

Содержание

1	Глава 1	2
1.1	Случайные события, классификация событий, операции над ними.	2
1.2	Определения: кольцо, алгебра, σ -алгебра, минимальная σ -алгебра над классом K . Борелевская σ -алгебра.	2
1.3	Теорема Каратеодори.	3
1.4	Определения: мера, конечно-аддитивная, счётно-аддитивная мера	4
1.5	Построение меры Лебега. Верхняя мера Лебег, нижняя мера Лебега, мера Лебега. Измеримое по Лебегу множество.	4
1.6	Вероятностная мера, её свойства, непрерывность вероятностной меры.	4
1.7	Классическое вероятностное пространство. Классическое определение вероятности.	6
1.8	Дискретное вероятностное пространство.	7
1.9	Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей.	7

1 Глава 1

1.1 Случайные события, классификация событий, операции над ними.

Определение случайного события:

Пусть Ω — множество элементарных исходов эксперимента. Случайным событием называется любое подмножество множества Ω .

Определение достоверного события:

Достоверным событием называется событие Ω , которому благоприятствует каждый исход эксперимента.

Определение невозможного события:

Невозможным событием называется пустое множество, которому не благоприятствует ни один исход эксперимента.

Определение суммы событий:

Суммой событий A и B называется событие $C = A \cup B$, которому благоприятствуют исходы, принадлежащие хотя одному из событий A или B .

Определение произведения событий:

Произведением событий A и B называется событие $C = A \cap B$, которому благоприятствуют исходы и события A , и события B .

Определение несовместных событий:

Случайные события A и B называются несовместными, если $A \cap B = \emptyset$.

Определение противоположного события:

Событием, противоположным событию A называется событие \bar{A} , которое состоит из исходов, не благоприятствующих A .

1.2 Определения: кольцо, алгебра, σ -алгебра, минимальная σ -алгебра над классом K . Борелевская σ -алгебра.

Определение кольца:

Кольцом R называется непустой класс множества замкнутый относительно операций сложения и взятия разности.

Определение алгебры:

Алгеброй A называется непустой класс множества замкнутый относительно сложения и отрицания.

Определение σ -алгебры:

σ -алгебра \mathcal{F} — это непустой класс множества замкнутый относительно счётного количества сумм и отрицаний:

1. Если $A \in \mathcal{F}$, то $\overline{A} \in \mathcal{F}$;
2. $\Omega \in \mathcal{F}$;
3. Если $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Определение σ -алгебры событий:

Сигма алгеброй событий называется множество \mathcal{F} подмножеств $A \subset \Omega$, удовлетворяющее условиям:

1. если $A \in \mathcal{F}$, то $\overline{A} \in \mathcal{F}$;
2. $\Omega \in \mathcal{F}$;
3. если $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Определение минимальной σ -алгебры над классом K :

Пусть K — некоторый класс подмножеств из Ω . σ -алгебра $\sigma(K)$ называется наименьшей σ -алгеброй, содержащей класс K , если $K \in \sigma(K)$; любая σ -алгебра \mathcal{F} , которая содержит K ($K \subset \mathcal{F}$), содержит и $\sigma(K) \subset \mathcal{F}$.

Определение Борелевской σ -алгебры:

Борелевской σ -алгеброй β называется минимальная σ -алгебра над классом полуинтервалов $K = \{[a, b]\}$ из R , то есть:

$$\Omega = (-\infty, \infty) = R \quad K = \{[a, b), [a, +\infty), (a, +\infty), (-\infty, b), (-\infty, b], (a, b]\}.$$

1.3 Теорема Каратеодори.

Пусть $Q(A)$ — счётно аддитивная вероятностная мера на алгебре \mathcal{A} . Тогда существует единственная счётно аддитивная вероятностная мера $P(A)$, заданная на минимальной σ -алгебре \mathcal{F} и являющаяся её продолжением, то есть $\forall A \in \mathcal{A} \quad P(A) = Q(A)$.

1.4 Определения: мера, конечно-аддитивная, счётно-аддитивная мера

Пусть Ω — множество элементарных исходов эксперимента. Некоторое его подмножество $A \subset \Omega$ называется случайным событием.

Определение конечно аддитивной вероятностной меры

Конечно аддитивной вероятностной мерой $Q(A)$ называется функция множества $Q : \mathcal{A} \rightarrow [0; 1]$, такая, что:

1. $\forall A \in \mathcal{A} \quad Q(A) \geq 0$;
2. $Q(\Omega) = 1$;
3. $\forall A, B \in \mathcal{A} : \quad A \cap B = \emptyset \quad Q(A \cup B) = Q(A) + Q(B) \quad Q\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} Q(A_i)$.

Определение счётно аддитивной вероятностной меры:

Счётно аддитивно вероятностной мерой $P(A)$ называется функция множества $P : \mathcal{F} \rightarrow [0; 1]$, такая, что:

1. $\forall A \in \mathcal{F} \quad P(A) \geq 0$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F} : \quad \forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

1.5 Построение меры Лебега. Верхняя мера Лебег, нижняя мера Лебега, мера Лебега. Измеримое по Лебегу множество.

1.6 Вероятностная мера, её свойства, непрерывность вероятностной меры.

Определение вероятностной меры:

Вероятностной мерой называется функция $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющая условиям:

1. $P(\Omega) = 1$;

$$2. \forall A \in \mathcal{F} \quad P(A) \geq 0;$$

$$3. \forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}, \text{ такой, что } \forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset, P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Свойства вероятностной меры:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Док-во:

$$\text{и. сод.} \quad \Omega = A \cup \bar{A}; \quad A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$\text{Тогда} \quad 1 \stackrel{(P1)}{=} P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) \stackrel{(P3)}{=} P(A) + P(\bar{A})$$

$$\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

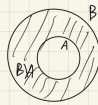
$$\text{следствие:} \quad P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$$

1.

$$\text{Если } A \subseteq B, \text{ то } P(A) \leq P(B)$$

$$\text{и } P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

Док-во:



Представим событие B в виде суммы несовместных событий: $B = A \cup (B \setminus A) \Rightarrow$

$$\Rightarrow P(B) = P(A \cup B \setminus A) = P(A) + P(B \setminus A)$$

т.к. по аксиоме (P2) $P(\cdot) \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow P(B) \geq P(A)$$

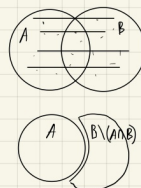
2.

Теорема сложения вероятностей:

Пусть A и B — некоторые события, $A, B \in \mathcal{F}$. Тогда
(могут быть совместные)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Док-во:



$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \cup (B \setminus A \cap B)) = \\ &= P(A) + P(B \setminus A \cap B) \stackrel{\text{след-во 2}}{=} \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

следствие: $\forall A \in \mathcal{F} \quad \forall B \in \mathcal{F}$

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

3.

Непрерывность вероятностной меры:

Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ — монотонный класс событий, т.е.

① $A_i \subset A_{i+1}$ или ② $A_i \supset A_{i+1}$

↑
расширяющаяся / сужающаяся воронка событий

Тогда

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

4.

Док-во:

Пусть $A_i \subset A_{i+1}$. Тогда

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \text{ и назовем } A = \lim_{i \rightarrow \infty} A_i$$

По аксиоме $P(A) \leq 1$. Тогда

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \left| \begin{array}{l} B_1 = A_1 \\ B_i = A_i \setminus A_{i-1} \end{array} \right| =$$

$$\stackrel{(P_3)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^i P(B_j) = \lim_{i \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{j=1}^i B_j\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i)$$

Пусть $A_i \supset A_{i+1}$. Тогда

$$P(A) = P\left(\lim_{i \rightarrow \infty} A_i\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}\right) =$$

$$= 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}\right) = 1 - \lim_{i \rightarrow \infty} P(\overline{A_i}) = \lim_{i \rightarrow \infty} (1 - P(\overline{A_i})) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i)$$

1.7 Классическое вероятностное пространство. Классическое определение вероятности.

Вероятностной моделью стохастического эксперимента называется тройка (Ω, \mathcal{F}, P) , где Ω — множество элементарных исходов эксперимента, \mathcal{F} — алгебра событий, P — вероятностная мера.

(Ω, \mathcal{F}, P) — вероятностное пространство.

Определение классического вероятностного пространства:

Классическим вероятностным пространством, называется вероятностное пространство (Ω, \mathcal{F}, P) , в конечном множестве элементарных исходов которого все элементарные исходы равновозможны.

Построим вероятностную меру:

Пусть $\Omega = \{w_1, \dots, w_n\}$.

Рассмотрим $\{A_i\}_{i=1}^n$, где $A_i = \{w_i\}$. Тогда

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega.$$

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) = |P(A_i) = P(w_i) = p| = \sum_{i=1}^n p \Rightarrow \\ \Rightarrow p = \frac{1}{n} \Rightarrow \forall w_i \quad P(w_i) = \frac{1}{n}$$

Пусть $A = \{w_{i_1}, \dots, w_{i_k}\}$ $0 \leq k \leq n$. Тогда вероятностная мера в классическом вероятностном пространстве имеет вид

$$P(A) = P\left(\bigcup_{j=1}^k w_{ij}\right) = \sum_{j=1}^k P(w_{ij}) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{n} = \frac{k}{n},$$

$P(A) = \frac{k}{n}$ — называется классической вероятностью, где k — количество благоприятных A элементарных исходов, n — количество элементарных исходов эксперимента.

1.8 Дискретное вероятностное пространство.

Определение дискретного вероятностного пространства:

Дискретным вероятностным пространством называется вероятностное пространство (Ω, \mathcal{F}, P) , такое, что Ω — конечное или счётное множество неравно-возможных исходов.

Вероятностную меру зададим числами $p_i = P(w_i) > 0$, такими, что $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Тогда $\forall A \in \mathcal{F}$ веротность вычисляется как $P(A) = P\left(\bigcup_{w_i \in A} w_i\right) = \sum_{w_i \in A} P(w_i)$.

1.9 Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей.

Определение условной вероятности:

Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) — вероятностное пространство и $A, B \in \mathcal{F}$; $P(B) > 0$.

Условной вероятностью события A при условии, что наступило событие B называется число:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Теорема умножения вероятностей:

Пусть A и B — случайные события и $P(B) > 0$. Тогда

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Пусть A_1, A_2, A_3 — случайные события и $P(A_1) > 0$ и $P(A_1 \cap A_2) > 0$. Тогда

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2)$$