Tarea 11: Vectores

Daniel Eduardo Macias Estrada

18/1/2021

Pregunta 1

Encontrar un vector equivalente a $\vec{AB}$ donde $A = (1, 2)$ y $B = (0, 3)$

$$\vec{AB} = (0 - 1, 3 - 2) = (-1, 1)$$

Se tiene que encontrar un vector $\vec{CD}$ tal que sea equivalente a $\vec{AB}$ Esto se puede definir de la siguiente manera $\vec{AB} = \vec{CD} \implies (b_x - a_x, b_y - a_y) = (d_x - c_x, d_y - c_y)$

En base al planteamiento anterior: $(d_x - c_x, d_y - c_y) = (-1, 1)$

Lo que a su vez indica: $d_x - c_x = -1$ y $d_y - c_y = 1$

Al despejar las coordenadas del punto D: $d_x = c_x - 1$ y $d_y = 1 + c_y$

De esta manera $(c_x, c_y) \in \mathbb{R}$

Por lo tanto tomaremos cualquier valor para las coordenadas

Si $C = (15, 2)$, entonces $D = (15 - 1, 1 + 2) = (14, 3)$

Pregunta 2

Encontrar un vector equivalente a $\vec{AB}$ con $A = (3, 5)$ y $B = (6, -2)$ tal que su origen está en el punto $C = (-1, 0)$

$$\vec{AB} = (6 - 3, -2 - 5) = (3, -7)$$

Tomando en cuenta el planteamiento anterior, el vector $\vec{CD} = (d_x - c_x, d_y - c_y) = (3, -7)$

Las coordenadas del punto D se definen como: $d_x = 3 + c_x$ y $d_y = c_y - 7$

Como $C = (-1, 0)$ entonces: $d_x = 3 - 1$ y $d_y = 0 - 7$

De tal manera, si $C = (-1, 0)$ entonces, $D = (2, -7)$

Pregunta 3

Encontrar el módulo, dirección y sentido del vector de componentes (7, -5)

$$\vec{A} = (7, -5)$$

$\|\vec{A}\| = \sqrt{\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle} = \sqrt{7^2 + (-5)^2} = 8.6023253$

$\alpha = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right) = \arctan\left(-\frac{5}{7}\right) = 324.4623222$

Pregunta 4

Dado el vector de módulo 8 y el hecho de que forma un ángulo de 135° con el eje OX, calcular sus componenentes

$\|\vec{OX}\| = 8 \qquad \alpha = 135$ř

$\vec{OX} = (a_x, a_y)$

$a_x = \|\vec{OX}\| \cdot \cos(\alpha) = 8 \cdot \cos(135$ř$) =$ -5.6568542

$a_y = \|\vec{OX}\| \cdot \sin(\alpha) = 8 \cdot \sin(135$ř$) =$ 5.6568542

$\vec{A} =$ (-5.656854, 5.656854)

Pregunta 5

Dados los puntos $A = (1, 2, 3)$, $B = (0, -1, 2)$ y $C = (-2, -7, 0)$, si $D = (-1, x, 0)$ encontrar, si es posible, el valor de x para que los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$ sean paralelos

Los vectores a tomar en cuenta son:

$$\vec{AB} = (0 - 1, -1 - 2, 2 - 3) = (-1, -3, -1)$$
$$\vec{CD} = (-1 - (-2), x - (-7), 0 - 0) = (1, x + 7, 0)$$

Para que dos vectores sean paralelos, ambos vectores deben de ser proporcionales. Por lo que

$$\frac{\vec{AB}}{\vec{CD}} \implies \frac{ab_i}{cd_i} = \frac{-1}{1} = \frac{-3}{x+7} = \frac{-1}{0}$$

Debido a la última razón, obtenemos una indeterminación pues se divide entre 0, lo cual no es posible. Por ende, podemos concluir que no existe valor de x que permite a ambos vectores a ser paralelos.

Pregunta 6

Dados los vectores $u = (2, 3, 0)$ y $v = (-3, 0, 1)$, encontrar el valor de k para que los vectores w, z sean paralelos donde $w = 2u - v$ y $z = -3u + kv$

$$\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v} = (4, 6, 0) - (-3, 0, 1) = (7, 6, -1)$$

$$\vec{z} = (-6, -9, 0) + k(-3, 0, 1) = (-6, -9, 0) + (-3k, 0, k) = (-6 - 3k, -9, k)$$

Considerando que los elementos de los vectores deben de ser proporcionales, se puede representar de la siguiente manera

$$\frac{w_i}{z_i} \implies \frac{7}{-6-3k} = \frac{6}{-9} = \frac{-1}{k} \implies -\frac{2}{3} = \frac{-1}{k} \implies k = -1 \cdot -\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Pregunta 7

¿Es el vector (1,2,3) combinación lineal de los vectores (2,3,0) y (-5,0,2)?

$$(1,2,3) = a(2,3,0) + b(-5,0,2)$$

Esto nos da como resultado el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2a & - & 5b & = & 1 \\ 3a & & & = & 2 \\ & + & 2b & = & 3 \end{cases}$$

Esto de manera matricial se representa de la siguiente manera

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Usaremos el uso del teorema de Rouché-Frobenius para determinar si existe solucíón para el sistema

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - -5 \cdot 3 = 15 \quad \Longrightarrow \quad \text{rg}(A) = 2$$

$$det(A|B) = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(0-4) - (-5)(9-0) + 1(6-0) = -8 + 45 + 6 = 43 \quad \Longrightarrow \quad \text{rg}(A|B) = 3$$

Al no ser iguales los rangos de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada, podemos determinar que el sistema es incompatible. Esto a su vez nos lleva a concluir que el vector $(1,2,3)$ no es combinación lineal de $(2,3,0)$ y $(-5,0,2)$

Pregunta 8

Dados los vectores $u = (2,1,0)$, $v = (-3,4,1)$ y $w = (1,0,-5)$

- Comprobad que el producto escalar cumple la propiedad conmutativa
- Comprobad que el producto escalar cumple la propiedad distributiva
- Comprobad que el producto escalar cumple la propiedad asociativa entre escalares y vectores

Primer punto

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \quad \Longrightarrow \quad 2 \cdot -3 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 1 = -3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0$$

$$-6 + 4 + 0 = -6 + 4 + 0 \quad \Longrightarrow \quad -2 = -2$$

Por lo tanto, la propiedad conmutativa se cumple

Segundo punto

$$\langle \vec{u}, (\vec{v} + \vec{w}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$$

$$\vec{v} + \vec{w} = (-3+1, 4+0, 1-5) = (-2, 4, -4) \qquad \langle \vec{u}, (\vec{v} + \vec{w}) \rangle = 2 \cdot -2 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot -4 = -4 + 4 + 0 = 0$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2 \cdot -3 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 1 = -6 + 4 + 0 = -2$$

$$\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot -5 = 2 + 0 + 0 = 2$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = -2 + 2 = 0$$

Por lo tanto se ccumple la propiedad distributiva

$$\langle \vec{u}, (\vec{v} + \vec{w}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$$

Tercer punto

Considerando el escalar $\lambda = 3$

$$\langle (\lambda \vec{u}), \vec{v} \rangle = 6 \cdot -3 + 3 \cdot 4 + 0 \cdot 1 = -18 + 12 + 0 = -6$$

$$\langle \vec{u}, (\lambda \vec{v}) \rangle = 2 \cdot -9 + 1 \cdot 12 + 0 \cdot 3 = -18 + 12 + 0 = -6$$

$$\lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 3(2 \cdot -3 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 1) = 3(-6+4) = 3(-2) = -6$$

Por lo tanto, comprobamos que

$$\langle (\lambda \vec{u}), \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, (\lambda \vec{v}) \rangle$$

Pregunta 9

Demostrar que si $u \neq 0$, entonces $\langle u, u \rangle > 0$ donde $u = (u_1, \ldots, u_n)$

De esta forma, se representa el producto escalar de u por u, de la siguiente manera

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0 \quad \Longrightarrow \quad (u_1)^2 + \cdots + (u_n)^2 > 0$$

No necesariamente todos los elementos del vector son diferentes de 0, sin embargo, al aclarar que u no es un vactor nulo, podemos afirmar que por lo menos uno de sus elementos es distinto a 0, lo que causa que el producto escalar sea mayor a 0.

Pregunta 10

Dado $\vec{u} = (1, 2, -1)$

- Calculad su norma
- Comprobad que

$$\|2\vec{u}\| = 2\|\vec{u}\|$$

- Comprobad que

$$\|(-3)\vec{u}\| = |-3| \cdot \|\vec{u}\| = 3\|\vec{u}\|$$

- Comprobad que si se divide por su norma se obtiene otro vector que es unitario
- Encuentra otro vector de la misma dirección y sentido, pero con norma 3

Primer punto

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$$

Segundo punto

$$\|2\vec{u}\| = 2\|u\| \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{6}$$

$$\sqrt{4 + 16 + 4} = 2\sqrt{6} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \quad \Longrightarrow \quad 2\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

Tercer punto

$$\|(-3)\vec{u}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 36 + 9} = \sqrt{54} = \sqrt{9 \cdot 6} = 3\sqrt{6}$$

$$|-3| \cdot \|\vec{u}\| = 3\sqrt{6} \qquad 3\|\vec{u}\| = 3\sqrt{6}$$

Por lo tanto, se comprueba que

$$\|(-3)\vec{u}\| = |-3| \cdot \|\vec{u}\| = 3\|\vec{u}\|$$

Cuarto punto

$$\frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u} = \vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{4}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)} = \sqrt{\frac{6}{6}} = \sqrt{1} = 1$$

Como la norma del vector u dividido por su norma es igual a 1, podemos decir que el vector obtenido al hacer la división es unitario

Quinto punto

Un vector que tenga la misma dirección, y el mismo sentido, pero con distinto módulo quiere decir que ese vector es paralelo, es decir, que sea proporcional al vector dado

$$\vec{u_m} = a\vec{u} = (a, 2a, -a)$$

$$\|\vec{u_m}\| = \sqrt{a^2 + (2a)^2 + (-a)^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2 + a^2} = \sqrt{6a^2} = \sqrt{6}a$$

Si se busca un vector proporcional cuya norma sea 3 entonces realizamos la siguiente igualdad

$$\|\vec{u_m}\| = 3 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{6}a = 3 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Por lo tanto, el vector que tiene la misma dirección y sentido pero cuyo módulo es 3, es

$$\vec{u_m} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

Pregunta 11

Demostrad que cualquier vector $\vec{u}$, al ser dividido por su norma, es unitario

Para demostrar que un vector dividido por su norma es unitario, debemos de comprobar si la norma del mismo es igual a 1

Esto se muestra de la siguiente manera

$$\|\frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u}\| = 1$$

Como se demostró anteriormente, un escalar puede ser sacado de la operación de norma

$$\frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \|\vec{u}\| = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = 1$$

De esta manera, se demuestra que el vector obtenido al dividir un vector u por su norma, es unitario

Pregunta 12

Dados los puntos $A = (1, 2, 3)$, $B = (0, -1, 2)$ y $C = (-2, -7, 0)$

- Calcula la distancia entre A y B
- Calcula la distancia entre A y C
- Calcula la distancia entre B y B

Primer punto

$$\vec{AB} = (0 - 1, -1 - 2, 2 - 3) = (-1, -3, -1)$$

$$d(A, B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 9 + 1} = \sqrt{11}$$

Segundo punto

$$\vec{AC} = (-2-1, -7-2, 0-3) = (-3, -9, -3)$$

$$d(A, C) = \|\vec{AC}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-9)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+81+9} = \sqrt{99}$$

Tercer punto

$$\vec{BC} = (-2-0, -7-(-1), 0-2) = (-2, -6, -2)$$

$$d(B, C) = \|\vec{BC}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+36+4} = \sqrt{44}$$

Pregunta 13

Dados los puntos $A = (1, 2, 3)$, $B = (0, -1, 2)$ y $C = (-2, -7, 0)$

- Encuentra el ángulo que forman los vectores AB y AC
- Calcula el producto vectorial de los vectores CB y AC

$$\vec{AB} = (-1, -3, -1) \qquad \|\vec{AB}\| = \sqrt{11}$$

$$\vec{AC} = (-3, -9, -3) \qquad \|\vec{AC}\| = \sqrt{99} = 3\sqrt{11}$$

$$\vec{CB} = (0-(-2), -1-(-7), 2-0) = (2, 6, 2) \qquad \|\vec{CB}\| = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

Primer punto

$\cos(\alpha) = \dfrac{\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\|} = \dfrac{(-1 \cdot -3 + -3 \cdot -9 + -1 \cdot -3)}{\sqrt{11} \cdot 3\sqrt{11}} = \dfrac{3+27+3}{3 \cdot 11} = \dfrac{33}{33} = 1$
$\alpha = \arccos(1) = 0$

Segundo punto

$\cos(\alpha) = \dfrac{\langle \vec{CB}, \vec{AC} \rangle}{\|\vec{CB}\| \cdot \|\vec{AC}\|} = \dfrac{(2 \cdot -3 + 6 \cdot -9 + 2 \cdot -3)}{2\sqrt{11} \cdot 3\sqrt{11}} = \dfrac{-6-54-6}{6 \cdot 11} = \dfrac{-66}{66} = -1$
$\alpha = \arccos(-1) = 3.1415927$

Pregunta 14

¿Para qué valores de a son ortogonales los vectores $(a, -a-8, a, a) y (a, 1, -2, 0)$?

Para que dos vectores sean ortogonales deben de tener un ángulo entre sí de 90°, en otras palabras, su producto escalar debe ser igual a 0

$$\vec{u} = (a, -a-8, a, a) \qquad \vec{v} = (a, 1, -2, 0)$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = a \cdot a + (-a-8) \cdot 1 + a \cdot -2 + a \cdot 0 = a^2 - a - 8 - 2a = a^2 - 3a - 8 = 0$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-8)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{9+32}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{2}$$

$a = \dfrac{3+\sqrt{41}}{2} =$ 4.7015621 y $a = \dfrac{3-\sqrt{41}}{2} =$ -1.7015621

De esta manera podemos asegurar que existen dos valores para a que dan como resultado dos vectores ortogonales

$$a = \begin{cases} 4.7015621 \\ -1.7015621 \end{cases}$$