

## Содержание

1	Общая структура компиляторов. Лексический анализ. Синтаксический анализ. Семантический анализ. Оптимизация кода. Генерация кода.	3
2	Формальные языки. Основные понятия и определения формальных языков.	5
3	Алфавит. Цепочка символов (или слово) в алфавите $\Sigma$ . Операции над цепочками символов.	5
4	Язык в алфавите $\Sigma$ . Операции над языками.	6
5	Методы представления бесконечных языков.	7
6	Спецификация языка.	7
7	Механизм распознавания (распознаватель). Язык, определяемый распознавателем.	7
8	Грамматики. Порождающая грамматика. Выводимость цепочки. Язык грамматики.	8
9	Билет 9	9
10	Билет 10	12
11	Билет 11	12
12	Билет 12	12
13	Билет 13	13
14	Билет 14	13
15	Билет 15	14
16	Билет 16	14
17	Билет 17	16
18	Билет 18	18
19	Билет 19	19
20	Билет 20	21
21	Билет 21	24

<b>22 Свойства регулярных языков. Свойства замкнутости. Разрешимые свойства.</b>	<b>25</b>
<b>23 Билет 23</b>	<b>26</b>
<b>24 Билет 24</b>	<b>26</b>
<b>25 Билет 25</b>	<b>26</b>
<b>26 Билет 26</b>	<b>27</b>
<b>27 Лемма о накачке для регулярных языков</b>	<b>29</b>
<b>28 Эквивалентность регулярных языков</b>	<b>30</b>
<b>29 Построение произведения автоматов L и M</b>	<b>30</b>
<b>30 Проблема вложения регулярных языков</b>	<b>31</b>
<b>31 Минимальный КДА для регулярных языков. Эффективная минимизация числа состояний.</b>	<b>32</b>
<b>32 Теорема о минимальном автомате.</b>	<b>37</b>
<b>33 Замкнутость класса регулярных языков относительно регулярных операций.</b>	<b>40</b>
<b>34 Замыкание класса регулярных языков по пересечению.</b>	<b>41</b>
<b>35 Использование свойства замыкания пересечения регулярных языков.</b>	<b>42</b>
<b>36 Замыкание класса регулярных языков по вычитанию.</b>	<b>42</b>
<b>37 Замыкание класса регулярных языков по дополнению.</b>	<b>43</b>
<b>38 Замыкание класса регулярных языков по обращению</b>	<b>43</b>
<b>39 Гомоморфизмы. Замыкание по гомоморфизму. Обратный гомоморфизм. Замыкание класса регулярных языков по обратному гомоморфизму.</b>	<b>44</b>
<b>40 Контекстно-свободные грамматики.</b>	<b>46</b>
<b>41 Деревья синтаксического разбора.</b>	<b>46</b>

# 1 Общая структура компиляторов. Лексический анализ. Синтаксический анализ. Семантический анализ. Оптимизация кода. Генерация кода.

Структура компилятора



## Лексический анализ

Лексический анализ — деление текста на слова, выделение токенов.

Задача лексического анализа — выделить лексемы, классифицировать их и передать их на стадию синтаксического анализа.

\t\tif (i == j)\n\t\t\tz = 0\n\telse\n\t\t\tz = 1;

- Оператор
- Пробел
- Идентификатор
- Ключевое слово
- Число
- Спец. символы

```
| if (i==j)
|   z=0;
| else
|   z=1;
```

## Синтаксический анализ

Синтаксический анализ — определение структуры предложения.

Задача: иерархическая группировка в соответствии с грамматикой языка программирования.

**position := initial + rate \* 60**



## Семантический анализ

Семантический анализ — устранение неоднозначностей.

- Пример:
  - Петя оставил её задание дома
  - Из-за «несоответствия типов» между «её» и «Петя» мы узнаём, что это разные люди.

## Оптимизация кода

Оптимизация кода:

1. На естественном языке оптимизация не имеет строгих правил и сводится к редактированию;
2. Для программ она предполагает следующее:
  - (а) Увеличение скорости работы программы;
  - (б) Уменьшение объёма используемой памяти;
  - (с) И так далее.

## Генерация кода

Генерация кода — трансляция исходного кода на другой язык программирования.

Обычно результатом является ассемблерный код.

**Дополнительную информацию смотри на слайдах 1-39 первой половины лекций.**

- 2 Формальные языки. Основные понятия и определения формальных языков.
- 3 Алфавит. Цепочка символов (или слово) в алфавите  $\Sigma$ . Операции над цепочками символов.

#### Определение алфавита

Алфавит — это конечное множество символов.

#### Определение слова в $\Sigma$

Словом в алфавите  $\Sigma$  называется любая конечная последовательность символов этого алфавита.

#### Операции над цепочками символов

##### 1. Конкатенация

**Опр.** Если  $a$  и  $b$  — цепочки, то цепочка  $ab$  (результат приписывания цепочки  $b$  в конец цепочки  $a$ ), называется *конкатенацией* (или *сплением*) цепочек  $a$  и  $b$ .

Конкатенацию можно считать двуместной операцией над цепочками:  $a \times b = ab$ .

Например, если  $w = ab$  и  $z = cd$ , то  $w \times z = abcd$ .

Для любой цепочки  $a$ :  $a\epsilon = \epsilon a = a$ .

Для любых цепочек  $a$ ,  $b$ ,  $g$  справедливо свойство ассоциативности операции конкатенации  $(ab)g = a(bg) = abg$ .

##### 2. Обращение

- **Опр.** *Обращением* (или *реверсом*) цепочки  $\alpha$  называется цепочка, символы которой записаны в обратном порядке.

Обращение цепочки  $\alpha$  будем обозначать  $\alpha^R$ .

Например, если  $\alpha = abcdef$ , то  $\alpha^R = fedcba$ .

Для пустой цепочки:  $\epsilon^R = \epsilon$ .

##### 3. Возвведение в степень

- **Опр.**  $n$ -ой степенью цепочки  $\alpha$  (будем обозначать  $\alpha^n$ ) называется конкатенация  $n$  цепочек  $\alpha$ :

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha \dots \alpha}_{n}.$$

Свойства степени:  $\alpha^0 = \epsilon$ ;  $\alpha^n = \alpha\alpha^{n-1} = \alpha^{n-1}\alpha$

Дополнительную информацию смотрите на слайдах 40-42 первой презентации.

## 4 Язык в алфавите $\Sigma$ . Операции над языками.

• **Опр.** Обозначим через  $\Sigma^*$  множество, содержащее все цепочки в алфавите  $\Sigma$ , включая пустую цепочку  $\epsilon$ .

Например, если  $\Sigma = \{0, 1\}$ , то  $\Sigma^* = \{\epsilon, 0, 1, 00, 11, 01, 10, 000, 001, 011, \dots\}$ .

Формальное определение языка

• **Опр.** Язык в алфавите  $\Sigma$  — это подмножество множества всех цепочек в этом алфавите. Для любого языка  $L$  справедливо  $L \subseteq \Sigma^*$ .

### Операции над языками

#### 1. Контатенация

• **Опр.** Конкатенацией двух языков  $L_1$  и  $L_2$  называется язык

$$L_3 = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L_1, \beta \in L_2\}.$$

Обозн.:  $L_3 = L_1L_2$

Пример:  $\{01, 111, 10\} \{00, 01\} = \{0100, 0101, 11100, 11101, 1000, 1001\}$ .

#### 2. Объединение

• **Опр.** Объединением двух языков  $L_1$  и  $L_2$  называется язык

$$L = L_1 \cup L_2 = \{\alpha \mid \alpha \in L_1 \text{ или } \alpha \in L_2\}.$$

Пример:  $\{01, 111, 10\} \cup \{00, 01\} = \{01, 111, 10, 00\}$ .

#### 3. Степень

• **Опр.** Степень языка  $L$ :

1.  $L^0 = \{\epsilon\}$

2.  $L^1 = L$

3.  $L^k = L^{k-1}L$

#### 4. Итерация

- Опр. Итерация языка  $L$ :

$$L^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} L^k \quad L^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} L^k \quad L^+ = L^* L$$

$$L^* = \{\varepsilon\} \cup L \cup LL \cup LLL \cup \dots$$

Пример:  $\{0,10\}^* = \{\varepsilon, 0, 10, 00, 010, 100, 1010, \dots\}$

## 5 Методы представления бесконечных языков.

### Способы описания языков

- Конечный язык можно описать простым перечислением его цепочек.
- Как представлять бесконечные языки?
  - спецификация (описание)
  - механизм распознавания
  - механизм порождения (генерации).
- Не каждый формальный язык можно задать с помощью конечного описания.

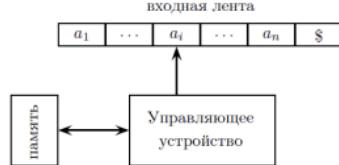
## 6 Спецификация языка.

- *Спецификация* – Описание языка, как множества слов, удовлетворяющих некоторому условию. (Для регулярных языков – это регулярное выражение...).

## 7 Механизм распознавания (распознаватель). Язык, определяемый распознавателем.

- Механизм распознавания (*распознаватель*), по сути, является процедурой специального вида, которая по заданной цепочке определяет, принадлежит ли она языку.
- Если принадлежит, то процедура останавливается с ответом «да», т. е. допускает цепочку; иначе — останавливается с ответом «нет» или зацикливается.
- *Язык, определяемый распознавателем* — это множество всех цепочек, которые он допускает.

- Механизм, который является процедурой специального вида, которая по заданной цепочке определяет, принадлежит ли она языку.
- Если принадлежит, то процедура останавливается с ответом «да», т. е. **допускает** цепочку; иначе — останавливается с ответом «нет» или зацикливается.
- **Язык, определяемый распознавателем** — это множество всех цепочек, которые он допускает.



## 8 Грамматики. Порождающая грамматика. Выводимость цепочки. Язык грамматики.

**Опр. Порождающая грамматика**  $G$  — это четверка  $\langle T, N, P, S \rangle$ , где

$T$  — алфавит терминальных символов (терминалов);

$N$  — алфавит нетерминальных символов (нетерминалов),  $T \cap N = \emptyset$ ;

$P$  — конечное подмножество множества  $(T \cup N)^+ \times (T \cup N)^*$ ;

где элемент  $(\alpha, \beta)$  записывается в виде  $\alpha \rightarrow \beta$  и называется **правилом вывода**;

$\alpha$  называется **левой частью** правила,  $\beta$  — **правой частью** правила.

Левая часть любого правила из  $P$  обязана содержать хотя бы один нетерминал;

$S$  — начальный символ грамматики,  $S \in N$ .

Для записи правил вывода с одинаковыми левыми частями

$$\alpha \rightarrow \beta_1 \quad \alpha \rightarrow \beta_2 \quad \dots \quad \alpha \rightarrow \beta_n$$

используют сокращенную запись  $\alpha \rightarrow \beta_1 | \beta_2 | \dots | \beta_n$ .

**Опр. Цепочка**  $\beta \in (T \cup N)^*$  **непосредственно выводима** из цепочки  $\alpha \in (T \cup N)^+$  в грамматике  $G = \langle T, N, P, S \rangle$  (обозначается  $\alpha \rightarrow_\sigma \beta$ ), если

$$\alpha = \xi_1 \gamma \xi_2, \quad \beta = \xi_1 \delta \xi_2,$$

где

$$\xi_1, \xi_2, \delta \in (T \cup N)^*, \quad \gamma \in (T \cup N)^+$$

и правило вывода  $\gamma \rightarrow \delta$  содержится в  $P$ .

**Опр.** Цепочка  $\beta \in (T \cup N)^*$  *выводима* из цепочки  $\alpha \in (T \cup N)^+$  в грамматике  $G = \langle T, N, P, S \rangle$  (обозначается ), если существуют цепочки  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$  ( $n \geq 0$ ), такие, что

$$\alpha = \gamma_0 \rightarrow \gamma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \gamma_n = \beta.$$

Последовательность  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$  называется *выводом длины n*.  
Длину вывода n показывают обозначением:

Вывод за некоторое число шагов (м.б. 0 шагов) обозначается:

Индекс G в обозначении  $\Rightarrow_n$  опускают, если понятно, какая грамматика подразумевается.

**Опр.** Языком, порождаемым грамматикой  $G = \langle T, N, P, S \rangle$ , называется множество

$$L(G) = \{\alpha \in T^* \mid S \Rightarrow \alpha\}.$$

Другими словами,  $L(G)$  — это все цепочки в алфавите  $T$ , которые выводимы из  $S$  с помощью правил  $P$ .

Например,  $L(G_{example}) = \{0^n 1^n \mid n > 0\}$ .

**Опр.** Цепочка  $\alpha \in (T \cup N)^*$ , для которой  $S \Rightarrow \alpha$ , называется *сентенциальной формой* в грамматике  $G = \langle T, N, P, S \rangle$ .

Таким образом, языком, порождаемый грамматикой, можно определить как *множество терминальных сентенциальных форм*.

Дополнительную информацию смотри на слайдах 54-60 первой презентации.

## 9 Билет 9

### Классификация грамматик и языков по Хомскому

- Тип грамматики определяется типом ограничений на вид правил вывода.
- Всего определено четыре типа грамматик:  
тип 0, тип 1, тип 2, тип 3.
- Каждому типу грамматик соответствует свой класс языков.
- Если язык порождается грамматикой типа  $i$  (для  $i = 0, 1, 2, 3$ ), то он является *языком типа i*.

#### 1. Тип 0

### Тип 0

Любая порождающая грамматика является грамматикой типа 0.

На вид правил грамматик этого типа не накладывается никаких дополнительных ограничений.

Класс языков типа 0 совпадает с классом рекурсивно перечислимых языков.

### 2. Тип 1

#### Классификация грамматик и языков по Хомскому: Тип 1

**Опр.** Грамматика  $G = \langle T, N, P, S \rangle$  называется *неукорачивающей*, если правая часть каждого правила из  $P$  не короче левой части (т. е. для любого правила  $\alpha \rightarrow \beta \in P$  выполняется неравенство  $|\alpha| \leq |\beta|$ ).

В виде исключения в неукорачивающей грамматике допускается наличие правила  $S \rightarrow \epsilon$ , при условии, что  $S$  (начальный символ) не встречается в правых частях правил.

Грамматикой *типа 1* называют неукорачивающую грамматику.

#### Классификация грамматик и языков по Хомскому: Тип 1

Другое определение:

**Опр.** Грамматика  $G = \langle T, N, P, S \rangle$  называется *контекстно-зависимой (К3)*, если каждое правило из  $P$  имеет вид  $\alpha \rightarrow \beta$ ,

где  $\alpha = \xi_1 A \xi_2$ ,  $\beta = \xi_1 \gamma \xi_2$ ,  $A \in N$ ,  $\gamma \in (T \cup N)^+$ ,  $\xi_1, \xi_2 \in (T \cup N)^*$ .

В виде исключения в КЗ-грамматике допускается наличие правила  $S \rightarrow \epsilon$ , при условии, что  $S$  (начальный символ) не встречается в правых частях правил.

Язык, порождаемый контекстно- зависимой грамматикой, называется *контекстно- зависимым языком*.

### 3. Тип 2

## Классификация грамматик и языков по Хомскому: Тип 2

**Опр.** Грамматика  $G = \langle T, N, P, S \rangle$  называется **контекстно-свободной** (*KC*), если каждое правило из  $P$  имеет вид  $A \rightarrow \beta$ , где  $A \in N$ ,  $\beta \in (T \cup N)^*$ .

Заметим, что в КС-грамматиках допускаются правила с пустыми правыми частями. Язык, порождаемый контекстно-свободной грамматикой, называется **контекстно-свободным** языком.

Грамматикой **типа 2** будем называть контекстно-свободную грамматику.

### 4. Тип 3

## Классификация грамматик и языков по Хомскому: Тип 3

**Опр.** Грамматика  $G = \langle T, N, P, S \rangle$  называется **праволинейной**, если каждое правило из  $P$  имеет вид  $A \rightarrow wB$  либо  $A \rightarrow w$ , где  $A, B \in N$ ,  $w \in T^*$ .

**Опр.** Грамматика  $G = \langle T, N, P, S \rangle$  называется **леволинейной**, если каждое правило из  $P$  имеет вид  $A \rightarrow Bw$  либо  $A \rightarrow w$ , где  $A, B \in N$ ,  $w \in T^*$ .

### Дополнительная информация

#### Иерархия грамматик Хомского

**Утверждение 5.** Справедливы следующие утверждения:

- 1) любая регулярная грамматика является КС-грамматикой;
- 2) любая неукорачивающая КС-грамматика является К3-грамматикой;
- 3) любая неукорачивающая грамматика является грамматикой типа 0.

Утверждение 5 следует непосредственно из определений.

Рассматривая только неукорачивающие регулярные и неукорачивающие КС-грамматики, получаем следующую иерархию классов грамматик:

$$\text{Регулярные неукорачивающие} \subset \text{КС неукорачивающие} \subset \text{К3} \subset \text{Тип 0}$$

## 10 Билет 10

### Эквивалентность неукорачивающих и КЗ-грамматик

**Утверждение 1.** Пусть  $L$  — формальный язык. Следующие утверждения эквивалентны.

- 1) существует контекстно-зависимая грамматика  $G_1$ , такая что  $L = L(G_1)$ ;
- 2) существует неукорачивающая грамматика  $G_2$ , такая что  $L = L(G_2)$ .

**Док-во.** Очевидно, что (1)  $\Rightarrow$  (2): любая контекстно-зависимая грамматика удовлетворяет ограничениям неукорачивающей грамматики (см. определения).

Т.к. каждое неукорачивающее правило можно заменить эквивалентной серией контекстно-зависимых правил, следовательно (2)  $\Rightarrow$  (1) .

Т.о., язык, порождаемый неукорачивающей грамматикой, — контекстно-зависимый. ■

Т.е., неукорачивающие и КЗ-грамматики определяют один и тот же класс языков.

## 11 Билет 11

**Опр.** Грамматика  $G = \langle T, N, P, S \rangle$  называется **контекстно-свободной** (КС), если каждое правило из  $P$  имеет вид  $A \rightarrow \beta$ , где  $A \in N$ ,  $\beta \in (T \cup N)^*$ .

Заметим, что в КС-грамматиках допускаются правила с пустыми правыми частями. Язык, порождаемый контекстно-свободной грамматикой, называется **контекстно-свободным** языком.

Грамматикой **типа 2** будем называть контекстно-свободную грамматику.

КС-грамматика может являться неукорачивающей, т.е. удовлетворять ограничениям неукорачивающей грамматики.

**Утверждение 2.** Для любой КС-грамматики  $G$  существует неукорачивающая КС-грамматика  $G'$ , такая что  $L(G) = L(G')$ .

## 12 Билет 12

**Опр.** Грамматика  $G = \langle T, N, P, S \rangle$  называется **праволинейной**, если каждое правило из  $P$  имеет вид  $A \rightarrow wB$  либо  $A \rightarrow w$ , где  $A, B \in N$ ,  $w \in T^*$ .

**Опр.** Грамматика  $G = \langle T, N, P, S \rangle$  называется **леволинейной**, если каждое правило из  $P$  имеет вид  $A \rightarrow Bw$  либо  $A \rightarrow w$ , где  $A, B \in N$ ,  $w \in T^*$ .

**Утверждение 3.** Пусть  $L$  — формальный язык. Следующие два утверждения эквивалентны:

- 1) существует праволинейная грамматика  $G_1$ , такая что  $L = L(G_1)$ ;
  - 2) существует леволинейная грамматика  $G_2$ , такая что  $L = L(G_2)$ .
- Т.е., праволинейные и леволинейные грамматики определяют один и тот же класс языков. Такие языки называются **регулярными**.
- Право- и леволинейные грамматики также называют регулярными.
  - Регулярная грамматика является грамматикой **типа 3**.

## 13 Билет 13

Т.е., праволинейные и леволинейные грамматики определяют один и тот же класс языков. Такие языки называются **регулярными**.

**Опр.** Автоматной грамматикой называется праволинейная (леволинейная) грамматика, такая, что каждое правило с непустой правой частью имеет вид:

$A \rightarrow a$  либо  $A \rightarrow aB$  (для леволинейной, соответственно,  $A \rightarrow a$  либо  $A \rightarrow Ba$ ),  
где  $A, B \in N$ ,  $a \in T$ .

Автоматная грамматика является более простой формой регулярной грамматики.

Существует алгоритм, позволяющий по регулярной (право- или леволинейной) грамматике построить соответствующую автоматную грамматику.

Таким образом, любой регулярный язык может быть порожден автоматной грамматикой.

Существует алгоритм, позволяющий устраниить из регулярной (автоматной) грамматики все  $\epsilon$ -правила (кроме  $S \rightarrow \epsilon$  в случае, если пустая цепочка принадлежит языку; при этом  $S$  не будет встречаться в правых частях правил).

**Утверждение 4.** Для любой регулярной (автоматной) грамматики  $G$  существует неукорачивающая регулярная (автоматная) грамматика  $G'$ , такая что  $L(G) = L(G')$ .

## 14 Билет 14

### Иерархия языков

**Утверждение 6.** Справедливы следующие утверждения:

1) Каждый регулярный язык является КС-языком, но существуют КС-языки, которые не являются регулярными, например:

$$L = \{a^n b^n \mid n > 0\};$$

2) Каждый КС-язык является КЗ-языком, но существуют КЗ-языки, которые не являются КС-языками, например:

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\};$$

3) Каждый КЗ-язык является языком типа 0 (т. е. рекурсивно перечислимым языком), но существуют языки типа 0, которые не являются КЗ-языками.

Из утверждения 6 следует иерархия классов языков:

$$\text{Tun 3 (Регулярные)} \subset \text{Tun 2 (KC)} \subset \text{Tun 1 (K3)} \subset \text{Tun 0}$$



Для  $k = 1, 2, 3$  язык типа  $k$  является также и языком типа  $k - 1$  (класс языков типа  $k$  является подклассом класса языков типа  $k - 1$ ).

## 15 Билет 15

- **Утверждение 7.** Проблема «Можно ли язык, описанный грамматикой типа  $k$  ( $k = 0, 1, 2$ ), описать грамматикой типа  $k + 1$ ?» является *алгоритмически неразрешимой*.
- Т.е., нет алгоритма, позволяющего по заданному описанию языка  $L$  (например, по грамматике), определить максимальное  $k$ , такое что  $L$  является языком типа  $k$

## 16 Билет 16

### Регулярные

1. Грамматика  $S \rightarrow aS \mid a$  является праволинейной (неукорачивающей) грамматикой и порождает регулярный язык  $\{a^n \mid n > 0\}$ .

Этот язык может быть порожден и леволинейной грамматикой:  $S \rightarrow Sa \mid a$ .

Обе эти грамматики являются автоматными.

2. Грамматика  $S \rightarrow aS \mid \epsilon$  является праволинейной и порождает регулярный язык  $\{a^n \mid n \geq 0\}$ .

Для любого регулярного языка существует неукорачивающая регулярная грамматика (см. утверждение 4):

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aA \mid a \mid \epsilon \\ A &\rightarrow a \mid aA \end{aligned}$$

Правило с пустой правой частью может применяться только один раз и только на первом шаге вывода; остальные правила таковы, что их правая часть не короче левой, т. е. грамматика неукорачивающая.

3. Грамматика

$S$	$\rightarrow$	$A\perp \mid B\perp$	леволинейная;
$A$	$\rightarrow$	$a \mid Ba$	
$B$	$\rightarrow$	$b \mid Bb \mid Ab$	

она порождает регулярный язык, состоящий из всех непустых цепочек в алфавите  $\{a, b\}$ , заканчивающихся символом  $\perp$  (маркер конца) и не содержащих подцепочку  $aa$ .

То есть в цепочках этого языка символ  $a$  не может встречаться два раза подряд, хотя бы один символ  $b$  обязательно присутствует между любыми двумя  $a$ .

Данный язык описывается как:  $L = \{\omega\perp \mid \omega \in \{a, b\}^+, aa \not\in \omega\}$ .

#### Контекстно-свободные

1. Грамматика

$S$	$\rightarrow$	$aQb \mid accb$
$Q$	$\rightarrow$	$cSc$

является контекстно-свободной (неукорачивающей) и порождает КС-язык  $\{(ac)^n(cb)^n \mid n > 0\}$ , который, не является регулярным.

2. Грамматика

$S$	$\rightarrow$	$aSa \mid bSb \mid \epsilon$
-----	---------------	------------------------------

порождает КС-язык  $\{xx^R, x \in \{a, b\}^*\}$ . Данный язык не является регулярным.

Грамматика не удовлетворяет определению неукорачивающей, но для нее существует эквивалентная неукорачивающая грамматика (см. утверждение 2):

$S$	$\rightarrow$	$A \mid \epsilon$
$A$	$\rightarrow$	$aAa \mid bAb \mid aa \mid bb$

#### Неукорачивающие и контекстно-зависимые

1. Грамматика:

$S$	$\rightarrow$	$aSBC \mid abC$
$CB$	$\rightarrow$	$BC$
$bB$	$\rightarrow$	$bb$
$bC$	$\rightarrow$	$bc$
$cC$	$\rightarrow$	$cc$

неукорачивающая и порождает язык  $\{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$ , который является языком типа 1, но не является языком типа 2.

Правило  $CB \rightarrow BC$  не удовлетворяет определению КЗ-грамматики. Заменим его тремя новыми

$CB \rightarrow CD, CD \rightarrow BD, BD \rightarrow BC$ . Получим эквивалентную серию контекстно-зависимых правил, которые меняют местами символы  $C$  и  $B$ . Таким образом, получаем эквивалентную КЗ-грамматику:

$S$	$\rightarrow$	$aSBC \mid abC$
$CB$	$\rightarrow$	$CD$
$CD$	$\rightarrow$	$BD$
$BD$	$\rightarrow$	$BC$
$bB$	$\rightarrow$	$bb$
$bC$	$\rightarrow$	$bc$
$cC$	$\rightarrow$	$cc$

$$\begin{array}{l} \text{1. Грамматика типа 0} \\ S \rightarrow SS \\ SS \rightarrow \varepsilon \end{array}$$

Второе правило не удовлетворяет ограничениям неукорачивающей грамматики. В данной грамматике существует бесконечно много выводов, однако порождаемый язык конечен и состоит из единственной цепочки:  $\{\varepsilon\}$ .

$$\begin{array}{l} \text{2. Грамматика} \\ S \rightarrow SS \\ SS \rightarrow Sa | S \end{array}$$

также не является неукорачивающей и порождает пустой язык, так как ни одна терминальная цепочка не выводится из  $S$ .

Языки  $L_\varepsilon = \{\varepsilon\}$  и  $L_\emptyset = \emptyset$  (пустой язык) могут быть описаны грамматиками типа 3.

## 17 Билет 17

### Определение регулярного выражения

- **Опр.** Пусть  $\Sigma$  — алфавит, не содержащий символов  $*$ ,  $+$ ,  $\varepsilon$ ,  $\emptyset$ ,  $($ ,  $)$ . Определим рекурсивно *регулярное выражение*  $\gamma$  над алфавитом  $\Sigma$  и регулярный язык  $L(\gamma)$ , задаваемый этим выражением:

*Базис индукции:*

- 1)  $a \in \Sigma$  есть регулярное выражение;  $L(a) = \{a\}$
- 2)  $\varepsilon$  есть регулярное выражение;  $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
- 3)  $\emptyset$  есть регулярное выражение;  $L(\emptyset) = \emptyset$

*Индукция:*

Если  $\alpha$  и  $\beta$  — регулярные выражения, то:

- 1)  $(\alpha) + (\beta)$  — регулярное выражение;  $L((\alpha) + (\beta)) = L(\alpha) \cup L(\beta)$ ;
- 2)  $(\alpha)(\beta)$  — регулярное выражение;  $L((\alpha)(\beta)) = L(\alpha)L(\beta)$ ;
- 3)  $(\beta)^*$  — регулярное выражение;  $L((\beta)^*) = (L(\beta))^*$ ;

Никаких других регулярных выражений, кроме тех, что построены в соответствии с описанным определением, нет.

### Определение регулярного множества

- **Опр.** Пусть  $\Sigma$  — конечный алфавит. Регулярное множество в алфавите  $\Sigma$  определяется следующим образом:
  - 1)  $\emptyset$  — регулярное множество в алфавите  $\Sigma$ .
  - 2)  $\{a\}$  — регулярное множество в алфавите  $\Sigma$ .
  - 3)  $\{a\}$  — регулярное множество в алфавите  $\Sigma$  для каждого  $a \in \Sigma$ .
  - 4) Если  $Q$  и  $P$  — регулярные множества в алфавите  $\Sigma$ , то множества  $Q \cup P$ ,  $QP$  и  $P^*$  регулярные.
  - 5) Ничто другое не является регулярным множеством в алфавите  $\Sigma$ .

## Алгебраические законы для регулярных выражений

- Объединение и конкатенация ведут себя как сложение и умножение.
- $+$  является коммутативным и ассоциативным;
- Конкатенация является ассоциативной операцией.
- Конкатенация распределяется по  $+$ .
- Исключение: Конкатенация не коммутативна.

### Дополнительная информация

Лемма 1. Если  $\alpha, \beta, \gamma$  - регулярные выражения, то справедливы следующие соотношения:

1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$	7) $\emptyset^* = \varepsilon$
2) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	8) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$
3) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$	9) $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$
4) $\alpha\varepsilon = \varepsilon\alpha = \alpha$	10) $\emptyset\alpha = \alpha\emptyset = \emptyset$
5) $\alpha^* = \alpha + \alpha^*$	11) $(\alpha^*)^* = \alpha^*$
6) $\alpha + \alpha = \alpha$	12) $\alpha + \emptyset = \alpha$

- $\emptyset$  является нейтральным элементом для  $+$ .  
 $R + \emptyset = R$ .
- $\varepsilon$  является «единицей» для конкатенации.  
 $\varepsilon R = R\varepsilon = R$ .
- $\emptyset$  является «нулем» для конкатенации.  
 $\emptyset R = R\emptyset = \emptyset$ .

## 18 Билет 18

### Уравнения с регулярными коэффициентами

- Рассм. уравнение  $X=aX+b$ , где  $a$  и  $b$  – РВ.

$X=a^*b$  – решение уравнения:

$$a^*b=aa^*b+b$$

$$a^*b=(aa^*+\varepsilon)b$$

$$a^*b=a^*b$$

Если множество, определяемое рег. выражением  $a$ , содержит  $\varepsilon$ , то ур-е имеет бесконечно много решений:  $X=a^*(b+c)$  для любого РВ  $c$ .

В этом случае берут «наименьшее решение» – *наименьшую неподвижную точку*.

### Алгоритм решения стандартной системы уравнений с регулярными коэффициентами

- Вход. Стандартная система  $Q$  уравнений с рег. коэффициентами в алфавите  $\Sigma$  и множеством неизвестных  $\Delta = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ .
- Выход. Решение системы  $Q$  в виде  $X_1 = a_1, X_2 = a_2, \dots, X_n = a_n$ , где  $a_i$  – РВ в алфавите  $\Sigma$ .

- Метод. (см. решение СЛУ методом Гаусса)

Шаг 1.  $i=1$ .

Шаг 2. Если  $i=n$ , перейти к шагу 4.

Иначе, с помощью тождеств РВ записать ур-е для  $X_i$  в виде  $X_i = \alpha X_i + \beta$ , где  $\alpha$  – РВ в алфавите  $\Sigma$ , а  $\beta$  – РВ вида  $\beta_0 + \beta_1 X_{i+1} + \dots + \beta_n X_n$ ;  $\beta_i$  – РВ в алфавите  $\Sigma$ .

Затем, в правых частях уравнений для  $X_{i+1}, \dots, X_n$  заменить  $X_i$  выражением  $\alpha^*\beta$ .

Шаг 3.  $i=i+1$ . Перейти к шагу 2.

Шаг 4. Записать ур-е для  $X_n$  в виде  $X_n = \alpha X_n + \beta$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  – РВ в алфавите  $\Sigma$ .

Перейти к шагу 5 ( $i = n$ ).

Шаг 5. Уравнение для  $X_i$  имеет вид  $X_i = \alpha X_i + \beta$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  – РВ в алфавите  $\Sigma$ .

Записать на выходе  $X_i = \alpha^*\beta$  и в ур-е для  $X_{i-1}, \dots, X_1$  подставить  $\alpha^*\beta$  вместо  $X_i$ .

Шаг 6. Если  $i=1$ , остановиться. В противном случае  $i=i-1$  и вернуться к шагу 5.

### Дополнительная информация

- Опр. Система уравнений с рег. коэффициентами наз. *стандартной системой* с мн-вом неизвестных  $\Delta = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ , если она имеет вид:

$$X_1 = a_{10}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n$$

$$X_n = a_{n0}X_1 + a_{n2}X_2 + \cdots + a_{nn}X_n$$

где все  $a_{ij}$  - регулярные выражения в алфавите, не пересекающимся с  $\Delta$ .

Если  $a_{ij} = \emptyset$ , то соотв. слагаемое отсутствует, если  $a_{ij} = \varepsilon$ , то слагаемое равно  $X_j$ .

19 Билет 19

- Язык определяется праволинейной грамматикой т.и.т.т., когда он является регулярным множеством.
  - Лемма 3. Множества  $\emptyset$ ,  $\{\varepsilon\}$  и  $a$  для всех  $a \in \Sigma$  являются праволинейными языками.
  - Док-во.
    - 1)  $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$  – праволинейная грамматика, для которой  $L(G) = \emptyset$ .
    - 2)  $G = (\{S\}, \Sigma, \{S \rightarrow \varepsilon\}, S)$  – праволинейная грамматика, для которой  $L(G) = \{\varepsilon\}$ .
    - 3)  $G_a = (\{S\}, \Sigma, \{S \rightarrow a\}, S)$  – праволинейная грамматика, для которой  $L(G_a) = \{a\}$ .
  - Лемма 4. Если  $P$  и  $Q$  – праволинейные языки, то языки
    - 1)  $P \cup Q$ ,
    - 2)  $PQ$ ,
    - 3)  $P^*$  тоже праволинейные.

Т.к.  $P$  и  $Q$  – праволинейные, то  $\exists$  праволинейные грамматики  
 $G_P = (N_1, \Sigma, P_1, S_1)$  и  $G_Q = (N_2, \Sigma, P_2, S_2)$ , для которых  
 $L(G_P) = P$  и  $L(G_Q) = Q$ . Считаем, что  $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ .

1)  $G_3 = (N_1 \cup N_2, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S_3 \rightarrow S_1|S_2\}, S_3)$  – праволинейная.  
 $L(G_3) = L(G_P) \cup L(G_Q)$  т.к. для каждого вывода  $S_3 \Rightarrow_{G_3}^+ w$  существует  
либо вывод  $S_1 \Rightarrow_{G_P}^+ w$ , либо вывод  $S_2 \Rightarrow_{G_Q}^+ w$  и обратно.

Т.к.  $G_3$  – праволинейная грамматика, то  $L(G_3)$  – праволинейный

2)  $G_4 = (N_1 \cup N_2, \Sigma, P_4, S_1)$  – праволинейная.

$P_4$ : (1) Если  $A \rightarrow xB$  есть в  $P_1$ , то  $A \rightarrow xB$  принадлежит  $P_4$ .

(2) Если  $A \rightarrow x$  есть в  $P_1$ , то  $A \rightarrow xS_2$  принадлежит  $P_4$ .

(3) Все правила из  $P_2$  принадлежат  $P_4$ .

Отметим, что если  $S_1 \Rightarrow_{G_P}^+ w$ , то  $S_1 \Rightarrow_{G_4}^+ wS_2$ , а если  $S_2 \Rightarrow_{G_Q}^+ x$ , то  $S_2 \Rightarrow_{G_4}^+ x$ .

Таким образом,  $L(G_P)L(G_Q) \subseteq L(G_4)$ .

Пусть  $S_1 \Rightarrow_{G_4}^+ w$ . Т.к. в  $G_4$  нет правил  $A \rightarrow x$ , попавших из  $P_1$ , то этот вывод можно сделать так:  $S_1 \Rightarrow_{G_4}^+ xS_2 \Rightarrow_{G_4}^+ xy$ , где  $w = xy$  и все правила в выводе  $S_1 \Rightarrow_{G_4}^+ wS_2$  попали в  $P_4$  по (1) и (2).

Следовательно, должны быть выводы  $S_1 \Rightarrow_{G_P}^+ x$  и  $S_2 \Rightarrow_{G_Q}^+ y$ .

Отсюда  $L(G_4) \subseteq L(G_P)L(G_Q)$ .

3) Пусть  $G_5 = (N_1 \cup \{S_5\}, \Sigma, P_5, S_5)$  такая, что  $S_5 \notin N_1$  и

$P_5$ : (1) Если  $A \rightarrow xB$  есть в  $P_1$ , то  $A \rightarrow xB$  принадлежит  $P_5$ .

(2) Если  $A \rightarrow x$  есть в  $P_1$ , то  $A \rightarrow xS_5$  и  $A \rightarrow x$  принадлежат  $P_5$ .

(3)  $S_5 \rightarrow S_1|\varepsilon$  принадлежат  $P_5$ .

Очевидно, что

$S_5 \Rightarrow_{G_5}^+ x_1 S_5 \Rightarrow_{G_5}^+ x_1 x_2 S_5 \Rightarrow_{G_5}^+ \dots \Rightarrow_{G_5}^+ x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n$

т.и.т.т., когда

$S_1 \Rightarrow_{G_P}^+ x_1, S_1 \Rightarrow_{G_P}^+ x_2, \dots, S_1 \Rightarrow_{G_P}^+ x_n$ .

Отсюда следует, что  $L(G_4) = (L(G_P))^*$ . ■

- Теорема. Язык является регулярным множеством т.и.т.т., когда он праволинейный.

- Док-во.

#### Необходимость.

Следует из лемм 3 и 4, индукцией по числу шагов построения регулярного множества, где один шаг – это применение одного из правил, определяющих регулярные множества.

#### Достаточность.

Пусть  $G = (N, \Sigma, P, S)$  – праволинейная грамматика и  $N = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ .

Можно построить стандартную систему уравнений с регулярными коэффициентами, неизвестными которой являются нетерминалы из  $N$ .

Уравнение для  $A_i$  будет иметь вид:  $A_i = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}A_1 + \dots + \alpha_{in}A_n$ , где

(1)  $\alpha_{i0} = w_1 + \dots + w_k$ , если  $A_i \rightarrow w_1| \dots |w_k$  – все правила с левой частью  $A_i$  и правой частью, состоящей только из терминалов (если  $k=0$ , то  $\alpha_{i0} = \emptyset$ ).

(2) Для  $j > 0$   $\alpha_{ij} = x_1 + \dots + x_m$ , если  $A_i \rightarrow x_1 A_j | \dots | x_m A_j$  – все правила с левой частью  $A_i$  и правой частью, оканчивающейся на  $A_j$  (если  $m=0$ , то  $\alpha_{ij} = \emptyset$ ).

Решая эту систему уравнений получаем решение  $f$  для  $N = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ .

Для  $S$  получаем РВ  $f(S)$ , которое определяет язык  $L(G)$ .

Но алгоритм строит  $f(S)$  как язык, обозначаемый некоторым РВ.

Таким образом,  $L(G)$  – регулярное множество.

## 20 Билет 20

- Класс регулярных множеств – наименьший класс языков, содержащий  $\emptyset$ ,  $\{\epsilon\}$ ,  $\{a\}$  для всех  $a$  и замкнутый относительно операций объединения, конкатенации и итерации.
- Регулярное множества – множества, определяемые регулярными выражениями.
- Регулярные множества – языки, порождаемые праволинейными грамматиками.
- Регулярные множества – языки, распознаваемые конечными автоматами.

### Допустимые входы

- Данна последовательность входов (*входная строка*).
- Начать в начальном состоянии и следовать по переходу по каждому очередному символу входной строки.
- Вход *принимается*, если вы перенеслись в финальное (принимающее) состояние после чтения всех входных символов.

### Детерминированный конечный автомат

- Формализм для определения языков, состоящий из:
  - Конечного множества *состояний* (обозн. обычно  $Q$ ).
  - Входной алфавит* ( $\Sigma$ , обычно).
  - Функция переходов* ( $\delta$ , обычно).
  - Начальное состояние* ( $q_0$ , в  $Q$ , обычно).
  - Финальные состояния* ( $F \subseteq Q$ , обычно).
- “Финальный” и “принимающий” являются синонимами.
$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$
$$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$$

## Функция переходов

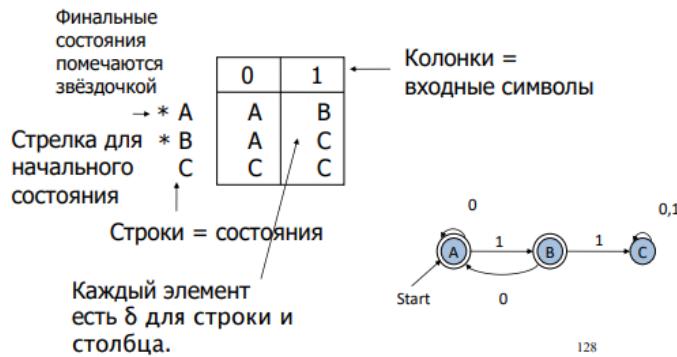
- Имеет два аргумента: состояние и входной символ.
- $\delta(q, a)$  = состояние, в которое КДА переходит, если он в состоянии  $q$  получает на вход символ  $a$ .
- **Замечание:** всегда есть следующее состояние – добавим **мёртвое состояние** если нет переходов (Пример далее).
- Форма задания: таблица переходов, граф.
- Функцию переходов можно доопределить для слов:  
 $\delta^*(q, a) = \delta(q, a)$  если  $|a|=1$ .  
 $\delta^*(q, aw) = \delta(\delta^*(q, w), a)$

## Представление КДА графом

- Вершины = состояния.
- Дуги представляют функцию переходов.
  - Дуга из состояния  $p$  в состояние  $q$  помечается всеми теми входными символами, по которым происходит переход из  $p$  в  $q$ .
- Стрелка помеченная как “Start” указывает на начальное состояние.
- Финальные состояния обозначаются двойной окружностью.

122

## Альтернативное представление: Таблица переходов



## Язык КДА

- Автоматы всех видов определяют языки.
- Если  $A$  - автомат,  $L(A)$  – его язык.
- Для КДА  $A$ ,  $L(A)$  есть множество строк, помечающих пути из начального состояния в финальное.
- **Формально:**  $L(A) = \text{множество строк } w \text{ таких, что } \delta(q_0, w) \text{ есть в } F.$

## Формальное определение НКА

- Конечное множество состояний, обычно  $Q$ .
- Входной алфавит, обычно  $\Sigma$ .
- Функция переходов, обычно  $\delta$ .
- Начальное состояние в  $Q$ , обычно  $q_0$ .
- Множество конечных состояний  $F \subseteq Q$ .

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

$$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$$

## Язык НКА

- Стока  $w$  принимается НКА если  $\delta(q_0, w)$  содержит, по крайней мере, одно финальное состояние.
- Язык НКА – это множество всех принимаемых строк.

## НКА с $\epsilon$ -переходами

- Мы можем допустить переходы между состояниями по входу  $\epsilon$ .
- Эти переходы происходят спонтанно, без оглядки на входную строку.
- Иногда это удобно, но принимаются те же регулярные языки, что принимаются КДА и НКА.

## Заключение

- Теорема. КДА, НКА, и  $\epsilon$ -НКА все принимают в точности одно и то же множество языков: регулярные языки.
- По этой причине эти языки ещё называют **автоматными**.
- Типы НКА проще строить и они могут иметь экспоненциально меньше состояний, чем КДА.
- Но только КДА может быть реализован!

## 21 Билет 21

- Лемма. Если  $L=L(A)$  для некоторого конечного автомата  $A$ , то  $L=L(G)$  для некоторой праволинейной грамматики  $G$ .
- Док-во. Пусть  $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  – КДА. Определим грамматику  $G = (Q, \Sigma, P, q_0)$ , где  $P$  имеет вид:
  - Если  $\delta(q, a) = r$ , то  $P$  содержит правило  $q \rightarrow ar$ .
  - Если  $r \in F$ , то  $P$  содержит правило  $r \rightarrow \epsilon$ .Каждый шаг вывода в грамматике  $G$  имитирует торт работы автомата  $A$ .
- Индукция по  $i$  – длине вывода.

Базис.  $i=0$ .  $q \Rightarrow \epsilon$  т.и.т.т., когда  $(q, \epsilon) \vdash^0 (q, \epsilon)$ .

Из:  $s \Rightarrow^i x$  т.и.т.т., когда  $(s, x) \vdash^{i-1} (r, \epsilon)$  для некоторого  $r \in F$ .

Шаг индукции. Пусть  $w = ax$ , где  $|x| = i$ .

Тогда  $q \Rightarrow^{i+1} w$  равносильно тому, что  $q \Rightarrow as \Rightarrow^i ax$  для некоторого  $s$ .

Но  $q \Rightarrow as$  равносильно  $\delta(q, a) = s$  или  $(q, a) \vdash^1 (s, \epsilon)$ .

Это означает, что  $(q, ax) \vdash^1 (s, x)$ .

По индукции  $s \Rightarrow^i x$  т.и.т.т., когда  $(s, x) \vdash^{i-1} (r, \epsilon)$  для некоторого  $r \in F$ .

Следовательно,  $q \Rightarrow^{i+1} w$  равносильно  $(q, ax) \vdash^1 (s, x) \vdash^{i-1} (r, \epsilon)$  или

$(q, w) \vdash^i (r, \epsilon)$  для некоторого  $r \in F$ .

Ч. т. д.

- Лемма. Если  $L=L(G)$  для некоторой праволинейной грамматики  $G$ , то  $L=L(A)$  для некоторого конечного автомата  $A$ .
- Док-во. Пусть  $G = (Q, \Sigma, P, S)$  – праволинейная грамматика.  
Построим автомат  $A = (N \cup \{q_f\}, \Sigma, \delta, S, F)$ , где  $\delta$  определено как:

Если  $A \rightarrow aB \in P$ , то  $\delta(A, a) = B$  для  $A, B \in N$  и  $a \in \Sigma$ .

Если  $A \rightarrow a \in P$ , то  $\delta(A, a) = q_f$  для  $A \in N$  и  $a \in \Sigma$ .

$F = \{S, q_f\}$ , если в  $P$  есть  $S \rightarrow \varepsilon$  и  $F = \{q_f\}$  – в противном случае.

Очевидно, что построенный автомат определяет тот же язык, что и исходная праволинейная грамматика.

## 22 Свойства регулярных языков. Свойства замкнутости. Разрешимые свойства.

### Свойства замкнутости для регулярных языков

- Замкнутость класса регулярных языков относительно регулярных операций
- Замкнутость по дополнению
- Замкнутость по пересечению
- Замкнутость по вычитанию
- Замкнутость по обращению (слов)
- Замкнутость по гомоморфизму
- Замкнутость по обратному гомоморфизму

### Разрешимые свойства для регулярных языков - ИТОГИ

- **Следующие проблемы разрешимы для регулярный языков:**
  - Проблема принадлежности языку:  $w \in L?$
  - Проблема пустоты:  $L=\emptyset?$
  - Проблема эквивалентности:  $L = M?$
  - Проблема вложения языков:  $L \subseteq M?$
  - Проблема бесконечности языка:  $|L| = \infty?$

## 23 Билет 23

Пусть  $L$  — регулярный язык, заданный автоматом  $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  — КДА.

$$w \in L \Leftrightarrow \delta(q_0, w) \in F$$

- Таким образом, проблема принадлежности произвольной строки (над определенным алфавитом) регулярному языку разрешима.

## 24 Билет 24

### Проблема пустоты

- Для данного регулярного языка определить, содержит ли он хотя бы одну строку ?
- Пусть представлением языка является КДА.
- Вычислим множество состояний, достижимых из начального.
- Если хотя бы одно из конечных состояний достижимо, то ответ “да”, иначе - “нет”.
- *Проблема пустоты для регулярных языков разрешима.*

## 25 Билет 25

### Проблема бесконечности

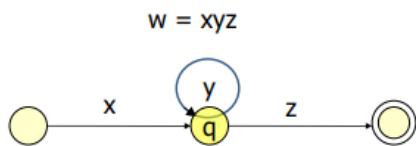
- Является данный регулярный язык бесконечным?
- Рассмотрим КДА для языка.
- **Ключевая идея:** если КДА имеет  $n$  состояний и язык содержит какую либо строку длины  $n$  или более, то язык бесконечный.
- В противном случае, язык, безусловно, конечный.
  - Можно ограничиться строками длины  $n$  или меньше.

## 26 Билет 26

### Доказательство **ключевой идеи**

- Если КДА с  $n$  состояниями принимает строку  $w$  длины  $n$  или более, то должно быть состояние, в котором он окажется дважды на пути, помеченном  $w$  от начального состояния к конечному.
- Потому что существует, по крайней мере,  $n+1$  состояний вдоль всего пути.

### Доказательство – (2)



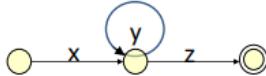
Тогда  $xy^iz$  является языком для всех  $i \geq 0$ .

Т.к.  $y$  не есть  $\epsilon$ , мы имеем бесконечное число строк в  $L$ .

### Бесконечность – продолжение

- Пока мы не имеем алгоритма.
- Существует бесконечное число строк длины  $> n$ , и мы не можем проверить их все.
- **Вторая ключевая идея:** если существует строка длины  $\geq n$  ( $n =$  числу состояний) в  $L$ , то в  $L$  существует строка длины между  $n$  и  $2n-1$ .

## Доказательство 2-ой ключевой идеи



□ Вспомним:

- $y$  - это первый цикл в пути.
- Тогда:  $|xy| \leq n$ ; в частности,  $1 \leq |y| \leq n$ .
- То есть, одно состояние среди первых  $n+1$  повторяется.
- Т.о., если  $w$  имеет длину  $2n$  или более, то существует более короткая строка в  $L$ , которая имеет длину, по крайней мере,  $n$ .
- Продолжим сокращение длины путём удаления циклов, пока не достигнем длины в интервале  $[n, 2n-1]$ .

## Завершение доказательства алгоритма

- Для доказательства бесконечности регулярного языка построим для него КДА. Пусть он имеет  $n$  состояний
- Протестируем на принадлежность языку всех строк длины между  $n$  и  $2n-1$ .
  - Если какая-либо из них принимается, то язык бесконечен, иначе – конечен.
- Ужасный алгоритм. Если мы имеем  $k$  входных символов и  $n$  состояний, то число строк для проверки составит  $k^{2n}$ .
- **Лучше**: найти циклы между начальным и конечным состояниями. Для этого есть алгоритм сложности порядка  $kn$ .

## ПОИСК ЦИКЛОВ

1. Исключим состояния, недостижимые из начального состояния.
2. Устраним состояния, из которых не достигаются конечные состояния.
3. Проверим наличие циклов в оставшемся графе переходов.

## Поиск циклов – (2)

- Простым, но менее эффективным способом поиска циклов является поиск вперед от заданного узла  $N$ .
- Если из  $N$  можно достичь  $N$ , то цикл есть.
- Сделайте это, начиная с каждого узла.
- Если есть цикл, то язык для данного КДА бесконечный.  
Если циклов нет, то конечный.
- *Проблема бесконечности регулярного языка разрешима.*

## 27 Лемма о накачке для регулярных языков

**Лемма.** Для каждого регулярного языка  $L$  существует целое  $n$ , такое, что

Число состояний КДА для  $L$

для каждой строки  $w$  из  $L$  длины  $\geq n$

мы можем записать ее как  $w = xyz$  так, что:

Метки вдоль первого цикла пути, помеченного  $w$

1.  $|xy| \leq n$ .
2.  $|y| > 0$ .
3. Для всех  $i \geq 0$ ,  $xy^iz$  также принадлежит  $L$ .

## 28 Эквивалентность регулярных языков

### Проблема: Эквивалентность

- По данным регулярным языкам  $L$  и  $M$  определить  $L = M$ ?
- Алгоритм доказательства существования разрешающей процедуры базируется на построении КДА - *произведения* автоматов для  $L$  и  $M$ .

### Алгоритм установления эквивалентности

- Заключительные состояния автомата-произведения - те состояний  $[q, r]$ , в которых точно одно из  $q$  и  $r$  есть финальное состояние соответствующего автомата.
- Т.о., автомат-произведение принимает  $w$  т.и.т.т., когда  $w$  в точности принадлежит языку для одного из  $L$  или  $M$ .
- $L = M$  тогда и только тогда, когда язык для автомата произведения пуст.

Таким образом, эта проблема для регулярных языков разрешима.

## 29 Построение произведения автоматов $L$ и $M$

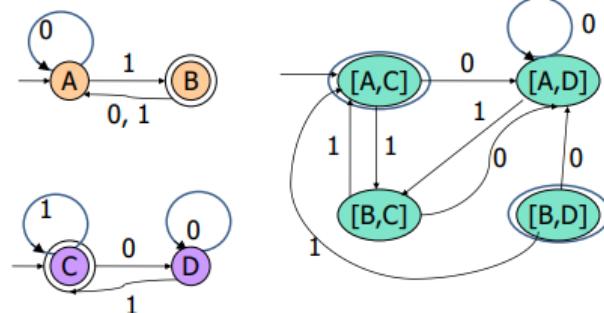
### Построение произведения автоматов $L$ и $M$

- Пусть КДА  $L$  и  $M$  имеют множества состояний  $Q$  и  $R$ , соответственно.
- $L = (Q, \Sigma, \delta_L, q_0, F_L)$ ,  $M = (R, \Sigma, \delta_M, r_0, F_R)$
- Автомат-произведение имеет множество состояний  $Q \times R$ .
  - т.е., пары  $[q, r]$ , где  $q \in Q, r \in R$ .
- Начальное состояние =  $[q_0, r_0]$  (начальные состояния КДА для  $L, M$ ).

## Произведение автоматов – прод.

- **Переходы:**  $\delta([q,r], a) = [\delta_L(q,a), \delta_M(r,a)]$
- $\delta_L, \delta_M$  функции переходов для КДА  $L$  и  $M$ .
- То есть, мы моделируем исходные КДА в компонентах двух состояний автомата-произведения.
- Определим заключительные состояния автомата - произведения из тех состояний  $[q, r]$ , в которых точно одно из  $q$  и  $r$  есть финальное состояние соответствующего автомата.

### Пример: Произведение автоматов



## 30 Проблема вложения регулярных языков

### Проблема вложения языков

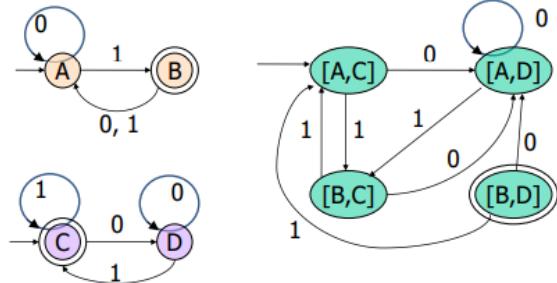
- По данным регулярным языкам  $L$  и  $M$  определить,  $L \subseteq M$ ?
- Алгоритм также использует конструкцию произведения автоматов.
- Как нужно определить финальное состояние  $[q, r]$  автомата-произведения, чтобы его язык был пуст т.и.т.т., когда  $L \subseteq M$ ?

**Ответ:**  $q$  - финальное;  $r$  - нет .

- То есть,  $L$  не содержится в  $M$  т.и.т.т., когда существует некоторая строка  $w$  такая, что  $w \in L$  но  $w \notin M$ . Такая строка могла бы перевести КДА для  $L$  в финальное состояние, но не смогла бы перевести КДА для  $M$  в финальное состояние.
- Так что вопрос вложения – это тот же самый вопрос о существовании строки, переводящей автомат-произведение в состояние  $[q,r]$  где  $q$  –заключительное,  $r$  - нет.

Таким образом, эта проблема для регулярных языков разрешима.

**Пример:** вложение языков



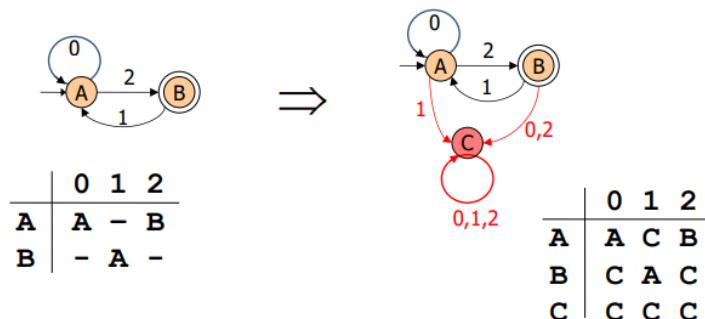
Замечание: только одно финальное состояние недостижимо, язык для автомата произведения пуст, т.о. вложение выполняется.

### 31 Минимальный КДА для регулярных языков. Эффективная минимизация числа состояний.

Минимальный КДА для регулярных языков

- В принципе, т.к. мы можем протестировать КДА на эквивалентность, то мы можем по данному КДА  $A$  найти КДА с наименьшим числом состояний принимающий  $L(A)$ .
- Можно проверить все КДА на эквивалентность с  $A$ .
- Но этот алгоритм, конечно, никуда не годится.

Доопределение КДА до полного



## Эффективная минимизация числа состояний

- Построим таблицу со всеми парами состояний.
- Если мы найдем строку, которая *различает* два состояния (переводит точно одно состояние из двух в заключительное), то пометим эту пару.
- В противном случае состояния в паре будут *неразличимыми*, и они могут быть объединены в одно состояние.
- Алгоритм является рекурсивным по длине кратчайших различающих строк.

## Минимизация числа состояний – (2)

- **Базис:** Пометим пары с точно одним финальным состоянием.
- **Индукция:** пометим  $[q, r]$ , если для некоторого входного символа  $a$ ,  $[\delta(q, a), \delta(r, a)]$  является помеченной.
- После того, как больше нельзя пометить ни одно состояние, непомеченные пары состояний объявляем эквивалентными и объединяем в одно состояние.

## Транзитивность “Неразличимости”

- Если состояние  $p$  неразличимо от  $q$ , и  $q$  неразличимо от  $r$ , то  $p$  неразличимо от  $r$ .
- **Доказательство:** Результат (принятие или нет) входа  $w$  для  $p$  и  $q$  будет один и тот же, и результат для  $q$  и  $r$  на  $w$  тот же, тогда аналогичный результат будет для  $p$  и  $r$ .

## Построение минимального КДА

- Предположим, что  $q_1, \dots, q_k$  - неразличимые состояния.
- Заменим их одним их *представляющим* состоянием  $q$ .
- Тогда  $\delta(q_1, a), \dots, \delta(q_k, a)$  есть все неразличимые состояния.
- **NB!**: в противном случае, нам следовало бы пометить по крайней мере на одну пару состояний больше.
- Пусть  $\delta(q, a) = \text{состояние - представитель для этой группы.}$

**Пример:** минимизация числа состояний



Начнём с пометки пар с одним из заключительных состояний F или G.

**Пример – продолжение**

	r	b	
→	A	B	C
	B	D	E
	C	D	F
	D	D	G
	E	D	G
	*F	D	C
	*G	D	G

	G	F	E	D	C	B
A	x	x				
B	x	x				
C	x	x				
D	x	x				
E	x	x				
F						

Вход r бесполезен,  
т.к. пара [B, D]  
непомечена.

## Пример – продолжение

	r	b
A	B	C
B	D	E
C	D	F
D	D	G
E	D	G
*	F	D
*	G	D

	G	F	E	D	C	B
A	x	x	x	x	x	
B	x	x	x	x	x	
C	x	x				
D	x	x				
E	x	x				
F	x					

Но вход b различает состояния из {A,B,F}  
от состояний из {C,D,E,G}. Например, [A, C]  
помечается, т.к. [C, F] помечено.

## Пример – продолжение

	r	b
A	B	C
B	D	E
C	D	F
D	D	G
E	D	G
*	F	D
*	G	D

	G	F	E	D	C	B
A	x	x	x	x	x	
B	x	x	x	x	x	
C	x	x	x	x	x	
D	x	x				
E	x	x				
F	x					

[C, D] и [C, E] помечаются,  
т.к. есть переход по b в  
Помеченную пару [F, G].

## Пример – продолжение

	r	b		G	F	E	D	C	B	
→	A	B	C	A	x	x	x	x	x	x
	B	D	E	B	x	x	x	x	x	x
	C	D	F	C	x	x	x	x		
	D	D	G	D	x	x				
	E	D	G	E	x	x				
	*	F	D	C	F	x				
	*	G	D	G						

[A, B] помечается, т.к.  
имеются переходы по г  
в помеченную пару [B, D].

[D, E] никогда не будут  
помечены, т.к. по обоим  
входам они переходят в  
одно и то же состояние.

## Пример – заключение

	r	b		r	b		G	F	E	D	C	B	
→	A	B	C	A	B	C	A	x	x	x	x	x	x
	B	D	E	B	H	H	B	x	x	x	x	x	x
	C	D	F	C	H	F	C	x	x	x	x		
	D	D	G	H	H	G	D	x	x				
	E	D	G				E	x	x				
	*	F	D	C	*	F	H	C					
	*	G	D	G	*	G	H	G					

Заменим D и E на H.  
Результат – КДА с минимальным  
числом состояний.

## Удаление недостижимых состояний

- К сожалению, комбинирование неразличимых состояний может оставить нас с недостижимыми состояниями в минимальном КДА.
- Таким образом, до или после, нужно удалить состояния, которые недостижимы из начального состояния.

## Удаление недостижимых состояний

- **Опр.** Состояние  $q$  конечного автомата  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  называется недостижимым, если не найдется цепочки  $\alpha \in \Sigma^*$ , приводящей автомат из начального состояния  $q_0$  в состояние  $q$ .  
Т.е.,  $\nexists \alpha \in \Sigma^*: \delta(q_0, \alpha) = q$

## 32 Теорема о минимальном автомате.

- **Теорема.** (О минимальном автомате)
  - Для любого КДА автомата  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  найдется эквивалентный КДА  $A = (Q, \Sigma, \delta, F)$  без неразличимых состояний, допускающий тот же язык. Причём, если  $M$  –автомат без недостижимых состояний, то не существует КДА, допускающего  $L(M)$  и имеющего состояний меньше, чем у автомата  $A$ .

## Доказательство: Нет другого «меньшего» автомата

- Пусть А – наш минимизированный КДА; пусть В – его «меньший» эквивалент.
- Предположим, что А эквивалентен В.
- Рассмотрим объединённый комбинированный автомат с состояниями из А и В (неважно какое состояние начальное, но заключительные состояния – это те, что были в А и В).
- Используем “различимость” в ее контрапозитивной форме:
  - То есть, если  $w$  различает  $\delta(q, a)$  от  $\delta(p, a)$ , то, конечно,  $aw$  различает  $q$  от  $p$ .
  - Таким образом, если состояния  $q$  и  $p$  **неразличимы**, то их последователи по некоторому  $a$ :  $\delta(q, a)$  и  $\delta(p, a)$  – также неразличимы.

## Наследование неразличимости



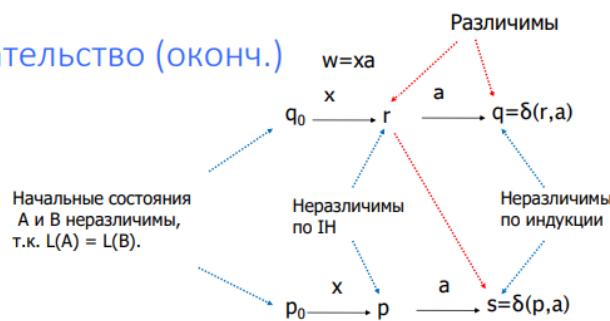
## Индуктивная гипотеза

- Каждое состояние  $q$  автомата А неразличимо с некоторым состоянием автомата В.
- Индукция проводится по длине кратчайшей строки, переводящей начальное состояние автомата А в  $q$ .

## Доказательство

- **Базис:** Начальные состояния А и В неразличимы, т.к.  $L(A) = L(B)$ .
- **IH:** Пусть строка длины  $n < |w|$  переводит А в некоторое состояние  $r$ , которое неразличимо с некоторым состоянием  $p$  автомата В.
- **Индукция:** Предположим, что  $w = xa$  есть кратчайшая строка, переводящая автомат А в состояние  $q$ .
- Согласно IH, строка  $x$  переводит А в некоторое состояние  $r$ , которое неразличимо с некоторым состоянием  $p$  автомата В.
- Тогда  $\delta_A(r, a) = q$  неразличимо с  $\delta_B(p, a)$ .

## Доказательство (оконч.)



- Однако, два состояния автомата А не могут быть неразличимы с тем же состоянием в В, или они были бы неразличимы одно от другого.
  - Это нарушает транзитивность "неразличимости."
- Таким образом, В имеет, по крайней мере, столько же состояний, что и А.

### 33 Замкнутость класса регулярных языков относительно регулярных операций.

Замкнутость класса регулярных языков относительно регулярных операций

- **Теорема.** Класс леволинейных языков замкнут относительно регулярных операций.

#### • Док-во.

Пусть  $L$  и  $L'$  - леволинейные языки, определенные с помощью грамматик  $G = (N, \Sigma, P, S)$  и  $G' = (N', \Sigma', P', S')$  соответственно.

Пусть  $N \cap N' = \emptyset$

1. Язык  $L \cup L'$  определяется грамматикой

$$G_1 = (N \cup N' \cup \{S_0\}, \Sigma \cup \Sigma', P \cup P' \cup \{S_0 \rightarrow S, S_0 \rightarrow S'\}, S_0)$$

#### Док-во, прод.

2. Заменим в  $P'$  правила вида  $A \rightarrow \alpha$ , где  $A \in N'$ ,  $\alpha \in \Sigma'^*$  на правила  $A \rightarrow S\alpha$ . Полученное множество правил обозн. через  $P_1$ .

Грамматика  $G_2 = (N \cup N', \Sigma \cup \Sigma', P \cup P_1, S')$  порождает язык  $LL'$ .

Если  $\beta \in L'$ , то  $S' \Rightarrow_{G_2} \beta$ . Но тогда  $S' \Rightarrow_{G_2} S\beta$ .

Таким образом,  $\forall \alpha \in L \quad S' \Rightarrow_{G_2} S\beta \Rightarrow_{G_2} \alpha\beta$ . Все конкатенации из  $LL'$  можно вывести в  $G_2$  из  $S'$ .

Никакие другие слова вывести из  $S'$  нельзя.

#### Док-во, финал

3. Заменим в  $P'$  правила вида  $A \rightarrow \alpha$ , на  $A \rightarrow S'\alpha$ .

Тогда грамматика  $G_3 = (N' \cup \{S_0\}, \Sigma', P' \cup \{S_0 \rightarrow \varepsilon, S_0 \rightarrow S'\}, S_0)$  порождает язык  $L'^*$ .

В  $G_3$  возможны выводы:

$$\begin{aligned} S_0 &\Rightarrow_{G_3} \varepsilon \\ S_0 &\Rightarrow_{G_3} S' \\ S_0 &\Rightarrow_{G_3}^* \alpha \quad \forall \alpha \in L' \\ S_0 &\Rightarrow_{G_3}^* S'\alpha \quad \forall \alpha \in L' \end{aligned}$$

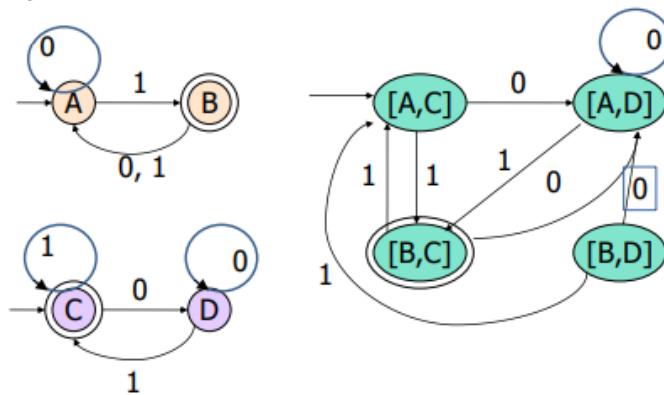
Следовательно, из  $S_0$  можно вывести любое слово составленное из слов языка  $L'$ , т.е.  $L(G_3) = L'^*$

### 34 Замыкание класса регулярных языков по пересечению.

#### Замыкание по пересечению

- **Теорема.** Если  $L$  и  $M$  – регулярные языки, то таковым будет язык  $L \cap M$ .
- **Доказательство:** Пусть  $A$  и  $B$  – КДА, определяющие языки  $L$  и  $M$ , соответственно.
- Построим автомат  $C$  – произведение автоматов  $A$  и  $B$ .
- Сделаем финальными состояниями  $C$  пары, состоящие из финальных состояний  $A$  и  $B$ .

**Пример:** КДА-произведение для пересечения



### 35 Использование свойства замыкания пересечения регулярных языков.

**Пример:** Использование свойства замыкания пересечения

- Мы доказали с использованием леммы о накачке, что  $L_1 = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$  - не регулярный язык.
- $L_2$  = множество строк с равным числом 0 и 1 тоже не РЯ, но этот факт трудно доказать напрямую.
- Предположим, что  $L_2$  – регулярный язык.
- Регулярные языки замкнуты относительно  $\cap$ .
- Если  $L_2$  регулярный, то  $L_2 \cap L(0^* 1^*) = L_1$  тоже должен быть регулярным, но мы уже установили, что это не так.

### 36 Замыкание класса регулярных языков по вычитанию.

**Замыкание по вычитанию**

- **Теорема.** Если  $L$  и  $M$  – регулярные языки, то таким является язык  $L - M$  (строки из  $L$ , но не из  $M$ ).
- **Доказательство:** Пусть  $A$  и  $B$  - КДА, языками которых являются  $L$  и  $M$  соответственно.
- Построим автомат  $C$  – произведение автоматов  $A$  и  $B$ .
- Сделаем финальными состояниями автомата  $C$  пары, которые состоят из финальных состояний  $A$  и нефинальных  $B$ .
- Автомат  $C$  допускает точно строки из  $L - M$ .
- Следовательно,  $L - M$  – регулярный язык.

### 37 Замыкание класса регулярных языков по дополнению.

#### Замыкание по дополнению

- **Дополнением** языка  $L$  (по отношению к алфавиту  $\Sigma$ , так что  $\Sigma^*$  содержит  $L$ ) является язык  $\Sigma^* - L$ .
- Так как  $\Sigma^*$  очевидно регулярный и регулярные языки замкнуты по операции вычитания, дополнение регулярного языка всегда будет регулярным языком.

### 38 Замыкание класса регулярных языков по обращению

#### Замыкание по обращению

- Пусть дан язык  $L$ , и  $L^R$  - есть множество строк, обращение которых есть в  $L$ .
- **Пример:**  $L = \{0, 01, 100\}$ ;  $L^R = \{0, 10, 001\}$ .
- Если  $L$  – регулярный язык, то  $L^R$  – тоже регулярный язык.
- **Доказательство:** Пусть  $E$  есть РВ для  $L$ . Мы покажем как обратить  $E$ , чтобы произвести РВ  $E^R$  для  $L^R$ .

#### Обращение регулярного выражения

- **Базис:** Если  $E$  символ  $a$ ,  $\epsilon$ , или  $\emptyset$ , то  $E^R = E$ .
- **Индукция:** если  $E$  есть
  - $F+G$ , то  $E^R = F^R + G^R$ .
  - $FG$ , то  $E^R = G^R F^R$
  - $F^*$ , то  $E^R = (F^R)^*$ .

39 Гомоморфизмы. Замыкание по гомоморфизму. Обратный гомоморфизм. Замыкание класса регулярных языков по обратному гомоморфизму.

### Гомоморфизмы

- **Гомоморфизмом** на алфавите является функция, которая каждый символ этого алфавита заменяет некоторой строкой.
- **Пример:**  $h(0) = ab; h(1) = \epsilon$ .
- Расширим функцию на строки  $h(a_1\dots a_n) = h(a_1)\dots h(a_n)$ .
- **Пример:**  $h(01010) = ababab$ .

### Замыкание по гомоморфизму

- Если  $L$  — регулярный язык, и  $h$  есть гомоморфизм на его алфавите, то  $h(L) = \{h(w) \mid w \in L\}$  также является регулярным языком.
- **Доказательство:** Пусть  $E$  — РВ для  $L$ .
- Применим  $h$  к каждому символу в  $E$ .
- Язык для результирующего РВ есть  $h(L)$ .

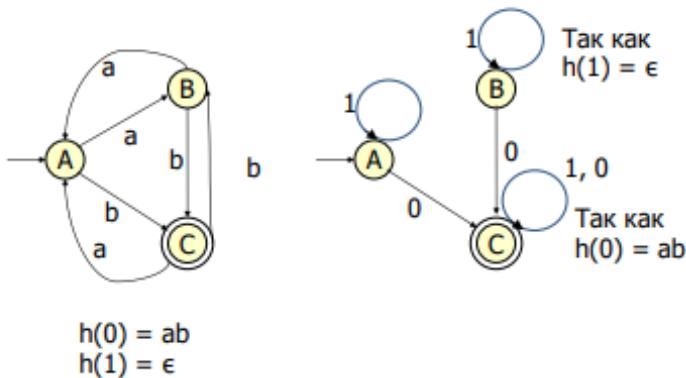
### Обратный гомоморфизм

- Пусть  $h$  — гомоморфизм и  $L$  есть язык, алфавитом которого является результирующий язык функции  $h$ .
- Определим:
- $h^{-1}(L) = \{w \mid h(w) \text{ есть в } L\}$ .

## Доказательство замыкания по обратному гомоморфизму

- Начнём с КДА А для L.
- Построим КДА В для  $h^{-1}(L)$ :
  - Тем же самым множеством состояний, что и у А,
  - Тем же начальным состоянием,
  - Тими же финальными состояниями.
  - Входной алфавит = символы, к которым применяется гомоморфизм h.
- Переходы для В вычисляются путём применения  $h$  к входному символу  $a$  и просмотра того, куда А мог бы пройти по последовательности символов  $h(a)$ .
- Формально,  $\delta_B(q, a) = \delta_A(q, h(a))$ .

**Пример:** построение обратного гомоморфизма



## Доказательство – обратный гомоморфизм

- Индукция по  $|w|$  показывает, что  
$$\delta_B(q_0, w) = \delta_A(q_0, h(w)).$$
- Таким образом, В принимает  $w$  т.и т.т., когда А принимает  $h(w)$ .

**40 Контекстно-свободные грамматики.**

**41 Деревья синтаксического разбора.**