

## Содержание

<b>1</b>	<b>Мнимум 1</b>	<b>2</b>
1.1	Глава 1 . . . . .	2
1.1.1	Билет 1 . . . . .	2
1.1.2	Билет 2 . . . . .	2
1.1.3	Билет 3 . . . . .	2
1.1.4	Билет 4: . . . . .	3
1.1.5	Билет 5 . . . . .	3
1.1.6	Билет 6 . . . . .	3
1.1.7	Билет 7 . . . . .	4
1.1.8	Билет 8 . . . . .	4
1.2	Глава 2 . . . . .	4
1.2.1	Билет 1 . . . . .	4
1.2.2	Билет 2 . . . . .	5
1.2.3	Билет 3 . . . . .	6
1.2.4	Билет 4 . . . . .	6
1.2.5	Билет 5 . . . . .	6
1.2.6	Билет 6 . . . . .	7
1.2.7	Билет 7 . . . . .	7

# 1 Минимум 1

## 1.1 Глава 1

### 1.1.1 Билет 1

#### Определение случайного события:

Пусть  $\Omega$  — множество элементарных исходов эксперимента. Случайным событием называется любое подмножество множества  $\Omega$ .

#### Определение достоверного события:

Достоверным событием называется событие  $\Omega$ , которому благоприятствует каждое событие эксперимента.

#### Определение невозможного события:

Невозможным событием называется пустое множество, которому не благоприятствует ни один исход эксперимента.

#### Определение противоположного события:

Событием, противоположным событию  $A$  называется  $\bar{A}$ , которое состоит из исходов, не благоприятствующих  $A$ .

### 1.1.2 Билет 2

#### Определение $\sigma$ -алгебры событий:

Сигма алгеброй событий называется множество  $\mathcal{F}$  подмножеств  $A \subset \Omega$ , удовлетворяющее условиям:

1. если  $A \in \mathcal{F}$ , то  $\bar{A} \in \mathcal{F}$ ;
2.  $\Omega \in \mathcal{F}$ ;
3. если  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$ , то  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ .

### 1.1.3 Билет 3

#### Определение вероятностной меры:

Вероятностной мерой называется функция  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ , удовлетворяющая условиям:

1.  $P(\Omega) = 1$ ;
2.  $\forall A \in \mathcal{F} \quad P(A) \geq 0$ ;
3.  $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$ , такой, что  $\forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ .

#### 1.1.4 Билет 4:

##### Свойства вероятности:

1.  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
2. Если  $A \subseteq B$ , то  $P(A) \leq P(B)$  и  $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

##### 3. Теория сложения вероятностей:

Пусть  $A$  и  $B$  некоторые события,  $A, B \in \mathcal{F}$ . Тогда

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

##### 4. Непрерывность вероятностной меры:

Пусть  $\{A\}_{i=1}^{\infty}$  — монотонный класс событий, то есть

1)  $A_i \subset A_{i+1}$  или 2)  $A_i \supset A_{i+1}$ . Тогда

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

#### 1.1.5 Билет 5

##### Определение классической вероятности:

$P(A) = \frac{k}{n}$ , где  $k$  — количество благоприятных  $A$  исходов,  $n$  — количество всех возможных исходов эксперимента.

#### 1.1.6 Билет 6

##### Определение условной вероятности:

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство и  $A, B \in \mathcal{F}$ ,  $P(B) > 0$ . Условной вероятностью события  $A$  при условии, что наступило событие  $B$  называется число:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Пусть  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$  — полная группа несовместных событий.

Назовём события  $A_i$  гипотезами, а  $P(A_i)$  назовём априорные вероятности гипотез.

##### Теорема (формула полной вероятности):

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство и  $\{A_i\}_i^\infty \in \mathcal{F}$  — полная группа попарно несовместных событий;  $P(A_i) > 0$ , пусть  $A \in \mathcal{F}$  — неполное событие и  $P(A|A_i) \geq 0$ . Тогда

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) * P(A|A_i)$$

**Теорема (формула Байеса):**

Пусть  $\{A_i\}_{i=1}^\infty$  — полная группа попарно несовместимых событий, и пусть для некоторого  $P(A) > 0$ . Тогда

$$\forall i = \overline{1, \infty} \quad P(A_i|A) = \frac{P(A_i) * P(A|A_i)}{P(A)},$$

**1.1.7 Билет 7**

**Определение независимости событий:**

Случайные события  $A$  и  $B$  называются независимыми, если

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

**1.1.8 Билет 8**

**Определение (критерий независимости событий):**

Пусть  $A$  и  $B$  такие, что  $P(B) > 0$ . Тогда случайные события  $A$  и  $B$  независимы  $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$

**Теорема (о независимости противоположных событий):**

Пусть  $A$  и  $B$  — независимы. Тогда события  $A$  и  $\overline{B}$ ;  $\overline{A}$  и  $B$ ;  $\overline{A}$  и  $\overline{B}$  — попарно независимы.

**1.2 Глава 2**

**1.2.1 Билет 1**

**Определение верхней меры Лебега:**

Верхней мерой Лебега называется

$$\mu^*(A) = \inf_{\{P_k\}} \sum_m (P_k)$$

**Определение нижней меры Лебега:**

Нижней мерой Лебега называется

$$\mu_*(A) = 1 - \mu^*(E \setminus A)$$

**Определение измеримого по Лебегу множества и меры Лебега:**

Говорят, что множество  $A$  измеримо по Лебегу, если:

$$\mu^*(A) = \mu_*(A) = \mu(A)$$

Величина  $\mu(A)$  — мера Лебега множества  $A$ .

**1.2.2 Билет 2****Определение измеримой функции:**

Пусть  $X$  и  $Y$  — некоторые множества и пусть  $S_x$  и  $S_y$  — классы подмножества.  $f : X \rightarrow Y$  — некоторая функция.

Функция  $f : X \rightarrow Y$  называется  $(S_x, S_y)$  — измеримой, если:

$$\forall B \in S_y \quad \exists f^{-1} : S_y \rightarrow S_x$$

**Определение измеримой абстрактной функции:**

Абстрактная функция  $f(x) : X \rightarrow Y$  называется  $(S_x, S_y)$  — измеримой, если:

$$\forall A \in S_y \quad f^{-1}(A) \in S_x$$

**Определение измеримой действительной функции:**

Действительная функция  $f(x)$  с областью определения  $X \subset R$  называется  $\mu$ -измеримой или  $S_\mu$ -измеримой, если для любого борелевского множества  $b \in \beta(R)$   $f^{-1}(b) \in S_\mu$ .

### 1.2.3 Билет 3

**Определение (критерий измеримости действительных функций):**

Действительная функция  $f(x)$  измерима  $\Leftrightarrow$

$$\forall C \in R \quad f^{-1}(b) = f^{-1}(-\infty, C) \text{ — измерима} \\ \text{или} \\ \{x : f(x) < C\}$$

### 1.2.4 Билет 4

**Определение случайной величины:**

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство. Случайной величиной называется вещественно значная функция  $\xi$  такая, что

$$\xi : \Omega \rightarrow R \quad \forall x \in R \quad w : \xi(w) < x \in \mathcal{F}$$

### 1.2.5 Билет 5

**Определение функции распределения:**

Функцией распределения вероятностей случайной величины  $\xi$  называется функция  $F_\xi(x) = Pw : \xi(w) < x$

**Свойства функции распределения:**

1.  $0 \leq F_\xi(x) \leq 1 \quad \forall x \in R$ ;
2.  $F_\xi(x)$  — неубывающая, непрерывная слева функция;
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_\xi(x) = 1$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_\xi(x) = 0$ ;
4.  $P\{a \leq \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$ ;
5.  $P\{\xi = x_0\} = F_\xi(x_0 + 0) - F_\xi(x_0)$ .

### 1.2.6 Билет 6

#### Определение функции плотности распределения:

Функцией плотности распределения вероятностей случайной величины  $\xi$  называется функция  $f_\xi(x)$  такая, что:

1.  $\forall x \in R \quad f_\xi(x) \geq 0;$
2.  $F'_\xi(x) = f_\xi(x);$
3.  $\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) dx = 1;$
4.  $P\{a \leq \xi \leq b\} = \int_b^a f_\xi(x) dx.$

### 1.2.7 Билет 7

#### Определение случайных независимых величин:

Случайные величины  $\xi$  и  $\mu$  называются независимыми, если:

$$\forall x, y \in R \quad P\{w : \xi(w) < x; \mu(w) < y\} = P\{w : \xi(w) < x\} * P\{w : \mu(w) < y\}$$