Множество A назовём эелментарным, если оно представимо в виде суммы прямоугольников хотя бы 1 способом:

$$A = \bigcup P_k,$$

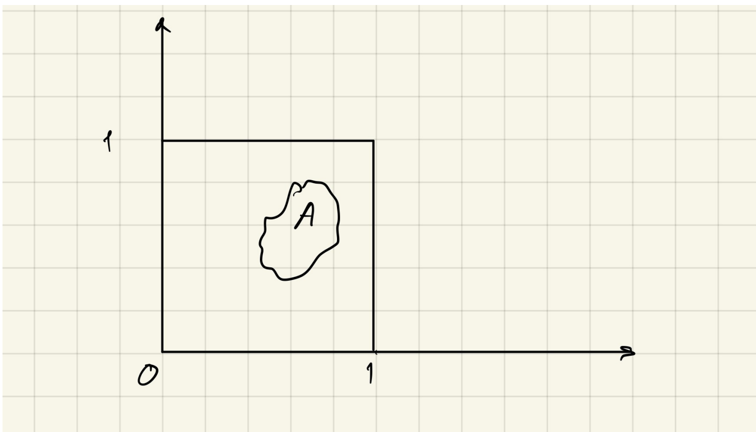
где $\{P_k\}$ — покрытие.

Мерой элементарного сножества A называется

$$m^{'}(A) = \sum m(P_k),$$

где $\{P_k\}$ — разбиение A, то есть $\forall j \neq k \quad P_k \cap P_j = \varnothing$.

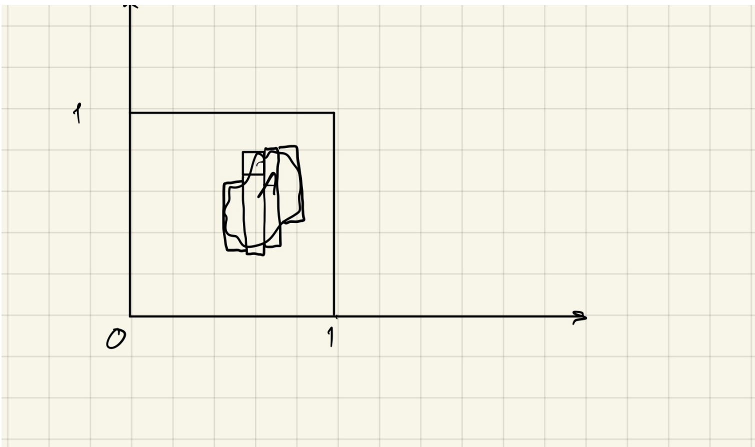
Рассмотрим множество $E = [0; 1] \times [0; 1]$



Определение верхней меры Лебега:

Пусть A — некоторое множество. Рассмотрим $\{P_k\}$, такое, что:

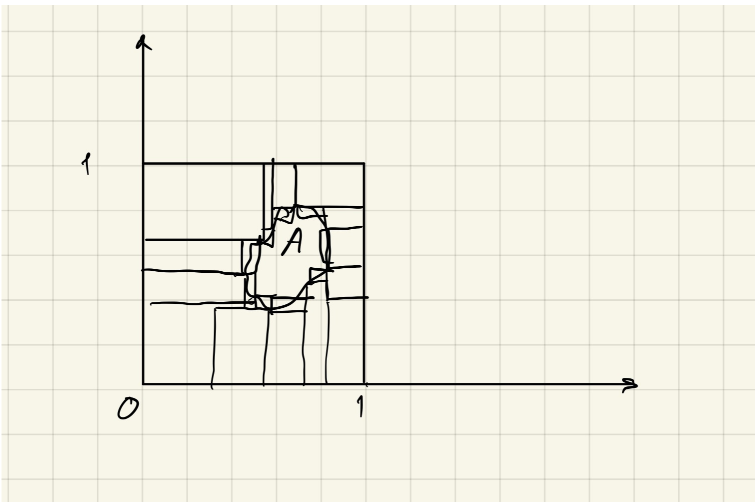
$$A \subset P_k$$



Верхней мерой Лебега называется

$$\mu^*(A) = \inf_{\{P_k\}} \sum m(P_k)$$

Определение нижней меры Лебега:
Рассмотрим множество $E \backslash A. (m(E) = 1)$



Нижней мерой Лебега называется:

$$\mu_*(A) = 1 - \mu^*(E \backslash A)$$

Определение меры Лебега и измеримого по Лебегу множества:
Говорят, что множество A измеримо по Лебегу, если $\mu^*(A) = \mu_*(A) = \mu(A)$.
Величина $\mu(A)$ — называется мерой Лебега множества A.

1.6 Вероятностная мера, её свойства, непрерывность вероятностной меры.

Определение вероятностной меры:

Вероятностной мерой называется функция $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$, удовлетворяющая условиям:

1. $P(\Omega) = 1$;
2. $\forall A \in \mathcal{F} \quad P(A) \geq 0$;
3. $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$, такой, что $\forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \varnothing$, $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Свойства вероятностной меры:

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

   Док-во:

   Ш. соб. $\Omega = A \cup \bar{A}$; $A \cap \bar{A} = \varnothing$

   Тогда $1 \overset{(P1)}{=} P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) \overset{(P3)}{=} P(A) + P(\bar{A})$

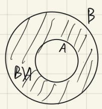
   $\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

   следствие: $P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

2. Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$

   и $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

   Док-во:

   Представим событие B в виде суммы несовместных событий: $B = A \cup (B \setminus A) \Rightarrow$

   $\Rightarrow P(B) = P(A \cup B \setminus A) = P(A) + P(B \setminus A)$

   т.к. по аксиоме (P2) $P(\cdot) \geq 0 \Rightarrow$

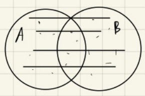
   $\Rightarrow P(B) \geq P(A)$

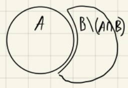
Теорема сложения вероятностей:

Пусть A и B - некоторые события (могут быть совместные), $A, B \in \mathcal{F}$. Тогда

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Док-во:





$$P(A \cup B) = P(A \cup (B \setminus A \cap B)) \overset{\text{св-во 2}}{=} P(A) + P(B \setminus A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Следствие: $\forall A \in \mathcal{F}$ $\forall B \in \mathcal{F}$

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

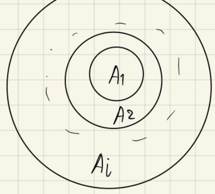
3.

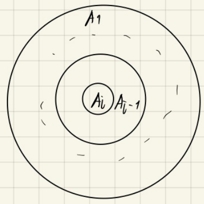
Непрерывность вероятностной меры:

Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ - монотонный класс событий, т.е.

① $A_i \subset A_{i+1}$ или ② $A_i \supset A_{i+1}$

расширяющаяся / сужающаяся воронка событий





Тогда

$$P(\lim_{n \to \infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} (A_n)$$

4.

Док-во:

Пусть $A_i \subset A_{i+1}$. Тогда

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \text{ и назовем } A = \lim_{i \to \infty} A_i$$

По аксиомам $P(A) \leq 1$. Тогда

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \left| \begin{matrix} B_1 = A_1 \\ B_i = A_i \setminus A_{i-1} \end{matrix} \right| =$$

$$\overset{(P3)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{i \to \infty} \sum_{j=1}^{i} P(B_j) = \lim_{i \to +\infty} P\left(\bigsqcup_{j=1}^{i} B_j\right) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$$

Пусть $A_i \supset A_{i+1}$. Тогда

$$P(A) = P(\lim_{i \to +\infty} A_i) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}\right) =$$

$$= 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}\right) = 1 - \lim_{i \to \infty} P(\overline{A_i}) = \lim_{i \to \infty} (1 - P(\overline{A_i})) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$$

1.7 Классическое вероятностное пространство. Классическое определение вероятности.

Вероятностной моделью стохастического эксперимента называется тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где Ω — множество элементарных исходов экмперимента, $\mathcal{F}$ — алгебра событий, P — вероятностная мера.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство.

Определение классического вероятностного пространства:

Классическим вероятностым пространством, называется вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, в конечном множестве элементарных исходов которого все элементарные исходы равновозможны.

Построим вероятностную меру:

Пусть $\Omega = \{w1, \ldots, w_n\}$.
Рассмотрим $\{A_i\}_{i=1}^n$, где $A_i = \{w_i\}$. Тогда

$$A_i \cap A_j = \varnothing \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

$$1 = P(\Omega) = P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = |P(A_i) = P(w_i) = p| = \sum_{i=1}^{n} p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{n} \Rightarrow \forall w_i \quad P(w_i) = \frac{1}{n}$$

Пусть $A = \{w_{i_1}, \ldots, w_{i_k}\}$ $0 \le k \le n$. Тогда вероятностная мера в классическом вероятностном пространстве имеет вид

$$P(A) = P\left(\bigsqcup_{j=1}^{k} w_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{k} P(w_{ij}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n},$$

$P(A) = \frac{k}{n}$ **— называется классической вероятностью**,
где k — количество благоприятных A элементарных исходов, n — количество элементарных исходов эксперимента.

1.8 Дискретное вероятностное пространство.

Определение дискретного вероятностного пространства:

Дискретным вероятностным пространством называется вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, такое, что Ω — конечное или счётное множество неравновозможных исходов.

Вероятностную меру зададим числами $p_i = P(w_i) > 0$, такими, что $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Тогда $\forall A \in \mathcal{F}$ веротность вычисляется как $P(A) = P(\bigcup\limits_{w_i \in A} w_i) = \sum\limits_{w_i \in A} P(w_i)$.

1.9 Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей.

Определение условной вероятности:

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство и $A, B \in \mathcal{F}; \quad P(B) > 0$.

Условной вероятностью события A при условии, что наступило событие B называется число:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Теорема умножения вероятностей:

Пусть A и B — случайные события и $P(B) > 0$. Тогда

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Пусть A_1, A_2, A_3 — случайные события и $P(A_1) > 0$ и $P(A_1 \cap A_2) > 0$. Тогда

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2)$$

1.10 Формулы полной вероятности и Байеса.

Теорема (формула полной вероятности):

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство и $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$ — полная группа попарно несовместных событий; $P(A_i) \geq 0$. Пусть $A \in \mathcal{F}$ — неполное событие $P(A|A_i) \geq 0$. Тогда $P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \cdot P(A|A_i)$.

Доказательство:

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (\sqcup_{i=1}^{\infty} A_i)) = P(\sqcup_{i=1}^{\infty} (A \cap A_i)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) P(A|A_i)$$

.

Теорема (формула Байеса):

Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$ — полная группа попарно несовместных событий и пусть для некоторого $P(A) > 0$. Тогда

$$\forall i = \overline{1, \infty} \quad P(A_i|A) = \frac{P(A_i)P(A|A_i)}{P(A)}$$

Доказательство:

$$P(A_i|A) = \frac{P(A \cap A_i)}{P(A)} = \frac{P(A_i) \cdot P(A|A_i)}{P(A)}$$

1.11 Независимость событий. Независимость в совокупности.

Определение независимости событий:

Случайные события A и B называются независимыми, если:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Определение независимости в совокупности:

$\{A_i\}_{i=1}^n$ — называются независимыми в совокупности, если

$$\forall 2 \leq k \leq n \quad P(\bigcap_{j=1}^{k} A_{ij}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{ij})$$

1.12 Теорема о независимости противоположных событий. Критерий независимости случайных событий.

Теорема о независимости противоположных событий:

Пусть A и B — независимы. Тогда события A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B. $\overline{A}$ и $\overline{B}$ — попарно независимы.

Доказательство:

Рассмотрим A и $\overline{B}$. Тогда $P(A \cap \overline{B})$. Можем заметить, что $P(A \cap \overline{B}) = P(A \backslash (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B})$.

Остальные случаи аналогичны.

Критерий независимости случайных событий:

Пусть A и B такие, что $P(B) > 0$. Тогда Случайные события A и B независимы, тогда и только тогда, когда:

$$P(A|B) = P(A)$$

Доказательство:

Необходимость:
Пусть A и B независимы:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Достаточность:
Пусть выполняется: $P(A|B) = P(A)$. Тогда из определения условной вероятности следует, что $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(A) = P(A) \cdot P(B)$, то есть выполняется определение.

2 Глава 2

2.1 Определение измеримой функции, абстрактной и действительной. Критерий измеримости действительных функций.

Определение измеримой функции:

Пусть X и Y — некоторые множества и пусть S_x и S_y — классы подмножества. $f : X \to Y$ — некоторая функция.

Функция $f : X \to Y$ называется (S_x, S_y) — измеримой, если:

$$\forall B \in S_y \quad \exists f^{-1}(B) \in S_x$$

Определение измеримой действительной функции:

Действительная функция $f(x)$ с областью определения $X \subset R$ называется μ-измеримой или S_μ-измеримой, если для любого борелевского множества $b \in \beta(R) \quad f^{-1}(b) \in S_\mu$.

Определение (критерий измеримости действительных функций):

Действительная функция $f(x)$ измерима $\Leftrightarrow$

$$\forall C \in R \quad f^{-1}(b) = f^{-1}(-\infty, C) \text{ — измерима}$$

или

$$\{x : f(x) < C\}$$

2.2 Случайная величина. Виды случайных величин (дискретная и абсолютно непрерывная).

Определение случайной величины:

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство. Случайной величиной называется вещественно значная функция ξ такая, что

$$\xi : \Omega \to R \quad \forall x \in R \quad \{w : \xi(w) < x\} \in \mathcal{F}$$

Определение дискретной случайной величины:

Дискретной случайной величиной называется случайная величина ξ, множество значений которой конечно или счётно, то есть

$$\xi \in \{x_1, x_2, \dots\}$$

Определение абсолюьно непрерывной случайной величины:

Абсолютно непрерывной случайной величиной называется случайная величина ξ, такая, что

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt$$

2.3 Функция распределения и её свойства.

Определение функции распределения:

Функцией распределения вероятностей случайной величины ξ называется функция $F_\xi(x) = P\{w : \xi(w) < x\}$

Свойства функции распределения:

1. $0 \le F_\xi(x) \le 1 \quad \forall x \in R$;
2. $F_\xi(x)$ — неубывающая, непрерывная слева функция;
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$

   $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$;
4. $P\{a \le \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$;
5. $P\{\xi = x_0\} = F_\xi(x_0 + 0) - F_\xi(x_0)$.