

## Содержание

<b>1</b>	<b>Уравнения первого порядка</b>	<b>2</b>
1.1	Определения . . . . .	2
1.1.1	Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка . . . . .	2
1.1.2	Частное решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка . . . . .	2
1.1.3	Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка . . . . .	2
1.1.4	Общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка . . . . .	2
1.1.5	Уравнение с разделяющимися переменными первого порядка . . . . .	3
1.1.6	Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в симметричной форме . . . . .	3
1.1.7	Линейное дифференциальное уравнение первого порядка	3
1.1.8	Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка . . . . .	3
1.2	Теоремы и алгоритмы . . . . .	4
1.2.1	Алгоритм решения уравнений с разделяющимися переменными первого порядка . . . . .	4
1.2.2	Метод вариации решения линейного дифференциального уравнения первого порядка. . . . .	4
1.2.3	Основная теорема существования и единственности . .	6
1.2.4	Сведение задачи Коши к интегральному уравнению . .	6
<b>2</b>	<b>Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка</b>	<b>7</b>
2.1	Определения . . . . .	7
2.1.1	Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка (однородные и неоднородные) . . . . .	7
2.1.2	Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка . . . . .	7
2.1.3	Линейно зависимые и линейно независимые функции .	8
2.1.4	Определитель Вронского функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$	8
2.1.5	Фундаментальная система решения . . . . .	8
2.1.6	Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами . . . . .	8
2.1.7	Необходимое условие линейной зависимости . . . . .	9
2.1.8	Условие линейной независимости решений . . . . .	9
2.1.9	Свойство линейности и следствия из него . . . . .	9
2.1.10	Существование ФСР . . . . .	10
2.1.11	Вид общего решения однородного линейного уравнения	10
2.1.12	Вид общего решения неоднородного линейного уравнения . . . . .	10
2.2	Алгоритм метод вариации нахождения частного решения . . .	11

# 1 Уравнения первого порядка

## 1.1 Определения

### 1.1.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

**Определение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка**

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') \equiv 0$$

### 1.1.2 Частное решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

**Определение частного решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка**

(1)  $F(x, y, y') \equiv 0$  — обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка.

Частным решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка называется непрерывно дифференцируемая функция  $\varphi(x)$ , при подстановки которой в уравнение (1) получим тождество

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$$

### 1.1.3 Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

**Определение общего решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка**

Множество всех решений обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка называется его общим решением.

### 1.1.4 Общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка

Пусть (1)  $y' = f(x, y)$  — дифференциальное уравнение первого порядка.

**Определение общего интеграла дифференциального уравнения первого порядка:**

Общее решение уравнения (1) в неявном виде

$$F(x, y) = C$$

называется общим интегралом уравнения (1).

### 1.1.5 Уравнение с разделяющимися переменными первого порядка

#### Определение уравнения с разделяющимися переменными первого порядка

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными первого порядка называется уравнение вида

$$y' = f_1(x)f_2(y),$$

где  $f_1(x)$  и  $f_2(y)$  — заданные функции.

### 1.1.6 Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в симметричной форме

#### Определение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в симметричной форме

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в симметричной форме имеет вид

$$A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0,$$

где  $A$  и  $B$  — заданные функции двух переменных, причём переменные  $x$  и  $y$  равноправны.

### 1.1.7 Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

#### Определение линейного дифференциального уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x),$$

где  $x$  — неизвестная переменная,  $y = y(x)$  — неизвестная функция,  $a_0(x)$  и  $a_1(x)$  — известные непрерывные функции.

### 1.1.8 Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка

#### Определение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка

Пусть  $y' = f(x, y)$  — дифференциальное уравнение первого порядка и  $y(x_0) = y_0$  — его начальное условие. Тогда задача Коши для него имеет вид

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

где  $x_0, y_0$  — заданные числа.

## 1.2 Теоремы и алгоритмы

### 1.2.1 Алгоритм решения уравнений с разделяющимися переменными первого порядка

1. Переходим к дифференциалам:

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad \frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y);$$

2. Делим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y) \quad | \cdot dx \frac{1}{f_2(y)}$$

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

3. Вычисляем интегралы:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C,$$

где  $C \in R$  и  $\int \frac{dy}{f_2(y)} = F_2(y)$ ,  $\int f_1(x)dx = F_1(x)$ .

Получим:

$$(3) \quad F_2(y) = F_1(x) + C$$

4. Разрешаем последнее уравнение относительно  $y$ :

$$(4) \quad y = \varphi(x, C), \quad C \in R,$$

где  $\varphi(x, C)$  — общее решение.

5. Ответ:  $\varphi(x, C)$ .

### 1.2.2 Метод вариации решения линейного дифференциального уравнения первого порядка.

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x),$$

Тогда

$$y' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}y = \frac{f(x)}{a_0(x)}$$

Обозначим  $p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}$ ,  $q(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)}$

Следовательно уравнение примет вид:

$$(1) \quad y' + p(x) = q(x), \quad a \leq x \leq b$$

**Метод вариации произвольной постоянной:**

1. Этап:

Найдём общее решение соответствующего (1) однородного уравнения:

$$(2) \quad y' + p(x)y = 0$$

$$y' = -p(x)y$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int p(x)dx + C$$

$$\ln |y| = -F_1(x) + C$$

$$y = \pm e^C e^{-F_1(x)}$$

Получим:  $y_0 = C e^{-F_1(x)}$  — общее решение (2).

2. Этап:

Ищем решение (1) в виде:

$$(3) \quad C(x)e^{-F_1(x)},$$

где  $C(x)$  — пока неизвестная функция.

$$y' = C'(x)e^{-F_1(x)} + C(x)e^{-F_1(x)}(-p(x))$$

Подставляем в (1):

$$C'(x)e^{-F_1(x)} - C(x)e^{-F_1(x)}p(x) + p(x)C(x)e^{-F_1(x)} = q(x)$$

$$C'(x) = e^{F_1(x)}q(x)$$

$$C(x) = \int e^{F_1(x)}q(x)dx \pm c = F_2(x) + C$$

Подставим в (3):

$$y = e^{-F_1(x)}(F_2(x) + C)$$

Таким образом,  $y = e^{-F_1(x)}(F_2(x) + C)$  — общее решение уравнения (1).

### 1.2.3 Основная теорема существования и единственности

**Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши:**

Предположим, что  $f(x, y)$  — непрерывная функция и у неё существует непрерывная частная производная  $f'(x, y)$ . Тогда  $\forall (x_0, y_0)$  задача Коши имеет единственное решение.

### 1.2.4 Сведение задачи Коши к интегральному уравнению

Пусть  $\varphi(x)$  — решение задачи Коши:

$$(1) \quad \varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$$

$$(2) \quad \varphi(x_0) = y_0$$

Перепишем (1) в виде:

$$(3) \quad \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$$

Фиксируем произвольный  $x$  и берём интеграл от (3):

$$\varphi' = f(t, \varphi(t)) \quad || \int_{x_0}^x dt$$

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$$

$$(4) \quad \varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$$

По определению (4) означает, что  $\varphi(x)$  является решением интегрального уравнения

$$(5) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

Все остальные рассуждения обратимы  $\leftarrow$  задача Коши  $\sim$  уравнению (5).

## 2 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка

### 2.1 Определения

#### 2.1.1 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка (однородные и неоднородные)

**Определение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка**

Однородное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид:

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y = 0,$$

где  $a_0(x), \dots, a_n(x)$  — заданные непрерывные функции.

**Определение линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка**

Неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид:

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y = f(x),$$

где  $a_0(x), \dots, a_n(x), f(x)$  — заданные непрерывные функции.

#### 2.1.2 Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка

$$(1) \quad y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x)$$

**Определение задачи Коши для дифференциального уравнения n-го порядка**

Задача Коши для линейного уравнения (1) имеет вид:

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

где  $y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$  — начальные условия и  $x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  — заданные числа.

### 2.1.3 Линейно зависимые и линейно независимые функции

#### Определение линейно зависимых функций

Функции  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$  называются линейно зависимыми на отрезке  $[a, b]$ , если найдутся константы  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  — числа, не все равные нулю, такие, что линейная комбинация:

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_m \varphi_m(x) \equiv 0$$

#### Определение линейно независимых функций

Функции  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$  называются линейно независимыми на отрезке  $[a, b]$ , если

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_m \varphi_m(x) \equiv 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$$

### 2.1.4 Определитель Вронского функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$

#### Определение определителя Вронского функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$

Определителем Вронского функций  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$  называется:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_m(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_m'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_m^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

### 2.1.5 Фундаментальная система решения

#### Определение фундаментальной системы решений однородного линейного уравнения

Фундаментальной системой решений однородного линейного уравнения  $l(y) = 0$  называется:

$\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  — линейно независимые и их количество совпадает с порядком уравнения.

### 2.1.6 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

#### Определение однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами

Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0,$$

где  $a_0, \dots, a_n$  — заданные числа.



**Определение неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами**

Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x),$$

где  $a_0, \dots, a_n$  — заданные числа,  $f(x)$  — заданная функция одного переменного.

**2.1.7 Необходимое условие линейной зависимости**

**Теорема (необходимое условие линейной зависимости)**

Если функции  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  — линейно зависимы на  $[a, b]$ . Тогда их определитель вронского тождественно равен нулю.

$$\mathbf{W} \equiv 0$$

Доказательство (нужно или нет?:))

**2.1.8 Условие линейной независимости решений**

Рассмотрим линейное уравнение:

$$(1) \quad y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_m(x)y = 0; \quad a \leq x \leq b$$

**Теорема (условие линейной независимости решений линейного уравнения)**

Пусть  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  — линейно независимые решения уравнения (1). Тогда

$$\forall x \in [a, b] \quad \mathbf{W} \neq 0$$

Доказательство (нужно или нет?:))

**2.1.9 Свойство линейности и следствия из него**

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_m(x)y = f(x)$$

Обозначим  $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_m(x)y$  как  $l(y)$ .

**Свойство линейности  $l(y)$**

$$l(y_1(x) + y_2(x)) = l(y_1(x)) + l(y_2(x));$$

$$l\left(\sum_{k=1}^m \alpha_k \varphi_k(x)\right) = \sum_{k=1}^m \alpha_k l(\varphi_k(x))$$

### Следствие свойства линейности

Пусть  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  — решения уравнения  $l(y) = 0$ . Тогда  $\varphi^\circ(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_m \varphi_m(x)$  тоже является решением этого уравнения.

Доказательство (нужно или нет?:))

### 2.1.10 Существование ФСР

**Теорема (о существовании ФСР у любого однородного линейного уравнения)**

Фундаментальная система решений существует для любого однородного линейного уравнения.

### 2.1.11 Вид общего решения однородного линейного уравнения

Рассмотрим однородное линейное уравнение

$$(1) \quad y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_m(x)y = 0; \quad a \leq x \leq b$$

или

$$l(y) = 0$$

**Теорема (вид общего решения однородного линейного уравнения)**

Пусть  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  — ФСР. Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$y = c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_n \varphi_n(x),$$

где  $c_1, \dots, c_n$  — произвольные константы.

### 2.1.12 Вид общего решения неоднородного линейного уравнения

Рассмотрим неоднородное линейное уравнение

$$(1) \quad y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_m(x)y = f(x); \quad a \leq x \leq b$$

или

$$l(y) = f(x)$$

и соответствующее ему однородное линейное уравнение

$$(2) \quad l(y) = 0$$

**Теорема (вид общего решения неоднородного линейного уравнения)**

Пусть  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  — ФСР (2) и  $y_h(x)$  — частное решение (1). Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$y = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) + y_h(x),$$

где  $c_1, \dots, c_n$  — произвольные константы.

В  $y_h(x)$  вместо **h** должна стоять буква **ч**, но латех этого сделать не позволяет.

## 2.2 Алгоритм метод вариации нахождения частного решения

**Метод вариации произвольных постоянных нахождения  $y_h(x)$**

По теореме о виде общего решения линейного однородного уравнения  $y_0 = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x)$  — общее решение уравнения  $l(y) = 0$ .

Будем искать частное решение  $y_h(x)$  в виде:

$$y_h(x) = c_1(x)\varphi_1(x) + \dots + c_n(x)\varphi_n(x),$$

где  $c_1(x), \dots, c_n(x)$  — пока неизвестные функции.

Рассмотрим систему уравнений

$$(5) \quad \begin{cases} c_1'(x)\varphi_1(x) + \dots + c_n'(x)\varphi_n(x) = 0 \\ c_1'(x)\varphi_1'(x) + \dots + c_n'(x)\varphi_n'(x) = 0 \\ c_1'(x)\varphi_1''(x) + \dots + c_n'(x)\varphi_n''(x) = 0 \\ \dots \\ c_1'(x)\varphi_1^{(n-2)}(x) + \dots + c_n'(x)\varphi_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ c_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases}$$

Пусть  $a \leq x \leq b$ ,  $x$  — фиксированное  $\Rightarrow$  (5) — линейная алгебраическая система относительно  $c_i'(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$

Определитель системы  $= \mathbf{W}(x) \Rightarrow \mathbf{W}(x) \neq 0 \Rightarrow$  по теореме из алгебры (5) имеет единственное решение.

По формулам Крамера:

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \dots \\ \dots \\ f & \dots \end{vmatrix}}{\mathbf{W}} = \frac{\mathbf{W}_1(x)}{\mathbf{W}(x)}$$

...

$$(6) \quad c'_n(x) = \frac{\begin{vmatrix} \dots & 0 \\ \dots & \\ \dots & f \end{vmatrix}}{\mathbf{W}} = \frac{\mathbf{W}_n(x)}{\mathbf{W}(x)}$$

Таким образом,  $c'_i(x) \quad i = \overline{1, n}$  находится по формуле (6)  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad c_k(x) = \int \frac{\mathbf{W}_k(x)}{\mathbf{W}(x)} dx$$