

Содержание

1 Уравнения первого порядка	4
1.1 Определения	4
1.1.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка	4
1.1.2 Частное решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка	4
1.1.3 Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка	4
1.1.4 Общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка	4
1.1.5 Уравнение с разделяющимися переменными первого порядка	5
1.1.6 Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в симметричной форме	5
1.1.7 Линейное дифференциальное уравнение первого порядка	5
1.1.8 Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка	5
1.2 Теоремы и алгоритмы	6
1.2.1 Алгоритм решения уравнений с разделяющимися переменными первого порядка	6
1.2.2 Метод вариации решения линейного дифференциального уравнения первого порядка.	7
1.2.3 Основная теорема существования и единственности	8
1.2.4 Сведение задачи Коши к интегральному уравнению	8
2 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка	9
2.1 Определения	9
2.1.1 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка (однородные и неоднородные)	9
2.1.2 Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка	9
2.1.3 Линейно зависимые и линейно независимые функции	10
2.1.4 Определитель Вронского функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$	10
2.1.5 Фундаментальная система решения	10
2.1.6 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	10
2.1.7 Необходимое условие линейной зависимости	11
2.1.8 Условие линейной независимости решений	11
2.1.9 Свойство линейности и следствия из него	11
2.1.10 Существование ФСР	12
2.1.11 Вид общего решения однородного линейного уравнения	12

2.1.12	Вид общего решения неоднородного линейного уравнения	12
2.2	Алгоритм метода вариации нахождения частного решения	13
2.3	Обоснование метода вариации	14
2.4	Пример: $y'' + w^2y = f(x)$	15
2.5	Формула Остроградского-Лиувилля	16
2.6	Метод Эйлера (случай простых корней)	16
3	Линейные дифференциальные уравнения второго порядка	18
3.1	Интегрирование с помощью частного решения	18
3.2	Упрощение с помощью замены функции $y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{1}{4x^2})y = 0$	19
3.3	Упрощение с помощью замены переменной $y'' + \frac{1}{2x}y' - \frac{1}{x}y = 0$.	19
3.4	Метод степенных рядов $y'' - xy = 0$	21
3.5	Алгоритм решения простейшей краевой задачи	22
3.6	Существование решения краевой задачи:	23
4	Линейные системы	25
4.1	Определения	25
4.1.1	Нормальная линейная система, её векторная запись . . .	25
4.1.2	Решение системы	26
4.1.3	Задача Коши для системы	26
4.1.4	Линейно зависимые и линейно независимые вектор-функции	27
4.1.5	Определитель Вронского вектор-функций	27
4.1.6	Фундаментальная система решений линейной системы .	27
4.1.7	Фундаментальная матрица решений однородной системы	28
4.1.8	Линейные системы с постоянными коэффициентами .	28
4.1.9	Собственные значения и собственные векторы матрицы .	28
4.1.10	Матричная экспонента	29
4.2	Извинения	29
4.3	Теоремы, алгоритмы, примеры	29
4.3.1	Свойства решений однородной системы	29
4.3.2	Необходимое условие линейной зависимости вектор-функций	30
4.3.3	Условие линейной независимости решений однородной системы	30
4.3.4	Существование ФСР	30
4.3.5	Вид общего решения однородной системы	32
4.3.6	Вид общего решения неоднородной системы	33
4.3.7	Свойства фундаментальных матриц	34
4.3.8	Метод вариации нахождения частного решения	34
4.3.9	Формула Коши	35
4.3.10	Нахождение собственных значений и собственных векторов матрицы	36

4.3.11	Метод Эйлера (случай простых собственных значений)(включая лемму)	37
4.3.12	Пример $Y' = AY$	38
4.3.13	Лемма $ a_{ij}^{(m)} \leq n^{m-1}d^m$	40
4.3.14	Существование e^A	40
4.3.15	e^{Ax} — фундаментальная матрица системы $Y' = AY$. . .	41
4.3.16	Формула Коши для линейных систем с постоянными коэффициентами	42
4.3.17	Пример: нахождение e^A	43

1 Уравнения первого порядка

1.1 Определения

1.1.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') \equiv 0$$

1.1.2 Частное решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

Определение частного решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$F(x, y, y') \equiv 0 \quad (1)$$

обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка.

Частным решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка называется непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(x)$, при подстановке которой в уравнение (1) получим тождество

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$$

1.1.3 Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

Определение общего решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

Множество всех решений обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка называется его общим решением.

1.1.4 Общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, имеет вид

$$y' = f(x, y) \quad (2)$$

Определение общего интеграла дифференциального уравнения первого порядка:

Общее решение уравнения (2) в неявном виде

$$F(x, y) = C$$

называется общим интегралом уравнения (2).

1.1.5 Уравнение с разделяющимися переменными первого порядка

Определение уравнения с разделяющимися переменными первого порядка

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными первого порядка называется уравнение вида

$$y' = f_1(x)f_2(y),$$

где $f_1(x)$ и $f_2(y)$ — заданные функции.

1.1.6 Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в симметричной форме

Определение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в симметричной форме

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в симметричной форме имеет вид

$$A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0,$$

где A и B — заданные функции двух переменных, причём переменные x и y равноправны.

1.1.7 Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

Определение линейного дифференциального уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x),$$

где x — неизвестная переменная, $y = y(x)$ — неизвестная функция, $a_0(x)$ и $a_1(x)$ — известные непрерывные функции.

1.1.8 Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка

Определение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка

Пусть $y' = f(x, y)$ — дифференциальное уравнение первого порядка и $y(x_0) = y_0$ — некоторое начальное условие. Тогда задача Коши для него имеет вид

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

где x_0, y_0 — заданные числа.

1.2 Теоремы и алгоритмы

1.2.1 Алгоритм решения уравнений с разделяющимися переменными первого порядка

1. Переходим к дифференциалам:

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad \frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y);$$

2. Делим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y) \quad \left| \cdot dx \frac{1}{f_2(y)} \right.$$

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

3. Вычисляем интегралы:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C,$$

где $C \in R$ и $\int \frac{dy}{f_2(y)} = F_2(y)$, $\int f_1(x)dx = F_1(x)$.

Получим:

$$F_2(y) = F_1(x) + C \tag{3}$$

4. Разрешаем последнее уравнение относительно y :

$$y = \varphi(x, C), \quad C \in R, \tag{4}$$

где $\varphi(x, C)$ — общее решение.

5. Ответ: $\varphi(x, C)$.

1.2.2 Метод вариации решения линейного дифференциального уравнения первого порядка.

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x),$$

Тогда

$$y' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}y = \frac{f(x)}{a_0(x)}$$

$$\text{Обозначим } p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}, \quad q(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)}.$$

Следовательно уравнение примет вид:

$$y' + p(x)y = q(x), \quad a \leq x \leq b \quad (5)$$

Метод вариации произвольной постоянной:

1. Этап:

Найдём общее решение соответствующего (5) однородного уравнения:

$$y' + p(x)y = 0 \quad (6)$$

$$y' = -p(x)y$$

$$\frac{dx}{dy} = -p(x)y$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int p(x)dx + C$$

$$\ln |y| = -F_1(x) + C$$

$$y = \pm e^C e^{-F_1(x)}$$

Получим: $y_0 = C e^{-F_1(x)}$ — общее решение (6).

2. Этап:

Ищем частное решение (5) в виде:

$$y_{\text{ч}} = C(x)e^{-F_1(x)}, \quad (7)$$

где $C(x)$ — пока неизвестная функция.

$$y' = C'(x)e^{-F_1(x)} + C(x)e^{-F_1(x)}(-p(x))$$

Подставляем в (5):

$$C'(x)e^{-F_1(x)} - C(x)e^{-F_1(x)}p(x) + p(x)C(x)e^{-F_1(x)} = q(x)$$

$$C'(x) = e^{F_1(x)} q(x)$$

$$C(x) = \int e^{F_1(x)} q(x) dx \pm c = F_2(x) + C$$

Подставим в (10):

$$y = e^{-F_1(x)}(F_2(x) + C)$$

Таким образом, $y = e^{-F_1(x)}(F_2(x) + C)$ — общее решение уравнения (10).

1.2.3 Основная теорема существования и единственности

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши:

Пусть $f(x, y)$ — непрерывная функция и у неё существует частная производная $f'_y(x, y)$. Тогда $\forall(x_0, y_0)$ задача Коши имеет единственное решение.

1.2.4 Сведение задачи Коши к интегральному уравнению

Пусть $\varphi(x)$ — решение задачи Коши:

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)) \quad (8)$$

$$\varphi(x_0) = y_0 \quad (9)$$

Перепишем (8) в виде:

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad (10)$$

Фиксируем произвольный x и берём интеграл от (10):

$$\begin{aligned} \varphi' &= f(t, \varphi(t)) \quad \left| \int_{x_0}^x \dots dt \right. \\ \varphi(x) - \varphi(x_0) &= \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt \\ \varphi(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt \end{aligned} \quad (11)$$

По определению (11) означает, что $\varphi(x)$ является решением интегрального уравнения

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt \quad (12)$$

Все остальные рассуждения обратимы \implies задача Коши \sim уравнению (12).

2 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка

2.1 Определения

2.1.1 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка (однородные и неоднородные)

Определение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка

Однородное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид:

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n(x)y = 0,$$

где $a_0(x), \dots, a_n(x)$ — заданные непрерывные функции.

Определение линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка

Неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид:

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n(x)y = f(x),$$

где $a_0(x), \dots, a_n(x), f(x)$ — заданные непрерывные функции.

2.1.2 Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

Определение задачи Коши для дифференциального уравнения n-го порядка

Задача Коши для линейного уравнения (4) имеет вид:

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

где $y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ — начальные условия и $x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ — заданные числа.

2.1.3 Линейно зависимые и линейно независимые функции

Определение линейно зависимых функций

Функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ называются линейно зависимыми на отрезке $[a, b]$, если найдутся константы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ — числа, не все равные нулю, такие, что линейная комбинация:

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \dots + \alpha_m\varphi_m(x) \equiv 0$$

Определение линейно независимых функций

Функции $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ называются линейно независимыми на отрезке $[a, b]$, если

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \dots + \alpha_m\varphi_m(x) \equiv 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$$

2.1.4 Определитель Вронского функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$

Определение определителя Вронского функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$

Определителем Вронского функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ называется:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_m(x) \\ \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x) & \dots & \varphi'_m(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_m^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

2.1.5 Фундаментальная система решения

Определение фундаментальной системы решений однородного линейного уравнения

Фундаментальной системой решений однородного линейного уравнения n -го порядка $l(y) = 0$ называются функции $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$, являющиеся линейно независимыми решениями уравнения.

2.1.6 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Определение однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами

Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = 0,$$

где a_0, \dots, a_n — заданные числа.

Определение неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами

Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x),$$

где a_0, \dots, a_n — заданные числа.

2.1.7 Необходимое условие линейной зависимости

Теорема (необходимое условие линейной зависимости)

Если функции $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — линейно зависимы на $[a, b]$. Тогда их определитель вронского тождественно равен нулю.

$$\mathbf{W} \equiv 0$$

Доказательство: нужно знать для зачёта.

2.1.8 Условие линейной независимости решений

Рассмотрим однородное линейное уравнение:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_m(x)y = 0; \quad a \leq x \leq b \quad (2)$$

Теорема (условие линейной независимости решений линейного уравнения)

Пусть $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — линейно независимые решения уравнения (5). Тогда

$$\forall x \in [a, b] \quad \mathbf{W} \neq 0$$

Доказательство: нужно знать для зачёта.

2.1.9 Свойство линейности и следствия из него

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_m(x)y = f(x)$$

Обозначим $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_m(x)y$ как $l(y)$.

Свойство линейности $l(y)$

$$l(y_1(x) + y_2(x)) = l(y_1(x)) + l(y_2(x));$$

$$l\left(\sum_{k=1}^m \alpha_k \varphi_k(x)\right) = \sum_{k=1}^m \alpha_k l(\varphi_k(x))$$

Следствие свойства линейности

Пусть $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — решения уравнения $l(y) = 0$. Тогда $\varphi^o(x) = \alpha_1\varphi_1(x) + \dots + \alpha_m\varphi_m(x)$ тоже является решением этого уравнения.

Доказательство: нужно знать для зачёта.

2.1.10 Существование ФСР

Теорема (о существовании ФСР у любого однородного линейного уравнения)

Фундаментальная система решений существует для любого однородного линейного уравнения.

Доказательство: нужно знать для зачёта.

2.1.11 Вид общего решения однородного линейного уравнения

Рассмотрим однородное линейное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_m(x)y = 0; \quad a \leq x \leq b \quad (3)$$

или

$$l(y) = 0$$

Теорема (вид общего решения однородного линейного уравнения)

Пусть $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — ФСР. Тогда общее решение уравнения (5) имеет вид:

$$y = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x),$$

где c_1, \dots, c_n — произвольные константы.

Доказательство: нужно знать для зачёта.

2.1.12 Вид общего решения неоднородного линейного уравнения

Рассмотрим неоднородное линейное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_m(x)y = f(x); \quad a \leq x \leq b \quad (4)$$

или

$$l(y) = f(x)$$

и соответствующее ему однородное линейное уравнение

$$l(y) = 0 \quad (5)$$

Теорема (вид общего решения неоднородного линейного уравнения)

Пусть $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — ФСР (5) и $y_{\text{ч}}(x)$ — частное решение (4). Тогда общее решение уравнения (4) имеет вид:

$$y = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) + y_{\text{ч}}(x),$$

где c_1, \dots, c_n — произвольные константы.

Доказательство: нужно знать для зачёта.

2.2 Алгоритм метода вариации нахождения частного решения

Метод вариации произвольных постоянных нахождения $y_{\text{ч}}(x)$

По теореме о виде общего решения линейного однородного уравнения $y_0 = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x)$ — общее решение уравнения $l(y) = 0$.

Будем искать частное решение $y_{\text{ч}}(x)$ в виде:

$$y_{\text{ч}}(x) = c_1(x)\varphi_1(x) + \dots + c_n(x)\varphi_n(x),$$

где $c_1(x), \dots, c_n(x)$ — пока неизвестные функции.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} c_1'(x)\varphi_1(x) + \dots + c_n'(x)\varphi_n(x) = 0 \\ c_1'(x)\varphi_1'(x) + \dots + c_n'(x)\varphi_n'(x) = 0 \\ c_1'(x)\varphi_1''(x) + \dots + c_n'(x)\varphi_n''(x) = 0 \\ \dots \\ c_1'(x)\varphi_1^{(n-2)}(x) + \dots + c_n'(x)\varphi_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ c_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases} \quad (6)$$

Пусть $a \leq x \leq b$, x — фиксированное \Rightarrow (6) — линейная алгебраическая система относительно $c_i'(x)$, $i = \overline{1, n}$.

$\Delta = \mathbf{W}(x) \Rightarrow \mathbf{W}(x) \neq 0 \Rightarrow$ по теореме из алгебры (6) имеет единственное решение.

По формулам Крамера:

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \dots \\ \dots & \dots \\ f & \dots \end{vmatrix}}{\mathbf{W}} = \frac{\mathbf{W}_1(x)}{\mathbf{W}(x)}$$

$$\dots$$

$$c_n'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ \dots & f \end{vmatrix}}{\mathbf{W}} = \frac{\mathbf{W}_n(x)}{\mathbf{W}(x)} \quad (7)$$

Таким образом, $c_i'(x) \quad i = \overline{1, n}$ находится по формуле (7) \Rightarrow

$$c_k(x) = \int \frac{\mathbf{W}_k(x)}{\mathbf{W}(x)} dx$$

2.3 Обоснование метода вариации

Рассмотрим частный случай $n = 2$:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \quad (8)$$

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (9)$$

$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ — ФСР (9).

$$\begin{aligned} y_0 &= c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) \\ y_{\text{ч}} &= c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{cases} c_1'(x)\varphi_1(x) + c_2'(x)\varphi_2(x) = 0 \\ c_1'(x)\varphi_1'(x) + c_2'(x)\varphi_2'(x) = f(x) \end{cases} \quad (11)$$

$$c_1(x) = \int \frac{\mathbf{W}_1(x)}{\mathbf{W}(x)} dx \quad c_2(x) = \int \frac{\mathbf{W}_2(x)}{\mathbf{W}(x)} dx$$

Подставляем $c_1(x)$ и $c_2(x)$ в (10). Покажем, что полученное $y_{\text{ч}}$ является решением (8):

$$y_{\text{ч}}' = c_1'(x)\varphi_1(x) + c_1(x)\varphi_1'(x) + c_2'(x)\varphi_2(x) + c_2(x)\varphi_2'(x) = c_1(x)\varphi_1'(x) + c_2(x)\varphi_2'(x)$$

$$\begin{aligned} y_{\text{ч}}'' &= c_1'(x)\varphi_1'(x) + c_1\varphi_1''(x) + c_2'(x)\varphi_2'(x) + c_2(x)\varphi_2''(x) = \\ &= f(x) + c_1(x)\varphi_1''(x) + c_2(x)\varphi_2''(x) \end{aligned}$$

Подставляем в уравнение (8):

$$\begin{aligned} &f(x) + c_1(x)\varphi_1''(x) + c_2(x)\varphi_2''(x) + a_1(x)(c_1(x)\varphi_1'(x) + \\ &+ c_2(x)\varphi_2'(x)) + a_2(x)(c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x)) = \\ &= f(x) + c_1(x)(\varphi_1''(x) + a_1(x)\varphi_1'(x) + a_2(x)\varphi_1(x)) + \\ &+ a_2(x)(\varphi_2''(x) + a_1(x)\varphi_2'(x) + a_2(x)\varphi_2(x)) = f(x). \end{aligned}$$

То есть

$$l(y_{\text{ч}}) \equiv f(x).$$

2.4 Пример: $y'' + w^2y = f(x)$

Пример:

Дано:

$$(1) y'' + w^2y = f(x); a \leq x \leq b$$

$$w > 0$$

Решение:

1. Решим соответствующее ОУ:

$$(2) y'' + w^2y = 0$$

Рассмотрим $y_1(x) = \cos wx$

$$y_1'(x) = -w \sin wx$$

$$y_1''(x) = -w^2 \cos wx \Rightarrow \text{решение (2)}$$

$y_2 = \sin wx$ — также решение

Рассмотрим ТУ $y_1 + u y_2$:

$$W(y) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos wx & \sin wx \\ -w \sin wx & w \cos wx \end{vmatrix} = w (\cos^2 wx + \sin^2 wx) = w \Rightarrow$$

$\Rightarrow y_1 + u y_2$ образует ОУП \Rightarrow по Т. 5 общее решение (2) имеет вид

$$y = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx$$

2. Будем искать частное решение уравнения (1) методом вариации:

$$y_1(x) = C_1(x) \cos wx + C_2(x) \sin wx$$

Составим аналогичный метода вариации решений СОЛ

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos wx + C_2'(x) \sin wx = 0 \\ C_1'(x)(-w \sin wx) + C_2'(x)(w \cos wx) = f(x) \end{cases} \quad \text{— определяем } C = \Delta = W = w$$

По формуле Крамера:

$$C_1'(x) = \frac{1}{w} \begin{vmatrix} 0 & \sin wx \\ f(x) & w \cos wx \end{vmatrix} = -\frac{1}{w} f(x) \sin wx$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{w} \begin{vmatrix} \cos wx & 0 \\ w \sin wx & f(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{w} f(x) \cos wx$$

Заданы суждем $x_0 \in [a, b]$, возвратом в консисте C_1 :

$$C_1(x) = -\frac{1}{\omega} \int_{x_0}^x f(t) \sin \omega t dt$$

Аналогично:

$$C_2(x) = \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^x f(t) \cos \omega t dt$$

Получаем:

$$\begin{aligned} y_u &= \left(-\frac{1}{\omega} \int_{x_0}^x f(t) \sin \omega t dt \right) \cos \omega x + \left(\frac{1}{\omega} \int_{x_0}^x f(t) \cos \omega t dt \right) \sin \omega x = \\ &= \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^x \left[-\sin \omega t \cos \omega x + \cos \omega t \sin \omega x \right] f(t) dt = \\ &= \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^x f(t) \sin \omega(x-t) dt \end{aligned}$$

3. По теореме 6 общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x + \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^x f(t) \sin \omega(x-t) dt$$

2.5 Формула Остроградского-Лиувилля

Пусть $y_1(x), \dots, y_n(x)$ — решение однородного линейного уравнения: $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$ $a \leq x \leq b$.

Рассмотрим определитель Вронского:

$$\mathbf{W}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Сама формула

Пусть x_0 произвольная точка из $[a, b]$. Тогда:

$$\mathbf{W}(x) = \mathbf{W}(x_0) e^{- \int_{x_0}^x a_1(t) dt}.$$

2.6 Метод Эйлера (случай простых корней)

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0, \quad (12)$$

где a_0, \dots, a_n — заданные числа.

Метод Эйлера решения однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами (случай простых корней)

1. Ищем частное решение уравнения (12) в виде

$$y(x) = e^{\lambda x},$$

λ — число.

2. Вычисляем формулы

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lambda e^{\lambda x} \\ y''(x) &= \lambda^2 e^{\lambda x} \\ &\dots \\ y^{(n)}(x) &= \lambda^n e^{\lambda x} \end{aligned}$$

3. Подставляем эти формулы в (12):

$$a_0 \lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + a_n e^{\lambda x} \equiv 0$$

$$e^{\lambda x} (a_0 \lambda^n + \dots + a_n) \equiv 0$$

4. Так как $e^{\lambda x} \neq 0$, то

$$y = e^{\lambda x}$$

является решением уравнения (12) $\Leftrightarrow \lambda$ является корнем алгебраического уравнения:

$$a_0 \lambda^n + \dots + a_n = 0 \quad (13)$$

5. (13) имеет n простых корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n \Rightarrow$ функции $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$ — решения (12).

6. Покажем, что $\{e^{\lambda_k x}\}_{k=1}^n$ — ФСР (12)

Рассмотрим определитель Вронского \mathbf{W} :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(x) &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{(n-1)} e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n^{(n-1)} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \dots e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{(n-1)} & \dots & \lambda_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \\ &= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \dots e^{\lambda_n x} \prod (\lambda_j - \lambda_k) \neq 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$\{e^{\lambda_k x}\}_{k=1}^n$ — ФСР уравнения (12) \Rightarrow общее решение (12) имеет вид:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}.$$

3 Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

3.1 Интегрирование с помощью частного решения

$$(1) \quad y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$$

1. Предположим, что $g(x)$ — частное решение уравнения (1).

Тогда переходим к новой неизвестной функции $u(x)$ по формуле:

$$\begin{aligned} y(x) &= u(x)g(x) \\ y' &= u'g + ug' \\ (*)y'' &= u''g + u'g' + ug'' = u''g + 2u'g' + ug'' \end{aligned}$$

2. Подставляем (*) в (1):

$$\begin{aligned} u''g + 2u'g' + ug'' + a_1(u'g + ug') + a_2ug &= 0 \\ u''g + (2g' + a_1g + a_1g')u' + (g'' + a_1g' + a_2g)u &= 0 \\ (2) \quad g(x)u'' + b(x)u' &= 0 \end{aligned}$$

3. Замена $v(x) = u'(x)$. Тогда:

$$(3) \quad g(x)v' + bv = 0$$

4. Решаем (3):

$$v(x) = c_1\varphi_1(x) \quad --$$

Общее решение (3).

5. Возвращаем замену:

$$u = c_1 \int \varphi_1(x)dx + c_2 = c_1\Phi(x) + c_2$$

6. Возвращаем замену:

Получим:

$$y = c_1\Phi(x)g(x) + c_2g(x) \quad --$$

Общее решение уравнения (1).

3.2 Упрощение с помощью замены функции $y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{1}{4x^2})y = 0$

$$y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{1}{4x^2})y = 0$$

Пусть $y(x) = u(x)z(x)$. Тогда находим $u(x)$ как решение уравнения

$$2u' + \frac{1}{x}$$

$$u' = -\frac{1}{2x}u$$

$$\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x}; \quad \ln|u| = -\frac{1}{2} \ln|x| \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}z(x); \quad u(x) = x^{-\frac{1}{2}}$$

Наше исходное уравнение примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x}}z'' + (\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{x}(\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}} + (1 + \frac{1}{\sqrt{x}})\frac{1}{\sqrt{x}})z &= 0 \\ z'' + \frac{1}{\sqrt{x}}z &= 0 \\ z'' + z &= 0 \end{aligned}$$

Ответ $y = c_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + c_2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

3.3 Упрощение с помощью замены переменной $y'' + \frac{1}{2x}y' - \frac{1}{x}y = 0$

$$y'' + \frac{1}{2x}y' - \frac{1}{x}y = 0 \quad x \in (0, \infty)$$

Делаем замену $x = \varphi(t)$, $t = \psi(x)$.

Выбираем ψ как решение уравнения $\psi' z'' + a_2(x)z = 0$:

$$\psi''(x) + a_1(x)\psi'(x) = 0$$

Обозначим $v(x) = \psi'(x)$. Тогда:

$$v' + \frac{1}{2x}v = 0$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{2x} + c$$

$$\begin{aligned}\ln |v| &= -\frac{1}{2} \ln |x| + c \\ v &= x^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Возвращаем замену:

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= x^{-\frac{1}{2}} \\ \psi(x) &= 2\sqrt{x}\end{aligned}$$

Возвращаем замену:

$$\begin{aligned}t &= 2\sqrt{x} \\ x &= \frac{t^2}{4}, \quad 0 < t < \infty\end{aligned}$$

Исходное уравнение переходит в уравнение:

$$\begin{aligned}(\psi')^2(x)z'' - \frac{1}{x}z &= 0 \\ \frac{1}{x}z'' - \frac{1}{x}z &= 0 \\ z'' - z &= 0\end{aligned}$$

— линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

Решаем методом Эйлера

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -1$$

$$\begin{cases} z_1 = e^{\lambda_1 t} = e^t \\ z_2 = e^{\lambda_2 t} = e^{-t} \end{cases}$$

$$z = c_1^t + c_2 e^{-t}$$

$$y(*) = y\left(\frac{t^2}{4}\right) = z(t) = z(2\sqrt{x}) = y(x)$$

Ответ: $y = c_1 e^{2\sqrt{x}} + c_2 e^{-2\sqrt{x}}$.

3.4 Метод степенных рядов $y'' - xy = 0$

Рассмотрим уравнение:

$$y'' - xy = 0$$

Метод степенных рядов:

$$(1) \quad y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

Теорема

Предположим, что $a_1(x), a_2(x), f(x)$ — раскладываются в степенной ряд на $[a, b]$. Тогда любое решение уравнения (1) раскладывается в степенной ряд на $[a, b]$.

Пример

$$(1) y'' - xy = 0, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$(2) y(0) = c_1, y'(0) = c_2$$

Решаем задачу Коши 1-2 методом степенных рядов:

Ищем решение в виде:

$$(*) \begin{cases} y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots; \\ y'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n \\ y''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)na_{n+1}x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k \end{cases}$$

$$y(0)_{(*)} = a_0 = c_1$$

$$y'(0)_{(*)} = a_1 = c_2$$

Подставим (*) в (1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - x \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k \equiv 0;$$

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}x^k \equiv 0;$$

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}]x^n \equiv 0 = 0 + 0x + 0x^2 + \dots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a_2 = 0; \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1} = 0; \quad n = 1, 2, \dots$$

Таким образом,

$$(3) \quad a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Пусть $k = n - 1$. Тогда (3) = (4):

$$(4) \quad a_{k+3} = \frac{a_k}{(k+3)(k+2)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Из (4)

$$a_2 = 0, a_5 = 0, a_8 = 0, \dots$$

$$a_0 = c_1, a_3 = \frac{c_1}{3 * 2}, a_6 = \frac{a_3}{6 * 5}, \dots, a_{3k} = \frac{c_1}{2 * 3 * 5 * 6 * \dots * (3k-1)3k}; k = 0, 1, \dots$$

$$a_1 = c_2, a_4 = \frac{a_1}{3 * 4} = \frac{c_2}{3 * 4}, a_7 = \frac{a_4}{6 * 7}, \dots, a_{3k+1} = \frac{c_2}{3 * 4 * 6 * 7 * \dots * (3k)(3k+1)}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k} x^{3k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k+1} x^{3k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k+2} x^{3k+2} = \\ &= c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{2 * 3 * 5 * 6 * \dots * (3k-1)3k} + c_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k-1}}{3 * 4 * 6 * 7 * (3k)(3k+1)} = \\ &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \end{aligned}$$

— ФСР для (1)

3.5 Алгоритм решения простейшей краевой задачи

Простейшая краевая задача имеет вид:

$$1 - 2 \begin{cases} y'' + q(x) = f(x), & a \leq x \leq b \\ y(a) = 0, y(b) = 0 \end{cases}$$

Алгоритм решения краевой задачи 1-2

1. Решаем соответствующее однородное уравнение:

$$(3) \quad y'' + q(x)y = 0$$

Находим его ФСР. Пусть $y_1(x), y_2(x)$ — ФСР.

2. Находим $y_h(x)$ — частное решение уравнения (1) методом вариации

3. Получаем общее решение (1)

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_h(x)$$

4. Подставляем формулу из пункта 3 в краевые условия:

$$(4) \begin{cases} c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) + y_h(a) = 0 \\ c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b) + y_h(b) = 0 \end{cases}$$

Смотрим на (4), как на линейную однородную систему относительно c_1 и c_2 .

5. Вычисляем определитель этой системы

$$\delta = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix}$$

6. Если $\delta \neq 0$, то (4) имеет единственное решение, находим и обозначим его:

$$c_1^0, \quad c_2^0$$

В этом случае функция $y(x) = c_1^0 y_1(x) + c_2^0 y_2(x) + y_h$ — является единственным решением краевой задачи.

7. Пусть $\delta = 0$. Тогда возможны подслучаи:

- (а) (4) имеет бесконечно много решений, следовательно, задача 1-2 имеет также бесконечно много решений.
- (б) (4) не имеет ни одного решения, следовательно, задача 1-2 тоже не имеет решения.

3.6 Существование решения краевой задачи:

Рассмотри простейшую краевую задачу:

$$1 - 2 \begin{cases} y'' + q(x)y = f(x), & a \leq x \leq b \\ y(a) = 0, y(b) = 0 \end{cases}$$

Если соответствующая однородная задача:

$$(3) \begin{cases} y'' + q(x)y = 0, & a \leq x \leq b \\ y(a) = 0, y(b) = 0 \end{cases}$$

имеет только нулевое решение, то исходная задача 1-2 имеет единственное решение $\forall f(x)$.

Доказательство:

Предположим, что (3) имеет только нулевое решение.

Повторим предыдущий алгоритм к (3):

Пусть $y_1(x), y_2(x), y_h(x)$ — ФСР однородного уравнения.

$$y_h(x) \equiv 0, y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

Подставляем в краевые условия:

$$(4) \begin{cases} c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) = 0, & a \leq x \leq b \\ c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b) = 0 \end{cases}$$

Вычисляем δ системы (4):

Если $\delta = 0$, то однородная система (4) всегда имеет бесконечно много решений \Rightarrow существует ненулевое решение (3) \Rightarrow противоречие $\Rightarrow \delta \neq 0 \Rightarrow$ решение 1-2 можно найти и оно будет единственным.

4 Линейные системы

4.1 Определения

4.1.1 Нормальная линейная система, её векторная запись

Нормальная неоднородная линейная система

Нормальная неоднородная линейная система имеет вид:

$$(1) \begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x); \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x); \\ \dots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x); \end{cases},$$

где x — неизвестные переменные $a \leq x \leq b$, $a_{ij}(x)$, $f_i(x)$ — заданные непрерывные функции, y_i — неизвестные функции.

Векторная запись нормальной неоднородной линейной системы

Обозначим

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

— вектор-функция

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

— вектор-функция

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ & \dots & \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

— матрица-функция

По определению:

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \dots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}$$

$$A(x)Y(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x)y_1 + \dots + a_{1n}(x)y_n \\ \dots \\ a_{n1}(x)y_1 + \dots + a_{nn}(x)y_n \end{pmatrix}$$

$A(x)Y(x) + F(x)$ — вектор соответствующий правой части (1). Тогда

$$Y' = A(x)Y + F(X)$$

— векторная запись (1).

Определение нормальной однородной линейной системы

Линейная система (1) называется однородной, если $\forall f_n(x) = 0 \quad i = \overline{1, n}$

$$(2) \quad Y' = A(x)Y$$

или

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n; \\ y'_2 = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n; \\ \dots \\ y'_n = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n; \end{cases},$$

где x — неизвестные переменные $a \leq x \leq b$, $a_{ij}(x)$ — заданные непрерывные функции, y_i — неизвестные функции.

4.1.2 Решение системы

Определение решения нормальной линейной системы

Говорят, что дифференцируемые функции $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ образуют решение системы (1), если при подстановке их в уравнение вместо соответствующих y получается тождество:

$$y'_k = a_{k1}(x)\varphi_1(x) + \dots + a_{kn}\varphi_n(x) + f_k(x); \quad k = \overline{1, n}$$

В векторной форме:

Дифференцируемая функция $\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \dots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}$ является решением (1), если:

$$\Phi'(x) = A(x)\Phi(x) + F(x)$$

4.1.3 Задача Коши для системы

$$(1) \quad \begin{cases} y'_1 = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x); \\ y'_2 = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x); \\ \dots \\ y'_n = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x); \end{cases},$$

Определение задачи Коши нормальной линейной системы

Пусть $x_0 \in [a, b]$, y_1^0, \dots, y_n^0 — заданные числа.

Начальными условиями для системы (1) в точке x_0 называются равенства:

$$\begin{aligned} y_1(x_0) &= y_1^0 \\ y_2(x_0) &= y_2^0 \end{aligned}$$

...

$$y_n(x_0) = y_n^0$$

Задача 1-3 называется задачей Коши для системы (1).

В векторной форме:

$$Y' = A(x)Y(x) + F(x), \quad Y(x_0) = Y^0,$$

$$\text{где } Y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \dots \\ y_n^0 \end{pmatrix}$$

4.1.4 Линейно зависимые и линейно независимые вектор-функции

Определение линейно зависимых вектор-функций

Пусть $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x) \in R^n$, $a \leq x \leq b$. Эти вектор-функции называются линейно зависимыми на $[a, b]$, если:

$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$ — числа не все равные 0 : $\alpha_1\Phi_1(x) + \alpha_n\Phi_n(x) = 0$

Определение линейно независимых вектор-функций

Пусть $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x) \in R^n$, $a \leq x \leq b$. Эти вектор-функции называются линейно независимыми на $[a, b]$, если:

$\alpha_1\Phi_1(x) + \alpha_n\Phi_n(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \alpha_i = 0 \quad i = \overline{1, n}$

4.1.5 Определитель Вронского вектор-функций

Определение определителя Вронского вектор-функций

Пусть $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x) \in R^n$ их определителем Вронского называется следующий определитель:

$$W = |\Phi_1(x)\Phi_2(x) \dots \Phi_n(x)|$$

4.1.6 Фундаментальная система решений линейной системы

Определение фундаментальной системы решений нормальной линейной системы

Рассмотрим (1) $Y' = A(x)Y(x)$, $a \leq x \leq b$, $Y(x) \in R^n$ $A(x)$ — размер $n \times n$.

Линейно независимые решения $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)$ называются фундаментальной системой решений.

4.1.7 Фундаментальная матрица решений однородной системы

Определение фундаментальной матрицы решений нормальной однородной системы

Матрица $T(x) = (Y_1(x) Y_2(x) \dots Y_n(x))$ называется фундаментальной матрицей для однородной системы $Y' = A(X)Y(x)$, $a \leq x \leq b$, если:

$$Y_1(x), \dots, Y_n(x)$$

— ФСР однородной системы.

4.1.8 Линейные системы с постоянными коэффициентами

Определение однородной линейной системы с постоянными коэффициентами

Линейная однородная система с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n; \\ y'_2 = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n; \\ \dots \\ y'_n = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n; \end{cases},$$

a_{ij} — заданные числа.

В векторной записи:

$$Y' = AY$$

$$\text{— где } A = (a_{ij})_{ij=1}^n, Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

4.1.9 Собственные значения и собственные векторы матрицы

Пусть

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \text{ — числовая матрица.}$$

Число λ называется собственным значением матрицы A , если существует вектор

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} \neq 0 \quad : \quad AV = \lambda V$$

А сам вектор V — называется собственным вектором матрицы A , соответствующим собственному значению λ .

4.1.10 Матричная экспонента

$$(1) \quad E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{n!}A^n + \dots$$

Определение матричной экспоненты

Сумма ряда (1) обозначается

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

и называется матричной экспонентой.

4.2 Извинения

Я не успеваю всё качественно проверить и напечатать, хочу спать, приношу извинения за неудобства.

4.3 Теоремы, алгоритмы, примеры

4.3.1 Свойства решений однородной системы

Теорема 1:

Пусть вектора раз-личи $\Phi_1(x), \dots, \Phi_m(x)$ — решения однородной системы:

$$(2) \quad Y' = A(x)Y$$

c_1, c_2, \dots, c_m — произвольные комплексные числа. Тогда

$$\Phi(x) = c_1\Phi_1(x) + \dots + c_m\Phi_m(x) \quad — \text{такое решение (2)}$$

Док-во:

Рассмотрим $\Phi'(x)$

$$\Phi'(x) = c_1\Phi'_1(x) + \dots + c_m\Phi'_m(x) =$$

получив

$$= \underbrace{c_1 A(x)\Phi_1(x)} + \dots + \underbrace{c_m A(x)\Phi_m(x)} =$$

$$= A(x)(c_1\Phi_1(x) + \dots + c_m\Phi_m(x)) =$$

$$= A(x)\Phi(x) \Rightarrow \Phi'(x) = A(x)\Phi(x) \square$$

4.3.2 Необходимое условие линейной зависимости вектор-функций

Теорема 2:

Если $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x) \in \mathbb{R}^n$ – линейно зависимы на $[a, b]$, то их определитель Врангеля $W \in [a, b]$ равен 0

Доказ.

Рассмотрим произвольный $x \in [a, b]$ и пол. W :

$$W = |\Phi_1(x) \Phi_2(x) \dots \Phi_n(x)|$$

Следует, что определитель линейно зависим (согласно условию) \Rightarrow

$$\Rightarrow W(x) = 0$$

□

4.3.3 Условие линейной независимости решений однородной системы

Важен единственный решений (3) $\Phi(x) \equiv 0$, то есть

$$\alpha_1 \Phi_1(x) + \dots + \alpha_n \Phi_n(x) \equiv 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum \alpha_i = 0 \quad i=1, n \Rightarrow \text{противоречие} \quad \square$$

Теорема 3:

Пусть $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)$ – линейно независимые решения ОС (1) $Y' = A(x)Y$, $x \in [a, b]$.

Тогда:

$$\forall x \in [a, b] \quad W(x) \neq 0$$

Доказ.

$$\exists x_0 \in [a, b] \quad W(x_0) = 0.$$

По теореме из алгебры, это означает линейную зависимость, т.е.

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n - \text{ числа не все равные нулю: } \alpha_1 \Phi_1(x) + \dots + \alpha_n \Phi_n(x) = 0 \quad (2)$$

Обозначим, через $\Phi(x) = \alpha_1 \Phi_1(x) + \dots + \alpha_n \Phi_n(x)$ по теореме 1 $\Phi(x)$ – решение (1) в силу (2) $\Phi(x_0) = 0$, при этом имеем, $\Phi(x)$ – линейная комбинация исходных решений задачи Коши:

$$(3) \quad Y' = A(x)Y, \quad Y(x_0) = 0$$

Факт, что $Y(x) \equiv 0$ очевидно для решения (3) \Rightarrow

4.3.4 Существование ФСР

Рассмотрим (1) $Y' = A(x)Y$, $a \leq x \leq b$, $Y(x) \in \mathbb{R}^n$ $A(x)$ – квадратич $n \times n$.

Теорема 4:

Линия (1) всегда имеет ФСР.

Доказательство:

Пусть $x_0 \in [a, b]$. Рассмотрим задачу Коши для системы

$$Y' = A(x)Y, \quad Y(x_0) = \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_1 \neq 0 - \text{множество ненулевое}$$

Обозначим $\Phi_1(x)$ — решение этой ЗК. Рассмотрим задачу Коши:

$$Y' = A(x)Y, \quad Y(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 \neq 0 - \text{множество ненулевое}$$

Обозначим $\Phi_2(x)$ — решение этой ЗК.

Рассмотрим задачу Коши:

$$Y' = A(x)Y, \quad Y(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad f_n \neq 0$$

Обозначим, через $\Phi_n(x)$ — решение

Рассмотрим

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} \Phi_1(x_0) & \dots & \Phi_n(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_n \end{vmatrix} = f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n \neq 0$$

Таким образом, решения Φ_1, \dots, Φ_n — линейно независимы \Rightarrow

$\Rightarrow \Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)$ — ФСР.

Т.2.

4.3.5 Вид общего решения однородной системы

Теорема 5:

Пусть $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)$ — ОСР системы

$$(1) \quad Y' = A(x)Y, \quad a \leq x \leq b$$

Тогда общее решение системы (1) имеет вид:

$$(2) \quad Y(x) = C_1 \Phi_1(x) + \dots + C_n \Phi_n(x), \quad \text{где } \forall C_i \quad i=1, n \text{ — произвольные константы.}$$

Док-во:

Очевидно, что при $\forall C_i \quad i=1, n$ (2) будет решением (1) (согласно Т.1).

Покажем, что (2) содержит все решения (1):

Пусть $Z(x)$ — произвольное решение (1), $x_0 \in [a, b]$.

Рассмотрим линейную алгебраическую систему:

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha_1 \varphi_{11}(x_0) + \alpha_2 \varphi_{12}(x_0) + \dots + \alpha_n \varphi_{1n}(x_0) = z_1(x_0) \\ \alpha_1 \varphi_{21}(x_0) + \alpha_2 \varphi_{22}(x_0) + \dots + \alpha_n \varphi_{2n}(x_0) = z_2(x_0) \\ \vdots \\ \alpha_1 \varphi_{n1}(x_0) + \alpha_2 \varphi_{n2}(x_0) + \dots + \alpha_n \varphi_{nn}(x_0) = z_n(x_0) \end{cases}$$

т.е. φ_{ij} — коэффициенты $\Phi_i(x)$ и z_i коэффициенты $Z(x)$

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — неизвестные величины.

Определимся этой системой:

$$\left| \begin{array}{cccc} \varphi_{11}(x_0) & \varphi_{12}(x_0) & \dots & \varphi_{1n}(x_0) \end{array} \right| = W(x_0) \neq 0 \Rightarrow$$

\Rightarrow (3) имеет решение C_1^*, \dots, C_n^*

Обозначим $\Phi(x) = C_1^* \varphi_1(x) + \dots + C_n^* \varphi_n(x)$ по Т.1 $\Phi(x)$ решение (1),
а в силу (3) $\Phi(x_0) = Z(x_0)$

Таким образом, $\Phi(x)$ и $Z(x)$ — решения (1) с одинаковыми н.у. в т. x_0 ,
другими словами, являются решениями $\exists K \quad Y' = A(x)Y, Y(x_0) = Z(x_0) \Rightarrow$
 \Rightarrow в силу свойств ЗК $Z(x) \equiv \Phi(x_0) = C_1^* \varphi_1(x) + \dots + C_n^* \varphi_n(x)$ \square

4.3.6 Вид общего решения неоднородной системы

$$(1) \quad Y' = A(x)Y + F(x), \quad a \leq x \leq b, \quad A = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n, \quad Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad Y' = A(x)Y$$

Т.5: Решение $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)$ — опр (2). Тогда общее решение (2) имеет вид

$$(3) \quad Y = C_1\Phi_1(x) + \dots + C_n\Phi_n(x)$$

Теорема 6:

Пусть $\{\Phi_k(x)\}_{k=1}^n$ — ПСР (2), Y_u — частное решение (1). Тогда общее решение (1) имеет вид

$$(4) \quad Y = C_1\Phi_1(x) + \dots + C_n\Phi_n(x) + Y_u$$

Доказ-бо:

Рассмотрим:

$$\begin{aligned} (C_1\Phi_1(x) + \dots + C_n\Phi_n(x) + Y_u(x))' &= C_1\Phi_1'(x) + \dots + C_n\Phi_n'(x) + Y_u'(x) = \\ &= C_1A(x)\Phi_1(x) + \dots + C_nA(x)\Phi_n(x) + \underbrace{A(x)Y_u(x)}_{Y_u'(x)} + F(x) = \\ &= A(x)[C_1\Phi_1(x) + \dots + C_n\Phi_n(x) + Y_u(x)] + F(x) \equiv (C_1\Phi_1(x) + \dots + C_n\Phi_n(x) + Y_u(x))' \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{для } c_1, \dots, c_n \text{ уравнение (4) является решением (1).} \end{aligned}$$

Доказано, что (4) содержит все решения (1);

Пусть $Z(x)$ — произвольное решение (1), обозначим

$$W(x) = Z(x) - Y_u(x)$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} W'(x) &= Z'(x) - Y_u'(x) \equiv A(x)Z(x) + F(x) - (A(x)Y_u(x) + F(x)) = \\ &= A(x)[Z(x) - Y_u(x)] \Rightarrow W(x) — решение (2) при \\ \text{теореме 5} \quad \exists c_1, \dots, c_n \quad \underbrace{W(x)}_{Z(x) - Y_u(x)} = C_1\Phi_1(x) + \dots + C_n\Phi_n(x); \end{aligned}$$

$$Z(x) = \sum_{k=1}^n C_k\Phi_k(x) + Y_u(x) \Rightarrow Z \text{ является общим решением (4),}$$

известное (u) — общее решение. \square

4.3.7 Свойства фундаментальных матриц

Свойства фундаментальной матрицы:

- Пусть $T(x)$ - фунд. ма-ца, $a \leq x \leq b$. Тогда
 $\forall x \in [a, b] \quad \exists T^{-1}(x)$
 В самом деле
 $\det T(x) = W(x) \neq 0 \Rightarrow \exists T^{-1}(x)$
- $T'(x) = A(x)T(x)$
 В самом деле $T'(x) = (Y_1'(x), \dots, Y_n'(x)) = (A(x)Y_1(x) \dots A(x)Y_n(x)) \odot$
 $AB = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)_{i,j=1}^n$
 если $B = (B_1 \dots B_n)$, то $AB = (AB_1 \dots AB_n)$
 $\Leftrightarrow A(x)(Y_1 \dots Y_n) = A(x)T(x)$
- Пусть $T(x) - \Phi M(2) \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_n \end{pmatrix}$. Тогда
 общее решение (2) и сю можно представить
 $Y = T(x)C$
 В самом деле
 $T(x)C = (Y_1 \dots Y_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1 Y_1 + c_2 Y_2(x) + \dots + c_n Y_n(x)$

4.3.8 Метод вариации нахождения частного решения

- (1) $Y' = A(x)Y + F(x)$, $a \leq x \leq b$, $A = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n$
 Использование $Y_u(x)$ (1) методом вариации произвольных постоянных
 Пусть $Y_1(x), \dots, Y_n(x)$ - общ. солв. однородной системы (2) $Y' = A(x)Y$
 $Y_u = c_1 Y_1(x) + c_n Y_n(x)$
 Запишем $Y_u(x)$ в виде
 $Y_u(x) = c_1 C(x) Y_1(x) + \dots + c_n C(x) Y_n(x) \stackrel{\text{об-603}}{=} T(x) C(x)$,
 где $T(x) = (Y_1(x) \dots Y_n(x))$

$$(3) \quad Y_u = T(x) C(x)$$

$$Y'_u(x) = T'(x) C(x) + T(x) C'(x)$$

Подставим эти формулы в (1):

$$T'(x) C(x) + T(x) C'(x) = A(x) T(x) C(x);$$

Совсемично идем к (2):

$$\begin{aligned} A(x) T(x) C(x) + T(x) C'(x) &= A(x) T(x) C(x) + F(x) \\ T^{-1}(x) \cdot | T(x) C'(x) &= F(x) \\ \underbrace{T^{-1}(x) T(y) C'(y)}_E &= T^{-1}(x) F(x); \\ C'(x) &= T^{-1}(x) F(x) \Rightarrow C(x) = \int_{x_0}^x T^{-1}(t) F(t) dt, \quad x_0 \in [a, b] \end{aligned}$$

Подставляем в (3) и получаем

$$Y_u = T(x) \int_{x_0}^x T^{-1}(t) F(t) dt$$

4.3.9 Формула Коши

Формула Коши.

Задача Коши:

$$(1) \quad \begin{cases} y'_1 = a_{11}(x)y_1 + \dots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \quad y_1(x_0) = y_1^0 \\ y'_2 = a_{21}(x)y_1 + \dots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x), \quad y_2(x_0) = y_2^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y' = A(x)y + F(x), \\ y(x_0) = y^0 = (y_1^0, y_2^0) \end{cases}$$

Искомые $y_1(x), \dots, y_n(x)$ — п. с. п. для систем $y' = A(x)y$. Но между варияциями находятся $y_2(x) = T(x) \int T^{-1}(x) F(x) dx = T(x) \int_{x_0}^x T^{-1}(t) F(t) dt$ — р. реш. $y' = A(x)y + F(x)$.

По п. 5 одн. реш. системы $y' = A(x)y + F(x)$ имеем вид

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) + y_2(x), \text{ или } y(x) = T(x) c + T(x) \int_{x_0}^x T^{-1}(t) F(t) dt \quad (2).$$

Проверим эту оп-ку в нач. усло. $y(x_0) = y^0: T(x_0)c = y^0 \Rightarrow c = T^{-1}(x_0)y^0 \Rightarrow$
→ н.д.см. в (2): $y(x) = T(x)T^{-1}(x_0)y^0 + T(x) \int_{x_0}^x T^{-1}(t) F(t) dt \quad (3)$.

(3) — г.д.см. реш. задачи Коши (1), (3) — формула Коши.

4.3.10 Нахождение собственных значений и собственных векторов матрицы

Нахождение собственного значения и собственных векторов.

Пусть V - с. в. с. з. λ , т.е. $AV = \lambda V$;

$$(A - \lambda E)V = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad \begin{cases} (a_{11} - \lambda)v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1n}v_n = 0 \\ a_{21}v_1 + (a_{22} - \lambda)v_2 + \dots + a_{2n}v_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)v_n = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{множества} \\ \text{однородная} \\ \text{алгебраическая} \\ \text{система} \\ \text{относительно } v_1, \dots, v_n \end{array}$$

Т.к. $V \neq 0$, то система (1) имеет не平凡ое решение \Rightarrow ее определяет

$$\Delta = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-1)^n \lambda^n + a_{11}\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}a_{nn} + (-1)^n \Delta = 0 \quad (2)$$

Задача: собственное значение λ должно быть корнем ур-ия (2).

4.3.11 Метод Эйлера (случай простых собственных значений)(включая лемму)

Рассмотрим:

$$Y' = AY \quad (1), \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = (a_{ij})_{n,n}$$

Метод Эйлера решения (1)

Идея: Будем искать частное решение нашей системы в виде $Y = e^{\lambda x} V = \begin{pmatrix} e^{\lambda x} v_1 \\ e^{\lambda x} v_2 \\ \vdots \\ e^{\lambda x} v_n \end{pmatrix}$, где λ - пока неизвестное число, а V - пока неизвестный числовый вектор

Вычислим $Y'(x) = \lambda e^{\lambda x} V$

Подставляем эти формулы в систему (1):

$$\lambda e^{\lambda x} V = A(e^{\lambda x} V);$$

$$\lambda e^{\lambda x} V = e^{\lambda x} AV$$

$$e^{\lambda x} \neq 0 \Rightarrow \lambda V = AV$$

или

$$(2) \quad AV = \lambda V$$

Вывод, чтобы Y - было решением системы (1) \Leftrightarrow когда выполняется (2),
причем $V \neq 0$. \Leftrightarrow сначала отыщем (2) λ -с.з. A и V -с.в.

Случай простых собственных значений:

Пусть $p(\lambda) = |A - \lambda E|$.

Предположим, что характеристическое ур-ие $p(\lambda) = 0$
имеет н различныи корни: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

Найдем соответствующие собственные векторы:

$$V_1 \sim \pi_1$$

$$\vdots$$

$$V_n \sim \pi_n$$

Составим методом Эйлера все наше и частные решения.

$Y_1(x) = e^{\lambda_1 x} V_1,$	- решения (1)
$Y_n(x) = e^{\lambda_n x} V_n.$	

4.3.12 Пример $Y' = AY$

Пример:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 - y_3 \\ y_2' = -y_1 + y_2 + y_3 \\ y_3' = y_1 - y_3 \end{cases} \Leftrightarrow Y' = AY$$

Решаем методом Эйлера:

Рассмотрим матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Вычисляем характеристическое ур-ие:

$$|A - \lambda E| = 0 ;$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 ;$$

$$(1-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) + 1(-2)(1) + 0 - (1)(1-\lambda)(-1) - (-1)(-2)(-1-\lambda) =$$

$$= ((1-\lambda+\lambda^2) - 2)(-1-\lambda) - 2 + 1 - \lambda = (-1 - 2\lambda + \lambda^2)(-1-\lambda) - 1 - \lambda =$$

$$= \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^2 - \lambda^3 - \lambda = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda$$

$$\lambda_1 = 0; \lambda_2 = -1; \lambda_3 = 2$$

Найти собственный вектор соответствующий собственному значению λ_1 .

Решение системы

$$(A - \lambda_1 E) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} v_1 - 2v_2 - v_3 = 0 \\ -v_1 + 2v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 - 2v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ v_2 = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ v_2 = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_1 = v_3 \\ v_1 = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = 0 \\ v_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 E) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2v_1 - 2v_2 - v_3 = 0 \\ -v_1 + 2v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2v_2 + v_3 = 0 \\ 2v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = 2v_2 \\ v_3 = 2v_2 \\ v_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ v_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ v_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda_3 E) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2v_1 - 2v_2 - v_3 = 0 \\ -v_1 + 2v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 - 3v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2v_2 - 4v_3 = 0 \\ -2v_2 - 2v_3 = 0 \\ v_1 = 3v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = -2v_3 \\ v_2 = -2v_3 \\ v_1 = 3v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = -2v_3 \\ v_2 = -2v_3 \\ v_1 = 3v_3 \end{cases} \Rightarrow V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Базисная система:

$$V_1 = e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, V_2 = e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_3 = e^{2x} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение:

$$Y = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-x} \\ -e^{-x} \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 3e^{2x} \\ -2e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + 3C_3 e^{2x} \\ C_2 e^{-x} - 2C_3 e^{2x} \\ C_1 - 2C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$\text{Отсюда: } Y_1 = C_1 + 3C_3 e^{2x}, Y_2 = C_2 e^{-x} - 2C_3 e^{2x}, Y_3 = C_1 - 2C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$$

4.3.13 Лемма $|a_{ij}^{(m)}| \leq n^{m-1} d^m$

лемма:

Справедливо неравенство:

$$(2) |a_{ij}^{(k)}| \leq n^{k-1} d^k, \text{ где } d = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|; k=1, 2, \dots$$

Dok - Bo: Рассмотрим по индукции:

Пусть $k=1$ $|a_{ij}| \leq d$ — очевидно выполняется.

Предположим, что (2) справедливо для некоторого k .

Рассмотрим, что k справедливо для $k+1$:

Рассмотрим:

$$|a_{ij}^{(k+1)}| = \left| \sum_{l=1}^n a_{il}^{(k)} a_{lj} \right| \leq \sum_{l=1}^n |a_{il}^{(k)}| \underbrace{|a_{lj}|}_{d^k} \stackrel{k}{\leq} d^k n^{k-1} d^k = n d^{k+1}$$

Таким образом:

$$|a_{ij}^{(k+1)}| \leq n^k d^{k+1} \quad \square$$

4.3.14 Существование e^A

$$(1) E + A + \frac{1}{2!} A^2 + \cdots + \frac{1}{n!} A^n + \dots$$

Теорема 7:

Ряд (1)сходится при любой матрице A .

Dok - Bo:

По определению сходимости (1) надо доказать, что

$$\forall i \in I, j \in N \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\underbrace{s_{ij}}_{s_{ij}^{(m)}} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} a_{ij}^{(k)} \right)$$

Очевидно, что i, j — ранжированные индексы.

Замечаем, что $s_{ij}^{(m)}$ — это частичные суммы числового ряда (3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{ij}^{(k)}}{k!}$.

Таким образом, надо доказать, что (3) — сходится. Будем использовать признак конvergence:

Рассмотрим $\left| \frac{a_n(k)}{k!} \right| \leq \frac{1}{k!} n^{k-1} d^k$

следовательно, ряд (3) монотонно убывает

$$(4) \quad 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} n^{k-1} d^k =$$

$$= 1 + \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nd)^k}{k!} \right) \xrightarrow{\text{сходится}} = 1 + \frac{1}{n} (e^{nd} - 1)$$

следовательно, (3) сходится по признаку монотонности.

□

4.3.15 e^{Ax} — фундаментальная матрица системы $Y' = AY$.

Рассмотрим однородную систему с постоянными коэффициентами:

$$(1) \quad Y' = AY, \quad x \in \mathbb{R}, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^n, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

Теорема 8:

Матрица e^{Ax} является фундаментальной матрицей системы (1).

Доказательство:

$$\text{Пусть } e^{Ax} = (Y_1(x) \ Y_2(x) \ \dots \ Y_n(x))$$

Покажем, что $Y_1(x), \dots, Y_n(x)$ образуют ФСР (1):

Рассмотрим $e^{Ax} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k$, x — переменная
степенной ряда, сходящийся для $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\text{По свойству степенных рядов существует } \frac{d}{dx} e^{Ax} = \frac{d}{dx} (E + xA + \dots + \frac{x^k}{k!} A^k + \dots) = \\ &= A + xA^2 + \frac{x^2}{2!} A^3 + \dots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} A^k + \dots = A + xA^2 + \frac{x^2}{2!} A^3 + \dots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} A^k + \dots = \\ &= A(E + xA + \frac{x^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} A^{k-1} + \dots) = Ae^{Ax} \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dx} e^{Ax} = Ae^{Ax};$$

$$(Y'_1(x) \ Y'_2(x) \ \dots \ Y'_n(x)) = A(Y_1(x) \ Y_2(x) \ \dots \ Y_n(x));$$

$$(Y'_1(x) \ Y'_2(x) \ \dots \ Y'_n(x)) = (AY_1(x) \ AY_2(x) \ \dots \ AY_n(x));$$

$$Y'_j(x) = AY_j(x), \quad j = 1, \dots, n \quad \text{□}$$

□ $Y_1(x), \dots, Y_n(x)$ — решение (1)

Покажем, что они именно независимы, то есть образуют ФСР:

Рассмотрим их определитель в комплексной:

$$W(x) = \begin{vmatrix} Y_1(x) & Y_2(x) & \dots & Y_n(x) \end{vmatrix} = \det e^{Ax} \Big|_{x=0} = \det e^0 = \det E = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow Y_1(0), \dots, Y_n(0)$ - ПСР $\Rightarrow e^{Ax}$ - фундаментальная матрица

□

4.3.16 Формула Коши для линейных систем с постоянными коэффициентами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$e^A = E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^k + \dots$$

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ y'_n = a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases} \Leftrightarrow Y' = AY, \quad e^{AY} - \text{решение.} \quad \text{мат-ва этой системы}$$

Формула Коши решения ЛС с ПК:

Рассмотрим:

$$(1) Y' = AY + F(x), \quad A = (a_{ij})_{ij=1}^n, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

Была получена Коши для произвольной линейной системы:

$$Y' = A(x)Y + F(x), \quad -\infty < x < \infty$$

Новое решение этой системы равно:

$$Y(x) = T(x)T^{-1}(x_0)Y(0) + T(x) \int_{x_0}^x T^{-1}(t)F(t)dt$$

В нашем случае (1):

$$x_0 = 0, \quad T(x) = e^{Ax}$$

По формуле Коши наше решение (1) даётся формулой:

$$Y(x) = e^{Ax} (e^0)^{-1}Y(0) + e^{Ax} \int_0^x (e^{At})^{-1}F(t)dt =$$

$$= e^{Ax} Y(0) + \int_0^x e^{Ax} e^{-At} F(t)dt = e^{Ax} Y(0) + \int_0^x e^{A(x-t)} F(t)dt$$

$e^{Ay} Y(0) + \int_0^x e^{A(x-t)} F(t)dt$

4.3.17 Пример: нахождение e^A

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad e^A = ?$$

Решение:

Рассмотрим ОЛСПК для

$$(1) \quad Y' = AY \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

Решаем (1) методом Эйлера:

1. Найдем собственное значение матрицы A :

Рассмотрим λ -ое ур-е для A

$$\det(A - \lambda E) = 0 ;$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$8 - 6\lambda + \lambda^2 - 3 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

$$\mathcal{D} = 36 - 20 = 4^2$$

$$\lambda_1 = \frac{6+4}{2} = 5, \quad \lambda_2 = \frac{6-4}{2} = 1 \quad \text{— собственные значения } A$$

2. Найдем собственный вектор V соответствующий λ .

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

v_1, v_2 — образуют начальное решение системы

$$(A - \lambda_1 E) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 0 \\ 3v_1 + 3v_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = -1 \\ v_2 = 1 \end{cases}$$

Таким образом, $V = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, собственный вектор $\sim \lambda_1$

Методом C.B. для π_2

$$(A - \pi_2 E) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} -3v_1 + v_2 = 0 \\ 3v_1 - v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_2 = 3 \end{cases}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Вычисляем ФПР для (1):

$$Y_1 = e^{x_1 x} V_1 = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix}$$

$$Y_2 = e^{x_2 x} V_2 = \begin{pmatrix} e^{5x} \\ 3e^{5x} \end{pmatrix}$$

4. Общее решение систем (1):

$$Y = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) = C_1 \begin{pmatrix} e^{-x} \\ e^x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{5x} \\ 3e^{5x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x} \\ C_1 e^x + 3C_2 e^{5x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

Общее решение (1)

$$y_1(x) = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x}$$

$$y_2(x) = C_1 e^x + 3C_2 e^{5x}$$

5. $e^A = ?$

6. Рассмотрим $e^{Ax} = \begin{pmatrix} z_1(x) & z_2(x) \end{pmatrix}$ — общее решение системы (1),

т.е. $z_1(x), z_2(x)$ — решение (1)

$$\text{Если } x=0, \text{ то } e^0 = E = \begin{pmatrix} z_1(0) & z_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow z_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Найдем $z_1(x)$:

$$z_1(x) — \text{решение, } y_1 — \text{не нач-е уравнения} \Rightarrow z_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

т.е. координаты $z_1(x)$ — единичное решение задачи Коши

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2, & y_1(0) = 1 \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2, & y_2(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x} \\ y_2 = C_1 e^x + 3C_2 e^{5x} \end{cases}$$

Последуем (*) в систему

$$\begin{cases} y_1(0) = -c_1 + c_2 = 1 \\ y_2(0) = c_1 + 3c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1^0 = -\frac{3}{4} \\ c_2^0 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y_1^0 &= \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{5x} \\ y_2^0 &= -\frac{3}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{5x} \end{aligned} \Rightarrow Z_1(x) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{5x} \\ -\frac{3}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{5x} \end{pmatrix}$$

Найдём $Z_2(x)$

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2, \quad y_1(0) = 0 \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2, \quad y_2(0) = 1 \end{cases} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} y_1 = -c_1 e^x + c_2 e^{5x} \\ y_2 = c_1 e^x + 3c_2 e^{5x} \end{cases}$$

$$Z_2(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{5x} \\ \frac{1}{4}e^x + \frac{3}{4}e^{5x} \end{pmatrix}$$

Таким образом,

$$e^{Ax} = (Z_1(x), Z_2(x)) \Big|_{x=1} = (Z_1(1), Z_2(1)) = e^A$$

$$\text{Оператор: } e^A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}e + \frac{1}{4}e^5 & -\frac{1}{4}e + \frac{1}{4}e^5 \\ -\frac{3}{4}e + \frac{3}{4}e^5 & \frac{1}{4}e + \frac{3}{4}e^5 \end{pmatrix}$$