Factorizacion LU con R

Daniel Eduardo Macias Estrada

30/11/2020

Introducción

En el siguiente documento se explicará de manera breve, el manejo de la factorización LU con el lenguaje de programación R.

Toda la información recabada está basado enteramente de la obra de Juan Gabrial Gomila Salas, CEO de Frogames, Matemático, Data Scientist & Game Designer

Uso de la Factorización LU en R

En este lenguaje, para dar lugar a dicho proceso, es necesario el uso de la función **LU()**, la cual acepta como argumento una matriz cuadrada.

La respuesta que obtendremos será una lista de matrices, que contendrá a P, U y L

Ejemplo 1

Encontremos la factorización LU de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

```
library(matlib)
A = rbind(c(1,3,0,-1), c(2,1,-1,5), c(0,-2,3,-1), c(1,1,3,1))
luA = LU(A)
```

Con la función **LU()** se creo la lista almacenada en luA, a la cual se puede acceder a sus componentes de la siguiente manera.

Como primer caso, se muestra P, el cual es la matriz en el que se almacenan las permutaciones realizadas. En caso de obtener una I_n, tenemos que no se ha realizado ninguna permutación

```
luA$P
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]    1    0    0    0
## [2,]    0    1    0    0
## [3,]    0    0    1    0
## [4,]    0    0    0    1
```

En el caso de L, se obtiene

```r
luA$L
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]    1  0.0    0    0
## [2,]    2  1.0    0    0
## [3,]    0  0.4    1    0
## [4,]    1  0.4    1    1
```

En el caso de U, obtenemos

```r
luA$U
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]    1    3  0.0 -1.0
## [2,]    0   -5 -1.0  7.0
## [3,]    0    0  3.4 -3.8
## [4,]    0    0  0.0  3.0
```

La comprobación de los resultados se muestra a continuación

```r
luA$L %*% luA$U
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]    1    3    0   -1
## [2,]    2    1   -1    5
## [3,]    0   -2    3   -1
## [4,]    1    1    3    1
```

Ejemplo 2

Encontraremos ahora la factorización LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

```r
A = rbind(c(0,1,3), c(1,3,-2), c(-3,-2,-1))
luA = LU(A)
```

Para este ejemplo, P sería

```r
luA$P
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    0    1    0
## [2,]    1    0    0
## [3,]    0    0    1
```

La matriz L sería

```r
luA$L
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    0    0
## [2,]    0    1    0
## [3,]   -3    7    1
```

La matriz U, sería

```r
luA$U
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    3   -2
## [2,]    0    1    3
## [3,]    0    0  -28
```

La comprobación de los resultados se muestra a continuación

```r
luA$L %*% luA$U
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    3   -2
## [2,]    0    1    3
## [3,]   -3   -2   -1
```

Aplicación de la factorización LU para resolver sistemas de ecuaciones

La función **LU()** es también usada para resolver sistemas de ecuaciones lineales, aplicando la factorización LU a la matriz de coeficientes.

Aparte de añadir la matriz de coeficientes, de la cual obtendremos sus componentes L y U, a los argumentos de la función, se deberá agregar el vector de términos independientes. Con esto en cuenta, los componentes que devuelve en la lista no son solo P, L y U, sino que también x y d

Donde

- x es la solución del sistema
- d es el vector solución del sistema $Ld = b$, que luego nos sirve para resolver $Ux = d$

Ejemplo 3

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} & & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \\ -3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & -2 \end{cases}$$

```r
A = rbind(c(0,1,3), c(1,3,-2), c(-3,-2,-1))
b = c(1,3,-2)
sistema = LU(A,b)
```

```
## Warning in if (!backword) 1L:len else len:1L: la condición tiene longitud > 1 y
## sólo el primer elemento será usado
```

Componente P

```
sistema$P
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    0    1    0
## [2,]    1    0    0
## [3,]    0    0    1
```

Componente L

```
sistema$L
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    0    0
## [2,]    0    1    0
## [3,]   -3    7    1
```

Componente U

```
sistema$U
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    3   -2
## [2,]    0    1    3
## [3,]    0    0  -28
```

Componente d

```
sistema$d
```

```
##      [,1]
## [1,]    3
## [2,]    1
## [3,]    0
```

Componente x

```
sistema$x
```

```
##      [,1]
## [1,]    0
## [2,]    1
## [3,]    0
```