Taller evaluable 1

AL y MD - 21/12/2020

Daniel Eduardo Macias Estrada

Ejercicio 1

Halla el cociente y el resto de la división de $p(x) = (x+1)^7$ entre $q(x) = x^2 + x + 1$.

$$\frac{(x+1)^7}{x^2+x+1} = \frac{x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x + 1}{x^2+x+1}$$

$$x^5 + \frac{6x^6 + 20x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x + 1}{x^2+x+1} = x^5 + 6x^4 + \frac{14x^5 + 29x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x + 1}{x^2+x+1}$$

$$= x^5 + 6x^4 + 14x^3 + \frac{15x^4 + 21x^3 + 21x^2 + 7x + 1}{x^2+x+1} = x^5 + 6x^4 + 14x^3 + 15x^2 + \frac{6x^3 + 6x^2 + 7x}{x^2+x+1}$$

$$= x^5 + 6x^4 + 14x^3 + \frac{15x^4 + 21x^3 + 21x^2 + 7x + 1}{x^2+x+1} = x^5 + 6x^4 + 14x^3 + 15x^2 + \frac{6x^3 + 6x^2 + 7x}{x^2+x+1}$$

$$= x^5 + 6x^4 + 14x^3 + 15x^2 + 6x + \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

Comprobación en Python

```
import numpy as np
p = np.poly1d([1,7,21,35,35,21,7,1])
q = np.poly1d([1,1,1])

r = p/q

r[0]
# Cociente
```

```
## poly1d([ 1.,  6., 14., 15.,  6.,  0.])
```

```
r[1]
#Resto
```

```
## poly1d([1., 1.])
```

Ejercicio 2

Halla el módulo y el árgumento del número complejo $\frac{(1+i)^7}{1-i}$.

$$z_1 = (1+i) = re^{i\varphi} \qquad r = |z_1| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \qquad \varphi = \arg(z_1) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{4}\pi$$

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\cdot\frac{1}{4}\pi} \qquad {z_1}^7 = (\sqrt{2}e^{i\cdot\frac{1}{4}\pi})^7 = 8\sqrt{2}e^{i(\frac{7}{4}\pi)} = 8\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right)$$

$${z_1}^7 = 8\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8(1-i)$$

$$r = \frac{{z_1}^7}{1-i} = \frac{8(1-i)}{1-i} = 8$$

Esto implica que

$$|r| = \sqrt{(8)^2+(0)^2} = \sqrt{8^2} = 8 \qquad \arg(r) = \arctan\left(\frac{0}{8}\right) = 0$$

Comprobación en Python

```
import cmath
z1 = complex(1,1)**7
z2 = complex(1,-1)
r = z1/z2
print(r)
```

```
## (8+0j)
```

```
abs(r)
#Modulo |r|
```

```
## 8.0
```

```
cmath.phase(r)
#Argumento arg(r)
```

```
## 0.0
```

Ejercicio 3

Halla el valor de la matriz X para que se verifique

$$A\cdot X\cdot A^t = \sqrt{5}\cdot A$$

donde A es la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot A^t = A^{-1} \cdot \sqrt{5} \cdot A \quad &\Longrightarrow \quad X \cdot A^t = \sqrt{5} \\ X \cdot A^t \cdot A^{t^{-1}} = \sqrt{5} \cdot A^{t^{-1}} \quad &\Longrightarrow \quad X = \sqrt{5} \cdot A^{t^{-1}} \end{aligned}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{t^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \sqrt{5} \cdot A^{t^{-1}} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -2\sqrt{5} & \sqrt{5} \\ 0 & -\sqrt{5} & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4

Resuelve aplicando el método de Gauss y clasifica según corresponda el sistema de ecuaciones lineal siguiente

$$\begin{cases} x - y + z + t = 4 \\ 2x + y - 3z + t = 4 \\ x - 2y + 2z - t = 3 \\ x - 3y + 3z - 3t = 2 \end{cases}$$

La representación matricial del sistema es el siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Mediante el teorema de Rouché-Frobenius se determinará el tipo de sistema que es

$$A \sim f_2 - 2f_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim f_3 - f_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim f_4 - f_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \left(\frac{1}{3}\right) f_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5/3 & -1/3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim f_3 + f_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & -2/3 & -7/3 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim f_4 + 2f_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & -2/3 & -7/3 \\ 0 & 0 & -4/3 & -14/3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \left(-\frac{3}{2}\right) f_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 \\ 0 & 0 & -4/3 & -14/3 \end{pmatrix} \sim f_4 + \left(\frac{4}{3}\right) f_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto quiere decir que $rg(A) = 3$

$$(A|B) \sim f_2 - 2f_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -1 & | & -4 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & | & 3 \\ 1 & -3 & 3 & -3 & | & 2 \end{pmatrix} \sim f_3 - f_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -1 & | & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & -1 \\ 1 & -3 & 3 & -3 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim f_4 - f_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -1 & | & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & | & -2 \end{pmatrix} \sim \left(\frac{1}{3}\right) f_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & -^5/_3 & -^1/_3 & | & -^4/_3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & | & -2 \end{pmatrix}$$

$$\sim f_3 + f_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & -^5/_3 & -^1/_3 & | & -^4/_3 \\ 0 & 0 & -^2/_3 & -^7/_3 & | & -^7/_3 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & | & -2 \end{pmatrix} \sim f_4 + 2f_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & -^5/_3 & -^1/_3 & | & -^4/_3 \\ 0 & 0 & -^2/_3 & -^7/_3 & | & -^7/_3 \\ 0 & 0 & -^4/_3 & -^{14}/_3 & | & -^{14}/_3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \left(-\frac{3}{2}\right) f_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & -^5/_3 & -^1/_3 & | & -^4/_3 \\ 0 & 0 & 1 & ^7/_2 & | & ^7/_2 \\ 0 & 0 & -^4/_3 & -^{14}/_3 & | & -^{11}/_3 \end{pmatrix} \sim f_4 + \left(\frac{4}{3}\right) f_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & -^5/_3 & -^1/_3 & | & -^4/_3 \\ 0 & 0 & 1 & ^7/_2 & | & ^7/_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

De esta manera comprobamos que $rg(A|B) = 3$

Como $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B)$, según el teorema de Rouché-Frobenius, podemos afirmar que el sistema es compatible. Sin embargo el rango es menor que el orden, $rg(A) < n$, por lo tanto el sistema es compatible indeterminado

Las operaciones para determinar la matriz X son las siguientes

$$t \in \mathbb{R} \qquad z + \frac{7}{2}t = \frac{7}{2} \implies z = \frac{7}{2} - \frac{7}{2}t$$

$$y - \frac{5}{3}z - \frac{1}{3}t = -\frac{4}{3} \implies y - \frac{5}{3}\left(\frac{7}{2} - \frac{7}{2}t\right) - \frac{1}{3}t = -\frac{4}{3} \implies y - \frac{35}{6} + \frac{35}{6}t - \frac{1}{3}t = -\frac{4}{3}$$

$$y + \frac{11}{2}t = -\frac{4}{3} + \frac{35}{6} \implies y + \frac{11}{2}t = \frac{9}{2} \implies y = \frac{9}{2} - \frac{11}{2}t$$

$$x - y + z + t = 4 \implies x - \left(\frac{9}{2} - \frac{11}{2}t\right) + \left(\frac{7}{2} - \frac{7}{2}t\right) + t = 4$$

$$x - \frac{9}{2} + \frac{11}{2}t + \frac{7}{2} - \frac{7}{2}t + t = 4 \implies x - \frac{2}{2} + \frac{6}{2}t = 4 \implies x - 1 + 3t = 4 \implies x = 5 - 3t$$

Por lo tanto el resultado de la matriz de incógnitas es el siguiente

$$X = \begin{pmatrix} 5 - 3t \\ \frac{9}{2} - \frac{11}{2}t \\ \frac{7}{2} - \frac{7}{2}t \\ t \end{pmatrix}$$

```python
from sympy import *
from sympy.solvers.solveset import linsolve
x,y,z,t = symbols('x,y,z,t')

A = np.array([[1,-1,1,1],[2,1,-3,1],[1,-2,2,-1],[1,-3,3,-3]])
b = np.array([4,4,3,2])
AB = np.array([[1,-1,1,1,4],[2,1,-3,1,4],[1,-2,2,-1,3],[1,-3,3,-3,2]])

np.linalg.matrix_rank(A) == np.linalg.matrix_rank(AB)
# Comprobar que el sistema es compatible
```

```
## True
```

```python
np.linalg.matrix_rank(A) == 4
# Comprobar que el sistema es indeterminado
```

```
## False
```

```python
linsolve(Matrix(([1,-1,1,1,4],[2,1,-3,1,4],[1,-2,2,-1,3],[1,-3,3,-3,2])), (x,y,z,t))
# Solución
```

```
## FiniteSet((5 - 3*t, 9/2 - 11*t/2, 7/2 - 7*t/2, t))
```

Ejercicio 5

Considera el sistema de ecuaciones lineal

$$\begin{cases} ax & + & y & + & z & = & (a-1)(a+2) \\ x & + & ay & + & z & = & (a-1)^2(a+2) \\ x & + & y & + & az & = & (a-1)^3(a+2) \end{cases}$$

1. Indicar para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el sistema es compatible determinado, indeterminado o bien incompatible.
2. Resolver el sistema cuando $a = 1$.
3. Resolver el sistema cuando $a = -2$.

1)

La representación matricial del sistema es el siguiente

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} (a-1)(a+2) \\ (a-1)^2(a+2) \\ (a-1)^3(a+2) \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz tanto para la matriz A como para su ampliada $|(A|B)|$ es el siguiente

$$|A| = a(a^2-1) - 1(a-1) + 1(1-a) = a^3 - a - a + 1 + 1 - a = a^3 - 3a + 2$$

Para poder determinar el valor del rango debemos de tener claro que casos son los que dan valor 0 a la determinante.

$$|A| = a^3 - 3a + 2 = 0 \quad \implies \quad (a-1)^2(a+2) = 0 \quad \implies \quad a = 1, a = -2$$

El sistema es compatible determinado cuando toma valores distintos a anteriormente obtenidos.

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = 3 \quad \text{Si} \quad a \neq 1 \text{ y } a \neq -2$$

En el caso de que $a = 1$, tenemos que el determinante de $|A|$ es 0, al igual que el menor de orden 2. Sin embargo, cuando el menor es de orden 1, el determinante es 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1)^3 - 3(1) + 2 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad |1| = 1$$

Debido a esto, $\text{rg}(A) = 1$.

Por otro lado, el rango de la ampliada se define de la siguiente manera. Los determinantes de los menores de orden 3 son iguales a 0, al igual que los determinantes de los menores de orden 2. Solo con el determinante de orden 1 es posible obtener un valor distinto a 0

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad |1| = 1$$

Debido a esto podemos decir que el rango de la ampliada es $\text{rg}(A|B) = 1$

Como ambas matrices tienen el mismo rango, el cual también es menor que el orden de la matriz A, concluimos que el sistema es compatible indeterminado

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = 1 \quad \text{Si} \quad a = 1$$

Comprobación mediante python

```
A = np.array([[1,1,1],[1,1,1],[1,1,1]])
AB = np.array([[1,1,1,0],[1,1,1,0],[1,1,1,0]])
np.linalg.matrix_rank(A) == np.linalg.matrix_rank(AB)
```

```
## True
```

```
np.linalg.matrix_rank(AB)
```

```
## 1
```

En el caso de $a = -2$, se obtendra el rango de ambas matrices. Entendemos que el rango esta dado por el proceso de verificar si las determinantes de los menores dan 0 o no. El determinante de la matriz |A| esta dado por

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2)^3 - 3(-2) + 2 = 0 \qquad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Un menor de orden 2 no es igual a 0, lo que nos indica que $\mathrm{rg}(A) = 2$

El rango de la ampliada es igual al de la matriz de coeficientes. Como el valor del rango es menor al valor del orden de A, entonces podemos afirmar que este es un sistema compatible indeterminado

Comprobación mediante python

```
A = np.array([[-2,1,1],[1,-2,1],[1,1,-2]])
AB = np.array([[-2,1,1,0],[1,-2,1,0],[1,1,-2,0]])
np.linalg.matrix_rank(A) == np.linalg.matrix_rank(AB)
```

```
## True
```

```
np.linalg.matrix_rank(AB)
```

```
## 2
```

2)

Resolver el sistema cuando $a = 1$.

Teniendo en cuenta que la incógnita principal es x pues el menor $|1|$ se forma por la primera columna. Además, debido a que no consideramos las dos últimas ecuaciones en el menor de orden 1, solo contemplamos la primer ecuación.

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & = & -z-y \end{cases}$$

Esto forma un sistema de Cramer de $A'X' = b'$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \qquad X' = \begin{pmatrix} x \end{pmatrix} \qquad b' = \begin{pmatrix} -z-y \end{pmatrix}$$

Cuya solución es la siguiente

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z-y \end{vmatrix}}{1} = -z-y$$

$$X = \begin{pmatrix} -z-y \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Comprobación en Python

```
linsolve(Matrix(([1,1,1,0], [1,1,1,0], [1,1,1,0])), (x,y,z))
```

```
## FiniteSet((-y - z, y, z))
```

2)

Resolver el sistema cuando $a = -2$.

Como las columnas que tomamos en el menor de orden 2 son las primeras dos, y aparte, se usa también las primeras dos ecuaciones, el sistema que se usa es el siguiente

$$\begin{cases} -2x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & -2y & + & z & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x & + & y & = & -z \\ x & + & -2y & = & -z \end{cases}$$

Como sistema de Cramer, queda de la siguiente forma

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad X' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad b' = \begin{pmatrix} -z \\ -z \end{pmatrix}$$

La solución, es la siguiente

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & 1 \\ -z & -2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3z}{3} = z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -z \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{3} = \frac{3z}{3} = z$$

$$X = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}$$

Comprobación en Python

```
linsolve(Matrix(([-2,1,1,0], [1,-2,1,0], [1,1,-2,0])), (x,y,z))
```

```
## FiniteSet((z, z, z))
```