Elliptische Randwertprobleme mit gewichteter Kernkollokation

Daniel Koch

BACHELORARBEIT

Nr. XXXXXXXXXX-A

eingereicht am

Fachhochschul-Bachelorstudiengang

Mathematik

in Stuttgart

im Februar 2017

Diese Arbeit entstand im Rahmen des Gegenstands

Einführung in die Tiefere Problematik 1

im

Sommersemester 2018

Betreuung:

Prof. Dr. Bernard Haasdonk

Erklärung

Ich erkläre eidesstattlich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen nicht benutzt und die den benutzten Quellen entnommenen Stellen als solche gekennzeichnet habe. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Stuttgart, am 28. Februar 2017

Daniel Koch

Inhaltsverzeichnis

Abstract

This should be a 1-page (maximum) summary of your work in English.

Kapitel 1

Einleitung

Unser Ziel ist es Lösungen von partielle Differentialgleichungen (PDEs) zu approximieren. Diese sind allgemein gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
Lu(x) &= f(x), x \in \Omega \\
Bu(x) &= g(x), x \in \partial\Omega
\end{aligned}
$$

, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, L ein linearer, beschränkter Differentialoperator und B ein linearer, beschränkter Auswertungsoperator ist.

Kapitel 2

Kernfunktionen und reproduzierbare Kern Hilberträume

Die Kernkollokation ist ein Verfahren, welches auf der Idee der Interpolation beruht. Diese ist zunächst aber nur für die Punktauswertung bekannt. Das genügt uns hier nicht mehr, da wir auch Ableitungen betrachten müssen und benötigen daher eine verallgemeinerte Form.

Definition 2.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine nicht leere Menge, $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum mit Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{H}$ und $\Lambda_N := \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\} \subset \mathcal{H}'$ eine Menge von linearen, stetigen und linear unabhängigen Funktionalen. Dann ist eine Funktion $s_u \in \mathcal{H}$ der gesuchte Interpolant von u, wenn gilt, dass

$$\langle \lambda_i, u \rangle = \langle \lambda_i, s_u \rangle, 1 \leq i \leq N$$

Beispiel 2.2.

- Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$,$X_N := \{x_1, \ldots, x_N\} \subset \Omega$ eine Menge von Punkten und $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum mit Funktionen , in dem die Punktauswertungfunktionale $\delta_{x_i}(f) = f(x_i), 1 \leq i \leq N$ stetig sind. Dann bekommen wir die Standardinterpolation mit $\Lambda_N := \{\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_N}\} \subset \mathcal{H}'$.

$$s(x_i) = \langle \delta_{x_i}, s \rangle = \langle \delta_{x_i}, s_u \rangle = s_u(x_i), 1 \leq i \leq N$$

- Mit $\lambda_i := \delta_{x_i} \circ D^a$ für einen Multiindex $a \in \mathbb{N}_0^d$ erhält man noch zusätzliche Informationen über die Ableitung der Funktion.
- Sei eine PDE gegeben:

$$\begin{aligned} Lu(x) &= f(x), x \in \Omega \\ Bu(x) &= g(x), x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Sei $X_N \subset \Omega$ eine Menge an Kollokationspunkten. Dann möchten wir, dass s_u die PDE in den Punkten X_N erfüllt, also:

$$\begin{aligned} Ls_u(x_i) &= Lu(x_i) = f(x_i), x_i \in \Omega \\ Bs_u(x_i) &= Bu(x_i) = g(x_i), x_i \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Wir müssen einen geeigneten Ansatz wählen um das Interpolationsproblem zu lösen, also einen N-dimensionalen Unterraum $V_N := \operatorname{span}\{\nu_1, \ldots, \nu_N\} \subset \mathcal{H}$ und fordern, dass $s_u \in V_N$, also

$$s_u(x) := \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \nu_j(x), x \in \Omega, \alpha \in \mathbb{R}^N$$

Also lassen sich die Interpolationsbedingungen schreiben als:

$$\langle \lambda_i, u \rangle = \langle \lambda_i, s_u \rangle = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \langle \lambda_i, \nu_j \rangle$$

Diese lassen sich auch als lineares Gleichungssystem $A_\Lambda \alpha = b$ schreiben mit $(A_\Lambda)_{i,j} := \langle \lambda_i, \nu_j \rangle, b_i := \langle \lambda_i, u \rangle$.

Wir suchen jetzt nach geeigneten Ansatzfunktionen und einem Hilbertraum, in dem die Auswertungs- und Differentialfunktionale stetig sind. Dies führt uns zur Definition von Kern Funktionen, mit denen wir einen Hilbertraum konstruieren werden, der uns das Geforderte liefern wird.

Definition 2.3. Sei Ω eine nicht leere Menge. Ein reeller Kern auf Ω ist eine symmetrische Funktion $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$.

Für alle $N \in \mathbb{N}$ und für eine Menge $X_N = \{x_i\}_{i=1}^N$ ist die Kern Matrix (oder Gram'sche Matrix) $A := A_{K,X_N} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ definiert als $A := [K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^N$.

Ein Kern K heißt positiv definit (PD) auf Ω, wenn für alle $N \in \mathbb{N}$ und alle Mengen X_N mit paarweise verschiedenen Elementen $\{x_i\}_{i=1}^N$ gilt, dass die Kern Matrix positiv semidefinit ist. Der Kern K heißt strikt positiv definit (SPD), falls die Kern Matrix positiv definit ist.

Satz 2.4. *Sei Ω eine nicht leere Menge, $K_1, K_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei PD Kerne auf Ω und $a \geq 0$. Dann sind folgende Funktionen wieder PD Kerne auf Ω:*

1. $K(x, y) := K_1(x, y) + K_2(x, y)$
2. $K(x, y) := aK_1(x, y)$
3. $K(x, y) := K_1(x, y)K_2(x, y)$
4. $K(x, y) := \sum_{i=0}^{\infty} a_i K_1(x, y)^i, a_i \geq 0$ *mit Konvergenzradius* $\rho > 0$ *und* $\|K_1(x, y)\|_\infty \leq \rho$

Beweis. Die Symmetrie ist in allen Fällen offensichtlich. Wir betrachten daher nur die positive Definitheit.

Sei $X_N \subset \Omega$ eine Menge mit paarweise verschiedenen Punkten $\{x_i\}_{i=1}^N$.

1. Für die Kern Matrix von K gilt:

$$\begin{aligned} A_K &= \begin{pmatrix} K(x_1, x_1) & \cdots & K(x_1, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_N, x_1) & \cdots & K(x_N, x_N) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} K_1(x_1, x_1) & \cdots & K_1(x_1, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_1(x_N, x_1) & \cdots & K_1(x_N, x_N) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_2(x_1, x_1) & \cdots & K_2(x_1, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_2(x_N, x_1) & \cdots & K_2(x_N, x_N) \end{pmatrix} \\ &= A_{K_1} + A_{K_2} \end{aligned}$$

Wir erhalten also für ein beliebiges $\alpha \neq 0$

$$\begin{aligned}\alpha^T A_K \alpha &= \alpha^T \left(A_{K_1} + A_{K_2}\right) \alpha \\ &= \underbrace{\alpha^T A_{K_1} \alpha}_{\geq 0} + \underbrace{\alpha^T A_{K_2} \alpha}_{\geq 0} \geq 0\end{aligned}$$

2. Für ein beliebiges $\alpha \neq 0$ gilt

$$\alpha^T A_K \alpha = \alpha^T a A_{K_1} \alpha = a \alpha^T A_{K_1} \alpha \geq 0$$

3. Wir betrachten wieder die Kernmatrix.

$$\begin{aligned}K &= \begin{pmatrix} K_1(x_1,x_1)K_2(x_1,x_1) & \cdots & K_1(x_1,x_N)K_2(x_1,x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_1(x_N,x_1)K_2(x_N,x_1) & \cdots & K_1(x_N,x_N)K_2(x_N,x_N) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} K_1(x_1,x_1) & \cdots & K_1(x_1,x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_1(x_N,x_1) & \cdots & K_1(x_N,x_N) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} K_2(x_1,x_1) & \cdots & K_2(x_1,x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_2(x_N,x_1) & \cdots & K_2(x_N,x_N) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

,wobei $\circ$ das punktweise Produkt der beiden Matrizen bezeichnet. Die beiden letzten Matrizen sind positiv semidefinit und damit nach dem Satz von Schur auch das Produkt der beiden.

4. Mit dem bisher gezeigten wissen wir, dass die endliche Summe $\sum_{i=0}^n a_i K_1(x,y)^i$ positiv definit ist. Sei A_n die dazugehörige Kern Matrix. Dann gilt für beliebiges $\alpha \neq 0$

$$\alpha^T A \alpha = \lim_{n \to \infty} \alpha^T A_n \alpha \geq 0$$

, da das Argument des Grenzwerts immer größer als Null ist und die Reihe für $\|K_1(x,y)\|_\infty \leq \rho$ konvergiert.

□

Beispiel 2.5. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann sind folgende Funktionen PD Kerne auf Ω:

- $K(x,y) := (x,y)$
- $K(x,y) := \exp(-\gamma\|x-y\|), \gamma > 0$ ist sogar SPD

Beweis.
- Die Kern Matrix entspricht der Gram Matrix des Skalarprodukts. Diese ist aufgrund der positiven Definitheit des Skalarprodukt positiv definit.
- QUELLE SUCHEN

□

Wir kommen mit der Definition von Kernen direkt zu den gesuchten Hilberträumen.

Definition 2.6 (Reproduzierender Kern Hilbertraum)**.** Sei Ω eine nicht leere Menge und $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum mit Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und Skalarprodut $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}}$. Dann nennt man $\mathcal{H}$ reproduzierender Kern Hilbert Raum (RKHR) auf Ω, wenn eine Funktion $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ existiert, sodass

1. $K(\cdot, x) \in \mathcal{H}$ für alle $x \in \Omega$
2. $(f, K(\cdot, x))_{\mathcal{H}} = f(x)$ für alle $x \in \Omega$, $f \in \mathcal{H}$

Satz 2.7. *Sei $\mathcal{H}$ ein RKHR mit Funktion K. Dann ist K ein Kern, eindeutig und positiv definit.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass K tatsächlich ein Kern ist.

$$K(x,y) = (K(\cdot, y), K(x, \cdot))_{\mathcal{H}} = (K(x, \cdot), K(\cdot, y))_{\mathcal{H}} = K(y,x)$$

Sei $X_N \subset \Omega$ eine Menge von paarweise verschiedenen Punkten und $\alpha \in \mathbb{R}^N, \alpha \neq 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha^T A \alpha &= \sum_{i,j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j K(x_i, x_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j \left(K(\cdot, x_i), K(\cdot, x_j)\right)_{\mathcal{H}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i K(\cdot, x_i), \sum_{j=1}^{N} \alpha_j K(\cdot, x_j) \right)_{\mathcal{H}} \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{N} \alpha_i K(\cdot, x_i) \right\|_{\mathcal{H}}^2 \geq 0
\end{aligned}$$

, wobei in der zweiten Gleichheit die Reproduzierbarkeit des Kerns benutzt wurde. K ist somit PD.

Seien jetzt K_1, K_2 zwei Kerne auf $\mathcal{H}$. Dann gilt für alle $x, y \in \Omega$:

$$K_1(x,y) = (K_1(\cdot, y), K_2(x, \cdot))_{\mathcal{H}} = K_2(x,y)$$

Also ist K eindeutig. □

Bei Interpolationsproblemen kommen wir jedoch aus der anderen Richtung und haben Ansatzfunktionen, also einen Kern K, gegeben und wollen damit eine Funktion approximieren. Also stellt sich die Frage ob zu jedem Kern K ein RKHR existiert. Diese wird durch folgenden Satz beantwortet:

Satz 2.8 (Moore, Aronszajn)**.** *Sei Ω eine nicht leere Menge und $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ ein positiv definiter Kern. Dann existiert genau ein RKHR $\mathcal{H}_K(\Omega)$ mit reproduzierendem Kern K.*

Beweis. SIEHE SKRIPT! □

Wir wollen an einen Satz aus der Funktionalanalysis erinnern, den wir oft brauchen werden.

Satz 2.9 (Fréchet-Riesz)**.** *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\lambda \in \mathcal{H}'$ ein beschränktes lineares Funktional. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Element $\nu_\lambda \in \mathcal{H}$, so dass für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt:*

$$\langle \lambda, x \rangle = (x, \nu_\lambda)$$

Wir nennen ν_λ den Riesz-Repräsentanten von λ.

Wir betrachten nun die Stetigkeit der benötigten Funktionale. Zunächst die Punktauswertung.

Satz 2.10. *Sei Ω eine nicht leere Menge und $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum mit Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Dann gilt:*

1. *$\mathcal{H}$ ist genau dann ein RKHR, wenn die Auswertungsfunktionale stetig sind.*
2. *Wenn $\mathcal{H}$ ein RKHR mit Kern K ist, dann ist $K(\cdot, x)$ der Riesz-Repräsentant des Funktionals $\delta_x \in \mathcal{H}'$.*

Beweis. 1. Sei $\mathcal{H}$ ein RKHR. Für alle $f \in \mathcal{H}$ und alle $x \in \Omega$ gilt:

$$\begin{aligned}
|\langle \delta_x, f \rangle| &= |f(x)| \\
&= |(f, K(\cdot, x))_{\mathcal{H}}| && \text{(Reproduzierbarkeit)} \\
&\leq \|f\|_{\mathcal{H}} \|K(\cdot, x)\|_{\mathcal{H}} && \text{(Cauchy Schwarz)} \\
&= \|f\|_{\mathcal{H}} \sqrt{(K(\cdot, x), K(\cdot, x))_{\mathcal{H}}} \\
&= \|f\|_{\mathcal{H}} \sqrt{K(x, x)} && \text{(Reproduzierbarkeit)} \\
\Leftrightarrow \frac{|\langle \delta_x, f \rangle|}{\|f\|_{\mathcal{H}}} &\leq \sqrt{K(x, x)}
\end{aligned}$$

Also ist δ_x beschränkt und damit stetig.

Für die andere Richtung nehmen wir an, dass $\delta_x \in \mathcal{H}'$ für alle $x \in \Omega$. Also existiert ein Riesz-Repräsentant $\nu_{\delta_x} \in \mathcal{H}$. Definieren wir $K(\cdot, x) := \nu_{\delta_x}$, dann ist K ein Kern. Es ist klar, dass $K(\cdot, x) \in \mathcal{H}$ und nach der Definition des Riesz-Repräsentanten gilt:

$$(f, K(\cdot, x))_{\mathcal{H}} = (f, \nu_{\delta_x})_{\mathcal{H}} = \langle \delta_x, f \rangle = f(x)$$

2. Die Behauptung folgt sofort aus der Reproduzierbarkeit von K, da $(f, K(\cdot, x))_{\mathcal{H}} = f(x)$ für alle $x \in \Omega$ und alle $f \in \mathcal{H}$ gilt.

□

Wir haben also gesehen, dass in einem RKHR $\mathcal{H}_K$ die Auswertungsfunktionale stetig sind. Da wir uns mit Differentialgleichungen beschäftigen, wollen wir auch Ableitungen auswerten. Dafür benötigen wir, dass diese ebenfalls in $\mathcal{H}_K$ liegen.

Satz 2.11. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Angenommen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist offen, K ist SPD auf Ω und $K \in C^{2k}(\Omega \times \Omega)$. Dann gilt für alle Multiindizes $a \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|a| \leq k$ und alle $x \in \Omega$, dass $D_2^a K(\cdot, x) \in \mathcal{H}_K(\Omega)$.*

Außerdem gilt für alle $f \in \mathcal{H}_K(\Omega)$:

$$D^a f(x) = (f, D_2^a K(\cdot, x))_{\mathcal{H}_K(\Omega)}$$

und damit dass $\lambda := \delta_x \circ D^a$ stetig ist.

Beweis. BEWEIS IST LANG

Der Beweis der Stetigkeit von $\lambda := \delta_x \circ D^a$ verläuft komplett analog zum Beweis von 2.10.1. □

In Satz 2.10 haben wir gesehen, wie der Riesz-Repräsentant des Auswertungsfunktionals aussieht. Dies wollen wir jetzt auf alle Funktionale verallgemeinern.

Satz 2.12. *Sei K ein PD Kern auf $\Omega \neq \emptyset$. Sei $\lambda \in \mathcal{H}_K(\Omega)'$. Dann ist $\lambda^y K(\cdot, y) \in \mathcal{H}_k(\Omega)$ und es gilt $\langle \lambda, f \rangle = (f, \lambda^y K(\cdot, y))_{\mathcal{H}_K(\Omega)}$ für alle $f \in \mathcal{H}_K(\Omega)$, wobei der hochgestellte Index bedeutet, dass das Funktional auf die zweite Komponente angewandt wird. Es ist also $\lambda^y K(\cdot, y)$ der Riesz-Repräsentant von λ.*

Beweis. Da $\lambda \in \mathcal{H}_K(\Omega)$, existiert ein Riesz-Repräsentant $\nu_\lambda \in \mathcal{H}_K(\Omega)$ mit $\langle \lambda, f \rangle = (f, \nu_\lambda)_{\mathcal{H}_K(\Omega)}$. Außerdem ist $f_x(y) := K(x, y)$ für alle $x \in \Omega$ eine Funktion in $\mathcal{H}_K(\Omega)$. Damit bekommen wir:

$$\langle \lambda^y, K(x, y) \rangle = \langle \lambda, f_x \rangle = (f_x, \nu_\lambda)_{\mathcal{H}_K(\Omega)} = (K(\cdot, x), \nu_\lambda)_{\mathcal{H}_K(\Omega)} = \nu_\lambda(x)$$

Damit gilt $\nu_\lambda(\cdot) = \lambda^y K(\cdot, y)$ und auch $\lambda^y K(\cdot, y) \in \mathcal{H}_K(\Omega)$. □

Jetzt fehlt nur noch die lineare Unabhängigkeit aller verwendeten Funktionale. Zunächst die der Auswertungsfunktionale:

Satz 2.13. *Sei Ω eine nicht leere Menge und $\mathcal{H}$ ein RKHR mit Kern K. Dann sind $\{\delta_x, x \in \Omega\}$ genau dann linear unabhängig, wenn K SPD ist.*

Beweis. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathcal{H}'$ und $\nu_{\lambda_1}, \ldots, \nu_{\lambda_n} \in \mathcal{H}$ die dazugehörigen Riesz Repräsentanten. Diese sind linear abhängig, wenn ein $\alpha \in \mathbb{R}^n$ existiert mit $\lambda := \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i = 0$, also dass $\langle \lambda, f \rangle = 0$ für alle $f \in \mathcal{H}$. Das gilt genau dann, wenn die Riesz Repräsentanten linear abhängig sind, da

$$0 = \langle \lambda, f \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle \lambda_i, f \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\nu_{\lambda_i}, f \right)_{\mathcal{H}} = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \nu_{\lambda_i}, f \right)_{\mathcal{H}}$$

Also gilt nach 2.10.2, dass $\{\delta_x, x \in \Omega\}$ genau dann linear unabhängig sind, wenn $\{K(\cdot, x), x \in \Omega\}$ linear unabhängig sind.

Um die strikte positive Definitheit nachzuweisen, betrachten wir die Matrix $A = [K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^N$ für paarweise verschiedene Punkte $x_i, 1 \leq i \leq N$. Sei also $\beta \in \mathbb{R}^n, \beta \neq 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\beta^T A \beta &= \sum_{i,j=1}^n \beta_i \beta_j K(x_i, x_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^n \beta_i \beta_j \left(K(\cdot, x_i), K(\cdot, x_j) \right)_{\mathcal{H}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \beta_i K(\cdot, x_i), \sum_{j=1}^n \beta_j K(\cdot, x_j) \right)_{\mathcal{H}} \\
&= \left\| \sum_{i=1}^n \beta_i K(\cdot, x_i) \right\|_{\mathcal{H}}^2 > 0
\end{aligned}$$

Für die letzte strikte Ungleichung benötigen wir die lineare Unabhängigkeit. Also gilt, dass K SPD ist, wenn $\{\delta_x, x \in \Omega\}$ linear unabhängig sind.

Die andere Richtung folgt genauso aus der letzten Ungleichung. □

Und jetzt die der Auswertungen der Ableitungen:

Satz 2.14. *Sei K ein translationsinvarianter Kern auf $\mathbb{R}^d$, also $K(x,y) = \Phi(x-y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$. Sei $k \in \mathbb{N}$ und angenommen, dass $\Phi \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap C^{2k}(\mathbb{R}^d)$. Sei $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|a_i| \leq k$ und sei $X_N \subset \mathbb{R}^d$. Angenommen, dass $a_i \neq a_j$, wenn $x_i = x_j$, dann sind die Funktionale $\Lambda_N := \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}, \lambda_i := \delta_{x_i} \circ D^{a_i}$ linear unabhängig in $\mathcal{H}_K(\mathbb{R}^d)$.*

Beweis. BUCH ODER SKRIPT □

Damit haben wir alle nötigen Werkzeuge um die Interpolation durchzuführen. Wir haben Ansatzfunktionen K, den dazugehörigen Hilbertraum $\mathcal{H}_K(\Omega)$, die Stetigkeit und lineare Unabhängigkeit aller benötigten Operatoren. Jetzt müssen wir nur noch einen geeigneten Ansatz wählen.

Kapitel 3

Standardkollokation

3.1 Symmetrische Kollokation

Sei wieder $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, L, B lineare Differentialoperatoren, K ein positiv definiter Kern und folgendes Problem gegeben:

$$\begin{aligned} Lu(x) &= f(x), x \in \Omega \\ Bu(x) &= g(x), x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Für ein $N \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Menge $X_N \subset \Omega$, die wir in N_{in} Punkte im Inneren und N_{bd} Punkte auf dem Rand aufteilen. Also haben wir die beiden Mengen

$$\begin{aligned} X_{in} &= X_N \cap \Omega \\ X_{bd} &= X_N \cap \partial\Omega \end{aligned}$$

Wir definieren die Menge $\Lambda_N = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$ an linearen Funktionalen mit

$$\lambda_i = \begin{cases} \delta_{x_i} \circ L & x_i \in \Omega \\ \delta_{x_i} \circ B & x_i \in \partial\Omega \end{cases}$$

Wir wissen aus Satz 2.10, dass in $\mathcal{H}_K(\Omega)$ alle λ_i stetig und aus Satz 2.14, dass sie linear unabhängig sind. Als Ansatzfunktionen, also den Unterraum $V_N \subset \mathcal{H}_K(\Omega)$, wählen wir die Riesz Repräsentanten der λ_i:

$$\begin{aligned} V_N &= \operatorname{span}\{\lambda_1^y K(x,y), \ldots, \lambda_N^y K(x,y)\} \\ &= \operatorname{span}\{\{(\delta_{x_1} \circ L)^y K(x,y), \ldots, (\delta_{x_{N_{in}}} \circ L)^y K(x,y)\} \\ &\cup \{(\delta_{x_{N_{in}+1}} \circ B)^y K(x,y), \ldots, (\delta_{x_N} \circ B)^y K(x,y)\}\} \\ &=: \operatorname{span}\{\nu_1, \ldots, \nu_N\} \end{aligned}$$

, wobei der hochgesetzte Index y bedeutet, dass der Operator auf das zweite Argument angewandt wird.

Damit bekommen wir folgenden Interpolanten:

$$\begin{aligned} s_u(x) &= \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \lambda_j^y K(x,y) \\ &= \sum_{j=1}^{N_{in}} \alpha_j (\delta_{x_j} \circ L)^y K(x,y) + \sum_{j=N_{in}}^{N} \alpha_j (\delta_{x_j} \circ L)^y K(x,y) \end{aligned}$$

Die α_j erhält man als Lösung des lineares Gleichungssystem (LGS) $A\alpha = b$ mit $A_{i,j} := (\nu_i, \nu_j)_{\mathcal{H}_K}$, da

$$\langle \lambda_i, s_u \rangle = \left\langle \lambda_i, \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \nu_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \left\langle \lambda_i, \nu_j \right\rangle \overset{2.12}{=} \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \left(\nu_j, \nu_i\right)$$

, also

$$\begin{pmatrix} A_{L,L} & A_{L,B} \\ A_{L,B}^T & A_{B,B} \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} b_L \\ b_B \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} (A_{L,L})_{i,j} &= (\delta_{x_i} \circ L)^x (\delta_{x_j} \circ L)^y K(x,y), x_i, x_j \in X_{in} \\ (A_{L,B})_{i,j} &= (\delta_{x_i} \circ L)^x (\delta_{x_j} \circ B)^y K(x,y), x_i \in X_{in}, x_j \in X_{bd} \\ (A_{B,B})_{i,j} &= (\delta_{x_i} \circ B)^x (\delta_{x_j} \circ B)^y K(x,y), x_i, x_j \in X_{bd} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (b_L)_i &= f(x_i), x_i \in X_{in} \\ (b_B)_i &= g(x_i), x_i \in X_{bd} \end{aligned}$$

Das LGS ist lösbar, da A offensichtlich symmetrisch und positiv definit ist, da:

$$\alpha^T A \alpha = \sum_{i,j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j (\nu_i, \nu_j)_{\mathcal{H}_K} = \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \nu_i, \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \nu_j \right)_{\mathcal{H}_K} = \left\| \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \nu_i \right\|_{\mathcal{H}_K}^2 > 0$$

Für die letzte Abschätzung benutzen wir die lineare Unabhängigkeit der Funktionale aus Satz 2.14.

3.2 Nicht-Symmetrische Kollokation

Sei die gleiche Problemstellung wie im vorherigen Kapitel gegeben. Wir wählen jedoch einen anderen Unterraum V_N für die Ansatzfunktionen:

$$V_N := \operatorname{span}\{K(x, x_1), \ldots, K(x, x_N)\}$$

Damit bekommen wir folgenden Interpolanten:

$$s_u(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j K(x, x_j)$$

Die α_i erhält man wieder als Lösung des LGS $A\alpha = b$ mit

$$A := \begin{pmatrix} A_L \\ A_B \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} (A_L)_{i,j} &= (\delta_{x_i} \circ L)^x K(x, x_j), x_i \in X_{in}, x_j \in X_N \\ (A_B)_{i,j} &= (\delta_{x_i} \circ B)^x K(x, x_j), x_i \in X_{bd}, x_j \in X_N \end{aligned}$$

und b wie im vorherigen Abschnitt.
Der Vorteil dieses Ansatzes ist, dass er wesentlich simpler ist. Er benötigt nur eine Anwendung eines Operators zum Aufstellen von A und keine für den Interpolanten selbst. Ein großer Nachteil ist aber, dass nicht gewährleistet werden kann, dass die Matrix A invertierbar ist. Es kann also durch schlechte Wahl der Stützstellen passieren, dass das LGS nicht lösbar ist.

Kapitel 4

Gewichtete Kollokation

4.1 Motivation für die gewichtete Kollokation

Die Standardkollokation hat, egal ob symmetrisch oder nicht-symmetrisch, das Problem, dass wir Punkte im Inneren und auf dem Rand unseres Definitionsgebietes benötigen. Dies macht zum einen die Implementierung etwas komplexer, da man auch da die Trennung der beiden Mengen programmieren muss, zum anderen werden die Werte auf dem Rand nicht zwingend genau angenommen. In Abbildung 4.1 ist die approximierte Lösung einer PDE mit Nullrandwerten über den Rand geplottet. Man erkennt deutlich, wo die Stützstellen der Ansatzfunktionen liegen und auch die Schwankungen zwischen den Stützstellen.

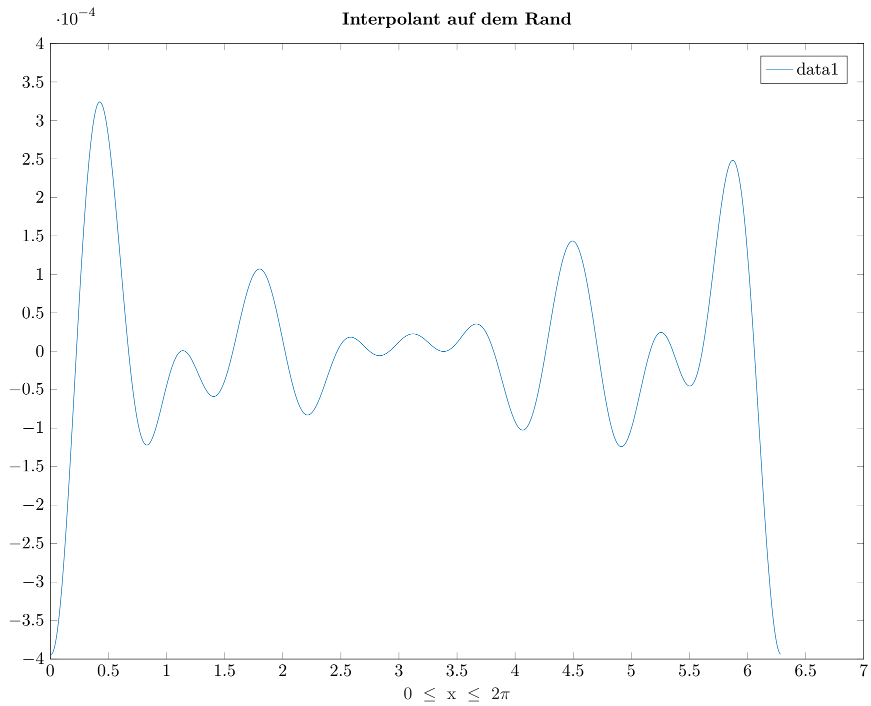

Abbildung 4.1: Plot eines Interpolanten über den Rand des Gebietes

Wir stellen zunächst fest, dass es genügt konstante Nullrandwerte in der PDE zu betrachten. Sei dafür wieder folgende PDE gegeben:

$$\begin{aligned} Lu(x) &= f(x), x \in \Omega \\ Bu(x) &= g(x), x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Wir können annehmen, dass eine Funktion $\bar{g} \in C^2(\Omega)$ existiert mit $\bar{g}|_{\partial\Omega} = g$. Damit gilt $u = \bar{u} + \bar{g}$ für eine Funktion $\bar{u}$. Eingesetzt erhalten wir

$$\begin{aligned} L\bar{u}(x) + L\bar{g}(x) &= f, x \in \Omega \\ B\bar{u} + B\bar{g} &= g, x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

, was äquivalent dazu ist, dass wir folgende PDE nach $\bar{u}$ lösen:

$$\begin{aligned} L\bar{u} &= f + L\bar{g}, x \in \Omega \\ \bar{u} &= 0, x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

4.2 Gewichtsfunktionen

Wir möchten nun Ansatzfunktionen konstruieren, die auf dem Rand des Gebiets konstant Null sind. Dafür führen wir Gewichtsfunktionen ein.

Definition 4.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Eine Funktion $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Gewichtsfunktion auf Ω, wenn gilt:

1. $w(x) > 0$ für alle $x \in \Omega$
2. $w(x) = 0$ für alle $x \in \partial\Omega$
3. $w(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$

Satz 4.2. *Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ zwei offene und beschränkte Mengen und w_1, w_2 die dazugehörigen Gewichtsfunktionen. Dann gilt:*

1. *Für das Komplement Ω^{C} gilt: $w = -w_1$*
2. *Für die Vereinigung $\Omega_1 \cup \Omega_2$ gilt: $w = w_1 + w_2 + \sqrt{w_1^2 + w_2^2}$*
3. *Für den Schnitt $\Omega_1 \cap \Omega_2$ gilt: $w = w_1 + w_2 - \sqrt{w_1^2 + w_2^2}$*

Beweis. 1. • Sei $x \in \Omega^{\mathrm{C}}$.

$$w(x) = -w_1(x) > 0$$

• Sei $x \in \partial\Omega^{\mathrm{C}}$

$$w(x) = -w_1(x) = 0$$

• Sei $x \in \Omega$

$$w(x) = -w_1(x) < 0$$

2.
- Sei $x \in \Omega_1, x \in \Omega_2$. $\Rightarrow w_1 > 0, w_2 > 0$

$$w = w_1 + w_2 + \sqrt{w_1^2 + w_2^2} > 0$$

- Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit (oBdA) $x \in \Omega_1, x \notin \Omega_2$. $\Rightarrow w_1 > 0, w_2 < 0$

$$w = w_1 + w_2 + \sqrt{w_1^2 + w_2^2} > w_1 + w_2 + \underbrace{\sqrt{w_2^2}}_{=|w_2|=-w_2} = w_1 + w_2 - w_2 = w_1 > 0$$

- Sei $x \notin \Omega_1, x \notin \Omega_2$. $\Rightarrow w_1 < 0, w_2 < 0$

$$\begin{aligned} w = w_1 + w_2 + \sqrt{w_1^2 + w_2^2} &\overset{!}{<} 0 \\ \Leftrightarrow -w_1 - w_2 &> \sqrt{w_1^2 + w_2^2} \\ \Leftrightarrow w_1^2 + \underbrace{2w_1w_2}_{>0} + w_2^2 &> w_1^2 + w_2^2 \end{aligned}$$

- Sei oBdA $x \in \partial\Omega_1, x \notin \Omega_2$. $\Rightarrow w_1 = 0, w_2 < 0$

$$w = w_1 + w_2 + \sqrt{w_1^2 + w_2^2} = w_2 + \sqrt{w_2^2} = w_2 - w_2 = 0$$

- Sei oBdA $x \in \partial\Omega_1, x \in \Omega_2$. $\Rightarrow w_1 = 0, w_2 > 0$

$$w = w_1 + w_2 + \sqrt{w_1^2 + w_2^2} = w_2 + \sqrt{w_2^2} > 0$$

3.
- Sei $x \in \Omega_1, x \in \Omega_2$. $\Rightarrow w_1 > 0, w_2 > 0$

$$\begin{aligned} w = w_1 + w_2 - \sqrt{w_1^2 + w_2^2} &\overset{!}{>} 0 \\ \Leftrightarrow w_1 + w_2 &> \sqrt{w_1^2 + w_2^2} \\ \Leftrightarrow (w_1 + w_2)^2 &> w_1^2 + w_2^2 \\ \Leftrightarrow w_1^2 + 2w_1w_2 + w_2^2 &> w_1^2 + w_2^2 \\ \Leftrightarrow 2w_1w_2 &> 0 \end{aligned}$$

- Sei oBdA $x \in \Omega_1, x \notin \Omega_2$. $\Rightarrow w_1 > 0, w_2 < 0$

$$w = w_1 + w_2 - \sqrt{w_1^2 + w_2^2} < w_1 + w_2 - \sqrt{w_1^2} = w_1 + w_2 - w_1 = w_2 < 0$$

- Sei oBdA $x \in \partial\Omega_1, x \in \Omega_2$. $w_1 = 0, w_2 > 0$

$$w = w_1 + w_2 - \sqrt{w_1^2 + w_2^2} = w_2 - \sqrt{w_2^2} = 0$$

- Sei oBdA $x \in \partial\Omega_1, x \notin \Omega_2$. $w_1 = 0, w_2 < 0$

$$w = w_1 + w_2 - \sqrt{w_1^2 + w_2^2} = w_2 - \sqrt{w_2^2} = 2w_2 < 0$$

- Sei $x \notin \Omega_1, x \notin \Omega_2$. $\Rightarrow w_1 < 0, w_2 < 0$

$$w = w_1 + w_2 - \sqrt{w_1^2 + w_2^2} < 0$$

MENGEN NOCH KORRIGIEREN □

Beispiel 4.3. Sei $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Dann können wir Ω schreiben als $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$ mit $\Omega_1 = [-1, 1] \times [-\infty, \infty), \Omega_2 = (-\infty, \infty] \times [-1, 1]$. Dann sind

$$\begin{aligned} w_1(x, y) &= -x^2 + 1 \\ w_2(x, y) &= -y^2 + 1 \end{aligned}$$

Gewichtsfunktionen auf Ω_1 bzw, Ω_2. Nach Satz 4.2 ist dann die Gewichtsfunktion für Ω gegeben durch:

$$\begin{aligned} w(x, y) &= w_1(x, y) + w_2(x, y) - \sqrt{w_1(x, y)^2 + w_2(x, y)^2} \\ &= -x^2 + 1 - y^2 + 1 - \sqrt{(-x^2 + 1)^2 + (-y^2 + 1)^2} \\ &= -x^2 - y^2 + 2 - \sqrt{x^4 - 2x^2 + y^4 - 2y^2 + 2} \end{aligned}$$

Wir möchten jetzt Kern und Gewichtsfunktion verknüpfen und bekommen damit eine neue Funktion, die auf dem Rand unseres Definitionsgebiets konstant Null ist. Dazu betrachten wir wieder zwei verschiedene Ansätze.

4.3 Symmetrische Kollokation

Satz 4.4. *Sei Ω eine Menge, $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ ein PD Kern und $g : \Omega \to \mathbb{R} \setminus 0$ eine Funktion. Dann ist*

$$K'(x, y) := g(x)K(x, y)g(y)$$

ein Kern und es gilt für den entsprechenden RKHR:

$$\mathcal{H}_{K'}(\Omega) = g\mathcal{H}_K(\Omega) := \{gf | f \in \mathcal{H}_K(\Omega)\}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\tilde{K}(x, y) := g(x)g(y)$ ein PD Kern ist.

Die Symmetrie ist offensichtlich, da

$$\tilde{K}(x, y) = g(x)g(y) = g(y)g(x) = \tilde{K}(y, x)$$

Zur positiven Definitheit betrachten wir eine Punktmenge $X_N := \{x_i \in \Omega | 1 \leq i \leq N\} \subset \Omega$. Wir erhalten für die Kernmatrix

$$A = \begin{pmatrix} g(x_1)g(x_1) & \cdots & g(x_1)g(x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(x_N)g(x_1) & \cdots & g(x_N)g(x_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(x_1) & \cdots & g(x_N) \end{pmatrix} := \bar{g}\bar{g}^T$$

und damit für alle $\alpha \neq 0$

$$\alpha^T A\alpha = \alpha^T \left(\bar{f}\bar{f}^T\right)\alpha = \left(\alpha^T \bar{f}\right)\left(\bar{f}^T\alpha\right) = \left\|\bar{f}^T\alpha\right\| \geq 0$$

Also ist $\tilde{K}$ ein PD Kern.

Wir müssen noch zeigen, dass $K'(x,y) = f(x)K(x,y)f(y) = K(x,y)\tilde{K}(x,y)$ ein PD Kern ist.

Die Symmetrie funktioniert ähnlich wie gerade:

$$K'(x,y) = K(x,y)\tilde{K}(x,y) = K(y,x)\tilde{K}(y,x) = K'(y,x)$$

Für die positive Definitheit betrachten wir wieder die Kernmatrix.

$$\begin{aligned} K &= \begin{pmatrix} K_1(x_1,x_1)K_2(x_1,x_1) & \cdots & K_1(x_1,x_N)K_2(x_1,x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_1(x_N,x_1)K_2(x_N,x_1) & \cdots & K_1(x_N,x_N)K_2(x_N,x_N) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} K_1(x_1,x_1) & \cdots & K_1(x_1,x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_1(x_N,x_1) & \cdots & K_1(x_N,x_N) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} K_2(x_1,x_1) & \cdots & K_2(x_1,x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_2(x_N,x_1) & \cdots & K_2(x_N,x_N) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

,wobei $\circ$ das punktweise Produkt der beiden Matrizen bezeichnet. Die beiden letzten Matrizen sind positiv semidefinit und damit nach dem Satz von Schur auch das Produkt der beiden.

Es fehlt noch der zweite Teil des Satzes. Dafür stellen wir zunächst fest, dass

$$K'(x,y) = g(x)K(x,y)g(y) \in g\mathcal{H}_K(\Omega)$$

Als nächstes zeigen wir, dass $g\mathcal{H}_K(\Omega)$ tatsächlich ein Hilbertraum ist. Sei dafür

$$\begin{aligned} s : \mathcal{H}_{K'}(\Omega) &\to \mathcal{H}_K(\Omega) \\ f &\mapsto gf \end{aligned}$$

s ist bijektiv, da $g \neq 0$ ist. Damit können wir auf $\mathcal{H}_K(\Omega)$ eine Norm definieren:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\mathcal{H}_K(\Omega)} : \mathcal{H}_K(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ gf &\mapsto \left\|s^{-1}(gf)\right\|_{\mathcal{H}'_K(\Omega)} = \|f\|_{\mathcal{H}'_K(\Omega)} \end{aligned}$$

Damit wird $\mathcal{H}_K(\Omega)$ zu einem Hilbertraum. Jetzt zeigen wir noch die Reproduzierbarkeit auf $\mathcal{H}_K(\Omega)$, dann folgt aus der Eindeutigkeit des Kerns aus Satz 2.7 die Behauptung. Sei dafür $x \in \Omega$ und $h = gf \in \mathcal{H}_K(\Omega)$.

$$\begin{aligned} (h, K(\cdot,x))_{\mathcal{H}_K(\Omega)} &= \left(gf, gK'(\cdot,x)g(x)\right)_{\mathcal{H}_K(\Omega)} \\ &= g(x)\left(gf, gK'(\cdot,x)\right)_{\mathcal{H}_K(\Omega)} \\ &= g(x)\left(f, K'(\cdot,x)\right)_{\mathcal{H}'_K(\Omega)} \\ &= g(x)f(x) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.5. Der Beweis von Satz 4.4 zeigt allgemeiner, dass für zwei beliebige PD Kerne $K_1, K_2 : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ und eine Funktion $g : \Omega \to \mathbb{R}$ auch folgende Funktionen PD Kerne sind:

$$K(x,y) := K_1(x,y)K_2(x,y)$$
$$K(x,y) := g(x)g(y)$$

Wir haben jetzt einen neuen Kern konstruiert, der auf dem Rand unseres Definitionsgebiets konstant Null ist. Wenn wir jetzt noch zusätzlich annehmen, dass auch die Ableitung der Gewichtsfunktion wieder ein Gewichtsfunktion ist, können wir die Konstruktion aus Kapitel 3.1 verwenden.

Sei also $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt K' ein PD Kern, g eine Gewichtsfunktion auf Ω, für die auch dere Ableitung eine Gewichtsfunktion auf Ω ist, und folgende PDE gegeben:

$$Lu(x) = f(x), x \in \Omega$$
$$u(x) = 0, x \in \partial\Omega$$

Für ein $N \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Menge $X_N \subset \Omega^\circ$.

Wir definieren die Menge $\Lambda_N = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ mit $\lambda_i = \delta_{x_i} \circ L$. Diese Funktionale sind im von $K(x,y) := g(x)K'(x,y)g(y)$ erzeugten RKHR stetig. Also wählen wir

$$\begin{aligned} V_N &= \operatorname{span}\left\{\lambda_1^y, K(x,y), \dots, \lambda_N^y, K(x,y)\right\} \\ &= \operatorname{span}\left\{(\delta_{x_1} \circ L)^y g(x)K'(x,y)g(y), \dots, (\delta_{x_N} \circ L)^y g(x)K'(x,y)g(y)\right\} \end{aligned}$$

als Ansatzfunktionen.

Damit bekommen wir folgenden Interpolanten:

$$\begin{aligned} s_u(x) &= \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \lambda_j^y K(x,y) \\ &= \sum_{j=1}^{N} \alpha_j (\delta_{x_j} \circ L)^y (g(x)K'(x,y)g(y)) \end{aligned}$$

Die α_j erhält man als Lösung des LGS $A\alpha = b$ mit

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= (\delta_{x_i} \circ L)^x (\delta_{x_j} \circ L)^y (g(x)K'(x,y)g(y)) \\ b_i &= f(x_i) \end{aligned}$$

Die Matrix A ist wieder symmetrisch und positiv definit und das LGS ist damit lösbar.

4.4 Nicht-Symmetrische Kollokation

Wie bei der Standardkollokation können wir einen wesentlich simpleren Ansatz wählen. Es sei die gleiche Problemstellung wie gerade gegeben, allerdings haben dieses Mal keine zusätzliche Anforderung an die Ableitung der Gewichtsfunktion. Wir wählen

$$V_N := \operatorname{span}\left\{g(x)K'(x,x_1), \dots, g(x)K'(x,x_N)\right\}$$

als Ansatzfunktionen und bekommen damit folgenden Interpolanten:

$$s_u(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j g(x) K'(x, x_j)$$

Die α_j erhält man als Lösung des LGS $A\alpha = b$ mit

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= (\delta_{x_i} \circ L)^x (g(x) K(x, x_j)) \\ b_i &= f(x_i) \end{aligned}$$

Erneut kann man keine Aussage über die Lösbarkeit des LGS treffen.

Kapitel 5

Implementation

Algorithmus 5.1: Grundlegender Algorithmus

```
function SolvePDE(X, Xte, f)
    b ← f(X)
    gamma ← list of parameters
    minError ← ∞
    for i in gamma do
        A ← collocationMatrix(X, gamma)
        error ← calculateError(X, Xte, f, gamma)
        if error < minError then retVal ← b
        end if
    end for
    return b
end function
```

Abbildungsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis

PDE partielle Differentialgleichung

PD positiv definit

SPD strikt positiv definit

RKHR reproduzierender Kern Hilbert Raum

LGS lineares Gleichungssystem

oBdA ohne Beschränkung der Allgemeinheit

Quellenverzeichnis