

Bachelorarbeit

# Elliptische Randwertprobleme mit gewichteter Kernkollokation

Der Fakultät Mathematik und Physik der Universität Stuttgart

von

Daniel Koch

aus Leonberg

**Entwurf**

Prüfer:	Prof. Dr. Bernard Haasdonk
Betreuer:	Prof. Dr. Bernard Haasdonk
Immatrikulationsnummer:	2948791
Eingereicht am:	15. September 2018

Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation der Universität  
Stuttgart.

IANS

September 2018



Bachelor's Thesis

# Elliptic Boundary Value Problems with Weighted Kernel Collocation

A Bachelor's Thesis presented to the faculty Math and Physics, University of  
Stuttgart

by

Daniel Koch

from Leonberg

**Draft**

First Examiner:	Prof. Dr. Bernard Haasdonk
Second Examiner:	Prof. Dr. Bernard Haasdonk
Student ID:	2948791
Submitted on:	15th September 2018

Institute of Applied Analysis and Numerical Simulations at University of Stuttgart.  
IANS

September 2018



# Zusammenfassung

**Stichwörter:**



# Abstract

**Keywords:**





# Inhaltsverzeichnis

<b>Zusammenfassung</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Akronyme</b>	<b>vii</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>ix</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>xi</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Kerne und reproduzierende Kern Hilberträume</b>	<b>3</b>
<b>3 Standardkollokation</b>	<b>13</b>
3.1 Symmetrische Kollokation . . . . .	13
3.2 Nicht-Symmetrische Kollokation . . . . .	15
<b>4 Gewichtete Kollokation</b>	<b>17</b>
4.1 Motivation für die gewichtete Kollokation . . . . .	17
4.2 Gewichtsfunktionen . . . . .	19
4.3 Symmetrische Kollokation . . . . .	22
4.4 Nicht-Symmetrische Kollokation . . . . .	25
<b>5 Implementierung</b>	<b>27</b>
<b>6 Numerische Tests</b>	<b>31</b>
6.1 Fehler . . . . .	32
6.1.1 Absoluter Fehler . . . . .	32
6.1.2 Fehler auf dem Rand . . . . .	35
6.1.3 Testpunkte . . . . .	36
<b>Literatur</b>	<b>41</b>



# Akronyme

**LGS** lineares Gleichungssystem 16–18, 26, 27

**oBdA** ohne Beschränkung der Allgemeinheit 22, 23

**PD** positiv definit 5, 7, 8, 11, 24, 25

**PDE** partielle Differentialgleichung 1, 4, 19, 20, 25, 30, 31

**RKHS** reproduzierender Kern Hilbertraum 7–11, 24, 26

**SPD** strikt positiv definit 5, 7, 10–12, 15



# Abbildungsverzeichnis

4.1	Plot eines Interpolanten über den Rand des Gebietes . . . . .	18
5.1	Plots verschiedener Kerne . . . . .	27
6.1	Lösung der partielle Differentialgleichung (PDE) . . . . .	32
6.2	Kollokationspunkte . . . . .	33
6.3	Fehler bei Kollokationspunkten auf Gitter . . . . .	34
6.4	Fehler bei zufällig verteilten Kollokationspunkten . . . . .	35
6.5	Fehler bei zufällig verteilten Kollokationspunkten . . . . .	36
6.6	Rand bei gewichteter Kollokation . . . . .	37
6.7	Fehler bei unterschiedlicher Anzahl an Testpunkten . . . . .	38
6.8	Gammawerte bei unterschiedlicher Anzahl an Testpunkten . . . . .	39
6.9	Gammawerte bei unterschiedlicher Anzahl an Testpunkten . . . . .	40



# Tabellenverzeichnis

6.1	Vergleich der Verfahren . . . . .	33
-----	-----------------------------------	----





## Liste der noch zu erledigenden Punkte



# Einleitung

## Einleitung

In dieser Bachelorarbeit stellen wir ein Verfahren zur numerischen Lösung von PDEs vor, die gewichtete Kernkollokation. Dazu schauen wir uns zunächst die gewöhnliche Kernkollokation an und erweitern diese dann auf die gewichtete.

Ziel dieser Arbeit ist es somit ein neues numerisches Verfahren zur Lösung von PDEs zu entwickeln und dieses am Ende zu testen und mit anderen Verfahren zu vergleichen.

Dafür benötigen wir zunächst die zugrunde liegende Theorie. Diese stellen wir in Kapitel 2 vor. Die Kernkollokation ist ein Verfahren, welches auf der Idee der Interpolation beruht. Deswegen werden wir diese zunächst verallgemeinern und geeignete Ansatzfunktionen suchen, die sogenannten Kerne. Außerdem benötigen wir noch einen Funktionenraum, in dem unser Verfahren "funktionieren" wird, einen sogenannten reproduzierender Kern Hilbertraum (RKHS). Dann werden wir verschiedene Eigenschaften der Kerne und der RKHS herleiten.

In Kapitel 3 werden wir die Theorie aus Kapitel 2 anwenden und das Standardverfahren der Kernkollokation herleiten. Dafür verfolgen wir zwei verschiedene Wege, zum einen die symmetrische Kollokation in Kapitel 3.1, die theoretisch gut motiviert ist, aber komplexer als die wesentlich simplere nicht-symmetrische Kollokation in Kapitel 3.2, welche aber theoretisch nicht so schön motiviert ist.

In Kapitel 4 kommen wir zur gewichteten Kollokation. Wir machen uns in Kapitel 4.1 zunächst die Motivation dafür klar. Wir stellen bei der Standardkollokation fest,

dass die numerische Lösung auf dem Rand des Gebietes nicht genau ist. Dieses Problem wollen wir mit der gewichteten Kollokation beheben. Dafür führen wir in Kapitel 4.2 die namensgebenden Gewichtsfunktionen ein. Daraus bauen wir Ansatzfunktionen, die auf dem Rand des Gebietes eine genaue Lösung liefern. Damit leiten wir wie in Kapitel 3 ein symmetrisches und ein nicht-symmetrisches Verfahren her.

In Kapitel 5 gehen wir auf die Implementierung aller Verfahren ein. Dabei stellen wir den grundlegenden Algorithmus vor und gehen auf die Parameterwahl und die Wahl der Kollokationspunkte ein.

In Kapitel 6 testen wir alle vorgestellten Verfahren. Dafür lösen wir eine PDE mithilfe unserer Verfahren und vergleichen die Ergebnisse bezüglich dem entstandenen Fehler, Laufzeit und Kondition.

# Kerne und reproduzierende Kern Hilbert- räume

Grundlagen

Die Kernkollokation ist ein Verfahren, welches auf der Idee der Interpolation beruht. Diese ist zunächst aber nur für die Punktauswertung bekannt. Das genügt uns hier nicht mehr, da wir auch Ableitungen betrachten müssen und benötigen daher eine verallgemeinerte Form.

**Definition 2.1.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine nicht leere Menge,  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum mit Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{H}'$  der dazugehörige Dualraum,  $u \in \mathcal{H}$  und  $\Lambda_N := \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\} \subset \mathcal{H}'$  eine Menge von linearen, stetigen und linear unabhängigen Funktionalen. Dann ist eine Funktion  $s_u \in \mathcal{H}$  ein verallgemeinerter Interpolant von  $u$ , wenn gilt, dass

$$\langle \lambda_i, u \rangle = \langle \lambda_i, s_u \rangle, 1 \leq i \leq N,$$

wobei wir  $\langle \lambda_i, u \rangle := \lambda_i(u)$  für die Anwendung des Funktionalen schreiben.

**Beispiel 2.2.**

- Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $X_N := \{x_1, \dots, x_N\} \subset \Omega$  eine Menge von Punkten und  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum mit Funktionen, in dem die Punktauswertungsfunktionale  $\delta_{x_i}(f) :=$

$f(x_i), 1 \leq i \leq N$  stetig sind. Dann bekommen wir die Standardinterpolation mit  $\Lambda_N := \{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_N}\} \subset \mathcal{H}'$ :

$$s(x_i) = \langle \delta_{x_i}, s \rangle = \langle \delta_{x_i}, s_u \rangle = s_u(x_i), 1 \leq i \leq N$$

- Für einen Multiindex  $a \in \mathbb{N}_0^d$  sei  $D^a$  ein linearer partieller Differentialoperator. Dann erhält man mit  $\lambda_i := \delta_{x_i} \circ D^a$  noch zusätzliche Informationen über die Ableitung der Funktion.
- Sei eine PDE mit Lösung  $u \in C^k(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  gegeben:

$$\begin{aligned} Lu(x) &= f(x), x \in \Omega \\ Bu(x) &= g(x), x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei  $L$  ein linearer Differentialoperator und  $B$  ein linearer Randwertoperator ist. Sei  $X_N \subset \Omega$  eine Menge an Kollokationspunkten. Dann möchten wir, dass  $s_u$  die PDE in den Punkten  $X_N$  erfüllt, also:

$$\begin{aligned} Ls_u(x_i) &= Lu(x_i) = f(x_i), x_i \in \Omega \\ Bs_u(x_i) &= Bu(x_i) = g(x_i), x_i \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.1} \quad \boxed{\text{\{eq:PDE\}}}$$

Wir müssen einen geeigneten diskreten Ansatz wählen um das Interpolationsproblem numerisch zu lösen, also einen  $N$ -dimensionalen Unterraum  $V_N := \text{span}\{\nu_1, \dots, \nu_N\} \subset \mathcal{H}$  und fordern, dass  $s_u \in V_N$ , also

$$s_u(x) := \sum_{j=1}^N \alpha_j \nu_j(x), x \in \Omega, \alpha \in \mathbb{R}^N.$$

Also lassen sich die Interpolationsbedingungen schreiben als:

$$\langle \lambda_i, u \rangle = \langle \lambda_i, s_u \rangle = \sum_{j=1}^N \alpha_j \langle \lambda_i, \nu_j \rangle$$

Diese lassen sich auch als lineares Gleichungssystem  $A_\Lambda \alpha = b$  schreiben mit  $(A_\Lambda)_{i,j} := \langle \lambda_i, \nu_j \rangle, b_i := \langle \lambda_i, u \rangle$ .

---

Wir suchen jetzt nach geeigneten Ansatzfunktionen und einem Hilbertraum, in dem die Auswertungs- und Differentialfunktionale stetig sind. Dies führt uns zur Definition von Kern Funktionen, mit denen wir einen Hilbertraum konstruieren werden, der uns das Geforderte liefern wird.

**Kern**

**Definition 2.3.** Sei  $\Omega$  eine nicht leere Menge. Ein reeller Kern auf  $\Omega$  ist eine symmetrische Funktion  $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Für alle  $N \in \mathbb{N}$  und für eine Menge  $X_N = \{x_i\}_{i=1}^N \subset \Omega$  ist die Kernmatrix (oder Gram'sche Matrix)  $A := A_{K,X_N} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  definiert als  $A := [K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^N$ .

Ein Kern  $K$  heißt positiv definit (PD) auf  $\Omega$ , wenn für alle  $N \in \mathbb{N}$  und alle Mengen  $X_N$  mit paarweise verschiedenen Elementen  $\{x_i\}_{i=1}^N \subset \Omega$  gilt, dass die Kernmatrix positiv semidefinit ist. Der Kern  $K$  heißt strikt positiv definit (SPD), falls die Kernmatrix für alle solche  $N$  und  $X_N$  positiv definit ist.

**thm:Kombi**

**Satz 2.4.** Sei  $\Omega$  eine nicht leere Menge,  $K_1, K_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zwei PD Kerne auf  $\Omega$  und  $a \geq 0$ . Dann sind folgende Funktionen wieder PD Kerne auf  $\Omega$ :

1.  $K(x, y) := K_1(x, y) + K_2(x, y)$

2.  $K(x, y) := aK_1(x, y)$

3.  $K(x, y) := K_1(x, y)K_2(x, y)$

*Beweis.* Die Symmetrie ist in allen Fällen offensichtlich. Wir betrachten daher nur die positive Definitheit.

Sei  $X_N \subset \Omega$  eine Menge mit paarweise verschiedenen Punkten  $\{x_i\}_{i=1}^N$ .

1. Für die Kernmatrix von  $K$  gilt:

$$\begin{aligned}
 A_K &= \begin{pmatrix} K(x_1, x_1) & \cdots & K(x_1, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_N, x_1) & \cdots & K(x_N, x_N) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} K_1(x_1, x_1) & \cdots & K_1(x_1, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_1(x_N, x_1) & \cdots & K_1(x_N, x_N) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_2(x_1, x_1) & \cdots & K_2(x_1, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_2(x_N, x_1) & \cdots & K_2(x_N, x_N) \end{pmatrix} \\
 &= A_{K_1} + A_{K_2}
 \end{aligned}$$

Wir erhalten also für ein beliebiges  $\alpha \neq 0$

$$\begin{aligned}
 \alpha^T A_K \alpha &= \alpha^T (A_{K_1} + A_{K_2}) \alpha \\
 &= \underbrace{\alpha^T A_{K_1} \alpha}_{\geq 0} + \underbrace{\alpha^T A_{K_2} \alpha}_{\geq 0} \geq 0
 \end{aligned}$$

2. Für ein beliebiges  $\alpha \neq 0$  gilt

$$\alpha^T A_K \alpha = \alpha^T A_{K_1} \alpha = a \alpha^T A_{K_1} \alpha \geq 0$$

3. Wir betrachten wieder die Kernmatrix.

$$\begin{aligned}
 K &= \begin{pmatrix} K_1(x_1, x_1)K_2(x_1, x_1) & \cdots & K_1(x_1, x_N)K_2(x_1, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_1(x_N, x_1)K_2(x_N, x_1) & \cdots & K_1(x_N, x_N)K_2(x_N, x_N) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} K_1(x_1, x_1) & \cdots & K_1(x_1, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_1(x_N, x_1) & \cdots & K_1(x_N, x_N) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} K_2(x_1, x_1) & \cdots & K_2(x_1, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_2(x_N, x_1) & \cdots & K_2(x_N, x_N) \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$



---

wobei  $\circ$  das Hadamard-Produkt der beiden Matrizen bezeichnet. Die beiden letzten Matrizen sind positiv semidefinit und damit nach dem Satz von Schur [1] auch das Produkt der beiden.

□

ex:Kern

**Beispiel 2.5.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und  $\gamma \in \mathbb{R}^+$ . Dann sind folgende Funktionen PD Kerne auf  $\Omega$ :

1. Skalarprodukt:  $K(x, y) := \gamma^{-1}(x, y)$
2. Gauß Kern:  $K(x, y) := \exp(-\gamma\|x - y\|^2)$  ist sogar SPD

*Beweis.*

1. Die Symmetrie folgt aus der Symmetrie des Skalarprodukts. Die Kernmatrix entspricht der Gram Matrix des Skalarprodukts. Diese ist aufgrund der positiven Definitheit des Skalarprodukt positiv definit.
2. Einen Beweis dafür findet man in Wendland [2, Theorem 6.10].

□

Wir kommen mit der Definition von Kernen direkt zu den gesuchten Hilberträumen. Diese sind zunächst ohne Bezug zu Kernen definiert, wir werden aber feststellen, dass sie eng miteinander verknüpft sind.

**Definition 2.6** (Reproduzierender Kern Hilbertraum). Sei  $\Omega$  eine nicht leere Menge und  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum mit Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ . Dann nennt man  $\mathcal{H}$  einen Reproduzierenden Kern Hilbert Raum auf  $\Omega$ , wenn eine Funktion  $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  existiert, sodass

1.  $K(\cdot, x) \in \mathcal{H}$  für alle  $x \in \Omega$
2.  $(f, K(\cdot, x))_{\mathcal{H}} = f(x)$  für alle  $x \in \Omega$ ,  $f \in \mathcal{H}$  (Reproduzierbarkeit)

Man nennt  $K$  den reproduzierenden Kern von  $\mathcal{H}$ .

Dass  $K$  tatsächlich ein Kern nach Definition 2.3 ist, zeigt folgender Satz.

igkeitKern

**Satz 2.7.** Sei  $\mathcal{H}$  ein RKHS mit reproduzierendem Kern  $K$ . Dann ist  $K$  ein Kern, eindeutig und positiv definit.

*Beweis.* Wir folgen dem Beweis in Santin [3, Theorem 3.6].

Wir zeigen zunächst, dass  $K$  tatsächlich ein Kern ist.

$$\begin{aligned}
K(x, y) &= (K(\cdot, y), K(x, \cdot))_{\mathcal{H}} && \text{(Reproduzierbarkeit)} \\
&= (K(x, \cdot), K(\cdot, y))_{\mathcal{H}} \\
&= K(y, x) && \text{(Reproduzierbarkeit)}
\end{aligned}$$

Sei  $X_N \subset \Omega$  eine Menge von paarweise verschiedenen Punkten und  $\alpha \in \mathbb{R}^N, \alpha \neq 0$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha^T A \alpha &= \sum_{i,j=1}^N \alpha_i \alpha_j K(x_i, x_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^N \alpha_i \alpha_j (K(\cdot, x_i), K(\cdot, x_j))_{\mathcal{H}} \\
&= \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i K(\cdot, x_i), \sum_{j=1}^N \alpha_j K(\cdot, x_j) \right)_{\mathcal{H}} \\
&= \left\| \sum_{i=1}^N \alpha_i K(\cdot, x_i) \right\|_{\mathcal{H}}^2 \geq 0
\end{aligned}$$

$K$  ist somit PD.

Seien jetzt  $K_1, K_2$  zwei Kerne auf  $\mathcal{H}$ . Dann gilt für alle  $x, y \in \Omega$ :

$$\begin{aligned}
K_1(x, y) &= (K_1(\cdot, y), K_2(x, \cdot))_{\mathcal{H}} && \text{(Reproduzierbarkeit von } K_1) \\
&= K_2(x, y) && \text{(Reproduzierbarkeit von } K_2)
\end{aligned}$$

Also ist  $K$  eindeutig. □

Bei Interpolationsproblemen kommen wir jedoch aus der anderen Richtung und haben Ansatzfunktionen, also einen Kern  $K$ , gegeben und wollen damit eine Funktion approximieren. Also stellt sich die Frage ob zu jedem Kern  $K$  ein RKHS existiert. Diese wird durch folgenden Satz beantwortet:

**Satz 2.8.** *Sei  $\Omega$  eine nicht leere Menge und  $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ein positiv definiten Kern. Dann existiert genau ein RKHS  $\mathcal{H}_K(\Omega)$  mit reproduzierendem Kern  $K$ .*

---

*Beweis.* Einen Beweis findet man in Wendland [2, Kap. 10.2].

Man betrachtet dort zunächst den  $\text{span}\{K(\cdot, y), y \in \Omega\}$  und stellt fest, dass dieser mit einem geeigneten Innenprodukt ein Prähilbertraum ist. Der Abschluss dessen ist der gesuchte RKHS.  $\square$

Wir wollen an einen Satz aus der Funktionalanalysis erinnern, den wir oft brauchen werden.

**Satz 2.9** (Fréchet-Riesz). *Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum und  $\lambda \in \mathcal{H}'$  ein beschränktes lineares Funktional. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Element  $\nu_\lambda \in \mathcal{H}$ , so dass für alle  $x \in \mathcal{H}$  gilt:*

$$\langle \lambda, x \rangle = (x, \nu_\lambda)$$

*Wir nennen  $\nu_\lambda$  den Riesz-Repräsentanten von  $\lambda$ .*

Zur Wohldefiniertheit unserer Interpolation benötigen wir die Stetigkeit aller benutzten Funktionale. Zunächst betrachten wir die Punktauswertungsfunktionale.

stetig

**Satz 2.10.** *Sei  $\Omega$  eine nicht leere Menge und  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum mit Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gilt:*

stetig1

1.  $\mathcal{H}$  ist genau dann ein RKHS, wenn die Auswertungsfunktionale stetig sind.

stetig2

2. Wenn  $\mathcal{H}$  ein RKHS mit reproduzierendem Kern  $K$  ist, dann ist  $K(\cdot, x)$  der Riesz-Repräsentant des Funktionals  $\delta_x \in \mathcal{H}'$ .

*Beweis.* Wir folgen dem Beweis in Santin [3, Proposition 3.8].

1. Sei  $\mathcal{H}$  ein RKHS. Für alle  $f \in \mathcal{H}$  und alle  $x \in \Omega$  gilt:

$$\begin{aligned} |\langle \delta_x, f \rangle| &= |f(x)| \\ &= |(f, K(\cdot, x))_{\mathcal{H}}| && \text{(Reproduzierbarkeit)} \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{H}} \|K(\cdot, x)\|_{\mathcal{H}} && \text{(Cauchy Schwarz)} \\ &= \|f\|_{\mathcal{H}} \sqrt{(K(\cdot, x), K(\cdot, x))_{\mathcal{H}}} \\ &= \|f\|_{\mathcal{H}} \sqrt{K(x, x)} && \text{(Reproduzierbarkeit)} \\ \Leftrightarrow \frac{|\langle \delta_x, f \rangle|}{\|f\|_{\mathcal{H}}} &\leq \sqrt{K(x, x)} \end{aligned}$$

Also ist  $\delta_x$  beschränkt und damit stetig.

Für die andere Richtung nehmen wir an, dass  $\delta_x \in \mathcal{H}'$  für alle  $x \in \Omega$ . Also existiert ein Riesz-Repräsentant  $\nu_{\delta_x} \in \mathcal{H}$ . Definieren wir  $K(\cdot, x) := \nu_{\delta_x}$ , dann ist  $K$  ein reproduzierender Kern. Es ist klar, dass  $K(\cdot, x) \in \mathcal{H}$  und nach der Definition des Riesz-Repräsentanten gilt:

$$(f, K(\cdot, x))_{\mathcal{H}} = (f, \nu_{\delta_x})_{\mathcal{H}} = \langle \delta_x, f \rangle = f(x)$$

2. Die Behauptung folgt sofort aus der Reproduzierbarkeit von  $K$ , da  $(f, K(\cdot, x))_{\mathcal{H}} = f(x)$  für alle  $x \in \Omega$  und alle  $f \in \mathcal{H}$  gilt.

□

Wir haben also gesehen, dass in einem RKHS  $\mathcal{H}_K$  die Auswertungsfunktionale stetig sind. Da wir uns mit Differentialgleichungen beschäftigen, wollen wir auch Ableitungen auswerten. Dafür benötigen wir, dass diese ebenfalls in  $\mathcal{H}_K$  liegen.

**Satz 2.11.** *Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Angenommen  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ist offen,  $K$  ist SPD auf  $\Omega$  und  $K \in C^{2k}(\Omega \times \Omega)$ . Dann gilt für alle Multiindizes  $a \in \mathbb{N}_0^d$  mit  $|a| \leq k$  und alle  $x \in \Omega$ , dass  $D_2^a K(\cdot, x) \in \mathcal{H}_K(\Omega)$ , wobei der tiefgestellte Index bedeutet, dass der Operator auf das zweite Argument angewandt wird.*

Außerdem gilt für alle  $f \in \mathcal{H}_K(\Omega)$ :

$$D^a f(x) = (f, D_2^a K(\cdot, x))_{\mathcal{H}_K(\Omega)}$$

und damit dass  $\lambda := \delta_x \circ D^a$  stetig ist.

*Beweis.* Einen Beweis des ersten Teils findet man im Vorlesungsskript von Santin [3, Proposition 7.13] und einen Beweis des zweiten Teils in Santin [3, Proposition 3.14]. Der Beweis der Stetigkeit von  $\lambda := \delta_x \circ D^a$  verläuft komplett analog zum Beweis von 2.10.1. □

In Satz 2.10 haben wir gesehen, wie der Riesz-Repräsentant des Auswertungsfunktionals aussieht. Dies wollen wir jetzt auf alle Funktionale verallgemeinern.

---

**Riesz**

**Satz 2.12.** Sei  $K$  ein PD Kern auf  $\Omega \neq \emptyset$ . Sei  $\lambda \in \mathcal{H}_K(\Omega)'$ . Dann ist  $\lambda^y K(\cdot, y) \in \mathcal{H}_K(\Omega)$  und es gilt  $\langle \lambda, f \rangle = (f, \lambda^y K(\cdot, y))_{\mathcal{H}_K(\Omega)}$  für alle  $f \in \mathcal{H}_K(\Omega)$ , wobei der hochgestellte Index bedeutet, dass das Funktional auf die zweite Komponente angewandt wird. Es ist also  $\lambda^y K(\cdot, y)$  der Riesz-Repräsentant von  $\lambda$ .

*Beweis.* Wir folgen dem Beweis in Santin [3, Proposition 7.8].

Da  $\lambda \in \mathcal{H}_K(\Omega)$ , existiert ein Riesz-Repräsentant  $\nu_\lambda \in \mathcal{H}_K(\Omega)$  mit  $\langle \lambda, f \rangle = (f, \nu_\lambda)_{\mathcal{H}_K(\Omega)}$ . Außerdem ist  $f_x(y) := K(x, y)$  für alle  $x \in \Omega$  eine Funktion in  $\mathcal{H}_K(\Omega)$ . Damit bekommen wir:

$$\begin{aligned} \langle \lambda, K(x, \cdot) \rangle &= \langle \lambda, f_x \rangle \\ &= (f_x, \nu_\lambda)_{\mathcal{H}_K(\Omega)} && \text{(Riesz-Repräsentant)} \\ &= (K(\cdot, x), \nu_\lambda)_{\mathcal{H}_K(\Omega)} \\ &= \nu_\lambda(x) && \text{(Reproduzierbarkeit)} \end{aligned}$$

Damit gilt  $\nu_\lambda(\cdot) = \lambda^y K(\cdot, y)$  und damit ist  $\lambda^y K(\cdot, y)$  der Riesz-Repräsentant von  $\lambda$ . Da  $\nu_\lambda \in \mathcal{H}_K(\Omega)$  gilt auch  $\lambda^y K(\cdot, y) \in \mathcal{H}_K(\Omega)$ .  $\square$

Jetzt fehlt nur noch die lineare Unabhängigkeit aller verwendeten Funktionale. Zunächst betrachten wir die der Auswertungsfunktionale:

**Satz 2.13.** Sei  $\Omega$  eine nicht leere Menge und  $\mathcal{H}$  ein RKHS mit Kern  $K$ . Dann sind  $\{\delta_x, x \in \Omega\}$  genau dann linear unabhängig, wenn  $K$  SPD ist.

*Beweis.* Wir folgen dem Beweis in Santin [3, Proposition 3.8].

Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathcal{H}'$  und  $\nu_{\lambda_1}, \dots, \nu_{\lambda_n} \in \mathcal{H}$  die dazugehörigen Riesz Repräsentanten. Diese sind linear abhängig, wenn ein  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  existiert mit  $\lambda := \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i = 0$ , also dass  $\langle \lambda, f \rangle = 0$  für alle  $f \in \mathcal{H}$ . Das gilt genau dann, wenn die Riesz Repräsentanten linear abhängig sind, da

$$0 = \langle \lambda, f \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle \lambda_i, f \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\nu_{\lambda_i}, f)_{\mathcal{H}} = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \nu_{\lambda_i}, f \right)_{\mathcal{H}}$$

Also gilt nach 2.10.2, dass  $\{\delta_x, x \in \Omega\}$  genau dann linear unabhängig sind, wenn  $\{K(\cdot, x), x \in \Omega\}$  linear unabhängig sind.

Um die strikte positive Definitheit nachzuweisen, betrachten wir die Matrix  $A = [K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^N$  für paarweise verschiedene Punkte  $x_i, 1 \leq i \leq N$ . Sei also  $\beta \in \mathbb{R}^n, \beta \neq 0$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \beta^T A \beta &= \sum_{i,j=1}^n \beta_i \beta_j K(x_i, x_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \beta_i \beta_j (K(\cdot, x_i), K(\cdot, x_j))_{\mathcal{H}} \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \beta_i K(\cdot, x_i), \sum_{j=1}^n \beta_j K(\cdot, x_j) \right)_{\mathcal{H}} \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n \beta_i K(\cdot, x_i) \right\|_{\mathcal{H}}^2 > 0 \end{aligned}$$

Für die letzte strikte Ungleichung benötigen wir die lineare Unabhängigkeit. Also gilt, dass  $K$  SPD ist, wenn  $\{\delta_x, x \in \Omega\}$  linear unabhängig sind.

Die andere Richtung folgt genauso aus der letzten Ungleichung.  $\square$

Jetzt betrachten wir die lineare Unabhängigkeit der Auswertungen der Ableitungen:

**linUn** **Satz 2.14.** *Sei  $K$  ein translationsinvarianter Kern auf  $\mathbb{R}^d$ , also  $K(x, y) = \Phi(x - y)$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^d$ . Sei  $k \in \mathbb{N}$  und angenommen, dass  $\Phi \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap C^{2k}(\mathbb{R}^d)$ . Sei  $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{N}_0^d$  mit  $|a_i| \leq k$  und sei  $X_N \subset \mathbb{R}^d$ . Angenommen, dass  $a_i \neq a_j$ , wenn  $x_i = x_j$ , dann sind die Funktionale  $\Lambda_N := \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}, \lambda_i := \delta_{x_i} \circ D^{a_i}$  linear unabhängig in  $\mathcal{H}_K(\mathbb{R}^d)'$ .*

*Beweis.* Den Beweis findet man in Wendland [2, Theorem 16.4].  $\square$

Damit haben wir alle nötigen Werkzeuge, um die Interpolation durchzuführen. Wir haben einen Kern  $K$ , den dazugehörigen Hilbertraum  $\mathcal{H}_K(\Omega)$  und die Stetigkeit und lineare Unabhängigkeit aller benötigten Operatoren. Jetzt müssen wir nur noch einen geeigneten Ansatz wählen.

# Standardkollokation

kollokation

## 3.1 Symmetrische Kollokation

sec:SymKol

Sei wieder  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt,  $L, B$  lineare Differentialoperatoren,  $K$  ein SPD Kern und eine PDE wie in (2.1) gegeben. Für ein  $N \in \mathbb{N}$  betrachten wir die Menge  $X_N = \{x_i\}_{i=1}^N \subset \Omega$ , die wir in  $N_{in} > 0$  Punkte im Inneren und  $N_{bd} > 0$  Punkte auf dem Rand aufteilen. Also haben wir die beiden Mengen

$$\begin{aligned} X_{in} &= X_N \cap \Omega \\ X_{bd} &= X_N \cap \partial\Omega \end{aligned}$$

Wir definieren die Menge  $\Lambda_N = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$  an linearen Funktionalen mit

$$\lambda_i = \begin{cases} \delta_{x_i} \circ L & x_i \in X_{in} \\ \delta_{x_i} \circ B & x_i \in X_{bd} \end{cases}$$

Wir wissen aus Satz 2.10, dass in  $\mathcal{H}_K(\Omega)$  alle  $\lambda_i$  stetig und aus Satz 2.14, dass sie linear unabhängig sind. Als Ansatzfunktionen, also den Unterraum  $V_N \subset \mathcal{H}_K(\Omega)$ , wählen wir die Riesz Repräsentanten der  $\lambda_i$ :

$$\begin{aligned} V_N &= \text{span}\{\lambda_1^y K(x, y), \dots, \lambda_N^y K(x, y)\} \\ &= \text{span}\{(\delta_{x_1} \circ L)^y K(x, y), \dots, (\delta_{x_{N_{in}}} \circ L)^y K(x, y)\} \\ &\quad \cup \{(\delta_{x_{N_{in}+1}} \circ B)^y K(x, y), \dots, (\delta_{x_N} \circ B)^y K(x, y)\} \\ &=: \text{span}\{\nu_1, \dots, \nu_N\} \end{aligned}$$

Damit bekommen wir folgenden Interpolanten:

$$\begin{aligned} s_u(x) &= \sum_{j=1}^N \alpha_j \lambda_j^y K(x, y) \\ &= \sum_{j=1}^{N_{in}} \alpha_j (\delta_{x_j} \circ L)^y K(x, y) + \sum_{j=N_{in}+1}^N \alpha_j (\delta_{x_j} \circ B)^y K(x, y) \end{aligned}$$

Die  $\alpha_j$  erhält man als Lösung des lineares Gleichungssystem (LGS)  $A\alpha = b$  mit  $A_{i,j} := (\nu_i, \nu_j)_{\mathcal{H}_K}$ , da

$$\langle \lambda_i, s_u \rangle = \langle \lambda_i, \sum_{j=1}^N \alpha_j \nu_j \rangle = \sum_{j=1}^N \alpha_j \langle \lambda_i, \nu_j \rangle \stackrel{2.12}{=} \sum_{j=1}^N \alpha_j (\nu_j, \nu_i),$$

also

$$\begin{pmatrix} A_{L,L} & A_{L,B} \\ A_{L,B}^T & A_{B,B} \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} b_L \\ b_B \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} (A_{L,L})_{i,j} &= (\delta_{x_i} \circ L)^x (\delta_{x_j} \circ L)^y K(x, y), x_i, x_j \in X_{in} \\ (A_{L,B})_{i,j} &= (\delta_{x_i} \circ L)^x (\delta_{x_j} \circ B)^y K(x, y), x_i \in X_{in}, x_j \in X_{bd} \\ (A_{B,B})_{i,j} &= (\delta_{x_i} \circ B)^x (\delta_{x_j} \circ B)^y K(x, y), x_i, x_j \in X_{bd} \end{aligned}$$



und

$$(b_L)_i = f(x_i), x_i \in X_{in}$$

$$(b_B)_i = g(x_i), x_i \in X_{bd}$$

Das LGS ist lösbar, da  $A$  offensichtlich symmetrisch und positiv definit ist, da:

$$\alpha^T A \alpha = \sum_{i,j=1}^N \alpha_i \alpha_j (\nu_i, \nu_j)_{\mathcal{H}_K} = \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i \nu_i, \sum_{j=1}^N \alpha_j \nu_j \right)_{\mathcal{H}_K} = \left\| \sum_{i=1}^N \alpha_i \nu_i \right\|_{\mathcal{H}_K}^2 > 0$$

Für die letzte Abschätzung benutzen wir die lineare Unabhängigkeit der Funktionale aus Satz 2.14.

### 3.2 Nicht-Symmetrische Kollokation

sec:NSymKol

Sei die gleiche Problemstellung wie im vorherigen Kapitel gegeben. Wir wählen jedoch einen anderen Unterraum  $V_N$  für die Ansatzfunktionen:

$$V_N := \text{span}\{K(x, x_1), \dots, K(x, x_N)\}$$

Damit bekommen wir folgenden Interpolanten:

$$s_u(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j K(x, x_j)$$

Die  $\alpha_i$  erhält man wieder als Lösung des LGS  $A\alpha = b$  mit

$$A := \begin{pmatrix} A_L \\ A_B \end{pmatrix}$$

mit

$$(A_L)_{i,j} = (\delta_{x_i} \circ L)^x K(x, x_j), x_i \in X_{in}, x_j \in X_N$$

$$(A_B)_{i,j} = (\delta_{x_i} \circ B)^x K(x, x_j), x_i \in X_{bd}, x_j \in X_N$$

und  $b$  wie im vorherigen Abschnitt.

Bei diesem Ansatz kann jedoch nicht garantiert werden, dass die Matrix  $A$  invertierbar ist und damit, dass das LGS auch lösbar ist. Allerdings ist die Konstruktion eines Gegenbeispiels aufwendig und es ist in der Praxis unwahrscheinlich, dass man auf einen solchen Fall trifft. Man findet ein Beispiel in Hon u. a. [4].

# Gewichtete Kollokation

a:Gewichtet

## 4.1 Motivation für die gewichtete Kollokation

motivation

Die Standardkollokation hat, egal ob symmetrisch oder nicht-symmetrisch, das Problem, dass wir Punkte im Inneren und auf dem Rand unseres Definitionsbereichs benötigen. Dies macht zum einen die Implementierung etwas komplexer, da man dabei beide Mengen beachten muss, zum anderen werden die Werte auf dem Rand nicht zwingend genau angenommen. In Abbildung 4.1 ist die approximierte Lösung einer PDE mit Nullrandwerten über den Rand geplottet. Man erkennt deutlich, wo die Stützstellen der Ansatzfunktionen liegen und auch die Schwankungen zwischen den Stützstellen.

Wir stellen zur Vereinfachung zunächst fest, dass es bei einer PDE mit Dirichlet-Randwerten genügt, konstante Nullrandwerte zu betrachten. Dafür sei eine PDE wie in (2.1) mit  $B = I$ , wobei  $I$  die Identität bezeichnet, gegeben. Wir nehmen an, dass eine Funktion  $\bar{g} \in C^k(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  existiert mit  $\bar{g}|_{\partial\Omega} = g$ . Damit gilt  $u = \bar{u} + \bar{g}$  für eine Funktion  $\bar{u}$ . Eingesetzt erhalten wir

$$\begin{aligned} L\bar{u}(x) + L\bar{g}(x) &= f(x), x \in \Omega \\ \bar{u} + \bar{g} &= g(x), x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

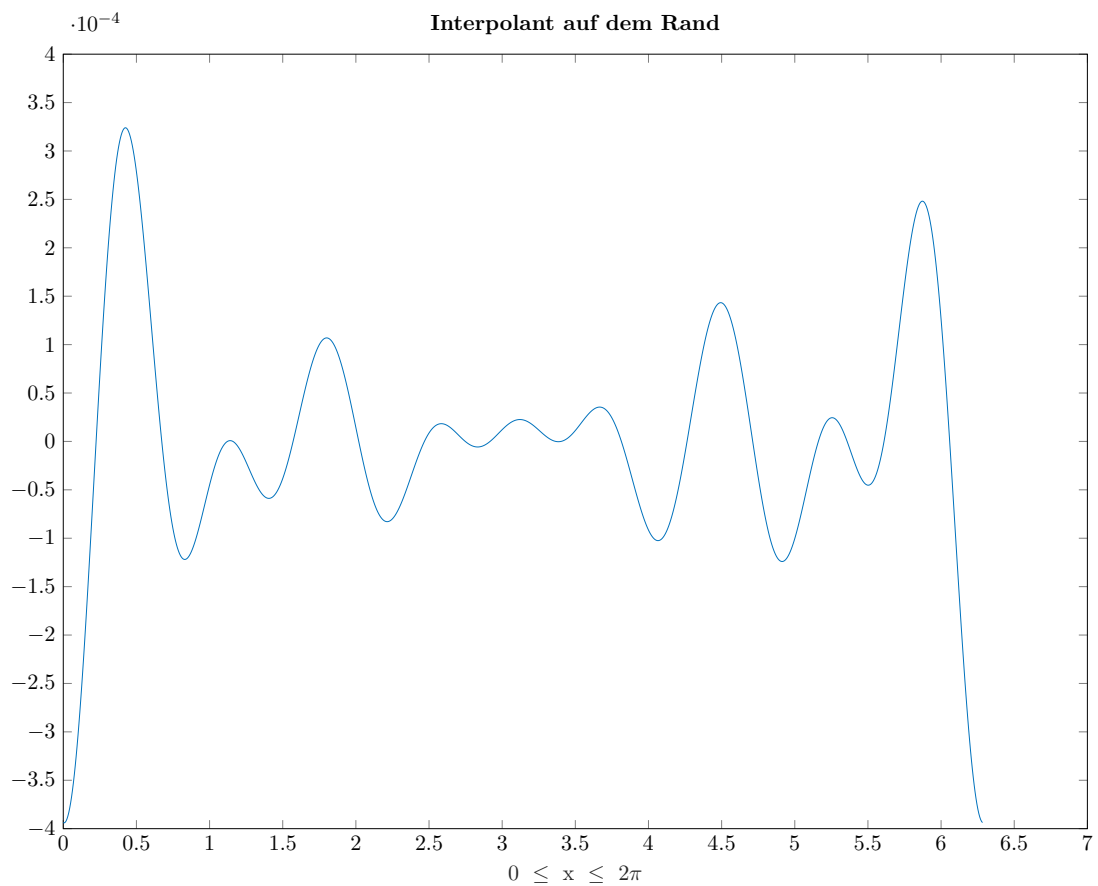


fig:rand

Abbildung 4.1: Plot eines Interpolanten über den Rand des Gebietes

was äquivalent dazu ist, dass wir folgende PDE nach  $\bar{u}$  lösen:

$$\begin{aligned} L\bar{u}(x) &= f(x) + L\bar{g}(x), x \in \Omega \\ \bar{u}(x) &= 0, x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Die Idee ist jetzt, einen Kern, beziehungsweise Ansatzfunktionen zu konstruieren, der auf dem Rand von  $\Omega$  Null ist. Der Interpolant ist eine Linearkombination aus diesen Funktionen und wird demnach auf dem Rand auch Null sein. Dafür führen wir Gewichtsfunktionen ein, die dann in Verbindung mit einem gegebenen Kern das Geforderte erfüllen werden.

## 4.2 Gewichtsfunktionen

sec:gewicht

**Definition 4.1.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt. Eine Funktion  $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Gewichtsfunktion auf  $\Omega$ , wenn sie folgende Eigenschaften erfüllt:

1.  $w(x) > 0$  für alle  $x \in \Omega$
2.  $w(x) = 0$  für alle  $x \in \partial\Omega$
3.  $w(x) < 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$

thm:Gewicht

**Satz 4.2.** Seien  $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$  zwei offene und beschränkte Mengen und  $w_1, w_2$  dazugehörige Gewichtsfunktionen. Dann gilt:

1. Für das Komplement  $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}_1$  ist  $w = -w_1$  eine Gewichtsfunktion.
2. Für die Vereinigung  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  ist  $w = w_1 + w_2 + \sqrt{w_1^2 + w_2^2}$  eine Gewichtsfunktion.
3. Für den Schnitt  $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$  ist  $w = w_1 + w_2 - \sqrt{w_1^2 + w_2^2}$  eine Gewichtsfunktion.

*Beweis.* 1.   ▪ Sei  $x \in \Omega = \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}_1$ .

$$w(x) = -w_1(x) > 0$$

▪ Sei  $x \in \partial\Omega = \partial(\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}_1) = \partial\Omega_1$

$$w(x) = -w_1(x) = 0$$

▪ Sei  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} = \Omega_1$

$$w(x) = -w_1(x) < 0$$

2.   ▪ Sei  $x \in \Omega_1, x \in \Omega_2. \Rightarrow w_1(x) > 0, w_2(x) > 0$

$$w(x) = w_1(x) + w_2(x) + \sqrt{w_1(x)^2 + w_2(x)^2} > 0$$

- Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit (oBdA)  $x \in \Omega_1, x \notin \overline{\Omega_2} \Rightarrow w_1(x) > 0, w_2(x) < 0$

$$\begin{aligned}
 w(x) &= w_1(x) + w_2(x) + \sqrt{w_1(x)^2 + w_2(x)^2} \\
 &> w_1(x) + w_2(x) + \underbrace{\sqrt{w_2(x)^2}}_{=|w_2(x)|=-w_2(x)} \\
 &= w_1(x) + w_2(x) - w_2(x) \\
 &= w_1(x) > 0
 \end{aligned}$$

- Sei  $x \notin \overline{\Omega_1}, x \notin \overline{\Omega_2} \Rightarrow w_1(x) < 0, w_2(x) < 0$

$$\begin{aligned}
 w(x) &= w_1(x) + w_2(x) + \sqrt{w_1(x)^2 + w_2(x)^2} \stackrel{!}{<} 0 \\
 &\Leftrightarrow -w_1(x) - w_2(x) > \sqrt{w_1(x)^2 + w_2(x)^2} \\
 &\Leftrightarrow w_1(x)^2 + \underbrace{2w_1(x)w_2(x)}_{>0} + w_2(x)^2 > w_1(x)^2 + w_2(x)^2
 \end{aligned}$$

- Sei oBdA  $x \in \partial\Omega_1, x \notin \Omega_2 \Rightarrow w_1(x) = 0, w_2(x) \leq 0$

$$\begin{aligned}
 w(x) &= w_1(x) + w_2(x) + \sqrt{w_1(x)^2 + w_2(x)^2} \\
 &= w_2(x) + \sqrt{w_2(x)^2} \\
 &= w_2(x) - w_2(x) = 0
 \end{aligned}$$

- Sei oBdA  $x \in \partial\Omega_1, x \in \Omega_2 \Rightarrow w_1(x) = 0, w_2(x) > 0$

$$\begin{aligned}
 w(x) &= w_1(x) + w_2(x) + \sqrt{w_1(x)^2 + w_2(x)^2} \\
 &= w_2(x) + \sqrt{w_2(x)^2} > 0
 \end{aligned}$$

3.   ▪ Sei  $x \in \Omega_1, x \in \Omega_2. \Rightarrow w_1(x) > 0, w_2(x) > 0$

$$\begin{aligned}
 w(x) &= w_1(x) + w_2(x) - \sqrt{w_1(x)^2 + w_2(x)^2} \stackrel{!}{>} 0 \\
 &\Leftrightarrow w_1(x) + w_2(x) > \sqrt{w_1(x)^2 + w_2(x)^2} \\
 &\Leftrightarrow (w_1(x) + w_2(x))^2 > w_1(x)^2 + w_2(x)^2 \\
 &\Leftrightarrow w_1(x)^2 + 2w_1(x)w_2(x) + w_2(x)^2 > w_1(x)^2 + w_2(x)^2 \\
 &\Leftrightarrow 2w_1(x)w_2(x) > 0
 \end{aligned}$$

- Sei oBdA  $x \in \Omega_1, x \notin \Omega_2. \Rightarrow w_1(x) > 0, w_2(x) < 0$

$$\begin{aligned}
 w(x) &= w_1(x) + w_2(x) - \sqrt{w_1(x)^2 + w_2(x)^2} \\
 &< w_1(x) + w_2(x) - \sqrt{w_1(x)^2} \\
 &= w_1(x) + w_2(x) - w_1(x) \\
 &= w_2(x) < 0
 \end{aligned}$$

- Sei oBdA  $x \in \partial\Omega_1, x \in \overline{\Omega_2}. w_1(x) = 0, w_2(x) > 0$

$$\begin{aligned}
 w(x) &= w_1(x) + w_2(x) - \sqrt{w_1(x)^2 + w_2(x)^2} \\
 &= w_2(x) - \sqrt{w_2(x)^2} = 0
 \end{aligned}$$

- Sei oBdA  $x \in \partial\Omega_1, x \notin \overline{\Omega_2}. w_1(x) = 0, w_2(x) < 0$

$$\begin{aligned}
 w(x) &= w_1(x) + w_2(x) - \sqrt{w_1(x)^2 + w_2(x)^2} \\
 &= w_2(x) - \sqrt{w_2(x)^2} \\
 &= 2w_2(x) < 0
 \end{aligned}$$

- Sei  $x \notin \overline{\Omega_1}, x \notin \overline{\Omega_2}. \Rightarrow w_1(x) < 0, w_2(x) < 0$

$$w(x) = w_1(x) + w_2(x) - \sqrt{w_1(x)^2 + w_2(x)^2} < 0$$

□

**ex:Gewicht**

**Beispiel 4.3.** Sei  $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$ . Dann können wir  $\Omega$  schreiben als  $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$  mit  $\Omega_1 = (-1, 1) \times (-\infty, \infty)$ ,  $\Omega_2 = (-\infty, \infty) \times (-1, 1)$ . Dann sind

$$w_1(x, y) = -x^2 + 1$$

$$w_2(x, y) = -y^2 + 1$$

Gewichtsfunktionen auf  $\Omega_1$  bzw.  $\Omega_2$ . Nach Satz 4.2 ist dann die Gewichtsfunktion für  $\Omega$  gegeben durch:

$$\begin{aligned} w(x, y) &= w_1(x, y) + w_2(x, y) - \sqrt{w_1(x, y)^2 + w_2(x, y)^2} \\ &= -x^2 + 1 - y^2 + 1 - \sqrt{(-x^2 + 1)^2 + (-y^2 + 1)^2} \\ &= -x^2 - y^2 + 2 - \sqrt{x^4 - 2x^2 + y^4 - 2y^2 + 2} \end{aligned}$$

Wir möchten jetzt einen Kern und Gewichtsfunktion verknüpfen und bekommen damit eine neue Funktion, die auf dem Rand unseres Definitionsgebiets konstant Null ist. Dazu betrachten wir wieder zwei verschiedene Ansätze.

### 4.3 Symmetrische Kollokation

**thm:gewichtKern**

**Satz 4.4.** Sei  $\Omega$  eine Menge,  $K' : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ein PD Kern und  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  eine Funktion. Dann ist

$$K(x, y) := g(x)K'(x, y)g(y)$$

ein PD Kern und es gilt für den entsprechenden RKHS:

$$\mathcal{H}_K(\Omega) = g\mathcal{H}_{K'}(\Omega) := \{gf | f \in \mathcal{H}_{K'}(\Omega)\}$$

*Beweis.* Den ersten Teil des Beweises findet man auch in Santin [3, Proposition 2.7].

Wir zeigen zunächst, dass  $\tilde{K}(x, y) := g(x)g(y)$  ein PD Kern ist.

Die Symmetrie ist offensichtlich, da

$$\tilde{K}(x, y) = g(x)g(y) = g(y)g(x) = \tilde{K}(y, x).$$



Zur positiven Definitheit betrachten wir eine Punktmenge  $X_N := \{x_i \in \Omega | 1 \leq i \leq N\} \subset \Omega$ . Wir erhalten für die Kernmatrix

$$A = \begin{pmatrix} g(x_1)g(x_1) & \cdots & g(x_1)g(x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(x_N)g(x_1) & \cdots & g(x_N)g(x_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(x_1) & \cdots & g(x_N) \end{pmatrix} := \bar{g}\bar{g}^T$$

und damit für alle  $\alpha \neq 0$

$$\alpha^T A \alpha = \alpha^T (\bar{g}\bar{g}^T) \alpha = (\alpha^T \bar{g}) (\bar{g}^T \alpha) = \|\bar{g}^T \alpha\|^2 \geq 0.$$

Also ist  $\tilde{K}$  ein PD Kern.

Nach Satz 2.4 ist  $K(x, y) = \tilde{K}(x, y)K'(x, y) = g(x)K'(x, y)g(y)$  ein PD Kern.

Es fehlt noch der zweite Teil des Satzes. Dafür stellen wir zunächst fest, dass für alle  $y \in \Omega$

$$K(\cdot, y) = g(\cdot)K'(\cdot, y)g(y) \in g\mathcal{H}'_K(\Omega).$$

Als nächstes zeigen wir, dass  $\mathcal{H}_K(\Omega)$  tatsächlich ein Hilbertraum ist. Sei dafür

$$\begin{aligned} s : \mathcal{H}_{K'}(\Omega) &\rightarrow g\mathcal{H}_{K'}(\Omega) \\ f &\mapsto gf \end{aligned}$$

$s$  ist bijektiv, da  $g \neq 0$  ist. Damit können wir auf  $\mathcal{H}_K(\Omega)$  ein Skalarprodukt definieren:

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}_K(\Omega)} : \mathcal{H}_K(\Omega) \times \mathcal{H}_K(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (gf, gh) &\mapsto (s^{-1}(gf), s^{-1}(gh))_{\mathcal{H}_{K'}(\Omega)} = (f, h)_{\mathcal{H}_{K'}(\Omega)} \end{aligned}$$

Damit wird  $\mathcal{H}_K(\Omega)$  zu einem Hilbertraum.

Wir zeigen noch die Reproduzierbarkeit auf  $\mathcal{H}_K(\Omega)$ , dann folgt aus der Eindeutigkeit des Kerns aus Satz 2.7 die Behauptung. Sei dafür  $x \in \Omega$  und  $h = gf \in \mathcal{H}_K(\Omega)$ .

$$\begin{aligned}
 (h, K(\cdot, x))_{\mathcal{H}_K(\Omega)} &= (gf, gK'(\cdot, x)g(x))_{\mathcal{H}_K(\Omega)} \\
 &= g(x) (gf, gK'(\cdot, x))_{\mathcal{H}_K(\Omega)} \\
 &= g(x) (f, K'(\cdot, x))_{\mathcal{H}_{K'}(\Omega)} \\
 &= g(x)f(x) \\
 &= h(x)
 \end{aligned}$$

□

Damit haben wir einen neuen Kern konstruiert, der auf dem Rand unseres Definitionsbereichs konstant Null ist, auf den wir eine analoge Konstruktion zu der aus Kapitel 3.1 anwenden können.

Dafür sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt  $K'$  ein PD Kern,  $g$  eine Gewichtsfunktion auf  $\Omega$  und folgende PDE gegeben:

$$\begin{aligned}
 Lu(x) &= f(x), x \in \Omega \\
 u(x) &= 0, x \in \partial\Omega
 \end{aligned}$$

Für ein  $N \in \mathbb{N}$  betrachten wir eine Menge  $X_N := \{x_i\}_{i=1}^N \subset \Omega^\circ$ . Wir definieren die Menge  $\Lambda_N = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$  mit  $\lambda_i = \delta_{x_i} \circ L$ . Diese Funktionale sind im von  $K(x, y) := g(x)K'(x, y)g(y)$  erzeugten RKHS stetig. Also wählen wir

$$\begin{aligned}
 V_N &= \text{span} \{ \lambda_1^y K(x, y), \dots, \lambda_N^y K(x, y) \} \\
 &= \text{span} \{ (\delta_{x_1} \circ L)^y (g(x)K'(x, y)g(y)), \dots, (\delta_{x_N} \circ L)^y (g(x)K'(x, y)g(y)) \}
 \end{aligned}$$

als Ansatzfunktionen. Diese sind auf dem Rand von  $\Omega$  gleich Null, die Randbedingung der PDE ist also erfüllt.

Damit erhalten wir folgenden Interpolanten:

$$\begin{aligned} s_u(x) &= \sum_{j=1}^N \alpha_j \lambda_j^y K(x, y) \\ &= \sum_{j=1}^N \alpha_j (\delta_{x_j} \circ L)^y (g(x) K'(x, y) g(y)) \end{aligned}$$

Die  $\alpha_j$  erhält man als Lösung des LGS  $A\alpha = b$  mit

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= (\delta_{x_i} \circ L)^x (\delta_{x_j} \circ L)^y (g(x) K'(x, y) g(y)) \\ b_i &= f(x_i) \end{aligned}$$

Die Matrix  $A$  ist wieder symmetrisch und positiv definit und das LGS ist damit lösbar.

## 4.4 Nicht-Symmetrische Kollokation

Wie bei der Standardkollokation können wir einen wesentlich simpleren Ansatz wählen. Es sei die gleiche Problemstellung wie gerade gegeben, allerdings haben wir dieses Mal keine zusätzliche Anforderung an die Ableitung der Gewichtsfunktion. Wir wählen

$$V_N := \text{span} \{g(x) K'(x, x_1), \dots, g(x) K'(x, x_N)\}$$

als Ansatzfunktionen und bekommen damit folgenden Interpolanten:

$$s_u(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j g(x) K'(x, x_j)$$

Die  $\alpha_j$  erhält man als Lösung des LGS  $A\alpha = b$  mit

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= (\delta_{x_i} \circ L)^x (g(x) K(x, x_j)) \\ b_i &= f(x_i) \end{aligned}$$

Erneut kann man keine Aussage über die Lösbarkeit des LGS oder über die numerische Stabilität des Verfahrens treffen.



# Implementierung

ementierung

In diesem Kapitel möchten wir uns die Implementation der bisher theoretisch hergeleiteten Verfahren anschauen.

Dazu müssen wir zunächst einen geeigneten Kern wählen. Wir erinnern uns an Beispiel 2.5, dass die Kerne einen Parameter  $\gamma$  besitzen. In Abbildung 5.1 ist der Gauß Kern  $K(x, y) = \exp(-\gamma\|x - y\|^2)$  mit  $y = 0$  und verschiedenen  $\gamma$  Werten geplottet. So können wir eine ganze Familie an Kernen wählen, über die wir leicht iterieren können.

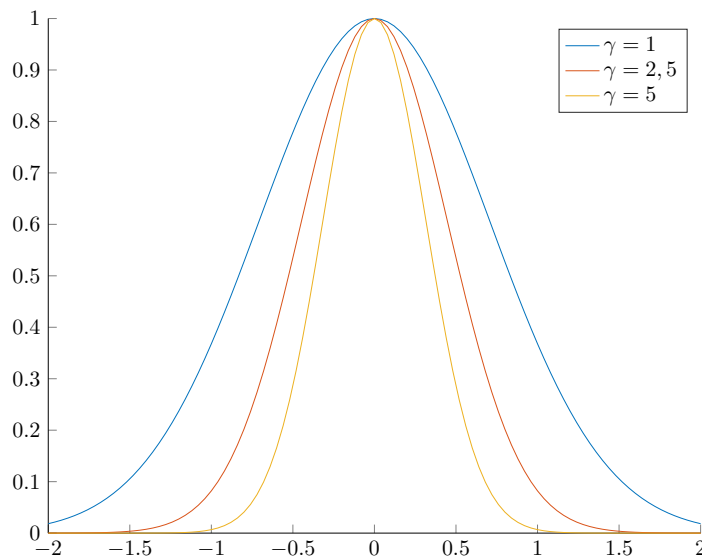


fig:Kerne

Abbildung 5.1: Plots verschiedener Kerne

So erhält man nach Wahl von Kollokationspunkten  $X$  und Testpunkten  $X_{te}$  den Algorithmus 1.

alg:Grund

---

**Algorithm 1** Grundlegender Algorithmus

---

```
1: function SOLVEPDE( $X, X_{te}, f, g$ )
2:    $b \leftarrow \text{RIGHTHANDSIDE}(X, f, g)$ 
3:    $\text{gamma} \leftarrow \text{list of parameters}$ 
4:    $\text{minError} \leftarrow \infty$ 
5:   for  $i$  in  $\text{gamma}$  do
6:      $A \leftarrow \text{COLLOCATIONMATRIX}(X, i)$ 
7:      $\alpha \leftarrow A \backslash b$ 
8:      $\text{error} \leftarrow \text{CALCULATEERROR}(X, X_{te}, f, i)$ 
9:     if  $\text{error} < \text{minError}$  then
10:        $\text{retVal} \leftarrow \alpha$ 
11:        $\text{minError} \leftarrow \text{error}$ 
12:     end if
13:   end for
14:   return  $\text{retVal}$ 
15: end function
```

---

Einige Anmerkungen zu dem Algorithmus:

- Kollokationspunkte sind die Punkte, die wir bereits aus der theoretischen Herleitung kennen. Also die Punkte, an denen wir die Interpolation durchführen.  
Testpunkte sind die Punkte, an denen wir den Fehler unserer Lösung bestimmen.
- $f$  und  $g$  bezeichnen die rechte Seite der zu lösenden PDE.
- Der Algorithmus funktioniert so für die Standard und für die gewichtete Kollokation. Angepasst werden müssen nur die Unterfunktionen zum Aufstellen der rechten Seite und der Kollokationsmatrix.

Es ist noch offen wie wir die Kollokations- und Testpunkte und den Fehler in jeder Iteration bestimmen. Zuerst betrachten wir Letzteres. Dafür möchten wir zwei Möglichkeiten vorstellen:

- Falls wir eine analytisch bestimmte Lösung der PDE haben sollten, können wir diese mit der approximierten vergleichen. Sei dazu  $u$  die analytische Lösung und  $s_u$  die approximierte. Den Fehler bekommen wir dann mit

$$\text{error} = \max_{x \in X_{te}} (|u(x) - s_u(x)|)$$

- 
- Eine analytische Lösung werden wir jedoch meist nicht besitzen und können die erste Methode somit nicht anwenden. Wir haben aber noch die Möglichkeit den Fehler in der Ableitung zu betrachten. Sei dafür  $L$  der Differentialoperator aus der PDE,  $f$  die rechte Seite in der PDE und  $s_u$  die approximierte Lösung. Den Fehler bekommen wir dann mit

$$\text{error} = \max_{x \in X_{te}} (|f(x) - Ls_u(x)|)$$

$Ls_u$  lässt sich aufgrund der Linearität des Differentialoperators leicht berechnen. So kann man ausnutzen, dass  $s_u$  eine Linearkombination aus den einzelnen Basisfunktionen ist, und  $L$  auf die einzelnen Summanden anwenden.

Kommen wir zur Bestimmung der Kollokationspunkte. Auch hier möchten wir mehrere Möglichkeiten vorstellen.

- Eine einfache Möglichkeit ist die Kollokationspunkte zufällig zu wählen.
- Man kann die Kollokationspunkte auch als Gitter über das Definitionsgebiet legen.
- Etwas komplizierter ist eine Greedy-Punktwahl. Man berechnet eine Lösung und bestimmt mit einem geeigneten Fehlerschätzer den Punkt mit dem größten Fehler. Dort setzt man einen neuen Kollokationspunkt und wiederholt das Verfahren.

Die Wahl der Testpunkte spielt keine all zu große Rolle, man sollte nur beachten, dass die möglichst disjunkt von den Kollokationszentren ist. NÄCHSTES KAPITEL  
OVERFITTING





# Numerische Tests

rischeTests

In diesem Kapitel möchten wir die vorgestellten Verfahren verschiedenen numerischen Tests unterziehen. Dabei wollen wir hauptsächlich den Fehler der numerischen Lösung zur analytischen untersuchen, aber auch die Kondition der Kollokationsmatrizen, die Parameterwahl und die Laufzeit betrachten. Zusätzlich werden wir die Verfahren mit der finiten Elemente Methode (FEM) vergleichen.

Dafür betrachten wir die Poisson-Gleichung mit Dirichlet-Randbedingung auf  $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) & , (x, y) \in \Omega \\ u &= 0 & , (x, y) \in \partial\Omega \end{aligned}$$

mit analytischer Lösung  $u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ , dargestellt in Abbildung 6.1. Wir wählen als Gewichtsfunktion  $w$  für  $\Omega$  die Funktion aus Beispiel 4.3:

$$w = -x^2 - y^2 + 2 - \sqrt{x^4 - 2x^2 + y^4 - 2y^2 + 2}.$$

Diese werden wir mithilfe der Kernkollokation numerisch lösen. Dafür wählen wir den Gauß Kern aus Beispiel 2.5.

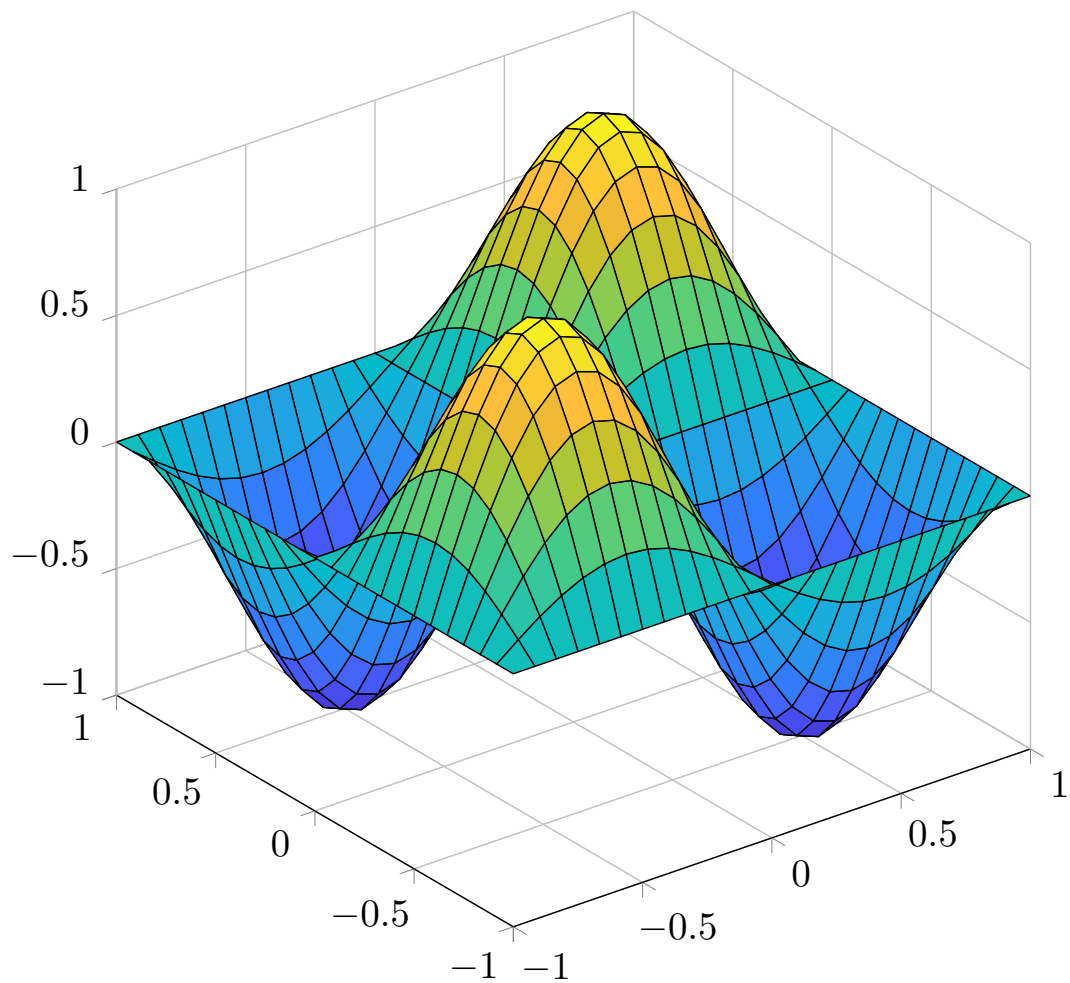


fig:plot

Abbildung 6.1: Lösung der PDE

## 6.1 Fehler

### 6.1.1 Absoluter Fehler

Als Maß des Fehlers unserer numerischen Lösung wollen wir zunächst den maximalen absoluten Fehler zur analytischen Lösung berechnen, also

$$\text{error} = \max_{x \in \Omega} |u(x) - s_u(x)|,$$

wobei  $s_u$  die numerische Lösung bezeichnet. Wir werden die Kollokationspunkte, so wie die Testpunkte, zunächst, wie in Abbildung 6.2 gezeigt, in einem Gitter anordnen.

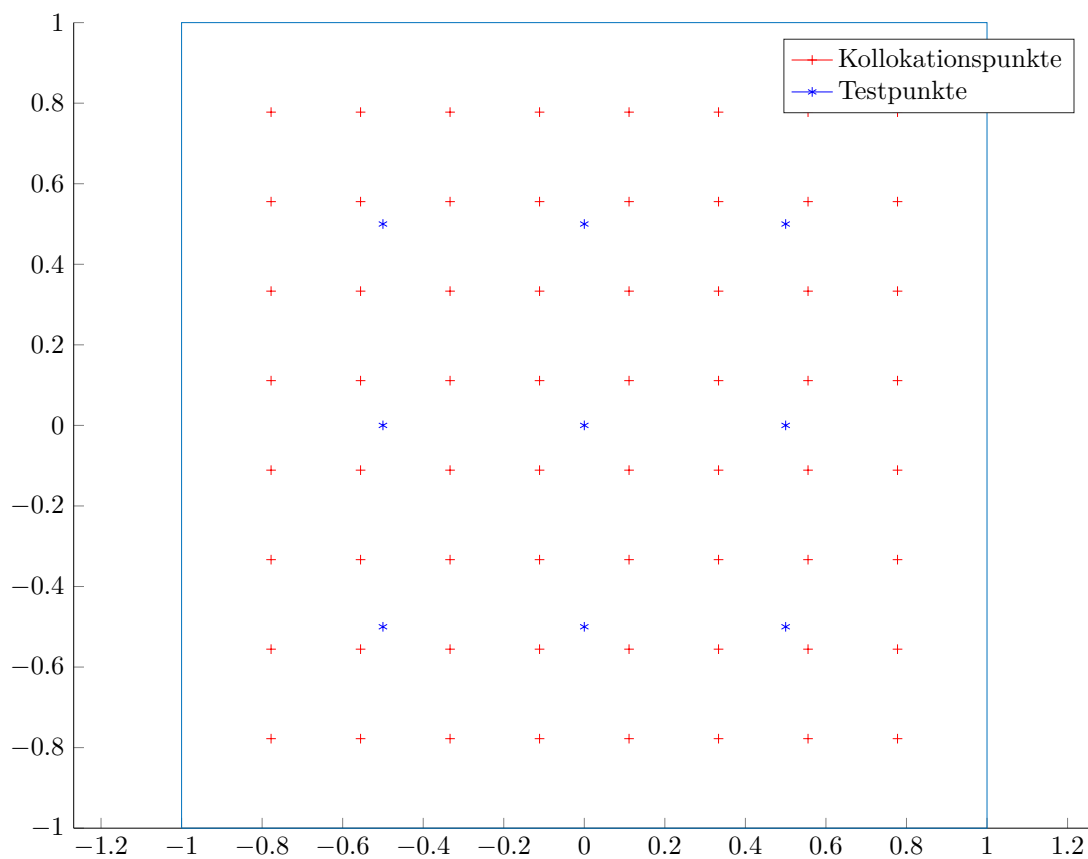


fig:Kollok

Abbildung 6.2: Kollokationspunkte

Damit können wir uns anschauen, wie sich der Fehler bei Veränderung der Anzahl der Kollokationspunkte verhält. In Abbildung 6.3 und Tabelle 6.1 ist der Fehler der vier verschiedenen Verfahren dargestellt.

	$n = 9$	$n = 100$	$n = 1024$	$n = 6084$
Standard N-Sym	0.999 74	$2.182\,05 \times 10^{-4}$	$2.615\,92 \times 10^{-6}$	$9.076\,30 \times 10^{-6}$
Standard Sym	0.999 74	$2.482\,16 \times 10^{-5}$	$1.086\,39 \times 10^{-7}$	$1.318\,51 \times 10^{-7}$
Gewichtet N-Sym	0.376 43	$8.208\,19 \times 10^{-3}$	$1.878\,89 \times 10^{-3}$	$3.099\,14 \times 10^{-4}$
Gewichtet Sym	0.279 94	$6.404\,03 \times 10^{-3}$	$1.040\,64 \times 10^{-3}$	•

eich Fehler

Tabelle 6.1: Vergleich der Verfahren

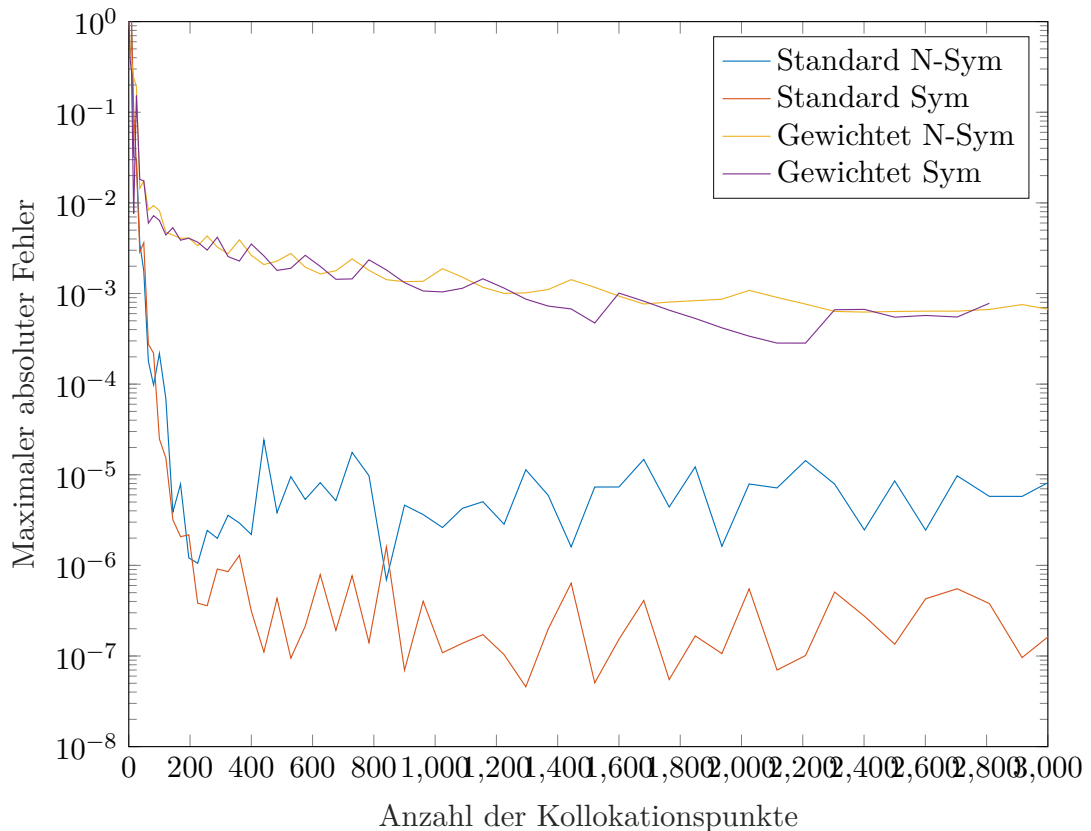


fig:error

Abbildung 6.3: Fehler bei Kollokationspunkten auf Gitter

Wir stellen als erstes fest, dass alle Verfahren vernünftige Ergebnisse liefern und konvergieren. Unsere theoretische Herleitung war demnach also sinnvoll.

Wir erkennen, dass alle Verfahren sehr schnell gute Ergebnisse liefern. Die beiden Standardverfahren liefern bereits mit nahezu 100 Kollokationspunkten ihre besten Ergebnisse und verbessern sich danach nur noch wenig. Im Gegensatz dazu stehen die gewichteten Verfahren, die zwar auch schon am Anfang gute Ergebnisse liefern, sich dann aber auch mit mehr Kollokationspunkten weiter verbessern, wenn auch ziemlich langsam. Gesamt erreichen die gewichteten Verfahren aber selbst mit 6000 Kollokationspunkten nicht die Genauigkeit der Standardverfahren. Im Vergleich der symmetrischen und nicht-symmetrischen Verfahren schneiden beide Male die symmetrischen Verfahren leicht besser ab.

Als nächstes schauen wir uns zufällig verteilte Kollokationspunkte an. In Abbildung

6.5 ist der Fehler bei unterschiedlich vielen zufällig verteilten Kollokationspunkten dargestellt.

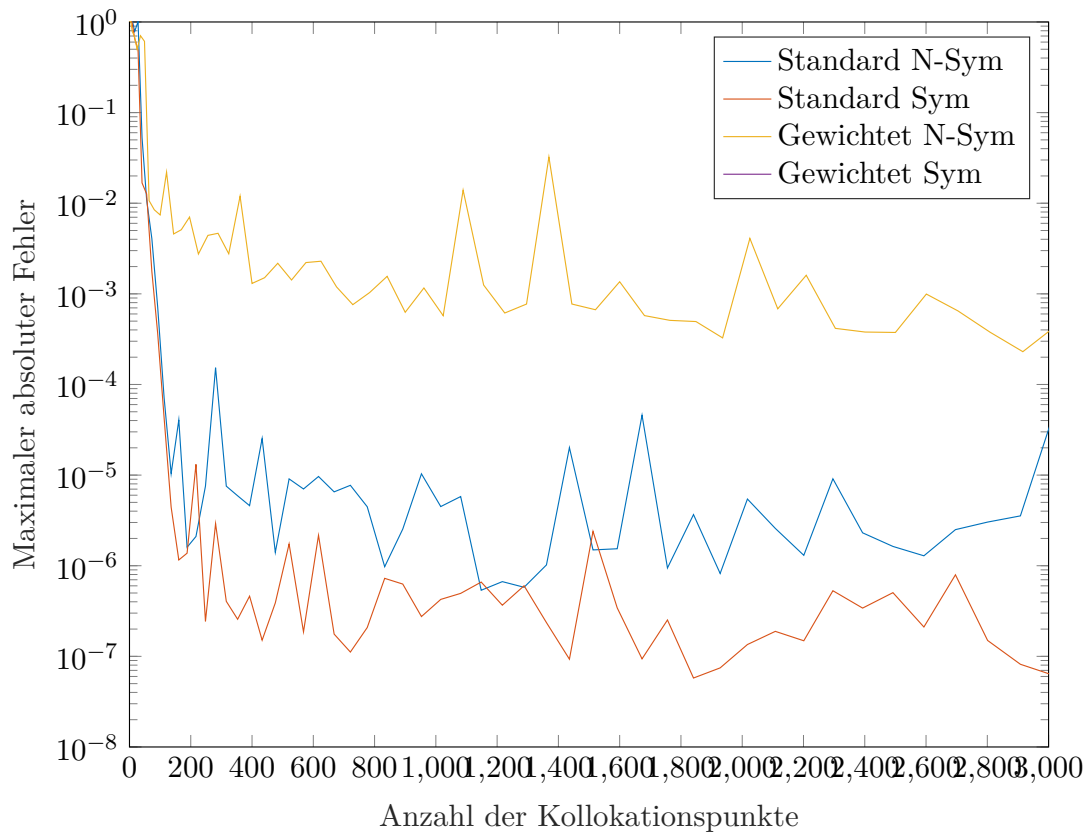


Abbildung 6.4: Fehler bei zufällig verteilten Kollokationspunkten

error-random

Vergleicht man die Werte mit denen der auf einem Gitter verteilten Kollokationspunkte, stellt man keinen großen Unterschied fest. Die Größenordnung der Fehler ist in beiden Fällen gleich, allerdings weisen die zufälligen Punkte, vor allem bei den gewichteten Verfahren, größere Schwankungen auf. Demnach ist hinsichtlich des Fehlers kein Vorteil für die zufällig gewählten Punkte erkennbar.

### 6.1.2 Fehler auf dem Rand

Wir möchten nun überprüfen, ob die gewichtete Kollokation ihren Sinn erfüllt, d.h. ob die Lösung auf dem Rand auch wirklich Null ist. Dafür plotten wir eine mit dem

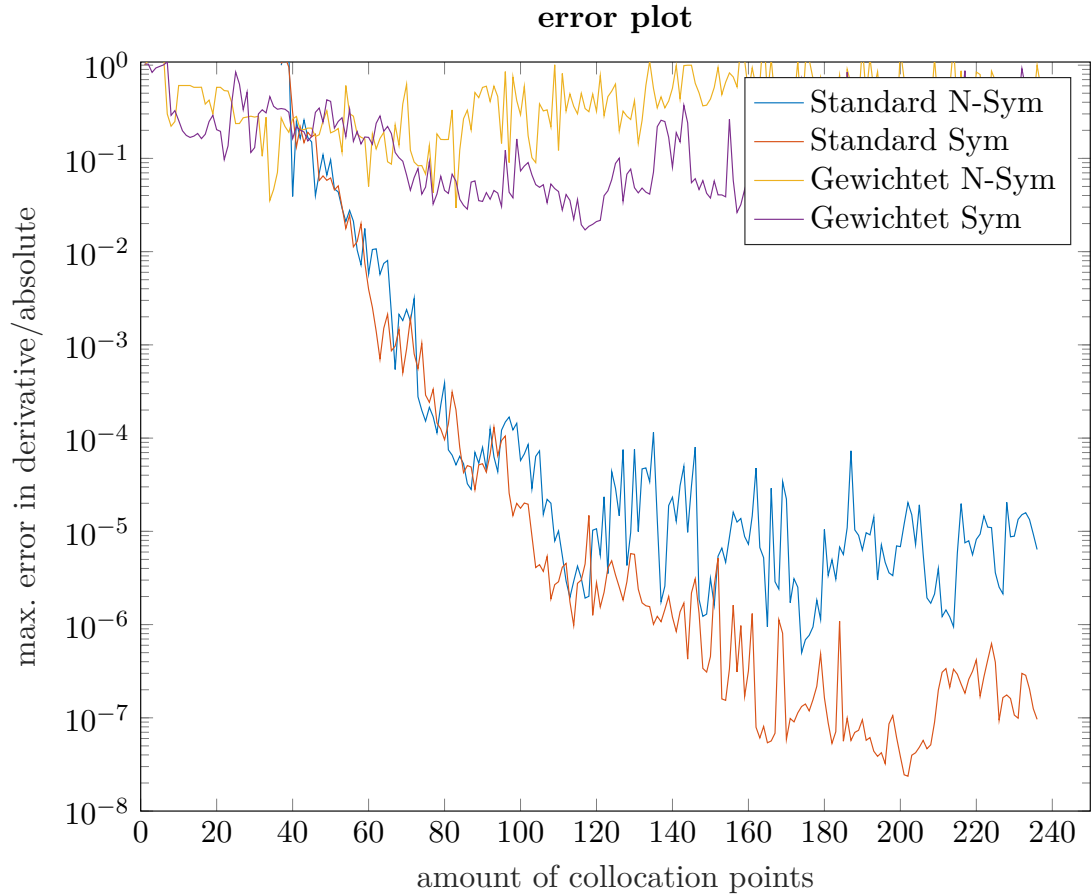


fig:error-random

Abbildung 6.5: Fehler bei zufällig verteilten Kollokationspunkten

Standardverfahren erstellte Lösung und eine mit dem gewichteten Verfahren erstellte Lösung in Abbildung 6.6 über einen Teil des Randes.

Bei der Standardkollokation sind deutlich Schwankungen über den Rand erkennbar, wohingegen der Rand bei der gewichteten Kollokation bis auf kleine numerische Ungenauigkeiten tatsächlich Null ist. Das Ziel der gewichteten Kollokation wurde also erreicht.

### 6.1.3 Testpunkte

Wir sind bisher nur auf die Wahl der Kollokationspunkte eingegangen, aber noch nicht auf die der Testpunkte. Dafür stellen wir den Fehler unserer numerischen Lösung in

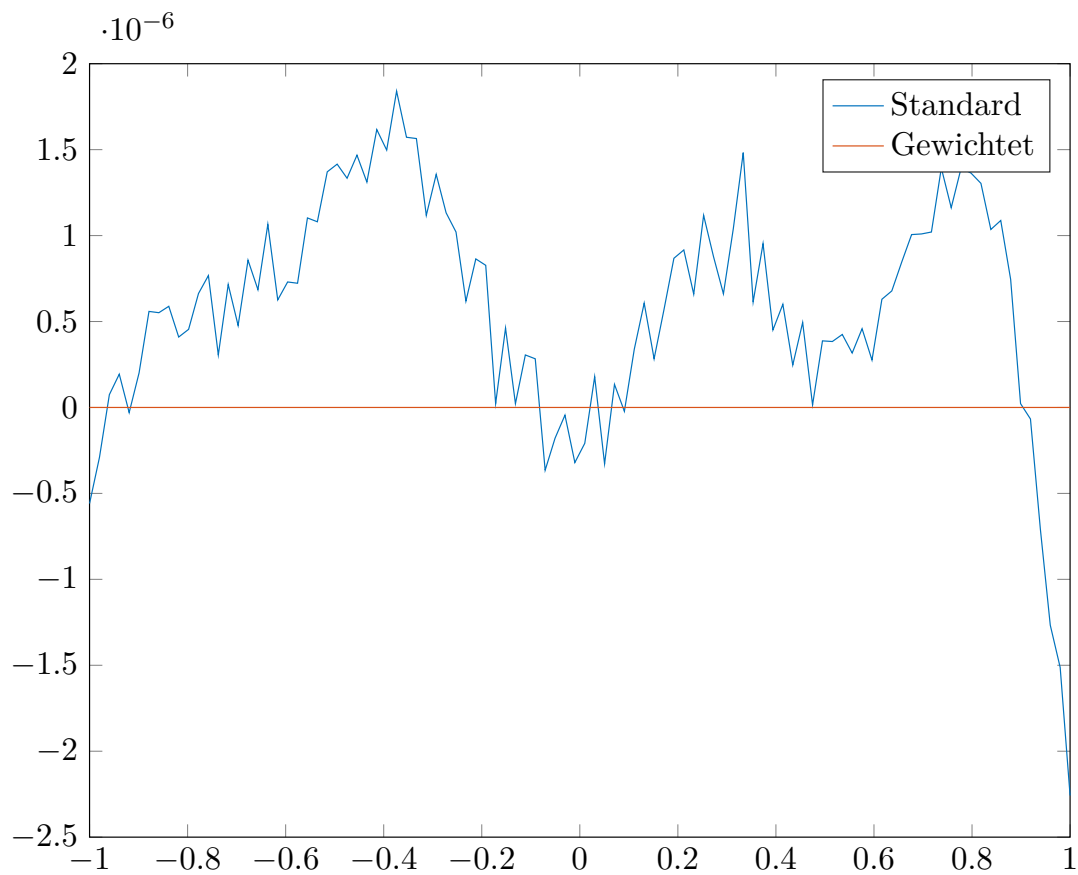


Abbildung 6.6: Rand bei gewichteter Kollokation

id-vergleich

Abbildung 6.7 bei gleichbleibenden Kollokationspunkten, aber bei unterschiedlichen Anzahlen von Testpunkten dar. Diese sind auch hier wieder in einem Gitter angeordnet.

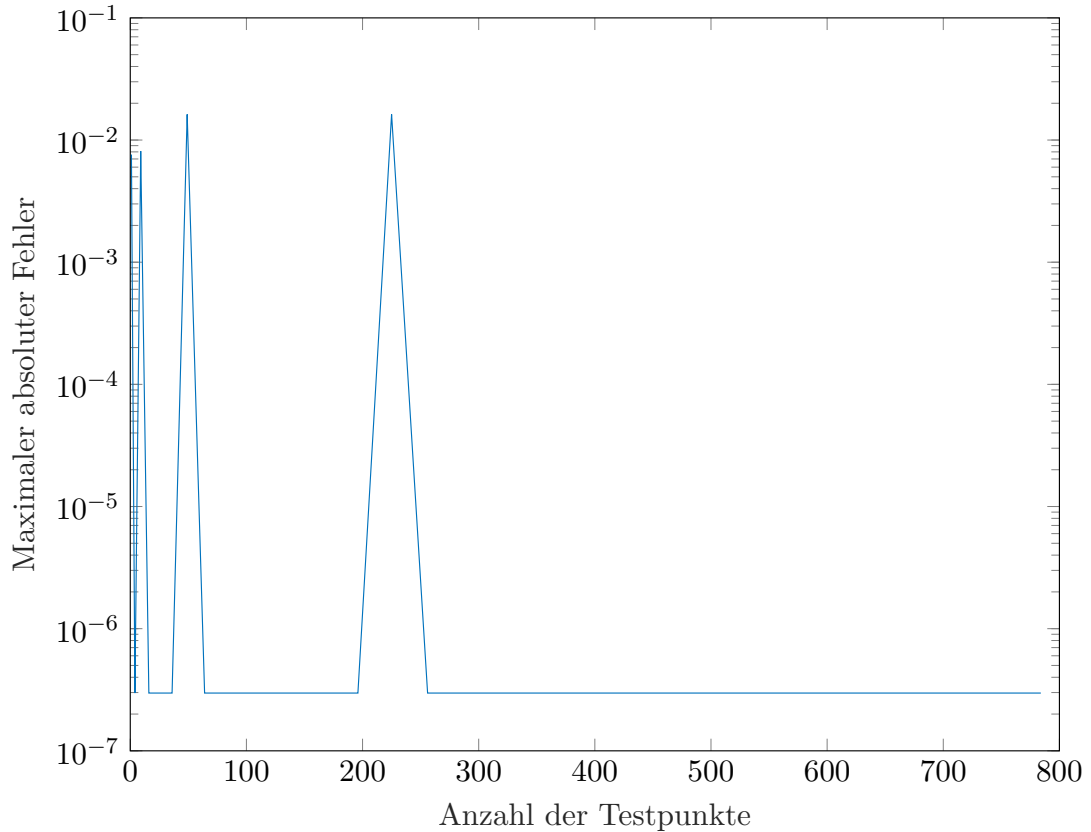


fig:testpunkte

Abbildung 6.7: Fehler bei unterschiedlicher Anzahl an Testpunkten

Wir erkennen, dass der Fehler bis auf wenige Ausreißer konstant bleibt. Damit ist die Wahl der Testpunkte beinahe egal. Die großen Fehler entstehen genau dann, wenn alle Testpunkte mit den Kollokationspunkten zusammenfallen. Den hier auftretenden Effekt nennt man Überanpassung. Die Lösung wird dabei zu gut an die Testdaten angepasst und verliert dabei an Genauigkeit, wenn man das ganze Gebiet  $\Omega$  betrachtet.

In Abbildung 6.8 ist der gewählte Parameter  $\gamma$  bei unterschiedlichen Testpunktanzahlen dargestellt. Dabei stellt man fest, dass genau dann, wenn ein großer Fehler auftritt auch ein großes  $\gamma$  gewählt wird. Wir erinnern uns an Abbildung 5.1, dass ein großes  $\gamma$  einem schmalen "Hütchen" der Kernfunktion entspricht. Das kann man so interpretieren, dass, wenn Test- und Kollokationspunkte zusammenfallen, die Ansatzfunktionen so gewählt werden, dass sie, wenn möglich, nur Einfluss auf einen Testpunkt, nämlich den, an dem sie angesetzt werden, nehmen. Erkennbar ist dies in Abbildung 6.9.



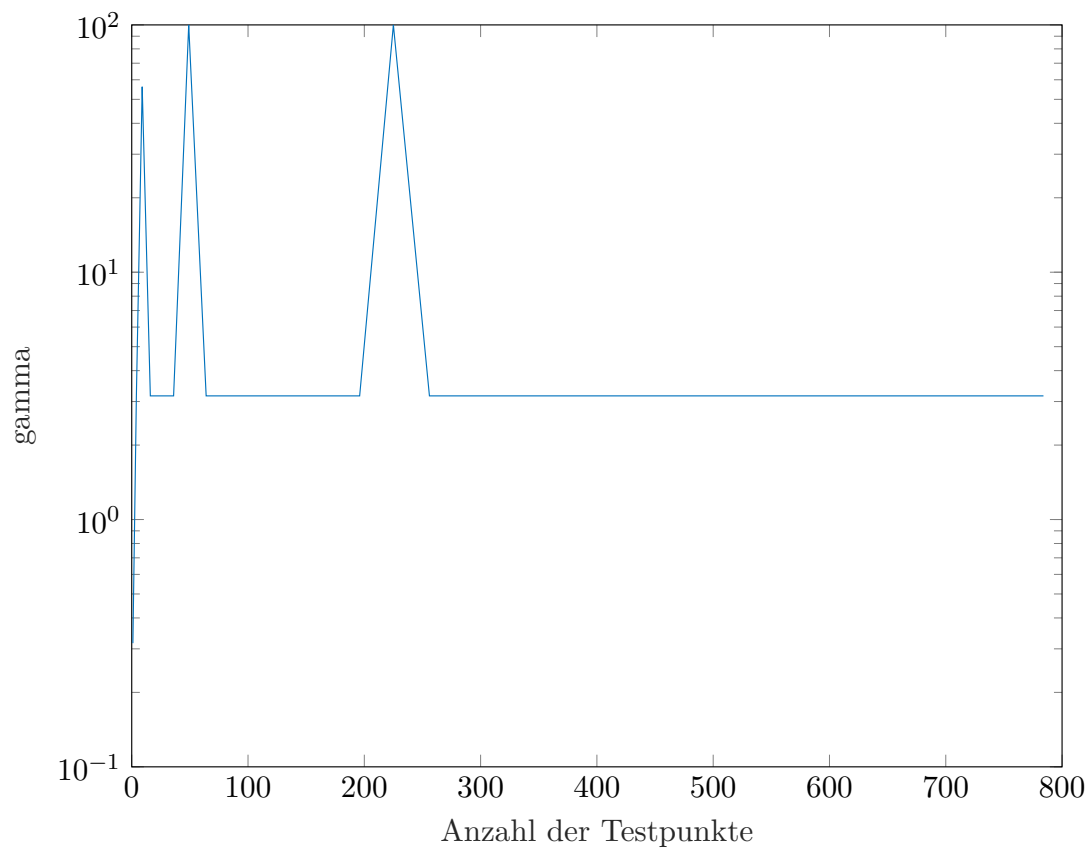


Abbildung 6.8: Gammawerte bei unterschiedlicher Anzahl an Testpunkten

unkte-gamma

So entsteht eine Lösung, die an den Testpunkten extrem gut angepasst ist, ansonsten der echten Lösung aber kaum ähnlich sieht.

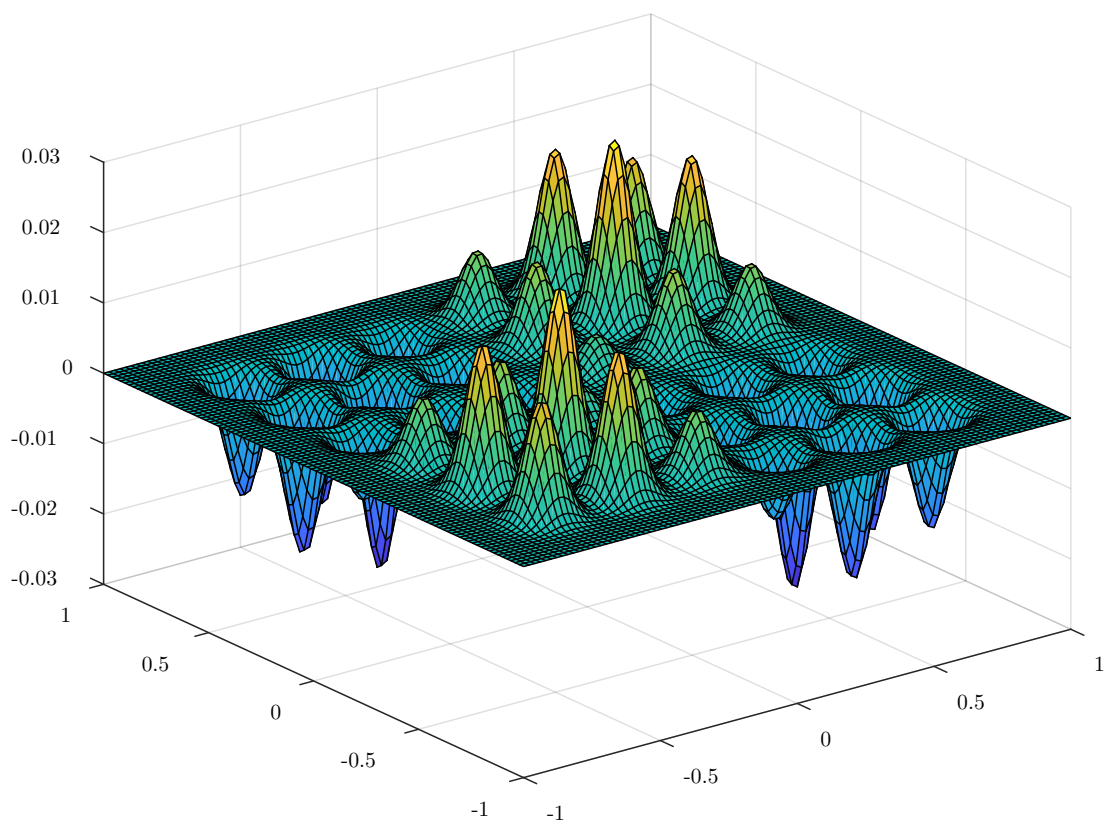


Abbildung 6.9: Gammawerte bei unterschiedlicher Anzahl an Testpunkten

fig:overfitting

# Literatur

- [1] *Schur product theorem*. 30.07.2018. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Schur\\_product\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Schur_product_theorem).
- [2] H. Wendland. *Scattered data approximation*. Bd. 17. Cambridge monographs on applied and computational mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- [3] G. Santin. *Approximation with Kernel Methods*. Stuttgart, 2017.
- [4] Y. C. Hon und R. Schaback. „On unsymmetric collocation by radial basis functions“. In: *Applied Mathematics and Computation* 119.2-3 (2001), S. 177–186.