Tarea 9´

Determinantes

Daniel Eduardo Macias Estrada

10/12/2020

Pregunta 1

Calcula las siguientes

A)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Para empezar a resolver la determinante mostrada, debemos transformar esta matriz en una matriz triangular superior. Se realiza las siguientes operaciones, la cuales se muestran como matrices elementales

$$F_{43}\left(-\frac{9}{10}\right) \cdot F_{42}(3) \cdot F_{32}(5) \cdot F_{41}(-3) \cdot F_{31}(-4) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

La determinante de la matriz es igual al producto de los elementos de su diagonal principal

$$|A| = (1) \cdot (1) \cdot (-10) \cdot (5) = -50$$

Comprobación en Python

```
import numpy as np
A = np.array([[1,2,3,4],[0,1,0,1],[4,3,2,1],[3,3,0,5]])
round(np.linalg.det(A))
```

```
-50
```

B)

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$F_{34} \cdot F_{42}(-3) \cdot F_{32}(-1) \cdot F_{31}(1) \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Como se ha realizado un intercambio entre las filas 3 y 4, el determinante cambia de signo

$$|B| = -(1)(1)(-9)(-1) = -9$$

Comprobación en Python

```
B = np.array([[1,1,1,-1],[0,1,3,1],[-1,0,2,1],[0,3,0,5]])
round(np.linalg.det(B))
```

```
-9
```

C)

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$F_{54}(-34) \cdot F_{45} \cdot F_{43}(-9) \cdot F_{53} \cdot F_{52}(-1) \cdot F_{42}(-3) \cdot F_{32}(-1) \cdot F_{51}(-1) \cdot F_{31}(1) \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -45 \end{pmatrix}$$

$$|A| = (1)(1)(-1)(-1)(-45) = -45$$

Comprobación en Python

```
C = np.array([[1,1,1,-1,0],[0,1,3,1,0],[-1,0,2,1,0],[0,3,0,5,0],[1,2,3,4,5]])
round(np.linalg.det(C))
```

```
-45
```

D)

$$|D| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$F_{34} \cdot F_{42}\left(\frac{8}{5}\right) \cdot F_{41}(-4) \cdot F_{31} \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -15 & {}^{64}/_{5} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|D| = (1)(5)(-15)(2) = -150$$

Comprobación en Python

```
D = np.array([[0,0,0,2],[0,5,0,3],[1,2,3,-2],[4,0,-3,0]])
round(np.linalg.det(D))
```

```
-150
```

Pregunta 2

Estudiar la compatibilidad de los siguientes de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales y resolverlos por Crammer en los casos en que sea posible

A)

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ & & 2y & + & 5z & = & 1 \end{cases}$$

La representación matricial de este sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Primero es necesario obtener el determinante de la matriz de coeficientes

$$|A| = (1)(5-4) - (1)(10-0) + (1)(4-0) = (1)(1) - (1)(10) + (1)(4) = 1 - 10 + 4$$

$|A| = -5 \neq 0$\$

Como el determinante es distinto de 0, el rango de la matriz A es 3. Del mismo modo, el rango de la ampliada es igualmente 3. Por lo tanto tratamos con un sistema compatible determinado, y la solución del sistema es la siguiente

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{-5} = -\frac{1}{5}$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{-5} = -\frac{0}{5} = 0$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = -\frac{-1}{5} = \frac{1}{5}$$

La matriz X resulta ser

$$X = \begin{pmatrix} -1/5 \\ 0 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

Comprobación en R

```
# Demostrar que el sistema es compatible determinado
A = rbind(c(1,1,1),c(2,1,2),c(0,2,5))
b = c(0,0,1)
Ab = cbind(A,b)
qr(A)$rank == qr(Ab)$rank
```

```
[1] TRUE
```

```
qr(A)$rank == 3
```

```
[1] TRUE
```

Demostrado que $rg(A) = rg(A|B) = r$ y $r = n$, podemos proceder para la resolución

```
solve(A,b)
```

```
[1] -2.000000e-01 -2.775558e-17  2.000000e-01
```

B)

$$\begin{cases} 3x & + & y & + & 5z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & 3z & = & 1 \end{cases}$$

La representación matricial del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La determinante de A está dada por

$$|A| = (3)(3-(-4)) - (1)(6-2) + (5)(-4-1) = (3)(7) - (1)(4) + (5)(-5) = 21 - 4 - 25$$
$$|A| = -8 \neq 0$$

Como el determinante de A es diferente de 0, el rango será de 3, que es igual al orden de la matriz A. Esto también sucede con la ampliada pues A es el mayor menor de la misma. Por ello, comprobamos que el sistema es compatible determinado

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = -\frac{11}{8}$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-8} = -\frac{-4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-8} = -\frac{-9}{8} = \frac{9}{8}$$

La matriz de incógnitas queda de la siguiente manera

$$X = \begin{pmatrix} -{}^{11}/_{8} \\ {}^{1}/_{2} \\ {}^{9}/_{8} \end{pmatrix}$$

Comprobación en R

```r
# Demostrar que el sistema es compatible determinado
A = rbind(c(3,1,5),c(2,1,2),c(1,-2,3))
b = c(2,0,1)
Ab = cbind(A,b)
qr(A)$rank == qr(Ab)$rank
```

```
[1] TRUE
```

```r
qr(A)$rank == 3
```

```
[1] TRUE
```

```r
#Solución
solve(A,b)
```

```
[1] -1.375  0.500  1.125
```

C)

$$\begin{cases} 3x & & & - & 7z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ -2x & + & 2y & + & 3z & = & -11 \end{cases}$$

La representación matricial del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Ahora se obtendrá el determinante de la matriz de coeficientes

$$|A| = (3)(3-4) - (0)(6+4) + (-7)(4+2) = (3)(-1) - 0 + (-7)(6) = -3 - 0 - 42$$

$$|A| = -45 \neq 0$$

Como el determinante es distinto de 0, el rango de A es 3, y por ende el rango de nuestra matriz ampliada es el mismo. Como el rango es igual al orden de la matriz A, podemos concluir que el sistema de ecuaciones lineales es compatible determinado

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -7 \\ 9 & 1 & 2 \\ -11 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{-45} = -\frac{-205}{45} = \frac{41}{9}$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 2 & 9 & 2 \\ -2 & -11 & 3 \end{vmatrix}}{-45} = -\frac{155}{45} = -\frac{31}{9}$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 9 \\ -2 & 2 & -11 \end{vmatrix}}{-45} = -\frac{-75}{45} = \frac{5}{3}$$

La matriz de incógnitas queda de la siguiente manera

$$X = \begin{pmatrix} {}^{41}/_{9} \\ -{}^{31}/_{9} \\ {}^{5}/_{3} \end{pmatrix}$$

Comprobación en R

```r
# Demostrar que el sistema es compatible determinado
A = rbind(c(3,0,-7),c(2,1,2),c(-2,2,3))
b = c(2,9,-11)
Ab = cbind(A,b)
qr(A)$rank == qr(Ab)$rank
```

```
[1] TRUE
```

```r
qr(A)$rank == 3
```

```
[1] TRUE
```

```r
#Solución
solve(A,b)
```

```
[1]  4.555556 -3.444444  1.666667
```

D)

$$\begin{cases} 3x & - & 3y & - & 7z & + & t & = & -2 \\ 2x & & & + & 2z & + & 2t & = & 0 \\ -2x & + & 2y & + & 3z & - & t & = & -1 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & + & t & = & -3 \end{cases}$$

La representación matricial del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -7 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Es necesario obtener el rango de la matriz A y de su ampliada; así tendremos suficiente información para poder concluir el tipo de sistema que es

$$|A| = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (-2)(1)(2)(1)(-3) = 12 \neq 0$$

```
A = rbind(c(3,-3,-7,1),c(2,0,2,2),c(-2,2,3,-1),c(2,2,3,1))
det(A)
```

```
[1] 12
```

Como el determinante no es nulo, el rango de la matriz A y de su ampliada es 4. Esto demuestra que el sistema de ecuaciones lineales es un sistema compatible determinado

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -3 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & -7 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{-48}{12} = -4$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{24}{12} = 2$$

$$t = \frac{|A_4|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -3 & -7 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}}{12} = \frac{-36}{12} = -3$$

La matriz de incógnitas queda de la siguiente manera

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Comprobación en R

```
# Demostrar que el sistema es compatible determinado
A = rbind(c(3,-3,-7,1),c(2,0,2,2),c(-2,2,3,-1),c(2,2,3,1))
b = c(-2,0,-1,-3)
Ab = cbind(A,b)
qr(A)$rank == qr(Ab)$rank
```

```
[1] TRUE
```

```
qr(A)$rank == 4
```

```
[1] TRUE
```

```
#Solución
solve(A,b)
```

```
[1]  1 -4  2 -3
```

Pregunta 3

Calcula el rango de las matrices siguientes según los valores de los parámetros

A)

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \alpha \\ \alpha & \beta & \beta & \alpha \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Primero, se obtendra el determinante de la matriz A

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \beta & \beta \\ 0 & \alpha-\beta & \beta-\frac{\beta^2}{\alpha} & \alpha-\frac{\beta^2}{\alpha} \\ 0 & 0 & \alpha-\frac{\beta^2}{\alpha} & \alpha-\frac{\beta^2}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha-2\beta \end{vmatrix} = (\alpha)(\alpha-\beta)(\alpha-\frac{\beta^2}{\alpha})(2\alpha-2\beta)$$

$$|A| = 2\alpha^4 - 4\alpha^3\beta + 4\alpha\beta^3 - 2\beta^4$$

El primer caso dado, se plantea que $\alpha, \beta = 0$. Si ambas variables son nulas, la matriz sería una matriz nula. Esto implica que el determinante de la matriz A, incluyendo a sus menores, sea 0. Por lo tanto, se puede concluir que el rango de la matriz en este caso es 0

$$\text{Si } \alpha, \beta = 0 \quad \Longrightarrow \quad rg(A) = 0$$

En caso de que $\alpha = 0$ y $\beta \in \mathbb{R}$, la expresión obtenida para obtener el determinante de A quedaría de la siguiente forma

$$|A| = -2\beta^4$$

Esto implica que el determinante no será 0, y por lo tanto el rango se mantiene en 4

El siguiente caso sugiere que $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta = 0$, de manera que la expresión de la determinante queda de la siguiente manera

$$|A| = 2\alpha^4$$

Gracias a esto podemos concluir que el rango en este caso es 4

Dado el siguiente caso, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}$, en el que ninguno de los parámetros es nulo, la expresión obtenida para calcular el dterminante se queda igual. por lo que su rango, como en los casos anteriores, es 4

B)

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz anterior debe ser $rg(A) \leq 3$.

Existen $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 4$ menores que se pueden formar de orden 3, de los cuales obtendremos la expresión que defina su determinante.

$$|A_1| = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{vmatrix} = \alpha(\alpha\beta) = \alpha^2\beta$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} \beta & \alpha \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \alpha(\alpha^2) + \beta(0) = \alpha^3$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \beta \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha \end{vmatrix} = \beta \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{vmatrix} = \beta(\alpha\beta) = \alpha\beta^2$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{vmatrix} = 0 + \beta(\beta^2) = \beta^3$$

En un primer caso, consideraremos que ambas variables son nulas $\alpha = 0$ y $\beta = 0$. Dicho caso nos provee de una matriz nula y por ende, un rango de 0

$$\text{Si } \alpha, \beta = 0 \quad \Longrightarrow \quad rg(A) = 0$$

Para los siguientes casos, el rango de la matriz equivale a 3, $rg(A) = 3$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \text{ , } \beta \neq 0 \text{ y } \beta \in \mathbb{R} \\ \beta = 0 \text{ , } \alpha \neq 0 \text{ y } \alpha \in \mathbb{R} \\ \beta \neq 0 \text{ y } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

C)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \beta & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A debe ser de $rg(A) \leq 3$

Tomando en cuenta las variables α y β, existe un menor de orden 2 que no depende de las mismas para definir su determinante, no es nulo. Esto prueba que $rg(A) \geq 2$, y por ende el rango puede ser 2 o 3

Existen $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 4$ menores de orden 3 de los cuales obtendremos la expresión que define sus determinantes

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 2 & -1 & \beta \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix} = 1(6 - 10\beta) - \alpha(-12 - \beta) + (-1)(20 + 1)$$

$$|A_1| = 6 - 10\beta + 12\alpha + \alpha\beta - 21 = 12\alpha + \alpha\beta - 10\beta - 15$$

Con este ejemplo podemos definir los siguientes casos

El primer caso plantea que $\alpha = 0$ y $\beta = 0$, lo cual al sustituir estos valores en la expresión de la determinante de A queda de la siguiente manera

$$|A_1| = 12(0) + \alpha(0) - 10(0) - 15 = -15$$

Con el resultado obtenido, podemos concluirq que

$$\text{Si } \alpha, \beta = 0 \quad \Longrightarrow \quad rg(A) = 3$$

En realidad, a pesar del valor que tomen α y β dentro del conjunto de los números reales, el rango de la matriz A será siempre de 3

Pregunta 4

Encuentra el valor del siguiente determinante de orden n

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Se planterán diferentes ejemplos con distintos valores de n, para encontrar un patrón que nos ayude a definir una ecuación que permita encontrar el determinante de la matriz A de acuerdo al orden de la misma

n = 2

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (0) - (1 \cdot 1) = -1$$

n = 3

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (1)(0) + 0 = 0$$

n = 4

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0-3) = 3$$

n = 5

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-3)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 3(0-0) = 0$$

n = 6

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-3)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3(0-5) = 3(-5) = -15$$

En base a los resultados obtenidos podemos definir de la siguiente manera el determinante de la matriz de orden n

$$|A_n| = \begin{cases} (-1)(n-1)(|A_{n-2}|) & \text{Si} \quad n \geq 2 \\ 0 & \text{Si} \quad n = 0,1 \end{cases}$$

Pregunta 5

Calcular el rango de las siguientes matrices y, si es posible, su inversa haciendo uso de determinantes

A)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = (1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (1)(4)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (1)(4)(2)(3) = 24$$

El rango de esta matriz es $\mathrm{rg}(A) = 4$

Para obtener la inversa de la matriz A usaremos la expresión $A^{-1} = \frac{(Adj(A))^t}{det(A)}$. Para ello realizamos las siguientes operaciones

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (4)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (4)(2)(3) = 24$$

$$A_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (1)(2)(3) = 6$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -(1)\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (1)(3)(4) = 12$$

$$A_{43} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -(1)\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (1)(2)(4) = 8$$

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\mathrm{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(Adj(A))^t = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobación en Octave

```
A = [1 0 0 0; 0 0 0 4; 0 2 0 0; 0 0 3 0];
rank(A)
inv(A)
```

```
/usr/libexec/octave/5.2.0/exec/x86_64-pc-linux-gnu/octave-gui: /home/dan22/anaconda3/envs/curso_AL/lib/
ans =  4
ans =

   1.00000  -0.00000  -0.00000   0.00000
   0.00000  -0.00000   0.50000   0.00000
   0.00000  -0.00000   0.00000   0.33333
   0.00000   0.25000   0.00000   0.00000
```

B)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Para calcular su rango y su inversa, es necesario obtener la determinante de la matriz

$$|B| = (1)(3)(5)(7) = 105$$

Como su determinante no es 0, podemos concluir que su rango es igual al orden de la matriz, es decir $\text{rg}(B) = 4$

Las operaciones para obtener la inversa de esta matriz son las siguientes:

$$B_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = (3)(5)(7) = 105$$

$$B_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = (1)(5)(7) = 35$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = (1)(3)(7) = 21$$

$$B_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (1)(3)(5) = 15$$

$$\text{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 105 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} = (\text{Adj}(B))^t$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)}(\text{Adj}(B))^t = \frac{1}{105}\begin{pmatrix} 105 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^1/_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^1/_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^1/_7 \end{pmatrix}$$

Comprobación en Octave

```
B = [1 0 0 0; 0 3 0 0; 0 0 5 0; 0 0 0 7];
rank(B)
inv(B)
```

```
/usr/libexec/octave/5.2.0/exec/x86_64-pc-linux-gnu/octave-gui: /home/dan22/anaconda3/envs/curso_AL/lib/]
ans =  4
ans =

   1.00000  -0.00000  -0.00000  -0.00000
   0.00000   0.33333  -0.00000  -0.00000
   0.00000   0.00000   0.20000  -0.00000
   0.00000   0.00000   0.00000   0.14286
```

C)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinante de C

$$|C| = -(4)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -4(12-32-2-12-2-32) = -4(-68) = 272$$

Debido a que la determinante no es 0, el rango de la matriz es $\text{rg}(C) = 4$

La inversa de la matriz es la siguiente

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -40 \qquad C_{12} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 68 \qquad C_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad C_{14} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 44$$

$$C_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 64 \qquad C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad C_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad C_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -16$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 56 \qquad C_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -68 \qquad C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad C_{34} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 20$$

$$C_{41} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 104 \qquad C_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -102 \qquad C_{43} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 68$$

$$C_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -26$$

$$\text{Adj}(C) = \begin{pmatrix} -40 & 68 & 0 & 44 \\ 64 & 0 & 0 & -16 \\ 56 & -68 & 0 & 20 \\ 104 & -102 & 68 & -26 \end{pmatrix} \qquad (\text{Adj}(B))^t = \begin{pmatrix} -40 & 64 & 56 & 104 \\ 68 & 0 & -68 & -102 \\ 0 & 0 & 0 & 68 \\ 44 & -16 & 20 & -26 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)}(\text{Adj}(C))^t = \frac{1}{272}\begin{pmatrix} -40 & 64 & 56 & 104 \\ 68 & 0 & -68 & -102 \\ 0 & 0 & 0 & 68 \\ 44 & -16 & 20 & -26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -{}^{5}/_{34} & {}^{4}/_{17} & {}^{7}/_{34} & {}^{13}/_{34} \\ {}^{1}/_{4} & 0 & -{}^{1}/_{4} & -{}^{3}/_{8} \\ 0 & 0 & 0 & {}^{1}/_{4} \\ {}^{11}/_{68} & -{}^{1}/_{17} & {}^{5}/_{68} & -{}^{13}/_{136} \end{pmatrix}$$

Comprobación con Octave

```
C = [1 2 3 4; 4 3 -2 -1; 1 -2 -3 4; 0 0 4 0];
rank(C)
inv(C)
```

```
/usr/libexec/octave/5.2.0/exec/x86_64-pc-linux-gnu/octave-gui: /home/dan22/anaconda3/envs/curso_AL/lib/l
ans =  4
ans =

  -0.14706   0.23529   0.20588   0.38235
   0.25000   0.00000  -0.25000  -0.37500
  -0.00000   0.00000   0.00000   0.25000
   0.16176  -0.05882   0.07353  -0.09559
```

D)

$$D = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 1 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 7 & 4 & 3 \\ 1 & 9 & 2 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

El determinante de C

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & -74 & -17 & -50 & -43 \\ 0 & 0 & \frac{463}{74} & \frac{41}{37} & \frac{109}{74} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{693}{463} & -\frac{972}{463} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{11} \end{vmatrix} = (1)(-74)\left(\frac{463}{74}\right)\left(-\frac{693}{463}\right)\left(\frac{5}{11}\right) = 315$$

Debido a que $|D| \neq 0$, entonces $\mathrm{rg}(D) = 5$

Su inversa se obtiene de la siguiente manera

$$\mathrm{Adj}(D) = \begin{pmatrix} 15 & -105 & -45 & 345 & -210 \\ -50 & -175 & 45 & 635 & -455 \\ -35 & 35 & 0 & 35 & -35 \\ -107 & -154 & 27 & 899 & -791 \\ 81 & 252 & 9 & -972 & 693 \end{pmatrix} \qquad (\mathrm{Adj}(D))^t = \begin{pmatrix} 15 & -50 & -35 & -107 & 81 \\ -105 & -175 & 35 & -154 & 252 \\ -45 & 45 & 0 & 27 & 9 \\ 345 & 635 & 35 & 899 & -972 \\ -210 & -455 & -35 & -791 & 693 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \frac{1}{\det(D)}(\mathrm{Adj}(D))^t = \frac{1}{315}\begin{pmatrix} 15 & -50 & -35 & -107 & 81 \\ -105 & -175 & 35 & -154 & 252 \\ -45 & 45 & 0 & 27 & 9 \\ 345 & 635 & 35 & 899 & -972 \\ -210 & -455 & -35 & -791 & 693 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{1}/_{21} & -{}^{10}/_{63} & -{}^{1}/_{9} & -{}^{107}/_{315} & {}^{9}/_{35} \\ -{}^{1}/_{3} & -{}^{5}/_{9} & {}^{1}/_{9} & -{}^{22}/_{45} & {}^{4}/_{5} \\ -{}^{1}/_{7} & {}^{1}/_{7} & 0 & {}^{3}/_{35} & {}^{1}/_{35} \\ {}^{23}/_{21} & {}^{127}/_{63} & {}^{1}/_{9} & {}^{899}/_{315} & -{}^{108}/_{35} \\ -{}^{2}/_{3} & -{}^{13}/_{9} & -{}^{1}/_{9} & -{}^{113}/_{45} & {}^{11}/_{5} \end{pmatrix}$$

Comprobación con Octave

```
D = [9 7 1 4 2; 6 5 7 4 3; 1 9 2 6 5; 2 1 0 -1 -2; 9 7 5 3 1];
rank(D)
inv(D)
```

```
/usr/libexec/octave/5.2.0/exec/x86_64-pc-linux-gnu/octave-gui: /home/dan22/anaconda3/envs/curso_AL/lib/l
ans =  5
ans =

   4.7619e-02  -1.5873e-01  -1.1111e-01  -3.3968e-01   2.5714e-01
  -3.3333e-01  -5.5556e-01   1.1111e-01  -4.8889e-01   8.0000e-01
  -1.4286e-01   1.4286e-01  -1.0408e-17   8.5714e-02   2.8571e-02
   1.0952e+00   2.0159e+00   1.1111e-01   2.8540e+00  -3.0857e+00
  -6.6667e-01  -1.4444e+00  -1.1111e-01  -2.5111e+00   2.2000e+00
```

E)

$$E = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

La determinante de la matriz esta dada por la siguiente expresión

$$|E| = (0)(0) - (a)(a) = -a^2$$

El rango de esta matriz esta dado según el valor que se le asigne a la variable a

$$\text{rg}(E) = \begin{cases} 2 & \text{Si} \quad a \neq 0, a \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{Si} \quad a = 0 \end{cases}$$

La inversa de la matriz está dada de la siguiente forma

$$\text{Adj}(E) = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \qquad (\text{Adj}(E))^t = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

$$E^{-1} = \frac{1}{\det(E)}(\text{Adj}(E))^t = \frac{1}{-a^2}\begin{pmatrix} 0 & -a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & {}^1\!/_a \\ {}^1\!/_a & 0 \end{pmatrix}$$

F)

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & a & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La determinante de esta matriz esta dado por la siguiente expresión

$$|F| = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = -(2a-3) = 3 - 2a$$

Cuando el determinante es 0, el valor de a es

$$3 - 2a = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{3}{2}$$

Con este caso podemos deducir que el rango es menor que 3, $\text{rg}(F) < 3$, para el caso en que $a = \frac{3}{2}$.

Considerando lo anterior, un menor de orden 2, cuando a vale lo dicho, tiene una determinante no nula

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 4 \end{vmatrix} = (1)(4) - (a)(0) = 4$$

Por lo tanto cuando $a = \frac{3}{2}$ el rango de la matriz F es igual a 2

De esta manera, el rango de F se define bajo los siguientes casos

$$\text{rg}(F) = \begin{cases} 3 & \text{Si} \quad a \neq \frac{3}{2} \\ 2 & \text{Si} \quad a = \frac{3}{2} \end{cases}$$

La inversa de la matriz se obtiene de la siguiente forma

$$\text{Adj}(F) = \begin{pmatrix} -a & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & -8 & 2a-3 \end{pmatrix} \qquad (\text{Adj}(F))^t = \begin{pmatrix} -a & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 2a-3 \end{pmatrix}$$

$$F^{-1} = \frac{1}{\det(F)}(\text{Adj}(F))^t = \frac{1}{3-2a}\begin{pmatrix} -a & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 2a-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-a}{3-2a} & \frac{1}{3-2a} & \frac{4}{3-2a} \\ \frac{3}{3-2a} & \frac{-2}{3-2a} & \frac{-8}{3-2a} \\ 0 & 0 & \frac{2a-3}{3-2a} \end{pmatrix}$$