

# Elliptische Randwertprobleme mit gewichteter Kernkollokation

Daniel Koch



BACHELORARBEIT

Nr. XXXXXXXXXXXX-A

eingereicht am  
Fachhochschul-Bachelorstudiengang

Mathematik

in Stuttgart

im Februar 2017

Diese Arbeit entstand im Rahmen des Gegenstands

## Einführung in die Tiefere Problematik 1

im

Sommersemester 2018

Betreuung:

Prof. Dr. Bernard Haasdonk

# Erklärung

Ich erkläre eidesstattlich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen nicht benutzt und die den benutzten Quellen entnommenen Stellen als solche gekennzeichnet habe. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Stuttgart, am 28. Februar 2017

Daniel Koch

# Inhaltsverzeichnis

<b>Erklärung</b>	<b>iii</b>
<b>Vorwort</b>	<b>vi</b>
<b>Kurzfassung</b>	<b>vii</b>
<b>Abstract</b>	<b>viii</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Standardkollokation . . . . .	2
1.1.1 Symmetrische Kollokation . . . . .	5
1.1.2 Nicht-Symmetrische Kollokation . . . . .	7
1.1.3 Motivation für die gewichtete Kollokation . . . . .	7
1.2 Gewichtete Kollokation . . . . .	8
1.2.1 Symmetrische Kollokation . . . . .	10
1.2.2 Nicht-Symmetrische Kollokation . . . . .	12
<b>2 Die Abschlussarbeit</b>	<b>13</b>
<b>3 Zum Arbeiten mit LaTeX</b>	<b>14</b>
<b>4 Abbildungen, Tabellen, Quellcode</b>	<b>15</b>
<b>5 Mathem. Formeln etc.</b>	<b>16</b>
<b>6 Umgang mit Literatur</b>	<b>17</b>
<b>7 Drucken der Abschlussarbeit</b>	<b>18</b>
<b>8 Schlussbemerkungen</b>	<b>19</b>
<b>A Technische Informationen</b>	<b>20</b>
<b>B Inhalt der CD-ROM/DVD</b>	<b>21</b>
<b>C Fragebogen</b>	<b>22</b>
<b>D LaTeX-Quellcode</b>	<b>23</b>

Inhaltsverzeichnis

v

**Quellenverzeichnis**

**24**

# Vorwort

# Kurzfassung

# Abstract

This should be a 1-page (maximum) summary of your work in English.



# Kapitel 1

## Einleitung

Unser Ziel ist es Lösungen von partielle Differentialgleichungen (PDEs) zu approximieren. Diese sind allgemein gegeben durch:

$$\begin{aligned}Lu(x) &= f(x), x \in \Omega \\ Bu(x) &= g(x), x \in \partial\Omega\end{aligned}$$

, wobei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $L$  ein linearer, beschränkter Differentialoperator und  $B$  ein linearer, beschränkter Auswertungsoperator ist.

Für den größten Teil dieser Arbeit werden wir folgende PDE im  $\mathbb{R}^2$  betrachten:

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= f(x), x \in \Omega \\ u(x) &= 0, x \in \partial\Omega\end{aligned}$$

Es genügt die Nullrandbedingung zu betrachten, da jede PDE auf eine mit Nullrandbedingung umgeformt werden kann.

HIER KOMMT DIE BEGRÜNDUNG!!

Wir wollen zur Approximation der PDE einen interpolierenden Ansatz wählen. Dazu müssen wir die Interpolation zunächst verallgemeinern.

**Definition 1.1.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine nicht leere Menge,  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum mit Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \in \mathcal{H}$  und  $\Lambda_N := \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\} \subset \mathcal{H}'$  eine Menge von linearen, stetigen und linear unabhängigen Funktionalen. Dann ist eine Funktion  $s_u \in \mathcal{H}$  der gesuchte Interpolant von  $u$ , wenn gilt, dass

$$\lambda_i(u) = \lambda_i(s_u), 1 \leq i \leq N$$

**Beispiel 1.2.** • Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $X_N := \{x_1, \dots, x_N\} \subset \Omega$  eine Menge von Punkten und  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum mit Funktionen, in dem die Punktauswertungsfunktionale  $\delta_{x_i}(f) = f(x_i)$ ,  $1 \leq i \leq N$  stetig sind. Dann bekommen wir die Standardinterpolation mit  $\Lambda_N := \{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_N}\} \subset \mathcal{H}'$ .

$$s(x_i) = \delta_{x_i}(s) = \delta_{x_i}(s_u) = s_u(x_i), 1 \leq i \leq N$$

- Mit  $\lambda_i := \delta_{x_i} \circ D^a$  für einen Multiindex  $a \in \mathbb{N}_0^d$  erhält man noch zusätzliche Informationen über die Ableitung der Funktion.

- Sei eine PDE gegeben:

$$Lu(x) = f(x), x \in \Omega$$

$$Bu(x) = g(x), x \in \partial\Omega$$

Sei  $X_N \subset \Omega$  eine Menge an Kollokationspunkten. Dann möchten wir, dass  $s_u$  die PDE in den Punkten  $X_N$  erfüllt, also:

$$Ls_u(x_i) = Lu(x_i) = f(x_i), x_i \in \Omega$$

$$Bs_u(x_i) = Bu(x_i) = g(x_i), x_i \in \partial\Omega$$

Wir müssen einen geeigneten Ansatz wählen um das Interpolationsproblem zu lösen, also einen  $N$ -dimensionalen Unterraum  $V_N := \text{span}\{\nu_1, \dots, \nu_N\} \subset \mathcal{H}$  und fordern, dass  $s_u \in V_N$ , also

$$s_u(x) := \sum_{j=1}^N \alpha_j \nu_j(x), x \in \Omega, \alpha \in \mathbb{R}^N$$

Also lassen sich die Interpolationsbedingungen schreiben als:

$$\lambda_i(u) = \lambda_i(s_u) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \lambda_i(\nu_j)$$

Diese lassen sich auch als lineares Gleichungssystem  $A_\Lambda \alpha = b$  schreiben mit  $(A_\Lambda)_{i,j} := \lambda_i(\nu_j)$ ,  $b_i := \lambda_i(u)$ .

## 1.1 Standardkollokation

Wir suchen jetzt nach geeigneten Ansatzfunktionen und einem Hilbertraum, in dem die Auswertungs- und Differentialfunktionale stetig sind. Dies führt uns zur Definition von Kern Funktionen mit denen wir einen Hilbertraum konstruieren werden, der uns das Geforderte liefern wird.

**Definition 1.3.** Sei  $\Omega$  eine nicht leere Menge. Ein reeller Kern auf  $\Omega$  ist eine symmetrische Funktion  $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Für alle  $N \in \mathbb{N}$  und für eine Menge  $X_N = \{x_i\}_{i=1}^N$  ist die Kern Matrix (oder Gram'sche Matrix)  $A := A_{K, X_N} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  definiert als  $A := [K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^N$ .

Ein Kern  $K$  heißt positiv definit (PD) auf  $\Omega$ , wenn für alle  $N \in \mathbb{N}$  und alle Mengen  $X_N$  mit paarweise verschiedenen Elementen  $x_{i=1}^N$  gilt, dass die Kern Matrix positiv semidefinit ist. Der Kern  $K$  heißt strikt positiv definit (SPD), falls die Kern Matrix positiv definit ist.

**Beispiel 1.4.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Dann sind folgende Funktionen Kerne auf  $\Omega$ :

- $K(x, y) := \exp(-\gamma \|x - y\|), \gamma > 0$
- $K(x, y) := (x, y)$

*Bemerkung 1.5.*  $\Omega$  kann eine beliebige Menge sein, es kann also auch ein Kern auf Strings oder Bildern definiert werden. Dies führt noch zu vielfältigeren Anwendungen.

Wir kommen mit der Definition von Kernen direkt zu den gesuchten Hilberträumen.

**Definition 1.6** (Reproduzierender Kern Hilbertraum). Sei  $\Omega$  eine nicht leere Menge und  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum mit Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ . Dann nennt man  $\mathcal{H}$  reproduzierender Kern Hilbert Raum (RKHR) auf  $\Omega$ , wenn eine Funktion  $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  existiert, sodass

1.  $K(\cdot, x) \in \mathcal{H}$  für alle  $x \in \Omega$
2.  $(f, K(\cdot, x))_{\mathcal{H}} = f(x)$  für alle  $x \in \Omega$ ,  $f \in \mathcal{H}$

*Bemerkung 1.7.* Die Funktion  $K$  in einem RKHR ist tatsächlich ein Kern nach Definition 1.3, welcher sogar positiv definit ist.

Bei Interpolationsproblemen kommen wir jedoch aus der anderen Richtung und haben zunächst einen Kern  $K$  gegeben und wollen damit eine Funktion approximieren. Also stellt sich die Frage ob zu jedem Kern  $K$  ein RKHR existiert. Diese wird durch folgenden Satz beantwortet:

**Satz 1.8** (Moore, Aronszajn). Sei  $\Omega$  eine nicht leere Menge und  $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ein positiv definiter Kern. Dann existiert genau ein RKHR  $\mathcal{H}_K(\Omega)$  mit reproduzierendem Kern  $K$ .

*Beweis.* SIEHE SKRIPT! □

Mit diesem Wissen können wir uns erste Eigenschaften von RKHR anschauen:

**Satz 1.9.** Sei  $\Omega$  eine nicht leere Menge und  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum mit Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gilt:

1.  $\mathcal{H}$  ist genau dann ein RKHR, wenn die Auswertungsfunktionale stetig sind.
2. Wenn  $\mathcal{H}$  ein RKHR mit Kern  $K$  ist, dann ist  $K(\cdot, x)$  der Riesz-Repräsentant des Funktionals  $\delta_x \in \mathcal{H}'$ .

*Beweis.* 1. Für alle  $f \in \mathcal{H}$  und alle  $x \in \Omega$  gilt:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |(f, K(\cdot, x))_{\mathcal{H}}| \leq \|f\|_{\mathcal{H}} \|K(\cdot, x)\|_{\mathcal{H}} \\ &= \|f\|_{\mathcal{H}} \sqrt{(K(\cdot, x), K(\cdot, x))_{\mathcal{H}}} = \|f\|_{\mathcal{H}} \sqrt{K(x, x)} \end{aligned}$$

, wobei für die erste und die letzte Gleichung die Reproduzierbarkeit des Kerns benutzt wurde.

Sei  $\mathcal{H}$  ein RKHR. Dann gilt mit dem eben gezeigten:

$$\begin{aligned} |\delta_x(f)| &= |f(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{H}} \sqrt{K(x, x)} \\ \Leftrightarrow \frac{|\delta_x(f)|}{\|f\|_{\mathcal{H}}} &\leq \sqrt{K(x, x)} \end{aligned}$$

Also ist  $\delta_x$  beschränkt und damit stetig.

Für die andere Richtung nehmen wir an, dass  $\delta_x \in \mathcal{H}'$  für alle  $x \in \Omega$ . Also existiert ein Riesz-Repräsentant  $\nu_{\delta_x} \in \mathcal{H}$ . Definieren wir  $K(\cdot, x) := \nu_{\delta_x}$ , dann ist

$K$  ein Kern. Es ist klar, dass  $K(\cdot, x) \in \mathcal{H}$  und nach der Definition des Riesz-Repräsentanten gilt:

$$(f, K(\cdot, x))_{\mathcal{H}} = (f, \nu_{\delta_x})_{\mathcal{H}} = \delta_x(f) = f(x)$$

2. Die Behauptung folgt sofort aus der Reproduzierbarkeit von  $K$ , da  $(f, K(\cdot, x))_{\mathcal{H}} = f(x)$  für alle  $x \in \Omega$  und alle  $f \in \mathcal{H}$  gilt.  $\square$

Wir haben also gesehen, dass in einem RKHR  $\mathcal{H}_K$  die Auswertungsfunktionale stetig sind. Da wir uns mit Differentialgleichungen beschäftigen, wollen wir auch Ableitungen auswerten. Dafür benötigen wir, dass diese ebenfalls in  $\mathcal{H}_K$  liegen.

**Satz 1.10.** *Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Angenommen  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ist offen,  $K$  ist SPD auf  $\Omega$  und  $K \in C^{2k}(\Omega \times \Omega)$ . Dann gilt für alle Multiindizes  $a \in \mathbb{N}_0^d$  mit  $|a| \leq k$  und alle  $x \in \Omega$ , dass  $D_2^a K(\cdot, x) \in \mathcal{H}_K(\Omega)$ .*

*Außerdem gilt für alle  $f \in \mathcal{H}_K(\Omega)$ :*

$$D^a f(x) = (f, D_2^a K(\cdot, x))_{\mathcal{H}_K(\Omega)}$$

*und damit dass  $\lambda := \delta_x \circ D^a$  stetig ist.*

*Beweis.* BEWEIS IST LANG

Der Beweis der Stetigkeit von  $\lambda := \delta_x \circ D^a$  verläuft komplett analog zum Beweis von 1.9.1.  $\square$

In Satz 1.9 haben wir gesehen, wie der Riesz-Repräsentant des Auswertungsfunktionals aussieht. Dies wollen wir jetzt auf alle Funktionale verallgemeinern.

**Satz 1.11.** *Sei  $K$  ein SPD Kern auf  $\Omega \neq \emptyset$ . Sei  $\lambda \in \mathcal{H}_K(\Omega)'$ . Dann ist  $\lambda^y K(\cdot, y) \in \mathcal{H}_K(\Omega)$  und es gilt  $\lambda(f) = (f, \lambda^y K(\cdot, y))_{\mathcal{H}_K(\Omega)}$  für alle  $f \in \mathcal{H}_K(\Omega)$ , also ist  $\lambda^y K(\cdot, y)$  der Riesz-Repräsentant von  $\lambda$ .*

*Beweis.* Da  $\lambda \in \mathcal{H}_K(\Omega)$  existiert ein Riesz-Repräsentant  $\nu_\lambda \in \mathcal{H}_K(\Omega)$  mit  $\lambda(f) = (f, \nu_\lambda)_{\mathcal{H}_K(\Omega)}$ . Außerdem ist  $f_x(y) := K(x, y)$  für alle  $x \in \Omega$  eine Funktion in  $\mathcal{H}_K(\Omega)$ . Dann bekommen wir:

$$\lambda^y K(x, y) = \lambda(f_x) = (f_x, \nu_\lambda)_{\mathcal{H}_K(\Omega)} = (K(\cdot, x), \nu_\lambda)_{\mathcal{H}_K(\Omega)} = \nu_\lambda(x)$$

Damit gilt  $\nu_\lambda(\cdot) = \lambda^y K(\cdot, y)$  und auch  $\lambda^y K(\cdot, y) \in \mathcal{H}_K(\Omega)$ .  $\square$

Jetzt fehlt nur noch die lineare Unabhängigkeit aller verwendeten Funktionale. Zunächst die der Auswertungsfunktionale:

**Satz 1.12.** *Sei  $\Omega$  eine nicht leere Menge und  $\mathcal{H}$  ein RKHR mit Kern  $K$ . Dann sind  $\{\delta_x, x \in \Omega\}$  genau dann linear unabhängig, wenn  $K$  SPD ist.*

*Beweis.* Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathcal{H}'$  und  $\nu_{\lambda_1}, \dots, \nu_{\lambda_n} \in \mathcal{H}$  die dazugehörigen Riesz Repräsentanten. Diese sind linear abhängig, wenn ein  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  existiert mit  $\lambda := \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i = 0$ ,

also dass  $\lambda(f) = 0$  für alle  $f \in \mathcal{H}$ . Das gilt genau dann, wenn die Riesz Repräsentanten linear abhängig sind, da

$$0 = \lambda(f) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i(f) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\nu_{\lambda_i}, f)_{\mathcal{H}} = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \nu_{\lambda_i}, f \right)_{\mathcal{H}}$$

Also gilt nach 1.9.2, dass  $\{\delta_x, x \in \Omega\}$  genau dann linear unabhängig sind, wenn  $\{K(\cdot, x), x \in \Omega\}$  linear unabhängig sind.

Um die strikte positive Definitheit nachzuweisen, betrachten wir die Matrix  $A = [K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^N$  für paarweise unterschiedliche Punkte  $x_i, 1 \leq i \leq N$ . Sei also  $\beta \in \mathbb{R}^n, \beta \neq 0$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \beta^T A \beta &= \sum_{i,j=1}^n \beta_i \beta_j K(x_i, x_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \beta_i \beta_j (K(\cdot, x_i), K(\cdot, x_j))_{\mathcal{H}} \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \beta_i K(\cdot, x_i), \sum_{j=1}^n \beta_j K(\cdot, x_j) \right)_{\mathcal{H}} \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n \beta_i K(\cdot, x_i) \right\|_{\mathcal{H}}^2 > 0 \end{aligned}$$

Für die letzte strikte Ungleichung benötigen wir die lineare Unabhängigkeit. Also gilt, dass  $K$  SPD ist, wenn  $\{\delta_x, x \in \Omega\}$  linear unabhängig sind.  $\square$

Und jetzt die der Auswertungen der Ableitungen:

**Satz 1.13.** *Sei  $K$  ein translationsinvarianter Kern auf  $\mathbb{R}^d$ , also  $K(x, y) = \Phi(x - y)$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^d$ . Sei  $k \in \mathbb{N}$  und angenommen, dass  $\Phi \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap C^{2k}(\mathbb{R}^d)$ . Sei  $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{N}_0^d$  mit  $|a_i| \leq k$  und sei  $X_N \subset \mathbb{R}^d$ . Angenommen, dass  $a_i \neq a_j$ , wenn  $x_i = x_j$ , dann sind die Funktionale  $\Lambda_N := \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}, \lambda_i := \delta_{x_i} \circ D^{a_i}$  linear unabhängig in  $\mathcal{H}_K(\mathbb{R}^d)$ .*

*Beweis.* BUCH ODER SKRIPT  $\square$

Damit haben wir alle nötigen Werkzeuge um die Interpolation durchzuführen. Wir haben Ansatzfunktionen  $K$ , den dazugehörigen Hilbertraum  $\mathcal{H}_K(\Omega)$ , die Stetigkeit und lineare Unabhängigkeit aller benötigten Operatoren. Jetzt müssen wir nur noch einen geeigneten Ansatz wählen.

### 1.1.1 Symmetrische Kollokation

Sei wieder  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt,  $L, B$  lineare Differentialoperatoren,  $K$  ein positiv definiter Kern und folgendes Problem gegeben:

$$\begin{aligned} Lu(x) &= f(x), x \in \Omega \\ Bu(x) &= g(x), x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Für ein  $N \in \mathbb{N}$  betrachten wir die Menge  $X_N \subset \Omega$ , die wir in  $N_{in}$  Punkte im Inneren und  $N_{bd}$  Punkte auf dem Rand aufteilen. Also haben wir die beiden Mengen

$$\begin{aligned} X_{in} &= X_N \cap \Omega \\ X_{bd} &= X_N \cap \partial\Omega \end{aligned}$$

Wir definieren die Menge  $\Lambda_N = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$  an linearen Funktionalen mit

$$\lambda_i = \begin{cases} \delta_{x_i} \circ L & x_i \in \Omega \\ \delta_{x_i} \circ B & x_i \in \partial\Omega \end{cases}$$

Wir wissen aus Satz 1.9, dass in  $\mathcal{H}_K(\Omega)$  alle  $\lambda_i$  stetig und aus Satz 1.13, dass sie linear unabhängig sind. Als Ansatzfunktionen, also den Unterraum  $V_N \subset \mathcal{H}_K(\Omega)$ , wählen wir die Riesz Repräsentanten der  $\lambda_i$ :

$$\begin{aligned} V_N &= \text{span}\{\lambda_1^y K(x, y), \dots, \lambda_N^y K(x, y)\} \\ &= \text{span}\{(\delta_{x_1} \circ L)^y K(x, y), \dots, (\delta_{x_{N_{in}}} \circ L)^y K(x, y), (\delta_{x_{N_{in}+1}} \circ B)^y K(x, y), \dots, (\delta_{x_N} \circ B)^y K(x, y)\} \\ &=: \text{span}\{\nu_1, \dots, \nu_N\} \end{aligned}$$

, wobei der hochgesetzte Index  $y$  bedeutet, dass der Operator auf das zweite Argument angewandt wird.

Damit bekommen wir folgenden Interpolanten:

$$\begin{aligned} s_u(x) &= \sum_{j=1}^N \alpha_j \lambda_j^y K(x, y) \\ &= \sum_{j=1}^{N_{in}} \alpha_j (\delta_{x_j} \circ L)^y K(x, y) + \sum_{j=N_{in}+1}^N \alpha_j (\delta_{x_j} \circ B)^y K(x, y) \end{aligned}$$

Die  $\alpha_j$  erhält man als Lösung des lineares Gleichungssystem (LGS)  $A\alpha = b$  mit  $A_{i,j} := (\nu_i, \nu_j)_{\mathcal{H}_K}$ , da

$$\langle \lambda_i, s_u \rangle = \left\langle \lambda_i, \sum_{j=1}^N \alpha_j \nu_j \right\rangle = \sum_{j=1}^N \alpha_j \langle \lambda_i, \nu_j \rangle \stackrel{1.11}{=} \sum_{j=1}^N \alpha_j (\nu_j, \nu_i)$$

, also

$$\begin{pmatrix} A_{L,L} & A_{L,B} \\ A_{L,B}^T & A_{B,B} \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} b_L \\ b_B \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} (A_{L,L})_{i,j} &= (\delta_{x_i} \circ L)^x (\delta_{x_j} \circ L)^y K(x, y), x_i, x_j \in X_{in} \\ (A_{L,B})_{i,j} &= (\delta_{x_i} \circ L)^x (\delta_{x_j} \circ B)^y K(x, y), x_i \in X_{in}, x_j \in X_{bd} \\ (A_{B,B})_{i,j} &= (\delta_{x_i} \circ B)^x (\delta_{x_j} \circ B)^y K(x, y), x_i, x_j \in X_{bd} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(b_L)_i &= f(x_i), x_i \in X_{in} \\ (b_B)_i &= g(x_i), x_i \in X_{bd}\end{aligned}$$

Das LGS ist lösbar, da  $A$  offensichtlich symmetrisch und positiv definit ist, da:

$$\alpha^T A \alpha = \sum_{i,j=1}^N \alpha_i \alpha_j (\nu_i, \nu_j)_{\mathcal{H}_K} = \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i \nu_i, \sum_{j=1}^N \alpha_j \nu_j \right)_{\mathcal{H}_K} = \left\| \sum_{i=1}^N \alpha_i \nu_i \right\|_{\mathcal{H}_K}^2 > 0$$

Für die letzte Abschätzung benutzen wir die lineare Unabhängigkeit der Funktionale aus Satz 1.13.

### 1.1.2 Nicht-Symmetrische Kollokation

Sei die gleiche Problemstellung wie im vorherigen Kapitel gegeben. Wir wählen jedoch einen anderen Unterraum  $V_N$  für die Ansatzfunktionen:

$$V_N := \text{span}\{K(x, x_1), \dots, K(x, x_N)\}$$

Damit bekommen wir folgenden Interpolanten:

$$s_u(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j K(x, x_j)$$

Die  $\alpha_i$  erhält man wieder als Lösung des LGS  $A\alpha = b$  mit

$$A := \begin{pmatrix} A_L \\ A_B \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned}(A_L)_{i,j} &= (\delta_{x_i} \circ L)^x K(x, x_j), x_i \in X_{in}, x_j \in X_N \\ (A_B)_{i,j} &= (\delta_{x_i} \circ B)^x K(x, x_j), x_i \in X_{bd}, x_j \in X_N\end{aligned}$$

und  $b$  wie im vorherigen Abschnitt.

Der Vorteil dieses Ansatzes ist, dass er wesentlich simpler ist. Er benötigt nur eine Anwendung eines Operators zum Aufstellen von  $A$  und keine für den Interpolanten selbst. Ein großer Nachteil ist aber, dass nicht gewährleistet werden kann, dass die Matrix  $A$  invertierbar ist. Es kann also durch schlechte Wahl der Stützstellen passieren, dass das LGS nicht lösbar ist.

### 1.1.3 Motivation für die gewichtete Kollokation

Die Standardkollokation hat, egal ob symmetrisch oder nicht-symmetrisch, das Problem, dass wir die Punkte im Inneren und auf dem Rand unseres Definitionsgebietes benötigen. Dies macht zum einen die Implementierung etwas komplexer, da man auch da die Trennung der beiden Mengen programmieren muss, zum anderen werden die Nullrandwerte nicht zwingend genau angenommen. In Abbildung 1.1 ist die approximierte Lösung einer PDE über den Rand geplottet. Man erkennt deutlich, wo die Stützstellen der Ansatzfunktionen liegen und die Schwankungen zwischen den Stützstellen.

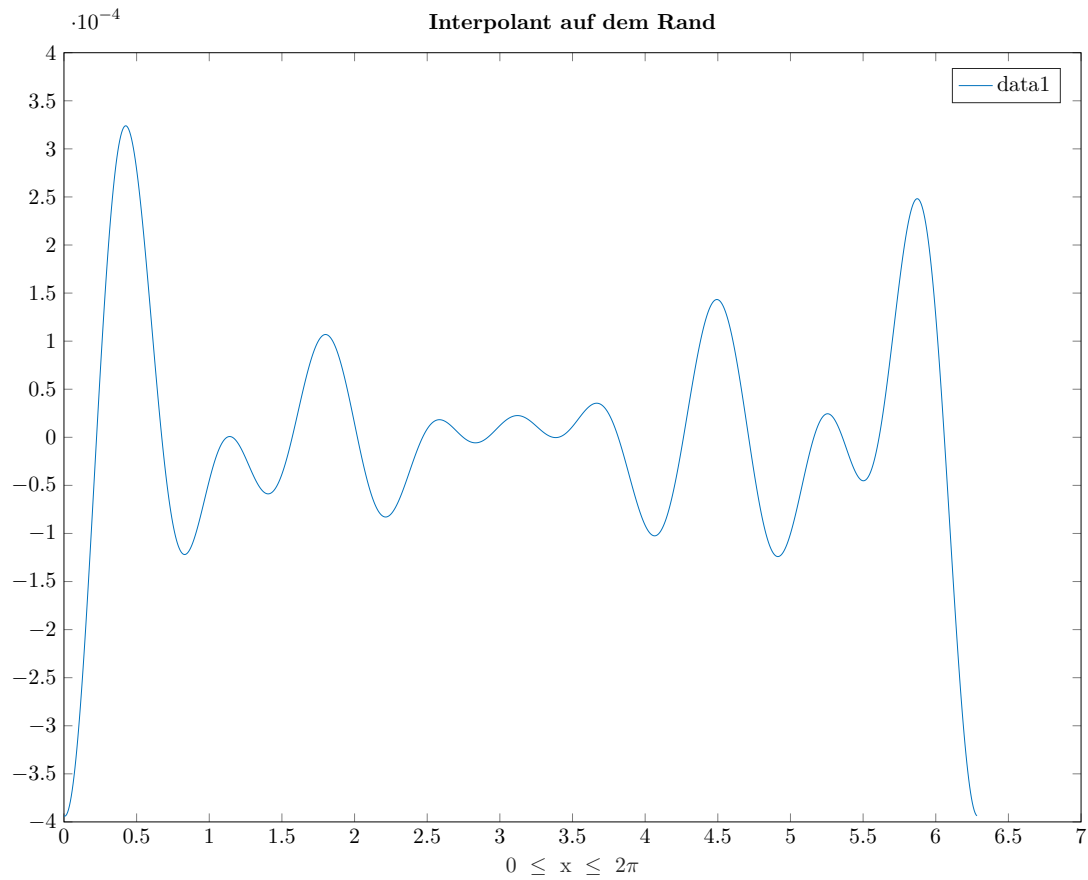


Abbildung 1.1: Plot eines Interpolanten über den Rand des Gebietes

## 1.2 Gewichtete Kollokation

Wir wollen nun beide Probleme mit der selben Idee lösen. Dafür führen wir Gewichtsfunktionen ein.

**Definition 1.14.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt. Eine Funktion  $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Gewichtsfunktion auf  $\Omega$ , wenn gilt:

1.  $w(x) > 0$  für alle  $x \in \Omega$
2.  $w(x) = 0$  für alle  $x \in \partial\Omega$
3.  $w(x) < 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$

**Satz 1.15.** Seien  $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$  zwei offene und beschränkte Mengen und  $w_1, w_2$  die dazugehörigen Gewichtsfunktionen. Dann gilt:

1. Für das Komplement  $\Omega^C$  gilt:  $w = -w_1$
2. Für die Vereinigung  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  gilt:  $w = w_1 + w_2 + \sqrt{w_1^2 + w_2^2}$
3. Für den Schnitt  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  gilt:  $w = w_1 + w_2 - \sqrt{w_1^2 + w_2^2}$



*Beweis.* 1. • Sei  $x \in \Omega^C$ .

$$w(x) = -w_1(x) > 0$$

- Sei  $x \in \partial\Omega^C$

$$w(x) = -w_1(x) = 0$$

- Sei  $x \in \Omega$

$$w(x) = -w_1(x) < 0$$

2. • Sei  $x \in \Omega_1, x \in \Omega_2. \Rightarrow w_1 > 0, w_2 > 0$

$$w = w_1 + w_2 + \sqrt{w_1^2 + w_2^2} > 0$$

- Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit (oBdA)  $x \in \Omega_1, x \notin \Omega_2. \Rightarrow w_1 > 0, w_2 < 0$

$$w = w_1 + w_2 + \sqrt{w_1^2 + w_2^2} > w_1 + w_2 + \underbrace{\sqrt{w_2^2}}_{=|w_2|=-w_2} = w_1 + w_2 - w_2 = w_1 > 0$$

- Sei  $x \notin \Omega_1, x \notin \Omega_2. \Rightarrow w_1 < 0, w_2 < 0$

$$\begin{aligned} w &= w_1 + w_2 + \sqrt{w_1^2 + w_2^2} \stackrel{!}{<} 0 \\ &\Leftrightarrow -w_1 - w_2 > \sqrt{w_1^2 + w_2^2} \\ &\Leftrightarrow w_1^2 + \underbrace{2w_1w_2}_{>0} + w_2^2 > w_1^2 + w_2^2 \end{aligned}$$

- Sei oBdA  $x \in \partial\Omega_1, x \notin \Omega_2. \Rightarrow w_1 = 0, w_2 < 0$

$$w = w_1 + w_2 + \sqrt{w_1^2 + w_2^2} = w_2 + \sqrt{w_2^2} = w_2 - w_2 = 0$$

- Sei oBdA  $x \in \partial\Omega_1, x \in \Omega_2. \Rightarrow w_1 = 0, w_2 > 0$

$$w = w_1 + w_2 + \sqrt{w_1^2 + w_2^2} = w_2 + \sqrt{w_2^2} > 0$$

3. • Sei  $x \in \Omega_1, x \in \Omega_2. \Rightarrow w_1 > 0, w_2 > 0$

$$\begin{aligned} w &= w_1 + w_2 - \sqrt{w_1^2 + w_2^2} \stackrel{!}{>} 0 \\ &\Leftrightarrow w_1 + w_2 > \sqrt{w_1^2 + w_2^2} \\ &\Leftrightarrow (w_1 + w_2)^2 > w_1^2 + w_2^2 \\ &\Leftrightarrow w_1^2 + 2w_1w_2 + w_2^2 > w_1^2 + w_2^2 \\ &\Leftrightarrow 2w_1w_2 > 0 \end{aligned}$$

- Sei oBdA  $x \in \Omega_1, x \notin \Omega_2. \Rightarrow w_1 > 0, w_2 < 0$

$$w = w_1 + w_2 - \sqrt{w_1^2 + w_2^2} < w_1 + w_2 - \sqrt{w_1^2} = w_1 + w_2 - w_1 = w_2 < 0$$

- Sei oBdA  $x \in \partial\Omega_1, x \in \Omega_2. w_1 = 0, w_2 > 0$

$$w = w_1 + w_2 - \sqrt{w_1^2 + w_2^2} = w_2 - \sqrt{w_2^2} = 0$$

- Sei oBdA  $x \in \partial\Omega_1, x \notin \Omega_2. w_1 = 0, w_2 < 0$

$$w = w_1 + w_2 - \sqrt{w_1^2 + w_2^2} = w_2 - \sqrt{w_2^2} = 2w_2 < 0$$

- Sei  $x \notin \Omega_1, x \notin \Omega_2. \Rightarrow w_1 < 0, w_2 < 0$

$$w = w_1 + w_2 - \sqrt{w_1^2 + w_2^2} < 0$$

MENGEN NOCH KORRIGIEREN

□

**Beispiel 1.16.** Sei  $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ . Dann können wir  $\Omega$  schreiben als  $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$  mit  $\Omega_1 = [-1, 1] \times [-\infty, \infty), \Omega_2 = (-\infty, \infty] \times [-1, 1]$ . Dann sind

$$w_1(x, y) = -x^2 + 1$$

$$w_2(x, y) = -y^2 + 1$$

Gewichtsfunktionen auf  $\Omega_1$  bzw.  $\Omega_2$ . Nach Satz 1.15 ist dann die Gewichtsfunktion für  $\Omega$  gegeben durch:

$$\begin{aligned} w(x, y) &= w_1(x, y) + w_2(x, y) - \sqrt{w_1(x, y)^2 + w_2(x, y)^2} \\ &= -x^2 + 1 - y^2 + 1 - \sqrt{(-x^2 + 1)^2 + (-y^2 + 1)^2} \\ &= -x^2 - y^2 + 2 - \sqrt{x^4 - 2x^2 + y^4 - 2y^2 + 2} \end{aligned}$$

Wir möchten jetzt Kern und Gewichtsfunktion verknüpfen und bekommen damit eine neue Funktion, die auf dem Rand unseres Definitionsgebiets konstant Null ist. Dazu betrachten wir wieder zwei verschiedene Ansätze.

### 1.2.1 Symmetrische Kollokation

**Satz 1.17.** Sei  $\Omega$  eine Menge,  $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ein PD Kern und  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \setminus 0$  eine Funktion. Dann ist

$$K'(x, y) := g(x)K(x, y)g(y)$$

ein Kern und es gilt für den entsprechenden RKHR:

$$\mathcal{H}_{K'}(\Omega) = g\mathcal{H}_K(\Omega) := \{gf \mid f \in \mathcal{H}_K(\Omega)\}$$

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass  $\tilde{K}(x, y) := g(x)g(y)$  ein PD Kern ist.

Die Symmetrie ist offensichtlich, da

$$\tilde{K}(x, y) = g(x)g(y) = g(y)g(x) = \tilde{K}(y, x)$$

Zur positiven Definitheit betrachten wir eine Punktmenge  $X_N := \{x_i \in \Omega | 1 \leq i \leq N\} \subset \Omega$ . Wir erhalten für die Kernmatrix

$$A = \begin{pmatrix} g(x_1)g(x_1) & \cdots & g(x_1)g(x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(x_N)g(x_1) & \cdots & g(x_N)g(x_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{pmatrix} (g(x_1) \cdots g(x_N)) := \bar{g}\bar{g}^T$$

und damit für alle  $\alpha \neq 0$

$$\alpha^T A \alpha = \alpha^T (\bar{f}\bar{f}^T) \alpha = (\alpha^T \bar{f}) (\bar{f}^T \alpha) = \|\bar{f}^T \alpha\| \geq 0$$

Also ist  $\tilde{K}$  ein PD Kern.

Wir müssen noch zeigen, dass  $K'(x, y) = f(x)K(x, y)f(y) = K(x, y)\tilde{K}(x, y)$  ein PD Kern ist.

Die Symmetrie funktioniert ähnlich wie gerade:

$$K'(x, y) = K(x, y)\tilde{K}(x, y) = K(y, x)\tilde{K}(y, x) = K'(y, x)$$

Für die positive Definitheit betrachten wir wieder die Kernmatrix.

$$\begin{aligned} K &= \begin{pmatrix} K_1(x_1, x_1)K_2(x_1, x_1) & \cdots & K_1(x_1, x_N)K_2(x_1, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_1(x_N, x_1)K_2(x_N, x_1) & \cdots & K_1(x_N, x_N)K_2(x_N, x_N) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} K_1(x_1, x_1) & \cdots & K_1(x_1, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_1(x_N, x_1) & \cdots & K_1(x_N, x_N) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} K_2(x_1, x_1) & \cdots & K_2(x_1, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_2(x_N, x_1) & \cdots & K_2(x_N, x_N) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

,wobei  $\circ$  das punktweise Produkt der beiden Matrizen bezeichnet. Die beiden letzten Matrizen sind positiv semidefinit und damit nach dem Satz von Schur auch das Produkt der beiden.

Es fehlt noch der zweite Teil des Satzes. Dafür stellen wir zunächst fest, dass

$$K'(x, y) = g(x)K(x, y)g(y) \in g\mathcal{H}_K(\Omega)$$

Als nächstes zeigen wir, dass  $g\mathcal{H}_K(\Omega)$  tatsächlich ein Hilbertraum ist. Sei dafür

$$\begin{aligned} s : \mathcal{H}_{K'}(\Omega) &\rightarrow \mathcal{H}_K(\Omega) \\ f &\mapsto gf \end{aligned}$$

$s$  ist bijektiv, da  $g \neq 0$  ist. Damit können wir auf  $\mathcal{H}_K(\Omega)$  eine Norm definieren:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\mathcal{H}_K(\Omega)} : \mathcal{H}_K(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ gf &\mapsto \|s^{-1}(gf)\|_{\mathcal{H}'_K(\Omega)} = \|f\|_{\mathcal{H}'_K(\Omega)} \end{aligned}$$

Damit wird  $\mathcal{H}_K(\Omega)$  zu einem Hilbertraum. Jetzt zeigen wir noch die Reproduzierbarkeit auf  $\mathcal{H}_K(\Omega)$ , dann folgt aus der Eindeutigkeit des Kerns aus Satz ?? die Behauptung. Sei dafür  $x \in \Omega$  und  $h = gf \in \mathcal{H}_K(\Omega)$ .

$$\begin{aligned}
 (h, K(\cdot, x))_{\mathcal{H}_K(\Omega)} &= (gf, gK'(\cdot, x)g(x))_{\mathcal{H}_K(\Omega)} \\
 &= g(x) (gf, gK'(\cdot, x))_{\mathcal{H}_K(\Omega)} \\
 &= g(x) (f, K'(\cdot, x))_{\mathcal{H}'_K(\Omega)} \\
 &= g(x)f(x) \\
 &= h(x)
 \end{aligned}$$

□

*Bemerkung 1.18.* Der Beweis von Satz 1.17 zeigt allgemeiner, dass für zwei beliebige PD Kerne  $K_1, K_2 : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und eine Funktion  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  auch folgende Funktionen PD Kerne sind:

$$\begin{aligned}
 K(x, y) &:= K_1(x, y)K_2(x, y) \\
 K(x, y) &:= g(x)g(y)
 \end{aligned}$$

### 1.2.2 Nicht-Symmetrische Kollokation

## Kapitel 2

### Die Abschlussarbeit

## Kapitel 3

# Zum Arbeiten mit LaTeX

## Kapitel 4

# Abbildungen, Tabellen, Quellcode

## Kapitel 5

# Mathematische Formeln, Gleichungen und Algorithmen



## Kapitel 6

# Umgang mit Literatur und anderen Quellen

[Drake1948]

## Kapitel 7

### Drucken der Abschlussarbeit

Kapitel 8

Schlussbemerkungen

## Anhang A

# Technische Informationen

**PDE** partielle Differentialgleichung

**PD** positiv definit

**SPD** strikt positiv definit

**RKHR** reproduzierender Kern Hilbert Raum

**LGS** lineares Gleichungssystem

**oBdA** ohne Beschränkung der Allgemeinheit

Anhang B

Inhalt der CD-ROM/DVD

Anhang C

Fragebogen

Anhang D

LaTeX-Quellcode

## Quellenverzeichnis



# Messbox zur Druckkontrolle

— Druckgröße kontrollieren! —



— Diese Seite nach dem Druck entfernen! —