СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В этом файле будет законспектирована информация, которая мне показалась интересной, из книги Льва Николаевича Тарасова Математический Анализ.

1 Беседа I

Определение числовой последовательности:

Говорят, что задана бесконечная числовая последовательность, если всякому натуральному числу по какому-либо закону однозначно поставлено в соответствие определённое число (член последовательности)

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \dots \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n & \dots \end{array} \tag{1}$$

reccure (лат.) — возвращаться.

Важно говорить какой является числовая последовательность, так как она далеко не всегда состоит из чисел.

Числовая последовательность не обязательно является упорядоченной.

Определение неубывающей последовательности:

Последовательность (y_n) называется неубывающей, если:

$$y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \dots \leq y_n \leq \dots \tag{2}$$

Определение невозрастающей последовательности:

Последовательность (y_n) называется невозрастающей, если:

$$y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq \dots \geq y_n \geq \dots \tag{3}$$

Невозрастающие и неубывающие последовательности объединяют в класс монотонных последовательностей.

Определение ограниченной последовательности:

Последовательность (y_n) называется ограниченной, если можно указать такие 2 числа A и B, между которыми леат все члены последовательности:

$$A \leq y_n \leq B \quad : \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{4}$$

С понятия предела и начиется математический анализ. — Лев Николаевич Тарасов.

2 Беседа II

Чтобы совершить переход от элементарной математики к высшей математике нужно операциям сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня, логарифмирования и взятия модуля прибавить операцию нахождения предела последовательности.

Операции дифференцирования и интегрирования являются вариациями операции предельного перехода.

Наличие монотонности и ограниченности не является необходимым условием существования предела последовательности.

Определение предела последовательности:

Число a называется пределом последовательности, если

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists n_\epsilon \in N \;\; \forall n > n_\epsilon \;\; |y_n - a| < \epsilon \tag{5}$$

Такой предел записывается следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a \tag{6}$$

Факт 1:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \tag{7}$$

Факт 2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n} \tag{8}$$

Факт 3:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + z_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} z_n \tag{9}$$

Определение сходящейся послдовательности:

Сходящаяся последовательность — последовательность, имеющая предел.

3 Беседа III Сходящиеся последовательности

Теорема (об ограниченности сходящейся последовательности):

Если последовательность сходится, то она ограничена.

Доказательство:

Пусть последовательность (y_n) имеет пределом число a, тогда

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists n_\epsilon \in N \ \ \forall n > n_\epsilon \ \ |y_n - a| < \epsilon \tag{10}$$

так как число n_ϵ конечно, то существует лишь ограниченное число членов (y_n) таких, что

$$|y_n - a| > \epsilon \tag{11}$$

Тогда подберём такие A и B, что

$$\forall n \in N \quad A = a - \epsilon \leq y_n \leq a + \epsilon = B \tag{12}$$

Тогда, согласно определению ограниченности последовательности, последовательность (y_n) ограничена.

Ограниченность последовательности является, лишь необходимым условием сходимости последовательности, а не достаточным.

Теорема (о единственности предела):

Если последовательность сходится, то она имеет единственный предел.

Доказательство (от противного):

Пусть (y_n) сходится к a_1 и a_2 и $a_1 \neq a_2$. Тогда

$$\forall \epsilon_1 > 0 \ \ \exists n_{\epsilon_1} \in N \ \ \forall n > n_{\epsilon_1} \ \ |y_n - a_1| < \epsilon_1 \tag{13}$$

и

$$\forall \epsilon_2 > 0 \ \ \exists n_{\epsilon_2} \in N \ \ \forall n > n_{\epsilon_2} \ \ |y_n - a_2| < \epsilon_2 \tag{14}$$

Выберем $n_\epsilon = max(n_{\epsilon_1}, n_{\epsilon_2})$. Тогда

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \forall n > n_\epsilon \ \ |y_n - a_1| < \epsilon \ \ |y_n - a_2| < \epsilon \tag{15}$$

Следовательно, $a_1 = a_2$, следовательно, получаем противоречие.

Теорема (достаточное условие сходимости последовательности):

Если послеедовательность ограничена и монотонна, то она сходится.

Указать две соседние точки на числовой прямой невозможно.

Правило треугольника:

$$|A + B| \leq |A| + |B| \tag{16}$$

Теорема (о сходимости суммы сходящихся последовательностей):

Если последовательности (y_n) и (z_n) сходятся к a и b соответственно, то $(y_n + z_n)$ сходится к $a + b$.

Доказательство:

Пусть

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists n_{\epsilon_1} \in N \;\; \forall n > n_{\epsilon_1} \;\; |y_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \tag{17}$$

и

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists n_{\epsilon_2} \in N \;\; \forall n > n_{\epsilon_2} \;\; |z_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \tag{18}$$

Тогда для $n_\epsilon = max(n_{\epsilon_1}, n_{\epsilon_2})$ будет выполняться следующее

$$|(y_n + z_n) - (a + b)| = |(y_n - a) + (z_n - b)| \leq |y_n - a| + |z_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \tag{19}$$

Сходимость суммы последовательностей вовсе не означает сходимость каждой из последовательностей в отдельности.

Если сумма двух последовательностей сходится, то возможно только два варианта:

1. обе последовательности сходятся;
2. обе последовательности не сходятся.

Других вариантов быть не может.

Последовательность называется бесконечно малой, если её предел равен 0.

Для любой сходящейся последовательности (y_n), имеющей предел a, соответствует своя бесконечно малая последовательность (α_n), где $\alpha_n = y_n - a$.

Теорема (о произведении бесконечно малой и ограниченной последовательностей):

Пусть (y_n) ограниченная последовательность и (α_n) бесконечно малая последовательность. Тогда $|y_n \alpha_n|$ является бесконечно малой последовательностью.

Доказательство:

Пусть (y_n) является ограниченной последовательностью. Тогда

$$\exists M \ \ \forall n \in N \ \ |y_n| \leq M \tag{20}$$

Пусть (α_n) является бесконечно малой последовательностью, тогда

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists n_\epsilon \in N \ \ \forall n > n_\epsilon \ \ |\alpha_n| < \frac{\epsilon}{M} \tag{21}$$

Тогда

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists n_\epsilon \in N \ \ \forall n > n_\epsilon \ \ |y_n \alpha_n| = |y_n||\alpha_n| \leq M|\alpha_n| < M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon \tag{22}$$

Теорема (о произведении сходящихся последовательностей):

Если последовательности (y_n) и (z_n) сходятся к a и b соответственно, то последовательность $(y_n z_n)$ сходится к ab.

Доказательство:

Пусть (y_n) и (z_n) сходятся к a и b соответственно, и пусть

$$y_n = a + \alpha_n \quad z_n = b + \beta_n, \tag{23}$$

где α_n и β_n бесконечно малые последовательности.

Тогда

$$y_n z_n = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n \tag{24}$$

так как $a\beta_n$, $b\alpha_n$ и $\alpha_n\beta_n$ являются бесконечно малыми последовательностями, то

$$\lim_{n\to\infty}(y_n z_n) = ab \tag{25}$$

Важно помнить о том, что обратные теоремы далеко не всегда верны.

Теорема (о частном двух сходящихся последовательностей):

Пусть (y_n) и (z_n) сходятся к a и b соответственно и $b \neq 0$. Тогда $(\frac{y_n}{z_n})$ сходится к $\frac{a}{b}$.

Доказательство:

Пусть (y_n) и (z_n) сходятся к a и b соответственно и $b \neq 0$.

Пусть

$$y_n = a + \alpha_n \quad z_n = b + \beta_n, \tag{26}$$

где α_n и β_n бесконечно малые последовательности.

Тогда

$$\frac{y_n}{z_n} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} = \frac{(a+\alpha_n)(b-\beta_n)}{(b+\beta_n)(b-\beta_n)} = \frac{ab - a\beta_n + b\alpha_n - \alpha_n\beta_n}{b^2\beta_n^2} \tag{27}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{z_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{ab - a\beta_n + b\alpha_n - \alpha_n\beta_n}{b^2 - \beta_n^2} = \frac{ab}{b^2}\, fracab \tag{28}$$

Изменение любого конечного числа ченов последовательности не способно повлиять на её сходимость.

Изменение бесконечного количества членов сходящщейся последовательности не повлияет на её сходимость.

Изменение бесконечного количества членов не сходящщейся последовательности может повлиять на её сходимость.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ