Содержание

1 Введение

Данный файл является простой прихотью автора, и не нуждается ни в одобрении, ни в осуждении. Если будут ошибки, пишите. И помните, что автор честно старался.

2 Краткий обзор

В данном файлике мы постараемся подготовиться, к 2 контрольной работе по диффурам.

Корнев пообещал нам 3 темы на контрольной работе:

1. Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами;
2. Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами;
3. Системы однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Каждый тип будет разобран в отдельном блоке. Приступим.

3 Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Стоит сказать, что Корнев разрешил решать однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами только методом вариации, и никаким больше.

3.1 Как выглядит однородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами?

Однородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y^{'} + a_n y = 0,$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — заданные числа.

3.2 Какие виды однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами могут встретиться на контрольной работе?

Я различаю следующие виды:

1. Уравнения, имеющие вещественные корни;
2. Уравнения, имеющие комплексныекорни;

Так же стоит заметить, что каждый из приведённых выше типов ещё делится на 2 случая:

1. Случай простых корней;
2. Случай кратных корней.

Дальше мы разберём каждый вид в 2 возможных случаях + ещё дополнительно разберём примеры из сборника задач, который нам дал Корнев.

3.3 Случай вещественных не кратных корней

3.3.1 Теория

В данном случае уравнения решаются по следующему алгоритму:

1. Выписываем соответствующее характеристическое уравнение.

   Оно будет иметь вид:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0;$$

2. Решаем соответствующее характеристическое уранение.

   После его решения мы получим n-1 простых вещественных корней $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$;

3. Выписываем фундаментальную систему решений исходного уравнения.

   Она будет иметь вид:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_{n-1} = e^{\lambda_{n-1} x};$$

4. Выписываем общее решение исходного уравнения.

   Оно будет иметь вид:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_{n-1} y_{n-1}.$$

5. Записываем ответ.

   Ответ: $y = \dots$.

3.3.2 Практика

Пример 1:

Дано:

$$y^{''} + y^{'} - 2y = 0$$

Решение:

1. Составляем характеристичное уравнение

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

2. Решаем характеристическое уравнение

$$D = 1 - 4 * (-2) = 3^2$$

$$\lambda_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$$

$$\lambda_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

3. Выписываем ФСР

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{-2x}$$

$$y_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{x}$$

4. Выписываем общее решение исходного уравнения

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$$

5. Ответ: $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$

Пример 2:

Дано:

$$y^{(5)} - 10y^{(3)} + 9y^{'} = 0$$

Решение:

1. Выписываем характеристическое уравнение

$$\lambda^5 - 10\lambda^3 + 9\lambda = 0$$

2. Решаем характеристическое уравнение

Воспользуемся Схемой Горнера:

	1	0	-10	0	9	0	
1	1	1	-9	-9	0	0	$\lambda_1 = 1$
-1	1	0	-9	0	0		$\lambda_2 = -1$
3	1	3	0	0			$\lambda_3 = 3$

Тогда имеем:

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 3)(\lambda^2 + 3\lambda) = 0$$

Решим $\lambda^2 + 3\lambda = 0$:

$$\lambda^2 + 3\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda + 3) = 0$$

$$\lambda_4 = 0, \quad \lambda_5 = -3$$

Таким образом получим корни:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 3, \quad \lambda_4 = 0, \quad \lambda_5 = -3$$

3. Выписываем ФСР

$$y_1 = e^{x}, \quad y_2 = e^{-x}, \quad y_3 = e^{3x}, \quad y_4 = e^{0} = 1, \quad y_5 = e^{-3x}$$

4. Выписываем общее решение

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} + c_4 + c_5 e^{-3x}$$

5. Ответ: $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} + c_4 + c_5 e^{-3x}$

3.4 Случай вещественных кратных корней

3.4.1 Теория

В данном случае алгоритм решения будет следующий:

1. Выписываем соответствующее характеристическое уравнение.

   Оно будет иметь вид:

   $$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0;$$

2. Решаем соответствующее характеристическое уранение.

   После его решения мы получим 1 корень λ_1 — $n-1$-кратности;

3. Выписываем фундаментальную систему решений исходного уравнения.

   Она будет иметь вид:

   $$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = xe^{\lambda_1 x}, \quad y_3 = x^2 e^{\lambda_1 x}, \quad \ldots, y_{n-1} = x^{n-1}e^{\lambda_1 x};$$

4. Выписываем общее решение исходного уравнения.

   Оно будет иметь вид:

   $$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_{n-1} y_{n-1}.$$

5. Записываем ответ.

   Ответ: $y = \ldots$.

У нас в случае кратных корней на практике встречались уравнения только с 1 корнем, поэтому, скорее всего, других случаев на контрольной работе не встретится.

3.4.2 Практика:

Пример:

Дано:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

Решение:

1. Составляем характеристичное уравнение

   $$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

2. Решаем характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^3 = 0$$

$$\lambda_1 = 1$$

3. Выписываем ФСР

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^x$$

$$y_2(x) = xe^{\lambda_1 x} = xe^x$$

$$y_3(x) = x^2 e^{\lambda_1 x} = x^2 e^x$$

4. Выписываем общее решение исходного уравнения

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$$

5. Ответ: $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$

3.5 Случай комплексных не кратных корней

3.5.1 Теория

Алгоритм решения:

1. Выписываем соответствующее характеристическое уравнение.

   Оно будет иметь вид:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0;$$

2. Решаем соответствующее характеристическое уранение.

   После его решения мы получим n-1 простых вещественных и комплексных корней $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$;

3. Выписываем фундаментальную систему решений исходного уравнения.

   Она будет иметь вид:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \ldots, y_{n-1} = e^{\lambda_{n-1} x};$$

4. Преобразовываем комплексные сопряжённые решения по формуле Эйлера.

$$e^{\alpha+i\gamma} = e^{\alpha}(\cos\gamma + i\sin\gamma)$$

Для определённости предположим, что корни λ_1 и λ_2 комплекно сопряжённые, тогда из 2, соответствующих им решений, получим 1 решение:

$$y_1 = e^{\alpha}(\cos\gamma + \sin\gamma) = z_1,$$

а решение y_2 отбрасываем

5. Выписываем общее решение исходного уравнения.

Оно будет иметь вид:

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ky_k + c_{k+1}z_1 + \ldots + c_{k+m}z_m,$$

где $y_1, \ldots, y_k$ — вещественные корни, а $z_1, \ldots, z_m$ — преобразованные комплексные корни.

6. Записываем ответ.

Ответ: $y = \ldots$.

3.5.2 Практика:

Пример 1:

Дано:

$$y^{''} + 4y = 0$$

Решение:

1. Составляем характеристичное уравнение

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

2. Решаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda = -4$$

$$\lambda_1 = 2i$$

$$\lambda_2 = -2i$$

3. Выписываем ФСР

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{2ix}$$
$$y_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{-2ix}$$

4. Преобразовываем комплексные решения

   Рассматриваем y_1, а y_2, как комплексно сопряженное y_1, отбрасываем:

$$y_1 = e^{2ix} = e^0(\cos 2x + \sin 2x) = z_1$$

5. Выписываем общее решение исходного уравнения

$$y = c_1 z_1 = c_1(\cos 2x + \sin 2x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

6. Ответ: $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

Пример 2:

Дано:

$$y^{'''} - 8y = 0$$

Решение:

1. Составляем характеристичное уравнение

$$\lambda^3 - 8 = 0$$

2. Решаем характеристическое уравнение

   Для того, чтобы избавиться от куба воспользуемся схемой Горнера:

	1	0	0	-8	
2	1	2	4	0	$\lambda_1 = 2$

   Таким образом, получим:

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4) = 0$$

   Решим $\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$:

$$D = 4 - 4 * 4 = -12$$
$$\lambda_2 = \frac{-2 + \sqrt{-12}}{2} = \frac{-2 + 2\sqrt{3}i}{2} = -1 + \sqrt{3}i$$
$$\lambda_3 = -1 - \sqrt{3}i$$

3. Выписываем ФСР

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{2x}$$

$$y_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{-x+\sqrt{3}ix}$$

$$y_3(x) = e^{\lambda_3 x} = e^{-x-\sqrt{3}ix}$$

4. Преобразовываем комплексные решения

   Рассматриваем y_2, а y_3, как комплексно сопряженное y_3, отбрасываем:

$$y_2 = e^{-x+\sqrt{3}ix} = e^{-x}(\cos\sqrt{3}x + \sin\sqrt{3}x) = z_1$$

5. Выписываем общее решение исходного уравнения

$$y = c_1 y_1 + c_2 z_1 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}\cos\sqrt{3}x + c_3 e^{-x}\sin\sqrt{3}x$$

6. Ответ: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}\cos\sqrt{3}x + c_3 e^{-x}\sin\sqrt{3}x$

Пример 3:

Дано:

$$y^{(6)} + 64y = 0$$

Решение:

1. Составляем характеристичное уравнение

$$\lambda^6 + 64 = 0$$

2. Решаем характеристическое уравнение

$$\lambda^6 + 64 = 0$$

$$\lambda^6 = -64$$

$$\lambda = \sqrt[6]{-64}$$

$$\lambda_1 = \sqrt[6]{64}(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = \sqrt{3} + i$$

$$\lambda_2 = \sqrt[6]{64}(\cos(\frac{3\pi}{6}) + i\sin(\frac{3\pi}{6})) = 2i$$

$$\lambda_3 = \sqrt[6]{64}(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6})) = -\sqrt{3} + i$$

$$\lambda_4 = \sqrt[6]{64}(\cos{(\frac{7\pi}{6})} + i\sin{(\frac{7\pi}{6})}) = -\sqrt{3} - i$$

$$\lambda_5 = \sqrt[6]{64}(\cos{(\frac{9\pi}{6})} + i\sin{(\frac{9\pi}{6})}) = -2i$$

$$\lambda_6 = \sqrt[6]{64}(\cos{(\frac{11\pi}{6})} + i\sin{(\frac{11\pi}{6})}) = \sqrt{3} - i$$

Таким образом, имеем 3 комплексно-сопряжённых пары корней:

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$$\lambda_{3,4} = \sqrt{3} \pm i$$

$$\lambda 5, 6 = -\sqrt{3} \pm i$$

3. Выписываем ФСР

$$y_{1,2} = e^{\pm 2ix}, \quad y_{3,4} = e^{\sqrt{3} \pm i}, \quad y_{5,6} = e^{-\sqrt{3} \pm i}$$

4. Преобразовываем комплексные решения

   Рассматриваем y_1, y_3, y_5, а y_2, y_4, y_6 отбрасываем.

$$z_1 = \cos 2x + \sin 2x$$

$$z_2 = e^{\sqrt{3}} \cos x + e^{\sqrt{3}} \sin x$$

$$z_3 = e^{-\sqrt{3}} \cos x + e^{-\sqrt{3}} \sin x$$

5. Выписываем общее решение исходного уравнения

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3 e^{\sqrt{3}} \cos x + c_4 e^{\sqrt{3}} \sin x + c_5 e^{-\sqrt{3}} \cos x + c_6 e^{-\sqrt{3}} \sin x$$

6. Ответ: $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3 e^{\sqrt{3}} \cos x + c_4 e^{\sqrt{3}} \sin x + c_5 e^{-\sqrt{3}} \cos x + c_6 e^{-\sqrt{3}} \sin x$

3.6 Случай комплексных кратных корней

3.6.1 Теория

Алгоритм аналогичен алгоритму решения в случае не кратных комплексных корней. С единственным различием в том, что получая кратные корни мы поступаем как в алгоритме случае вещественных кратных корней.

3.6.2 Практика

Пример:

Дано:

$$y^{(4)} + 2y^{''} + y = 0$$

Решение:

1. Составляем характеристичное уравнение

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

2. Решаем характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

$$(\lambda^2 + 1)^2 = 0$$

$$\lambda = \pm i$$

$$\lambda_1 = i$$

$$\lambda_2 = -i$$

   Таким образом, имеем 2 комплексно-сопряжённых корня второй кратности:

3. Выписываем ФСР

$$y_1 = e^{ix}, \quad y_2 = e^{-ix},$$

4. Преобразовываем комплексные решения

   Рассматриваем y_1, а y_2 отбрасываем + не забываем про кратность (на 1 корень по 2 решения).

$$z_1 = \cos x + \sin x$$

$$z_2 = x\cos x + x\sin x$$

5. Выписываем общее решение исходного уравнения

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x$$

6. Ответ: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x$