УрФУ Мат-Мех

Дифференциальные уравнения

Курс 2015 года 4 семестр (КБ-КН)

Лекция 2
Типы ДУ

Авторы конспекта:

Данил Миронов (КБ-201)

Курс читает:

Ряшко Л.Б.

дата лекции 25 февраля 2015 г.

дата редакт. 4 августа 2015 г.

1 Уравнения с разделяющимися переменными

Предыдущая лекция

2 Линейные уравнения

Предыдущая лекция

3 Уравнения Бернули

$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)x^{\alpha}$ при этом $\alpha \neq 1, 0$

$\underbrace{\frac{1}{x^{\alpha}}\frac{dx}{dt}} = a(t)x^{1-\alpha} + b(t)$

$y(t) = x^{1-\alpha}(t)$

$\frac{dy}{dt} = (1-\alpha)\underbrace{x^{-\alpha}\frac{dx}{dt}} \Rightarrow \frac{1}{1-\alpha}\frac{dy}{dt} = a(t)y + b(t)$ # Свели к линейному неоднородному

4 Уравнения Рикати

$\frac{dx}{dt} = a(t)x^2 + b(t)x + f(t)$

Если $a = 0$ -линейное неоднородное
Если $f = 0$ - бернули
Предположим, что $\overline{x}(t)$ - известное частное решение
Замена $x = y + \overline{x}(t)$ и подставим в исходное

$$\frac{dy}{dt}+\underline{\frac{d\overline{x}}{dt}} = a(t)[y^2+2y\overline{x}+x^2]+b(t)[y+\overline{x}]+f(t) = \underline{a(t)\overline{x}^2}+\underline{b(t)\overline{x}}+\underline{f(t)}+a(t)y^2+2a(t)\overline{x}(t)y+b(t)y$$

Подчеркнуто, так как $\overline{x}$ - является частным решением и имеем тождество

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y^2 + [2a(t)\overline{x}(t) + b(t)]y \text{ Уравнение Бернули, где } \alpha = 2 \text{ по } y$$

5 Уравнения в полных дифференциалах

$$M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0 \text{ \# что перем, что функ - можем выбирать} \tag{1}$$

Определение. *Уравнение (1) называется уравнением в полных дифференциалах, если* $\exists U(t,x)$ *что* $M(t,x)dt + N(t,x)dx = dU$

(2) $dU(t,x) = \dfrac{\partial U}{\partial t}dt + \dfrac{\partial U}{\partial x}dx \Rightarrow \exists U(t,x)$ *что* $\dfrac{\partial U}{\partial t} = M(t,x)$ *and* $\dfrac{\partial U}{\partial x} = N(t,x)$ *(3)*

Теорема 1 *Пусть (1) - уравнение в ПД*
$x(t)$ *- решение (1)* $\iff U(t,x(t)) \equiv const$

Доказательство.

$$\frac{d}{dt}[U(t,x(t))] = \frac{\partial U}{\partial t}(t,x(t) + \frac{\partial U}{\partial x}(t,x(t))\frac{dx}{dt} =^{(3)} M(t,x(t)) + N(t,x(t))\frac{dx}{dt}$$
$$= \frac{M(t,x(t))dt + N(t,x(t))dx}{dt}$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ $x(t)$ - решение (1) $\Longrightarrow$ числитель $\equiv 0 \Longrightarrow \dfrac{d}{dt}[U(t,x(t))] \equiv 0 \Longrightarrow U(t,x(t)) \equiv const$
Если производная ноль, то функция - $const$
$\boxed{\Longleftarrow}$ $U(t,x(t)) \equiv const \Longrightarrow$ числитель $\equiv 0 \Longrightarrow x(t)$ - решение (1) □

Если мы такую U найдем, то общее решение (1) $U(t,x) = C$
Как нам найти функцию $U(t,x)$? и Как проверить, что уравнение (1) является уравнением в полных дифференциалах ?

Теорема 2 *(1) - уравнение в ПД* $\iff \dfrac{\partial M(t,x)}{\partial x} \equiv \dfrac{\partial N(t,x)}{\partial t}$ *(4)*

Доказательство. (1) - уравнение в ПД $\Longrightarrow \exists U(t,x)$ удовлетворяющая (3) $\Longrightarrow$
$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial M}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \\ \dfrac{\partial N}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial t \partial x}\end{array}\right\}$ имеем просто разный порядок дифференцирования $\Longrightarrow$ они тождественно равны $\Longrightarrow$ выполняется тождество (4)
$\boxed{\Longleftarrow}$ Пусть выполняется (4)

$\dfrac{\partial U}{\partial t} = M(t,x) \Longrightarrow U(t,x) = \int\limits_{t_0}^{t} M(\tau,x)d\tau + \underline{\underline{C(x)}}$
Подставим во 2-е: $\dfrac{\partial U}{\partial x} = \int\limits_{t_0}^{t} \dfrac{\partial M}{\partial x}(\tau,x)d\tau + \dfrac{dC}{dx} = N(t,x)$ из (4) видим, что $\dfrac{\partial M}{\partial x}(\tau,x) \equiv \dfrac{\partial N}{\partial t}(\tau,x)$
Тогда $\int\limits_{t_0}^{t} \underbrace{\dfrac{\partial N}{\partial t}(\tau,x)d\tau}_{N(t,x)-N(t_0,x)} + \dfrac{dC}{dx} = N(t,x) \Longrightarrow \dfrac{dC}{dx} = N(t_0,x)$
$\Longrightarrow C(x) = \int\limits_{x_0}^{x} N(t_0,s)ds$
Теперь можно подставить эту функцию в ДУ и убедиться, что $\equiv const$ □

Пример. $\underbrace{(t+x)}_{M}dt + \underbrace{(t-x)}_{N}dx = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = (t+x)'_x = 1 \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = t + x \\ \dfrac{\partial U}{\partial x} = t - x \end{cases}$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = (t-x)'_t = 1$$

$U(t,x)= \dfrac{t^2}{2} + tx + C(x) \dfrac{\partial U}{\partial x} = \underline{t} + \dfrac{dC}{dx} = \underline{t} - x \Longrightarrow C(x) = -\dfrac{x^2}{2} \Longrightarrow U(t,x) = \dfrac{t^2}{2} + tx - \dfrac{x^2}{2}$

Ответ: $\dfrac{t^2}{2} + tx - \dfrac{x^2}{2} = C$