

Caracterização Espectral das Órbitas Geradas pelo Mapa de Hénon

Rafael Alves da Costa

Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Seminário - Caos em Sistemas Dissipativos

Professor: Dr. Iberê Luiz Caldas

9 de maio de 2018

Sumário

1 Introdução

2 Revisão: DEP de mapas unidimensionais

3 Mapa de Hénon $f_H(\cdot)$

4 DEP - Mapa de Hénon $f_H(\cdot)$

5 Conclusões

6 Referências

Sumário

1 Introdução

2 Revisão: DEP de mapas unidimensionais

3 Mapa de Hénon $f_H(\cdot)$

4 DEP - Mapa de Hénon $f_H(\cdot)$

5 Conclusões

6 Referências

1.1. Contextualização

- ▶ Interessantes propriedades de sinais caóticos para aplicações em Telecomunicações
 - Banda larga
 - Autocorrelação impulsiva
 - Baixa sequência de correlação cruzada
- ▶ Aplicações práticas requerem controle das propriedades espectrais dos sinais
- ▶ **Problema:** Poucos estudos sobre espectro de mapas bidimensionais!!!

1.2. SAC e DEP

- ▶ Sequência de autocorrelação (SAC) $R(k)$

- Trata-se sinais caóticos como processo

$$R(k) = E \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n)s(n-k) \right]$$

- ▶ Densidade Espectral de Potência (DEP) $P(\omega)$ é a transformada de Fourier de tempo discreto de $R(k)$
- ▶ Banda essencial (B) é a largura de banda em que 95% da potência do sinal está concentrada

1.3. Literatura

- ▶ Alguns resultados da literatura para SAC e DEP de mapas unidimensionais
 - **Skew tent map**
Eisencraft, M.; Kato, D. M. . Spectral properties of chaotic signals with applications in communications. *Nonlinear Analysis*, v. 71, p. e2592-e2599, 2009 .
 - **Three slopes map**
K. Feltekh, D. Fournier-Prunaret, and S. Belghith, "Analytical expressions for power spectral density issued from one-dimensional continuous piecewise linear maps with three slopes," *Signal Processing*, vol. 94, no. 0, pp. 149 – 157, 2014.
 - **Bernoulli r segmentos**
R. A. Costa, M. B. Loiola, M. Eisencraft, Correlation and spectral properties of chaotic signals generated by a piecewise-linear map with multiple segments, *Signal Processing* 133 (2017) 187–191.
- ▶ Mapas N -dimensionais tem sido considerado em muitos sistemas de comunicação baseado em caos

1.4. Objetivo

1. Obter ao menos numericamente SAC e DEP para o mapa de Hénon
2. Encontrar propriedades espectrais importantes para aplicações em telecomunicações

Sumário

1 Introdução

2 Revisão: DEP de mapas unidimensionais

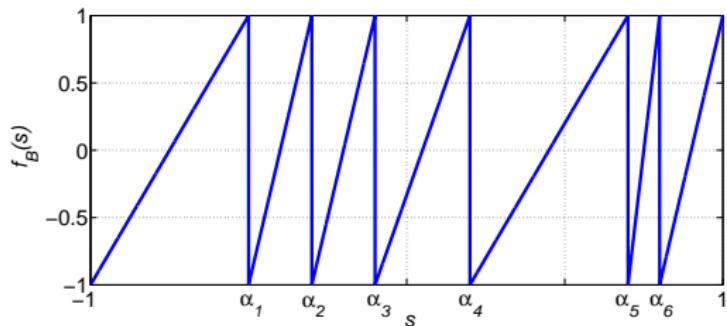
3 Mapa de Hénon $f_H(\cdot)$

4 DEP - Mapa de Hénon $f_H(\cdot)$

5 Conclusões

6 Referências

2. Revisão: Mapa de Bernoulli com r segmentos $f_B(\cdot)$



$$s(n+1) = f_B(s(n))$$

$$f_B(s) = \frac{2s - (\alpha_j + \alpha_{j-1})}{\alpha_j - \alpha_{j-1}}, \quad \alpha_{j-1} \leq s < \alpha_j,$$

for $\alpha_0 = -1, \alpha_r = 1, \alpha_j \in (-1, 1), j = 1, \dots, r \geq 2$

2. Revisão: Mapa de Bernoulli com r segmentos $f_B(\cdot)$

- Mostra-se que a SAC para $f_B(\cdot)$ é dada por

$$R(k) = \frac{1}{3}\psi^{|k|}$$

em que $\psi = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^r (\alpha_j - \alpha_{j-1})^2$ para $r \geq 2$

- DEP é dada por

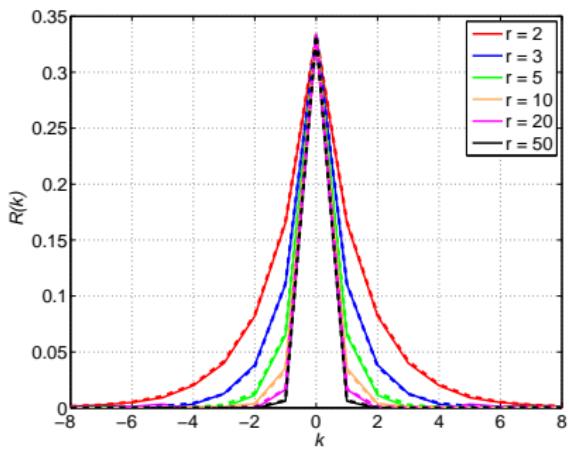
$$P(\omega) = \frac{1 - \psi^2}{3(1 + \psi^2 - 2\psi \cos(\omega))}$$

- A banda essencial é

$$B = 2 \arctan \left[\tan \left(\frac{q\pi}{2} \right) \left| \frac{\psi - 1}{\psi + 1} \right| \right]$$

2. Revisão: Mapa de Bernoulli com r segmentos $f_B(\cdot)$

- Característica temporal para o caso r inclinações iguais

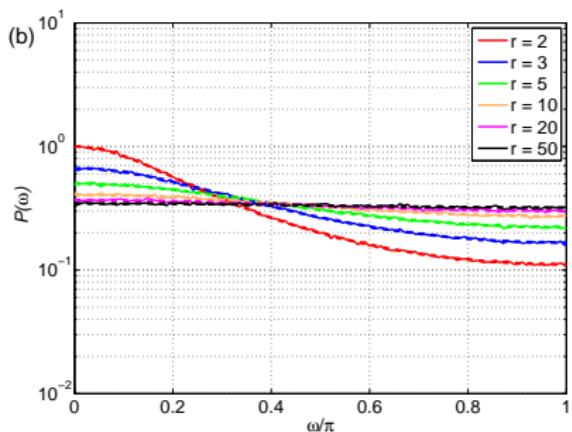


$$R(k) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{r}\right)^{|k|}$$

- $r \geq 2$ decai monotonicamente com $|k|$;
- Com crescimento de r a SAC aproxima-se da forma impulsiva;

2. Revisão: Mapa de Bernoulli com r segmentos $f_B(\cdot)$

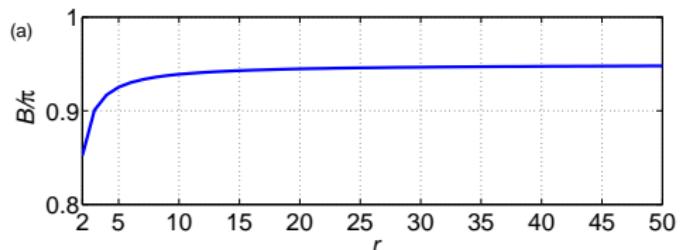
- Característica espectral para o caso r inclinações iguais



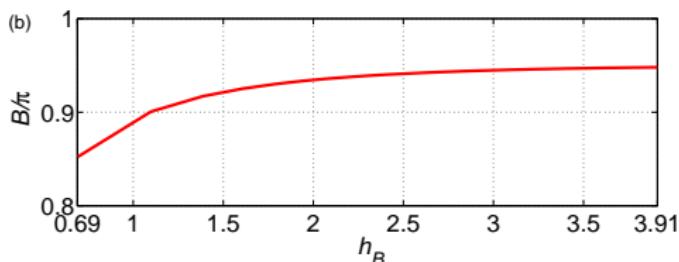
$$P(\omega) = \frac{r^2 - 1}{3(1 + r^2 - 2r \cos(\omega))}$$

- Com r suficientemente grande a DEP aproxima-se de um ruido branco;

2. Revisão: Mapa de Bernoulli com r segmentos $f_B(\cdot)$



$$B = 2 \arctan \left[\tan \left(\frac{q\pi}{2} \right) \left| \frac{1-r}{1+r} \right| \right]$$



$$h_B = \ln r$$

- Com aumento de r , também aumenta a distribuição espectral da potência.

► Mapa mais gerais e multidimensionais ainda inexplorados!

Sumário

1 Introdução

2 Revisão: DEP de mapas unidimensionais

3 Mapa de Hénon $f_H(\cdot)$

4 DEP - Mapa de Hénon $f_H(\cdot)$

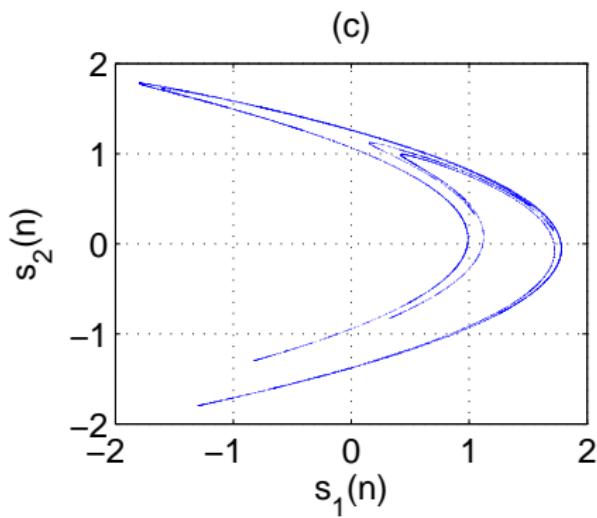
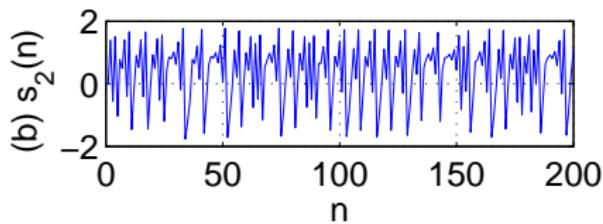
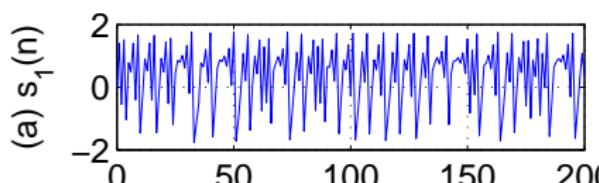
5 Conclusões

6 Referências

3. Mapa de Hénon $f_H(\cdot)$

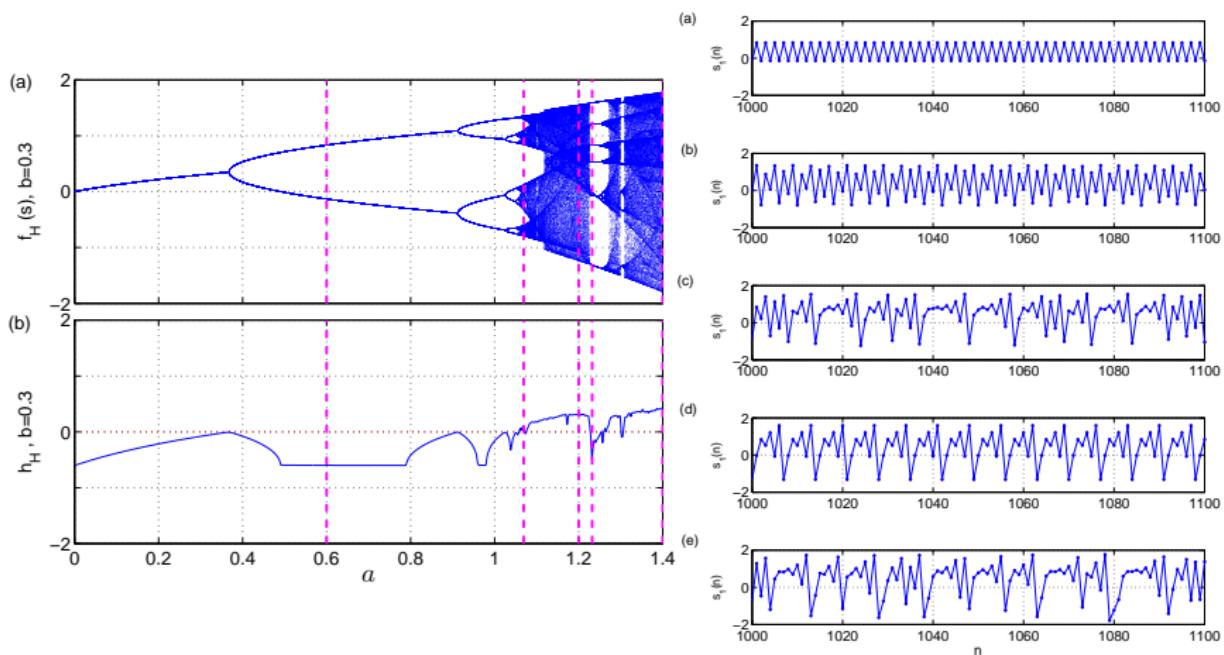
$$s(n+1) = f_H(s(n)) = \begin{bmatrix} s_2(n) + 1 - as_1^2(n) \\ bs_1(n) \end{bmatrix}$$

em que $\{a, b\} \in \mathbb{R}$ são os parâmetros.



3. Mapa de Hénon $f_H(\cdot)$

- Diagrama de bifurcação, maximo expoente de Lyapunov e órbitas do mapa para $b = 0.3$ fixo



Sumário

1 Introdução

2 Revisão: DEP de mapas unidimensionais

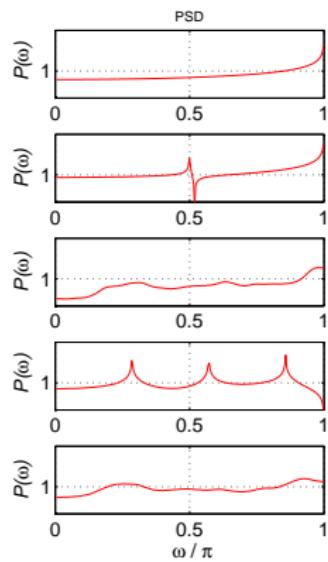
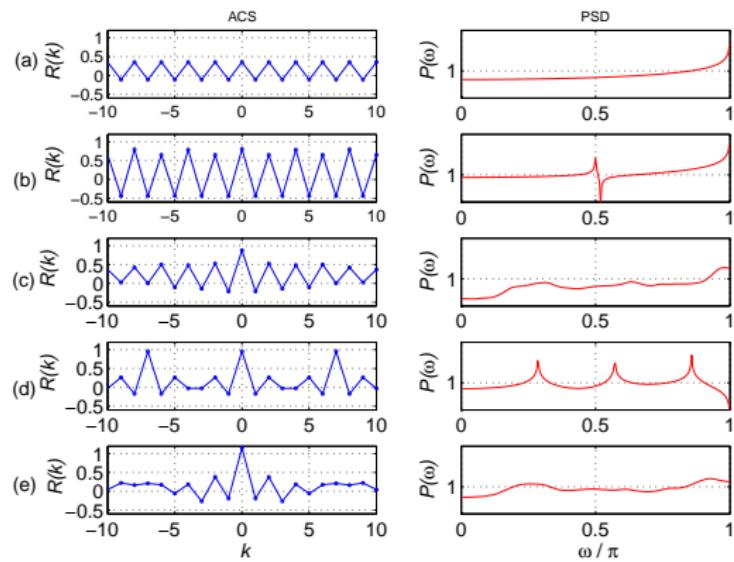
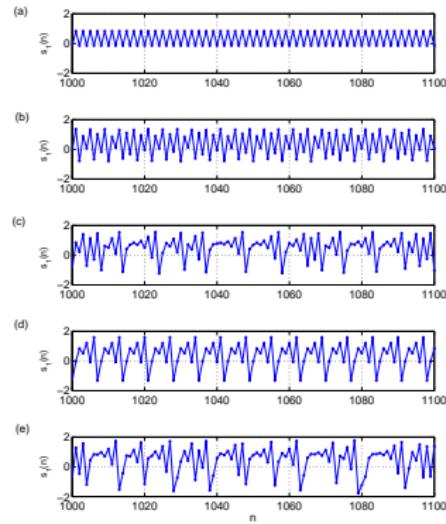
3 Mapa de Hénon $f_H(\cdot)$

4 DEP - Mapa de Hénon $f_H(\cdot)$

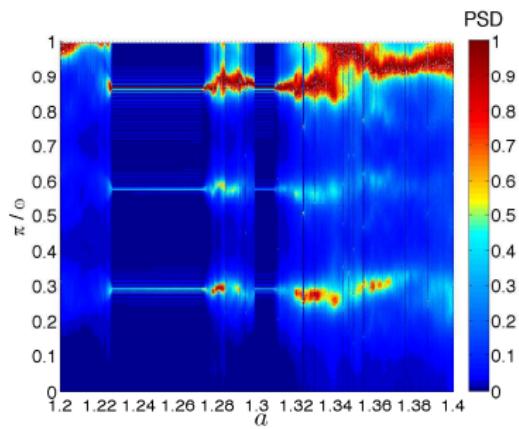
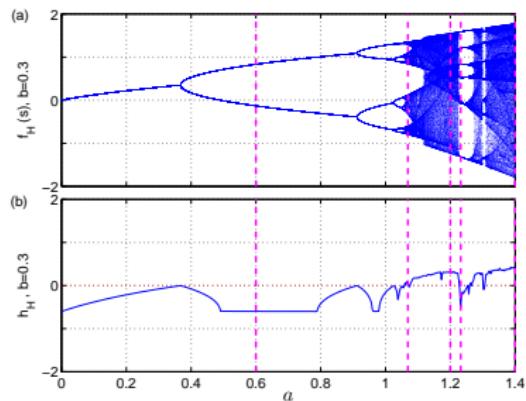
5 Conclusões

6 Referências

4.1. SAC E DEP



4.1. SAC E DEP



- SAC e DEP do mapa de Hénon -
[Link-Animation of PSD Hénon Map](#)

Sumário

1 Introdução

2 Revisão: DEP de mapas unidimensionais

3 Mapa de Hénon $f_H(\cdot)$

4 DEP - Mapa de Hénon $f_H(\cdot)$

5 Conclusões

6 Referências

5. Conclusões

- ▶ Analisou-se numericamente SAC e DEP das órbitas do mapa de Hénon
- ▶ As simulações sugerem que o mapa pode ser usado para gerar banda estreita e sinais caóticos com característica de alta frequência
- ▶ Pode ser relevante em aplicações de sistemas de comunicação baseados em caos

Sumário

1 Introdução

2 Revisão: DEP de mapas unidimensionais

3 Mapa de Hénon $f_H(\cdot)$

4 DEP - Mapa de Hénon $f_H(\cdot)$

5 Conclusões

6 Referências

Referências

- K. Alligood, et. al, Chaos: An Introduction to Dynamical Systems, Textbooks in Mathematical Sciences, 1997.
- R. A. Costa, et. al, Correlation and spectral properties of chaotic signals generated by a piecewise-linear map with multiple segments, Signal Processing, 2017.
- R. A. Costa and M. Eisencraft, Spectral properties of the orbits of the Hénon map, Proceedings of the 6th International Conference on Nonlinear Science and Complexity, 2016.
- J.G. Proakis and D.G. Manolakis, Digital Signal Processing, 1996.