УрФУ Мат-Мех

Дифференциальные уравнения

Курс 2015 года 4 семестр (КБ-КН)

Лекция 1
Базовые определения

Авторы конспекта:
Данил Миронов (КБ-201)

Курс читает:
Ряшко Л.Б.

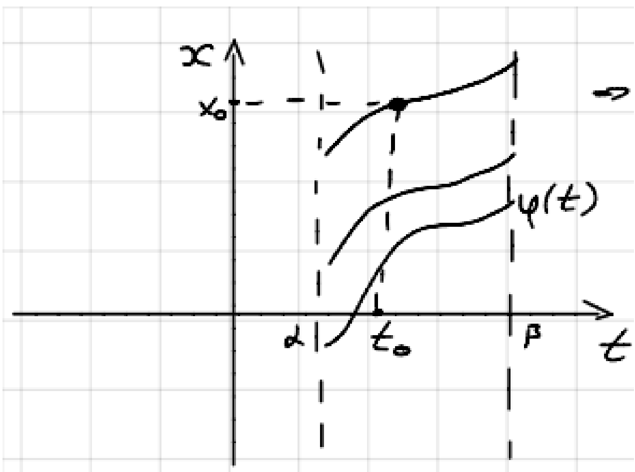
1 августа 2015 г.

Определение. *ДУ - уравнение, связывающее $F(t, x, x', \dots, x^n) = 0$ уравнение n-ого порядка, где F - функция t - независимая переменная*
Решение - функция $x = \psi(t)$ на (α, β) такая, что при подстановке в исходное уравнение - оно превращается в тождество по t на интервале

1 Дифференциальные уравнения первого порядка разрешенные относительно производных

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \text{ само уравнение } F(t, x, x'') \tag{1}$$

Еще более узко $\dfrac{dx}{dt} = f(t)$ # Найти $x \Longrightarrow x(t) = \int f(t)dt = \underbrace{\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau}_{\psi(t)} + C$ - общее решение



$$x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

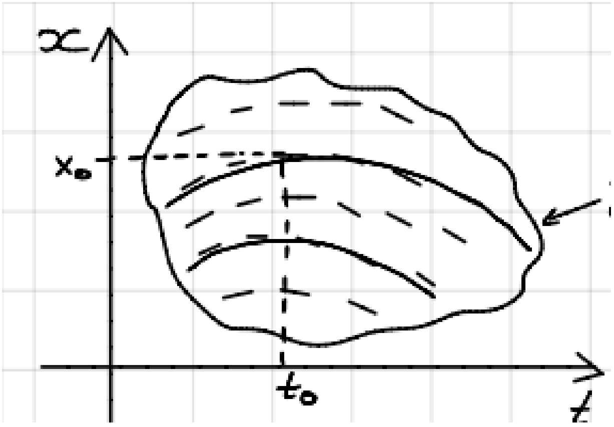
Это доп условие приводит к задаче, имеющей единственное решение

Определение (Задача Коши)**.** *Нужно добавить начальное условие*

$$\begin{cases} \text{(1) } \dfrac{dx}{dt} = f(t, x) & \text{- д.у} \\ \text{(2) } x(t_0) = x_0 & \text{- начальное условие} \end{cases}$$

При каких-то условиях задача имеет единственное решение

2 Геометрический смысл д.у. и задачи Коши



D - область определения $f(t, x)$

Правая часть уравнения (1) - функция $f(t, x)$ позволяет в каждой точке D найти поле направлений

Нужно двигаться так, чтобы рис. траект. в каждой точке имела направление соответствующее полю напр. То есть двигаться вдоль поля

Имеем первый способ решения д.у.: по правой части строим рисунок поля, затем по полю строим решения

3 Аналитические методы решения ДУ

3.1 Уравнения с разделяющимися переменными

$$\frac{dx}{dt} = f(t)g(x)$$

а) $g(x) = 0$ $x_k, k = 1, 2, \ldots$
$x \equiv x_k$ - решение (1) константы - решения
б) $g(x) \neq 0$ $\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)dt$
Пусть $G(x)$ - первообразная для $\frac{1}{g(x)}$, $F(t)$ - первообразная для $f(t)$
Тогда уравнение записывается $G(x) = F(t) + C$ - общее решение
Дальше уже другие проблемы $x = \psi(t, c)$

Пример.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t+1}{x}, x \neq 0$$
$$\int x dx = \int (t+1)dt$$
$$\frac{x^2}{2} = \frac{t^2}{2} + t + C$$
$$x^2 = t^2 + 2t + C$$

3.2 Линейные уравнения

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t) \tag{1}$$
$$x_{\text{он}} = x_{\text{оо}} + \overline{x_{\text{чн}}}$$

Решение линейного неоднородного складывается из общего решения однородного и частного неоднородного $x = 0$ - решение

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x \text{ - соответствующее однородное уравнение} \tag{2}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \underbrace{\int a(t)dt}_{A(t)}$$

$$\ln|x| = A(t) + \ln C, C > 0$$

$$\text{если } C > 0 \text{ то } \ln C \text{ пробегает все числа}$$

$$\ln|x| = \ln e^{A(t)} + \ln C$$

$$|x| = \ln Ce^{A(t)}$$

$$|x| = Ce^{A(t)}$$

Общее решение однородного уравнения

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm ce^{A(t)} \\ x \equiv 0 \end{array}\right.$$

$$\boxed{x_{\text{оо}} = c_1 e^{A(t)}}\ c_1 \in \mathbb{R}$$

3.2.1 Метод вариации прозвольной постоянной

$$x_{\text{оо}} = ce^{A(t)} \text{ где } c \in \mathbb{R}$$

$$\overline{x} = c(t)e^{A(t)} \text{ - частное решение н.у (1)}$$

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = c'(t)e^{A(t)} + c(t)e^{A(t)}\underbrace{A'(t)}_{=a(t)} = a(t)c(t)e^{A(t)} + b(t)c'(t)e^{A(t)} = b(t)$$

$$\frac{dc}{dt} = b(t)e^{-A(t)} \Rightarrow c(t) = \int b(t)e^{-A(t)}dt$$

Подставим в $\overline{x}$ и получим частное решение неоднородного уравнения

Пример. $\dfrac{dx}{dt} = 2\dfrac{x}{t} + t^3$
Решаем однородное $\dfrac{dx}{dt} = 2\dfrac{x}{t}$

$\dfrac{dx}{2x} = \dfrac{dt}{t}$; $\int \dfrac{dx}{x} = 2\int \dfrac{dt}{t} \Rightarrow \ln|x| = 2\ln|t| + C$; $x = t^2C$

Метод вариации произвольной постоянной
$\overline{x_{\text{чн}}} = t^2C(t)$
$\overline{x_{\text{чн}}}' = 2tC(t) + t^2C'(t)$
Подставим в исходное уравнение: $2tC(t) + t^2C'(t) = \dfrac{2t^2C(t)}{t} + t^3$

$t^2C'(t) = t^3 \Rightarrow C'(t) = t \Rightarrow C(t) = \dfrac{t^2}{2}$

Подставим обратно $\overline{x_{\text{чн}}} = \dfrac{t^4}{2}$

Получим $x_{\text{он}} = x_{\text{оо}} + \overline{x_{\text{чн}}}$
$x_{\text{он}} = t^2C + \dfrac{t^4}{2}$