

## Содержание

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Введение</b>  | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | <b>Краткий обзор</b>   | <b>2</b>  |
| <b>3</b> | <b>Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами</b>  | <b>3</b>  |
| 3.1      | Как выглядит однородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами? . . . . .                               | 3         |
| 3.2      | Какие виды однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами могут встретиться на контрольной работе? . | 3         |
| 3.3      | Случай вещественных не кратных корней . . . . .  | 3         |
| 3.3.1    | Теория . . . . .   | 3         |
| 3.3.2    | Практика . . . . .   | 4         |
| 3.4      | Случай вещественных кратных корней . . . . .   | 6         |
| 3.4.1    | Теория . . . . .   | 6         |
| 3.4.2    | Практика: . . . . .  | 6         |
| 3.5      | Случай комплексных не кратных корней . . . . .   | 7         |
| 3.5.1    | Теория . . . . .   | 7         |
| 3.5.2    | Практика: . . . . .  | 8         |
| 3.6      | Случай комплексных кратных корней . . . . .  | 11        |
| 3.6.1    | Теория . . . . .   | 11        |
| 3.6.2    | Практика . . . . .   | 12        |
| <b>4</b> | <b>Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами</b>  | <b>13</b> |
| 4.1      | Как выглядит неоднородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами? . . . . .                             | 13        |
| 4.1.1    | Теория . . . . .   | 13        |
| 4.2      | Практика . . . . .   | 14        |
| <b>5</b> | <b>система однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами</b>  | <b>17</b> |

## 1 Введение

Данный файл является простой прихотью автора, и не нуждается ни в одобрении, ни в осуждении. Если будут ошибки, пишите. И помните, что автор честно старался.

## 2 Краткий обзор

В данном файлике мы постараемся подготовиться, к 2 контрольной работе по диффурам.

Корнев пообещал нам 3 темы на контрольной работе:

1. Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами;
2. Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами;
3. Системы однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Каждый тип будет разобран в отдельном блоке. Приступим.

## 3 Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Стоит сказать, что Корнев разрешил решать однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами только методом Эйлера, и никаким больше.

### 3.1 Как выглядит однородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами?

Однородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

где  $a_1, \dots, a_n$  — заданные числа.

### 3.2 Какие виды однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами могут встретиться на контрольной работе?

Я различаю следующие виды:

1. Уравнения, имеющие вещественные корни;
2. Уравнения, имеющие комплексные корни;

Так же стоит заметить, что каждый из приведённых выше типов ещё делится на 2 случая:

1. Случай простых корней;
2. Случай кратных корней.

Дальше мы разберём каждый вид в 2 возможных случаях + ещё дополнительно разберём примеры из сборника задач, который нам дал Корнев.

### 3.3 Случай вещественных не кратных корней

#### 3.3.1 Теория

В данном случае уравнения решаются по следующему алгоритму:

1. Выписываем соответствующее характеристическое уравнение.  
Оно будет иметь вид:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0;$$

2. Решаем соответствующее характеристическое уравнение.

После его решения мы получим  $n-1$  простых вещественных корней  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ ;

3. Выписываем фундаментальную систему решений исходного уравнения.

Она будет иметь вид:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_{n-1} = e^{\lambda_{n-1} x};$$

4. Выписываем общее решение исходного уравнения.

Оно будет иметь вид:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_{n-1} y_{n-1}.$$

5. Записываем ответ.

Ответ:  $y = \dots$

### 3.3.2 Практика

#### Пример 1:

Дано:

$$y'' + y' - 2y = 0$$

Решение:

1. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

2. Решаем характеристическое уравнение

$$D = 1 - 4 * (-2) = 3^2$$

$$\lambda_1 = \frac{-1 - 3}{2} = -2$$

$$\lambda_2 = \frac{-1 + 3}{2} = 1$$

3. Выписываем ФСР

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{-2x}$$

$$y_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^x$$

4. Выписываем общее решение исходного уравнения

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x$$

5. Ответ:  $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x$

### Пример 2:

Дано:

$$y^{(5)} - 10y^{(3)} + 9y' = 0$$

Решение:

1. Выписываем характеристическое уравнение

$$\lambda^5 - 10\lambda^3 + 9\lambda = 0$$

2. Решаем характеристическое уравнение

Воспользуемся Схемой Горнера:

|    |   |   |     |    |   |   |                  |
|----|---|---|-----|----|---|---|------------------|
|    | 1 | 0 | -10 | 0  | 9 | 0 |                  |
| 1  | 1 | 1 | -9  | -9 | 0 | 0 | $\lambda_1 = 1$  |
| -1 | 1 | 0 | -9  | 0  | 0 |   | $\lambda_2 = -1$ |
| 3  | 1 | 3 | 0   | 0  |   |   | $\lambda_3 = 3$  |

Тогда имеем:

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 3)(\lambda^2 + 3\lambda) = 0$$

Решим  $\lambda^2 + 3\lambda = 0$ :

$$\lambda^2 + 3\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda + 3) = 0$$

$$\lambda_4 = 0, \quad \lambda_5 = -3$$

Таким образом получим корни:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 3, \quad \lambda_4 = 0, \quad \lambda_5 = -3$$

3. Выписываем ФСР

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-x}, \quad y_3 = e^{3x}, \quad y_4 = e^0 = 1, \quad y_5 = e^{-3x}$$

4. Выписываем общее решение

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} + c_4 + c_5 e^{-3x}$$

5. Ответ:  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} + c_4 + c_5 e^{-3x}$

### 3.4 Случай вещественных кратных корней

#### 3.4.1 Теория

В данном случае алгоритм решения будет следующий:

1. Выписываем соответствующее характеристическое уравнение.  
Оно будет иметь вид:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0;$$

2. Решаем соответствующее характеристическое уравнение.  
После его решения мы получим 1 корень  $\lambda_1$  —  $n - 1$ -кратности;
3. Выписываем фундаментальную систему решений исходного уравнения.  
Она будет иметь вид:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = xe^{\lambda_1 x}, \quad y_3 = x^2 e^{\lambda_1 x}, \quad \dots, y_{n-1} = x^{n-1} e^{\lambda_1 x};$$

4. Выписываем общее решение исходного уравнения.  
Оно будет иметь вид:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_{n-1} y_{n-1}.$$

5. Записываем ответ.  
Ответ:  $y = \dots$ .

**У нас в случае кратных корней на практике встречались уравнения только с 1 корнем, поэтому, скорее всего, других случаев на контрольной работе не встретится.**

#### 3.4.2 Практика:

**Пример:**

Дано:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

Решение:

1. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

2. Решаем характеристическое уравнение

$$\begin{aligned}\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 &= 0 \\ (\lambda - 1)^3 &= 0 \\ \lambda_1 &= 1\end{aligned}$$

3. Выписываем ФСР

$$\begin{aligned}y_1(x) &= e^{\lambda_1 x} = e^x \\ y_2(x) &= x e^{\lambda_1 x} = x e^x \\ y_3(x) &= x^2 e^{\lambda_1 x} = x^2 e^x\end{aligned}$$

4. Выписываем общее решение исходного уравнения

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$$

5. Ответ:  $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$

### 3.5 Случай комплексных не кратных корней

#### 3.5.1 Теория

Алгоритм решения:

1. Выписываем соответствующее характеристическое уравнение.  
Оно будет иметь вид:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0;$$

2. Решаем соответствующее характеристическое уравнение.  
После его решения мы получим  $n-1$  простых вещественных и комплексных корней  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ ;
3. Выписываем фундаментальную систему решений исходного уравнения.  
Она будет иметь вид:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_{n-1} = e^{\lambda_{n-1} x};$$

4. Преобразовываем комплексные сопряжённые решения по формуле Эйлера.

$$e^{\alpha+i\gamma} = e^{\alpha}(\cos \gamma + i \sin \gamma)$$

Для определённости предположим, что корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  комплексно сопряжённые, тогда из 2, соответствующих им решений, получим 1 решение:

$$y_1 = e^{\alpha}(\cos \gamma + i \sin \gamma) = z_1,$$

а решение  $y_2$  отбрасываем

5. Выписываем общее решение исходного уравнения.

Оно будет иметь вид:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_k y_k + c_{k+1} z_1 + \dots + c_{k+m} z_m,$$

где  $y_1, \dots, y_k$  — вещественные корни, а  $z_1, \dots, z_m$  — преобразованные комплексные корни.

6. Записываем ответ.

Ответ:  $y = \dots$

### 3.5.2 Практика:

#### Пример 1:

Дано:

$$y'' + 4y = 0$$

Решение:

1. Составляем характеристичное уравнение

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

2. Решаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda = -4$$

$$\lambda_1 = 2i$$

$$\lambda_2 = -2i$$



3. Выписываем ФСР

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{2ix}$$

$$y_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{-2ix}$$

4. Преобразовываем комплексные решения

Рассматриваем  $y_1$ , а  $y_2$ , как комплексно сопряженное  $y_1$ , отбрасываем:

$$y_1 = e^{2ix} = e^0(\cos 2x + i \sin 2x) = z_1$$

5. Выписываем общее решение исходного уравнения

$$y = c_1 z_1 = c_1(\cos 2x + i \sin 2x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

6. Ответ:  $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

### Пример 2:

Дано:

$$y''' - 8y = 0$$

Решение:

1. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 8 = 0$$

2. Решаем характеристическое уравнение

Для того, чтобы избавиться от куба воспользуемся схемой Горнера:

|   |   |   |   |    |                 |
|---|---|---|---|----|-----------------|
|   | 1 | 0 | 0 | -8 |                 |
| 2 | 1 | 2 | 4 | 0  | $\lambda_1 = 2$ |

Таким образом, получим:

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4) = 0$$

Решим  $\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$ :

$$D = 4 - 4 * 4 = -12$$

$$\lambda_2 = \frac{-2 + \sqrt{-12}}{2} = \frac{-2 + 2\sqrt{3}i}{2} = -1 + \sqrt{3}i$$

$$\lambda_3 = -1 - \sqrt{3}i$$

3. Выписываем ФСР

$$\begin{aligned}y_1(x) &= e^{\lambda_1 x} = e^{2x} \\y_2(x) &= e^{\lambda_2 x} = e^{-x+\sqrt{3}ix} \\y_3(x) &= e^{\lambda_3 x} = e^{-x-\sqrt{3}ix}\end{aligned}$$

4. Преобразовываем комплексные решения

Рассматриваем  $y_2$ , а  $y_3$ , как комплексно сопряженное  $y_2$ , отбрасываем:

$$y_2 = e^{-x+\sqrt{3}ix} = e^{-x}(\cos \sqrt{3}x + i \sin \sqrt{3}x) = z_1$$

5. Выписываем общее решение исходного уравнения

$$y = c_1 y_1 + c_2 z_1 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} \cos \sqrt{3}x + c_3 e^{-x} \sin \sqrt{3}x$$

6. Ответ:  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} \cos \sqrt{3}x + c_3 e^{-x} \sin \sqrt{3}x$

**Пример 3:**

Дано:

$$y^{(6)} + 64y = 0$$

Решение:

1. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^6 + 64 = 0$$

2. Решаем характеристическое уравнение

$$\lambda^6 + 64 = 0$$

$$\lambda^6 = -64$$

$$\lambda = \sqrt[6]{-64}$$

$$\lambda_1 = \sqrt[6]{64}(\cos(\frac{\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{6})) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = \sqrt{3} + i$$

$$\lambda_2 = \sqrt[6]{64}(\cos(\frac{3\pi}{6}) + i \sin(\frac{3\pi}{6})) = 2i$$

$$\lambda_3 = \sqrt[6]{64}(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i \sin(\frac{5\pi}{6})) = -\sqrt{3} + i$$

$$\lambda_4 = \sqrt[6]{64}(\cos(\frac{7\pi}{6}) + i \sin(\frac{7\pi}{6})) = -\sqrt{3} - i$$

$$\lambda_5 = \sqrt[6]{64}(\cos(\frac{9\pi}{6}) + i \sin(\frac{9\pi}{6})) = -2i$$

$$\lambda_6 = \sqrt[6]{64}(\cos(\frac{11\pi}{6}) + i \sin(\frac{11\pi}{6})) = \sqrt{3} - i$$

Таким образом, имеем 3 комплексно-сопряжённых пары корней:

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$$\lambda_{3,4} = \sqrt{3} \pm i$$

$$\lambda_{5,6} = -\sqrt{3} \pm i$$

3. Выписываем ФСР

$$y_{1,2} = e^{\pm 2ix}, \quad y_{3,4} = e^{\sqrt{3} \pm i}, \quad y_{5,6} = e^{-\sqrt{3} \pm i}$$

4. Преобразовываем комплексные решения

Рассматриваем  $y_1, y_3, y_5$ , а  $y_2, y_4, y_6$  отбрасываем.

$$z_1 = \cos 2x + \sin 2x$$

$$z_2 = e^{\sqrt{3}} \cos x + e^{\sqrt{3}} \sin x$$

$$z_3 = e^{-\sqrt{3}} \cos x + e^{-\sqrt{3}} \sin x$$

5. Выписываем общее решение исходного уравнения

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3 e^{\sqrt{3}} \cos x + c_4 e^{\sqrt{3}} \sin x + c_5 e^{-\sqrt{3}} \cos x + c_6 e^{-\sqrt{3}} \sin x$$

6. Ответ:  $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3 e^{\sqrt{3}} \cos x + c_4 e^{\sqrt{3}} \sin x + c_5 e^{-\sqrt{3}} \cos x + c_6 e^{-\sqrt{3}} \sin x$

## 3.6 Случай комплексных кратных корней

### 3.6.1 Теория

Алгоритм аналогичен алгоритму решения в случае не кратных комплексных корней. С единственным различием в том, что получая кратные корни мы поступаем как в алгоритме случае вещественных кратных корней.

### 3.6.2 Практика

#### Пример:

Дано:

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

Решение:

1. Составляем характеристичное уравнение

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

2. Решаем характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

$$(\lambda^2 + 1)^2 = 0$$

$$\lambda = \pm i$$

$$\lambda_1 = i$$

$$\lambda_2 = -i$$

Таким образом, имеем 2 комплексно-сопряжённых корня второй кратности:

3. Выписываем ФСР

$$y_1 = e^{ix}, \quad y_2 = xe^{ix}, \quad y_3 = e^{-ix}, \quad y_4 = xe^{-ix},$$

4. Преобразовываем комплексные решения

Рассматриваем  $y_1, y_2$ , а  $y_3, y_4$  отбрасываем + не забываем про кратность (на 1 корень по 2 решения).

$$z_1 = \cos x + i \sin x$$

$$z_2 = x \cos x + i x \sin x$$

5. Выписываем общее решение исходного уравнения

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x$$

6. Ответ:  $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x$

## 4 Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами

### 4.1 Как выглядит неоднородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами?

Однородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

где  $a_1, \dots, a_n$  — заданные числа.

#### 4.1.1 Теория

Подобные уравнения решаются по следующему алгоритму:

1. Этап

- (а) Выписываем соответствующее однородное уравнение.  
Оно имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

- (b) Решаем его по уже описанным ранее алгоритмам.  
В итоге получим его общее, оно имеет вид:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_k y_k.$$

2. Этап

- (а) Найдём частное решение исходного неоднородного уравнения. Для этого будем считать, что  $c_1, \dots, c_k$ , как пока что неизвестные функции.

- (b)

$$y_h = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 + \dots + c_k(x) y_k.$$

- (с) Составляем систему уравнений от  $c_1'(x), \dots, c_k'(x)$  и находим их.  
Система будет иметь вид:

$$\begin{cases} c_1'(x) y_1 + \dots + c_k'(x) y_k = 0 \\ c_1'(x) y_1' + \dots + c_k'(x) y_k' = 0 \\ \dots \\ c_1'(x) y_1^{(k-1)} + \dots + c_k'(x) y_k^{(k-1)} = f(x) \end{cases}$$

3. Этап

В качестве ответа записывает следующее:

Ответ:  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_k y_k + y_h$ .

## 4.2 Практика

### Пример 1:

Дано:

$$y'' - 2y'' - 3y = e^{4x}$$

Решение:

1. Этап

(а) Выписываем соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 2y'' - 3y = 0$$

(b) Решаем соответствующее однородное уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$D = 4 - 4(-3) = 4^2$$

$$\lambda_1 = \frac{2+4}{2} = 3, \quad \lambda_2 = \frac{2-4}{2} = -1$$

Общее решение однородного уравнения:

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$$

2. Этап

(а) Выписываем частное решение

$$y_h = c_1(x)e^{3x} + c_2(x)e^{-x},$$

где  $c_1(x), c_2(x)$  — пока ещё неизвестные функции.

(b) Составляем систему уравнений относительно  $c'_1(x)$  и  $c'_2(x)$  и находим их.

Процесс нахождения  $c'_1(x)$  и  $c'_2(x)$  опустим, так как я всё-таки не бессмертен)

$$\begin{cases} c'_1(x)e^{3x} + c'_2(x)e^{-x} = 0 \\ c'_1(x)3e^{3x} - c'_2(x)e^{-x} = e^{4x} \end{cases}$$

...

$$\begin{cases} c'_1(x) = \frac{e^x}{4} \\ c'_2(x) = -\frac{e^{5x}}{4} \end{cases}$$

(с) Находим  $c_1(x), c_2(x)$

$$c_1(x) = \frac{1}{4} \int e^x dx = \frac{e^x}{4}$$
$$c_2(x) = -\frac{1}{4} \int e^{5x} dx = -\frac{e^{5x}}{20}$$

(d) Записываем полученное частное решение

$$y_h = \frac{e^x}{4} - \frac{e^{5x}}{20}$$

3. Этап

Ответ:  $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} + \frac{e^x}{4} - \frac{e^{5x}}{20}$

### Пример 2:

Дано:

$$y'' + y = 4 \sin x$$

Решение:

1. Этап

(а) Выписываем соответствующее однородное уравнение

$$y'' + y = 0$$

(b) Решаем соответствующее однородное уравнение

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda^2 = -1$$

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i$$

ФСР:

$$y_1 = e^{ix}, \quad y_2 = e^{-ix}$$

Преобразуем комплексные корни к вещественным.

Рассмотрим  $y_1$ , а  $y_2$  отбрасываем, как комплексно сопряжённый с  $y_1$ :

$$y_1 = e^{ix} = e^0 (\cos x + i \sin x) = \cos x + i \sin x$$

Общее решение однородного уравнения:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

2. Этап

- (a) Выписываем частное решение

$$y_h = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x,$$

где  $c_1(x), c_2(x)$  — пока ещё неизвестные функции.

- (b) Составляем систему уравнений относительно  $c_1'(x)$  и  $c_2'(x)$  и находим их.

Процесс нахождения  $c_1'(x)$  и  $c_2'(x)$  так же опускаем.

$$\begin{cases} c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x = 0 \\ -c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x = 4 \sin x \end{cases}$$

...

$$\begin{cases} c_1'(x) = -4 \sin^2 x \\ c_2'(x) = 4 \sin x \cos x \end{cases}$$

- (c) Находим  $c_1(x), c_2(x)$

$$c_1(x) = -4 \int \sin^2 x dx = \sin 2x - 2x$$

$$c_2(x) = 4 \int \sin x \cos x dx = 2 \sin^2 x$$

- (d) Записываем полученное частное решение

$$y_h = \sin 2x \cos x - 2x \cos x + 2 \sin^3 x$$

3. Этап

Ответ:  $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \sin 2x \cos x - 2x \cos x + 2 \sin^3 x$



## **5 система однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами**

Не буду сейчас вдаваться в подробности решения, просто сразу рассмотрим пример:

Пока что всё будет с фото, потому что я уже устал жать по клавишам.

Дано:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение:

Рассмотрим СДУ с ПК

$$(1) \quad Y' = AY \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

Решим методом Эйлера:

1. Найдём собственные значения матрицы  $A$ :

Рассмотрим  $\chi$ - $\phi$  уравнение для  $A$

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$8 - 6\lambda + \lambda^2 - 3 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

$$D = 36 - 20 = 16$$

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 5 - \text{собственные значения } A$$

2. Найдём собственные векторы, соответствующие  $\lambda_1, \lambda_2$ .

$$V_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$v_1, v_2$  — образуют линейное решение системы (1)

$$(A - \lambda_1 E) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 0 \\ 3v_1 + 3v_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = -1 \\ v_2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Таким образом, } V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$v_1, v_2$  - образуют ненулевое решение системы (1)

$$(A - \lambda_2 E) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3v_1 + v_2 = 0 \\ 3v_1 - v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_2 = 3 \end{cases}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Выписываем ФОР для (1):

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} v_1 = \begin{pmatrix} -e^x \\ e^x \end{pmatrix}$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} v_2 = \begin{pmatrix} e^{5x} \\ 3e^{5x} \end{pmatrix}$$

4. Общее решение системы (1):

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 \begin{pmatrix} e^{-x} \\ e^x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{5x} \\ 3e^{5x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x} \\ c_1 e^x + c_2 3e^{5x} \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } y = \begin{pmatrix} c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x} \\ c_1 e^x + c_2 3e^{5x} \end{pmatrix}$$