

## Содержание

1	Длина кривой. Определение криволинейных интегралов первого и второго рода по параметризованной гладкой прямой.	2
2	Условия существования криволинейных интегралов.	4
3	Замена параметра в криволинейном интеграле первого рода.	5
4	Ориентированная гладкая кривая и криволинейный интеграл второго рода по ней.	6
5	Формула Грина.	7
6	Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.	10
7	Гладкая поверхность. Ориентация поверхности. Площадь поверхности.	10
8	Поверхностный интеграл первого рода и теорема о его существовании.	13
9	Поверхностный интеграл второго рода и его свойства.	16
10	Формула Стокса.	18
11	Формула Остроградского-Гаусса.	20

# 1 Длина кривой. Определение криволинейных интегралов первого и второго рода по параметризованной гладкой прямой.

## 1. Теорема о длине кривой:

Если функция  $\bar{\gamma}$  имеет на отрезке  $[a, b]$  непрерывную производную  $\bar{\gamma}' = (\gamma'_1, \gamma'_2)$ , то кривая  $L = L_{\bar{\gamma}}$  спрямляема и её длина  $S$  выражается равенством

$$S = \int_a^b |\bar{\gamma}'(t)| dt.$$

Доказательство:

Для любого разбиения  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  отрезка  $[a, b]$  имеем

$$\sum_{i=1}^n |\bar{\gamma}(t_i) - \bar{\gamma}(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \bar{\gamma}'(t) dt \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\bar{\gamma}'(t)| dt = \int_a^b |\bar{\gamma}'(t)| dt.$$

Переходя к верхней грани по всевозможным разбиениям отрезка, получим неравенство

$$S \leq \int_a^b |\bar{\gamma}'(t)| dt.$$

Докажем справедливость неравенства противоположного. Пусть  $\epsilon > 0$ . В силу равномерной непрерывности функции  $\bar{\gamma}' \exists \delta > 0 \quad (|s - t| < \delta \Rightarrow |\bar{\gamma}'(s) - \bar{\gamma}'(t)| < \epsilon)$ . Возьмём разбиение отрезка с диаметром меньшим  $\delta$ . Тогда  $\forall t \in [t_{i-1}, t_i]$  имеем

$$|\bar{\gamma}'(t)| = |(\bar{\gamma}'(t) - \bar{\gamma}'(t_i)) + \bar{\gamma}'(t_i)| \leq |\bar{\gamma}'(t) - \bar{\gamma}'(t_i)| + |\bar{\gamma}'(t_i)| \leq |\bar{\gamma}'(t_i)| + \epsilon.$$

Далее получим

$$\begin{aligned} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\bar{\gamma}'(t)| dt - \epsilon \Delta t_i &\leq |\bar{\gamma}'(t_i)| \Delta t_i = \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\bar{\gamma}'(t) + \bar{\gamma}'(t_i) - \bar{\gamma}'(t)) dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \bar{\gamma}'(t) dt \right| + \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\bar{\gamma}'(t_i) - \bar{\gamma}'(t)) dt \right| \leq |\bar{\gamma}(t_i) - \bar{\gamma}(t_{i-1})| + \epsilon \Delta t_i \end{aligned}$$

и

$$\int_a^b |\bar{\gamma}'(t)| dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\bar{\gamma}'(t)| dt \leq \sum_{i=1}^n |\bar{\gamma}(t_i) - \bar{\gamma}(t_{i-1})| + 2\epsilon(b-a) \leq S + 2\epsilon(b-a)$$

Тогда в силу произвольности  $\epsilon > 0$  имеем неравенство

$$\int_a^b |\bar{\gamma}'(t)| dt \leq S.$$

**2-3. Определение криволинейных интегралов первого и второго рода по параметризованной гладкой прямой:**

Пусть  $L = L_{\bar{\gamma}}$  — гладкая кривая, а функции  $f(x, y)$ ,  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  определены на  $L$ . Пусть  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  — разбиение отрезка  $[a, b]$ ,  $M_k = (x_k, y_k) = (\gamma_1(t_k), \gamma_2(t_k))$ ,  $k = 0, \dots, n$ , и  $l_k$  — дуга  $M_{k-1}M_k$  кривой  $L$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

На каждой дуге  $M_{k-1}M_k$  выберем произвольную точку  $N_k(\xi_k, \eta_k)$ , соответствующую некоторому значению  $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$  параметра  $t$ .

Обозначим длину дуги  $M_{k-1}M_k$  через

$$\Delta s_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\bar{\gamma}'(t)| dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} dt$$

и диаметром разбиения кривой  $L$  назовём число  $\Delta = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta s_k$ .

Определим интегральные суммы

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k.$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^n P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k.$$

$$\sigma_3 = \sum_{k=1}^n Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k,$$

где  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ,  $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ .

**Определение криволинейных интегралов первого и второго рода:**

Назовём число  $I_m$  пределом интегральных сумм  $\sigma_m$  ( $m = 1, 2, 3$ ) при стремлении диаметра  $\Delta$  к нулю, если

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad (\Delta < \delta \Rightarrow |\sigma - I_m| < \epsilon) \quad (\text{независимо от выбора точек } N_k).$$

Число  $I_1$  называют криволинейным интегралом первого рода от функции  $f$  по кривой  $L$  и обозначают символом

$$\int_L f(x, y) ds.$$

Число  $I_2$  называют криволинейным интегралом второго рода от функции  $P$  по кривой  $L$  (в направлении от  $A$  до  $B$ ) и обозначают символом

$$\int_L P(x, y) dx.$$

## 2 Условия существования криволинейных интегралов.

**Условия существования криволинейных интегралов:**

Если кривая  $L = L_{\bar{\gamma}}$  является гладкой и функции  $f, P, Q$  непрерывны вдоль этой кривой, то все три криволинейных интеграла существуют и могут быть вычислены по формулам

$$\int_L f(x, y) dx = \int_a^b f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} dt, \quad (1)$$

$$\int_L P(x, y) dx = \int_a^b P(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \gamma_1'(t) dt, \quad (2)$$

$$\int_L Q(x, y) dy = \int_a^b Q(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \gamma_2'(t) dt \quad (3)$$

Доказательство:

Прежде всего отметим, что определенные интегралы, стоящие в правых частях формул, существуют, так как их подынтегральные функции непрерывны на отрезке  $[a, b]$

Докажем первое равенство. Обозначим

$$I_1 = \int_a^b f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} dt$$

и оценим разность

$$\begin{aligned} \sigma_1 - I_1 &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta l_k - \int_a^b f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} dt = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (f(\gamma_1(\tau_k), \gamma_2(\tau_k)) - f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))) \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} dt \end{aligned}$$

Так как функции  $\gamma_1'(t)$  и  $\gamma_2'(t)$  непрерывны на  $[a, b]$  и одновременно не обращаются в нуль, то

$$m = \min_{a \leq t \leq b} \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} > 0 \text{ и } \Delta s_k \geq m \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = m \Delta t_k.$$

Следовательно

$$\Delta t_k \leq \frac{1}{m} \Delta s_k$$

и при стремлении к нулю диаметра разбиения  $\Delta$  кривой  $L$  стремятся к нулю и наибольшая из разностей  $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ .

Поскольку функция  $f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  равномерно непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \Delta < \delta \Rightarrow$

$$|f(\gamma_1(\tau_k), \gamma_2(\tau_k)) - f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))| < \frac{\epsilon}{S},$$

где  $S$  — длина кривой  $L$ .

Тогда

$$|\sigma_1 - I_1| \leq \frac{\epsilon}{S} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} dt = \frac{\epsilon}{S} \sum_{k=1}^n \Delta s_k = \epsilon.$$

Таким образом мы доказали, что интегральные суммы  $\sigma_1$  стремятся к числу  $I_1$  при  $\Delta \rightarrow 0$ , то есть мы доказали первое равенство.

Для доказательства второго равенства оценим разность

$$\sigma_2 - I_2 = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (P(\gamma_1(\tau_k), \gamma_2(\tau_k)) - P(\gamma_1(t), \gamma_2(t))) \gamma_1'(t) dt.$$

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \Delta < \delta \Rightarrow$

$$|P(\gamma_1(\tau_k), \gamma_2(\tau_k)) - P(\gamma_1(t), \gamma_2(t))| < \frac{\epsilon}{M(b-a)},$$

где  $M = \max_{a \leq t \leq b} |\gamma_1'(t)|$ . Тогда

$$|\sigma_2 - I_2| \leq \frac{\epsilon}{M(b-a)} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma_1'(t)| dt \leq \frac{\epsilon}{M(b-a)} M \sum_{k=1}^n \Delta t_k = \epsilon.$$

Это означает, что интегральные суммы  $\sigma_2 \rightarrow I_2$  при  $\Delta \rightarrow 0$ , то есть мы доказали второе равенство.

Третье равенство доказывается аналогично.

### 3 Замена параметра в криволинейном интеграле первого рода.

**Замена параметра в криволинейном интеграле первого рода:**

Пусть  $L = L_\gamma$  — гладкая кривая, функция  $\bar{\gamma}$  определена на отрезке  $[a, b]$ , а функция  $\phi$  определена на отрезке  $[a_1, b_1]$ , отображает его на отрезок  $[a, b]$ , имеет непрерывную производную и  $\phi'(u) \neq 0 \quad \forall u \in [a_1, b_1]$ .

Тогда функция  $\phi'$  сохраняет знак на отрезке  $[a_1, b_1]$  и функция  $\phi$  является возрастающей, если  $\phi(u) > 0$ , и является убывающей, если  $\phi(u) < 0$ . Согласно правилу замены переменной в интеграле Римана имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} dt &= \int_a^b f(\bar{\gamma}(t)) |\bar{\gamma}'(t)| dt = \\ &= \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\bar{\gamma}(\phi(u))) |\bar{\gamma}'(\phi(u))| \phi'(u) du. \end{aligned}$$

Если  $\phi'(u) > 0$ , то  $|\bar{\gamma}'(\phi(u))| \phi'(u) = |\bar{\gamma}'(\phi(u)) \phi'(u)| = |(\bar{\gamma} \circ \phi)'(u)|$ ,  $\phi^{-1}(a) = a_1, \phi^{-1}(b) = b_1$

Если же  $\phi'(u) < 0$ , то  $|\bar{\gamma}'(\phi(u))| \phi'(u) = -|\bar{\gamma}'(\phi(u)) \phi'(u)| = -|(\bar{\gamma} \circ \phi)'(u)|$ ,  $\phi^{-1}(a) = b_1, \phi^{-1}(b) = a_1$ .

Тогда в любом случае

$$\int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\bar{\gamma}(\phi(u))) |\bar{\gamma}'(\phi(u))| \phi'(u) du = \int_{a_1}^{b_1} f(\bar{\gamma}(\phi(u))) |(\bar{\gamma} \circ \phi)'(u)| du$$

Обозначим  $\bar{\gamma}^*(u) = (\bar{\gamma} \circ \phi)(u)$ . Очевидно, что вектор-функция  $\bar{\gamma}^*$  непрерывно дифференцируема на отрезке  $[a_1, b_1]$  и её производная ни в одной точке этого отрезка не равна вектору  $(0, 0)$ . Тогда вектор-функцию  $\bar{\gamma}^*$  можно считать другим параметрическим представлением кривой  $L$ .

## 4 Ориентированная гладкая кривая и криволинейный интеграл второго рода по ней.

### 1. Понятие ориентированной гладкой кривой:

*Пусть  $L$  - гладкая кривая. Две ее параметризации  $L_{\bar{\gamma}}$ , где  $\bar{\gamma}$  определена на отрезке  $[a, b]$ , и  $L_{\bar{\gamma}^*}$ , где  $\bar{\gamma}^*$  определена на отрезке  $[a_1, b_1]$ , назовем положительно эквивалентными, если существует функция  $\varphi$  определенная на отрезке  $[a_1, b_1]$ , отображающая его на отрезок  $[a, b]$ , имеющая непрерывную производную с условием  $\varphi'(u) > 0$  при всех  $u \in [a_1, b_1]$ , такая, что  $\bar{\gamma}^* = (\bar{\gamma} \circ \varphi)$ .*

*Класс всех положительно эквивалентных друг другу параметризаций называют ориентированной гладкой кривой.*

### 2. Понятие криволинейного интеграла второго рода по ориентированной гладкой кривой:

*Криволинейный интеграл второго рода по ориентированной кривой определяют как интеграл по одной из ее параметризаций.*

Пользуясь формулой замены переменной в интеграле Римана, легко показать, что данное определение корректно.

Обозначим одну из ориентаций гладкой кривой  $L$  через  $L^+$ , а другую через  $L^-$ . Тогда справедливо равенство

$$\int_{L^+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = - \int_{L^-} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

## 5 Формула Грина.

### 1. Определение трапеции первого рода:

*Множество  $D$  назовем трапецией первого рода, если*

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \right\},$$

*где функции  $\varphi_1, \varphi_2$  - непрерывно дифференцируемые на отрезке  $[a, b]$ .*

### 2. Определение трапеции второго рода:

*Множество  $D$  назовем трапецией второго рода, если*

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \right\},$$

*где функции  $\psi_1, \psi_2$  - непрерывно дифференцируемые на отрезке  $[c, d]$ .*

### 3. Формула Грина для трапеции первого рода:

(формула Грина для трапеции первого рода.) Пусть замкнутое множество  $D$  является трапецией первого рода,  $L$  - положительно ориентированная граница  $D$ , а функция  $P$  и ее частная производная  $\frac{\partial P}{\partial y}$  непрерывны на  $D$ . Тогда справедливо равенство

$$\oint_L P(x, y)dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)dxdy. \quad (49)$$

Доказательство. Пусть

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \right\},$$

где функции  $\varphi_1, \varphi_2$  - непрерывно дифференцируемые на отрезке  $[a, b]$ . Обозначим точки  $A(a, \varphi_1(a))$ ,  $B(b, \varphi_1(b))$ ,  $E(b, \varphi_2(b))$ ,  $F(a, \varphi_2(a))$ . Тогда положительная ориентация границы  $L$  соответствует последовательности точек  $ABEFA$  этого контура.

Согласно определению криволинейного интеграла второго рода имеем

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y)dx &= \int_a^b P(x, \varphi_1(x))dx, \\ \int_{EF} P(x, y)dx &= \int_b^a P(x, \varphi_2(x))dx = - \int_a^b P(x, \varphi_2(x))dx, \\ \int_{BE} P(x, y)dx &= 0, \quad \int_{FA} P(x, y)dx = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\oint_L P(x, y)dx = \int_a^b P(x, \varphi_1(x))dx - \int_a^b P(x, \varphi_2(x))dx.$$

С другой стороны, сводя двойной интеграл к повторному и используя формулу Ньютона-Лейбница, имеем

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)dxdy = \int_a^b P(x, \varphi_2(x))dx - \int_a^b P(x, \varphi_1(x))dx.$$

Таким образом справедливо равенство

$$\oint_L P(x, y)dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)dxdy.$$

□



#### 4. Формула Грина для трапеции второго рода:

(формула Грина.) Пусть замкнутое множество  $D$  является элементарным замкнутым множеством и  $L$  - положительно ориентированная граница  $D$ , которая является простым контуром. Пусть функции  $P$ ,  $Q$  и их частные производные  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  непрерывны на  $D$ . Тогда справедливо равенство

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

#### 5. Понятие плоского элементарного множества:

Плоское множество  $D$  назовем элементарным, если прямыми, параллельными координатным осям, его можно разбить на конечное число трапеций первого рода, а также на конечное число трапеций второго рода.

#### 6. Формула Грина для замкнутого элементарного множества:

(формула Грина.) Пусть замкнутое множество  $D$  является элементарным замкнутым множеством и  $L$  - положительно ориентированная граница  $D$ , которая является простым контуром. Пусть функции  $P$ ,  $Q$  и их частные производные  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  непрерывны на  $D$ . Тогда справедливо равенство

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \quad (51)$$

#### 7. Понятие односвязной и многосвязной плоской области:

Плоскую область  $D$  называют **односвязной областью**, если она обладает следующим свойством: если простой замкнутый контур  $L$  целиком лежит в области  $D$ , то и область, ограниченная контуром  $L$ , целиком лежит в  $D$ . Плоскую область, не являющуюся односвязной, называют **многосвязной**.

#### 8. Формула Грина для многосвязной области:

формулу Грина для многосвязной области

$$\oint_{L_0} Pdx + Qdy - \sum_{i=1}^n \oint_{L_i} Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (52)$$

где все контуры  $L_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , обходятся против часовой стрелки.

## 6 Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

**Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования:**

Для того чтобы криволинейный интеграл в области  $D$  не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы для любого кусочно гладкого контура  $L$  в  $D$  выполнялось равенство

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Доказательство: Пока ещё не доказал.

## 7 Гладкая поверхность. Ориентация поверхности. Площадь поверхности.

### 1. Понятие гладкой поверхности:

- 1) множество  $D$  является замкнутым ограниченным элементарным множеством, граница  $\gamma$  которого представляет собой простой кусочно гладкий контур, а отображение, задаваемое равенствами

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v). \end{cases} \quad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

взаимно однозначно на множестве внутренних точек множества  $D$

- 2) функции  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$  и их частные производные первого порядка непрерывны на множестве  $D$  вплоть до границы  $\gamma$

- 3) хотя бы один из якобианов

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(z, x)}{D(u, v)}$$

отличен от нуля при любых значениях  $u$  и  $v$

Поверхности, удовлетворяющие указанным трем условиям, будем называть кратко *гладкими поверхностями*.

## 2. Понятие ориентации поверхности:

Выделение одной из сторон поверхности  $\Phi$  с помощью параметризации называется **ориентацией поверхности**  $\Phi$ .

Для поверхности заданной явно уравнением  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ , имеем

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \quad (x, y) \in D. \\ z = f(u, v). \end{cases}$$

Тогда

$$\tau'_u = (1, 0, f'_u), \quad \tau'_v = (0, 1, f'_v)$$

и

$$\tau'_u \times \tau'_v = (-f'_u, -f'_v, 1).$$

После нормировки получим

$$\cos \alpha = \frac{-f'_u}{\sqrt{1 + (f'_u)^2 + (f'_v)^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{-f'_v}{\sqrt{1 + (f'_u)^2 + (f'_v)^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_u)^2 + (f'_v)^2}},$$

Если поверхность, заданная неявно уравнением  $F(x, y, z) = 0$ , то вектор  $(F'_x, F'_y, F'_z)$  ортогонален к касательной плоскости. Следовательно,

$$\cos \alpha = \frac{F'_x}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{F'_y}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{F'_z}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}.$$

### 3. Понятие площади поверхности:

Предел  $\sigma(T)$  при стремлении диаметра разбиения к нулю ( $h \rightarrow 0$ ) называют **площадью поверхности**  $\Phi$ . Обозначим ее через  $S$ .

В то же время сумма  $\sigma(T)$  является интегральной суммой для двойного интеграла по области  $D$  от функции  $|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|$ . Таким образом, для площади поверхности  $\Phi$  имеем равенство

$$S = \iint_D |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| dudv. \quad (11)$$

Поскольку

$$|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

то

$$S = \iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv. \quad (12)$$

Введем функции

$$E = (r'_u)^2 = (x'_u(u, v))^2 + (y'_u(u, v))^2 + (z'_u(u, v))^2,$$

$$F = r'_u r'_v = x'_u(u, v)x'_v(u, v) + y'_u(u, v)y'_v(u, v) + z'_u(u, v)z'_v(u, v),$$

$$G = (r'_v)^2 = (x'_v(u, v))^2 + (y'_v(u, v))^2 + (z'_v(u, v))^2.$$

Нетрудно проверить, что

$$|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|^2 = (r'_u)^2(r'_v)^2 - (r'_u r'_v)^2 = EG - F^2.$$

Поэтому равенство (12) можно переписать в виде

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} dudv. \quad (13)$$

В случае поверхности  $\Phi$ , заданной явно уравнением  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ , будем иметь равенство

$$S = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dudv. \quad (14)$$

## 8 Поверхностный интеграл первого рода и теорема о его существовании.

### 1. Понятие поверхностного интеграла первого рода:

Пусть функция  $f(x, y, z)$  определена в точках гладкой поверхности  $\Phi$ , имеющей параметрическое представление

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D.$$

Пусть  $\tau$  - набор измеримых по Жордану множеств  $D_1, \dots, D_n$  являющийся разбиением множества  $D$ ,  $\Delta_\tau$  - диаметр разбиения,  $\Phi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , - части поверхности, соответствующие множествам  $D_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\Delta S_i$  - их площади, и точки  $(u_i, v_i) \in D_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Построим сумму

$$\sigma(\tau) = \sum_{i=1}^n f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)) \Delta S_i$$

Если существует предел  $I$  при  $\Delta_\tau \rightarrow 0$  интегральной суммы  $\sigma(\tau)$ , то он называется **поверхностным интегралом первого рода** от функции  $f$  по поверхности  $\Phi$  и обозначается символом

$$I = \iint_{\Phi} f(x, y, z) dS.$$

**2. Теорема о существовании поверхностного интеграла первого рода:**

Пусть  $\Phi$  - гладкая поверхность, имеющая параметрическое представление (5), и функция  $f(x, y, z)$  непрерывна во всех точках  $\Phi$ . Тогда поверхностный интеграл первого рода существует и может быть вычислен по формуле

$$\begin{aligned} \iint_{\Phi} f(x, y, z) dS &= \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv = \\ &= \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv. \end{aligned} \quad (15)$$

*Доказательство.* Обозначим

$$I^* = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Имеем

"

$$\begin{aligned}
|I^* - \sigma(\tau)| &= \left| I^* - \sum_{i=1}^n f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)) \Delta S_i \right| \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} |f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) - \\
&\quad - f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i))| \sqrt{EG - F^2} du dv \leq \\
&\leq \max_{(u, v) \in D} \sqrt{EG - F^2} \sum_{i=1}^n \omega_i \mu(D_i),
\end{aligned}$$

где  $\omega_i$  - колебание функции  $f$  на множестве  $D_i$ . Последняя часть цепочки неравенств стремится к нулю при  $\Delta_\tau \rightarrow 0$  в силу непрерывности функций  $f$  и  $\sqrt{EG - F^2}$  на замкнутом множестве  $D$ . Таким образом, предел интегральной суммы  $\sigma(\tau)$  при  $\Delta_\tau \rightarrow 0$  равен числу  $I^*$ .  $\square$

## 9 Поверхностный интеграл второго рода и его свойства.

1-2. Понятие поверхностного интеграла второго рода и его свойства:

Пусть  $\Phi$  - гладкая поверхность с параметрическим представлением  
(5)

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D,$$

и на поверхности  $\Phi$  заданы функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$ .

Определим **поверхностные интегралы второго рода**:

$$\iint_{\Phi} P(x, y, z) dydz := \iint_D P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) A(u, v) du dv, \quad (17)$$

$$\iint_{\Phi} Q(x, y, z) dzdx := \iint_D Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) B(u, v) du dv, \quad (18)$$

$$\iint_{\Phi} R(x, y, z) dx dy := \iint_D R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) C(u, v) du dv, \quad (19)$$

или

$$\begin{aligned} & \iint_{\Phi} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dx dy := \\ & = \iint_D (P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) A(u, v) + Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) B(u, v) + \\ & \quad + R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) C(u, v)) du dv. \end{aligned} \quad (20)$$

Используя направляющие косинусы вектора  $\vec{n}$

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{A}{\sqrt{EG - F^2}},$$



$$\cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{B}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{C}{\sqrt{EG - F^2}}$$

преобразуем равенство (20)

$$\begin{aligned} & \iint_{\Phi} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy = \\ & = \iint_{\Phi} (P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma) dS. \end{aligned} \quad (21)$$

Обратим внимание на следующий факт. Введем вектор-функцию  $\vec{F} = (P, Q, R)$ . Тогда подынтегральная функция в интеграле из правой части равенства (21) является скалярным произведением  $\vec{F}\vec{n}$ .

На примере интеграла (19) сформулируем основные свойства поверхностного интеграла второго рода.

1. При изменении стороны поверхности (при смене ориентации поверхности) интеграл меняет знак.
2. Интеграл обладает свойством линейности:

$$\iint_{\Phi} \sum_{j=1}^m \alpha_j R_j(x, y, z) dx dy = \sum_{j=1}^m \alpha_j \iint_{\Phi} R_j(x, y, z) dx dy.$$

3. Если поверхность  $\Phi$  разбита на конечное число частей  $\Phi_k \subset \Phi$ ,  $k = 1, \dots, N$ , не имеющих общих внутренних точек, то

$$\iint_{\Phi} R(x, y, z) dx dy = \sum_{k=1}^N \iint_{\Phi_k} R(x, y, z) dx dy.$$

4. Интеграл

$$\iint_{\Phi} R(x, y, z) dx dy$$

по цилиндрической поверхности  $\Phi$  с образующей, параллельной оси  $Oz$ , равен нулю.

Рассмотрим случай явного задания поверхности  $\Phi$  уравнением  $z = f(x, y)$ . Если выбрана ее верхняя сторона, т. е.

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_u)^2 + (f'_v)^2}},$$

то

$$\iint_{\Phi} R(x, y, z) dx dy = \iint_{\Phi} R(x, y, z) \cos \gamma dS = \iint_{D_{xy}} R(x, y, f(x, y)) dx dy.$$

## 10 Формула Стокса.

**Формула Стокса:**

Пусть  $\Phi$  - гладкая поверхность с параметрическим представлением

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D,$$

где функции  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  дважды непрерывно дифференцируемы в замкнутой области  $D$ , ограниченной гладким контуром  $L^*$ .

Контур  $L^*$  при отображении  $\bar{r}(u, v)$  соответствует контур  $L$ , ограничивающий поверхность  $\Phi$ . Обходу контура  $L^*$  на плоскости соответствует обход контура  $L$ , и наоборот. Условимся считать положительным такое направление обхода контура  $L$ , которому соответствует положительное направление обхода контура  $L^*$ . Если единичный вектор  $\vec{n}$  нормали к поверхности определить формулой (7), то при положительном обходе контура  $L$  поверхность будет оставаться слева, если смотреть с конца вектора  $\vec{n}$ . Таким образом, положительное направление обхода границы поверхности согласуется с выбором ее стороны.

Пусть в некоторой области  $G$ , целиком содержащей поверхность  $\Phi$ , заданы непрерывно дифференцируемые функции  $P, Q, R$ . Тогда имеет место **формула Стокса**

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Phi} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (22)$$

Докажем, что

$$\oint_L P dx = \iint_{\Phi} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \quad (23)$$

Сначала преобразуем криволинейный интеграл второго рода по контуру  $L$  в левой части (23). Пусть контур  $L^*$  задан параметрическими уравнениями

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad t \in T = [t_1, t_2].$$

Тогда параметрические уравнения, задающие контур  $L$ , имеют вид

$$x = x(u(t), v(t)), \quad y = y(u(t), v(t)), \quad z = z(u(t), v(t)), \quad t \in T.$$

В соответствии с формулами для вычисления криволинейного интеграла второго рода имеем

$$\begin{aligned} \oint_L P dx &= \int_{t_1}^{t_2} P \left( \frac{\partial x}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v} v'(t) \right) dt = \\ &= \oint_{L^*} P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left( \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right). \end{aligned}$$

К интегралу в правой части этого равенства применим формулу Грина:

$$\begin{aligned} \oint_{L^*} P \frac{\partial x}{\partial u} du + P \frac{\partial x}{\partial v} dv &= \iint_D \left( \frac{\partial}{\partial u} (P \frac{\partial x}{\partial v}) - \frac{\partial}{\partial v} (P \frac{\partial x}{\partial u}) \right) dudv = \\ &= \iint_D \left( \left( \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} + P \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \right) dudv - \\ &- \iint_D \left( \left( \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} + P \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} \right) dudv = \\ &= \iint_D \frac{\partial P}{\partial z} \left( \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) dudv - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) dudv = \\ &= \iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial z} B - \frac{\partial P}{\partial y} C \right) dudv = \iint_{\Phi} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \end{aligned}$$

Аналогично доказываются равенства

$$\oint_L Q dy = \iint_{\Phi} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz,$$

$$\oint_L R dx = \iint_{\Phi} \frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dz dx.$$

Складывая доказанные равенства, получим равенство (22).

Формула Стокса справедлива в случае, когда контур  $L^*$  является кусочно гладким.

Отметим, что если поверхность  $\Phi$  является плоской областью и лежит в плоскости, параллельной координатной плоскости  $xOy$ , то формула Стокса переходит в формулу Грина. Доказательство формулы Стокса для поверхностей, ограниченных несколькими контурами, аналогично доказательству формулы Грина для многосвязных областей.

## 11 Формула Остроградского-Гаусса.

Понятие правильной в некотором направлении области:

Область является *правильной в направлении оси  $Oz$* , если она ограничена двумя поверхностями  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  вида  $z = \varphi_1(x, y)$  и  $z = \varphi_2(x, y)$ , где функции  $\varphi_1(x, y)$  и  $\varphi_2(x, y)$  определены в замкнутой области  $D_{xy}$  и удовлетворяют неравенству  $\varphi_1(x, y) \leq \varphi_2(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$ , а также цилиндрической поверхностью  $\Phi_3$  с образующей, параллельной оси  $Oz$ . Положительная ориентация границы такой области будет означать выбор внешней стороны поверхности (т. е. соответствующей внешней нормали).

Аналогично определяются области, правильные относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ .

Понятие правильной области:

Область будем называть *простой*, если ее можно разбить на конечное число частичных областей, правильных относительно оси  $Ox$  и не имеющих общих внутренних точек. И то же самое можно сделать относительно двух других осей координат. Положительная ориентация границы простой области будет означать выбор внешней стороны поверхности.

Формула Остроградского-Гаусса:

Пусть  $V$  - простая замкнутая область, граница  $\Phi$  которой положительно ориентирована. Если функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  непрерывно дифференцируемы в области  $G$ , содержащей  $V$ , то справедлива **формула Остроградского - Гаусса**

$$\begin{aligned} \iint_{\Phi} P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy = \\ = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz. \end{aligned} \quad (24)$$

Формула Остроградского - Гаусса распадается на три самостоятельных равенства, соответствующие трем подынтегральным функциям  $P$ ,  $Q$  и  $R$ . Эти равенства доказываются схожим образом. Докажем одно из них, например, равенство

$$\iint_{\Phi} R(x, y, z)dxdy = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz.$$

Докажем это равенство сначала для замкнутой области  $V$ , являющейся правильной в направлении оси  $Oz$ . По правилу вычисления тройного интеграла имеем

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz &= \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \\ &= \iint_{D_{xy}} R(x, y, \varphi_2(x, y))dxdy - \iint_{D_{xy}} R(x, y, \varphi_1(x, y))dxdy = \\ &= \iint_{\Phi_2} R dxdy + \iint_{\Phi_1} R dxdy + \iint_{\Phi_3} R dxdy = \iint_{\Phi} R dxdy. \end{aligned}$$

Мы учли, что для поверхности  $\Phi_2$  нужно брать верхнюю сторону, а для поверхности  $\Phi_1$  - нижнюю. К этим интегралам добавили равный нулю поверхностный интеграл по внешней стороне боковой цилиндрической поверхности  $\Phi_3$  с образующей, параллельной оси  $Oz$ .

Далее, простую область  $V$  разобьем на частичные, правильные в направлении оси  $Oz$  области  $V_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , ограниченные кусочно гладкими поверхностями  $\Phi_k$ . В силу доказанного имеем

$$\iint_{\Phi_k} R(x, y, z) dx dy = \iiint_{V_k} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz, \quad k = 1, \dots, m.$$

Просуммировав эти равенства, получим

$$\sum_{k=1}^m \iint_{\Phi_k} R(x, y, z) dx dy = \sum_{k=1}^m \iiint_{V_k} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz.$$

Сумма в левой части равенства равна интегралу по поверхности  $\Phi$ , так как по частям границ  $\Phi_k$  частичных областей  $V_k$ , не входящим в поверхность  $\Phi$ , интегрирование проводится дважды с выбором противоположных сторон поверхности, а такие интегралы взаимно уничтожаются.

Таким образом формула Остроградского - Гаусса полностью доказана.