Содержание

1 Уравнения первого порядка

1.1 Определения

1.1.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y^{'}) \equiv 0$$

1.1.2 Частное решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

Определение частного решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

(1) $F(x, y, y^{'}) \equiv 0$ — обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка.

Частным решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка называется непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(x)$, при подстановки которой в уравнение (1) получим тождество

$$\varphi^{'}(x) \equiv f(x, \varphi(x))$$

1.1.3 Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

Определение общего решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

Множество всех решений обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка называется его общим решением.

1.1.4 Общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка

Пусть (1) $y^{'} = f(x, y)$ — дифференциальное уравнение первого порядка.

Определение общего интеграла дифференциального уравнения первого порядка:

Общее решение уравнения (1) в неявном виде

$$F(x, y) = C$$

называется общим интегралом уравнения (1).

1.1.5 Уравнение с разделяющимися переменными первого порядка

Определение уравнения сразделяющимися переменными первого порядка

Дифференциальным уравннием с разделяющимися переменными первого порядка называется уравнение вида

$$y^{'} = f_1(x)f_2(y),$$

где $f_1(x)$ и $f_2(y)$ — заданные функции.

1.1.6 Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в симметричной форме

Определение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в симметричной форме

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в симметрицной форме имеет вид

$$A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0,$$

где A и B — заданные функции двух переменных, причём переменные x и y равноправны.

1.1.7 Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

Определение линейного дифференциального уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$a_0(x)y^{'} + a_1(x)y = f(x),$$

где x — неизвестнвя переменная, $y = y(x)$ — неизывестная функция, $a_0(x)$ и $a_1(x)$ — известные непрерывные функции.

1.1.8 Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка

Определение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка

Пусть $y^{'} = f(x, y)$ — дифференциальное уравнение первого порядка и $y(x_0) = y_0$ — его начальное условие. Тогда задача Коши для него имеет вид

$$\begin{cases} y^{'} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

где x_0, y_0 — заданные числа.

1.2 Теоремы и алгоритмы

1.2.1 Алгоритм решения уравнений с разделяющимися переменными первого порядка

1. Переходим к дифференциалам:

$$y^{'} = \frac{dy}{dx} \qquad \frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y);$$

2. Делим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y) \quad | \cdot dx\frac{1}{f_2(y)}$$

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

3. Вычисляем интегралы:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C,$$

где $C \in R$ и $\int \frac{dy}{f_2(y)} = F_2(y)$, $\int f_1(x)dx = F_1(x)$.

Получим:

$$(3) \quad F_2(y) = F_1(x) + C$$

4. Разрешаем последнее уравнение относительно y:

$$(4) \quad y = \varphi(x, C), \quad C \in R,$$

где $\varphi(x, C)$ — общее решение.

5. Ответ: $\varphi(x, C)$.

1.2.2 Метод вариации решния линейного дифференциального уравнения первого порядка.

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$a_0(x)y^{'} + a_1(x)y = f(x),$$

Тогда

$$y^{'} + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}y = \frac{f(x)}{a_0(x)}$$

Обозначим $p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}, \quad q(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)}$

Следовательно уравнение примет вид:

$$(1) \quad y^{'} + p(x) = q(x), \quad a \leq x \leq b$$

Метод вариации произвольной постоянной:

1. Этап:

   Найдём общее решение соответствующего (1) однородного уравнения:

$$(2) \quad y^{'} + p(x)y = 0$$
$$y^{'} = -p(x)y$$
$$\frac{dx}{dy} = -p(x)y$$
$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx + C$$
$$\ln|y| = -F_1(x) + C$$
$$y = \pm e^C e^{-F_1(x)}$$

   Получим: $y_0 = Ce^{-F_1(x)}$ — общее решение (2).

2. Этап:

   Ищем решение (1) в виде:

$$(3) \quad C(x)e^{-F_1(x)},$$

   где $C(x)$ — пока неизвестная функция.

$$y^{'} = C^{'}(x)e^{-F_1(x)} + C(x)e^{-F_1(x)}(-p(x))$$

   Подставляем в (1):

$$C^{'(x)}e^{-F_1(x)} - C(x)e^{-F_1(x)}p(x) + p(x)C(x)e^{-F_1(x)} = q(x)$$
$$C^{'}(x) = e^{F_1(x)}q(x)$$
$$C(x) = \int e^{F_1(x)}q(x)dx \pm c = F_2(x) + C$$

   Подставим в (3):

$$y = e^{-F_1(x)}(F_2(x) + C)$$

   Таким образом, $y = e^{-F_1(x)}(F_2(x) + C)$ — общее решение уравнения (1).

1.2.3 Основная теорема существования и единственности

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши:

Предположим, что $f(x,y)$ — непрерывная функция и у неё существует непрерывная чатсная производная $f^{'}(x,y)$. Тогда $\forall (x_0, y_0)$ задача Коши имеет единственное решение.

1.2.4 Сведение задачи Коши к интегральному уравнению

Пусть $\varphi(x)$ — решение задачи Коши:

$$(1) \quad \varphi^{'}(x) \equiv f(x, \varphi(x))$$

$$(2) \quad \varphi(x_0) = y_0$$

Перепишем (1) в виде:

$$(3) \quad \varphi^{'}(t) = f(t, \varphi(t))$$

Фиксируем произвольный x и берём интеграл от (3):

$$\varphi^{'} = f(t, \varphi(t)) \quad l| \int_{x_0}^{x} dt$$

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t)) dt$$

$$(4) \quad \varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t)) dt$$

По определению (4) означает, что $\varphi(x)$ является решением интегрального уравнения

$$(5) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t)) dt$$

Все остальные рассуждения обратимы $\leftarrow$ задача Коши $\sim$ уравнению (5).

2 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка

2.1 Определения

2.1.1 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка (однородные и неоднородные)

Определение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка

Однородное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид:

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n(x)y = 0,$$

где $a_0(x), \ldots, a_n(x)$ — заданные непрерывные функции.

Определение линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка

Неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид:

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n(x)y = f(x),$$

где $a_0(x), \ldots, a_n(x), f(x)$ — заданные непрерывные функции.

2.1.2 Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка

$$(1) \quad y^{(n)+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x)}$$

Определение задачи Коши для дифференциального уравнения n-го порядка

Задача Коши для линейного уравнения (1) имеет вид:

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y^{'}(x_0) = y_0^{'} \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

где $y(x_0) = y_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ — начальные условия и $x_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ — заданные числа.

2.1.3 Линейно зависимые и линейно независимые функции

Определение линейно зависимых функций

Функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ называются линейно зависимыми на отрезке $[a, b]$, если найдутся константы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ — числа, не все равные нулю, такие, что линейная комбинация:

$$\alpha_1\varphi(x) + \dots + \alpha_m\varphi(m) \equiv 0$$

Определение линейно независимых функций

Функции $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ называются линейно независимыми на отрезке $[a, b]$, если

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \dots + \alpha_m\varphi_m(x) \equiv 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$$

2.1.4 Определитель Вронского функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$

Определение определителя Вронского функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$

Определителем Вронского функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ называется:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x) \ \varphi_2(x) \ \dots \ \varphi_m(x) \\ \varphi_1^{'}(x) \ \varphi_2^{'}(x) \ \dots \ \varphi_m^{'}(x) \\ \dots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) \ \varphi_2^{(n-1)}(x) \ \dots \ \varphi_m^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

2.1.5 Фундаментальная система решения

Опредеение фундаментальной системы решений однородного линейного уравнения

Фундаментальной системой решений однородного линейного уравнения $l(y) = 0$ называется:

$\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — линейно независимые и их количество совпадает с порядком уравнения.

2.1.6 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Определение однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами

Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = 0,$$

где $a_0, \dots, a_n$ — заданные числа.

Определение неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами

Линейное неоднородноре уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x),$$

где $a_0, \ldots, a_n$ — заданные числа.

2.1.7 Необходимое условие линейной зависимости

Теорема (необходимое условие линейной зависимости)

Если функции $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — линейно зависимы на $[a, b]$. Тогда их определитель вронского тождественно равен нулю.

$$\mathbf{W} \equiv 0$$

Доказательство (нужно или нет?:))

2.1.8 Условие линейной независимости решений

Рассмотрим линейное уравнение:

$$(1) \quad y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_m(x) y = 0; \quad a \leq x \leq b$$

Теорема (условие линейной независимости решений линейного уравнения)

Пусть $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — линейно независимые решения уравнения (1). Тогда

$$\forall x \in [a, b] \quad \mathbf{W} \neq 0$$

Доказательство (нужно или нет?:))

2.1.9 Свойство линейности и следствия из него

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_m(x) y = f(x)$$

Обозначим $^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_m(x) y$ как $l(y)$.

Свойство линейности $l(y)$

$$l(y_1(x) + y_2(x)) = l(y_1(x)) + l(y_2(x));$$

$$l(\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\varphi_k(x)) = \sum_{k=1}^{m}\alpha_k l(\varphi_k(x))$$

Следствие свойства линейности

Пусть $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — решения уравнения $l(y) = 0$. Тогда $\varphi^\circ(x) = \alpha_1\varphi_1(x) + \dots + \alpha_m\varphi_m(x)$ тоже является решением этого уравнения.

Доказательство (нужно или нет?:))

2.1.10 Существование ФСР

Теорема (о существовании ФСР у любого однородного линейного уравнения)

Фундаментальная система решений существует для любого однородного линейного уравнения.

2.1.11 Вид общего решения однородноого линейного уравнения

Рассмотрим однородное линейное уравнение

$$(1)\quad y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_m(x)y = 0; \quad a \le x \le b$$

или

$$l(y) = 0$$

Теорема (вид общего решения однородного линейного уравнения)

Пусть $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — ФСР. Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$y = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x),$$

где $c_1, \dots, c_n$ — произвольные константы.

2.1.12 Вид общего решения неоднородноого линейного уравнения

Рассмотрим неоднородное линейное уравнение

$$(1)\quad y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_m(x)y = f(x); \quad a \le x \le b$$

или

$$l(y) = f(x)$$

и соответствующее ему однородное линейное уравнение

$$(2) \quad l(y) = 0$$

Теорема (вид общего решения неоднородного линейного уравнения)

Пусть $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — ФСР (2) и $y_h(x)$ — частное решение (1). Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$y = c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) + y_h(x),$$

где $c_1, \ldots, c_n$ — произвольные константы.

В $y_h(x)$ вместо h должна стоять буква ч, но латех этого сделать не позволяет.

2.2 Алгоритм метод вариации нахождения частного решения

Метод вариации произвольных постоянных нахождения $y_h(x)$

По теореме о виде общего решения линейного однородного уравнения $y_0 = c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x)$ — общее решение уравнения $l(y) = 0$.

Будем искать частное решение $y_h(x)$ в виде:

$$y_h(x) = c_1(x)\varphi_1(x) + \cdots + c_n(x)\varphi_n(x),$$

где $c_1(x), \ldots, c_n(x)$ — пока неизвестные функции.

Рассмотрим систему уравнений

$$(5) \begin{cases} c_1^{'}(x)\varphi_1(x) + \cdots + c_n^{'}(x)\varphi_n(x) = 0 \\ c_1^{'}(x)\varphi_1^{'}(x) + \cdots + c_n^{'}(x)\varphi_n^{'}(x) = 0 \\ c_1^{'}(x)\varphi_1^{''}(x) + \cdots + c_n^{'}(x)\varphi_n^{''}(x) = 0 \\ \ldots \\ c_1^{'}(x)\varphi_1^{(n-2)}(x) + \cdots + c_n^{'}(x)\varphi_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ c_1^{'}(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n^{'}(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases}$$

Пусть $a \leq x \leq b$, x — фиксированное $\Rightarrow$ (5) — линейная алгебраическая система относительно $c_i^{'}(x), \quad i = \overline{1, n}$

Определитель системы = $\mathbf{W}(x) \Rightarrow \mathbf{W}(x) \neq 0 \Rightarrow$ по теореме из алгебры (5) имеет единственное решение.

По формулам Крамера:

$$c_1^{'}(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \ldots \\ & \ldots \\ f & \ldots \end{vmatrix}}{\mathbf{W}} = \frac{\mathbf{W}_1(x)}{\mathbf{W}(x)}$$

$$\ldots$$

$$(6)\quad c_n^{'}(x) = \frac{\begin{vmatrix} \dots & 0 \\ & \dots \\ \dots & f \end{vmatrix}}{\mathbf{W}} = \frac{\mathbf{W}_n(x)}{\mathbf{W}(x)}$$

Таким образом, $c_i^{'}(x) \quad i = \overline{1,n}$ находится по формуле (6) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad c_k(x) = \int \frac{\mathbf{W}_k(x)}{\mathbf{W}(x)} dx$$

2.3 Обоснование метода вариации

Рассмотрим частный случай $n = 2$:

$$(1)\quad y^{''} + a_1(x)y^{'} + a_2(x)y = f(x)$$

$$(2)\quad y^{''} + a_1(x)y^{'} + a_2(x)y = 0$$

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$$

— ФСР (2)

$$y_0 = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$$

$$y_h = c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x)$$

$$(5) \begin{cases} c_1^{'}(x)\varphi_1(x) + c_2^{'}(x)\varphi_2(x) = 0 \\ c_1^{'}(x)\varphi_1^{'}(x) + c_2^{'}(x)\varphi_2^{'}(x) = f(x) \end{cases}$$

$$c_1(x) = \int \frac{\mathbf{W_1}(x)}{\mathbf{W}(x)} dx \quad c_2(x) = \int \frac{\mathbf{W_2}(x)}{\mathbf{W}(x)} dx$$

Подставляем $c_1(x)$ и $c_2(x)$ в (4) $\Rightarrow$

Покажем, что полученное y_h является решением (1):

$$y_h^{'} = c_1^{'}(x)\varphi_1(x) + c_1(x)\varphi_1^{'}(x) + c_2^{'}(x)\varphi_2(x) + c_2(x)\varphi_2^{'}(x) = c_1(x)\varphi_1^{'}(x) + c_2(x)\varphi_2^{'}(x)$$

$$y_h^{''} = c_1^{'}(x)\varphi_1^{'}(x) + c_1\varphi_1^{''}(x) + c_2^{'}(x)\varphi_2^{'}(x) + c_2(x)\varphi_2^{''}(x) = f(x) + c_1(x)\varphi_1^{''}(x) + c_2(x)\varphi_2^{''}(x) = y_h^{''} \Rightarrow$$

$$f(x) + c_1(x)\varphi_1^{''}(x) + c_2(x)\varphi_2^{''}(x) + a_1(x)(c_1(x)\varphi_1^{'}(x) + c_2(x)\varphi_2^{'}(x)) + a_2(x)(c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x)) =$$

$$= f(x) + c_1(x)(\varphi_1^{''}(x) + a_1(x)\varphi_1^{'}(x) + a_2(x)\varphi_1(x)) + a_2(x)(\varphi_2^{''}(x) + a_1(x)\varphi_1^{''}(x) + a_2(x)\varphi_2(x)) = f(x)$$

То есть

$$l(y_h) \equiv f(x)$$

2.4 Пример: $y'' + w^2 y = f(x)$

Пример:

Дано:

(1) $y'' + w^2 y = f(x)$; $a \le x \le b$

$w > 0$

Решение:

1. Решим соответствующее ОУ:

(2) $y'' + w^2 y = 0$

Рассмотрим $y_1(x) = \cos wx$

$y_1'(x) = -w \sin$

$y_1''(x) = -w^2 \cos wx \Rightarrow$ решение (2)

$y_2 = \sin wx$ – тоже решение

Рассмотрим W y_1 и y_2:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos wx & \sin wx \\ -w\sin wx & w\cos wx \end{vmatrix} = w\left(\cos^2 wx + \sin^2 wx\right) = w \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ y_1 и y_2 образуют ФСР $\Rightarrow$ по Т. 5 общее решение (2) имеет вид

$$y = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx$$

2. Будем искать частное решение уравнения (1) методом вариации:

$$y_ч(x) = C_1(x)\cos wx + C_2(x)\sin wx$$

Согласно алгоритму метода вариации решаем СОЛ

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos wx + C_2'(x)\sin wx = 0 \\ C_1'(x)(-w\sin wx) + C_2'(x)(w\cos wx) = f(x) \end{cases}$$ — определитель $C = \Delta = W = w$

По формулам Крамера:

$$C_1'(x) = \frac{1}{w}\begin{vmatrix} 0 & \sin wx \\ f(x) & w\cos wx \end{vmatrix} = -\frac{1}{w} f(x)\sin wx$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{w}\begin{vmatrix} \cos wx & 0 \\ w\sin wx & f(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{w} f(x)\cos wx$$

Зафиксируем $x_0 \in [a,b]$, возьмём в качестве C_1:

$$C_1(x) = -\frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x} f(t)\sin\omega t\,dt$$

Аналогично:

$$C_2(x) = \frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x} f(t)\cos\omega t\,dt$$

Получаем:

$$y_ч = \left(-\frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x} f(t)\sin\omega t\,dt\right)\cos\omega x + \left(\frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x} f(t)\cos\omega t\,dt\right)\sin\omega x =$$

$$= \frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x}\left[-\sin\omega t\cos\omega x + \cos\omega t\sin\omega x\right] f(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x} f(t)\sin\omega(x-t)\,dt$$

3. По теореме 6 общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x + \frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x} f(t)\sin\omega(x-t)\,dt$$