Elliptische Randwertprobleme mit gewichteter Kernkollokation

Daniel Koch

BACHELORARBEIT

Nr. XXXXXXXXXX-A

eingereicht am
Fachhochschul-Bachelorstudiengang

Mathematik

in Stuttgart

im Februar 2017

Diese Arbeit entstand im Rahmen des Gegenstands

Einführung in die Tiefere Problematik 1

im

Sommersemester 2018

Betreuung:

Prof. Dr. Bernard Haasdonk

Erklärung

Ich erkläre eidesstattlich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen nicht benutzt und die den benutzten Quellen entnommenen Stellen als solche gekennzeichnet habe. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Stuttgart, am 28. Februar 2017

Daniel Koch

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Kurzfassung

Abstract

This should be a 1-page (maximum) summary of your work in English.

Kapitel 1

Einleitung

Unser Ziel ist es Lösungen von partielle Differentialgleichungen (PDEs) zu approximieren. Diese sind allgemein gegeben durch:

$$Lu(x) = f(x), x \in \Omega$$
$$Bu(x) = g(x), x \in \partial\Omega$$

, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, L ein linearer, beschränkter Differentialoperator und B ein linearer, beschränkter Auswertungsoperator ist.
Für den größten Teil dieser Arbeit werden wir folgende PDE im $\mathbb{R}^2$ betrachten:

$$\Delta u(x) = f(x), x \in \Omega$$
$$u(x) = 0, x \in \partial\Omega$$

Es genügt die Nullrandbedingung zu betrachten, da jede PDE auf eine mit Nullrandbedingung umgeformt werden kann.
HIER KOMMT DIE BEGRÜNDUNG!!

Wir wollen zur Approximation der PDE einen interpolierenden Ansatz wählen. Dazu müssen wir die Interpolation zunächst verallgemeinern.

Definition 1.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine nicht leere Menge, $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum mit Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{H}$ und $\Lambda_N := \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\} \subset \mathcal{H}'$ eine Menge von linearen, stetigen und linear unabhängigen Funktionalen. Dann ist eine Funktion $s_u \in \mathcal{H}$ der gesuchte Interpolant, wenn gilt, dass

$$\lambda_i(s) = \lambda_i(s_u), 1 \leq i \leq N$$

Beispiel 1.2.

- Sei $X_N := \{x_1, \dots, x_N\} \subset \Omega$ eine Menge von Punkten und $\Lambda_N := \{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_N}\} \subset \mathcal{H}'$ die Punktauswertungsfunktionale $\delta_{x_i}(f) = f(x_i), 1 \leq i \leq N$. (STETIG?!) Dann bekommen wir die Standardinterpolation mit

$$s(x_i) = \delta_{x_i}(s) = \delta_{x_i}(s_u) = s_u(x_i), 1 \leq i \leq N$$

- Mit $\lambda_i := \delta_{x_i} \circ D^a$ für einen Multiindex $a \in \mathbb{N}_0^d$ erhält man noch zusätzliche Informationen über die Ableitung der Funktion.

- Sei eine PDE gegeben:

$$
\begin{aligned}
Lu(x) &= f(x), x \in \Omega \\
Bu(x) &= g(x), x \in \partial\Omega
\end{aligned}
$$

  Sei $X_N \subset \Omega$ eine Menge an Kollokationspunkten. Dann möchten wir, dass s_u die PDE in den Punkten X_N erfüllt, also:

$$
\begin{aligned}
Ls_u(x_i) &= Lu(x_i) = f(x_i), x_i \in \Omega \\
Bs_u(x_i) &= Bu(x_i) = g(x_i), x_i \in \partial\Omega
\end{aligned}
$$

Wir müssen einen geeigneten Ansatz wählen um das Interpolationsproblem zu lösen, also einen N-dimensionalen Unterraum $V_N := \text{span}\{\nu_1, \dots, \nu_N\} \subset \mathcal{H}$ und fordern, dass $s_u \in V_N$, also

$$s_u(x) := \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \nu_j(x), x \in \Omega$$

Also lassen sich die Interpolationsbedingungen schreiben als:

$$\lambda_i(u) = \lambda_i(s_u) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \lambda_i(\nu_j)$$

Diese Bedingungen lassen sich umschreiben als lineares Gleichungssystem $A_\Lambda \alpha = b$ mit $(A_\Lambda)_{i,j} := \lambda_i(\nu_j), b_i := \lambda_i(u)$.

1.1 Standardkollokation

Wir suchen jetzt nach geeigneten Ansatzfunktionen und einem Hilbertraum, in dem die Auswertungs- und Differentialfunktionale stetig sind. Dies führt uns zur Definition von Kern Funktionen mit denen wir einen Hilbertraum konstruieren werden, der uns das Geforderte liefern wird.

Definition 1.3. Sei Ω eine nicht leere Menge. Ein reeller Kern auf Ω ist eine symmetrische Funktion $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$.
Für alle $N \in \mathbb{N}$ und für eine Menge $X_N = \{x_i\}_{i=1}^N$ ist die Kern Matrix (oder Gram'sche Matrix) $A := A_{K,X_N} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ definiert als $A := [K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^N$.
Ein Kern K heißt positiv definit (PD) auf Ω, wenn für alle $N \in \mathbb{N}$ und alle Mengen X_N mit paarweise verschiedenen Elementen $x_{i=1}^N$ gilt, dass die Kern Matrix positiv definit ist. Der Kern K heißt strikt positiv definit (SPD), falls die Kern Matrix strikt positiv definit ist.

Beispiel 1.4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann sind folgende Funktionen Kerne auf Ω:

- $K(x, y) := \exp(-\gamma\|x - y\|), \gamma > 0$
- $K(x, y) := (x, y)$

Wir kommen mit dieser Definition direkt zu den gesuchten Hilberträumen.

Definition 1.5 (Reproduzierender Kern Hilbertraum)**.** Sei Ω eine nicht leere Menge und $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum mit Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und Skalarprodut $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$. Dann nennt man $\mathcal{H}$ einen reproduzierender Kern Hilbert Raum (RKHR) auf Ω, wenn eine Funktion $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ existiert, sodass

1. $K(\cdot, x) \in \mathcal{H}$ für alle $x \in \Omega$
2. $(f, K(\cdot, x))_{\mathcal{H}} = f(x)$ für alle $x \in \Omega$, $f \in \mathcal{H}$

Bei Interpolationsproblemen haben wir zunächst einen Kern K gegeben und wollen damit eine Funktion approximieren. Also stellt sich die Frage ob zu jedem Kern K ein RKHR existiert. Diese wird durch folgenden Satz beantwortet:

Satz 1.6 (Moore, Aronszajn)**.** *Sei Ω eine nicht leere Menge und $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ ein positiv definiter Kern. Dann existiert genau ein RKHR $\mathcal{H}_K(\Omega)$ mit reproduzierendem Kern K.*

Beweis. SIEHE SKRIPT! □

Mit diesem Wissen können wir uns erste Eigenschaften von RKHR anschauen:

Satz 1.7. *Sei Ω eine nicht leere Menge und $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum mit Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Dann gilt:*

1. *$\mathcal{H}$ ist genau dann ein RKHR, wenn die Auswertungsfunktionale stetig sind.*
2. *Wenn $\mathcal{H}$ ein RKHR mit Kern K ist, dann ist $K(\cdot, x)$ der Riesz-Repräsentant des Funktionals $\delta_x \in \mathcal{H}'$.*
3. *Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $K \in C^{2k}(\Omega \times \Omega)$ für $k \in \mathbb{N}$, dann ist $\mathcal{H}_K(\Omega) \subset C^k(\Omega)$ und es gilt für alle Multiindizes $a := (a_1, \ldots, a_d)$:*

$$D^a f(x) := \partial^{a_1}_{x^{(1)}} \partial^{a_2}_{x^{(2)}} \ldots \partial^{a_d}_{x^{(d)}} f(x) = (f, D^a_2 K(\cdot, x))_{\mathcal{H}_K(\Omega)}$$

4. *LINEARE UNABHÄNGIGKEIT*

Beweis. 1. Für alle $f \in \mathcal{H}$ und alle $x \in \Omega$ gilt:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |(f, K(\cdot, x))_{\mathcal{H}}| \leq \|f\|_{\mathcal{H}} \|K(\cdot, x)\|_{\mathcal{H}} \\ &= \|f\|_{\mathcal{H}} \sqrt{(K(\cdot, x), K(\cdot, x))_{\mathcal{H}}} = \|f\|_{\mathcal{H}} \sqrt{K(x, x)} \end{aligned}$$

, wobei für die erste und die letzte Gleichung die Reproduzierbarkeit des Kerns benutzt wurde.

Sei $\mathcal{H}$ ein RKHR. Dann gilt mit dem eben gezeigten:

$$\begin{aligned} &|\delta_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{H}} \sqrt{K(x, x)} \\ \Leftrightarrow\ &\frac{|\delta_x(f)|}{\|f\|_{\mathcal{H}}} \leq \sqrt{K(x, x)} \end{aligned}$$

Also ist δ_x beschränkt und damit stetig.

Für die andere Richtung nehmen wir an, dass $\delta_x \in \mathcal{H}'$ für alle $x \in \Omega$. Also existiert ein Riesz-Repräsentant $\nu_{\delta_x} \in \mathcal{H}$. Definieren wir $K(\cdot, x) := \nu_{\delta_x}$, dann ist K ein Kern. Es ist klar, dass $K(\cdot, x) \in \mathcal{H}$ und nach der Definition des Riesz-Repräsentanten gilt:

$$(f, K(\cdot, x))_{\mathcal{H}} = (f, \nu_{\delta_x})_{\mathcal{H}} = \delta_x(f) = f(x)$$

2. Die Behauptung folgt sofort aus der Reproduzierbarkeit von K, da $(f, K(\cdot, x))_{\mathcal{H}} = f(x)$ für alle $x \in \Omega$ und alle $f \in \mathcal{H}$ gilt.
3. Den Beweis, dass $\mathcal{H}_K(\Omega) \subset C^k(\Omega)$ werden wir hier auslassen.
REST VOM BEWEIS FEHLT AUCH NOCH!!
4. AUCH DER BEWEIS FEHLT

□

Damit haben wir alle nötigen Werkzeuge um die Interpolation durchzuführen. Wir haben Ansatzfunktionen K, den dazugehörigen Hilbertraum $\mathcal{H}_K(\Omega)$ und die Stetigkeit und lineare Unabhängigkeit aller benötigten Operatoren. Jetzt müssen wir nur noch einen geeigneten Ansatz wählen.

1.1.1 Symmetrische Kollokation

Sei wieder $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, L, B lineare Differentialoperatoren, K ein positiv definiter Kern und folgendes Problem gegeben:

$$\begin{aligned} Lu(x) &= f(x), x \in \Omega \\ Bu(x) &= g(x), x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Für ein $N \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Menge $X_N \subset \Omega$, die wir in N_{in} Punkte im Inneren und N_{bd} Punkte auf dem Rand aufteilen. Also haben wir die beiden Mengen

$$\begin{aligned} X_{in} &= X_N \cap \Omega \\ X_{bd} &= X_N \cap \partial\Omega \end{aligned}$$

Wir definieren die Menge $\Lambda_N = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$ an linearen Funktionalen mit

$$\lambda_i = \begin{cases} \delta_{x_i} \circ L & x_i \in \Omega \\ \delta_{x_i} \circ B & x_i \in \partial\Omega \end{cases}$$

Wir wissen aus Satz 1.7, dass in $\mathcal{H}_K(\Omega)$ alle λ_i stetig und linear unabhängig sind. Damit können wir unsere Ansatzfunktionen, also den Unterraum $V_N \subset \mathcal{H}_K(\Omega)$ wählen:

$$\begin{aligned} V_N &= \operatorname{span}\{\lambda_1^y K(x,y), \ldots, \lambda_N^y K(x,y)\} \\ &= \operatorname{span}\{(\delta_{x_1} \circ L)^y K(x,y), \ldots, (\delta_{x_{N_in}} \circ L)^y K(x,y), (\delta_{x_{N_{in}+1}} \circ B)^y K(x,y), \ldots, (\delta_{x_N} \circ B)^y K(x,y)\} \\ &=: \operatorname{span}\{\nu_1, \ldots, \nu_N\} \end{aligned}$$

, wobei der hochgesetzte Index y bedeutet, dass der Operator auf das zweite Argument angewandt wird.

Damit bekommen wir folgenden Interpolanten:

$$
\begin{aligned}
s_u(x) &= \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \lambda_j^y K(x,y) \\
&= \sum_{j=1}^{N_{in}} \alpha_j (\delta_{x_j} \circ L)^y K(x,y) + \sum_{j=N_{in}}^{N} \alpha_j (\delta_{x_j} \circ L)^y K(x,y)
\end{aligned}
$$

Die α_j erhält man als Lösung des lineares Gleichungssystem (LGS) mit $A_{i,j} := (\nu_i, \nu_j)_{\mathcal{H}_K}$, also

$$
\begin{pmatrix} A_{L,L} & A_{L,B} \\ A_{L,B}^T & A_{B,B} \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} b_L \\ b_B \end{pmatrix}
$$

da mit 1.7.3 folgt

$$
\begin{aligned}
(A_{L,L})_{i,j} &= (\delta_{x_i} \circ L)^x (\delta_{x_j} \circ L) K(x,y) = \Big((\delta_{x_i} \circ L)^x K(x,y), (\delta_{x_j} \circ L) K(x,y) \Big)_{\mathcal{H}_K} \\
(A_{L,B})_{i,j} &= (\delta_{x_i} \circ L)^x (\delta_{x_j} \circ B) K(x,y) = \Big((\delta_{x_i} \circ L)^x K(x,y), (\delta_{x_j} \circ B) K(x,y) \Big)_{\mathcal{H}_K} \\
(A_{B,B})_{i,j} &= (\delta_{x_i} \circ B)^x (\delta_{x_j} \circ B) K(x,y) = \Big((\delta_{x_i} \circ B)^x K(x,y), (\delta_{x_j} \circ B) K(x,y) \Big)_{\mathcal{H}_K}
\end{aligned}
$$

LÖSBARKEIT + RIESZ REPRÄSENTANT MIT FUNKTIONAL

1.1.2 Nicht-Symmetrische Kollokation

Kapitel 2

Die Abschlussarbeit

Kapitel 3

Zum Arbeiten mit LaTeX

Kapitel 4

Abbildungen, Tabellen, Quellcode

Kapitel 5

Mathematische Formeln, Gleichungen und Algorithmen

Kapitel 6

Umgang mit Literatur und anderen Quellen

[**Drake1948**]

Kapitel 7

Drucken der Abschlussarbeit

Kapitel 8

Schlussbemerkungen

Anhang A

Technische Informationen

PDE partielle Differentialgleichung

PD positiv definit

SPD strikt positiv definit

RKHR reproduzierender Kern Hilbert Raum

LGS lineares Gleichungssystem

Anhang B

Inhalt der CD-ROM/DVD

Anhang C

Fragebogen

Anhang D

LaTeX-Quellkode

Quellenverzeichnis

Messbox zur Druckkontrolle

— Druckgröße kontrollieren! —

width = 100mm
height = 50mm

— Diese Seite nach dem Druck entfernen! —