Содержание

1 Комбинаторика, правило суммы и произведения. Размещения с повторениями и без повторений.

Правило суммы:

Если A можно выбрать n способами, а B — m способами, то объект A или B можно выбрать $n + m$ способами. (Выбор B никак не согласуется с выбором A.)

Правило произведения:

Если объект A можно выбрать m способами, а объект B, после выбора A, можно выбрать n способами, то пару (A, B) можно выбрать $n \times m$ способами.

Размещения с повторениями:

Размещениями с повторениями из n типов по k элементов (k и n в произвольном соотношении) называются все такие последовательности k элементов, принадлижащих n типам, которые отличаются друг от друга составом или последовательностью элементов.

$$\overline{A_n^k} = n^k$$

Размещения без повторений:

Размещениями без повторений из n различных типов по k элементам называются все такие последовательности из k различных элементов, такие, что они различаются по составу или по порядку. Причём $k < n$.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

2 Перестановки с повторениями и без повторений. Сочетания с повторениями и без повторений, свойства биномиальных коэффициентов.

Перестановки с повторениями:

Перестановками с повторениями из $n_1, \ldots, n_k$ элементов k-го типа называются всевозможные последовательности длины n, отличающиеся друг от друга последовательностью элементов.

$$\overline{P}(n_1, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot \cdots \cdot n_k!}$$

Перестановски без повторений:

Перестановками без повторений из n элементов называются всевозможные последовательности из n элементов.

$$P_n = n!$$

Сочетания с повторениями:

Сочетаниями с повторениями из n по k (k и n в произвольном соотношении) называются все такие комбинации из k элементов $\in$ n типам, которые отличаются только составом элементов.

$$\overline{C^k}_n = C^k_{n+k-1} = \overline{P}(n-1, k)$$

Сочетания без повторений:

Сочетаниями без повторений из n по k ($k \leq n$) называются все такие комбинации из k различных элементов, выбранных из n исходных элементов, которые отличаются друг от друга составом.

$$C^k_n = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Свойства биномиальных коэффициентов:

1. $$C^k_n = \overline{P}(k, n-k)$$

2. $$C^k_n = C^{n-k}_n$$

3. $$C^k_n = C^{k-1}_{n-1} + C^k_{n-1}$$

4. $$C^0_n + C^1_n + \cdots + C^n_n = 2^n$$

5. $$C^0_n - C^1_n + C^2_n - C^3_n + \cdots + C^n_n = 0$$

3 Сколькими способами можно разложить n_1 предметов одного сорта, $\ldots, n_k$ предметов k-го сорта в два ящика? Следствия.

Схема: n_1 предметов 1-го типа $\ldots$ n_k предметов k-го типа раскладываются в два различных ящика:

$$(n_1+1)\cdot(n_2+1)\cdot\dots\cdot(n_k+1) \text{ способов.}$$

Следствие 1:
Если все предметы различны, то:

$$n_1 = 1 = n_2 = \dots = n_k = 1 \Rightarrow 2^k \text{ способов.}$$

Следствие 2:
Не менее r_i предметов i-го типа в каждый ящик:

$$(n_1-2r_1+1)\cdot(n_2-2r_2+1)\cdot\dots\cdot(n_k-2r_k+1) \text{ способов.}$$

4 Даны n различных предметов и k ящиков. Требуется положить в первый ящик n_1 предметов, в k-ый — n_k предметов, где $n_1+\dots+n_k=n$. Сколькими способами можно сделать такое распределение, если не интересует порядок распределения предметов в ящике?

Схема: n различных предметов раскладываются в k различных ящиков (порядок внутри ящиков не важен):

$$\tfrac{n!}{n_1!\cdot\dots\cdot n_k!} \text{ способов}$$

5 Даны n различных предметов и k одинаковых ящиков. Требуется положить в каждый ящик $n = \frac{n}{k}$ предметов. Сколькими способами можно сделать такое распределение, если не интересует порядок предметов в ящике и все ящики одинаковы?

Схема: n **различных предметов в** k **одинаковых ящиков (порядок внутри ящиков не важен)** $\frac{n}{k}$ **предметов в каждый ящик:**

$$\frac{n!}{k!((\frac{n}{k})!)^k} \text{ способов.}$$

6 Сколькими способами можно распределить n одинаковых предметов в k ящиков?

Схема: n **одинаковых предметов в** k **разных ящиков:**

$$\overline{P}(n, k-1) = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} \text{ способов.}$$

7 Сколько существует способов разложить n различных предметов в k ящиков, если нет никаких ограничений?

Схема: n **различных предметов в** k **разных ящиков:**

$$k^n \text{ способов.}$$

8 Сколькими способами можно положить n различных предметов в k ящиков, если не должно быть пустых ящиков?

Схема: n **различных предметов в** k **разных ящиков, причём не должно быть пустых ящиков:**

A_i — количество способов, когда i-ый ящик пустой.

$|A \setminus \cup_{i=1}^{k} A_i| = |A| - \sum_{i=1}^{k} |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{k-1} \sum_{i_1 \dots i_{k-1}} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{k-1}}| + (-1)^k |A_1 \cap \dots \cap A_k| = k^n - C_k^1 (k-1)^n + C_k^2 (k-2)^n + \dots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} \cdot 1^n$ способов.

9 Имеется n_1 предметов одного сорта, $\dots, n_s$ — s-го сорта. Сколькими способами их можно разложить по k ящикам, если не должно быть пустых ящиков?

Схема n_1 предметов первого типа $\dots n_m$ предметов m-го типа по k различным ящикам, причём нет пустых ящиков:

A_i — i-ый ящик пустой $i = \overline{1, k}$.

$|A| = C_{n_1+k-1}^{k-1} \cdot C_{n_2+k-1}^{k-1} \cdot \dots \cdot C_{n_m+k-1}^{k-1}$

$|A_i| = C_{n_1+k-2}^{k-2} \cdot C_{n_2+k-2}^{k-2} \cdot \dots \cdot C_{n_m+k-2}^{k-2}$

$|A \setminus \cup_{i=1}^{k} A_i| = |A| - \sum\limits_{i=1}^{n} |A_i| + \sum |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \dots + (-1)^{k-1} \sum\limits_{1 \le i_1 \le \dots \le i_{k-1} \le k} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{k-1}}| + (-1)^k |A_1 \cap \dots \cap A_k| =$

$= C_{n_1+k-1}^{k-1} \cdot \dots \cdot C_{n_m+k-1}^{k-1} - C_k^1 C_{n_1+k-2}^{k-2} \cdot \dots \cdot C_{n_m+k-2}^{k-2} + C_k^2 C_{n_1+k-3}^{k-3} \cdot \dots \cdot C_{n_m+k-3}^{k-3} + \dots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} 1^n$.

10 Сколько существует способов разложить n различных предметов в k различных ящиков с учетом расположения предметов в ящиках, если все n предметов должны быть использованы? Следствие.

Схема: n различных предметов в k различных ящиков (порядок внутри ящиков важен, ящики могут быть пустыми):

$$\overline{P}(n, k-1) = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!} = A_{n+k-1}^{n},$$

Следствие (та же схема, но не должно быть пустых ящиков):

$$A_n^k A_{n-k+k-1}^{n-k} = A_n^k A_{n-1}^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!} == \frac{(n-1)!}{(k-1)!} = n! C_{n-1}^{k-1}$$

11 Сколько существует способов разложить n различных предметов в k различных ящиков с учетом расположения предметов в ящиках, если не все n предметов могут быть использованы и некоторые ящики могут оказаться пустыми? Следствие.

Схема: n различных предметов в k различных ящиков (порядок внутри ящиков важен, можно использовать не все предметы):

S — в распределении учавствует s предметов. $S = \overline{0, n}$.

$$\sum_{S=0}^{n} C_n^S A_{S+k-1}^S$$

Следствие (та же схема, но не должно быть пустых ящиков):

$$\sum_{S=k}^{n} C_n^S S! C_{S-1}^{k-1}$$

12 Формула включения-исключения.

Теорема (формула включений-исключений):

$A = \{A_i\}_{i=1}^n \quad A_i \subseteq A$

$|A \setminus \cup_{i=1}^n A_i| = |A| - \sum\limits_{i=1}^{n} |A_i| + \sum\limits_{1 \le i_1 \le i_2 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| - \sum\limits_{1 \le i_1 \le i_2 \le i_3 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| + \dots + (-1)^k \sum\limits_{1 \le i_1 \le \dots \le i_k \le n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap \dots \cap A_n|.$

Доказательство:

Возьмём произвольный элемент $a \in A$, может быть два случая:

1. a принадлежит k подмножествам, $k = \overline{1, n}$. $a \notin A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)$.

$$|A| \quad 1 = C_k^0$$
$$\sum |A_i| \quad k = C_k^1$$
$$\sum |A_{i_1} \cap A_{i_2}| \quad C_k^2$$
$$\dots$$
$$\sum |A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_k}| \quad C_k^k = 1$$
$$C_k^0 - C_k^1 + C_k^2 + \dots + (-1)^k C_k^k = 0$$

2. $a \notin (A_1 \cup \dots A_n)$

   1 раз учитывается при подсчёте в левой части и 1 раз при подсчёте в правой части.

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| +$$
$$+ \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le i_3 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| + \dots +$$
$$+ (-1)^k \sum_{1 \le i_1 \le \dots \le i_k \le n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

13 Полиномиальная формула. Свойства полиномиальных коэффициентов.

Теорема (полиномиальная формула):

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i \right) = \sum_{k_1 + \dots + k_m = n} \overline{P}(k_1, \dots, k_m) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}.$$

Доказательство:

$$\underbrace{(x_1+x_2+\ldots+x_m)\ldots(x_1+x_2+\ldots+x_m)}_{n} = \underbrace{x_1 x_1 \ldots x_1}_{n} + \underbrace{x_1 x_1 \ldots x_1}_{n-1} x_2 + \ldots +$$
$$+ \underbrace{x_m x_m \ldots x_m}_{n}$$

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}; \quad k_1+k_2+\ldots+k_m = n$$

После приведения подобных получим $\sum\limits_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n} \overline{P}(k_1,k_2,\ldots,k_m)\, x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m}$.

$\square$

Свойства полиномиальных коэффициентов:

1. $\sum\limits_{k_1+\dots+k_m=n} \overline{P}(k_1,\dots,k_m) = m^n;$

2. $\overline{P}(k_1-1,k_2,\dots,k_m) + \overline{P}(k_1,k_2-1,\dots,k_m) + \overline{P}(k_1,k_2,\dots,k_m-1) = \overline{P}(k_1,k_2,\dots,k_m)$

   Доказательство:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^{n-1} = \sum_{k_1+\dots k_m=n-1} \overline{P}(k_1,k_2,\dots,k_m)\, x_1^{k_1}\dots x_m^{k_m} \quad \Big| \cdot (x_1+x_2+\dots+x_m)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^{n} = \sum_{k_1+\dots+k_m=n-1} \overline{P}(k_1,k_2,\dots,k_m)\, x_1^{k_1}\dots x_m^{k_m}\,(x_1+x_2+\dots x_m)$$

$$\sum_{k_1+\dots k_m=n} \overline{P}(k_1,\dots,k_m)\, x_1^{k_1}\dots x_m^{k_m} = \left(\sum_{k_1+\dots k_m=n-1} \overline{P}(k_1,\dots k_m)\, x_1^{k_1}\dots x_2^{k_m}\right)(x_1+\dots+x_m)$$

$$\begin{matrix} x_1^{k_1-1}\dots x_m^{k_m} \\ \vdots \\ x_1^{k_1}\dots x_m^{k_m-1} \end{matrix} \;\to\; x^{k_1}\dots x^{k_m}$$

$\square$

14 Рекуррентное соотношение k-го порядка, решение рекуррентного соотношения, общее решение. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение.

Определение реккурентного соотношения k-го порядка:

Под реккурентным соотношением k-го порядка понимается формула, которая выражает $f(n+k)$ через $f(n+k-1), f(n+k-2), \dots, f(n)$ предыдущие члены последовательности.

Определение решения реккурентного соотношения:

Решением реккурентного соотношения называется числовая последовательность, при подстановке общего члена которой в реккурентное соотношение получаем верное равенство.

Определение общего решения реккурентного соотношения:

Общим решением реккурентного соотношения k-го порядка называется решение, зависящее от k произвольных постоянных, с помощью которых можно удовлетворить любое начальное условие. То есть получить любое общее решение.

Определение линейного реккурентного соотношения с постоянными коэффициентами:

Линейным реккурентным соотношением с постоянными коэффициентами k-го порядка называется:

$$f(n+k) = c_1 f(n+k-1) + c_2 f(n+k-2) + \cdots + c_k f(n)$$

Характеристическим уравнением для него называется:

$$r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \cdots + c_k$$

15 Линейные реккурентные соотношения с постоянными коэффициентами второго порядка. Свойства решений.

Определение линейного реккурентного соотношения с постоянными коэффициентами второго порядка:

$$(*) \quad f(n+2) = c_1 f(n+1) + c_2 f(n)$$

Его характеристическое уравнение имеет вид:

$$(**) \quad r^2 = c_1 r + c_2$$

Свойства решения линейного реккурентного соотношения с постоянными коэффициентами второго порядка:

1. Если последовательность $\{x_n\}$ — решение реккурентного соотношения, то $\{\alpha x_n\}$ так же является решением;

2. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — решения реккурентного соотношения, то последовательность $\{x_n + y_n\}$ так же является решением;

3. Если r_1 — это корень (**), то $\{r_1^n\}$ — решение (*).

16 Решение линейных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами второго порядка в случае равных и различных корней характеристического уравнения.

Случаи:

1) Пусть $r_1 \neq r_2$ — корни (**). Тогда

$\alpha r_1^n + \beta r_2^n$ — решение (в силу свойств)

произвольные константы

Пусть $f(0) = a$; $f(1) = b$

$\alpha r_1^n + \beta r_2^n = f(n)$ — общее решение

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha r_1 + \beta r_2 = b \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta = \dfrac{a r_1 - b}{r_1 - r_2} \\ \alpha = \dfrac{a r_2 - b}{r_2 - r_1} \end{cases}$$

2) Пусть $r_1 = r_2$ — корни (**)

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

По теореме Виета: $c_1 = 2r_1$, $c_2 = -(r_1^2)$. Тогда:

$$f(n+2) = 2r_1 f(n+1) - r_1^2 f(n)$$

слева $= (n+2) \cdot r_1^{n+2}$

справа $= 2r_1(n+1) r_1^{n+1} - r_1^2 n r_1^n = 2r_1^2 (n+1) r_1^n - r_1^2 n r_1^n = r_1^{n+2}(2(n+1) - n) = r_1^{n+2}(n+2) =$

$=$ слева $\Rightarrow$ r_1^n и $n r_1^n$ — решение

по свой-вам $f(n) = \alpha r_1^n + \beta \cdot n r_1^n$ — тоже является решением

17 Теорема об общем решении линейных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами k-го порядка. Решение рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами k-го порядка с помощью характеристического уравнения.

Теорема (общее решение линейного реккурентного соотношения k-го порядка):

Пусть (1) $f(n+k) = c_1 f(n+k-1) + \dots + c_k f(n)$ — линейное реккурентное соотношение и (2) $r^k = c_1 r^{k-1} + \dots + c_k$ его характеристическое уравнение. Тогда общее решение (1) можно записать в виде:

$f(n) = A_1 + A_2 + \dots + A_p$, где A_i выписывается по действительному корню или по паре комплексно сопряжённых корней (2).

1. Если x дествительный корень (2) кратности m, то соответствующее ему A_i имеет вид:

$$A_i = (c_{i_0} + c_{i_1} n + \dots + c_{i_{m-1}} n^{m-1}) x^n;$$

2. Если $r(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)$ — пара комплексно сопряжённых корней (2) кратности 1, то соответствующее им A_i имеет вид:

$$A_i = r^n(\cos(n\varphi) D_i + \sin(n\varphi) E_i),$$

где D_i и E_i — константы;

3. Если $r(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)$ — пара комплексно сопряжённых корней (2) кратности m, то соответсвующее им A_i имеет вид:

$$A_i = r^n[\cos(n\varphi)(D_{i_1} + D_{i_2} n + \dots + D_{i_{m-1}} n^{m-1}) + \\ + \sin(n\varphi)(E_{i_1} + E_{i_2} n + \dots + E_{i_{m-1}} n^{m-1})]$$

Решение реккурентных соотношений с постоянными коэффициентами k-го порядка с помощью характеристического уравнения:

Пример:

$$f(n+5) = 4f(n+4) - 4f(n+3) - 2f(n+2) + 5f(n+1) - 2f(n)$$

$$r^5 = 4r^4 - 4r^3 - 2r^2 + 5r - 2$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1, \quad x_4 = -1, \quad x_5 = 2$$

константы

$$f(n) = \underbrace{1^n(a + bn + cn^2)}_{A_1} + \underbrace{d(-1)^n}_{A_2} + \underbrace{e\,2^n}_{A_3}$$ — общее решение

- Пример:

$$f(n+2) = 2f(n+1) - 4f(n) \quad ; \quad f(0) = 1 \; ; \quad f(1) = 2.$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$D = -12 \qquad x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{-3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}\,i$$

$$f(n) = 2^n\left(\cos\frac{\pi n}{3}\cdot a + \sin\frac{\pi n}{3}\cdot b\right)$$

$r = 2$

$\cos\varphi = \frac{1}{2}$

$\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$2^0(\cos 0 \cdot a + \sin 0 \cdot b) = 1 \; ; \quad a = 1$$

$$2\cos\frac{\pi}{3}\cdot a + 2\sin\frac{\pi}{3}\cdot b = 2 \; ; \quad b = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f(n) = 2^n\left(\cos\frac{\pi n}{3} + \sin\frac{\pi n}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$ — ответ

- Пример:

$$f(n+4) = -2f(n+2) - f(n)$$

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 0 \qquad (x^2+1)^2 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm i$$

$$x_{1,2} = i$$

$$x_{3,4} = -i$$

$$x_{1-4} = \cos\frac{\pi}{2} \pm i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$r = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= 0 \\ \sin\varphi &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$f(n) = 1^n\left(\cos\frac{\pi n}{2}\cdot(an+b) + \sin\frac{\pi n}{2}(cn+d)\right)$$ – общее решение

- Пример:

$$f(n+5) = -3f(n+4) - 5f(n+3) - f(n+2) + 6f(n+1) + 4f(n)$$

$$x^5 + 3x^4 + 5x^3 + x^2 - 6x - 4 = 0$$

$$(x+1)^2(x-1)(x^2+2x+4) = 0$$

$$D = -12$$

$$x_{1,2} = -1 \qquad x_{4,5} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

$$x_3 = 1 \qquad r = 2; \quad \left.\begin{aligned} \cos\varphi &= -\frac{1}{2} \\ \sin\varphi &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$$x_{4,5} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} \pm i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$f(n) = (-1)^n(an+b) + 1^n c + 2^n\left(\cos\frac{2\pi n}{3}\cdot d + \sin\frac{2\pi n}{3}\cdot e\right)$$

18 Производящая функция. Сумма производящих функций, операция подстановки.

Определение производящей функции:

Пусть $a_0, a_1, a_2, \dots$ произвольная числовая последовательность. Производящей функцией этой последовательности называется выражение вида:

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = A(t)$$

Определение суммы производящих функций:

Пусть имеются производящие функции $A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ и $B(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^n$. Суммой $A(t)$ и $B(t)$ называется производящая функция:

$$C(t) = A(t) + B(t) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)t^n$$

Определение операции подстановки в производящую функцию:

Пусть $A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ и $B(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ производящие функции, причём $B(0) = b_0 = 0$. Подстановкой в $A(t)$ $B(t)$ называется производящая функция:

$$C(t) = A(B(t)) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots = a_0 + a_1(b_1 t + b_2 t^2 + \dots) + a_2(b_1 t + b_2 t^2 + \dots) + \dots,$$

где $c_0 = a_0, c_1 = a_1 b_1, c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1^2, \dots$.

19 Произведение и деление производящих функций.

Определение произведения производящих функций:

Пусть $A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ и $B(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ производящие функции. Произведением $A(t)$ и $B(t)$ будем называть производящую функцию:

$$C(t) = A(t) \cdot B(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots,$$

где $c_0 = a_0 b_0, c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \dots, c_n = a_0 b_n + \dots + a_n b_0 = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Определение частного производящих функций:

Пусть $A(t) = a_0 + a_1 t + \dots$ и $B(t) = b_0 + b_1 t + \dots$ производящие функции, причём $B(0) = b_0 \neq 0$. Тогда частным $\frac{A(t)}{B(t)}$ называется производящая функция:

$$C(t) = \frac{A(t)}{B(t)} = c_0 + c_1 t + \dots,$$

такая, что $A(t) = B(t)C(t)$. Где $a_0 = b_0 c_0 \Rightarrow c_0 = \frac{a_0}{b_0}$
$a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0 \Rightarrow c_1 = \frac{a_1 - b_1 c_0}{b_0}$
$\dots$
$a_n = b_0 c_n + \dots b_n c_0 \Rightarrow c_n = \frac{a_n - b_1 c_{n-1} - b_2 c_{n-2} - \dots - b_n c_0}{b_0}$

20 Теорема о разложении функции.

Теорема (о разложении $\frac{1}{(1-at)^m}$):

$$\frac{1}{(1-at)^m} = 1 + C_m^1 at + C_{m+1}^2 a^2 t^2 + \dots + C_{m+n-1}^n a^n t^n + \dots \quad \forall m \geq 1$$

Доказательство (по индукции):

1. База: $m = 1$

   $\frac{1}{1-at} = 1 + at + a^2t^2 + \dots + a^n t^n + \dots | \cdot (1 + at)$
   $1 = (1 - at)(1 + at + \dots)$
   $(1 + at + a^2t^2 + a^3t^3 + \dots) - at(1 + at + a^2t^2 + \dots) = 1$
   $1 = 1$

2. Предположение: $m \geq k$

   $\frac{1}{(1-at)^k} = 1 + C_k^1 at + C_{k+1}^2 a^2t^2 + \dots + C_{k+n-1}^n a^n t^n + \dots$

3. Шаг индукции: $m \geq k + 1$

   $\frac{1}{(1-at)^{k+1}} = 1 + C_{k+1}^1 at + C_{k+2}^2 a^2t^2 + \dots + C_{k+n}^n a^n t^n + \dots$
   $\frac{1}{(1-at)} = (1 - at)\frac{1}{(1-at)^{k+1}}$
   $(1 - at)(1 + C_{k+1}^1 at + C_{k+2}^2 a^2t^2 + \dots + C_{k+n}^n a^n t^n + \dots) =$
   $= 1 + (C_{k+1}^1 - 1)at + (C_{k+2}^2 - C_{k+1}^1)a^2t^2 + \dots + (C_{k+n}^n - C_{k+n-1}^{n-1})a^n t^n + \dots =$

   $= 1 + C_k^1 at + C_{k+1}^2 a^2t^2 + \dots + C_{k+n-1}^n a^n t^n + \dots.$

21 Теорема о производящей функции для последовательности, задаваемой линейным рекуррентным соотношением. Теорема о рациональной производящей функции.

Теорема (о производящей функции для последовательности, заданной рекурентным соотношением):

Пусть последовательность $\{a_n\}$ $a_{n+k} = c_1a_{n+k-1} + c_2a_{n+k-2} + \dots + c_ka_n$ и $a_0, \dots, a_{k-1}$ заданы. Тогда производящая функция для $\{a_n\}$ будет рациональной функцией:

$$A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$$

Причём степень $P(t) \le k - 1$, а степень $Q(t)$ равна k.

Доказательство:

Пусть $Q(t) = 1 - c_1t - c_2t^2 - \dots - c_kt^k$
$P(t) = Q(t) \cdot A(t) = p_0 + p_1t + \dots + p_nt^n + \dots$
Так как $A(t) = a_0 + a_1t + \dots$. Тогда
$= a_0 + (a_1 - c_1a_0)t + \dots$
$= (1 - c_1t - c_2t^2 - \dots)(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots)$
$p_0 = a_0$
$p_1 = a_1 - c_1a_0$
$\dots$
$p_{k-1} = a_{k-1} - c_1a_{k-2} - \dots - c_{k-1}a_0$
$p_k = a_k - c_1a_{k-1} - \dots - c_ka_0 = 0$
$\dots$
$p_{k+n} = a_{n+k} - c_1a_{n+k-1} - \dots - c_ka_n = 0$
$\dots$

Теорема (о рациональных производящих функциях):

Пусть $A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$ рациональная и P и Q взаимно просты. Тогда, начиная с некоторого n, последовательность $\{a_n\}$ может быть задана линейным реккурентным соотношением $a_{n+k} = c_1a_{n+k-1} + c_2a_{n+k-2} + \dots + c_ka_n$, где $c_1, c_2, \dots, c_k$ произвольные константы.

22 Решение рекуррентных соотношений с помощью производящих функций.

Алгоритм решения линейных однородных реккурентных соотношений с помощью производящих функций:

Пусть $a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + \dots + c_k a_n$

1. Выписать $Q(t) = 1 - c_1 t - c_2 t^2 - \dots - c_k t^k$
   $A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots;$
2. Найти $P(t)$: $P(t) = Q(t) \cdot A(t);$;
3. Разложить $A(t)$ на элементарные дроби:
$$A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)};$$
4. Воспользоваться теоремой о разложении производящей функции и записать её в открытой форме, а так же выписать коэффициент при n-ом члене a_n.

23 Ориентированные и неориентированные графы.

Определение ориентированного графа:

Ориентированным графом называется:

$$\overrightarrow{G}(V, \rho) \quad \rho \subseteq V \times V,$$

где V — непустое множество вершин, ρ — отношение смежности на V.
Матрица ρ ($M(\rho)$) называется матрицей смежности $\overrightarrow{G}$.
$(u, \nu) \in \rho$ — дуга с началом в u и концом в ν.
Если $|V| = n$, то $M(\rho) = M_{n\times n} = (m_{ij})_{i,j=0}^n; \quad m_{ij} = \begin{cases} 1, (u_i, \nu_j) \in \rho \\ 0, (u_i, \nu_j) \notin \rho \end{cases}$

Определение неориентированного графа:

Неориентированным графом называется пара:

$$G = (V, \rho),$$

где ρ — симметричное и рефлексивное отношение на V. $\forall\{u, \nu\} \in \rho$ — ребро графа.

24 Полный граф, дополнение, объединение, соединение графов.

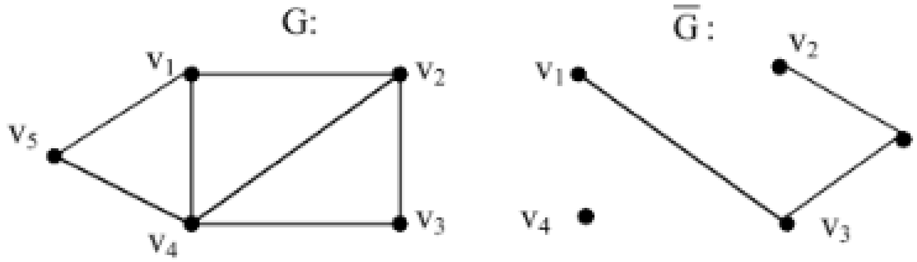
Определение полного графа:

Полным графом называется граф, в котором любые 2 вершины соединены ребром.

Замечание: степень любой вершины $d(\nu) = n - 1$.

Определение дополнения графа:

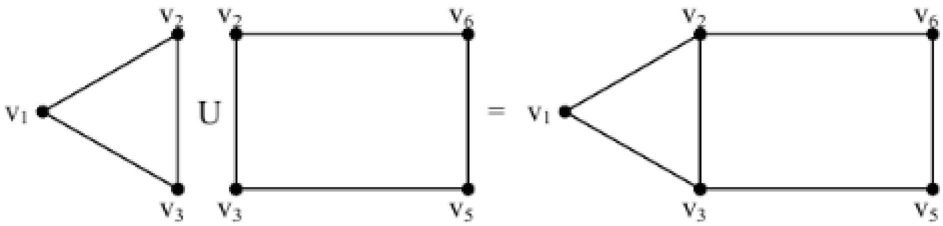
Граф $\overline{G} = (V^{'}, \rho^{'})$ называется дополнением графа $G = (V, \rho)$, если множества вершин графов $\overline{G}$ и G совпадают, то есть $V = V^{'}$, а множество рёбер $\rho^{'} = V^2 \backslash \rho$. Следовательно, любые две вершины, смежные в графе G, не смежны в его дополнении $\overline{G}$, и любые две вершины не смежные в G смежны в $\overline{G}$.



Определение объединения графов:

Пусть $G_1 = (V_1, \rho_1)$ $G_2 = (V_2, \rho_2)$

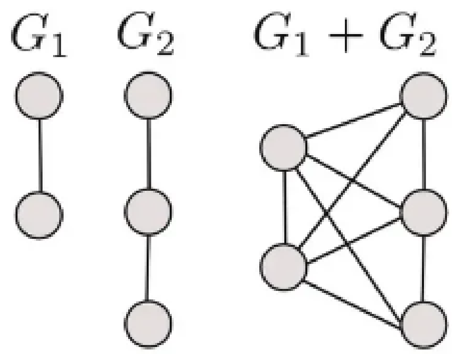
$$G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, \rho_1 \cup \rho_2)$$



Определение соединения графов:

Пусть $G_1 = (V_1, \rho_1)$ $G_2 = (V_2, \rho_2)$ и $V_1 \cap V_2 = \varnothing$

$$G_1 + G_2 = [V_1 \cup V_2, (\rho_1 \cup \rho_2) \cup (V_1 \times V_2) \cup (V_2 \times V_1)]$$



25 Теорема о степенном множестве графа.

Теорема (о степенном множестве графа):

Пусть имеется множество натуральных чисел $A = \{d_1, \ldots, d_k : k \geq 1$ и $d_1 < d_2 < \cdots < d_k\}$. Тогда найдётся неориентированный граф G с числом вершин $= d_k + 1$, для которого множество A является степенным множеством.

Доказательство (методом математической индукции):

1. База:

   $k = 1. \quad A = \{d\}$. $\exists$ граф K_{d+1}

   $(k = 2. \quad A = \{d_1, d_2\}. \quad \exists G = K_{d_1} + \overline{K}_{d_2 - d_1 + 1})$

2. Гипотеза:

   Пусть теорема справедлива для чисел $\leq k$.

3. Шаг индукции:

   Докажем для $k + 1 : \quad A = \{d_1, \ldots, d_{k+1}\}, d_1 < d_2 < \cdots < d_{k+1}$

   Найдётся граф с d_{k+1} вершинами?

   Рассмотрим $\{d_2 - d_1, d_3 - d_1, \ldots, d_k - d_1\}$. Это множество из $k-1$ элементов, поэтому для него $\exists G_0$ с количеством вершин $d_k - d_1 + 1$.

   Рассмотрим $G = K_{d_1} + (\overline{K}_{d_{k+1} - d_k} \cup G_0)$. Число вершин в G: $d_1 + d_{k+1} - d_k + d_k - d_1 + 1 = d_{k+1} + 1$.

   Степень вершин K_{d_1}: $(d_1 - 1) + (d_{k+1} - d_k + d_k - d_1 + 1) = d_{k+1}$.

   Степень вершин $\overline{K}_{d_{k+1} - d_k}$: $0 + d_1 = d_1$.

   Степень вершин G_0: $d_2 - d_1 + d_1 = d_2$

$d_3 - d_1 + d_1 = d_3$

$\ldots$

$d_k - d_1 + d_1 = d_k$

Тогда степенное множество G: $\{d_1, \ldots, d_k\}$

26 Теорема о соотношении суммы степеней вершин и числа рёбер (лемма о рукопожатии).

Лемма о рукопожатии:

Для любого графа $G = (V, \rho)$ справедливы утверждения:

1. $\sum\limits_{\nu \in V} d(\nu) = 2m$, где m — число рёбер;
2. Количество нечётных вершин чётно;
3. Если в графе $n \geq 2$ вершины, то найдутся по крайней мере две вершины с одинаковыми степенями;

Доказательство:

1. Каждое ребро соединяет ровно 2 вершины и, значи, при сложении степеней вершин учитывается дважды;
2. Сумма степеней всех вершин счётна, согласно пункту 1. $\Rightarrow$ сумма степеней всех нечётных вершин счётна, следовательно, чтобы это выполнялось вершин с нечётными степенями должно быть чётное количество;
3. Если в графе G есть изолированная вершина, то есть $d(u) = 0$, то в нём нет вершины ν такой, что $d(\nu) = n - 1$, следовательно, среди возможных степеней вершин $0, 1, \ldots, n - 1$ две взаимно исключают друг друга, так что разных степеней в графе не более, чем $n - 1$.

27 Алгоритм построения графа по вектору степеней.

Процедура построения изображения графа по вектру степеней:

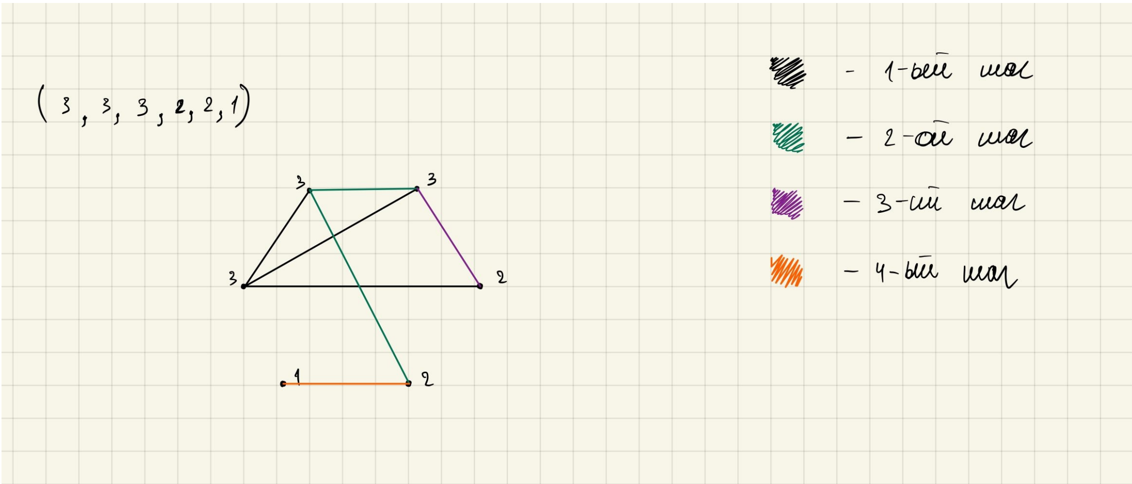
Пусть есть вектор степеней некоторого графа $(d_1, \ldots, d_n)$.

1. Изобразить n точек с метками $d_1, \ldots, d_n$. В качестве начальной точки выбрать точку с d_1;

2. Начальную точку, с меткой d_1, соединить с d точками в порядке убывания их меток;

3. Метку начальной точки положить равной 0, метки всех точек, связанных с начальной точкой, уменьшить на 1. Если метки всех точек равны 0, то завершаем алгоритм, иначе переходим к шагу 4;

4. В качестве начальной точки выбираем 1 из точек с максимальной меткой. Переходим к шагу 2.



28 Изоморфизм графов. Теорема об изоморфизме графов.

Определение изоморфизма графов:

Будем говорить, что $\overrightarrow{G}_1 = (V_1, \rho_1) \cong \overrightarrow{G_2} = (V_2, \rho_2)$, если существует однозначное соответствие $\varphi : V_1 \to V_2$, сохраняющее отношение смежности, то есть

$$\forall u \in V_1 \quad \forall \nu \in V_1 \qquad (u, \nu) \in \rho_1 \Leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(\nu)) \in \rho_2$$

Теорема (об изоморфизме графов):

Пусть $\overrightarrow{G} = (U, \alpha)$ и $\overrightarrow{H} = (V, \beta)$. Тогда $\varphi : U \to V$ — изоморфизм тогда и только тогда, когда $A\Phi = \Phi B$. То есть

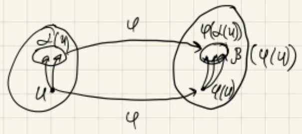
$$\alpha \cdot \varphi = \varphi \cdot \beta \Leftrightarrow \forall u \in U \quad \varphi(\alpha(u)) = \beta(\varphi(u)) \quad (*),$$

где A и B — матрицы смежности, Φ — матрица изморфизма.

Доказательство:

Необходимость:

Пусть φ - из-физм. [Нужно доказать, что $\varphi(\alpha(u)) \subseteq \beta(\varphi(u))$ и $\varphi(\alpha(u)) \supseteq \beta(\varphi(u))$]



1) ($\subseteq$) $v \in \varphi(\alpha(u)) \Rightarrow \varphi^{-1}(v) \in \alpha(u) \Rightarrow (u, \varphi^{-1}(v)) \in \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow (\varphi(u), v) \in \beta \Rightarrow v \in \beta(\varphi(u))$

2) ($\supseteq$) $v \in \beta(\varphi(u)) \Rightarrow (\varphi(u), v) \in \beta \Rightarrow (u, \varphi^{-1}(v)) \in \alpha \Rightarrow \varphi^{-1}(v) \in \alpha(u) \Rightarrow v \in \varphi(\alpha(u))$

Достаточность:

Пусть $(*) \Rightarrow (u_1, u_2) \in \alpha \Leftarrow\Rightarrow (\varphi(u_1), \varphi(u_2)) \in \beta$

нужно доказать

1) ($\Rightarrow$) $(u_1, u_2) \in \alpha \Rightarrow u_2 \in \alpha(u_1) \Rightarrow \varphi(u_2) \in \varphi(\alpha(u_1)) \Rightarrow \varphi(u_2) \in \beta(\varphi(u_1)) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\varphi(u_1), \varphi(u_2)) \in \beta$

2) ($\Leftarrow$) $(\varphi(u_1), \varphi(u_2)) \in \beta \Rightarrow \varphi(u_2) \in \beta(\varphi(u_1)) \Rightarrow \varphi(u_2) \in \varphi(\alpha(u_1)) \Rightarrow u_2 \in \alpha(u_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow (u_1, u_2) \in \alpha$

$\square$

29 Проверка на изоморфизм двух графов по их матрицам смежности.

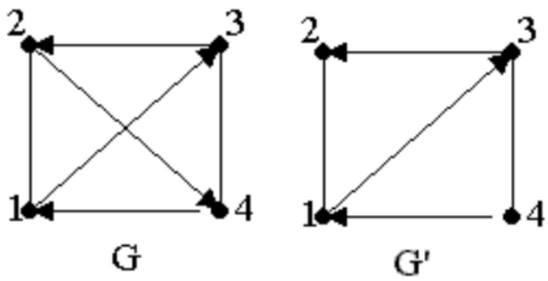
1. Выписывается матрица Φ предполагаемого изоморфизма φ как матрица с неопределёнными коэффициентами $\Phi = (\varphi_{ij})$;
2. Составляется матричное уравнение $A\Phi = \Phi B$. Решаем систему, находим Φ.
3. Если в каждом столбце и строке ровно одна единица, то изоморфизм есть, иначе — нет;
4. Если вершина u^{d^+, d^-} может перейти в вершину ν^{d^+, d^-} (равные степени исхода и захода), то в матрице пишем 1 (если из вершины первого орграфа

можно лишь единожды попасть в вершину второго орграйфа, а если не единожды — пишем φ_{ij}, где i — номер столбца, j — номер строки), иначе — 0.

30 Часть графа, подграфы. Путь, цикл, цепь, длина пути и расстояние между ними. Достаточное условие связности нечётных вершин графа.

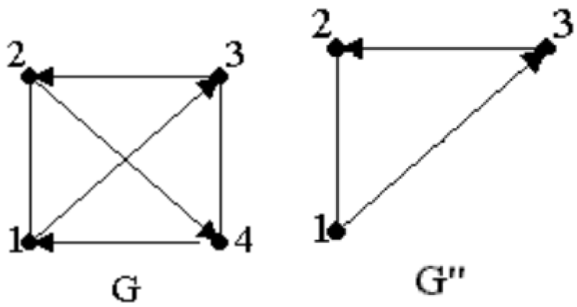
Определение части графа:

Частью графа $G = (V, \rho)$ называется граф $G^{'} = (V^{'}, \rho^{'})$, такой, что $V^{'} \subseteq V$ и $\rho^{'} \subseteq \rho \cap (V^{'} \times V^{'})$



Определение подграфа:

Подграфом графа $G = (V, \rho)$ называется граф $G^{''} = (V^{''}, \rho^{''})$, такой, что $V^{''} \subseteq V$ и $\rho^{''} = \rho \cap (V^{''} \times V^{''})$.



Определение пути в графе:

Путь — последовательность рёбер, в которой два соседних ребра имеют общую вершину, и ни одно ребро не встречается более 1 раза.

Определение цикла в графе:

Цикл — путь, в котором каждая вершина принадлежит не более, чем двум рёбрам, и начальная вершина совпадает с конечной.

Определение цепи в графе:

Цепь — путь, в котором каждая вершина принадлежит не более, чем двум рёбрам.

Определение длины пути в графе:

Длина пути — количество рёбер, входящих в путь.

Определение расстояния между двумя вершинами графа:

Расстояние между двумя вершинами — длина кратчайшего пути между ними. Если пути между вершинами нет, то принято считать расстояние между ними бесконечным.

Достаточное условие связности нечётных вершин графа:

Если две нечётные вершины u и ν в графе — единственные нечётные вершины, то они связны в графе.

Доказательство (от противного):

Пусть они лежат в разных компонентах связности, тогда в каждом подграфе (компоненте связности) есть лишь одна единственная нечётная вершина — противоречие (по лемме о рукопожатии). Получаем, что число нечётных вершин, чётно.

31 Достаточное условие связности графа.

Если в n вершинном графе число рёбер равно $m > C_{n-1}^2$, то граф связный.

Доказательство (от противного):

Пусть $m > C_{n-1}^2$ и граф не связный. Рассмотрим граф $G = G_1 \cup G_2$, где G_1 — произвольная компонента, а G_2 — все вершины из графа, не находящиеся в G_1. Пусть G_1 имеет k вершин. Тогда возможны 3 случая:

1. $k = 1$, тогда в G_2 находятся $n - 1$ вершин;
2. $k = n - 1$, тогда в G_2 находится 1 вершина;
3. $2 \leq k \leq n - 2$, тогда в G_2 находятся $n - k$ вершин.

Покажем, что все 3 случая противоречивы:

1. В G_1 нет рёбер. В G_2 может быть до $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ рёбер. Тогда $m \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} = C_{n-1}^2$, следовательно, противоречие;
2. Аналогично (1);

3. Оценим m:

$$m \le C_k^2 + C_{n-k}^2 = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} =$$
$$= \frac{k^2 - k + n^2 - 2nk + k^2 - n + k}{2} = \frac{2k^2 + n^2 - 2nk - n}{2}.$$

Рассмотрим разность $C_{n-1}^2 - m$:

$$C_{n-1}^2 - m \ge C_{n-1}^2 - \frac{k^2 - k + n^2 - 2nk + k^2 - n + k}{2} =$$
$$= \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{k^2 - k + n^2 - 2nk + k^2 - n + k}{2} =$$
$$= \frac{n^2 - 3n + 2 - 2k^2 - n^2 + 2nk + n}{2} = \frac{2nk - 2n + 2 - 2k^2}{2} =$$
$$= n(k-1) - (k^2 - 1) = (k-1)(n-(k+1)) > 0, \quad k \ge 2, n \ge k+2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_{n-1}^2 - m > 0.$$

32 Точка сочленения. Неразделимый граф. Необходимое и достаточное условие неразделимости связного графа.

Определение точки сочленения:

Пусть G — связный граф. Вершина ν называется точкой сочленения, если её удаление приводит к увеличению числа компонент связности.

Определение неразделимого графа:

Граф называется неразделимым, если в нём отсутствуют точки сочленения.

Теорема (необходимое и достаточное условие неразделимости связного графа):

Связный граф с числом вершин $n \ge 3$ неразделим, тогда и только тогда, когда любые две вершины графа принадлежат некоторому циклу.

33 Планарность. Дерево, плоское изображение дерева.

Определение плоского изображения графа:

Плоское изображение графа — изображение, в котором никакие два ребра графа не пересикаются.

Определение планарного графа:

Граф называется планарным, если существует его плоское изображение.

Определение дерева:

Деревом называется связный граф без циков.

34 Необходимое и достаточное условие того, чтобы граф был деревом.

Граф G являлется деревом, тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

1. 2 любые вершины соеденены единственной цепью;
2. G — связный граф, и $n = m + 1$;
3. В G нет циклов, и $n = m + 1$.

Доказательство:

Необходимость:
Мы знаем, что G — дерево, докажем 3 пункта.

1. Покажем, что любые 2 вершины соединены одной цепью. Пойдём от противного: пусть существуют 2 цепи, соединяющие 2 вершины графа $\Rightarrow$ существует цикл $\Rightarrow$ граф не является деревом. Получили противоречие;
2. Покажем, что $n = m + 1$, используя метод математической индукции:
   (a) Пусть $n = 1$. Тогда $m = 0 \Rightarrow n = m + 1$, G — связный. Аналогично выполняется для $n = 2$;
   (b) Пусть верно для всех деревьев с числом вершин < n. Докажем для графов с n вершинами. При удалении любого ребра, получим 2 компоненты связности с k и $n-k$ вершинами. Число рёбер в первой равно $m_1 = k-1$, а во второй $m_2 = n-k-1$. Тогда число рёбер в исходном графе будет равно $m = m_1+m_2+1 = (k-1)+(n-k-1)+1 = n-1$, что означает, что $n = m + 1$.

3. Доказано в пункте (2).

Достаточность:
Покажем, что из каждого из 3 условий следует, что граф является деревом:

1. Пойдём от противного: пусть G не является деревом $\Rightarrow$ существует хотя бы один цикл $\Rightarrow$ любые 2 вершины соединены более, чем одной цепью, следовательно, противоречие;

2. Тоже от противного: пусть G не является деревом $\Rightarrow$ существует хотя бы один цикл. Удалим все висячие вершины (вершины степени 1), тогда мы получим граф $G^{'}$ без висячих вершин, где $n^{'} = m^{'} + 1$. Посчитаем n: полемме о рукопожатиях $2n^{'} \leq \sum\limits_{i=1}^{n} d(\nu_i) = 2m^{'} \Rightarrow n^{'} \leq m^{'}$, что означает противоречие;

3. Опять о противного: пусть G не является деревом. По нашему условию G не содержит циклов. Тогда G — несвязный граф, и его можно представить как $G = G_1 \cup \cdots \cup G_k$, $k > 1 . n = m + 1$ и $n = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i = \sum\limits_{i=1}^{k} (m_i + 1) = m + k > m + 1$, где $k > 1$, что означает противоречие.

35 Формула Эйлера. Следствия из формулы Эйлера.

Определение плоского графа:

Граф называется плоским, если он задаётся плоским изображением.

Определение грани графа:

Гранью в плоском изображении графа называется область данного графа, ограниченная его рёбрами. У любого графа существует внешняя грань, которая является бесконечной. Число граней будем обозначать r. Заметим, что у дерева существует только одна грань — внешняя.

Определение триангулярного графа:

Грань, ограниченная тремя рёбрами, называется треугольником. Если все грани плоского изображения графа являются треугольниками, то граф называется триангулярным.

Теорема (формула Эйлера):

Для плоского изображения связного планарного графа справедлива формула

$$n - m + r = 2$$

Доказательство:

Пусть G — планарный граф с плоским изображением. Возможны 2 случая:

1. G является деревом, $n = m + 1, r = 1 \Rightarrow n - m + r = m + 1 - m + 1 = 2$;
2. G не является деревом $\Rightarrow$ в нём есть циклы. Удалим любое ребро цикла. Получим $m_1 = m - 1, r_1 = r - 1, n_1 = n$. Заметим, что $n_1 - m_1 + r_1 = n - m + 1 + r - 1 = n - m + r$. Продолжим процесс удаления рёбер из циклов, пока циклов не останется. Ролучим граф $G^{'} : n^{'} - m^{'} + r^{'} = n - m + r$. Так как в графе нет циклов, то он является деревом и подходит под условия первого случая.

Следствие 1:

Если в плоском графе каждая грань ограничена k рёбрами, то общее число рёбер будет равно

$$m = \frac{k(n-2)}{k-2}.$$

Доказательство:

Каждая грань ограничена k рёбрами, а всего r граней, в произведении kr мы считаем каждое ребро дважды — в каждой из двух граней, которые оно соединяет. Поэтому справедлива формула $kr = 2m$.

$$kr = 2m \Rightarrow r = \frac{2m}{k} \Rightarrow n - m + \frac{2m}{k} = 2 \Rightarrow n - 2 = \frac{mk - 2m}{k} \Rightarrow m = \frac{k(n-2)}{k-2}.$$

Следствие 2:

В каждой триангуляции число рёбер $m = 3(n-2)$.

Доказательство:

Возьмём $k = 3$ и подствим в формулу следствия 1.

Определение максимально плоского графа:

Плоский граф называется максимально плоским, если добавление в него любого ребра нарушает его плоскость. Максимально плоский граф является триангулярным.

Следствие 3:

В планарном графе с числом вершин $n \geq 3$, число рёбер $m \leq 3n - 6$.

Доказательство:

m не превосходит число рёбер в максимально плоском графе с n вершинами $\Rightarrow m \leq 3(n-2) = 3n - 6$.

Следствие 4:

В каждой триангуляции найдётся вершина, степень которой ≤ 5.

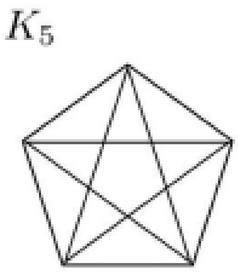
Доказательство:

$k = 3$. Тогда $3r = 2m \Rightarrow r = \frac{2m}{3} \Rightarrow 2 = n - m + \frac{2m}{3} = n - \frac{1}{3}m$. По лемме о рукопожатии: $\sum\limits_i d(V_i) = 2m \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} 1 - \frac{1}{6}\sum\limits_{i=1}^{n} d(V_i) = \frac{1}{6}\sum\limits_{i=1}^{n}(6 - d(V_i)) = 2 \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n}(6 - d(V_i)) \geq 12 \Rightarrow 6 - d(V_i) > 0 \Rightarrow d(V_i) < 6$.

36 Критерий планарности графа.

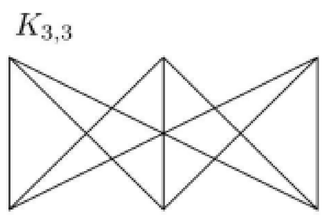
Определение графа типа I:

Граф, получающийся из K_5 добавлением вершин на рёбрах не в местах их пересичения, называется графом типа I.



Определение графа типа II:

Граф, получающийся из $K_{3,3}$ добавлением вершин на рёбрах, не в местах их пересичения, называется графом типа II.



Теорема (критерий планарности графа):

Граф планарен, тогда и только тогда, когда он не содержит частей, изоморфных графам типа I или II.

Доказательство:

Необходимость:

Пойдём от противного: пусть граф содержит изоморфизм к графам типа I или II. Тогда K_5 и $K_{3,3}$ — полные планарные графы.

1. K_5: $n = 5, m = 10$. По необходимому условию планарности $m \leq 3n - 6 = 9$, что означает противоречие.

2. $K_{3,3}$: $n = 6, m = 9$. По формуле Эйлера: $2 = 6 - 9 + r \Rightarrow r = 5$. Оценим число рёбер. Любое ребро принадлежит трёхэлементному циклу, но принадлежит четырёхэлементному: $4r \leq 2m \Rightarrow m \geq 10$, что означает противоречие, потому что $m = 9$.

Достаточность: не доказывается.

37 Эйлеров граф. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы граф был эйлеровым.

Определение 2.5.1. *Эйлеровым путем* в графе называется путь, который проходит по каждому ребру, причем ровно один раз (то есть путь длины m).

Определение 2.5.2. *Эйлеров цикл* — это замкнутый эйлеров путь.

Определение 2.5.3. Граф называется *эйлеровым*, если он содержит эйлеров цикл.

Теорема 2.5.1 (необходимое и достаточное условие для того, чтобы граф был эйлеровым). *Связный граф является эйлеровым* $\iff$ *все вершины чётные.*

Доказательство. Необходимость. Дан связный эйлеров граф, покажем, что все вершины чётные. Граф является эйлеровым $\implies$ в нём существует циклический эйлеров цикл. Допустим в графе существует вершина с нечетной степенью. Рассмотрим эйлеров обход графа. Заметим, что при попадании в вершину и при выходе из нее мы уменьшаем ее степень на два (помечаем уже пройденные ребра), если эта вершина не является стартовой (она же конечная для цикла). Для стартовой (конечной) вершины мы уменьшаем её степень на один в начале обхода эйлерова цикла, и на один при завершении. Следовательно вершин с нечетной степенью быть не может, то есть все вершины обязательно чётные.

Достаточность. Пусть все вершины чётные, покажем, что граф является эйлеровым. Выберем произвольную вершину v_0, двигаясь по рёбрам, окрашиваем их. Продолжим движение по неокрашенным рёбрам и в итоге вернёмся в v_0. Мы получили циклический путь, состоящий из окрашенных рёбер. Здесь возможны два случая:

1. Все рёбра окрашены $\implies$ пройден эйлеров цикл $\implies$ граф является эйлеровым.
2. Окрашены не все рёбра. Поскольку граф связный, существует ребро, один конец которого принадлежит окрашенному ребру. Продолжим движение по этому ребру пока не вернёмся в начало (конец). Если новый построенный путь охватил все рёбра, то заканчиваем процесс, иначе продолжаем до тех пор, пока не получим эйлеров путь. □

38 Необходимое и достаточное условие существование эйлерова пути.

Следствие (необходимое и достаточное условие существования эйлерова пути). В связном графе G существует эйлеров путь, связывающий вершины u и v $\iff$ u и v — единственные нечётные вершины в графе.

Доказательство. *Необходимость.* Если существует эйлеров путь, связывающий вершины u и v, то они единственные нечётные вершины. Очевидно: степень всех вершин кроме u и v будет чётной, но для первого исхода из u и последнего захода в v нет парных рёбер, то есть они окажутся единственными нечётными вершинами.

Достаточность. Пусть u и v — единственные нечётные вершины в графе G. Покажем, что существует эйлеров путь. Возможны 2 случая:

1. u и v — смежные. Удалим ребро между ними. Тут возможны 2 ситуации:
   (a) G всё ещё связный. Все вершины чётные $\Longrightarrow$ по предыдущей теореме существует эйлеров путь. Добавим ребро назад и получим путь $uCuv$.
   (b) G распался на 2 компоненты связности. Степени всех вершин теперь чётные, а значит, в каждой компоненте связности существует эйлеров цикл. uC_1u — в первой компоненте связности и vC_2v — во второй компоненте $\Longrightarrow$ получаем эйлеров путь для изначального графа uC_1uvC_2v.
2. u и v — несмежные. Добавим между ними ребро. Тогда u и v станут чётными, а значит, все вершины чётные. По предыдущей теореме в этом графе существует эйлеров цикл $uvCu$. Тогда, если мы уберём это ребро, в графе останется путь vCu, который будет являться эйлеровым. □

39 Гамильтонов граф. Достаточные условия гамильтоновости графа.

Определение 2.6.1. *Гамильтонов цикл* — простой замкнутый путь, проходящий через все вершины, длины n. Цепь имеет $n-1$ рёбер.

Определение 2.6.2. Граф называется *гамильтоновым*, если он содержит гамильтонов цикл.

Теорема 2.6.1 (достаточные условия того, чтобы граф был гамильтоновым).

1. *Если в связном графе число вершин $n \geq 3$, сумма степеней любых двух его смежных вершин u, v: $d(v) + d(u) \geq n \implies$ граф гамильтонов.*

   Доказательство. Рассмотрим самый большой простой путь (цепь) P. Пусть длина этой цепи равна k. Тогда в ней $k+1$ вершина. Назовём их $v_0, v_1, \ldots, v_k$. $d(v_0) = p$. Мы знаем, что $v_{i1}, \ldots v_{ip}$ смежные с v_0 вершины, потому что все они находятся в цепи P. То же самое верно и для v_k. Рассмотрим вершины со сдвигом на 1 влево: $v_{i1-1}, \ldots, v_{ip-1}$. Оставшиеся вершины цепи $k-p+1$, v_k обязательно находится в этой группе. Все вершины могут быть смежны с v_k, кроме самой v_k, то есть $k-p$ вершин могут быть смежны с v_k. По условию $d(v_0) + d(v_k) \geq k \implies d(v_k) \geq n - d(v_0) = n - p \geq k - p + 1$. Значит существует хотя бы $k-p+1$ вершин, смежных с v_k. Значит есть хотя бы одна вершина, которая не принадлежит этой группе вершин, она будет смежна с v_0. Получается, что существует гамильтонов цикл: из v_0 до v_{ij-1}, vk, назад до v_{ij}, смежному с v_0 и в v_0. $v_0 P v_{ij-1} v_k P v_{ij} v_0$. Но это изменённый граф, в оригинальном найдётся ребро v_t связанное с вершиной v^*, непринадлежащей нашей цепи. В нём цепь: $v^* v_t P v_0 v_{ij} P v_k v_{ij-1} P v_{t+1}$ длины $k - 2 + 3 = k + 1$. Значит изначальная цепь P была не самая длинная. Противоречие. □

2. *Если в графе $n \leq 3$ и $d(v_i) \geq \dfrac{n}{2}$ для всех i, граф является гамильтоновым.*

40 Алгоритм построения минимального покрывающего дерева сети.

Определение 2.7.1. *Вес ребра* — значение, поставленное в соответствие ребру взвешенного графа.

Определение 2.7.2. *Сеть* — связный граф $G = (V, \rho)$, с положительными весами на рёбрах.

Определение 2.7.3. *Вес сети* — сумма весов всех рёбер.

Определение 2.7.4. *Покрывающее (остовное) дерево* — сеть $T = (V, \rho^*)$, где $\rho^* \subseteq \rho$, для сети $G = (V, \rho)$.

Определение 2.7.5. *Минимальное покрывающее дерево* — покрывающее дерево сети, имеющее наименьший вес сети среди всех остальных покрывающих деревьев.

Теорема 2.7.1 (алгоритм Краскала нахождения минимального покрывающего дерева сети).

1. *Все рёбра нумеруются в порядке возрастания весов;*
2. *Первое из списка ребро перекрашивается, оба его конца образуют компоненту;*
3. *Рассматриваем следующее ребро:*
   (a) *Если оба конца ребра принадлежат одной и той же компоненте, ребро не окрашивается и не добавляется в компоненту;*
   (b) *Если один конец лежит в некоторой компоненте, а второй не принадлежит ни одной из компонент, это ребро окрашивается и входит в компоненту;*
   (c) *Если одна вершина принадлежит одной компоненте, а другая вершина принадлежит другой компоненте, то ребро окрашивается, и эти компоненты сливаются в одну;*
   (d) *Если оба конца не принадлежат никаким компонентам, ребро окрашивается и её концы образуют новую компоненту.*
4. *Если рассмотрены все рёбра, работа алгоритма завершена, минимальное остовное дерево построено. Иначе, возвращаемся к шагу (3).*

41 Маршрут, путь, ориентированная цепь (бесконтурный путь), контур.

Определение маршрута:

Маршрут — последовательность смежных дуг $(\nu_{k-1}, \nu_k) \in \rho$. В маршруте дуги могут повторяться.

Определение пути:

Путь — маршрут, в котором каждая дуга встречается не более 1 раза.

Определение ориентированной цепи:

Ориентированная цепь — нециклический путь, в котором каждая вершина принадлежит не более, чем двум дугам.

Определение контура:

Контур — циклический путь, в котором каждая вершина принадлежит не более, чем двум дугам.

42 Отношение достижимости, матрица достижимости, рекуррентная формула для построения матрицы достижимости; необходимое и достаточное условие, чтобы отношение достижимости являлось порядком. Связный и сильно связный орграф.

Определение 2.8.8. Говорят, что вершина v *достижима* из вершины u, если существует путь из u в v. Две вершины *взаимнодостижимы*, если они достижимы друг из друга. Отношение взаимной достижимости обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, другими словами, это эквивалентность на множестве вершин графа.

Определение 2.8.9. Определим *матрицу маршрута* как матрицу M такую, что:

$$\begin{cases} m_{ij} = 1, (v_i, v_j) \in \rho \\ m_{ij} = 0, (v_i, v_j) \notin \rho \end{cases}$$

Определение 2.8.10. Определим матрицу отношения достижимости D: $\sum\limits_{k=1}^{n-1} M^k + E$.

Теорема 2.8.1 (рекурентная формула для построения матрицы достижимости).

1. $M_1 = M$;
2. $M_{k+1} = M_k \cdot M_1 + M_1$;
3. *Если* $M_{k+1} = M_k$ *(дошли до конца), то* $D = M_{k+1} + E$, *иначе* $k = k + 1$

Определение 2.8.11. Петля называется *тривиальным контуром*. Орграф, не имеющий тривиальных контуров называется *бесконтурным*.

Теорема 2.8.2 (необходимое и достаточное условие, чтобы отношение достижимости являлось порядком). *Отношение достижимости в орграфе G является порядком на множестве вершин $\iff$ G — бесконтурный граф.*

Определение 2.8.12. *Связный орграф* — это орграф, симметризация которого — связный граф. *Сильносвязный орграф* — орграф, в котором любые две вершины взаимнодостижимы.

43 Матричное условие достижимости вершин. Следствие. Матричное условие взаимной достижимости двух вершин.

Теорема 2.8.3 (матричное условие достижимости вершин). *Элемент $M_{ij}^{(\alpha)}$ матрицы M^k равен 1 $\iff$ существует маршрут длины k из v_i в v_j в орграфе $\vec{G}$.*

Следствие. v_j достижима из v_i в n-вершинном орграфе $\iff$ в матрице $D = \sum_{k=1}^{n-1} M^k + E$, то есть $d_{ij} = 1$.

Теорема 2.8.4 (матричное условие взаимной достижимости двух вершин). *Вершины v_i и v_j в $\vec{G}$ взаимно достижимы $\iff$ в матрице достижимости D строки, соответствующие этим вершинам равны.*

44 Отношение взаимной достижимости. Источники и стоки. База орграфа. Теорема о базе.

- Вершины v_i, v_j называют **взаимнодостижимыми** , если они достижимы друг из друга.
- **Источиником** в орграфе называется вершина, недостижимая из любой другой вершины.
- **Стоком** называется вершина, из которой не достижима любая другая вершина.

Определение 2.9.3. *Базой* орграфа называют подмножество вершин $V_0 \subseteq V$ такой, что любая вершина достижима из некоторой другой вершины из V_0, а любые две вершины из V_0 взаимно недостижимы.

Определение 2.9.4. Пусть орграф $\vec{G} = (V, \rho)$, $\varepsilon \subseteq V \times V$ — отношение взаимной достижимости. *Факторграфом* орграфа G по эквивалентности ε называется орграф $\vec{G}/\varepsilon$, вершинами которого являются классы эквивалентности ε. При этом $(\varepsilon(u), \varepsilon(v)) \in \rho^*$, если существует $u' \in \varepsilon(u)$ и $v' \in \varepsilon(v)$, такие, что $(u', v') \in \rho$

Теорема 2.9.1 (о базе). *Подмножество $V_0 \subseteq V$ является базой орграфа $\iff$ оно образовано вершинами, взятыми по одной из каждого источника факторграфа.*

Доказательство. Необходимость. Пусть V_0 — база орграфа. Рассмотрим произвольную вершину $v \in V_0$. Получим два случая:

1. $v \in \varepsilon(v)$ - не источник в факторграфе $\implies$ так как это не источник, то v достижима из вершины $v_k \in \varepsilon(v_k)$.

2. $v \in \varepsilon(v)$ - и это источник. Тогда вершина $\varepsilon(v)$ в факторграфе недостижима из любой другой вершины $\implies$ v недостижима из любой другой вершины в $\vec{G}$. Но v принадлежит базе $\implies$ $v \in V_0$. То есть в v_0 находятся взятые по одной вершины из источника факторграфа $\vec{G}/\vec{\varepsilon}$.

Достаточность. V_0 - множество образов из вершин, взятых по одной из каждого источника факторграфа. Покажем, что V_0 - база. То есть покажем, что любая вершина орграфа достижима из некоторой вершины $\in V_0$ и любые две вершины в V_0 недостижимы.

Рассмотрим произвольную вершину в орграфе $\vec{G} : v \in V \implies v \in \varepsilon(v)$

1. Если $\varepsilon(v)$ — источник, то по условию представитель V_0.

2. Если $\varepsilon(v)$ — не источник, то $\varepsilon(v)$ достижима из $\varepsilon(v_1)$. Аналогично с вершинами $\varepsilon(v_2)$ и так далее. В факторграфе $\varepsilon(v)$ достижима из $\varepsilon(v_k)$. Пусть $u \in \varepsilon(v_k)$, тогда v достижимо из $u \implies v \in V_0$. $\square$

45 Необходимое и достаточное условие для того, чтобы орграф был эйлеровым; Необходимое и достаточное условие для существования эйлерового пути в орграфе.

Теорема 2.5.2 (необходимое и достаточное условие для того, чтобы орграф был эйлеровым). *Связный орграф является эйлеровым $\iff$ для любой вершины степень её исхода равна степени захода.*

Теорема 2.5.3 (необходимое и достаточное условие существования эйлерова пути в орграфе). *В связном орграфе $\vec{G} = (V, \rho)$ существует эйлеров путь $\iff$ найдутся такие вершины u и v, что $d^+(u) = d^-(u) + 1$, $d^-(v) = d^+(v) + 1$, а степени исхода и захода остальных вершин совпадают.*

46 Обход орграфа. Необходимое и достаточное условие существования обхода.

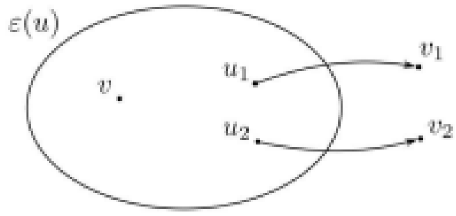
Определение 2.10.1. *Обходом орграфа* называется маршрут, содержащий все дуги орграфа.

Определение 2.10.2. *Слой* или *компонента сильной связности орграфа* — максимальное множество вершин орграфа, такое, что для двух любых вершин оттуда существует путь из первой вершины во вторую и обратно.

Теорема 2.10.1 (необходимое и достаточное условие существования обхода). *В связном орграфе существует обход $\iff$ для любого слоя существует не более одной дуги с началом (концом) в этом слое и концом (началом) вне этого слоя.*

Доказательство. Необходимость. Пусть в графе существует обход. Нужно доказать, что для каждого слоя существует не более одной дуги с началом в этом слое и концом вне него. Докажем от противного. Существует слой и две дуги с началом в этой компоненте и концом вне него.

Пусть в графе есть обход, покажем, что для любого слоя существует не более одной дуги с началом в этом слое и концом в другом. Пойдём от противного: пусть существует следующий слой и две дуги:



Очевидно, что v_1 достижима из v, так как u_1 достижима из v, а v_1 достижима из u_1.

Пусть в обходе сначала проходится дуга (u_1, v_1), потом (u_2, v_2), тогда П: $\Pi = \Pi_1(u_1, v_1) \cdot \Pi_2(u_2, v_2) \cdot \Pi_3$. Так как по свойству обхода нужно пройти все рёбра, а v_2 по построению достижима только из u_2, то существует путь, соединяющий v_1 и u_2. Тогда u_2 достижима из v_1, и, соответственно, v_2 достижима из v_1. Следовательно, v_1 достижима из v, u_2 достижима из v и из v_1. Это означает, что v_1 входит в эту же компоненту сильной связности. Получили противоречие.

Достаточность. Пусть имеется связный орграф, в котором для каждого слоя существует не более одной дуги с началом в нём и концом вне его. То есть существует единственный слой в этом графе, в который не входит ни одна дуга и единственный слов, из которого не выходит ни одной дуги. Тогда обход графа можно представить следующим образом: $\Pi_1(v_1, v_2) \cdot \Pi_2(v_2', v_3) \cdot \dots \cdot \Pi_{k-1}(v_{k-1}', v_k) \cdot \Pi_k$, где $v_i' = v_i \ \forall i \in [2, k-1]$ □

47 Стандартное упрощение маршрута. Композиция маршрутов. Связка маршрутов, операции для связок маршрутов, свойства операций над связками. Матрица соединений. Алгоритм для нахождения всех гамильтоновых путей в орграфе.

Теорема 2.10.2 (стандартное упрощение маршрута). *Пусть имеется маршрут* П *из u в v:* $v_0 = u, \dots, v_i = v_0, \dots, v_k = v$.

Проходим маршрут с конца и ищем $v_i = v_0$. При нахождении - удаляем всё от v_1 до v_i (включительно). Получаем новый маршрут $\Pi_1 : v_0 = u, v_{i+1}, \dots, v_j = v_{i+1}, \dots, v_k = v$. Снова проходим маршрут с конца и ищем первое $v_j = v_{i+1}$. При нахождении - удаляем всё от v_{i+2} до v_j (включительно). Повторяем алгоритм пока не получим маршрут $\Pi^* : v_0 = u, v_{i+1}, v_{j+1}, \dots, v_k = v$, такой, что Π^* - бесконтурный.

Определение 2.10.3. Если конец маршрута Π_1 совпадает с началом маршрута Π_2, то $\Pi = \Pi_1 \cdot \Pi_2$ называется *композицией* маршрутов.

Определение 2.10.4. *Связкой* маршрутов называется множество маршрутов, имеющих одну и ту же начальную вершину и одну и ту же конечную вершину. Обозначим как $B(u, v)$, где u — начало маршрутов, v — конец маршрутов.

Определение 2.10.5. *Объединением* связок называется $B_i(u, v) \cup B_j(u, v)$

Определение 2.10.6. *Композицией* связок называется $B_i(u, v)$ и $B_j(v, \omega)$ называется связка $B(u, \omega) = B_i(u, v) \cdot B_j(v, \omega) = \{\Pi_1 \cdot \Pi_2 | \Pi_1 \in B_i(u, v), \Pi_2 \in B_j(v, \omega)\}$

Лемма 2.10.1 (свойства операций над связками). *Пусть u, v, ω, t — произвольные вершины орграфа. Для связок маршрутов в орграфе существуют следующие отношения:*

1. $B_i(u, v) \cup B_j(u, v) = B_j(u, v) \cup B_i(u, v)$;
2. $B_i(u, v) \cup (B_j(u, v) \cup B_k(u, v)) = (B_i(u, v) \cup B_j(u, v)) \cup B_k(u, v)$;
3. $B \cup \mathbf{O} = B$;
4. $B_i(u, v) \cdot (B_j(v, \omega) \cdot B_k(\omega, t)) = (B_i(u, v) \cdot B_j(v, \omega)) \cdot B_k(\omega, t)$;
5. $B_i(u, v) \cdot (B_j(v, \omega) \cup B_k(v, \omega)) = (B_i(u, v) \cdot B_j(v, \omega) \cup (B_i(u, v) \cdot B_k(v, \omega))$.

Определение 2.10.8. Имеем $\vec{G}(V, \rho)$, $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. *Матрицей соединений* орграфа $\vec{G}$ будем обозначать матрицу A:

$$A = (a_{ij}), \text{ где } a_{ij} = \begin{cases} v_i \cdot v_j, & (v_i, v_j) \in \rho \\ 0, & (v_i, v_j) \notin \rho \end{cases}$$

$A^k = (a_{ij}^k)$, где a_{ij}^k — связка маршрутов длины k из v_i в v_j.

Теорема 2.10.3 (алгоритм поиска всех Гамильтоновых путей в графе).

1. *$A_1 = A$, $k = 1$, A — матрица соединений*
2. *По матрице A_k строим $\overline{A}_k$, которая получается из A_k применением к ней процедуры стандартного упрощения всех маршрутов в A_k с последующим удалением всех цепей длины $< k$.*
   Если $\overline{A}_k = 0$ содержит только пустые связки, то гамильтоновых путей нет, конец алгоритма.
   Если $\overline{A_k} \neq 0$ и $k = n - 1$, то $\overline{a}_{ij}^k$ содержит все гамильтоновы цепи из v_i в v_j.
3. *$A_{k+1} = \overline{A}_k \cdot \overline{A}_1$.*
   - *Если $k = n - 1$, то конец алгоритма. Если хотя бы один элемент главной диагонали равен 0, то гамильтоновых контуров нет. Иначе любой элемент на главной диагонали содержит все гамильтоновы контуры орграфа.*
   - *Если $k \neq n - 1$, то $k = k + 1$ и переход к шагу (2).*

48 Орсети, кратчайшие пути, алгоритм Дейкстры.

Определение 2.10.9. *Ориентированная сеть* или *орсеть* — это связный граф с положительными весами на дугах. Если существует вершина, из которой достижимы все остальные вершины, то такая вершина называется *корнем*, а сеть *корневой*.

Теорема 2.10.4 (алгоритм Дейкстры нахождения кратчайшего пути от одной вершины сети до всех остальных). *Положим, что v_1 — это корень сети. Тогда:*

1. *Метка корня $\lambda(v_0) = 0$, другие $\lambda(v) = \infty \quad \forall v \neq v_0$. Множество окрашенных вершин $V(U) = \{v_0\}$;*

2. *Для вех неокрашенных вершин пересчитываются их метки: $\lambda(v) = \min(\lambda(v), \lambda(u) + \omega(u, v))$, где $u \in U$, ω — вес дуги. Далее выбирается вершина с наименьшей меткой, окрашивается, а также окрашивается одна из дуг, которая доставляет минимум для этой вершины и является инцидентной;*

3. *Если $U = V$, что означает, что все вершины окрашены, то алгоритм завершается. Получили $\lambda(v)$ — длина кратчайшего пути из v_0 в v, а система окрашенных дуг — это система кратчайших путей из корня в любую другую вершину.*