Lista 3 - MAC0338 Análise de Algoritmos

Daniel Angelo Esteves Lawand 10297693

25 de setembro de 2021

Exercício 1

Seja $M(n)$ definida pela recorrência:

$$M(0) = 1$$

$$M(1) = 1$$

$$M(n) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \{M(k) + M(n-k-1)\} + n \text{ para } n = 2,\ 3,\ 4,...$$

Provaremos que $M(n) \geq \frac{1}{2}(n+1) \cdot \lg(n+1)$ para todo $n \geq 0$.
Assim, para $M(0)$ temos

$$M(0) = 1 \geq \frac{1}{2}(0+1) \cdot \lg(0+1) \iff$$

$$1 \geq \frac{1}{2} \cdot \lg(1) \iff$$

$$1 \geq \frac{1}{2} \cdot 0 \iff M(0) = 1 \geq 0$$

Para $M(1)$ temos

$$M(1) \geq \frac{1}{2}(1+1) \cdot \lg(1+1) \iff$$

$$\geq 1 \cdot \lg(2) \iff$$

$$\geq 1 \cdot 1 \iff M(1) \geq 1$$

Agora, realizaremos uma indução forte em n, ou seja, vale para $M(i) \geq \frac{1}{2}(i+1) \cdot \lg(i+1)$ para todo $2 \leq i \leq n$.
Para $M(n+1)$ temos:

$$M(n+1) \geq \min_{0 \leq k \leq n} \{M(k) + M((n+1)-k-1)\} + (n+1) \iff$$

$$\geq \min_{0 \leq k \leq n} \{M(k) + M(n-k)\} + (n+1) \iff$$

Como $k \leq n$ e $n - k \leq n$, podemos utilizar a Hipótese de Indução, portanto:

$$\min_{0 \leq k \leq n} \{M(k) + M(n-k)\} \geq \min_{0 \leq k \leq n} \left\{ \frac{1}{2}(k+1) \cdot \lg(k+1) + \frac{1}{2}(n-k+1) \cdot \lg(n-k+1) \right\}$$

Para encontrar o mínimo, tomemos a derivada igualada a zero:

$$\frac{d}{dk}\left(\frac{1}{2}\left((k+1) \cdot \lg(k+1) + (n-k+1) \cdot \lg(n-k+1)\right)\right) = 0 \iff$$

$$\frac{1}{2}\left(\lg(k+1) - \lg(n-k+1)\right) = 0 \iff$$

$$\lg(k+1) = \lg(n-k+1) \iff$$

$$k + 1 = n - k + 1 \iff$$

$$k = \frac{n}{2}$$

Assim:

$$\min_{0 \leq k \leq n} \{M(k) + M(n-k)\} \geq \min_{0 \leq k \leq n} \left\{ \frac{1}{2}(k+1) \cdot \lg(k+1) + \frac{1}{2}(n-k+1) \cdot \lg(n-k+1) \right\} \iff$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right) \cdot \lg\left(\frac{n}{2}+1\right) + \frac{1}{2}\left(n - \frac{n}{2}+1\right) \cdot \lg\left(n - \frac{n}{2}+1\right) \iff$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right) \cdot \lg\left(\frac{n}{2}+1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right) \cdot \lg\left(\frac{n}{2}+1\right) \iff$$

$$\geq \frac{1}{2}(n+2) \cdot \lg\left(\frac{n}{2}+1\right) \iff$$

$$\geq \frac{1}{2}(n+2) \cdot \lg\left(\frac{n+2}{2}\right) \iff$$

$$\geq \frac{1}{2}(n+2) \cdot \left(\frac{\lg(n+2)}{\lg 2}\right) \iff$$

$$\geq \frac{1}{2}(n+2) \cdot \lg(n+2)$$

Portanto:

$$\min_{0 \leq k \leq n} \{M(k) + M(n-k)\} \geq \frac{1}{2}(n+2) \cdot \lg(n+2)$$

Como $n \geq 0 \Rightarrow n+1 \geq 0$, podemos adicionar $n+1$ no elemento da esquerda e a desigualdade permanece a mesma:

$$\min_{0 \leq k \leq n} \{M(k) + M(n-k)\} + (n+1) \geq \frac{1}{2}(n+2) \cdot \lg(n+2) \iff$$

$$M(n+1) \geq \frac{1}{2}(n+2) \cdot \lg(n+2) \iff$$

$$M(n+1) \geq \frac{1}{2}((n+1)+1) \cdot \lg((n+1)+1)$$

$\square$

Exercício 7

Seja *Soma* uma Variável Aleatória em que, $k \in [1, 10]$:

$$Soma_i = \begin{cases} k, \text{ k é par} \\ 0, \text{ Caso contrário} \end{cases}$$

$$Soma = \sum_{i=1}^{\text{n}} Soma_i$$

$$E(Soma) = E\left(\sum_{i=1}^{\text{n}} Soma_i\right) \iff$$

$$E(Soma) = \sum_{i=1}^{\text{n}} (E(Soma_i))$$

A probabilidade de $Soma_i$ é dada por: $P(Soma_i = k) = \frac{1}{10}$, logo:

$$E(Soma_i) = \sum_{j=1}^{10} (k \cdot P(Soma_i = k)) \iff$$

$$E(Soma_i) = \sum_{j=1}^{10} \left(k \cdot \tfrac{1}{10}\right) \iff$$

Como $Soma_i$ só assume valores pares:

$$E(Soma_i) = \tfrac{1}{10} \cdot 30 = 3$$

Portanto,

$$E(Soma) = \sum_{i=1}^{\text{n}} (E(Soma_i)) \iff$$

$$E(Soma) = \sum_{i=1}^{\text{n}} (3) \iff$$

$$E(Soma) = 3 \cdot n$$

Portanto o valor esperado da variável soma no programa é 3 vezes o n.