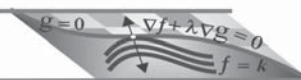


4. Integrais Múltiplas



Os problemas de “medida”, relacionados com os conceitos de comprimento, área e volume, remontam aos tempos dos egípcios há mais de 4.000 anos, às margens do rio Nilo, quando problemas como o cálculo de áreas de campos e volumes de grãos começaram a ter importância. Com os conhecimentos das integrais simples obtemos áreas de regiões planas limitadas por gráficos de funções, volumes de sólidos usando os métodos das fatias, discos circulares, de aplicações na geometria, na física, etc. Neste Capítulo, esses problemas relacionados ao conceito de integrais simples serão estendidos para integrais múltiplas.

No Capítulo 3 calculamos derivadas parciais de funções reais de duas variáveis reais, considerando uma das variáveis independentes como sendo constante e diferenciando em relação à outra. De modo inteiramente análogo, é possível considerar uma integral indefinida como uma função em relação a uma dessas variáveis. Por exemplo,

$$\int x^3 y^2 dx = y^2 \int x^3 dx = y^2 \left(\frac{x^4}{4} \right) + C.$$

No cálculo da integral mantivemos a variável y temporariamente com um valor constante, no entanto, valores fixados e distintos assumidos por y poderiam requerer diferentes valores da constante de integração C . Assim, devemos considerar a constante de integração como uma função de y e escreveremos

$$\int x^3 y^2 dx = y^2 \int x^3 dx = y^2 \left(\frac{x^4}{4} \right) + C(y).$$

Da mesma forma que as integrais simples, as integrais duplas ou triplas podem ser utilizadas como eficientes ferramentas de modelagem em diversas situações-problema, sobretudo aquelas que envolvem o cálculo de área ou volume de uma determinada região. Como exemplo, mostraremos que o volume do elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

sendo $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$, é igual a $\frac{4}{3}\pi abc$. Mais geralmente, calcularemos o volume do sólido Ω descrito por

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathcal{R} \text{ e } 0 \leq z \leq f(x, y)\},$$

sendo \mathcal{R} uma região no plano xy .

4.1 Integral Dupla

Sabemos do cálculo de uma variável que a integral simples

$$\int_a^b f(x) dx,$$

onde $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e não negativa (o gráfico de f se situa acima do eixo x) no intervalo $I = [a, b]$, é definida como a área delimitada pelo eixo x , pelas retas $x = a$ e $x = b$ e

acima pelo gráfico da função $y = f(x)$. Esse conceito de integral simples pode ser estendido a uma função real de duas variáveis reais $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ contínua na região compacta D , por exemplo, no retângulo

$$D_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}.$$

4.1.1 Integral Dupla sobre Retângulos

Consideremos uma função $z = f(x, y)$, contínua no retângulo compacto

$$D_{xy} = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\} \quad (4.1)$$

e suponhamos que f seja não negativa, isto é, o gráfico de f é uma superfície situada acima do plano xy . Definiremos a *integral dupla* da função f sobre o retângulo D passo a passo, para melhor compreensão do conceito.

■ Etapa 1: Particionando o retângulo D_{xy}

Consideremos partições

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b \quad \text{e} \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d,$$

dos intervalos $[a, b]$ e $[c, d]$, respectivamente, e com essas partições formemos mn retângulos $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, de lados iguais a

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{m} \quad \text{e} \quad \Delta y = y_{j+1} - y_j = \frac{d-c}{n},$$

de modo que

$$x_i = x_{i-1} + \Delta x, \quad i = 1, \dots, m \quad \text{e} \quad y_j = y_{j-1} + \Delta y, \quad j = 1, \dots, n.$$

Quando m e n tornam-se arbitrariamente grandes ($m \rightarrow \infty$ e $n \rightarrow \infty$), então os lados dos retângulos se aproximam de zero, isto é, $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta y \rightarrow 0$.

■ Etapa 2: Avaliando f em um ponto (u_i, v_j) do retângulo R_{ij}

Em cada retângulo R_{ij} escolhemos um ponto (u_i, v_j) , $i = 0, 1, \dots, m-1$ e $j = 0, 1, \dots, n-1$, e nesse ponto avaliamos a função f , isto é, calculamos o valor $z_{ij} = f(u_i, v_j)$.

■ Etapa 2: Construindo as Somas de Riemann

Cada parcela $f(u_i, v_j) \Delta x \Delta y$ que figura na soma

$$S_{m,n} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m z_{ij} \Delta x \Delta y, \quad (4.2)$$

é uma aproximação do volume da caixa retangular de base R_{ij} e altura $z_{ij} = f(u_i, v_j)$ e cada soma $S_{m,n}$ nos dá uma aproximação por falta ou por excesso do volume do sólido cuja base é o retângulo D e o topo é o gráfico da função f . As somas $S_{m,n}$ são denominadas *somas de Riemann* de f .

Com esses ingredientes, definiremos a *integral de Riemann* (integral dupla) de f sobre o retângulo D . Quando a função f é contínua no retângulo D , demonstra-se que o limite

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m z_{ij} \Delta x \Delta y$$

existe e esse limite é, por definição, a integral dupla de f sobre o retângulo D e anota-se:

$$\iint_D f(x, y) dA = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m z_{ij} \Delta x \Delta y.$$

O elemento dA é a *área infinitesimal* ou *área elementar*, usualmente indicada por $dx dy$. No cálculo de integrais, quando for necessário enfatizar as variáveis de integração, a notação

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

é mais adequada. A Figura 4.1 ilustra a construção da integral dupla sobre o retângulo D .

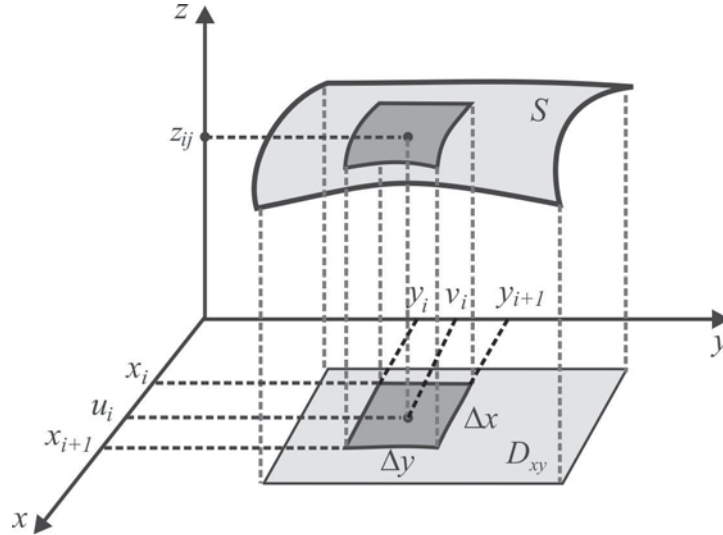


Figura 4.1: Área elementar $dA = dx dy$.

As propriedades básicas da integral dupla são similares àsquelas para integral simples e o seguinte resultado, admitido sem demonstração, é na verdade consequência das propriedades do limite

Proposição 4.1 Se $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas no retângulo compacto D e λ é uma constante real, então

1. **Linearidade.** $\iint_D [f(x, y) + \lambda g(x, y)] dA = \iint_D f(x, y) dA + \lambda \iint_D g(x, y) dA.$

2. **Aditividade.** $\iint_D f(x, y) dA = \iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA$, sendo $D = D_1 \cup D_2$ e

D_1 e D_2 têm apenas pontos de fronteira em comum.

3. **Valor Médio.** Existe ao menos um ponto $P(a, b)$ no retângulo D tal que

$$\iint_D f(x, y) dA = f(a, b) A(D),$$

onde $A(D)$ é a área da região D . ■

Exemplo 4.2 Vamos ilustrar, neste exemplo, como usar a definição para calcular a integral dupla da função $f(x, y) = xy^2$ sobre o retângulo

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}.$$

Solução Usando o Método de Indução Finita, demonstra-se que

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

e consideramos a partição do retângulo D determinada pelos pontos

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1 \quad \text{e} \quad 0 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = 1,$$

onde

$$x_k = k\Delta x \quad \text{e} \quad y_k = k\Delta y, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \text{sendo} \quad \Delta x = \Delta y = \frac{1}{n}.$$

As somas de Riemann (4.2), com $u_i = x_i$ e $v_j = y_j$, são

$$\begin{aligned} S_{n,n} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n f(u_i, v_j) \Delta x \Delta y = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^n i(\Delta x)^2 \right) j^2 (\Delta y)^3 \\ &= \frac{n+1}{2n} \left(\sum_{j=0}^n j^2 (\Delta y)^3 \right) = \frac{(n+1)^2 (2n+1)}{12n^3}, \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$\iint_D xy^2 dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 (2n+1)}{12n^3} = \frac{1}{6}. \quad \blacksquare$$

O Exemplo 4.2 é uma demonstração clara de que o cálculo de integrais duplas pela definição pode não ser uma tarefa fácil, exceto em casos elementares. O cálculo de integral dupla sobre retângulos e, também, sobre regiões compactas simples não retangulares, será feito como uma *integral repetida* ou *integral iterada*, com auxílio do Teorema de Fubini¹².

Teorema 4.3 (Teorema de Fubini) *Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no retângulo*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}.$$

Então

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx. \quad \blacksquare \quad (4.3)$$

As integrais

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy \quad \text{e} \quad \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

que figuram em (4.3) são as integrais iteradas ou integrais repetidas de $f(x, y)$ sobre o retângulo D e nelas estão especificadas a ordem de integração. Por exemplo, na integral iterada

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

primeiro calculamos a integral parcial $\int_a^b f(x, y) dx$, mantendo y temporariamente constante, e o resultado integramos com respeito à variável y no intervalo $[c, d]$.

¹²Guido Fubini (1879-1943), matemático italiano.

Corolário 4.4 Se $g(x)$ e $h(y)$ são contínuas em $[a, b]$ e $[c, d]$, respectivamente, então

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} g(x) h(y) dx dy = \left[\int_a^b g(x) dx \right] \left[\int_c^d h(y) dy \right]. \quad \blacksquare$$

Exemplo 4.5 Reconsiderar o Exemplo 4.2 e calcular, via Teorema de Fubini, a integral dupla

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} xy^2 dA.$$

Solução No retângulo $D = [0, 1] \times [0, 1]$ o Teorema de Fubini nos dá

$$\begin{aligned} \iint_D xy^2 dA &= \int_0^1 \left[\int_0^1 xy^2 dx \right] dy = \int_0^1 y^2 \left[\int_0^1 x dx \right] dy = \int_0^1 y^2 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{x=0}^{x=1} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = 1/6. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 4.6 (O volume como integral dupla) Calcular o volume do sólido Ω acima da região $D = [0, 1] \times [0, 1]$ do plano xy e abaixo do plano $x + y + z = 2$.

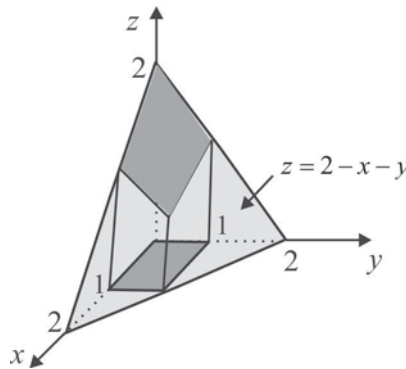


Figura 4.2: Volume abaixo do plano $x + y + z = 2$.

Solução Quando integramos uma função contínua e não negativa $z = f(x, y)$ sobre uma região D , o resultado é o volume do sólido Ω acima da região D e abaixo do gráfico de f . O sólido Ω é limitado superiormente pelo gráfico da função $z = 2 - x - y$ e está ilustrado na Figura 4.2. O volume, calculado por integral dupla, é dado por

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Omega) &= \iint_D (2 - x - y) dA = \int_0^1 \left[\int_0^1 (2 - x - y) dx \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[2x - \frac{1}{2} x^2 - xy \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \left(\frac{3}{2} - y \right) dy = \left(\frac{3}{2} y - \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_0^1 = 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 4.7 Calcular o volume do sólido Ω acima do retângulo $D = [-1, 1] \times [0, 1]$ e abaixo do cilindro $z = 1 - x^2$.

Solução A base do sólido Ω é o retângulo D e superiormente ele é limitado pelo gráfico da função $z = 1 - x^2$, como está ilustrado na Figura 4.3. O volume, calculado por integral dupla, é dado por

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Omega) &= \iint_D (1 - x^2) dA = \int_{-1}^1 \left[\int_0^1 (1 - x^2) dy \right] dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2) \left[\int_0^1 dy \right] dx \\ &= \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \left(x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-1}^1 = 4/3. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

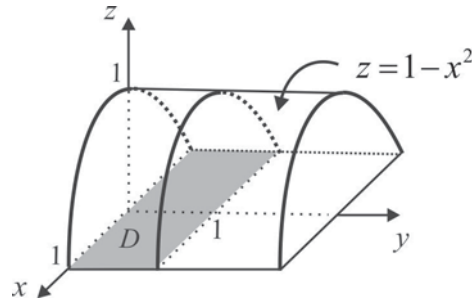


Figura 4.3: Volume abaixo do cilindro $z = 1 - x^2$.

Exemplo 4.8 O volume de um sólido Ω é dado por

$$\text{vol}(\Omega) = \int_0^2 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dy dx.$$

Por observação da integral, vemos que a base do sólido é o retângulo $D = [0, 2] \times [-1, 1]$ e superiormente o sólido é delimitado pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$.

4.1.2 Integral Dupla sobre Regiões não Retangulares

Do ponto de vista teórico, a integral de uma função contínua $z = f(x, y)$ sobre uma região compacta D do plano xy se reduz ao caso em que a região de integração é retangular.

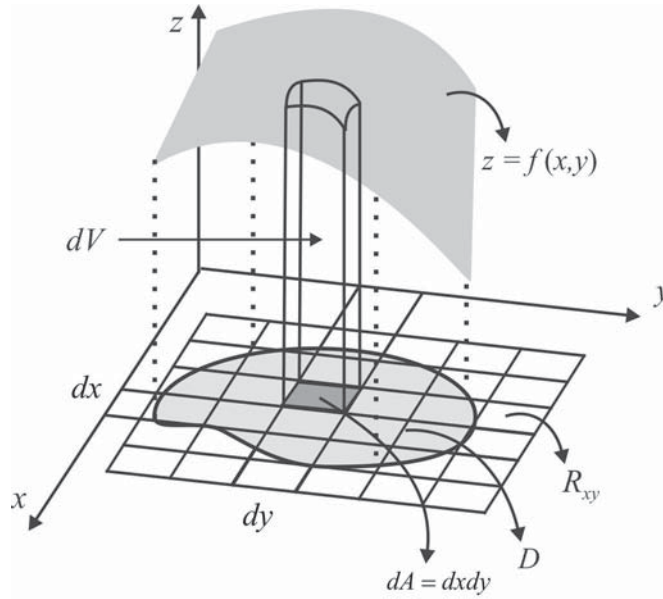


Figura 4.4: Volume elementar $dV = f(x, y)dA$.

De fato, seja $R_{xy} = [a, b] \times [c, d]$ um retângulo contendo a região D e consideremos a extensão \tilde{f} de f ao retângulo R_{xy} , nula fora de D , isto é, $\tilde{f} : R_{xy} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{se } (x, y) \in D \\ 0, & \text{se } (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Então, a integral dupla de f sobre D é, por definição, a integral dupla da extensão \tilde{f} sobre o retângulo R_{xy} , isto é,

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_{R_{xy}} \tilde{f}(x, y) dA.$$

A Figura 4.4 ilustra a situação geométrica, que mostra o *volume elementar* $dV = f(x, y) dA$ e sugere que a integral dupla $\iint_D f(x, y) dA$, no caso em que a função f é não negativa, representa o volume do sólido com base D e limitada superiormente pelo gráfico de $z = f(x, y)$.

O cálculo da integral dupla sobre regiões compactas D não retangulares é feito, também, por meio de integrais iteradas, como estabelece o Teorema de Fubini, em sua versão um pouco mais geral, desde que a região D tenha um formato simples, como descreveremos a seguir.

■ Região Vertical Simples

Uma região do tipo

$$R_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ e } g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

onde $g_1, g_2 : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, é denominada *região vertical simples*.

A Figura 4.5 exibe uma região vertical simples, onde observamos que as retas verticais (paralelas ao eixo y) $x = k$, $a < k < b$, intercepta a fronteira da região em exatamente dois pontos. A integral dupla de f sobre a região R_x é calculada pelo Teorema de Fubini para regiões não retangulares:

$$\iint_{R_x} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

■ Região Horizontal Simples

Uma região do tipo

$$R_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \text{ e } c \leq y \leq d\},$$

onde $h_1, h_2 : [c, d] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, é denominada *região horizontal simples*. A integral dupla de f sobre a região R_y é, via Teorema de Fubini, dada por:

$$\iint_{R_y} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right] dy.$$

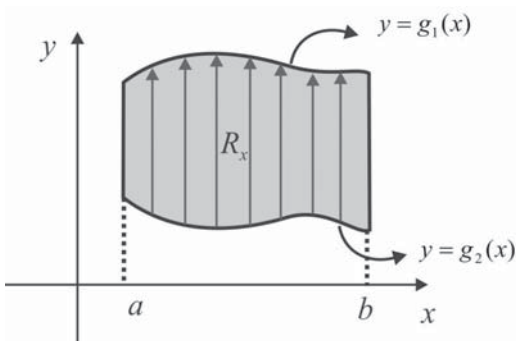


Figura 4.5: Região vertical simples

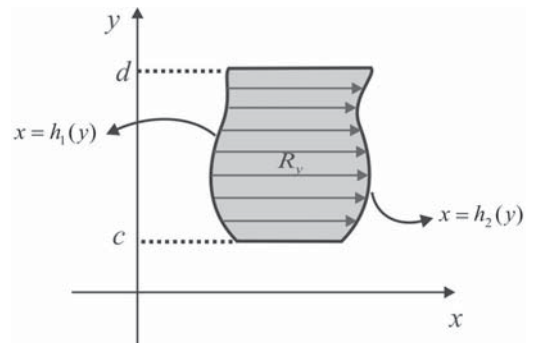


Figura 4.6: Região horizontal simples

A Figura 4.6 mostra uma região horizontal simples, em que as retas horizontais (paralelas ao eixo x) $y = k$, $c < k < d$, intercepta a fronteira da região em exatamente dois pontos.

Suponhamos que D seja uma região limitada com a seguinte propriedade: qualquer reta vertical (paralela ao eixo y) ou horizontal (paralela ao eixo x) intercepta a fronteira de D em no máximo dois pontos. Uma tal região pode ser decomposta em regiões simples do tipo vertical R_x ou horizontal R_y e a integral dupla sobre D é calculada usando a propriedade aditiva da integral. Veja na Figura 4.7 uma decomposição em regiões simples D_1 e D_2 do tipo 1 ou 2 e a integral sobre D é a soma das integrais sobre D_1 e sobre D_2 , isto é,

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA.$$

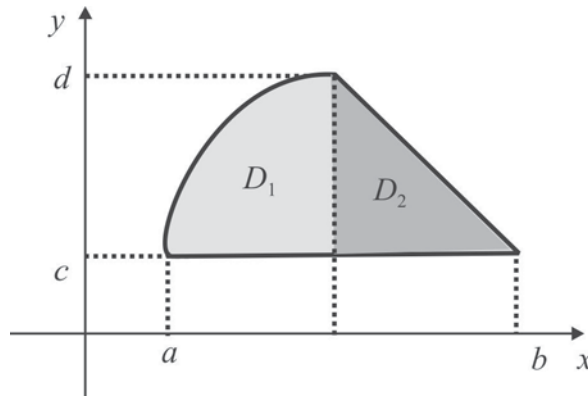


Figura 4.7: Decomposição em regiões simples.

Exemplo 4.9 Calcular a integral de $f(x, y) = xy^2$ sobre o quarto de círculo do primeiro quadrante

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Solução A região D pode ser descrita por

$$D = R_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$$

e, do Teorema de Fubini, resulta

$$\iint_D xy^2 dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy^2 dy \right] dx = \int_0^1 x \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 x(1-x^2)^{3/2} dx.$$

Assim, fazendo a substituição $u = 1 - x^2$, obtemos

$$\frac{1}{3} \int_0^1 x(1-x^2)^{3/2} dx = -\frac{1}{6} \int_1^0 u^{3/2} du = \frac{1}{6} \int_0^1 u^{3/2} du = \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} u^{5/2} \Big|_0^1 = 1/15$$

e, portanto,

$$\iint_D xy^2 dx dy = \frac{1}{15}. \quad \blacksquare$$

Exemplo 4.10 Calcular a integral $\iint_D (x^3 + 3y) dA$, onde D é a região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 2x$.

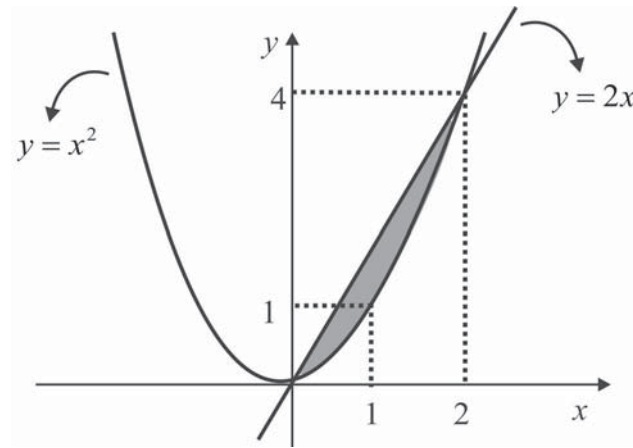


Figura 4.8: Região entre as curvas $y = x^2$ e $y = 2x$.

Solução Para encontrar os pontos de interseção das curvas $y = x^2$ e $y = 2x$, resolvemos a equação $x^2 = 2x$ e obtemos $x = 0$ e $x = 2$. A região D é a região vertical simples

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \text{ e } x^2 \leq y \leq 2x\},$$

ilustrada na Figura 4.8

Do Teorema de Fubini resulta

$$\begin{aligned} \iint_D (x^3 + 3y) \, dx \, dy &= \int_0^2 \left[\int_{x^2}^{2x} (x^3 + 3y) \, dy \right] dx = \int_0^2 \left[x^3 y + \frac{3}{2} y^2 \right]_{y=x^2}^{y=2x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 (-2x^5 + x^4 + 12x^2) dx \\ &= \left(-\frac{2}{6} x^6 + \frac{1}{5} x^5 + \frac{12}{3} x^3 \right) \Big|_0^2 = 128/15. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 4.11 Calcular o volume do tetraedro Ω delimitado pelo plano $x + y + z = 1$ e pelos planos coordenados.

Solução A Figura 4.9 expõe graficamente o tetraedro Ω , onde observamos que as seções pelos planos $x = c$, c constante real, são triângulos.

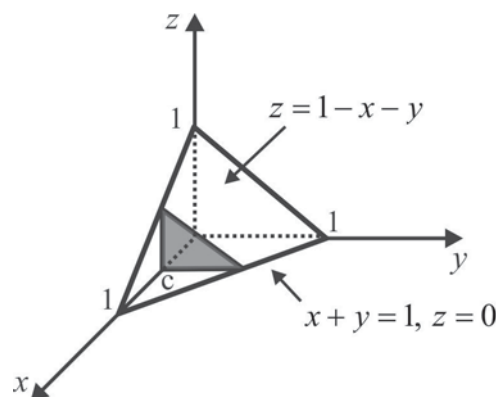


Figura 4.9: Esboço do tetraedro.

O volume elementar é $dV = z dx dy$, sendo $z = f(x, y) = 1 - x - y$ e, portanto, o volume de Ω é

$$\text{vol}(\Omega) = \iint_D z dx dy,$$

onde D é a região vertical simples $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1 - x\}$. Do Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Omega) &= \iint_D (1 - x - y) dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (1 - x - y) dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[y - xy - \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - 2x + x^2) dx = 1/6. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 4.12 (Área como integral dupla) Calcular, por integral dupla, a área da região D delimitada pelas curvas $x^2 + 2y = 16$ e $x + 2y = 4$.

Solução Se $f(x, y) \equiv 1$ em D , então o volume elementar é $dV = dA$ e, sendo a integral dupla a soma desses volumes elementares, o resultado é a área $A(D)$ da região D , isto é,

$$\text{vol}(\Omega) = \iint_D dA = A(D).$$

Para descrever e esboçar a região de integração D , primeiro determinamos os pontos de interseção das curvas $x^2 + 2y = 16$ e $x + 2y = 4$, os quais são obtidos a partir das soluções da equação $16 - x^2 = 4 - x$. Essas soluções são $x = -3$ e $x = 4$ e, portanto, as curvas se interceptam nos pontos $A(-3, 7/2)$ e $B(4, 0)$ indicados na Figura 4.10.

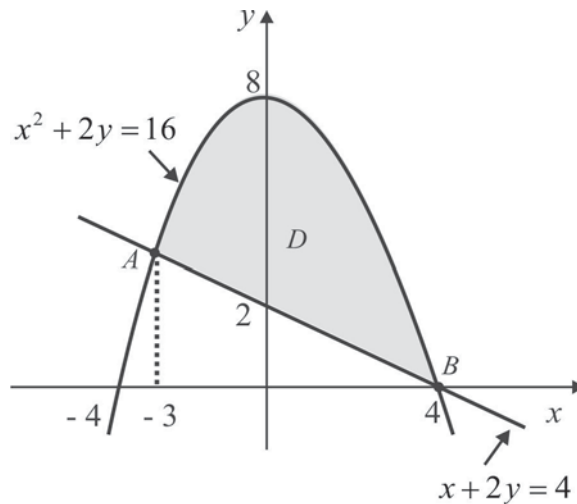


Figura 4.10: Área por integral dupla.

A região D é descrita por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x \leq 4 \text{ e } 2 - \frac{x}{2} \leq y \leq 8 - \frac{x^2}{2}\}$$

e pelo Teorema de Fubini, temos

$$A(D) = \iint_D dx dy = \int_{-3}^4 \left[\int_{2-x/2}^{8-x^2/2} dy \right] dx = \frac{1}{2} \int_{-3}^4 (12 + x - x^2) dx = \frac{343}{12}. \quad \blacksquare$$

Exemplo 4.13 Calcular, por integral dupla, a área da região D entre as curvas $y = x^2$ e $x = y^2$.

Solução A área da região D é dada por

$$A(D) = \iint_D dA = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \right] dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^1 - \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}. \quad \blacksquare$$

4.1.3 Invertendo a Ordem de Integração

Ao fazer a decomposição da região D em regiões simples, a escolha da região R_x ou R_y depende, naturalmente, do formato da região D . Em uma determinada ordem de integração, o integrando pode não ter uma primitiva elementar e, neste caso, uma inversão na ordem de integração deve ser efetuada. Vale ressaltar que ao inverter a ordem de integração a região D não sofre alteração, apenas o cálculo da integral iterada se processa na ordem inversa. Na Figura 4.11 exibimos uma região $D = D_1 \cup D_2$ sobre a qual expressamos a integral dupla como uma integral iterada nas duas ordens de integração possíveis: $dx dy$ e $dy dx$.

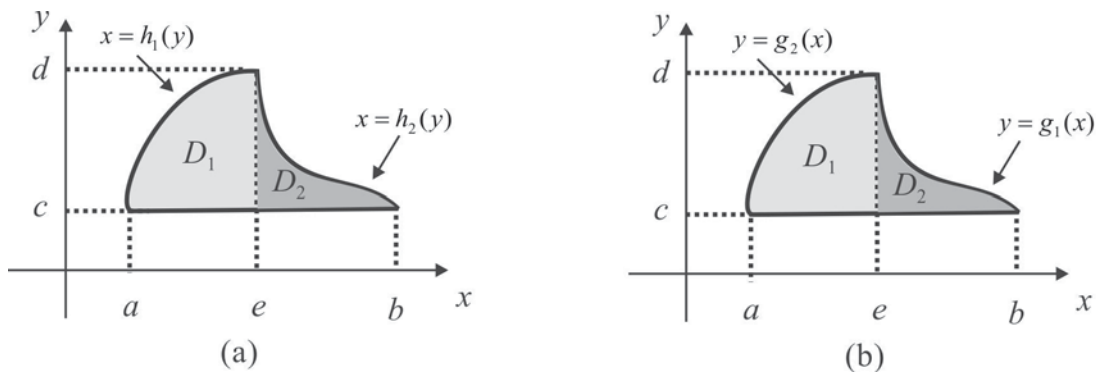


Figura 4.11: Decomposição de D em regiões simples.

Vejamos como descrever a região $D = D_1 \cup D_2$. A Figura 4.11 (a) sugere a seguinte descrição para a região D :

$$D : c \leq y \leq d \quad \text{e} \quad h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$$

e a integral dupla sobre D é calculada pela integral iterada

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right] dy. \quad (4.4)$$

Por outro lado, da Figura 4.11 (b) vemos que as regiões simples D_1 e D_2 são descritas por

$$D_1 : a \leq x \leq e \quad \text{e} \quad c \leq y \leq g_2(x) \quad \text{e} \quad D_2 : e \leq x \leq b \quad \text{e} \quad c \leq y \leq g_1(x)$$

e a integral dupla, com a ordem invertida, é

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^e \left[\int_c^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx + \int_e^b \left[\int_c^{g_1(x)} f(x, y) dy \right] dx. \quad (4.5)$$

Aparentemente o cálculo da integral (4.4) é mais simples, porque só há uma integral iterada a calcular. Isso aparentemente, porque o cálculo depende do integrando $f(x, y)$. Como ressaltamos no início, em uma determinada ordem, que pode ser aquela em (4.4), o integrando pode não ter primitiva elementar.

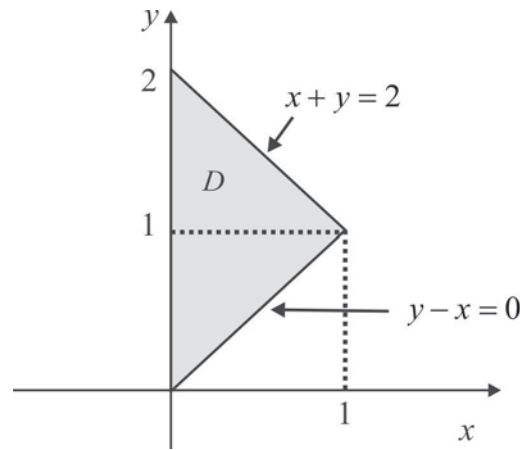


Figura 4.12: Região de integração.

Exemplo 4.14 Como primeira ilustração, vamos calcular $\iint_D xy dA$ nas duas ordens, onde D é a região do plano xy exibida na Figura 4.12.

Solução A região D pode ser decomposta em regiões simples verticais ou horizontais e para descrevê-la é fundamental observar cuidadosamente a Figura 4.12. .

1. Como uma região vertical simples, temos

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } x \leq y \leq 2 - x\}$$

e, neste caso, o cálculo da integral fica assim:

$$\begin{aligned} \iint_D xy dA &= \int_0^1 \left[\int_x^{2-x} xy dy \right] dx = \int_0^1 x \left[\frac{1}{2} y^2 \Big|_{y=x}^{y=2-x} \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x \left[(2-x)^2 - x^2 \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x (4 - 4x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (4x - 4x^2) dx = \frac{1}{2} \left(2x^2 - \frac{4}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = 1/3. \end{aligned}$$

2. Decompondo D em regiões horizontais simples, temos $D = D_1 \cup D_2$, onde a região simples D_1 é descrita por

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \text{ e } 0 \leq x \leq y\}$$

e a região D_2 é descrita por

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2 \text{ e } 0 \leq x \leq 2 - y\}.$$

Neste caso, invertendo a ordem de integração, temos

$$\begin{aligned} \iint_D xy dA &= \iint_{D_1} xy dA + \iint_{D_2} xy dA = \int_0^1 \left[\int_0^y xy dx \right] dy + \int_1^2 \left[\int_0^{2-y} xy dx \right] dy = \\ &= \int_0^1 y \left[\frac{1}{2} x^2 \Big|_{x=0}^{x=y} \right] dy + \int_1^2 y \left[\frac{1}{2} x^2 \Big|_{x=0}^{x=2-y} \right] dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 y^3 dy + \frac{1}{2} \int_1^2 y (2-y)^2 dy = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \int_1^2 (4y - 4y^2 + y^3) dy \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \left[\left(8 - \frac{32}{3} + 4 \right) - \left(2 - \frac{4}{3} + \frac{1}{4} \right) \right] = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \left[\frac{4}{3} - \frac{11}{12} \right] = 1/3. \end{aligned}$$

Exemplo 4.15 (Uma função sem primitiva elementar) Neste exemplo vamos calcular a integral dupla da função $f(x, y) = \exp(-y^2)$ sobre a região D entre as retas $x = 0$, $y = 4$ e $y = 4x$.

Solução Este é um daqueles exemplos onde o cuidado na escolha da ordem de integração deve ser redobrado. Inicialmente observamos que a ordem de integração $dydx$ não é adequada neste caso, porque a integral $\int \exp(y^2) dy$ não pode ser calculada pelos métodos elementares do cálculo integral, isto é, a função $g(y) = \exp(-y^2)$ não tem primitiva elementar. Com um esboço do gráfico da região D , que deixamos para o leitor como treinamento, é fácil deduzir que ela é descrita por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4 \text{ e } 0 \leq x \leq y/4\} \quad (\text{uma região horizontal simples})$$

e usando o Teorema de Fubini, encontramos

$$\iint_D \exp(-y^2) dx dy = \int_0^4 \exp(-y^2) \left[\int_0^{y/4} dx \right] dy = \frac{1}{4} \int_0^4 y \exp(-y^2) dy.$$

Com a substituição $u = -y^2$, obtemos

$$\frac{1}{4} \int_0^4 y \exp(-y^2) dy = -\frac{1}{8} \int_0^{-16} \exp(u) du = -\frac{1}{8} \exp(-y^2) \Big|_0^{-16} = -\frac{1}{8}(e^{-16} - 1)$$

e, portanto,

$$\iint_D \exp(-y^2) dx dy = \frac{1}{8}(1 - e^{-16}). \quad \blacksquare$$

Encerramos esta seção com um exemplo mostrando que a inversão da ordem de integração nem sempre produz resultados iguais.

Exemplo 4.16 Calcular a integral iterada

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dA,$$

nas duas ordens possíveis.

Solução Temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy &= \int_0^1 \frac{2x-(x+y)}{(x+y)^3} dy = \int_0^1 \frac{2x}{(x+y)^3} dy - \int_0^1 \frac{1}{(x+y)^2} dy \\ &= -\frac{x}{(x+y)^2} \Big|_0^1 + \frac{1}{(x+y)} \Big|_0^1 = \frac{1}{(1+x)^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \right] dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = -\frac{1}{1+x} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}. \quad (4.6)$$

Se em (4.6) permutarmos as variáveis x e y , obteremos

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3} dx \right] dy = \frac{1}{2}$$

e, assim, na ordem $dx dy$

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx \right] dy = -\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3} dx \right] dy = -\frac{1}{2}.$$

Por que isso não contradiz o Teorema de Fubini? Uma das condições de aplicabilidade do Teorema de Fubini é que o integrando $f(x, y)$ seja uma função limitada na região de integração D , o que não ocorre com a função

$$f(x, y) = \frac{x - y}{(x + y)^3}.$$

De fato, ao longo da reta $y = 2x$, obtemos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y}{(x + y)^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2x}{(x + 2x)^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{27x^3} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{27x^2} = -\infty.$$

O que dizer da integral dupla $\iint_D f(x, y) dA$ neste caso? Se a integral dupla existisse, as integrais iteradas seriam iguais e como isso não ocorreu, a função não é integrável na região D . Uma coisa é a integral dupla e a outra é a integral iterada. ■

4.1.4 Considerações Físicas

Vimos nos fundamentos teóricos que se $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e não negativa na região compacta D , a integral dupla

$$\iint_D f(x, y) dx dy \quad \text{ou} \quad \iint_D f(x, y) dA$$

representa o volume do sólido Ω acima da região D e limitado superiormente pelo gráfico de f , como na Figura 4.1. No caso em que $f(P) < 0$, para todo $P \in D$, então definimos $\text{vol}(\Omega)$ por

$$\text{vol}(\Omega) = - \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Além disso, se $f(x, y) = 1$, para todo ponto (x, y) em D , então a integral dupla representa a área da região D , isto é,

$$A(D) = \iint_D dx dy.$$

Quando interpretamos o integrando $f(x, y)$ como *densidade superficial de massa* $\sigma(x, y)$, isto é, como massa por unidade de área, e a região D como uma lâmina (placa fina), a integral dupla assume outros significados. Na Figura 4.13 ilustramos uma lâmina D de massa M e a área elementar dA .

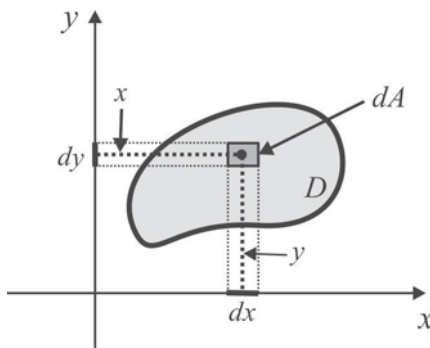


Figura 4.13: Lâmina D de massa M

■ Massa e Centro de Massa

Representemos por dm a *massa elementar* da porção dA , de modo que $x dm$ e $y dm$ representam os *momentos* da massa dm em relação aos eixos y e x , respectivamente, isto é,

$$x dm = x \sigma(x, y) dA \quad \text{e} \quad y dm = y \sigma(x, y) dA,$$

sendo $\sigma(x, y)$ a densidade no ponto (x, y) da lâmina. A massa total M da lâmina é a *soma* (integral dupla) das massas elementares dm , ou seja,

$$M = \iint_D \sigma(x, y) dA \quad (4.7)$$

e se representarmos por $C_M(\bar{x}, \bar{y})$ o *centro de massa* da lâmina D , isto é, o ponto que concentra toda massa da placa, é razoável definir os momentos da placa D pelas relações

$$\bar{x}M = \iint_D x dm = \iint_D x \sigma(x, y) dA \quad \text{e} \quad \bar{y}M = \iint_D y dm = \iint_D y \sigma(x, y) dA.$$

Os *momentos* da massa M , isto é, da lâmina D , são definidos pelas integrais

$$M_x = \iint_D y dm = \iint_D y \sigma(x, y) dA \quad \text{e} \quad M_y = \iint_D x \sigma(x, y) dA \quad (4.8)$$

e as coordenadas do centro de massa são, portanto,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}. \quad (4.9)$$

■ Momento de Inércia

Imaginemos a lâmina D girando em torno de um eixo L , com velocidade angular constante ω e seja $\delta(x, y)$ a distância da massa elementar (pontual) dm ao eixo L , como na Figura 4.14. Se dE representa a energia cinética da massa dm , então

$$dE = \frac{1}{2} (\omega \delta)^2 dm = \frac{1}{2} (\omega \delta)^2 \sigma(x, y) dA,$$

onde $\omega \delta$ é a velocidade escalar do corpo. A energia cinética total é, portanto,

$$E = \iint_D dE = \frac{1}{2} \omega^2 \iint_D \delta^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \iint_D \delta^2 \sigma(x, y) dA. \quad (4.10)$$

A integral que figura do lado direito de (4.10) é o *momento de inércia* da placa D em relação ao eixo L e anota-se

$$I_L = \iint_D \delta^2 \sigma(x, y) dA.$$

Em relação aos eixos coordenados, os momentos de inércia da placa D são:

$$I_x = \iint_D y^2 \sigma(x, y) dx dy \quad \text{e} \quad I_y = \iint_D x^2 \sigma(x, y) dx dy, \quad (4.11)$$

enquanto o *momento de inércia polar* em relação à origem é dado por

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_D (x^2 + y^2) \sigma(x, y) dx dy. \quad (4.12)$$

O termo $x^2 + y^2$ que aparece na expressão do momento de inércia polar é precisamente o quadrado distância de um ponto $P(x, y)$ da placa D à origem $O(0, 0)$.

Podemos interpretar o momento de inércia como uma resistência ao movimento. Quanto maior o momento de inércia, maior deve ser a energia para colocar o corpo em movimento ou fazê-lo parar.

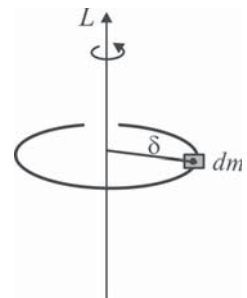


Figura 4.14:

A integral que figura do lado direito de (4.10) é o *momento de inércia* da placa D em relação ao eixo L e anota-se

Exemplo 4.17 Uma lâmina tem o formato da região $D : x^2 + y^2 \leq a^2$ no primeiro quadrante. Determinar a massa, o centro de massa e os momentos de inércia I_x e I_y da lâmina D , se a densidade em um ponto $P(x, y)$ da lâmina é $\sigma(x, y) = xy$.

Solução Um esboço da região D ajudará no cálculo da integral dupla. A Figura 4.15 sugere as seguintes descrições para a região D :

$$D : 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{ou} \quad D : 0 \leq y \leq a, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{a^2 - y^2}.$$

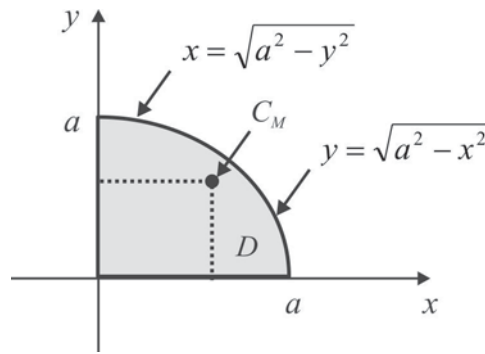


Figura 4.15: O quarto de círculo $x^2 + y^2 \leq a^2$.

1. A massa é calculada pela fórmula (4.7). Temos

$$\begin{aligned} M &= \iint_D \sigma(x, y) dA = \int_0^a \left[\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} xy dy \right] dx = \int_0^a x \left(\frac{1}{2} y^2 \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{a^2 - x^2}} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^a x (a^2 - x^2) dx = (\text{faça } t = a^2 - x^2) = \frac{1}{4} \int_0^{a^2} t dt = a^4/8. \end{aligned}$$

2. As coordenadas \bar{x} e \bar{y} do centro de massa são calculadas pelas fórmulas (4.9). Temos

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_D y \sigma(x, y) dA = \iint_D xy^2 dA = \int_0^a x \left[\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} y^2 dx \right] dy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^a x (a^2 - x^2)^{3/2} dx = (\text{faça } t = a^2 - x^2) = \frac{1}{6} \int_0^{a^2} t^{3/2} dt = a^5/15 \end{aligned}$$

e, portanto, $\bar{y} = M_x/M = 8a/15$. De modo inteiramente análogo encontra-se $\bar{x} = 8a/15$ e o centro de massa é o ponto $C_M(8a/15, 8a/15)$.

3. Os momentos de inércia I_x e I_y são dados pelas fórmulas (4.11). Temos

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D y^2 \sigma(x, y) dA = \iint_D xy^3 dA = \int_0^a x \left[\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} y^3 dx \right] dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^a x (a^2 - x^2)^2 dx = (\text{faça } t = a^2 - x^2) = \frac{1}{8} \int_0^{a^2} t^2 dt = a^6/24. \end{aligned}$$

O momento de inércia I_y é calculado de modo similar e encontra-se $I_y = a^6/24$. ■

Exemplo 4.18 O centroide¹³ da região triangular de vértices $O(0,0)$, $A(1,1)$ e $B(1,0)$ é o ponto $C_M(1/3, 1/6)$, cujas coordenadas são dadas por:

$$\bar{x} = \int_0^1 \int_0^x x dy dx = 1/3 \quad e \quad \bar{y} = \int_0^1 \int_0^x y dy dx = 1/6.$$

4.1.5 Integral Dupla Imprópria

Para integrar uma função $f(x, y)$ sobre uma região D do plano xy , a função não precisa ser contínua nem a região ser limitada. O fato é que a continuidade do integrando f e a compacidade da região D implicam na integrabilidade da função em D . Existem funções que não são contínuas em uma região e, ainda assim, são integráveis. Uma condição necessária para a integrabilidade é que a função seja limitada na região de integração. Uma integral dupla $\iint_D f(x, y) dA$ recebe a denominação de *integral imprópria* em duas situações: (i) a região de integração D não é limitada ou (ii) a função $f(x, y)$ que desejamos integrar não é limitada na região D . Quando a integral dupla imprópria existir, isto é, for um número real, diremos que a integral é *convergente* e caso contrário a integral imprópria será denominada *divergente*.

Exemplo 4.19 Vamos investigar a convergência da integral imprópria

$$\iint_D \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy.$$

no compacto $D = [0, 1] \times [0, 1]$.

Solução Trata-se de uma integral imprópria, porque a função $f(x, y)$ não é limitada em D , embora a região seja compacta. Vimos no Exemplo 4.16 que a função f não é integrável em D . Logo, a integral dupla é divergente. ■

Exemplo 4.20 (Uma função contínua não integrável) Na região $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y < x \leq 1\}$ a função $f(x, y) = \frac{1}{x-y}$ não é integrável.

Solução Temos uma situação em que a função é contínua, a região é limitada e, contudo, a função não é integrável. Na Figura 4.16 esboçamos a região D e a região auxiliar

$$D_\varepsilon : 0 \leq x \leq 1 \quad e \quad 0 \leq y \leq x - \varepsilon$$

que é compacta e na qual f é contínua, tornando aplicável o Teorema de Fubini.

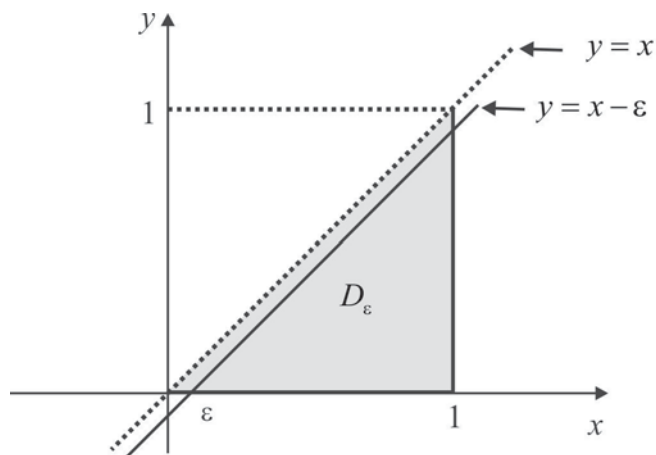
Ressaltamos que a função não é limitada, o que caracteriza uma integração imprópria. Temos que

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{D_\varepsilon} f(x, y) dx dy$$

e do Teorema de Fubini resulta

$$\begin{aligned} \iint_{D_\varepsilon} f(x, y) dx dy &= \int_\varepsilon^1 \left[\int_0^{x-\varepsilon} \frac{dy}{x-y} \right] dx = \int_\varepsilon^1 \left[\int_\varepsilon^x \frac{dt}{t} \right] dx = \int_\varepsilon^1 (\log x - \log \varepsilon) dx \\ &= (x \log x - x) \Big|_\varepsilon^1 - (1 - \varepsilon) \log \varepsilon = \varepsilon - 1 - \log \varepsilon. \end{aligned}$$

¹³centroide é a denominação dada ao centro de massa de um corpo homogêneo de densidade $\sigma \equiv 1$.

Figura 4.16: Região auxiliar D_ε .

Portanto,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{D_\varepsilon} f(x, y) dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\varepsilon - 1 - \log \varepsilon) = +\infty$$

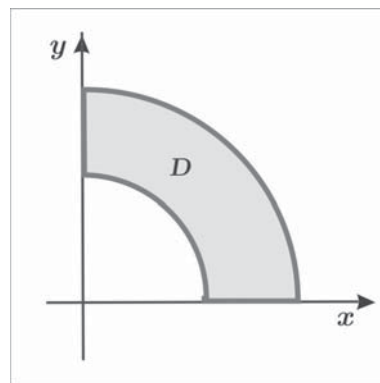
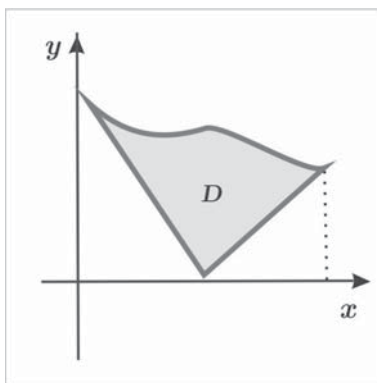
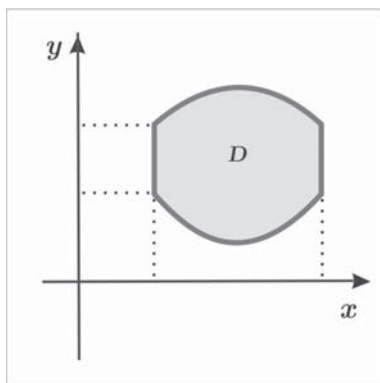
e a integral dupla é divergente. ■

Exercícios & Complementos.

1. Em cada caso, esboce a região de integração e calcule a integral iterada. Se achar conveniente inverta a ordem de integração.

- | | |
|--|---|
| (a) $\int_{-1}^1 \int_0^{ x } dy dx$ | (l) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \cos y - y \cos x) dy dx$ |
| (b) $\int_0^\pi \int_0^x \cos(x^2) dy dx$ | (m) $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} xy dy dx$ |
| (c) $\int_0^3 \int_1^2 (12xy^2 - 8x^3) dy dx$ | (n) $\int_0^1 \int_0^x x \sin y dy dx$ |
| (d) $\int_1^3 \int_{1-x}^{\sqrt{x}} xy dy dx$ | (o) $\int_0^2 \int_1^2 (2xy - y^3) dy dx$ |
| (e) $\int_0^\pi \int_{-y}^y \sin x dx dy$ | (p) $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} y dx dy$ |
| (f) $\int_1^2 \int_0^1 (x - 3 \log y) dx dy$ | (q) $\int_0^2 \int_1^{\exp(x)} dy dx$ |
| (g) $\int_0^1 \int_{x^2}^x \exp\left(\frac{y}{x}\right) dy dx$ | (r) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_y^{\sqrt{1-y^2}} xy dx dy$ |
| (h) $\int_0^1 \int_0^x \exp(x^2) dy dx$ | (s) $\int_{-2}^1 \int_{x^2+4x}^{3x+2} dy dx$ |
| (i) $\int_0^2 \int_1^3 x-2 \sin y dx dy$ | (t) $\int_0^4 \int_{-\frac{y-4}{\sqrt{4-y}}}^{\frac{y-4}{\sqrt{4-y}}} xy dx dy$ |
| (j) $\int_0^\pi \int_{-1}^{\cos y} x \sin y dx dy$ | (u) $\int_0^1 \int_0^{x^2} \sin(x^3) dy dx$ |
| (k) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy dx$ | (v) $\int_0^1 \int_1^{1/y} \ln x dx dy + \int_0^1 \int_1^2 \ln x dx dy$ |

2. Em cada caso, decomponha a região em regiões verticais simples ou horizontais simples e escreva a integral dupla $\iint_D f(x, y) dA$ nas duas ordens.



3. Em cada caso, esboce a região D e calcule a integral dupla $\iint_D f(x, y) dA$. Escolha a ordem de integração de modo a tornar o cálculo mais simples.

- (a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 2x \leq y \leq 2\}$; $f = \exp(y^2)$.
 (b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 8 \text{ e } \sqrt[3]{y} \leq x \leq 2\}$; $f = xy$.
 (c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ e } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$; $f = x^2$.
 (d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2 \text{ e } -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq 4-x^2\}$; $f = 1$.

4. Ao calcular o volume de um sólido Ω abaixo de um parabolóide e acima de certa região D do plano xy , obteve-se a seguinte expressão:

$$\text{vol}(\Omega) = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2) dx dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2) dx dy.$$

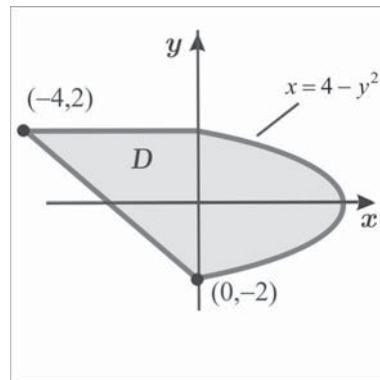
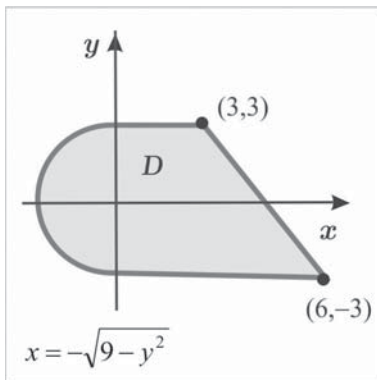
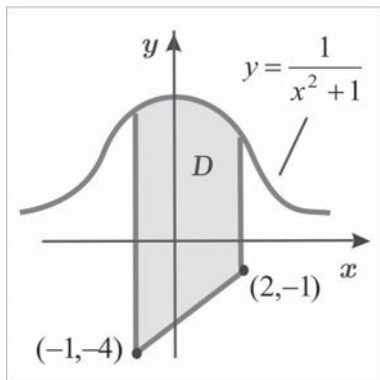
Identifique a região D , expresse $\text{vol}(\Omega)$ por uma integral dupla com a ordem invertida e calcule o volume.

5. Identifique o sólido Ω cujo volume é dado pela expressão

$$\text{vol}(\Omega) = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x) dy dx$$

e em seguida calcule $\text{vol}(\Omega)$.

6. Use integral dupla e calcule a área da região D indicada na figura.



7. Calcular, por integral dupla, o volume do sólido delimitado acima pelo cilindro $x^2 + z^2 = a^2$, abaixo pelo plano xy e nos lados pelos planos $y = x$ e $y = 2x$.

8. Calcular o volume da cunha cortada do primeiro octante pelo cilindro $z = 12 - 3y^2$ e pelo plano $x + y = 2$.

4.1.6 Mudança de Variável em Integral Dupla

Ao calcular uma integral por substituição, na verdade efetuamos uma mudança de variável para obter uma primitiva. Mais precisamente, se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável, com derivada g' integrável, e, além disso, $g(c) = a$ e $g(d) = b$, então

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x) dx = \int_c^d f(g(u)) g'(u) du.$$

Exemplo 4.21 Por meio de uma mudança de variável, calcular a integral simples

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

Solução Se $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $0 \leq x \leq 1$, então com a substituição $x = g(u) = \sin u$, obtemos

$$f(g(u)) = \sqrt{1-\sin^2 u} = \cos u, \quad \text{e} \quad g'(u) = \cos u, \quad 0 \leq u \leq \pi/2$$

e, portanto,

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u du = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2u)) du = \frac{\pi}{4} \quad \blacksquare$$

Para deduzirmos uma fórmula de mudança de variável para integral dupla, deixe-nos considerar uma transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$T : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases},$$

onde as funções coordenadas $x(u, v)$ e $y(u, v)$ têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em uma região R_{uv} do plano uv e suponhamos que o Jacobiano

$$J(T) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

não se anula em R_{uv} . A transformação T é localmente invertível e, como estabelece o Teorema da Função Inversa, as coordenadas da inversa $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas na região $R_{xy} = T(R_{uv})$, imagem de R_{uv} pela transformação T . Usaremos a Figura 4.17 como orientação para a dedução da fórmula. Se $\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j}$ é o vetor posição do ponto $Q(x, y)$ e a região R_{xy} for particionada pelas curvas de nível $u = c_1$ e $v = c_2$, então a área elementar $dxdy$ será aproximada pela área do paralelogramo de lados $\mathbf{a} = \mathbf{r}_u du$ e $\mathbf{b} = \mathbf{r}_v dv$. Temos

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}_u du = x_u \mathbf{i} + y_u \mathbf{j} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \mathbf{r}_v dv = x_v \mathbf{i} + y_v \mathbf{j}$$

e, conseqüentemente,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dudv = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u & y_u & 0 \\ x_v & y_v & 0 \end{vmatrix} dudv = [(x_u y_v - x_v y_u) dudv] \mathbf{k}.$$

Logo, as áreas elementares $dx dy$ e $du dv$ estão relacionadas por

$$dx dy = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |J(T)| du dv \quad (4.13)$$

e se $f(x, y)$ é uma função integrável sobre a região R_{xy} , então da definição de integral dupla, resulta

$$\begin{aligned} \iint_{R_{xy}} f(x, y) dx dy &\approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) dx dy \\ &\approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)) |J(u_i, v_j)| du dv \\ &\approx \iint_{R_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) |J(T)| du dv. \end{aligned}$$

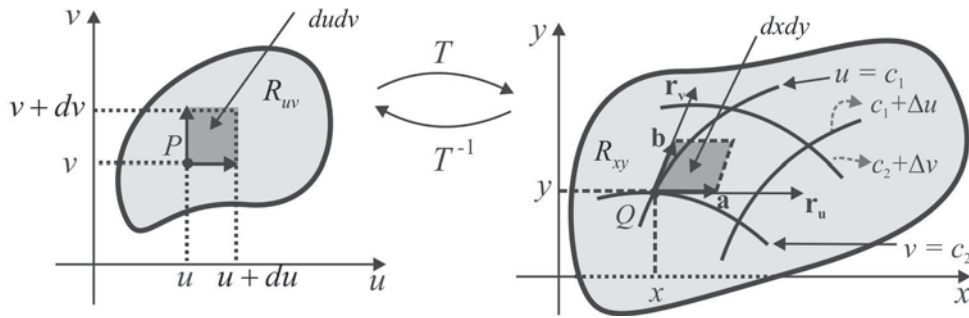


Figura 4.17: Mudança de variável

Formalmente, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.22 (Mudança de Variável) *Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio D , contendo a região R_{xy} . Se as funções $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas na região R_{uv} e o Jacobiano $J(u, v)$ não se anula em R_{uv} , então*

$$\iint_{R_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{R_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv. \quad \blacksquare \quad (4.14)$$

A fórmula (4.14) é conhecida como *Fórmula de Mudança de Variável* em integral dupla.

Observação 4.23 *Se a transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ for localmente invertível, vimos como consequência do Teorema 3.54 que*

$$J(u, v) \cdot J(x, y) = 1$$

e, se for conveniente, podemos usar a fórmula de mudança de variável (4.14) na ordem inversa. Se a transformação T tem Jacobiano $J(T)$ constante (isso ocorre com as transformações lineares) e a função $f(x, y) \equiv 1$, segue de (4.14) que

$$A(R_{xy}) = A(T(R_{uv})) = |J| A(R_{uv}) \quad (4.15)$$

e o Jacobiano pode ser visto como fator de relação entre as áreas de R_{xy} e R_{uv} .

Exemplo 4.24 Calcular a integral dupla da função $f(x, y) = \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right)$ sobre a região D delimitada pelas retas $x+y=1$, $x+y=2$, $x=0$ e $y=0$.

Solução Se considerarmos $u = y - x$ e $v = y + x$, teremos

$$x = \frac{1}{2}(v - u) \text{ e } y = \frac{1}{2}(u + v)$$

e a transformação (linear) $T(u, v) = (x, y)$ tem Jacobiano

$$J(T) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = -1/2.$$

Além disso, sendo T linear ela transforma retas em retas e um cálculo direto nos dá:

$$x + y = 1 \Rightarrow v = 1, \quad x + y = 2 \Rightarrow v = 2 \quad \text{e} \quad y = 0 \Rightarrow v = -u$$

e a Figura 4.18 expõe as regiões de integração R_{xy} e R_{uv} .

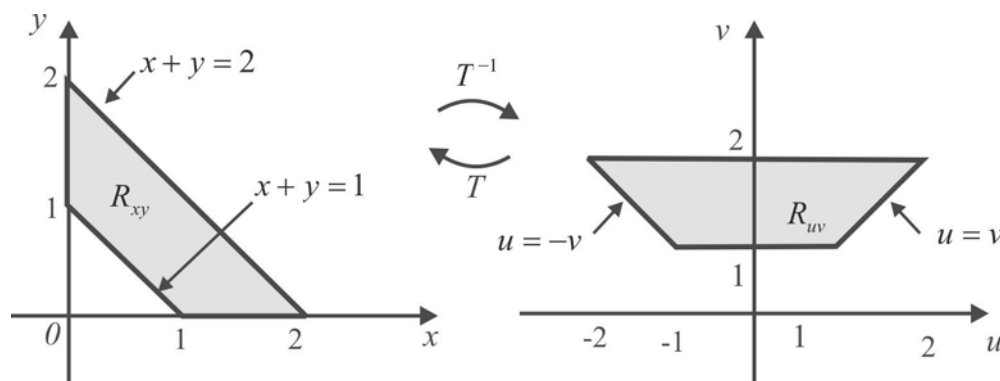


Figura 4.18: Regiões de integração R_{xy} e R_{uv} .

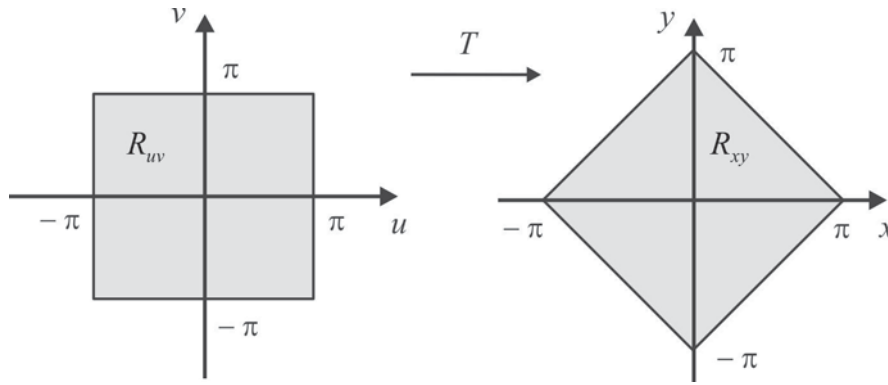
Da fórmula de mudança de variável (4.14), resulta

$$\begin{aligned} \iint_D \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dA &= \frac{1}{2} \iint_{R_{uv}} e^{u/v} du dv = \frac{1}{2} \int_1^2 \left[\int_{-v}^v e^{u/v} du \right] dv \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \left(v e^{u/v} \Big|_{-v}^v \right) dv = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right) \int_1^2 v dv = \frac{3}{4} \left(e - \frac{1}{e} \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 4.25 Com a mudança de coordenadas $u = y - x$ e $v = y + x$, calcular

$$\iint_{|x|+|y|\leq\pi} (x+y)^2 \sin^2(x-y) dA.$$

Solução A transformação linear $T(u, v) = (x, y)$ transforma o quadrado $R_{uv} : [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ na região $R_{xy} : |x| + |y| \leq \pi$, como mostra a Figura 4.19.

Figura 4.19: Regiões de integração R_{xy} e R_{uv} .

Temos

$$J(T^{-1}) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

de onde segue que $J(T) = -1/2$ e da fórmula (4.14), resulta

$$\begin{aligned} \iint_{R_{xy}} (x+y)^2 \sin^2(x-y) dA &= \frac{1}{2} \iint_{R_{uv}} u^2 (\sin v)^2 du dv = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} u^2 (\sin v)^2 du \right] dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{3} u^3 \right]_{-\pi}^{\pi} (\sin v)^2 dv = \frac{\pi^3}{3} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin v)^2 dv \\ &= \frac{\pi^3}{3} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2v) dv = \frac{\pi^4}{3}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 4.26 Calcular, por integral dupla, a área da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0$ e $b > 0$.

Solução Se representarmos por R_{xy} a região delimitada pela elipse, isto é,

$$R_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\},$$

então a área da região R_{xy} é dada por $A(R_{xy}) = \iint_{R_{xy}} dx dy$. O cálculo da integral dupla torna-se mais simples por meio de uma mudança de variáveis que transforma a elipse em uma circunferência. Consideremos, então, a transformação linear $x = au$ e $y = bu$, com Jacobiano

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab,$$

que leva a região R_{xy} sobre o disco compacto

$$R_{uv} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$$

e usemos a fórmula de mudança de variáveis. Temos

$$A(R_{xy}) = \iint_{R_{xy}} dx dy = ab \iint_{R_{uv}} du dv. \quad (4.16)$$

A integral dupla que aparece do lado direito de (4.16) nada mais é do que a área do círculo de raio $r = 1$, cujo valor é π . Logo,

$$A(R_{xy}) = ab \times A(R_{uv}) = \pi ab. \quad \blacksquare$$

Exemplo 4.27 Seja D a lâmina do primeiro quadrante delimitada pelas hipérboles $xy = 1$, $xy = 3$, $x^2 - y^2 = 1$ e $x^2 - y^2 = 4$, e suponhamos que a densidade da lâmina seja constante $\sigma \equiv 1$. Calcular o momento de inércia polar da lâmina D .

Solução A transformação $u = xy$ e $v = x^2 - y^2$ leva o retângulo $R_{uv} = [1, 3] \times [1, 4]$ sobre a região R_{xy} , como sugere a Figura 4.20, onde a lâmina D está representada pela região R_{xy} .

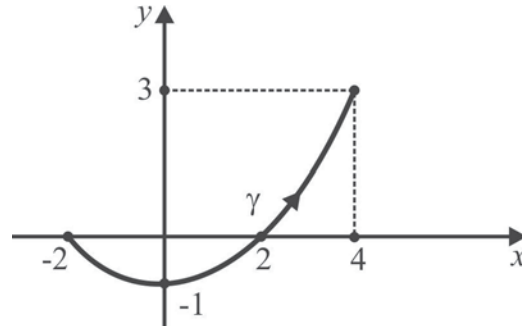


Figura 4.20: Regiões de integração R_{xy} e $R_{r\theta}$.

O Jacobiano dessa transformação é

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = -2(x^2 + y^2),$$

que não se anula em D e, portanto, $J(u, v) = -\frac{1}{2(x^2 + y^2)}$. A densidade da lâmina D é $\sigma(x, y) \equiv 1$ e o momento de inércia polar 4.12 neste caso se reduz a

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

e, considerando que, $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = 4u^2 + v^2$, obtemos

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_1^4 \int_1^3 \frac{\sqrt{4u^2 + v^2}}{2\sqrt{4u^2 + v^2}} du dv = \frac{1}{2} \int_1^4 \int_1^3 du dv = 3. \quad \blacksquare$$

Exemplo 4.28 Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear $T(x, y) = (ax + cy, bx + dy)$ e suponhamos que $ad - bc \neq 0$. Se \mathcal{R} é o paralelogramo gerado pelos vetores linearmente independentes $\mathbf{a} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$, então

$$A(T(\mathcal{R})) = |J(T)| \cdot A(\mathcal{R}). \quad (4.17)$$

Como consequência, calcular a área do paralelogramo \mathcal{R} com três vértices nos pontos $O(0, 0)$, $A(2, 1)$ e $B(3, -1)$.

Solução Se $u = ax + cy$ e $v = bx + dy$, então

$$J(x, y) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0 \text{ e } J(u, v) = \frac{1}{ad - bc}$$

e a relação (4.17) é uma variante de (4.15), contida na Observação 4.23. O paralelogramo \mathcal{R} é gerado pelos vetores $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ e se considerarmos a transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é definida por $T(x, y) = (2x + 3y, x - y)$, com Jacobiano $J(x, y) = -5$, teremos $\mathcal{R} = T(\mathcal{S})$, onde \mathcal{S} é o quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. Portanto, a área do paralelogramo \mathcal{R} é igual $|J(T)| = |-5| = 5$. \blacksquare

A Integral Dupla em Coordenadas Polares

Sempre que usamos coordenadas polares, substituímos a área elementar $dA = dx dy$ por $r dr d\theta$. Isso é consequência do Teorema de Mudança de Variável, mas pode ser deduzido facilmente usando argumentos geométricos. De fato, observando a Figura 4.21, vemos que $dA = dr ds$, onde $ds = r d\theta$ é o comprimento do arco.

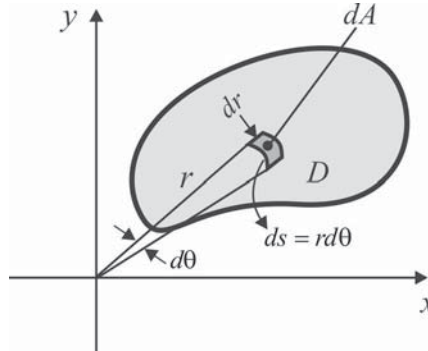


Figura 4.21: Área elementar $dA = r dr d\theta$.

Exemplo 4.29 Determinar a imagem pela transformação $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ da região R_{xy} do primeiro quadrante, delimitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$, e em seguida calcular a integral dupla

$$\iint_{R_{xy}} \log(x^2 + y^2) dA.$$

Solução Se T é a transformação em coordenadas polares $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, então

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

e a imagem da região R_{xy} pela transformação T^{-1} é o retângulo

$$R_{r\theta} = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq r \leq 2 \text{ e } 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$$

no plano $r\theta$. A Figura 4.22 mostra as ações da transformação T e de sua inversa T^{-1} .

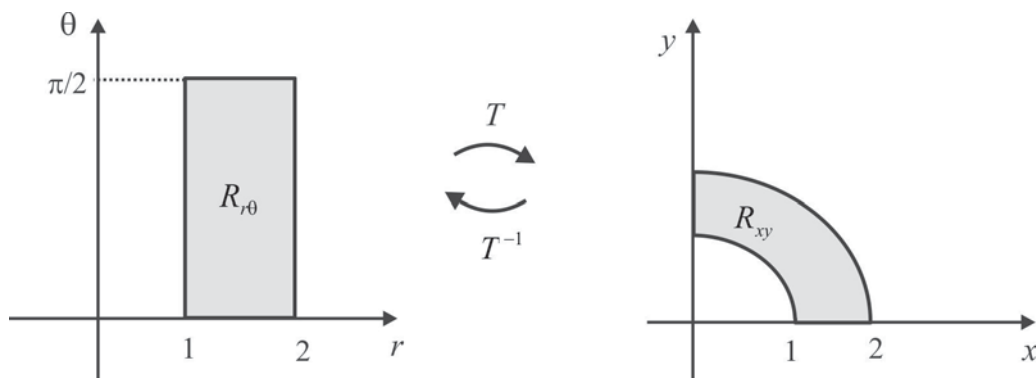


Figura 4.22: Regiões de integração R_{xy} e $R_{r\theta}$.

Em coordenadas polares $x^2 + y^2 = r^2$ e a área elementar é $dA = r dr d\theta$ e, sendo assim,

$$\begin{aligned} \iint_{R_{xy}} \log(x^2 + y^2) dA &= \int_0^{\pi/2} \int_1^2 r \log r^2 dr d\theta = (\text{usar } t = r^2) = \frac{\pi}{4} \int_1^4 \log t dt \\ &= \frac{\pi}{4} (t \log t - t) \Big|_1^4 = \frac{\pi}{4} (4 \log 4 - 3). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 4.30 Calcular a área da região R_{xy} delimitada pelas retas $y = x$ e $y = 0$ e pelos círculos $x^2 + y^2 = 2x$ e $x^2 + y^2 = 4x$.

Solução Em coordenadas polares as curvas $y = x$, $x^2 + y^2 = 2x$ e $x^2 + y^2 = 4x$ são descritas, respectivamente, por $\theta = \pi/4$, $r = 2 \cos \theta$ e $r = 4 \cos \theta$ e na Figura 4.23 mostramos a região R_{xy} , onde fizemos o eixo polar coincidir com o eixo x .

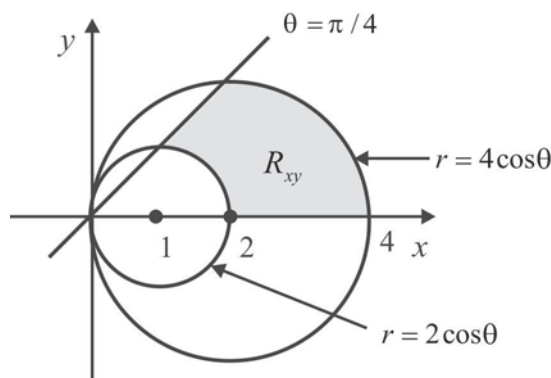


Figura 4.23: Regiões de integração R_{xy} e $R_{r\theta}$.

Usando a fórmula de mudança de variáveis, temos:

$$\begin{aligned} A(R_{xy}) &= \iint_{R_{xy}} dx dy = \int_0^{\pi/4} \int_{2 \cos \theta}^{4 \cos \theta} r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 12 \cos^2 \theta d\theta \\ &= 6 \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta = 3 \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/4} = 3 \left(\frac{1}{2} + \pi/4 \right). \end{aligned}$$

Exemplo 4.31 Consideremos a região do primeiro quadrante

$$R_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, \quad x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}.$$

1. Expressar a integral dupla $\iint_{R_{xy}} x^2 dA$ nas duas ordens $dx dy$ e $dy dx$ e na forma polar.
2. Calcular a integral.

Solução A região R_{xy} é semelhante àquela do lado direito da Figura 4.22.

1. Em coordenadas a integral dupla se expressa nas formas:

$$\begin{aligned} \text{na ordem } dy dx & \quad \iint_{R_{xy}} x^2 dA = \int_0^a \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}} x^2 dy dx + \int_a^b \int_0^{\sqrt{b^2-x^2}} x^2 dy dx. \\ \text{na ordem } dx dy & \quad \iint_{R_{xy}} x^2 dA = \int_0^a \int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{b^2-y^2}} x^2 dx dy + \int_a^b \int_0^{\sqrt{b^2-y^2}} x^2 dx dy. \\ \text{forma polar:} & \quad \iint_{R_{xy}} x^2 dA = \int_0^{\pi/2} \int_a^b r^3 \cos^2 \theta dr d\theta \quad (x = r \cos \theta, \quad dA = r dr d\theta). \end{aligned}$$

2. O cálculo da integral é mais simples na forma polar. Temos

$$\iint_{R_{xy}} x^2 dA = \int_0^{\pi/2} \int_a^b r^3 \cos^2 \theta dr d\theta = \frac{1}{4} (b^4 - a^4) \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\theta}{16} (b^4 - a^4).$$

Exemplo 4.32 Determinar o volume do sólido Ω interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ e exterior ao cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

Solução No primeiro octante o sólido Ω é limitado inferiormente pela região $R_{xy} : 9 \leq x^2 + y^2 \leq 25$ e superiormente pelo hemisfério $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$. O volume de Ω é, portanto:

$$\text{vol}(\Omega) = 8 \iint_{R_{xy}} \sqrt{25 - x^2 - y^2} dA$$

e usando coordenadas polares encontramos

$$\text{vol}(\Omega) = 8 \int_0^{\pi/2} \int_3^5 \sqrt{25 - r^2} r dr d\theta = (\text{usar } t = 25 - r^2) = 2\pi \int_0^{16} \sqrt{t} dt = \frac{256\pi}{3}.$$

Exemplo 4.33 Calcular o volume do sólido Ω interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 2y$, $z \geq 0$, e abaixo do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solução O sólido Ω é a porção interior ao cilindro $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, limitada inferiormente pelo plano xy , porque $z \geq 0$, e acima pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, como sugere a Figura 4.24.

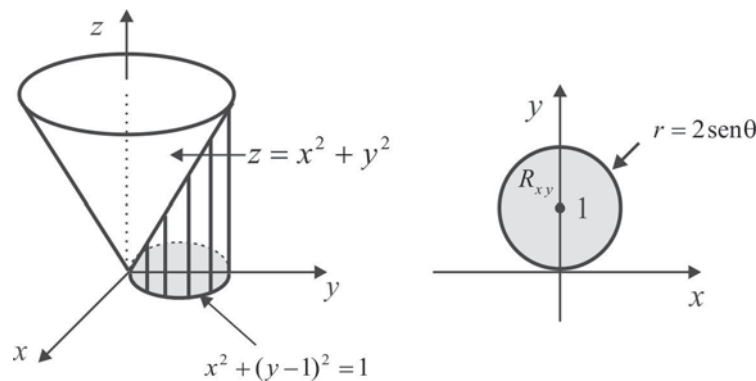


Figura 4.24: Volume abaixo do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Como subconjunto do \mathbb{R}^3 , o sólido Ω é descrito por

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } (x, y) \in R_{xy} \right\}$$

onde $R_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$ é a projeção do sólido Ω no plano xy . Em coordenadas polares a região R_{xy} é descrita por

$$0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{e} \quad 0 \leq r \leq 2 \sin \theta$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Omega) &= \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^\pi \int_0^{2 \sin \theta} r^2 dr d\theta = \frac{8}{3} \int_0^\pi (\sin \theta)^3 d\theta \\ &= \frac{8}{3} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = (\text{usar } t = \cos \theta) = \frac{8}{3} \int_{-1}^1 (1 - t^2) dt = \frac{32}{9}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 4.34 (Integral Gaussiana) Calcular a integral imprópria

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2 - y^2) dA$$

e com o resultado deduzir que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}. \quad (4.18)$$

A integral (4.18) é a Integral Gaussiana, utilizada em teoria de probabilidade.

Solução Em coordenadas polares temos que $x^2 + y^2 = r^2$ e a área elementar é $dA = r dr d\theta$. Além disso,

$$\mathbb{R}^2 = \{(r, \theta); 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } 0 \leq r < \infty\},$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2 - y^2) dA &= \lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^B e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^B e^{-r^2} r dr \\ &= (\text{usar } t = -r^2) = \pi \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-B^2}^0 e^t dt = \pi \lim_{B \rightarrow \infty} (1 - e^{-B^2}) = \pi. \end{aligned}$$

Por outro lado, usando o Corolário 4.4, obtemos

$$\begin{aligned} \pi &= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2 - y^2) dA = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right] e^{-y^2} dy \\ &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right] = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right]^2 \end{aligned}$$

de onde resulta que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$. ■

Exercícios & Complementos.

1. Em cada caso, esboce a região D e calcule a integral dupla

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

- (a) D é a região triangular de vértices $(2, 9)$, $(2, 1)$ e $(-2, 1)$; $f = xy^2$.
- (b) D é a região retangular de vértices $(-1, -1)$, $(2, -1)$, $(2, 4)$ e $(-1, 4)$; $f = 2x + y$.
- (c) D é a região delimitada por $8y = x^3$, $y = -x$ e $4x + y = 9$; $f = x$.
- (d) D é a região do 1.º quadrante delimitada por $x^2 + y^2 = 1$; $f = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
- (e) D é a região triangular de vértices $(0, 0)$, $(1, -1)$ e $(-1, 4)$; $f = x^2 - y^2$.
- (f) D é a região delimitada por $y^2 = x$, $x = 0$ e $y = 1$; $f = \exp(x/y)$.
- (g) D é a região delimitada por $2y = x^2$ e $y = x$; $f = x(x^2 + y^2)^{-1}$.
- (h) D é a região delimitada por $y = x$, $y = 0$, $x = 5$ e $xy = 16$; $f = 1$.
- (i) D é a região delimitada por $y = \exp x$, $y = \log x$, $x + y = 1$ e $x + y = 1 + e$; $f = 1$.
- (j) D é a região delimitada por $y = x^2$, $y = 0$ e $x + y = 2$; $f = xy$.

2. Use coordenadas polares para calcular as seguintes integrais duplas:

- (a) $\int_0^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} x dx dy$ (d) $\int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \exp(-x^2 - y^2) dy dx$
 (b) $\int_1^2 \int_0^x (x^2 + y^2)^{-1} dy dx$ (e) $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y) dx dy$
 (c) $\int_0^3 \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$ (f) $\iint_D (x + y) dx dy$, sendo $D : x^2 + y^2 - 2y \leq 0$

3. A fronteira da região D é o paralelogramo de vértices $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ e $(1, 0)$. Use a mudança de coordenadas do Exemplo 4.25 e calcule a integral dupla sobre D da função

$$f(x, y) = (x - y)^2 \cos^2(x + y).$$

4. Ainda com a mudança de variável do Exemplo 4.25 calcule a integral dupla da função

$$f(x, y) = \sin\left(\frac{x - y}{x + y}\right)$$

sobre a região D delimitada pelo quadrilátero de vértices $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(4, 0)$ e $(2, 0)$.

5. Use a mudança de coordenadas $u = xy$; $y = v$ e calcule a integral dupla

$$\iint_D (x^2 + 2y^2) dx dy,$$

sobre a região D do plano xy delimitada pelas curvas

$$xy = 1, \quad xy = 2, \quad y = |x| \quad \text{e} \quad y = 2x.$$

6. Use a mudança de coordenadas $x = u - v$, $y = 2u - v$ e calcule a integral dupla

$$\iint_D xy dx dy,$$

sobre a região D do plano xy delimitada pelas retas $y = 2x$, $y = 2x - 2$, $y = x$ e $y = x + 1$.

7. Use a mudança de coordenadas $u = \frac{1}{2}y$, $v = x - 2y$ e calcule a integral dupla da função

$$f(x, y) = \sqrt{x - 2y} + y^2/4,$$

sobre a região D do plano xy delimitada pelo triângulo de vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$ e $(4, 2)$.

8. Use coordenadas polares e calcule a integral dupla

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

sobre a região D do plano xy delimitada pelas curvas $y = \sqrt{2x - x^2}$ e $y = x$.

9. Em cada caso, calcule a área da região D do plano xy delimitada pelas curvas indicadas:

- (a) $x = 1$, $x = 2$, $y = -x^2$ e $y = 1/x^2$.
 (b) $x = 1$, $x = 4$, $y = -x$ e $y = \sqrt{x}$.
 (c) $y = x^2$ e $y = 2/(1 + x^2)$.
 (d) $y^2 = -x$, $x - y = 4$, $y = -1$ e $y = 2$.

(e) $y = 0$, $x + y = 3a$ e $y^2 = 4ax$, $a > 0$.

(f) $y = e^x$, $y = \operatorname{sen} x$, $x = \pi$ e $x = -\pi$.

10. Investigue a convergência ou não das integrais impróprias.

(a) $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $D : x^2 + y^2 \leq 1$.

(b) $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$, $D : x^2 + y^2 \leq 1$.

(c) $\iint_D \frac{dxdy}{1 + x^2 + y^2}$, $D : x^2 + y^2 \geq 1$.

(d) $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{xy}}$, $D : [0, 1] \times [0, 1]$.

(e) $\iint_D e^{x/y} dxdy$, $D : 0 \leq x \leq y^2$ e $0 \leq y \leq 1$.

11. A área de uma região D vem dada por

$$A(D) = \int_0^{\pi/2} \int_1^{1+\cos\theta} r dr d\theta.$$

Identifique a região e calcule o valor da área.

12. Calcule o volume do sólido Ω comum aos cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$.

4.2 Integral Tripla

A definição e propriedades da integral dupla se estendem de modo inteiramente análogo à integral tripla. Para definir a integral tripla de uma função contínua $f(x, y, z)$ em uma região compacta $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, começamos particionando a região Ω em pequenos blocos retangulares Ω_{ijk} , $i, j, k = 1, 2, 3, \dots, n$ de lados infinitesimais (que se aproximam de zero) dx , dy e dz e *volume elementar* $dV = dxdydz$. Em cada bloco Ω_{ijk} selecionamos um ponto P_{ijk} e formamos as somas de Riemann

$$S_n = \sum_{i,j,k=1}^n f(P_{ijk}) dxdydz$$

cujo limite, com $n \rightarrow \infty$, é, por definição, a integral tripla de f sobre a região Ω e anota-se

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Quando a função $f(x, y, z)$ é constante e igual a um em Ω , então a integral tripla representa o volume da região Ω . De fato,

$$\iiint_{\Omega} dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j,k=1}^n dV = \operatorname{vol}(\Omega).$$

Dada uma função $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ contínua na região compacta (paralelepípedo)

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \text{ e } \alpha \leq z \leq \beta\},$$

então a integral tripla de f sobre D é calculada como a integral iterada

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_{\alpha}^{\beta} f(x, y, z) dz \right] dy \right] dx, \quad (4.19)$$

semelhante ao cálculo da integral dupla sobre retângulos, e a ordem de integração pode ser permutada, com base no Teorema de Fubini. Por exemplo,

$$\int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_{\alpha}^{\beta} f(x, y, z) dz \right] dy \right] dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y, z) dx \right] dy \right] dz.$$

Exemplo 4.35 Calcular a integral tripla de $f(x, y, z) = xyz$ sobre a região

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 \text{ e } 1 \leq z \leq 2\}.$$

Solução A região de integração é o paralelepípedo $\Omega = [1, 2] \times [0, 1] \times [1, 2]$ e usando (4.19), temos

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} xyz dV &= \int_1^2 \int_0^1 \left[\int_{-1}^2 xyz dx \right] dy dz = \frac{3}{2} \int_1^2 \int_0^1 yz dy dz \\ &= \frac{3}{2} \int_1^2 \left[\int_0^1 yz dy \right] dz = \frac{3}{4} \int_1^2 z dz = \frac{9}{8}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Suponhamos que uma região Ω do \mathbb{R}^3 seja descrita por:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R_{xy} \text{ e } h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\},$$

onde R_{xy} é uma região compacta do \mathbb{R}^2 , que pode ser um retângulo, uma região vertical simples ou horizontal simples, e na qual as funções $h_1(x, y)$ e $h_2(x, y)$ são contínuas. Se $f(x, y, z)$ é uma função contínua em Ω , a integral tripla de f sobre Ω é calculada por

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iint_{R_{xy}} \left[\int_{h_1(x, y)}^{h_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy, \quad (4.20)$$

onde vemos que o cálculo de uma integral tripla se reduz ao cálculo de uma integral simples seguida de uma integral dupla. É claro que existem outras formas de descrever a região Ω e as mudanças na ordem de integração são feitas de acordo com a região. Por exemplo, se Ω é a região

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in R_{xz} \text{ e } g_1(x, z) \leq y \leq g_2(x, z)\},$$

então

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iint_{R_{xz}} \left[\int_{g_1(x, z)}^{g_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right] dx dz.$$

Dependendo da região, a integral tripla pode ser calculada de forma iterada como três integrais simples. Além dos paralelepípedos (blocos retangulares), também se enquadra neste caso a região Ω descrita por

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, p(x) \leq y \leq q(x) \text{ e } g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\},$$

onde $p(x)$ e $q(x)$ são contínuas no intervalo $[a, b]$ e as funções $g_1(x, y)$ e $g_2(x, y)$ são contínuas na projeção de Ω sobre o plano xy . A integral tripla neste caso é calculada de forma iterada

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \int_a^b \left[\int_{p(x)}^{q(x)} \left[\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right] dx. \quad (4.21)$$

Exemplo 4.36 Calcular a integral tripla

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV,$$

sobre a região Ω delimitada pelos planos $x + y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$.

Solução A região Ω é limitada pelos planos coordenados e pelo plano $x + y + z = 2$. A projeção no plano xy é o triângulo de vértices $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$ e $B(0, 2, 0)$, como mostra a Figura 4.25.

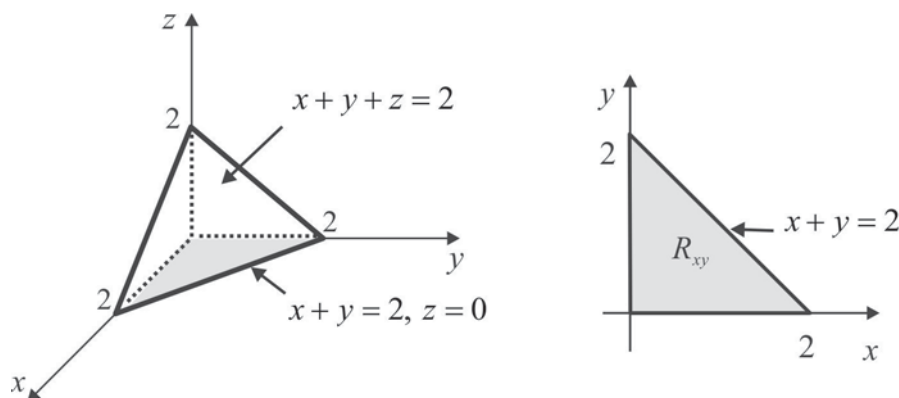


Figura 4.25: Região Ω e projeção no plano R_{xy} .

Em coordenadas cartesianas temos

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x \text{ e } 0 \leq z \leq 2 - x - y\}$$

e usando (4.21), resulta

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV = \int_0^2 \left[\int_0^{2-x} \left[\int_0^{2-x-y} (x^2 + y^2 + z^2) dz \right] dy \right] dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^2 \int_0^{2-x} (2-x-y) [3x^2 + 3y^2 + (2-x-y)^2] dy dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^2 2(x-2)^2 (x^2 - x + 1) dx = \frac{8}{5}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 4.37 Calcular a integral tripla de $f(x, y, z) = xyz$ sobre a região cilíndrica

$$\Omega : x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Solução A integral tripla neste caso é calculada por uma integral simples, seguida de uma integral dupla onde usaremos coordenadas polares. Temos

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} xyz dV &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left[\int_0^1 xyz dz \right] dA = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} xy \left[\int_0^1 z dz \right] dA \\ &= \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} xy dA = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \cos \theta \sin \theta dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta \right] \left[\int_0^1 r^3 dr \right] = 0. \end{aligned}$$

4.2.1 Mudança de Variável em Integral Tripla

Consideremos a transformação $T : \mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida pelo sistema de equações simultâneas

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$$

sendo $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$ e $z(u, v, w)$ funções com derivadas parciais de primeira ordem contínuas na região \mathcal{R} onde o Jacobiano

$$J(T) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$$

não se anula. Se $\Omega = T(\mathcal{R})$, como na Figura 4.26, temos a seguinte fórmula de mudança de coordenadas:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\mathcal{R}} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J(T)| du dv dw \quad (4.22)$$

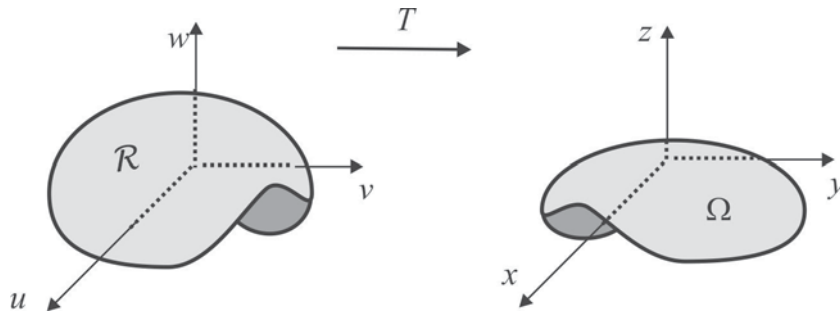


Figura 4.26: Região $\Omega = T(\mathcal{R})$.

Exemplo 4.38 Calcular o volume do elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0 \text{ e } c > 0.$$

Solução Se Ω representa o sólido delimitado pelo elipsoide, então

$$\text{vol}(\Omega) = \iiint_{\Omega} dV$$

e considerando a transformação $x = au$, $y = bv$ e $z = cw$, que leva a esfera $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ sobre o elipsoide, então segue da fórmula 4.22 que

$$\text{vol}(\Omega) = \iiint_{\Omega} dV = \iiint_{\mathcal{R}} |J(u, v, w)| du dv dw,$$

onde \mathcal{R} é a região delimitada pela esfera $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, isto é,

$$\mathcal{R} = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\}.$$

Ora,

$$J(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

e, conseqüentemente,

$$\text{vol}(\Omega) = \iiint_{\Omega} dV = abc \iiint_{\mathcal{R}} dudvdw = abc \text{vol}(\mathcal{R}) = \frac{4}{3}\pi abc.$$

O volume de uma esfera de raio R é $\frac{4}{3}\pi R^3$, como veremos no Exemplo 4.40. ■

Integral Tripla em Coordenadas Cilíndricas

Vimos no Capítulo 3 que a transformação em coordenadas cilíndricas

$$T(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

tem Jacobiano r e, neste caso, a fórmula de mudança de variável (4.22) se reduz a

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\mathcal{R}} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta. \quad (4.23)$$

Em coordenadas cilíndricas, o volume elementar dV pode ser deduzido por meio de argumentos geométricos, tal qual fizemos com a área elementar em coordenadas polares. Com base na Figura 4.27 deduzimos que $dV = r dz dr d\theta$.

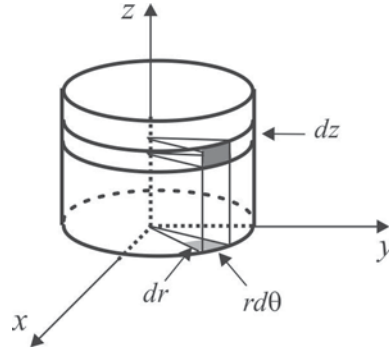


Figura 4.27: Volume elementar $dV = r dz dr d\theta$.

Exemplo 4.39 Calcular, por integral tripla, o volume de um cilindro de raio R e altura h .

Solução O sólido Ω delimitado pelo cilindro é descrito em coordenadas cilíndricas por

$$\Omega : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq R, 0 \leq z \leq h$$

e, portanto,

$$\text{vol}(\Omega) = \iiint_{\mathcal{R}} r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h r dz dr d\theta = 2\pi h \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R = \pi R^2 h.$$

Integral Tripla em Coordenadas Esféricas

A transformação em coordenadas esféricas $T(\rho, \theta, \phi) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi)$ tem Jacobiano

$$J(\rho, \theta, \phi) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \sin \theta & -\rho \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi & -\rho \sin \phi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \phi$$

e as variáveis ρ, θ, ϕ são tais que $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \phi \leq \pi$. O volume elementar em coordenadas esféricas é $dV = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$ e pode ser deduzido observando a Figura 4.28, onde destacamos o bloco elementar de lados $d\rho$, $\rho d\phi$ e $\rho \sin \phi d\theta$.

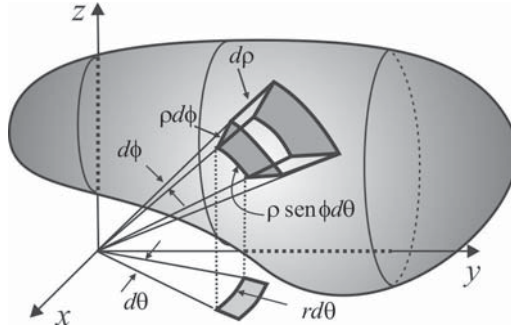


Figura 4.28: Volume elementar $dV = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$.

Em coordenadas esféricas, a fórmula de mudança de variável (4.22) se reduz a:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\mathcal{R}} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta. \quad (4.24)$$

Exemplo 4.40 Calcular, por integral tripla, o volume de uma esfera de raio R .

Solução Em coordenadas esféricas a esfera de centro na origem e raio R tem equação $\rho = R$ e o sólido Ω por ela delimitado é descrito por

$$\Omega : 0 \leq \rho \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

O volume de Ω é, portanto,

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Omega) &= \iiint_{\mathcal{R}} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{\pi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{3} \rho^3 \right]_{\rho=0}^{\rho=R} \sin \phi d\phi = \frac{2}{3} \pi R^3 [-\cos \phi]_0^{\pi} = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

Exemplo 4.41 O volume do sólido Ω interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$ e ao cone $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$.

Solução O sólido Ω tem o formato de um sorvete, como sugere a Figura 4.29.

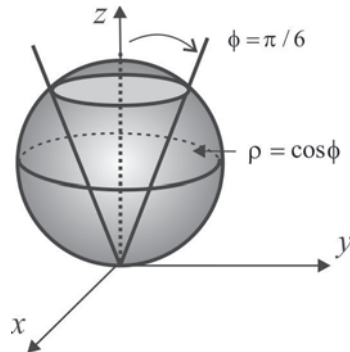


Figura 4.29: Volume interior à esfera $\rho = \cos \phi$ e ao cone $\phi = \pi/6$.

Em coordenadas esféricas, a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$ é descrita por $\rho = \cos \phi$ e o cone $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ tem equação $\phi = \frac{\pi}{6}$. Assim, a região Ω se transforma, via coordenadas esféricas, na região

$$\mathcal{R} = \{(\rho, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq \cos \phi, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } 0 \leq \phi \leq \pi/6\}$$

e, por conseguinte,

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Omega) &= \iiint_{\Omega} dV = \iiint_{\mathcal{R}} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^{\cos \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \left(\sin \phi \frac{1}{3} \rho^3 \right) \Big|_0^{\cos \phi} d\phi d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \sin \phi \cos^3 \phi d\phi d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{4} \cos^4 \phi \right) \Big|_0^{\pi/6} d\theta = \frac{1}{12} \left(1 - \frac{9}{16} \right) \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{7\pi}{96}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.2.2 Considerações Físicas

Os conceitos de massa, centro de massa e momento de inércia de um corpo tridimensional Ω são semelhantes ao caso bidimensional. Se a função $f(x, y, z)$ é interpretada como *densidade volumétrica*, então a integral tripla

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$$

representa a massa do corpo. A densidade volumétrica será indicada por $\rho(x, y, z)$ e quando a densidade ρ for constante o corpo diz-se homogêneo.

■ Massa e Centro de Massa

Se M representa a massa do corpo Ω , as coordenadas \bar{x} , \bar{y} e \bar{z} do centro de massa são dadas por:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) dV, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} y \rho(x, y, z) dV \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} z \rho(x, y, z) dV.$$

■ Momento de Inércia

O momento de inércia I_L do corpo Ω em relação a um eixo L é, por definição,

$$I_L = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) \delta^2 dV,$$

onde $\delta = \delta(x, y, z)$ é a distância de um ponto $P(x, y, z)$ do corpo ao eixo L . No caso em que o eixo L é um eixo coordenado, temos os momentos de inércia I_x , I_y ou I_z , conforme seja L o eixo x , y ou z , e são calculados pelas fórmulas:

$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho dV, \quad I_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \rho dV \quad \text{e} \quad I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho dV.$$

Exemplo 4.42 Calcule a massa, o centro de massa e momento de inércia I_z do sólido Ω , de densidade constante $\rho = 1$, delimitado pelo gráfico do cilindro parabólico $z = 4 - x^2$ e os planos $x = 0$, $y = 0$, $y = 6$ e $z = 0$.

Solução O corpo Ω é descrito por

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R_x \text{ e } 0 \leq z \leq 4 - x^2\}$$

e, portanto, a massa de Ω é

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{\Omega} dV = \iint_{R_x} \left[\int_0^{4-x^2} dz \right] dx dy \\ &= \iint_{R_x} (4-x^2) dx dy = \int_0^2 \int_0^6 (4-x^2) dy dx = 32. \end{aligned}$$

As coordenadas do centro de massa são:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{32} \iiint_{\Omega} x dV = \frac{1}{32} \int_0^2 \int_0^6 \int_0^{4-x^2} x dz dy dx = \frac{6}{32} \int_0^2 x (4-x^2) dx = \frac{3}{4} \\ \bar{y} &= \frac{1}{32} \iiint_{\Omega} y dx dy dz = \frac{1}{32} \int_0^2 \int_0^6 \int_0^{4-x^2} y dz dy dx = \frac{18}{32} \int_0^2 (4-x^2) dx = 3 \\ \bar{z} &= \frac{1}{32} \iiint_{\Omega} x dx dy dz = \frac{1}{32} \int_0^2 \int_0^6 \int_0^{4-x^2} z dz dy dx = \frac{6}{64} \int_0^2 (4-x^2)^2 dx = \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

Portanto, o centroide tem coordenadas $(\frac{3}{4}, 3, \frac{8}{5})$. O momento de inércia I_z é dado por

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV = \int_0^2 \int_0^6 \int_0^{4-x^2} (x^2 + y^2) dz dy dx \\ &= \int_0^2 \int_0^6 (x^2 + y^2) (4-x^2) dy dx = \int_0^2 (48 + 6x^2 - 6x^4) dx = \frac{2048}{5}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 4.43 Um corpo de massa M e densidade $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ tem o formato da região Ω descrita por

$$\Omega : x^2 + z^2 \leq y^2 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 4y.$$

Expressar M por uma integral tripla de três formas: em coordenadas cartesianas, em coordenadas cilíndricas e em coordenadas esféricas e, em seguida, calcular M .

Solução O primeiro passo é descrever a região Ω em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas. Temos:

1. Em Coordenadas Cartesianas

Em Coordenadas Cartesianas a região Ω é descrita pelas desigualdades:

$$-2 \leq x \leq 2, \quad -\sqrt{4-x^2} \leq z \leq \sqrt{4-x^2} \quad \text{e} \quad \sqrt{x^2+z^2} \leq y \leq 2 + \sqrt{4-x^2-z^2}$$

e sua massa é calculada por:

$$M = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+z^2}}^{2+\sqrt{4-x^2-z^2}} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} dy dz dx. \quad (4.25)$$

2. Em Coordenadas Cilíndricas

As equações do cone e da esfera nessas coordenadas são, respectivamente, $y = r$ e $y = 2 + \sqrt{4-r^2}$ e o sólido é descrito pelas desigualdades

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 2 \quad \text{e} \quad r \leq y \leq 2 + \sqrt{4-r^2}.$$

A densidade é $f(r, \theta, y) = (r^2 + y^2)^{-1/2}$ e a massa do sólido Ω é, portanto:

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^{2+\sqrt{4-r^2}} (r^2 + y^2)^{-1/2} r dy dr d\theta. \quad (4.26)$$

3. Em Coordenadas Esféricas

Neste caso, o cone e a esfera são descritos, respectivamente, por $\varphi = \pi/4$ e $\rho = 4 \cos \varphi$ e o sólido Ω assume a caracterização

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/4 \quad \text{e} \quad 0 \leq \rho \leq 4 \cos \varphi.$$

A densidade é $f(\rho, \theta, \varphi) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = \rho^{-1}$ e a massa M do sólido Ω é, portanto:

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{4 \cos \varphi} \rho \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta. \quad (4.27)$$

A massa M pode ser calculada por (4.25), (4.26) ou (4.27) e essa última opção nos conduz ao cálculo mais simples. Temos

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{4 \cos \varphi} \rho \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = 2\pi \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} (4 \cos \varphi)^2 \sin \varphi d\varphi \\ &= 16\pi \int_{\sqrt{2}/2}^1 t^2 dt = \frac{16\pi}{3} [t^3]_{\sqrt{2}/2}^1 = \frac{4\pi}{3} (4 - \sqrt{2}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exercícios & Complementos.

1. Expresse a integral tripla

$$\iiint_D f(x, y, z) dV$$

como uma integral iterada e, em seguida, calcule o seu valor no caso em que $f(x, y, z) = xyz$ e a região D é descrita por:

- (a) $-1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 1 \leq z \leq 2.$
- (b) $-\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}, \quad 0 \leq y \leq 4, \quad 0 \leq z \leq 4 - y.$
- (c) $0 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq x + y.$
- (d) $0 \leq x \leq z^2, \quad x - z \leq y \leq x + z, \quad 1 \leq z \leq 2.$

2. Escreva cada uma das integrais abaixo na ordem $dzdydx$:

- (a) $\int_0^1 \int_1^3 \int_4^5 f(x, y, z) dx dy dz$
- (b) $\int_0^1 \int_0^y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz dx dy$
- (c) $\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{\sqrt{(z-1)^2-y^2}} f(x, y, z) dx dy dz$
- (d) $\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-z-y} f(x, y, z) dx dy dz$

3. Descreva o sólido Ω do \mathbb{R}^3 , cujo volume é:

- (a) $\int_0^1 \int_{\sqrt{1-z}}^{\sqrt{4-z}} \int_2^3 dx dy dz$
- (b) $\int_0^1 \int_{z^3}^{\sqrt{z}} \int_0^{4-x} dy dx dz$
- (c) $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} \int_0^{x+y} dz dy dx$
- (d) $\int_0^1 \int_0^{3x} \int_0^1 dz dy dx$
- (e) $\int_1^2 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} dy dx dz$
- (f) $\int_1^4 \int_{-z}^z \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} dx dy dz$

4. Em cada caso, identifique o sólido Ω e calcule seu volume por integração tripla.

- (a) Ω é delimitado pelo cilindro $y = x^2$ e pelos planos $y + z = 4$ e $z = 0$.
- (b) Ω é delimitado pelo cilindro $z = 1 - y^2$ e pelos planos $x = z$, $x = 0$ e $y = 0$.

- (c) Ω é delimitado pelos cilindros $z = 3x^2$ e $z = 4 - x^2$ e pelos planos $y + z = 6$ e $y = 0$.
- (d) Ω é a interseção dos paraboloides $z \leq 1 - x^2 - y^2$ e $z \geq x^2 + y^2 - 1$.
- (e) Ω é delimitado pelos cilindros $x = y^2$ e $y^2 = 2 - x$ e pelos planos $z = 5 + x + y$ e $z = 0$.
- (f) Ω é a interseção da bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 6$ com o parabolóide $z \geq x^2 + y^2$.
- (g) Ω é delimitado pelo plano xy e pelas superfícies $x^2 + y^2 = 2x$ e $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

5. Em cada caso calcule o volume do sólido descrito pelas desigualdades.

- (a) $0 \leq x \leq z \leq 1 - y^2$ (d) $x^2 + y^2 \leq z \leq 2x$
 (b) $x^2 + 4y^2 \leq 4$ e $x + y \leq z \leq x + y + 1$ (e) $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - x^2 - y^2$
 (c) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2$ (f) $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$

6. Use coordenadas cilíndricas e calcule as seguintes integrais:

- (a) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z dz dx dy$ (c) $\iiint_D xy dV, \quad D: x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1$
 (b) $\int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_0^1 x dz dy dx$ (d) $\int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{x^2+y^2} (x^2 + y^2) dz dy dx$

7. Use coordenadas esféricas e calcule as seguintes integrais:

- (a) $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx.$
 (b) $\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz dx dy.$

8. Faz-se um orifício circular em uma esfera, o eixo do orifício coincidindo com o eixo da esfera. O volume do sólido Ω resultante vem dado por

$$\text{vol}(\Omega) = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-z^2}} r dr dz d\theta.$$

Por observação da integral determine o raio do orifício e o raio da esfera. Calcule $\text{vol}(\Omega)$.

9. Calcule a massa de uma bola de raio R , se a densidade de massa no ponto P da bola é proporcional à distância r do ponto P ao centro da bola.
10. Determine o centro de massa do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \quad z \geq 0$, se a densidade em um ponto (x, y, z) do hemisfério é $\sigma(x, y, z) = z$.
11. Determine o centroide do hemisfério $0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.
12. Calcule o momento de inércia em relação ao seu eixo de um cilindro circular reto de altura h e raio R , se a densidade em um ponto (x, y, z) do cilindro é $\sigma(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Seção 4.1 - integral dupla

- (a) 1, (b) $\frac{1}{2} \sin \pi^2$, (c) -36 , (d) 1, (e) 0, (f) $\frac{5}{2} - 6\sqrt{2}$, (g) $\frac{e}{2} - 1$, (h) $\frac{e-1}{2}$, (i) $1 - \cos 2$, (j) $-\frac{2}{3}$, (k) $\frac{1}{3}$, (l) 0, (m) $\frac{1}{48}$, (n) $\frac{3}{2} - \sin 1 - \cos 1$, (o) $-\frac{3}{2}$, (p) $\frac{8}{3}$, (q) $e^2 - 1$, (r) $\frac{1}{16}$, (s) $\frac{9}{2}$, (t) $-\frac{8}{3}$, (u) $\frac{1}{3}(1 - \cos 1)$, (v) $\frac{1}{2}$.
- Veja a seção 4.1.2 sobre as regiões horizontais e verticais simples.
- (a) $\frac{1}{4}(e^4 - 1)$, (b) 16, (c) $9 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4\pi}{3}$, (d) $\frac{3\pi}{8}$.
- D é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 2)$ e $(1, 1)$. O volume do sólido é $4/3$.
- $\pi/4 - \frac{1}{3}$.
- (a) $\frac{\pi}{4} + \frac{15}{2} + \arctg 2$ (b) $\frac{9\pi}{2} + 27$ (c) $\frac{56}{3}$
- $a^3/3$.
- 20.

Seção 4.1.6 - mudança de variável

- (a) $\frac{1504}{5}$, (b) $\frac{75}{2}$, (c) $\frac{209}{30}$, (d) $\frac{\pi}{6}$, (e) -3 , (f) $\frac{1}{2}$, (g) $\log 2$, (h) $8 + 16 \log \left(\frac{5}{4}\right)$, (i) $\frac{1}{2}e^2 + e - 3$, (j) $\frac{7}{24}$.
- (a) 0, (b) $\frac{\pi}{4} \log 2$, (c) $\frac{\pi}{2}[1 - \exp(-a^2)]$, (d) $\frac{9}{2}(\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}))$, (e) $\frac{\pi}{4}$, (f) $\frac{3\pi}{8}$.
- $\frac{1}{3} + \frac{1}{12}(\sin 6 - \sin 2)$.
- $3 - 3 \cos 1$.
- $15/8$.
- 7.
- Note que a mudança de variáveis $u = \frac{1}{2}y$ e $v = x - 2y$ transforma o triângulo D de vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$ e $(4, 2)$ no plano xy no triângulo R_{uv} de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 4)$ no plano uv . Então

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \text{ e } J(u, v) = -2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\sqrt{x - 2y} + \frac{1}{4}y^2 \right) dx dy &= 2 \iint_{R_{uv}} (\sqrt{v} + u^2) du dv \\ &= 2 \int_0^1 \left[\int_0^{-4u+4} (\sqrt{v} + u^2) dv \right] du \\ &= 2 \int_0^1 \left(\frac{2}{3}v^{\frac{3}{2}} + vu^2 \Big|_0^{-4u+4} \right) du = \frac{74}{15}. \end{aligned}$$

- $\frac{1}{9}(16 - 10\sqrt{2})$.

9. (a) $\frac{17}{6}$, (b) $\frac{73}{6}$, (c) $\pi - \frac{2}{3}$, (d) $\frac{33}{2}$, (e) $\frac{10a^2}{3}$, (f) $e^\pi - e^{-\pi}$.
10. (a) 2π , (b) 2π , (c) ∞ , (d) 4 , (e) $1/2$.
11. Região do 1º quadrante exterior ao círculo $r = 1$ e interior à cardioide $r = 1 + \cos \theta$. A área é $1 + \pi/8$.
12. $\text{vol}(\Omega) = 16a^3/3$.

Seção 4.2 - integral tripla

1. (a) $\frac{7}{8}$; (b) 0 ; (c) $\frac{671}{4320}$; (d) $\frac{1022}{27}$.

2. (c). Sendo

$$\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{\sqrt{(z-1)^2 - y^2}} f(x, y, z) dx dy dz$$

temos que $0 \leq z \leq 1$, $0 \leq y \leq 1 - z$ e $0 \leq x \leq \sqrt{(z-1)^2 - y^2}$. Note que queremos primeiro integrar em relação a z , então fixado x e y , obtemos

$$x = \sqrt{(z-1)^2 - y^2} \Leftrightarrow (z-1)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2},$$

pois $0 \leq z \leq 1$. Como a projeção do cone $(z-1)^2 = x^2 + y^2$ sobre o plano xy ($z = 0$) é o círculo $x^2 + y^2 = 1$ temos que $0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$ e $0 \leq x \leq 1$. Portanto,

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} f(x, y, z) dz dy dx.$$

3. (c). Na integral

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} \int_0^{x+y} dz dy dx$$

vemos que $0 \leq x \leq 2$, $x^2 \leq y \leq 2x$ e $0 \leq z \leq x + y$ e, portanto, o sólido Ω é delimitado pelos planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 2x$, $z = 0$, $z = x + y$ e o cilindro $y = x^2$.

4. (a) Para identificar o sólido Ω esboce a parábola $y = x^2$ no plano xy ($z = 0$) e sobre ela faça deslizar uma reta paralela ao eixo z para obter o cilindro; em seguida corte o cilindro com os planos $z = 0$ e $y + z = 4$. O volume do sólido é

$$\text{vol}(\Omega) = \int_{-2}^2 \int_0^{x^2} \int_0^{4-y} dz dy dx = \frac{224}{15}.$$

- (b) $\frac{4}{15}$, (c) $\frac{304}{15}$, (d) π , (e) $\frac{32}{3}$, (f) $2\pi(2\sqrt{6} - \frac{11}{3})$, (g) $\frac{32}{9}$.

5. (a) $\frac{8}{15}$, (b) $\frac{64}{9} - \frac{3\pi}{2}$, (c) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. (d). A desigualdade $x^2 + y^2 \leq z \leq 2x$ significa que o sólido Ω é a porção interna ao paraboloide $z = x^2 + y^2$, abaixo do plano $z = 2x$, e a projeção de Ω no plano xy é o disco $D : x^2 + y^2 - 2x \leq 0$. Assim,

$$\text{vol}(\Omega) = \iint_D \int_{x^2+y^2}^{2x} dz dy dx = \iint_D (2x - x^2 - y^2) dA$$

e em coordenadas polares o disco D é descrito por $0 \leq r \leq 2 \cos \theta$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Omega) &= \iint_{R_{xy}} (2x - x^2 - y^2) dy dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \theta} (2r \cos \theta - r^2) r dr d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{3} r^3 \cos \theta - \frac{1}{4} r^4 \right) \Big|_0^{2 \cos \theta} d\theta = \frac{4}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

6. (a). O sólido é a porção do 1º octante, interna ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Como $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ e $z = z$ então $J(r, \theta, z) = r$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z dz dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-r^2}} z r dz dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r(4-r^2) dr d\theta = \frac{7}{16} \pi. \end{aligned}$$

(b) $1/3$, (c) 0 , (d) $10\pi/3$.

7. (a) A região Ω é interna ao cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Em coordenadas esféricas a esfera e o cone são descritos por $\rho = 2\sqrt{2}$ e $\phi = \frac{\pi}{4}$, respectivamente. Assim, a região é descrita por $0 \leq \rho \leq 2\sqrt{2}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\sqrt{2}} \rho^4 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= \frac{256\pi}{5} (\sqrt{2} - 1/2). \end{aligned}$$

(b) $\pi R^4/16$.

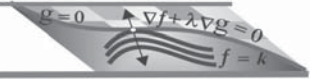
8. $r = 1$; $R = 2$ e $\text{vol}(\Omega) = 4\pi\sqrt{3}$.

9. $k\pi R^4$.

10. $C_M(0, 0, 8R/15)$.

11. $C_M(0, 0, R/3)$.

12. $2\pi h R^5/3$.



5.1 Motivação

Para motivar o que será apresentado neste capítulo, deixe-nos rescrever a integral simples

$$\int_a^b f(x) dx$$

de outra forma. Imaginemos o intervalo $[a, b]$ como sendo a curva γ descrita pelas equações paramétricas

$$\gamma : x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{e} \quad z = z(t), \quad a \leq t \leq b,$$

sendo $x(t) = t$, $y(t) = 0$ e $z(t) = 0$ e consideremos a função vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x)\mathbf{i}$, definida em uma região Ω contendo a curva γ . Se $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ representa o vetor posição do ponto $P(x, y, z)$ da curva γ , temos que

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t) = f(t)$$

e, portanto,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t) dt. \quad (5.1)$$

A integral do lado direito de (5.1) recebe o nome de *Integral de Linha* ou *Integral Curvilínea* do campo vetorial \mathbf{F} sobre o caminho γ .

A partir de considerações físicas, apresentaremos as formas como as integrais de linha aparecem na prática. O conceito e as propriedades básicas da integral de linha serão formalizados posteriormente.

■ O conceito de trabalho

Por *campo de forças* entendemos uma função que associa a cada ponto um vetor que representa algum tipo de atração ou repulsão. Uma partícula de massa m , sob a ação de um campo de forças \mathbf{F} , se move ao longo de uma curva γ . O trabalho W realizado pelo campo \mathbf{F} para transportar a partícula ao longo da curva γ , do ponto A até o ponto B , é dado por

$$W = E_B - E_A,$$

onde E_A e E_B são, respectivamente, a *energia cinética* da partícula nos instantes $t = a$ e $t = b$ em que a partícula ocupa as posições A e B . Se v_A e v_B representam as velocidades nesses instantes, então

$$W = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2. \quad (5.2)$$

Para representar o trabalho (5.2) por uma integral, imaginemos a curva γ orientada de A para B , que corresponde aos valores crescentes de t , e descrita por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b,$$

de modo que $A = \mathbf{r}(a)$ e $B = \mathbf{r}(b)$ são, respectivamente, as posições inicial e final da partícula. Ora, no instante t a velocidade $v(t)$ da partícula é $v(t) = |\mathbf{r}'(t)|$ e resulta de (5.2)

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}m \left[|\mathbf{r}'(b)|^2 - |\mathbf{r}'(a)|^2 \right] = \frac{1}{2}m \left[|\mathbf{r}'(t)|^2 \right]_{t=a}^{t=b} \\ &= \frac{1}{2}m \int_a^b \frac{d}{dt} |\mathbf{r}'(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Da Regra da Cadeia, segue que $\frac{d}{dt} [\mathbf{r}'(t)^2] = 2\mathbf{r}'(t) \bullet \mathbf{r}''(t)$ e, conseqüentemente,

$$W = \int_a^b m\mathbf{r}''(t) \bullet \mathbf{r}'(t) dt. \quad (5.3)$$

A derivada $\mathbf{r}''(t)$ representa a aceleração da partícula e, de acordo com a 2ª Lei de Newton, temos que $\mathbf{F}(\gamma(t)) = m\mathbf{r}''(t)$, resultando de (5.3) que

$$W = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t) dt. \quad (5.4)$$

A integral do lado direito de (5.4) se representa na forma vetorial $\int_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, onde

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t) dt \quad \text{ou} \quad d\mathbf{r} = (dx)\mathbf{i} + (dy)\mathbf{j} + (dz)\mathbf{k}.$$

mede o *deslocamento infinitesimal* da partícula. Essa notação vetorial, além da robustez, sugere a interpretação física de trabalho como *força \times deslocamento*.

■ O conceito de massa

Consideremos um arame com o formato da curva $\gamma(t)$ e seja $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, $a \leq t \leq b$, o vetor posição do ponto $P(x, y, z)$ do arame. Se representarmos por $\delta(x, y, z)$ a *densidade linear*, isto é, massa por unidade de comprimento, e por ds uma porção infinitesimal (comprimento elementar) do arame, a massa elementar dm da porção ds será, portanto:

$$dm = \delta(x, y, z) ds.$$

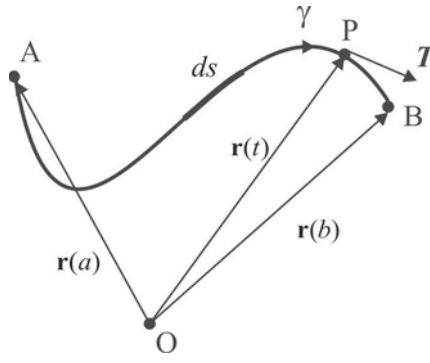
A massa total do arame é obtida *somando*, isto é, integrando, as massas elementares dm . Assim, a massa do arame é

$$m = \lim_{ds \rightarrow 0} \sum dm = \int_{\gamma} \delta(x, y, z) ds. \quad (5.5)$$

Em (5.5) o símbolo \sum tem caráter apenas intuitivo, já que não podemos, literalmente, somar infinitésimos. O que fazemos na verdade é integrar sobre o caminho.

Com esta motivação desejamos ressaltar que as integrais de linha se apresentam sob duas formas equivalentes:

1. $\int_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t) dt$, interpretada como trabalho realizado pelo campo de forças \mathbf{F} .
2. $\int_{\gamma} f(x, y, z) ds$, interpretada como massa do fio de densidade linear $f(x, y, z)$.

Figura 5.1: Vetor tangente $T = \mathbf{r}'(t)/|\mathbf{r}'(t)|$.

O vetor tangente unitário à curva γ no ponto $P = \mathbf{r}(t)$ é $\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$, como sugere a Figura 5.1, e se representarmos por $s(t)$ o comprimento do arco da curva γ de A até P , teremos

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau \quad \text{e} \quad ds = |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

Assim,

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t) dt = |\mathbf{r}'(t)| \mathbf{T} dt = \mathbf{T} ds,$$

onde vemos que $|d\mathbf{r}|$ representa o comprimento ds ao longo da direção tangencial, e temos

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\gamma} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T}) ds.$$

Se enfatizarmos as coordenadas do campo $\mathbf{F}(x, y, z) = L(x, y, z)\mathbf{i} + M(x, y, z)\mathbf{j} + N(x, y, z)\mathbf{k}$, teremos

$$\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = (L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}) \bullet (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) = Ldx + Mdy + Ndz$$

e a integral de linha se apresenta sob a forma

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\gamma} Ldx + Mdy + Ndz.$$

A expressão $Ldx + Mdy + Ndz$ recebe o nome de *forma diferencial* de primeira ordem.

5.2 Campos Vetoriais

Um campo vetorial sobre uma região $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ é uma função $\mathbf{F} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, que a cada ponto $P(x, y, z)$ de Ω associa um vetor $\mathbf{F}(x, y, z)$ do \mathbb{R}^3 . A terminologia *campo vetorial* deve-se a exemplos físicos tais como campo gravitacional, campo eletrostático, campo de velocidades de um fluido em movimento, etc.

Fixado um sistema de coordenadas, por exemplo, o sistema de coordenadas cartesianas, o campo vetorial $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$ é representado por suas componentes ou coordenadas L , M e N , que são funções escalares definidas em Ω e que determinam as propriedades analíticas do campo \mathbf{F} . Por exemplo, o campo

$$\mathbf{F} = L(x, y, z)\mathbf{i} + M(x, y, z)\mathbf{j} + N(x, y, z)\mathbf{k},$$

é contínuo (resp. diferenciável) no ponto $P(x, y, z)$ de Ω se, e somente se, as componentes L , M e N são funções contínuas (resp. diferenciáveis) em P .

De modo similar, define-se campo vetorial bidimensional como sendo uma função $\mathbf{F} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, que associa a cada ponto de uma região D , do plano xy , um vetor

$$\mathbf{F}(x, y) = L(x, y)\mathbf{i} + M(x, y)\mathbf{j},$$

sendo $L, M : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funções escalares que determinam (e herdam) as propriedades analíticas do campo \mathbf{F} . A visualização geométrica de um campo vetorial $\mathbf{F}(x, y)$ é obtida esboçando-se uma coleção de setas de comprimento $|\mathbf{F}(x, y)|$, com origem no ponto $P(x, y)$, representando os vetores $\mathbf{F}(x, y)$.

Exemplo 5.1 (Campo Radial) *O campo vetorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ é tal que $|\mathbf{F}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e, nos pontos de uma dada circunferência de centro na origem, a intensidade do campo \mathbf{F} é a mesma e igual ao raio da circunferência, como ilustra a Figura 5.2.* ■

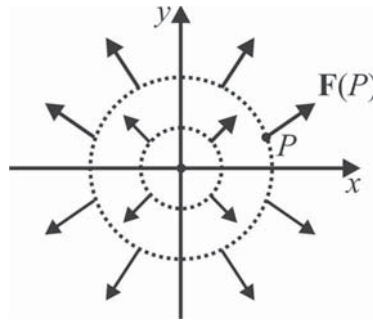


Figura 5.2: Visualização do campo radial.

Exemplo 5.2 (Campo Tangencial) *Analisar o campo vetorial \mathbf{F} definido em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ por*

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{j}$$

Solução Primeiro observamos que \mathbf{F} é um campo de vetores unitários, isto é, em qualquer ponto $P(x, y)$, a intensidade do campo é $|\mathbf{F}(x, y)| = 1$. Além disso, se $\mathbf{r} = \mathbf{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ é o vetor posição do ponto $P(x, y)$, então $\mathbf{F} \bullet \mathbf{r} = 0$, e isso nos diz que o campo vetorial \mathbf{F} é perpendicular ao vetor posição \mathbf{r} . Portanto, em cada ponto P , o campo vetorial \mathbf{F} é tangente à circunferência de centro na origem e raio $r = |\mathbf{OP}|$, como mostra a Figura 5.3. ■

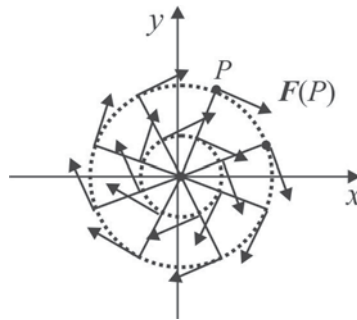


Figura 5.3: Visualização do campo tangente.

Exemplo 5.3 (Campo Quadrado Inverso) Se $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ é o vetor posição do ponto $P(x, y, z)$ de uma região Ω do \mathbb{R}^3 , a expressão

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{k}{|\mathbf{r}|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|},$$

sendo k constante, define um campo vetorial sobre Ω , denominado campo quadrado inverso, que aparece com bastante frequência nas ciências físicas. Em coordenadas, o campo quadrado inverso se expressa sob a forma

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{k(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

e, no ponto P , a intensidade do campo é $|\mathbf{F}(P)| = \frac{k}{|\mathbf{r}|^2}$, inversamente proporcional ao quadrado da distância do ponto P à origem. ■

Exemplo 5.4 (Campo Gravitacional) Verificar que o campo gravitacional é um campo vetorial quadrado inverso.

Solução De acordo com a Lei de Gravitação Universal de Newton, o campo gravitacional na superfície da terra é dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{GMm}{|\mathbf{r}|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|},$$

onde M representa a massa da terra, G é a constante gravitacional, m é a massa de uma partícula situada no ponto $P(x, y, z)$ e $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$ representa o vetor posição do ponto P . A intensidade do campo vetorial \mathbf{F} é igual a

$$|\mathbf{F}(P)| = \frac{GMm}{|\mathbf{r}|^2},$$

inversamente proporcional ao quadrado da distância do ponto P à origem. ■

Definição 5.5 Um campo vetorial $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ denomina-se campo conservativo ou campo gradiente se existir uma função diferenciável $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \varphi(x, y, z), \quad \text{em } \Omega.$$

Uma tal função φ denomina-se potencial (escalar) ou primitiva do campo \mathbf{F} .

Exemplo 5.6 O campo gravitacional apresentado no Exemplo 5.4 é conservativo.

Solução No Exercício 13 da seção 2.4 vimos que

$$\nabla(1/|\mathbf{r}|) = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

e se considerarmos

$$\varphi(x, y, z) = \frac{GMm}{|\mathbf{r}|},$$

teremos

$$\nabla \varphi(x, y, z) = GMm \nabla(1/|\mathbf{r}|) = -\frac{GMm\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \mathbf{F}(x, y, z), \quad \forall (x, y, z) \neq \mathbf{0}. \quad \blacksquare$$

Imitando o que foi feito no Exemplo 5.6, demonstra-se que qualquer campo vetorial \mathbf{F} quadrado inverso é conservativo. De fato, basta observar que

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{k}{|\mathbf{r}|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \nabla \left(-\frac{k}{|\mathbf{r}|} \right).$$

De forma geral, um potencial φ de um campo vetorial conservativo $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ é determinado como solução da equação vetorial $\mathbf{F} = \nabla\varphi$, que é equivalente ao sistema de equações diferenciais parciais

$$\begin{cases} \varphi_x = L \\ \varphi_y = M \\ \varphi_z = N. \end{cases} \quad (5.6)$$

Portanto, o campo vetorial $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ será conservativo quando o sistema de equações diferenciais parciais (5.6) possuir uma solução φ , que será um potencial para o campo \mathbf{F} . Se as derivadas parciais de primeira ordem das componentes L , M e N são contínuas, e isso acarreta a diferenciabilidade do campo \mathbf{F} , então

$$\begin{aligned} L &= \varphi_x \Rightarrow L_y = \varphi_{xy} = \varphi_{yx} = M_x \\ M &= \varphi_y \Rightarrow M_z = \varphi_{yz} = \varphi_{zy} = N_y \\ N &= \varphi_z \Rightarrow N_x = \varphi_{zx} = \varphi_{xz} = L_z \end{aligned}$$

e, portanto,

$$M_x = L_y, \quad N_y = M_z \quad \text{e} \quad L_z = N_x. \quad (5.7)$$

Como veremos adiante, sob certas condições, as relações (5.7) constituem uma condição não apenas necessária, mas, também, suficiente para que o campo $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ seja conservativo.

Exemplo 5.7 O campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = x^2y\mathbf{i} + \sin(xy)\mathbf{j}$ não é conservativo, porque

$$L_y = x^2 \neq y \cos(xy) = M_x. \quad \blacksquare$$

Exemplo 5.8 Mostrar que o campo $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 3z\mathbf{k}$ é conservativo e encontrar a família de potenciais do campo

Solução Temos $L = x^2$, $M = y$ e $N = -3z$ e as condições (5.7) são facilmente comprovadas. O sistema (5.6), neste caso, se reduz a:

$$\begin{cases} \varphi_x = x^2 & \text{(I)} \\ \varphi_y = y & \text{(II)} \\ \varphi_z = -3z & \text{(III)} \end{cases}$$

A busca do potencial é feita por etapas, usando o processo de derivação e integração. Como efetuaremos integração parcial em relação às variáveis x , y e z , as constantes de integração são na verdade funções das variáveis não envolvidas na integração e o processo se encerra com uma constante numérica.

■ **Etapas 1: integrar (I) com respeito a x**

Integrando (I) com respeito à variável x , obtemos

$$\varphi(x, y, z) = \int_{\gamma} x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + f(y, z), \quad (5.8)$$

onde $f(y, z)$ é a constante de integração.

■ **Etapa 2: derivar com respeito a y e comparar com (II)**

Derivando (5.8) em relação a y , usando (II) e integrando o resultado em relação a y , encontramos

$$\varphi_y = f_y \Rightarrow y = f_y \Rightarrow f(y, z) = \frac{1}{2}y^2 + g(z),$$

onde $g(z)$ representa a constante de integração. Assim, (5.8) assume a forma

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 + g(z) \quad (5.9)$$

■ **Etapa 3: derivar com respeito a z e comparar com (III)**

Derivando (5.9) com respeito a z e comparando com (III), obtemos

$$\varphi_z = g'(z) \Rightarrow -3z = g'(z) \Rightarrow \quad (5.10)$$

Integrando (5.10), encontramos $g(z) = -\frac{3}{2}z^2 + k$, onde k é a constante de integração, e substituindo $g(z)$ na expressão (5.9) que define φ , obtemos

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{2}z^2 + k,$$

que é a família de potenciais procurada. ■

5.2.1 Operadores Diferenciais

No cálculo integral de várias variáveis, sobretudo nos teoremas clássicos, alguns operadores diferenciais (operadores que envolvem derivação) aparecem em sua formulação. Os operadores que trataremos neste texto são: o *Gradiente*, o *Laplaciano*, o *Divergente* e o *Rotacional*. Esses operadores atuam em campos escalares ou vetoriais, produzindo campos escalares ou vetoriais. Vejamos a ação de cada um deles.

■ **Operador Gradiente: $\text{grad } \varphi = \nabla \varphi$**

Dado um campo escalar diferenciável $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, o gradiente de f no ponto P , interior ao conjunto Ω , foi definido no Capítulo 2 como sendo o vetor

$$\nabla f(P) = f_x(P)\mathbf{i} + f_y(P)\mathbf{j} + f_z(P)\mathbf{k}.$$

Essa expressão define o *operador gradiente* $\nabla = \partial_x \mathbf{i} + \partial_y \mathbf{j} + \partial_z \mathbf{k}$, cujo valor no campo escalar f é

$$\nabla f = (\partial_x \mathbf{i} + \partial_y \mathbf{j} + \partial_z \mathbf{k}) \cdot f = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k}.$$

Dado um vetor unitário \mathbf{u} com ângulos diretores α , β e γ , isto é, $\mathbf{u} = (\cos \alpha)\mathbf{i} + (\cos \beta)\mathbf{j} + (\cos \gamma)\mathbf{k}$, então

$$\nabla f \bullet \mathbf{u} = f_x \cos \alpha + f_y \cos \beta + f_z \cos \gamma$$

e isso indica que ∇f não depende do sistema de coordenadas escolhido. Se \mathbf{F} é um campo conservativo com potencial f , então em cada ponto P da superfície de nível $f(x, y, z) = k$, temos $\mathbf{OP} \bullet \nabla f(P) = 0$, isto é, $\mathbf{OP} \bullet \mathbf{F}(P) = 0$ e isso indica que o campo \mathbf{F} é normal à superfície de nível de f em P .

■ **Operador Laplaciano: $\Delta \varphi = \nabla \cdot (\nabla \varphi)$**

No Exercício 8 da seção 2.2, definimos o operador de Laplace ou Laplaciano em \mathbb{R}^2 por

$$\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}.$$

No \mathbb{R}^3 , o Laplaciano é definido de forma similar como sendo o operador diferencial de segunda ordem

$$\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}$$

cujos valor no campo escalar $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é

$$\Delta f = (\partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}) \cdot f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

É comum usar a notação $\Delta = \nabla^2$, decorrente da relação

$$\Delta f = (\partial_x \mathbf{i} + \partial_y \mathbf{j} + \partial_z \mathbf{k}) \bullet (\partial_x \mathbf{i} + \partial_y \mathbf{j} + \partial_z \mathbf{k}) = \nabla \bullet \nabla = \nabla^2,$$

onde entendemos a operação $\partial_u \bullet \partial_v$ como a derivada de segunda ordem ∂_{uv} . Enquanto o operador Gradiente transforma campos escalares em campos vetoriais, o Laplaciano transforma um campo escalar em um campo escalar.

■ Operador Divergente: $\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$

O operador Divergente faz o papel inverso do Gradiente, transformando campos vetoriais em campos escalares. Dado um campo vetorial $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$, o *divergente* de \mathbf{F} é definido por

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}.$$

É comum expressar o operador divergente na forma simbólica $\operatorname{div} = \partial_x + \partial_y + \partial_z$ e, neste contexto, temos

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \bullet \mathbf{F} = (\partial_x \mathbf{i} + \partial_y \mathbf{j} + \partial_z \mathbf{k}) \bullet \mathbf{F} = L_x + M_y + N_z.$$

Se olharmos a matriz Jacobiana do campo \mathbf{F}

$$J(\mathbf{F}) = \begin{bmatrix} L_x & L_y & L_z \\ M_x & M_y & M_z \\ N_x & N_y & N_z \end{bmatrix}$$

observamos que as parcelas de $\operatorname{div} \mathbf{F}$ aparecem na diagonal principal da matriz.

Exemplo 5.9 Determinar o divergente do campo $\mathbf{F} = xy^2z^4\mathbf{i} + (2x^2y + z)\mathbf{j} + y^3z^2\mathbf{k}$.

Solução As coordenadas do campo são $L = xy^2z^4$, $M = 2x^2y + z$ e $N = y^3z^2$. Assim,

$$L_x = y^2z^4, \quad M_y = 2x^2 \quad \text{e} \quad N_z = 2y^3z$$

e, portanto, $\operatorname{div} \mathbf{F} = y^2z^4 + 2x^2 + 2y^3z$. ■

Sejam λ e μ números reais, f um campo escalar diferenciável e \mathbf{F} e \mathbf{G} campos vetoriais diferenciáveis. O operador divergente goza das seguintes propriedades:

1. **Linearidade:** $\nabla \bullet (\lambda \mathbf{F} + \mu \mathbf{G}) = \lambda \nabla \bullet \mathbf{F} + \mu \nabla \bullet \mathbf{G}$ ou $\operatorname{div}(\lambda \mathbf{F} + \mu \mathbf{G}) = \lambda \operatorname{div} \mathbf{F} + \mu \operatorname{div} \mathbf{G}$.
2. **Distributividade:** $\nabla \bullet (\varphi \mathbf{F}) = \varphi(\nabla \bullet \mathbf{F}) + (\nabla \varphi) \bullet \mathbf{F}$ ou $\operatorname{div}(\varphi \mathbf{G}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{F} + \nabla \varphi \bullet \mathbf{F}$.

Estas e outras propriedades do operador div são decorrentes das regras de derivação. Como ilustração, vamos mostrar a propriedade linear do divergente. Se $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$, então

$$\varphi\mathbf{F} = (\varphi L)\mathbf{i} + (\varphi M)\mathbf{j} + (\varphi N)\mathbf{k}$$

e a regra do produto para derivação parcial acarreta

$$\begin{aligned}\text{div}(\varphi\mathbf{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}(\varphi L) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi M) + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi N) \\ &= \varphi L_x + \varphi_x L + \varphi M_y + \varphi_y M + \varphi N_z + \varphi_z N \\ &= \varphi(L_x + M_y + N_z) + (\varphi_x L + \varphi_y M + \varphi_z N) \\ &= \varphi(\text{div} \mathbf{F}) + (\nabla \varphi) \bullet \mathbf{F} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

■ Operador Rotacional: $\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$

Dado um campo vetorial diferenciável $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$, o *rotacional* de \mathbf{F} é definido por

$$\text{rot } \mathbf{F} = (N_y - M_z)\mathbf{i} + (L_z - N_x)\mathbf{j} + (M_x - L_y)\mathbf{k}$$

e o *operador rotacional* pode ser visto como o produto vetorial do gradiente pelo campo, isto é, o determinante simbólico

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ L & M & N \end{vmatrix}.$$

Alguns "produtos" decorrentes do desenvolvimento deste determinante em relação à primeira linha devem ser entendidos como derivação. Por exemplo, o "produto" $\partial_x N$ significa a derivada parcial N_x da função N em relação à variável x . O operador rot também goza das propriedades linear e distributiva, tal qual o div . Temos

$$1. \quad \textbf{Linearidade:} \quad \nabla \times (\lambda\mathbf{F} + \mu\mathbf{G}) = \lambda\nabla \times \mathbf{F} + \mu\nabla \times \mathbf{G} \quad \text{ou} \quad \text{rot}(\lambda\mathbf{F} + \mu\mathbf{G}) = \lambda \text{rot } \mathbf{F} + \mu \text{rot } \mathbf{G}.$$

$$2. \quad \textbf{Distributividade:} \quad \nabla \times (\varphi\mathbf{F}) = \varphi(\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla \varphi) \times \mathbf{F} \quad \text{ou} \quad \text{rot}(\varphi\mathbf{F}) = \varphi \text{rot } \mathbf{F} + \nabla \varphi \times \mathbf{F}.$$

As coordenadas de $\text{rot } \mathbf{F}$ aparecem naturalmente nas entradas da matriz antissimétrica

$$J(\mathbf{F}) - J(\mathbf{F})^T = \begin{bmatrix} 0 & L_y - M_x & L_z - N_x \\ -(L_y - M_x) & 0 & M_z - N_y \\ -(L_z - N_x) & -(M_z - N_y) & 0 \end{bmatrix}.$$

Observação 5.10 Se $\rho = \rho(x, y, z, t)$ é a densidade e $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ é o campo de velocidades de um fluido em movimento, em mecânica dos fluidos a equação

$$\text{div } \mathbf{F} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{ou} \quad \text{div } \mathbf{F} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

sendo $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$, denomina-se *equação de continuidade* e quando a densidade ρ for constante, diremos que o fluido é incompressível. O divergente do campo vetorial \mathbf{F} surge como uma medida da taxa de variação da densidade do fluido em um ponto. Portanto, concluímos que:

1. Quando o divergente for positivo em um ponto do fluido, a sua densidade está diminuindo com o tempo, isto é, existe uma fonte de fluxo no ponto. Caso contrário, existe um poço (sumidouro) de fluxo no ponto.

2. Se $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ em todos os pontos da região, então o fluxo de entrada é exatamente equilibrado pelo fluxo de saída.
3. O campo rotacional pode ser interpretado como uma medida do movimento angular (circular) de um fluido. Quando $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$, diremos que o campo de velocidade \mathbf{v} é *irrotacional*. É oportuno ressaltar que $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ é equivalente a matriz $J(\mathbf{F})$ ser simétrica, ou seja,

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad e \quad \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y}$$

Exemplo 5.11 Determinar o divergente e o rotacional do campo vetorial

$$\mathbf{F} = xy^2z^4\mathbf{i} + (2x^2y + z)\mathbf{j} + y^3z^2\mathbf{k}$$

Solução As coordenadas do campo \mathbf{F} são $L = xy^2z^4$, $M = 2x^2y + z$ e $N = y^3z^2$ e da definição de divergente resulta

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = y^2z^4 + 2x^2 + 2y^3z.$$

Da mesma forma, usando a definição de rotacional, encontramos

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xy^2z^4 & 2x^2y + z & y^3z^2 \end{vmatrix} = (3y^2z^2 - 1)\mathbf{i} + 4xy^2z^3\mathbf{j} + (4xy - 2xyz^4)\mathbf{k} \quad \blacksquare$$

Exemplo 5.12 (Um campo irrotacional) Seja $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial conservativo sobre Ω que deriva de um potencial $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, com derivadas parciais de segunda ordem contínuas em Ω . Mostre que $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$, ou seja, o campo F é irrotacional.

Solução Como φ possui derivadas parciais de segunda ordem contínuas em Ω , temos que $\varphi_{xy} = \varphi_{yx}$, $\varphi_{xz} = \varphi_{zx}$ e $\varphi_{yz} = \varphi_{zy}$ e, além disso, sendo $\mathbf{F} = \nabla \varphi = \varphi_x\mathbf{i} + \varphi_y\mathbf{j} + \varphi_z\mathbf{k}$, obtemos

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{vmatrix} = (\varphi_{zy} - \varphi_{yz})\mathbf{i} + (\varphi_{xz} - \varphi_{zx})\mathbf{j} + (\varphi_{yx} - \varphi_{xy})\mathbf{k} = \mathbf{0} \quad \blacksquare$$

Encerrando esta seção, exibimos na Figura 5.4 um esquema mostrando a atuação dos operadores diferenciais e a grandeza (vetorial ou escalar) por eles produzidas.

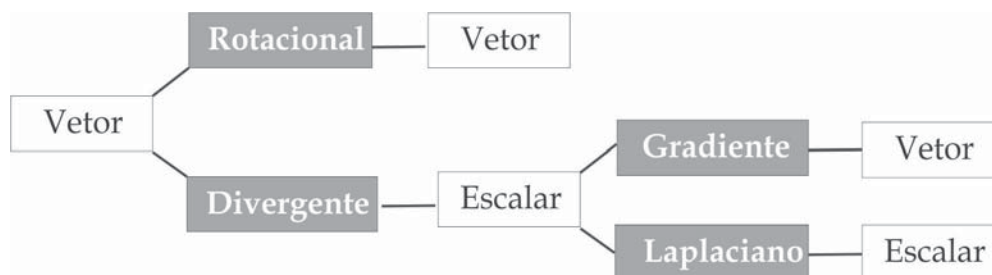


Figura 5.4: Atuação dos operadores diferenciais.

1. Se $\varphi(x, y, z) = x^2yz^3$ e $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 2x^2y\mathbf{k}$. Determine (a) $\nabla\varphi$, (b) $\operatorname{div} \mathbf{F}$, (c) $\operatorname{rot} \mathbf{F}$, (d) $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{F})$, (e) $\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{F})$ e (f) $\operatorname{rot}(\nabla\varphi)$.
2. Verifique se o campo \mathbf{F} é conservativo. Nos casos afirmativos determine um potencial do qual ele deriva.

- (a) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.
- (b) $\mathbf{F} = 3x^2y\mathbf{i} + x^3\mathbf{j}$.
- (c) $\mathbf{F} = (2xe^y + y)\mathbf{i} + (x^2e^y + x - 2y)\mathbf{j}$.
- (d) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
- (e) $\mathbf{F} = (y^2 - 3x)\mathbf{i} + (2xy + \cos y)\mathbf{j}$.
- (f) $\mathbf{F} = (1/x)\mathbf{i} + x \exp(xy)\mathbf{j}$.
- (g) $\mathbf{F} = \sin(xy)\mathbf{i} + \cos(xy)\mathbf{j}$.
- (h) $\mathbf{F} = \exp(xy)\mathbf{i} + \exp(x + y)\mathbf{j}$.
- (i) $\mathbf{F} = 3x^4y^2\mathbf{i} + x^3y\mathbf{j}$.
- (j) $\mathbf{F} = 5x^4y\mathbf{i} + x \cos(xy)\mathbf{j}$.
- (k) $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$.
- (l) $\mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$.
- (m) $\mathbf{F} = 2xyz\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$.
- (n) $\mathbf{F} = y \sin z\mathbf{i} + x \sin z\mathbf{j} + xy \cos z\mathbf{k}$.

3. Sejam α e β constantes reais, u e v campos escalares e \mathbf{F} e \mathbf{G} campos vetoriais diferenciáveis. Usando regras de derivação, deduza as seguintes relações do cálculo diferencial:

- (a) $\nabla(\alpha u + \beta v) = \alpha \nabla u + \beta \nabla v$
- (b) $\nabla(uv) = v \nabla u + u \nabla v$
- (c) $\nabla(u/v) = (1/v^2)[v \nabla u - u \nabla v]$
- (d) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\mathbf{F})) = 0$
- (e) $\operatorname{div}(v \nabla u) = v \Delta u + \nabla u \cdot \nabla v$
- (f) $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{G})$

4. Se $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - z\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$, mostre que não existe um campo vetorial \mathbf{G} tal que $\operatorname{rot}(\mathbf{G}) = \mathbf{F}$.
5. Seja \mathbf{F} um *campo solenoidal*, isto é, $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, em um domínio simplesmente conexo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e seja \mathbf{G}_0 um *campo potencial* de \mathbf{F} , isto é, $\operatorname{rot}(\mathbf{G}_0) = \mathbf{F}$. Mostre que qualquer solução \mathbf{G} da equação $\operatorname{rot}(\mathbf{G}) = \mathbf{F}$ é da forma $\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \operatorname{grad} \varphi$, sendo φ um campo escalar. Embora não seja óbvio, um tal campo \mathbf{G} pode ser definido pela expressão

$$\mathbf{G}(P) = \int_0^1 [\mathbf{F}(tx, ty, tz) \times \mathbf{OP}] dt.$$

6. Verifique que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ e determine todos os campos de vetores \mathbf{G} , tais que $\operatorname{rot} \mathbf{G} = \mathbf{F}$.

- (a) $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 3z\mathbf{k}$.
- (b) $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + 2x\mathbf{k}$.
- (c) $\mathbf{F} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.
- (d) $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + 2z\mathbf{j}$.

- (e) $\mathbf{F} = (e^x - e^y)\mathbf{k}$.
- (f) $\mathbf{F} = 6y^2\mathbf{i} + 6z\mathbf{j} + 6x\mathbf{k}$.
- (g) $\mathbf{F} = 3y^2\mathbf{i} - 3x^2\mathbf{j} - (y^2 + 2x)\mathbf{k}$.
- (h) $\mathbf{F} = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$.

5.3 Caminhos Regulares

A cada t do intervalo $I = [a, b]$ da reta \mathbb{R} , associamos um vetor $\mathbf{r}(t)$ do \mathbb{R}^3 e essa associação define uma *função vetorial* \mathbf{r} , cujo domínio é o intervalo I . Escolhido um sistema de coordenadas no espaço, a função vetorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ é representada por suas coordenadas

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

sendo $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$ funções reais definidas no intervalo I , denominadas *componentes* ou *coordenadas* da função vetorial $\mathbf{r}(t)$. Reciprocamente, se x , y e z são funções reais definidas no intervalo $I = [a, b]$, então a expressão

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b,$$

define uma função vetorial no intervalo $I = [a, b]$.

Quando tratamos do movimento de uma partícula, o vetor $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ é interpretado como o vetor posição da partícula no instante t e as equações escalares (ou paramétricas)

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{e} \quad z = z(t)$$

representam uma curva γ , descrita por \mathbf{r} quando o parâmetro t varia no intervalo I . Para facilitar a linguagem, faremos referência a $\mathbf{r}(t)$ como a “curva γ de equação paramétrica $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ”.

As noções de limite, continuidade, diferenciabilidade, etc. de uma função vetorial são introduzidas por meio das funções componentes $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$. Por exemplo, \mathbf{r} será uma função vetorial diferenciável, se as coordenadas $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ o forem. O *gráfico* ou o *traço* de γ em \mathbb{R}^3 é o conjunto $\{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$ das imagens $\gamma(t)$ da função γ .

De modo similar ao conceito de função vetorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ em \mathbb{R}^3 , define-se função vetorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ em \mathbb{R}^2 , ou seja,

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j},$$

sendo $x, y : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções escalares.

Uma curva $\gamma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in I$, denomina-se *curva regular* ou *suave* ou *lisa* se as funções componentes $x, y, z : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possuem derivadas contínuas em I e o vetor velocidade

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$$

é não nulo, em cada instante t . O vetor velocidade $\mathbf{r}'(t)$ está localizado na origem e quando transladado para o ponto $\mathbf{r}(t)$, ele torna-se tangente à curva γ . Se no instante t_0 , o vetor tangente $\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t_0)$ é não nulo, a reta tangente à curva γ no ponto $P_0 = \mathbf{r}(t_0)$ é descrita pela equação vetorial

$$\mathbf{OP} = \mathbf{r}(t_0) + s\mathbf{v}, \quad s \in \mathbb{R},$$

sendo $P(x, y, z)$ um ponto genérico da reta. Na forma paramétrica, a reta tangente é descrita pelas equações

$$\begin{cases} x = x_0 + sx'(t_0) \\ y = y_0 + sy'(t_0) \\ z = z_0 + sz'(t_0), \quad s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

O plano normal à curva γ no ponto $P = \mathbf{r}(t_0)$ é governado pela equação

$$(\mathbf{PQ}) \bullet \mathbf{r}'(t_0) = 0,$$

sendo Q um ponto genérico do plano. A equação cartesiana do plano normal é, portanto,

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

Exemplo 5.13 Seja γ a curva descrita por:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t \quad \text{e} \quad z = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Encontrar as equações paramétricas da reta tangente à curva γ , no ponto correspondente a $t = \pi$.

Solução Temos que $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ e o ponto correspondente a $t = \pi$ é $P(-1, 0, 1)$. O vetor tangente no ponto P é

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}'(\pi) = (-\sin \pi)\mathbf{i} + (\cos \pi)\mathbf{j} + \mathbf{k} = -\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

e, conseqüentemente, a reta tangente é descrita pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -s \\ z = 1 + s, \quad s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

O plano normal à curva γ , no ponto P , é governado pela equação

$$(\mathbf{PQ}) \bullet \mathbf{v} = 0, \quad \text{isto é,} \quad -y + z = 1. \quad \blacksquare$$

Uma curva $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$, denomina-se *regular por partes* ou *parcialmente regular*, se suas componentes $x, y, z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas e γ é regular, exceto, possivelmente, em uma quantidade finita de pontos t_1, \dots, t_n do intervalo $[a, b]$. Graficamente uma curva parcialmente regular tem o aspecto ilustrado na Figura 5.5.

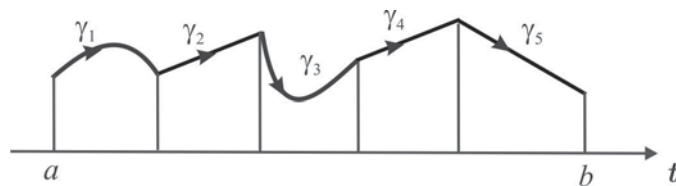


Figura 5.5: Curva parcialmente regular.

Exemplo 5.14 A curva γ descrita pelas equações paramétricas

$$x = t^2 \text{ e } y = t^3, \quad -1 \leq t \leq 2,$$

deixa de ser regular na origem $(0, 0)$, porque $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{0}$. Ela é parcialmente regular. No ponto $P(1, 1)$, que corresponde a $t = 1$, o vetor tangente é

$$\mathbf{r}'(1) = x'(1)\mathbf{i} + y'(1)\mathbf{j} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}. \quad \blacksquare$$

Com o objetivo de tornar a leitura mais dinâmica, entre as várias referências citadas, usaremos a terminologia *arco*, *caminho*, *trajetória* ou *contorno*, com o mesmo significado de *curva*.

5.3.1 Curvas Orientadas

Uma parametrização de uma curva $\gamma = \mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, ordena os pontos da curva γ , de acordo com os valores crescentes de t , do *ponto inicial* (origem) $A = \gamma(a)$ ao *ponto final* (extremidade) $B = \gamma(b)$. Neste caso, a curva γ está orientada de A para B . De forma precisa, orientar uma curva γ é fixar um campos de vetores tangentes unitários $\mathbf{u}(t)$ à curva γ .

Consideremos duas curvas γ_1 e γ_2 , com representações paramétricas

$$\mathbf{r}_1(t) = x_1(t)\mathbf{i} + y_1(t)\mathbf{j} + z_1(t)\mathbf{k}, \quad t \in [a, b] \text{ e } \mathbf{r}_2(s) = x_2(s)\mathbf{i} + y_2(s)\mathbf{j} + z_2(s)\mathbf{k}, \quad s \in [c, d],$$

respectivamente. Diremos que γ_1 é *equivalente* a γ_2 (γ_1 e γ_2 possuem o mesmo traço) quando existir uma bijeção $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$, de classe C^1 , crescente (com derivada positiva) ou decrescente (com derivada negativa) no intervalo $[a, b]$ e tal que

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(\varphi(t)), \quad t \in [a, b].$$

Uma tal bijeção recebe o nome de *mudança de parâmetros* e, se considerarmos $s = \varphi(t)$, resulta da Regra da Cadeia que

$$\gamma_1'(t) = \gamma_2'(s) \varphi'(t).$$

Portanto, γ_1 e γ_2 possuem as mesmas orientações se $\varphi'(t) > 0$ (φ for crescente) e, caso contrário, γ_1 e γ_2 possuem orientações opostas. Quando invertemos a orientação de uma curva $\gamma(t) = \mathbf{r}(t)$, obtemos uma nova curva, representada por $-\gamma$, para a qual serão consideradas as seguintes parametrizações:

$$-\gamma : \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}(a + b - t), \quad t \in [a, b], \text{ ou } -\gamma : \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}(-t), \quad t \in [-b, -a],$$

determinadas pelas mudanças de parâmetros $\varphi(t) = a + b - t$ e $\varphi(t) = -t$, respectivamente. Em ambos os casos, temos $\varphi'(t) = -1 < 0$.

Exemplo 5.15 Verifiquemos que as curvas γ_1 e γ_2 , com representações paramétricas

$$\gamma_1 : \mathbf{r}_1(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}, \quad t \in (-\pi, \pi) \text{ e } \gamma_2 : \mathbf{r}_2(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\mathbf{j}, \quad t \in \mathbb{R},$$

são equivalentes e têm mesma orientação.

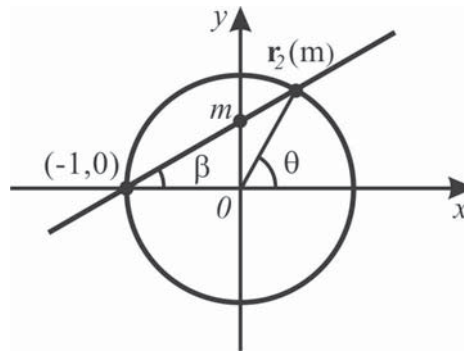


Figura 5.6: Duas parametrizações da circunferência.

Solução Elas são equivalentes, porque representam a circunferência γ de centro na origem e raio 1, excluindo o ponto $(-1, 0)$. Para verificar que γ_1 e γ_2 têm a mesma orientação, consideremos a reta que passa nos pontos distintos $(-1, 0)$ e (x_1, y_1) de γ , cuja equação cartesiana é

$$y = m(x + 1),$$

sendo $m = \tan \beta$ (confira a Figura 5.6).

Para determinarmos o ponto (x_1, y_1) substituímos na equação $x^2 + y^2 = 1$ a variável y por $m(x + 1)$ e encontramos

$$(m^2 + 1)x^2 + 2m^2x + (m^2 - 1) = 0,$$

cujas raízes são $x_0 = -1$ e $x_1 = (1 - m^2)(1 + m^2)^{-1}$. Portanto,

$$y_1 = \frac{2m}{1 + m^2} \text{ e } \mathbf{r}_2(m) = \left(\frac{1 - m^2}{1 + m^2}, \frac{2m}{1 + m^2} \right), \quad m \in \mathbb{R}.$$

Considerando que $\beta = \theta/2$ e usando identidades trigonométricas, obtemos

$$\cos \theta = \frac{1 - \tan^2(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2} \text{ e } \sin \theta = \frac{2 \tan(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)} = \frac{2m}{1 + m^2},$$

e, sendo assim, a mudança de parâmetro $\varphi : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi(t) = \tan(t/2)$, tem derivada $\varphi'(t) = \sec^2(t/2)$ positiva e $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_2(\varphi(t))$, $t \in (-\pi, \pi)$. Logo, as curvas γ_1 e γ_2 possuem as mesmas orientações. Finalmente, note que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\pi} \mathbf{r}_2(t) = (-1, 0). \quad \blacksquare$$

Diremos que $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$, é uma *curva fechada*, quando $\gamma(a) = \gamma(b)$, isto é, o ponto inicial e o ponto final coincidem; ela denomina-se *curva simples* se $\gamma(t) \neq \gamma(s)$, sejam quais forem t e s do intervalo (a, b) , com $s \neq t$. Quando γ não for uma curva simples, existem s e t no intervalo (a, b) , com $s \neq t$, e $\gamma(t) = \gamma(s)$. Neste caso, a curva γ denomina-se *laço* e o ponto $P = \gamma(t) = \gamma(s)$ é uma autointersecção do laço γ . Em alguns problemas práticos, consideramos curvas $\gamma(t)$, com o parâmetro t variando em intervalos do tipo:

$$(a, b), \quad (a, b], \quad (-\infty, b], \text{ etc.}$$

Neste caso, a curva deixa de ter origem ou extremidade ou ambos. Na Figura 5.7 ilustramos, de forma genérica, algumas curvas e suas orientações: em (a) temos um laço; em (b) temos uma curva simples e parcialmente regular; em (c) a curva γ é simples, fechada e regular.

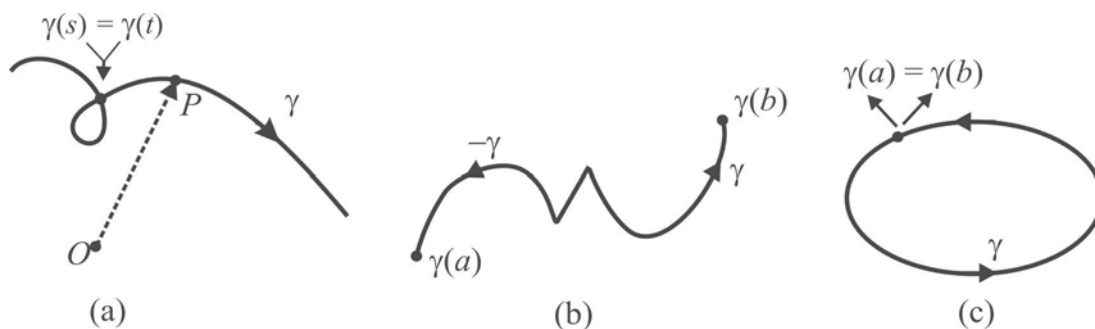


Figura 5.7: Curvas orientadas.

Exemplo 5.16 Identificar a curva γ dada pelas equações paramétricas

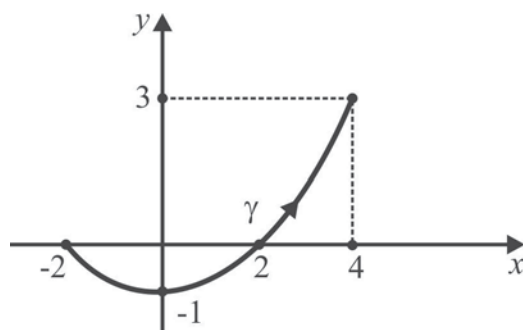
$$x = 2t \text{ e } y = t^2 - 1, \quad -1 \leq t \leq 2,$$

esboçando o gráfico e indicando sua orientação.

Solução Eliminando o parâmetro t (nem sempre é possível este método), obtemos

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 1$$

e vemos que a curva γ é um arco de parábola simétrica em relação ao eixo y , com vértice no ponto $(0, -1)$. Quando t cresce de -1 até 2 , os pontos $P(x, y)$ de γ estão ordenados da esquerda para a direita, sendo $A(-2, 0)$ a origem e $B(4, 3)$ a extremidade de γ . Na Figura 5.8 ilustramos a curva γ e sua orientação. ■

Figura 5.8: A parábola $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$.

Exemplo 5.17 (parametrizando o círculo) Um ponto se move no plano xy , de tal forma que a sua posição $P(x, y)$ no instante t é dada por

$$x = r \cos t \text{ e } y = r \sin t, \quad t \in \mathbb{R},$$

sendo $r > 0$. Descrever o movimento do ponto.

Solução Escrevendo as equações paramétricas sob a forma

$$\frac{x}{r} = \cos t \text{ e } \frac{y}{r} = \sin t,$$

obtemos

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2,$$

de onde deduzimos que o ponto $P(x, y)$ move-se sobre uma circunferência γ , com centro na origem e raio r . Quando o centro da circunferência γ é o ponto $C(a, b)$, como ilustra a Figura 5.9, podemos parametrizá-la pelas equações

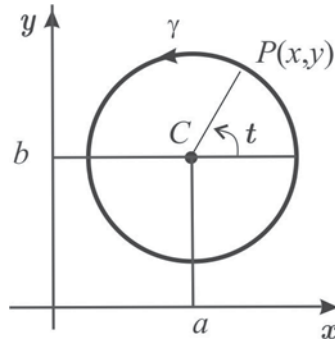


Figura 5.9: Parametrizando o círculo.

$$\gamma : \begin{cases} x = a + r \cos t \\ y = b + r \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \end{cases}$$

onde o parâmetro t representa o ângulo orientado entre o eixo x e o raio CP . ■

Exemplo 5.18 (parametrizando um segmento de reta) Seja γ o segmento de reta orientado do ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ ao ponto $B(x_B, y_B, z_B)$. Dado um ponto $P(x, y, z)$ em γ , então existe um escalar t , no intervalo $[0, 1]$, tal que $P = A + t(B - A)$ e daí resulta a parametrização natural do segmento γ

$$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \\ z = z_A + t(z_B - z_A), \quad 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Por exemplo, o segmento com origem no ponto $A(1, 1, 0)$ e extremidade no ponto $B(0, 0, 1)$ exibido na Figura 5.10, é parametrizado pelas equações $x = 1 - t$, $y = 1 - t$ e $z = t$, $0 \leq t \leq 1$. ■

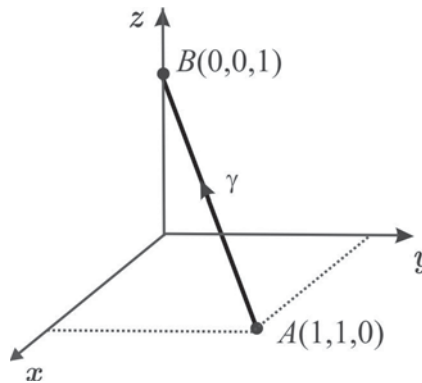


Figura 5.10: Parametrizando um segmento de reta.

Exemplo 5.19 (parametrizando a elipse) Consideremos a elipse $\gamma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, representada na Figura 5.11. Se $P(x, y)$ é um ponto sobre a elipse γ e o parâmetro t representa o ângulo orientado entre o eixo x e o raio OA , obtemos a seguinte parametrização para elipse:

$$x = OC = a \cos t \quad e \quad y = BD = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

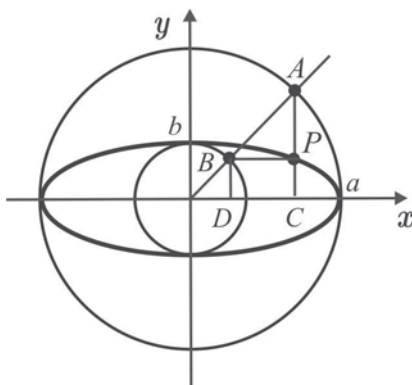


Figura 5.11: Parametrizando a elipse.

Exemplo 5.20 (parametrizando a hipocicloide) A curva γ do plano xy , descrita pela equação cartesiana $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, é conhecida pelo nome de hipocicloide. Seu gráfico está ilustrado na Figura 5.12, onde vemos tratar-se de uma curva simples, fechada e parcialmente regular. Uma parametrização para γ é motivada pela identidade trigonométrica $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, que aparece naturalmente ao considerarmos $x = a \cos^3 t$ e $y = a \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. ■

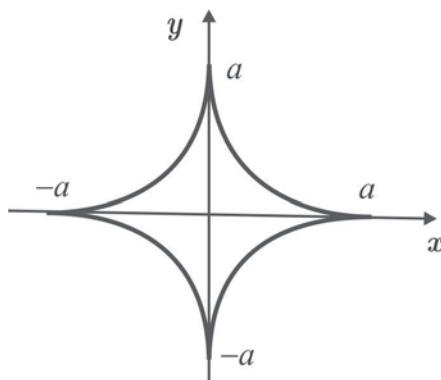


Figura 5.12: Parametrizando a hipocicloide.

Exemplo 5.21 (parametrizando a hélice) A curva γ do \mathbb{R}^3 de equações paramétricas

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

é tal que $x^2 + y^2 = a^2$, e isso nos diz que a curva γ se enrosca no cilindro circular reto $x^2 + y^2 = a^2$, à medida que t varia de 0 até 2π . O formato de γ é de uma hélice (mola), começando na origem e com extremidade no ponto $A(a, 0, 2b\pi)$. ■

Exemplo 5.22 (usando a variável x como parâmetro) Quando a curva γ é o gráfico de uma função contínua $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, a variável x pode ser usada como parâmetro e, neste caso, teremos a seguinte parametrização para a curva γ :

$$x = x \text{ e } y = f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Outra parametrização de γ é dada pelas equações

$$x = n + mt \text{ e } y = f(n + mt), \quad (a - n)/m \leq t \leq (b - n)/m \text{ e } m, n \in \mathbb{R}, \quad m \neq 0.$$

Neste caso, a mudança de parâmetro é a função $\varphi(t) = n + mt$. ■

Exemplo 5.23 (usando o ângulo polar como parâmetro) Consideremos a circunferência

$$\gamma: x^2 + y^2 - 2x = 0,$$

com centro em $C(1, 0)$ e raio $R = 1$. As coordenadas polares do ponto $P(x, y)$ de γ são $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, onde ressaltamos que a quantidade r varia com θ , de acordo com a equação $r = 2 \cos \theta$, que descreve γ . Por substituição do r , obtemos a seguinte parametrização de γ :

$$\begin{cases} x = 2 \cos^2 \theta \\ y = 2 \sin \theta \cos \theta, \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad \blacksquare$$

Finalizaremos esta seção apresentando uma maneira prática para ilustrar graficamente um campo vetorial, a partir dos vetores tangentes de suas curvas integrais. Consideremos um campo vetorial $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$, de classe C^1 , em uma região Ω do \mathbb{R}^3 . Por *curva integral do campo \mathbf{F}* entendemos uma curva γ , contida em Ω , cujo vetor tangente em cada ponto P coincide com $\mathbf{F}(P)$. Se

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in I,$$

é uma representação paramétrica para γ , a cada ponto P corresponde um escalar λ , tal que

$$d\mathbf{r} = (dx)\mathbf{i} + (dy)\mathbf{j} + (dz)\mathbf{k} = \lambda \mathbf{F}(P),$$

de onde resulta o sistema de equações diferenciais

$$\frac{dx}{L} = \frac{dy}{M} = \frac{dz}{N}, \quad (5.11)$$

que define as curvas integrais. O sistema (5.11) é equivalente a

$$\frac{dx}{dt} = L, \quad \frac{dy}{dt} = M \text{ e } \frac{dz}{dt} = N \quad (5.12)$$

e, ao resolver o sistema (5.11) ou (5.12), encontramos as curvas integrais do campo \mathbf{F} .

Exemplo 5.24 Determinar as curvas integrais do campo \mathbf{F} do Exemplo 5.2.

Solução O campo \mathbf{F} é definido em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ por

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

e as curvas integrais são as soluções do sistema

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad z = 0. \quad (5.13)$$

De (5.13), resulta que $xdx + ydy = 0$ e por integração, encontramos

$$x^2 + y^2 = \lambda,$$

sendo $\lambda \geq 0$ uma constante real. Portanto, as curvas integrais de \mathbf{F} são circunferências no plano xy de centro na origem e raio $\sqrt{\lambda}$. ■

Exemplo 5.25 Determinar a curva integral do campo vetorial $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \lambda\mathbf{k}$, λ constante, que passa no ponto $P(1, 0, 0)$.

Solução O sistema (5.11) é, neste caso,

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{\lambda},$$

de onde resulta que $x^2 + y^2 = \mu^2$, ou, na forma paramétrica,

$$x = \mu \cos t \quad \text{e} \quad y = \mu \sin t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\frac{dy}{x} = \frac{dz}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{\mu \cos t dt}{\mu \cos t} = \frac{dz}{\lambda} \Leftrightarrow dz = \lambda dt.$$

Assim, $z = \lambda t + \kappa$, κ constante real e, portanto, as curvas integrais de \mathbf{F} são descritas por

$$\mathbf{r}(t) = (\mu \cos t)\mathbf{i} + (\mu \sin t)\mathbf{j} + (\lambda t + \kappa)\mathbf{k}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.14)$$

Se considerarmos em (5.14) $t = 0$, observando que $\mathbf{r}(0) = (1, 0, 0)$, obteremos $\mu = 1$ e $\kappa = 0$ e, portanto, a curva integral é

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (\lambda t)\mathbf{k}, \quad t \in \mathbb{R},$$

que representa uma hélice circular. ■

Exercícios & Complementos

- Esboce o gráfico de cada curva dada abaixo, indicando a orientação positiva.
 - $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$
 - $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $-1 \leq t \leq 0$
 - $\mathbf{r}(t) = (1/t)\mathbf{i} + t\mathbf{j}$, $1 \leq t < \infty$
 - $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{1-t^2}\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$
 - $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (\log t)\mathbf{j}$, $1 \leq t \leq e$
 - $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
- Mostre que a curva γ definida por $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2 \sin(1/t)\mathbf{j}$, se $0 < t \leq 1$, e $\mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$ não é regular.
- Considere a curva γ_1 definida por $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $1 \leq t \leq 2$, e seja γ_2 a curva definida por $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_1(3-t)$, $1 \leq t \leq 2$. Esboce os gráficos de γ_1 e γ_2 e determine a relação entre essas duas curvas.
- Determine a reta tangente e o plano normal a cada curva no ponto indicado.

- (a) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, no ponto $P(1, 2, 1)$.
- (b) $\mathbf{r}(t) = \cos(4t)\mathbf{i} + \sin(4t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, no ponto em que $t = \pi/8$.
- (c) $\mathbf{r}(t) = \exp(3t)\mathbf{i} + \exp(-3t)\mathbf{j} + \sqrt{18}t\mathbf{k}$, no ponto em que $t = 1$.
- (d) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$, no ponto $P(1, 1, 1)$.
- (e) $\mathbf{r}(t) = (t - \cos t)\mathbf{i} + (3 + 2 \sin t)\mathbf{j} + (1 + 3 \cos t)\mathbf{k}$, no ponto em que $t = \pi/2$.

5. Considere a curva γ definida por

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, 1 \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Mostre que o ângulo entre os vetores $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}'(t)$ é constante.

6. Em cada caso, determine as curvas integrais do campo \mathbf{F} .

- (a) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.
- (b) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
- (c) $\mathbf{F} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, com a , b e c constantes reais.
- (d) $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, que passa no ponto $P(1/2, -1/2, 1)$.
- (e) $\mathbf{F} = (z - y)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (y - x)\mathbf{k}$.

5.4 Calculando Integral de Linha

5.4.1 Integrando um Campo Vetorial

O conceito de integral de linha, como limite de somas, segue o mesmo roteiro da integral dupla e será apresentado por etapas. Seja $L : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar contínuo em uma região Ω , contendo uma curva orientada γ , simples e regular, de equações paramétricas

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{e} \quad z = z(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Inicialmente vamos definir a integral de linha do campo L ao longo da curva γ , na direção x .

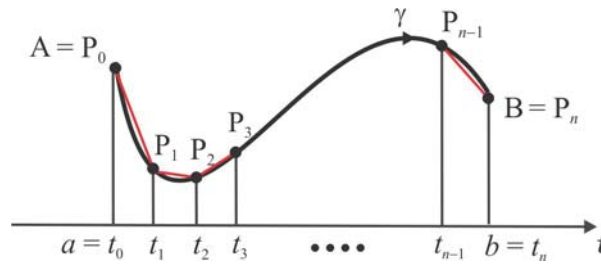
■ Etapa 1: Particionando o intervalo $[a, b]$

Particionamos o intervalo $[a, b]$, escolhendo n segmentos de comprimentos iguais a Δt

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b, \quad \text{sendo} \quad \Delta t = \frac{b-a}{n}.$$

Temos que $t_i = t_{i-1} + \Delta t$, $i = 1, \dots, n$, e quando n torna-se arbitrariamente grande ($n \rightarrow \infty$), então $\Delta t \rightarrow 0$. Esta partição do intervalo $[a, b]$ determina, na curva γ , os pontos

$$P_i = \gamma(t_i) = (x(t_i), y(t_i), z(t_i)), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Figura 5.13: Partição da curva γ .

e a curva γ é aproximada pela poligonal constituída pelos n segmentos retilíneos $P_0P_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}P_n$, como sugere a Figura 5.13.

■ Etapa 2: Construindo as Somas de Riemann

Em cada segmento $P_{i-1}P_i$ da poligonal que aproxima γ , escolhemos um ponto $Q_i = \gamma(t_i^*)$ e formamos a soma de Riemann de L

$$S_n = \sum_{i=1}^n L(Q_i) \Delta x,$$

sendo $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$.

■ Etapa 3: Definindo a Integral de Linha

A *integral de linha* de L sobre γ , na direção x , é definida por

$$\int_{\gamma} L(x, y, z) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n L(Q_i) \Delta x. \quad (5.15)$$

Como consequência do Teorema do Valor Médio, para cada $i = 1, \dots, n$, existe θ_i entre t_{i-1} e t_i , tal que

$$\Delta x = x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\theta_i) \Delta t$$

e de (5.15) resulta que

$$\int_{\gamma} L(x, y, z) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n L(x(t_i^*), y(t_i^*), z(t_i^*)) x'(\theta_i) \Delta t = \int_a^b L(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt.$$

De modo similar, encontramos as seguintes regras para o cálculo das integrais de linha sobre γ , nas direções y e z :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} M(x, y, z) dy &= \int_a^b M(x(t), y(t), z(t)) y'(t) dt && (\text{direção } y) \\ \int_{\gamma} N(x, y, z) dz &= \int_a^b N(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt && (\text{direção } z) \end{aligned}$$

No caso em que γ é uma curva simples e regular do plano xy , parametrizada pelas equações $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, temos

$$\int_{\gamma} L(x, y) dx = \int_a^b L(x(t), y(t)) x'(t) dt \quad \text{e} \quad \int_{\gamma} M(x, y) dy = \int_a^b M(x(t), y(t)) y'(t) dt.$$

Exemplo 5.26 Calcular as integrais de linha

$$\int_{\gamma} xy^2 dx \quad \text{e} \quad \int_{\gamma} xy^2 dy,$$

sendo γ o arco da parábola $y = x^2$, da origem ao ponto $A(2, 4)$.

Solução Inicialmente, vamos parametrizar a curva γ pelas equações

$$x = t \text{ e } y = t^2, \quad 0 \leq t \leq 2,$$

e ressaltar que a variável x poderia ter sido usada como parâmetro, no lugar do t . Com as substituições $x = t$, $y = t^2$, $dx = dt$ e $dy = 2tdt$, obtemos

$$\int_{\gamma} xy^2 dx = \int_0^2 t^5 dt = \frac{32}{3} \quad \text{e} \quad \int_{\gamma} xy^2 dy = \int_0^2 2t^6 dt = \frac{256}{7}. \quad \blacksquare$$

Em uma situação mais geral, as integrais de linha aparecem sob as formas equivalentes

$$\int_{\gamma} Ldx + Mdy + Ndz \quad \text{ou} \quad \int_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r},$$

sendo a forma diferencial $Ldx + Mdy + Ndz$ contínua em uma região compacta Ω do \mathbb{R}^3 , contendo a curva γ no seu interior. Neste caso, a integral de linha é a soma

$$\int_{\gamma} Ldx + \int_{\gamma} Mdy + \int_{\gamma} Ndz,$$

e o cálculo se reduz a

$$\int_{\gamma} Ldx + Mdy + Ndz = \int_a^b [L(\mathbf{r}(t))x'(t) + M(\mathbf{r}(t))y'(t) + N(\mathbf{r}(t))z'(t)] dt,$$

onde $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ representa uma parametrização da curva γ . Quando desejamos enfatizar as extremidades $A = \mathbf{r}(a)$ e $B = \mathbf{r}(b)$ da curva γ , escrevemos

$$\int_A^B Ldx + Mdy + Ndz.$$

Proposição 5.27 *Seja $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial contínuo em uma região compacta $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, e seja γ uma curva orientada e parcialmente regular, contida no interior de Ω .*

1. *Se γ^* é uma reparametrização de γ , mantendo a orientação, então*

$$\int_{\gamma^*} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}.$$

2. *Se $-\gamma$ representa a curva γ , com a orientação invertida, então*

$$\int_{-\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = - \int_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}.$$

Demonstração Se $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}_1(\tau)$ são representações paramétricas de γ e γ^* , respectivamente, existe uma mudança de parâmetro $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$, com derivada $g'(\tau)$ positiva, tal que $\mathbf{r}_1(\tau) = \mathbf{r}(g(\tau))$. Temos que $g(\tau)$ é crescente, $g(c) = a$, $g(d) = b$ e, efetuando a substituição $t = g(\tau)$, encontramos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t) dt = \int_c^d \mathbf{F}(\mathbf{r}(g(\tau))) \bullet \mathbf{r}'(g(\tau)) g'(\tau) d\tau \\ &= \int_c^d \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(\tau)) \bullet \mathbf{r}'_1(\tau) d\tau = \int_{\gamma^*} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Isso prova (1). Para demonstrar (2), consideramos a mudança de parâmetros $t = a + b - \tau$, que inverte a orientação, e obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{-\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(\tau)) \bullet \mathbf{r}'_1(\tau) d\tau = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(a + b - \tau)) \bullet [-\mathbf{r}'(a + b - \tau)] d\tau \\ &= - \int_b^a \mathbf{F}(\mathbf{r}(u)) \bullet \mathbf{r}'(u) (-du) = - \int_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}, \end{aligned}$$

onde $\mathbf{r}_1(\tau) = \mathbf{r}(a + b - \tau)$, $a \leq \tau \leq b$. ■

Exemplo 5.28 Calcular a integral de linha

$$\int_{\gamma} (x + y)dx + (y - x)dy,$$

sendo γ o segmento de reta de origem $A(1, 1)$ e extremidade $B(4, 2)$.

Solução No Exemplo 5.18, aprendemos como parametrizar um segmento de reta e, neste caso, temos

$$x = 1 + 3t \text{ e } y = 1 + t, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

e com as substituições $x = 1 + 3t$, $y = 1 + t$, $dx = 3dt$ e $dy = dt$, obtemos

$$\int_{\gamma} (x + y)dx + (y - x)dy = \int_0^1 [(2 + 4t)3 + (-2t)]dt = \int_0^1 (6 + 10t)dt = 11. \quad \blacksquare$$

Exemplo 5.29 Calcular a integral de linha da forma diferencial $x^2ydx + zdy + xydz$, ao longo do arco da parábola $y = x^2$, $z = 1$, do ponto $A(-1, 1, 1)$ ao ponto $B(1, 1, 1)$.

Solução Usando a variável x como parâmetro e observando que $dz = 0$, já que $z = 1$ ao longo de γ , encontramos

$$\int_A^B x^2ydx + zdy + xydz = \int_{-1}^1 (x^4 + 2x) dx = 2/5. \quad \blacksquare$$

Exemplo 5.30 Calcular a integral do campo $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} - xy^2\mathbf{j}$, ao longo do triângulo de vértices $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ e $B(1, 1)$.

Solução Adotando a orientação positiva (anti-horária), vemos que o caminho γ de integração é parcialmente regular e composto dos segmentos γ_1 , γ_2 e γ_3 , como na Figura 5.14.

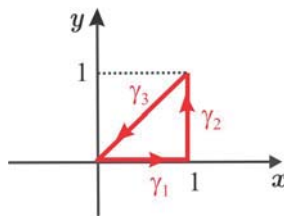


Figura 5.14: Curva γ do Exemplo 5.30

Decorre da propriedade aditiva da integral da linha que

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} + \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} + \int_{\gamma_3} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} \quad (5.16)$$

e cada segmento, que figura nas integrais do lado direito de (5.16), é parametrizado imitando o que foi feito no Exemplo 5.18. Temos:

$$\begin{aligned}\text{segmento } \gamma_1 : \quad & x = t, \quad y = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \\ \text{segmento } \gamma_2 : \quad & x = 1, \quad y = t, \quad 0 \leq t \leq 1, \\ \text{segmento } \gamma_3 : \quad & x = t, \quad y = t, \quad 0 \leq t \leq 1,\end{aligned}$$

e observando as orientações, encontramos:

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} xydx - xy^2dy = \int_0^1 0dt = 0. \quad (y = 0, \quad dy = 0)$$

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} xydx - xy^2dy = - \int_0^1 (-t^2) dt = \frac{1}{3}. \quad (x = 1, \quad dx = 0)$$

$$\int_{\gamma_3} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\gamma_3} xydx - xy^2dy = - \int_0^1 (t^2 - t^3) dt = -\frac{1}{3} + \frac{1}{4}. \quad (x = y = t, \quad dx = dy = dt)$$

Logo,

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}. \quad \blacksquare$$

5.4.2 Integrando um Campo Escalar

Se representarmos por ds o comprimento do arco $\widehat{P_{i-1}P_i}$ da curva γ , a integral de linha de f sobre γ , em relação ao comprimento de arco s , é definida por

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(Q_i) ds.$$

Como

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = |\mathbf{r}'(t)| dt,$$

temos que

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt$$

e se $f(x, y, z) \equiv 1$, a integral de linha de f sobre γ coincide com o comprimento da curva γ , isto é,

$$L(\gamma) = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

A função *comprimento de arco* $s(t)$ sobre γ é dada por

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)| du$$

e mede o comprimento do arco γ , de $A = \mathbf{r}(a)$ até $P = \mathbf{r}(t)$. Assim, $s(a) = 0$ e $s(b) = L(\gamma)$.

Quando γ for uma curva fechada, a integral de linha sobre γ será indicada por

$$\oint_{\gamma} f(x, y, z) ds.$$

Uma curva γ , orientada e regular, descrita pelas equações paramétricas

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{e} \quad z = z(t), \quad a \leq t \leq b,$$

pode ser parametrizada usando como parâmetro o comprimento de arco s . Para isso, consideramos $t = g(s)$, $0 \leq s \leq L$, a inversa da função comprimento de arco $s(t)$, $a \leq t \leq b$, e obtemos

$$x = x(g(s)), \quad y = y(g(s)) \quad \text{e} \quad z = z(g(s)), \quad 0 \leq s \leq L,$$

que é a parametrização de γ com respeito ao comprimento de arco s . Como $|\mathbf{r}'(t)| > 0$, decorre do Teorema da Função Inversa que

$$g'(s) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} > 0$$

e se fizermos $\mathbf{q}(s) = \mathbf{r}(g(s))$, teremos

$$|\mathbf{q}'(s)| = |g'(s)| |\mathbf{r}'(t)| = 1,$$

isto é, $\mathbf{q}'(s)$ é um vetor unitário colinear com o vetor velocidade $\mathbf{r}'(t)$. Diremos que a curva γ está parametrizada pelo comprimento de arco s , quando $|\mathbf{q}'(s)| = 1$, para todo $s \in [0, L]$. Finalmente, observamos que

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_0^L f(\mathbf{q}(s)) ds.$$

Exemplo 5.31 Seja γ a semicircunferência $x^2 + y^2 = 9$, $y \geq 0$. Parametrizar γ pelo comprimento do arco e calcular a integral de linha

$$\int_{\gamma} (x + 2y) ds.$$

Solução A parametrização natural para γ é

$$x = 3 \cos t \quad \text{e} \quad y = 3 \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

e o comprimento do arco é

$$s(t) = \int_0^t |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau = 3t.$$

Invertendo a função $s = t$, encontramos $t = g(s) = s/3$, $s \in [0, 3\pi]$ e a parametrização de γ pelo comprimento do arco é

$$x = x(s) = 3 \cos(s/3) \quad \text{e} \quad y = y(s) = 3 \sin(s/3), \quad 0 \leq s \leq 3\pi.$$

Com as substituições $x = x(s)$ e $y = y(s)$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (x + 2y) ds &= \int_0^{3\pi} [3 \cos(s/3) + 6 \sin(s/3)] ds \\ &= [9 \sin(s/3) - 18 \cos(s/3)] \Big|_0^{3\pi} = 36. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 5.32 Calcular $\int_{\gamma} (x^2 + y^2 + z) ds$, sendo γ a hélice do Exemplo 5.21.

Solução O cálculo da integral de linha pode ser feito diretamente, não sendo necessário reparametrizar a curva pelo comprimento do arco. De fato, para a hélice do Exemplo 5.21, temos

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} dt = \sqrt{2} dt$$

e, portanto,

$$\int_{\gamma} (x^2 + y^2 + z) ds = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} [(\cos s)^2 + (\sin s)^2 + t^2] dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 + t^2) dt = \sqrt{2} \left(2\pi + \frac{8}{3}\pi^3 \right). \quad \blacksquare$$

Proposição 5.33 *Sejam $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ campos escalares contínuos em uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, contendo uma curva orientada, parcialmente regular γ no seu interior, e seja k uma constante real.*

1. $\int_{\gamma} [kf(x, y, z) + g(x, y, z)] ds = k \int_{\gamma} f(x, y, z) ds + \int_{\gamma} g(x, y, z) ds.$
2. Se $\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$, então $\int_{\gamma} f(x, y, z) ds = \int_{\gamma_1} f(x, y, z) ds + \dots + \int_{\gamma_n} f(x, y, z) ds.$
3. Se $k > 0$ é tal que $|f(x, y, z)| \leq k$ sobre γ , então $\left| \int_{\gamma} f(x, y, z) ds \right| \leq kL(\gamma).$ \blacksquare

Observação 5.34 *O valor da integral de linha $\int_{\gamma} f(x, y, z) ds$ não é alterado quando a curva γ tiver sua orientação invertida, isto é,*

$$\int_{-\gamma} f(x, y, z) ds = \int_{\gamma} f(x, y, z) ds.$$

De fato, considerando a mudança de parâmetros $t = a + b - \tau$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(x, y, z) ds &= \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt = - \int_b^a f(\mathbf{r}(a + b - \tau)) |\mathbf{r}'(a + b - \tau)| d\tau \\ &= \int_a^b f(\mathbf{r}_1(\tau)) |\mathbf{r}'_1(\tau)| d\tau = \int_{-\gamma} f(x, y, z) ds, \end{aligned}$$

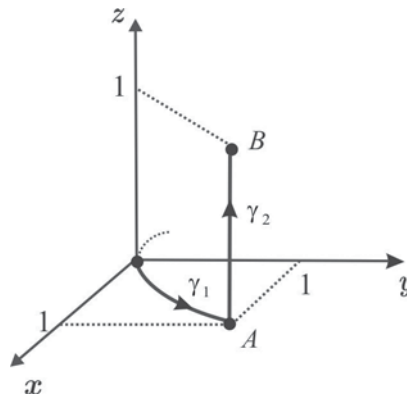
onde $\mathbf{r}_1(\tau) = \mathbf{r}(a + b - \tau)$, $a \leq \tau \leq b$, é uma parametrização de $-\gamma$. Recordemos que tal procedimento faz com que a integral $\int_{\gamma} F \bullet dr$ mude de sinal, conforme vimos na Proposição 5.27.

Exemplo 5.35 *Integrar a função $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} - z^2$, sobre o caminho $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, sendo*

$$\gamma_1 : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \text{e} \quad \gamma_2 : \mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Solução A curva γ_1 é a porção da parábola $y = x^2$, $z = 0$, da origem ao ponto $A(1, 1, 0)$, enquanto γ_2 é o segmento de reta paralelo ao eixo z , do ponto $A(1, 1, 0)$ até o ponto $B(1, 1, 1)$, como ilustrado na Figura 5.15. Sobre o caminho γ_1 temos $ds = \sqrt{1 + 4t^2} dt$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f(x, y, z) ds &= \int_0^1 (t + t) \sqrt{1 + 4t^2} dt = \frac{1}{4} \int_0^1 8t \sqrt{1 + 4t^2} dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^5 \sqrt{u} du = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \left[u^{3/2} \right]_1^5 = \frac{1}{6} (5^{3/2} - 1). \end{aligned}$$

Figura 5.15: Curva γ do Exemplo 5.35

Sobre o caminho γ_2 temos $ds = dt$ e, portanto,

$$\int_{\gamma_2} f(x, y, z) ds = \int_0^1 (2 - t^2) dt = \left[2t - \frac{1}{3}t^3 \right]_0^1 = 5/3.$$

Logo,

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) ds = \int_{\gamma_1} f(x, y, z) ds + \int_{\gamma_2} f(x, y, z) ds = \frac{1}{6} \left(5^{3/2} + 9 \right). \quad \blacksquare$$

5.4.3 Considerações Físicas

Além da massa de um arame (fio físico delgado), a integral de linha, com respeito ao comprimento de arco, pode ser usada no cálculo de outros entes físicos como momento de inércia, coordenadas do centro de massa, intensidade do campo elétrico, etc. Por exemplo, se m representa a massa de um arame γ de densidade linear $\sigma(x, y, z)$, então $dm = \sigma(x, y, z)ds$ representa a massa elementar da porção ds do arame, de modo que a massa total do arame é

$$m = \int_{\gamma} dm = \int_{\gamma} \sigma(x, y, z) ds.$$

As coordenadas \bar{x} , \bar{y} e \bar{z} do centro de massa do arame são calculadas pelas fórmulas

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \int_{\gamma} x dm, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \int_{\gamma} y dm \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \int_{\gamma} z dm,$$

onde os integrandos $x dm$, $y dm$ e $z dm$ são interpretados como momento da massa dm em relação aos planos yz , xz e xy , respectivamente. O momento de inércia em relação a um eixo L é dado por

$$I_L = \int_{\gamma} \delta^2 dm,$$

onde $\delta = \delta(x, y, z)$ representa a distância de um ponto $P(x, y, z)$ do arame ao eixo de rotação L . Em relação aos eixos coordenados, temos os momentos de inércia:

$$I_x = \int_{\gamma} (y^2 + z^2) dm, \quad I_y = \int_{\gamma} (x^2 + z^2) dm \quad \text{e} \quad I_z = \int_{\gamma} (x^2 + y^2) dm.$$

Exemplo 5.36 Determinar a massa de um fio de densidade $\sigma(x, y, z) = kz$, com formato da hélice γ dada pelas equações paramétricas

$$\gamma : x = 3 \cos t, \quad y = 3 \sin t \quad \text{e} \quad z = 4t, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Solução Temos

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = 5dt$$

e, portanto, $dm = \sigma(x, y, z)ds = 20ktdt$. Logo,

$$m = \int_{\gamma} dm = \int_0^{\pi} 20ktdt = 10k\pi^2. \quad \blacksquare$$

Seja γ uma curva regular e orientada, com representação paramétrica

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b,$$

e consideremos um campo vetorial $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$, contínuo em uma região compacta Ω , contendo a curva γ no seu interior. O vetor tangente unitário à curva γ no ponto $P = \mathbf{r}(t)$ é

$$\mathbf{u}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

e a *componente tangencial* de \mathbf{F} em P , ou seja, a componente de \mathbf{F} na direção do vetor unitário $\mathbf{u}(t)$, na direção crescente de t , é dada por

$$\mathbf{F} \bullet \mathbf{T} = |\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))| \cos \theta = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{u}(t),$$

sendo θ o ângulo entre os vetores $\mathbf{u}(t)$ e \mathbf{F} . Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T}) ds &= \int_a^b [\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{u}(t)] |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right] |\mathbf{r}'(t)| dt \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t) dt = \int_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} \end{aligned}$$

e daí resultam as representações equivalentes para a integral de linha:

$$\int_{\gamma} Ldx + Mdy + Ndz = \int_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\gamma} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T}) ds.$$

Exercícios & Complementos.

1. Calcule o comprimento da hélice $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

2. Calcule as seguintes integrais de linha ao longo da curva indicada:

(a) $\int_{\gamma} 2ydx - 3xdy$, sendo γ a curva definida por $x = 1 - t$ e $y = 5 - t$, $0 \leq t \leq 1$.

(b) $\int_{(-1,1)}^{(1,1)} xydx - y^2dy$, ao longo da parábola $y = x^2$.

(c) $\int_{(3,-1)}^{(4,-2)} \frac{y}{x} dx - \frac{x}{y} dy$, ao longo da reta $y = 2 - x$.

(d) $\oint_{\gamma} ydx + 2xdy$, com γ a fronteira da região

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } -y \leq x \leq y, \text{ com } y \geq 0\}.$$

(e) $\int_{\gamma} xyds$, γ é a curva $x = t$ e $y = t$, $0 \leq t \leq 1$.

(f) $\int_{\gamma} x^2ds$, γ é a curva $x = \cos 2t$ e $y = \sin 2t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

- (g) $\oint_{\gamma} ydx + 2xdy$, γ é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$.
- (h) $\oint_{\gamma} (x^2 - y^2) ds$, γ é o círculo $x^2 + y^2 = 4$.
- (i) $\int_{(0,-1)}^{(0,1)} y^2 dx + x^2 dy$, γ é o semicírculo $x = \sqrt{1 - y^2}$.
- (j) $\int_{(1,0)}^{(0,1)} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$, γ é a curva $x = \cos^3 t$ e $y = \sin^3 t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
- (k) $\oint_{\gamma} (ax + by) dx + (\alpha x + \beta y) dy$, γ é o círculo $x^2 + y^2 = 4$.
- (l) $\oint_{\gamma} xy(3ydx + 7xdy)$, γ é a elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$.
- (m) $\oint_{\gamma} xydx + (y^2 - x^2) dy$, γ é definida pelos arcos $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$.
- (n) $\int_{\gamma} (x + y + z) dx + (x - 2y + 3z) dy + (2x + y - z) dz$, γ é a curva que liga a origem ao ponto $A = (2, 3, 4)$, através de três segmentos retilíneos: o primeiro uma porção do eixo x , o segundo paralelo ao eixo y e o terceiro paralelo ao eixo z .

3. Nos seguintes casos, calcule $\int_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$.

- (a) $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 3xy^2\mathbf{j}$, γ é o círculo $x^2 + y^2 = 9$.
- (b) $\mathbf{F} = (3x^2 - 8y^2)\mathbf{i} + (4y - 6xy)\mathbf{j}$, γ é a fronteira da região

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } x + y \leq 2\}.$$

- (c) $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} - y\mathbf{j} + \mathbf{k}$, γ é o segmento de reta ligando a origem ao ponto $A = (1, 1, 1)$.
- (d) $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$, γ é o arco da parábola $x = t$, $y = t^2$ e $z = 0$, $1 \leq t \leq 2$.
- (e) $\mathbf{F} = z^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{k}$, γ é o segmento de $(1, 0, 1)$ a $(2, 0, 1)$, seguido do segmento de $(2, 0, 1)$ a $(2, 0, 4)$.

4. Calcule

$$\int_{\gamma} \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2},$$

ao longo da curva γ consistindo do arco da parábola $y = x^2 - 1$, $-1 \leq x \leq 2$, seguido do segmento de reta que une os pontos $(2, 3)$ e $(-1, 0)$.

5. Calcular a integral da forma $xzdx + xdy - yzdz$, ao longo do caminho γ descrito na Figura 5.16, consistindo de um quarto de circunferência e de dois segmentos retilíneos.

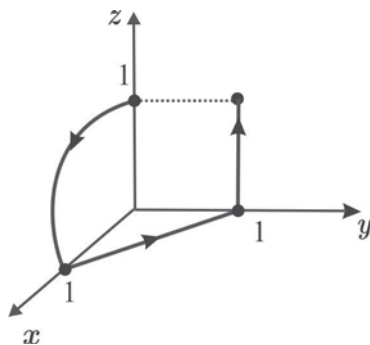


Figura 5.16: Caminho para o exercício 5

6. Seja γ a porção da curva do primeiro octante, que corresponde à interseção do plano $x = y$ com o cilindro $2y^2 + z^2 = 1$, percorrida do ponto $A(0, 0, 1)$ ao ponto $B(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$. Calcule

$$\int_{\gamma} x \left(\frac{1 - y^2}{y^2 + z^2} \right)^{1/2} dx$$

7. Sejam $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ e θ é o ângulo entre o campo \mathbf{F} e $d\mathbf{r}$. Mostre que

$$\int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{r} = \int_{\gamma} \sqrt{L^2 + M^2 + N^2} \cos \theta ds.$$

8. Se γ_1 e γ_2 são duas curvas equivalentes e $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um campo vetorial contínuo em uma região Ω contendo às curvas γ_1 e γ_2 , mostre que

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \pm \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}.$$

5.5 Independência do Caminho

Iniciaremos esta seção mostrando, através de um exemplo simples, que o valor da integral de linha pode mudar, ao longo de caminhos distintos ligando dois pontos. Sejam γ_1 , γ_2 e γ os seguintes caminhos ligando os pontos $A(1, 1)$ e $B(2, 4)$

$$\begin{aligned} \gamma_1 : x = 1 + t, \quad y = 1 + 3t, \quad 0 \leq t \leq 1 & \quad (\text{segmento de reta}) \\ \gamma_2 : x = t, \quad y = t^2, \quad 1 \leq t \leq 2 & \quad (\text{parábola}) \end{aligned}$$

e γ consiste do segmento horizontal, do ponto $A(1, 1)$ ao ponto $C(2, 1)$, seguido do segmento vertical do ponto $C(2, 1)$ ao ponto $B(2, 4)$, como mostra a Figura 5.17.

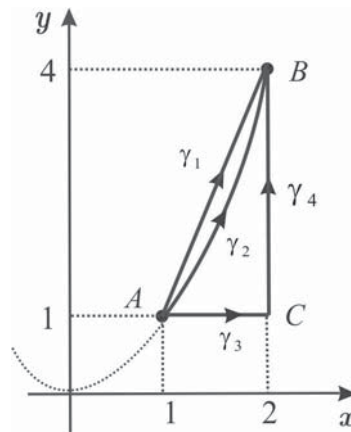


Figura 5.17: Caminhos ligando os pontos A e B .

1. Ao longo de γ_1 , temos

$$\int_{\gamma_1} ydx + 2xdy = \int_0^1 [(1 + 3t) + 2(1 + t)3]dt = \int_0^1 (7 + 9t)dt = \frac{23}{2}.$$

2. Sobre γ_2 , fazemos as substituições $x = t$, $y = t^2$, $dx = dt$ e $dy = 2t dt$ e obtemos

$$\int_{\gamma_2} y dx + 2x dy = \int_1^2 [t^2 + (2t)2t] dt = \int_1^2 5t^2 dt = \frac{35}{3}.$$

3. A poligonal γ é composta dos segmentos γ_3 e γ_4 e observando que $y = 1$, sobre γ_3 , e $x = 2$, sobre γ_4 , obtemos

$$\int_{\gamma} y dx + 2x dy = \int_{\gamma_3} y dx + 2x dy + \int_{\gamma_4} y dx + 2x dy = \int_1^2 dx + \int_1^4 4 dy = 13.$$

Nesta seção estabeleceremos condições necessárias e suficientes para que a integral de linha $\int_A^B \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ não dependa do caminho γ que liga os pontos A e B . Se $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ é um campo vetorial contínuo em uma região $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, diremos que a integral de linha $\int_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ (ou $\int_{\gamma} Ldx + Mdy + Ndz$) é *independente do caminho* em Ω se, para quaisquer dois pontos A e B em Ω , o valor da integral linha $\int_A^B \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ é o mesmo, seja qual for o caminho parcialmente regular γ , contido em Ω , ligando os pontos A e B .

Teorema 5.37 (1º Teorema Fundamental) *Se $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas no domínio (aberto e conexo) Ω do \mathbb{R}^3 , então*

$$\int_A^B \nabla \varphi \bullet d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A),$$

sejam quais forem os pontos A e B em Ω .

Demonstração Seja $\gamma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, um caminho regular em Ω ligando os pontos A e B . Da Regra da Cadeia, veja (2.22) no Capítulo 2, sabemos que

$$\frac{d}{dt} [\varphi(\mathbf{r}(t))] = \nabla \varphi(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t),$$

de onde resulta

$$\nabla \varphi \bullet d\mathbf{r} = \frac{d}{dt} [\varphi(\mathbf{r}(t))] dt,$$

e do Teorema Fundamental do Cálculo para função de uma variável, obtemos:

$$\int_A^B \nabla \varphi \bullet d\mathbf{r} = \int_a^b \frac{d}{dt} [\varphi(\mathbf{r}(t))] dt = \varphi(\mathbf{r}(b)) - \varphi(\mathbf{r}(a)) = \varphi(B) - \varphi(A). \quad \blacksquare$$

Corolário 5.38 *Se $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ é um campo vetorial contínuo e conservativo, em um domínio (aberto e conexo) Ω do \mathbb{R}^3 , então a integral de linha*

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

é independente do caminho.

Demonstração Sendo \mathbf{F} contínuo e conservativo, existe um campo escalar φ , o potencial de \mathbf{F} , de classe C^1 , tal que $\mathbf{F} = \nabla \varphi$ e, portanto,

$$\int_A^B \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_A^B \nabla \varphi \bullet d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A).$$

Isso mostra que a integral de linha do campo \mathbf{F} só depende dos pontos A e B , e não do caminho γ ligando esses pontos. \blacksquare

Teorema 5.39 (2º Teorema Fundamental) Se $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ é um campo vetorial contínuo no domínio (aberto e conexo) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, e a integral de linha

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

é independente do caminho, então o campo \mathbf{F} é conservativo.

Demonstração A partir de um ponto A fixado no domínio Ω , definimos $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi(X) = \int_A^X \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_A^X Ldx + Mdy + Ndz,$$

onde a integral de linha é calculada ao longo de uma poligonal ligando o ponto A ao ponto $X(x, y, z)$. A escolha do caminho é arbitrária, tendo em vista que a integral de linha não depende do caminho. Consideremos h suficientemente pequeno, de modo que $X + H = (x + h, y, z)$ esteja em Ω , e seja γ o segmento de reta $\mathbf{r}(t) = (x + t)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq h$, que liga o ponto X ao ponto $X + H$. Temos que $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i}$ e, usando a propriedade aditiva da integral de linha, obtemos

$$\frac{\varphi(X + H) - \varphi(X)}{h} = \frac{1}{h} \int_X^{X+H} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \frac{1}{h} \int_0^h \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t) dt = \frac{1}{h} \int_0^h L(x + t, y, z) dt.$$

Como a função $t \mapsto L(x + t, y, z)$ é contínua em alguma vizinhança de $t = 0$, a função

$$g(\tau) = \int_0^\tau L(x + t, y, z) dt$$

é diferenciável em uma vizinhança de $\tau = 0$, $g(0) = 0$ e $g'(0) = L(x, y, z)$, como consequência do Teorema Fundamental do Cálculo de uma variável. Logo,

$$\varphi_x(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(X + H) - \varphi(X)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0 + h) - g(0)}{h} = g'(0) = L(x, y, z).$$

De modo similar, obtém-se que $\varphi_y(x, y, z) = M(x, y, z)$ e $\varphi_z(x, y, z) = N(x, y, z)$. Assim, $\mathbf{F} = \nabla\varphi$ e com isso mostramos que \mathbf{F} é conservativo. ■

Observação 5.40 Combinando os dois Teoremas Fundamentais para a integral de linha, vemos que um campo vetorial $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$, contínuo em um domínio (aberto e conexo) Ω do \mathbb{R}^3 , é conservativo se, e somente se, a integral de linha

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

é independente do caminho. Neste caso, se φ é um potencial do campo \mathbf{F} , isto é, $\mathbf{F} = \nabla\varphi$, então

$$\int_A^B \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_A^B \nabla\varphi \bullet d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A),$$

para quaisquer dois pontos A e B em Ω . Em particular, se γ é uma curva fechada, parcialmente regular e \mathbf{F} é contínuo e conservativo, então

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = 0. \quad \blacksquare$$

Exemplo 5.41 Mostrar que o campo bidimensional $\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$ não é conservativo no domínio $\Omega : 0 < x^2 + y^2 < 1$ do \mathbb{R}^2 .

Solução Consideremos em Ω a circunferência $\gamma : x^2 + y^2 = \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, parametrizada por $x = \varepsilon \cos t$, $y = \varepsilon \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Então

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \oint_{\gamma} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^{2\pi} [(-\varepsilon \sin t)(-\varepsilon \sin t) + (\varepsilon \cos t)(\varepsilon \cos t)] dt \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^{2\pi} [\varepsilon^2 (\sin t)^2 + \varepsilon^2 (\cos t)^2] dt = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^{2\pi} \varepsilon^2 dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Se fosse \mathbf{F} um campo conservativo, a integral de linha de \mathbf{F} sobre a curva fechada γ seria 0. ■

Exemplo 5.42 Seja γ a curva descrita por

$$\mathbf{r}(t) = \exp(-t)\mathbf{i} + (1 + 2\sin t)\mathbf{j} + (t - \cos t)\mathbf{k}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determinar a derivada direcional de $\varphi(x, y, z) = x^2yz^3$, na direção da curva γ , no ponto P correspondente a $t = 0$.

Solução A derivada direcional de φ no ponto $P = \mathbf{r}(t)$, na direção da curva γ , é, por definição, a derivada direcional de φ no ponto $P = \mathbf{r}(t)$, na direção do vetor unitário

$$\mathbf{u}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|},$$

tangente à curva γ em P . O ponto P correspondente a $t = 0$ é $\mathbf{r}(0) = (1, 1, -1)$ e o vetor tangente unitário à curva γ no ponto P é

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}'(0)}{|\mathbf{r}'(0)|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

Como $\nabla\varphi = (2xyz^3)\mathbf{i} + (x^2z^3)\mathbf{j} + (3x^2yz^2)\mathbf{k}$, obtemos $\nabla\varphi(\mathbf{r}(0)) = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ e, portanto,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{u}}(P) = \nabla\varphi(P) \bullet \mathbf{u} = \frac{\sqrt{6}}{2}. \quad \blacksquare$$

Exemplo 5.43 Seja k uma constante real e consideremos o campo vetorial $\mathbf{F} = \frac{k\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$, sendo $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$ o vetor posição do ponto P . Calcular a integral de linha

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r},$$

ao longo do segmento γ , que vai do ponto $A(1, 1, 1)$ ao ponto $B(1, 2, -1)$.

Solução Vimos, no Exemplo ??, que $\mathbf{F} = \nabla\varphi$, onde a função $\varphi : \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $\varphi(x, y, z) = -k/|\mathbf{r}|$. Portanto, pela Observação 5.40,

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A) = -k \left(\frac{1}{|\mathbf{OB}|} - \frac{1}{|\mathbf{OA}|} \right) = -k \left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Observamos que se os pontos A e B estão sobre uma circunferência de centro na origem e raio R , então $|\mathbf{OA}| = |\mathbf{OB}| = R$ e, sendo assim,

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = -k(1/R - 1/R) = 0. \quad \blacksquare$$

Teorema 5.44 Para que um campo vetorial contínuo $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ seja conservativo em um domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, é necessário e suficiente que

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = 0,$$

ao longo de qualquer curva simples, fechada e parcialmente regular γ , contida em Ω .

Demonstração Suponhamos que \mathbf{F} seja conservativo e seja γ uma curva fechada, simples e parcialmente regular contida em Ω . Fixemos dois pontos A e B sobre γ , de modo que γ fica particionada em γ_1 e γ_2 , como sugere a Figura 5.18. Como \mathbf{F} é conservativo, a integral de linha

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

é independente do caminho e, conseqüentemente,

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} + \int_{-\gamma_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} - \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = 0.$$

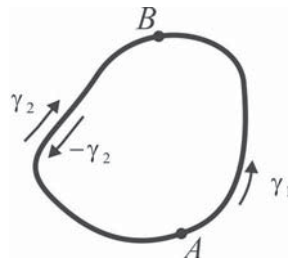


Figura 5.18: Partição do caminho γ .

Reciprocamente, suponhamos que

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = 0,$$

ao longo de qualquer curva fechada, simples e parcialmente regular γ em Ω . Dados dois pontos A e B em Ω , sejam γ_1 e γ_2 duas curvas simples, parcialmente regulares e sem ponto em comum, ligando A e B . Então $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ é uma curva simples, fechada e parcialmente regular e, portanto,

$$0 = \oint_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} + \int_{-\gamma_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} - \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r},$$

de onde resulta

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}.$$

Se as curvas γ_1 e γ_2 se interceptam em um ponto E , então E divide cada uma delas em duas novas curvas e aplicamos o raciocínio precedente. ■

Corolário 5.45 Seja $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ um campo vetorial de classe C^1 no domínio (aberto e conexo) Ω , isto é, as componentes $L, M, N : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ têm derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em Ω .

1. Se a integral de linha

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} \quad \text{ou} \quad \int_{\gamma} Ldx + Mdy + Ndz$$

é independente do caminho, então \mathbf{F} é um campo irrotacional, isto é, $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ e, neste caso,

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y}.$$

2. Se Ω é um domínio simplesmente conexo e \mathbf{F} é um campo irrotacional ($\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$), então a integral de linha

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} \quad \text{ou} \quad \int_{\gamma} Ldx + Mdy + Ndz$$

é independente do caminho e o campo \mathbf{F} é conservativo. ■

Exemplo 5.46 (conservação da energia) Seja $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ a equação horária de uma partícula que se desloca, da posição inicial $A = \mathbf{r}(t_0)$ à posição final $B = \mathbf{r}(t_1)$, sob a ação de um campo de forças conservativo $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$. Mostrar que a soma de suas energias cinética e potencial permanece constante.

Solução Como \mathbf{F} é um campo conservativo temos que $\mathbf{F} = -\nabla\varphi(t)$ (o sinal “−” é frequentemente usado em Física), onde $\varphi(t)$ é a *energia potencial*. O trabalho realizado é

$$W = \int_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\gamma} (-\nabla\varphi) \bullet d\mathbf{r} = \varphi(A) - \varphi(B).$$

Por outro lado, se representarmos por m a massa da partícula e por v_A e v_B as energias cinéticas, nos pontos A e B , respectivamente, temos

$$W = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

e, portanto,

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + \varphi(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 + \varphi(B). \quad \blacksquare$$

Exemplo 5.47 No domínio $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + y^2 < 4\}$, mostrar que o campo \mathbf{F} do Exemplo 5.41 é conservativo. Mais geralmente, \mathbf{F} é conservativo em qualquer região simplesmente conexa Ω , que não contém a origem.

Solução O campo \mathbf{F} é de classe C^1 no domínio simplesmente conexo Ω e será conservativo se $\text{rot } (\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ em Ω . As componentes do campo F são

$$L = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad M = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad N = 0$$

e, portanto,

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ L & M & 0 \end{vmatrix} = (M_x - L_y) \mathbf{k} = \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad \text{em } \Omega.$$

Ao longo de qualquer curva γ simples, fechada e parcialmente regular em Ω , temos

$$\oint_{\gamma} -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = 0.$$

A família de potenciais de \mathbf{F} são as soluções φ do sistema

$$\varphi_x = L = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad (\text{I}) \quad \text{e} \quad \varphi_y = M = \frac{x}{x^2 + y^2}. \quad (\text{I})$$

Integrando (I) parcialmente em relação a x e mantendo y fixado, obtemos

$$\varphi(x, y) = -\int_{\gamma} \frac{y}{x^2 + y^2} dx \Rightarrow \varphi(x, y) = \arctan(y/x) + h(y)$$

e derivando a última equação em relação a y , e comparando com (II), resulta

$$\varphi_y = \frac{x}{x^2 + y^2} + h_y = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Logo, $h_y = 0$, ou seja, $h = k$, com k uma constante real. Assim, a família de potenciais é dada por

$$\varphi(x, y) = \arctan(y/x) + k. \quad \blacksquare$$

Exemplo 5.48 (um campo irrotacional e não conservativo) No Exemplo 5.41 vimos que o campo

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

não é conservativo no domínio $\Omega : 0 < x^2 + y^2 < 1$, embora nesse domínio ele seja de classe C^1 e irrotacional, isto é, $\text{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$. Isto não contradiz o resultado contido no Corolário 5.45, porque o domínio Ω não é simplesmente conexo. \blacksquare

Para usar a linguagem de forma diferencial, recordemos que a expressão

$$\mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = Ldx + Mdy + Ndz$$

recebe o nome *forma diferencial* e ela denomina-se *exata* ou *total* quando o campo $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ for conservativo, isto é, quando existir campo escalar diferenciável $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$Ldx + Mdy + Ndz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = d\varphi.$$

Se as funções L , M e N têm derivadas parciais contínuas no domínio simplesmente conexo Ω , então a forma diferencial $Ldx + Mdy + Ndz$ é exata se, e somente se,

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y}$$

ou, equivalentemente, a matriz Jacobiana $J(\mathbf{F})$ é simétrica.

Exemplo 5.49 Verificar que $ydx + xdy + 5dz$ é uma forma diferencial exata e calcular a integral de linha

$$\int_{\gamma} ydx + xdy + 5dz,$$

sendo γ o segmento de reta de origem $A(1, 1, 1)$ e extremidade $B(2, 3, -1)$.

Solução Como a matriz Jacobiana

$$J = \begin{bmatrix} L_x & L_y & L_z \\ M_x & M_y & M_z \\ N_x & N_y & N_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é simétrica, segue que a forma diferencial é exata. Assim,

$$ydx + xdy + 5dz = \varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz = d\varphi,$$

para alguma função $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e o cálculo da integral de linha se reduz a

$$\int_{\gamma} ydx + xdy + 5dz = \int_A^B d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A).$$

Neste caso, usando as regras de derivação e manipulações simples, encontramos

$$d\varphi = ydx + xdy + 5dz = d(xy) + d(5z) = d(xy + 5z)$$

e, portanto, $\varphi(x, y, z) = xy + 5z + k$, com k uma constante real. Assim,

$$\int_{\gamma} ydx + xdy + 5dz = \varphi(B) - \varphi(A) = (1 + k) - (6 + k) = -5. \quad \blacksquare$$

5.5.1 O Potencial como Integral de Linha

Domínio Admissível

Um domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ denomina-se *admissível*, quando possuir a seguinte propriedade: existe em Ω um ponto $A(a, b, c)$ tal que a polygonal de vértices $A(a, b, c)$, $B(x, b, c)$, $C(x, y, c)$ e $P(x, y, z)$ jaz em Ω , seja qual for o ponto $P(x, y, z)$ de Ω . Em dimensão $n = 2$, o domínio Ω é admissível quando existir um ponto $A(a, b)$ em Ω , tal que a polygonal de vértices $A(a, b)$, $B(a, y)$ e $P(x, y)$ jaz em Ω , para todo $P(x, y)$ de Ω . A Figura 5.19 ilustra essas polygonais.

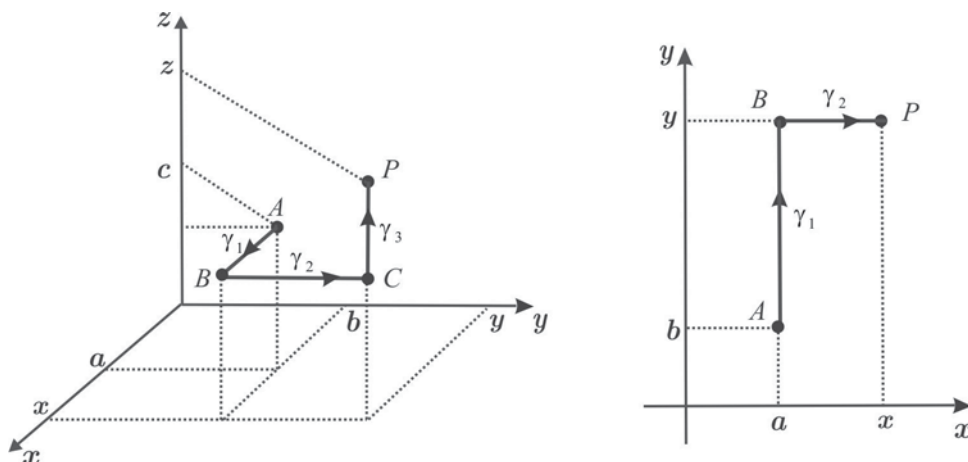


Figura 5.19: Polygonais admissíveis em \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^2 .

Por exemplo, as vizinhanças e o próprio \mathbb{R}^3 são domínios admissíveis. O domínio $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ não é admissível; de fato, dado $A(a, b)$ em Ω , a poligonal de vértices $A(a, b)$, $B(a, 0)$ e $C(-1, 0)$ não jaz em Ω .

Em um domínio Ω admissível, podemos usar as poligonais para determinar o potencial de um campo conservativo. Dado um campo vetorial conservativo $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ em um domínio admissível Ω , então fixado um ponto $A(a, b, c)$ em Ω o potencial $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de \mathbf{F} é determinado pela fórmula

$$\varphi(P) = \int_A^P \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_A^P Ldx + Mdy + Ndz$$

e usando a poligonal $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ da Figura 5.19, obtemos

$$\varphi(P) = \int_A^P \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_a^x L(t, b, c) dt + \int_b^y M(x, t, c) dt + \int_c^z N(x, y, t) dt. \quad (5.17)$$

Teorema 5.50 Para que um campo vetorial $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$, de classe C^1 , seja conservativo em um domínio admissível $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, é necessário e suficiente que $\text{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ em Ω . Neste caso, o potencial $\varphi(x, y, z)$ é dado por (5.17). Em dimensão $n = 2$, o campo $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{L}(x, y)\mathbf{i} + \mathbf{M}(x, y)\mathbf{j}$ é conservativo se, e somente se, $M_x = L_y$ em Ω . ■

Exemplo 5.51 Mostrar que o campo vetorial $\mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$ é conservativo e encontrar um potencial do qual ele deriva.

Solução Um cálculo direto nos dá $\text{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ no domínio admissível \mathbb{R}^3 e, portanto, \mathbf{F} é um campo conservativo. Para determinar um potencial de \mathbf{F} , escolhamos $A(0, 0, 0)$ como ponto de partida e usamos (5.17) para obter:

$$\varphi(x, y, z) = \int_0^x (0 + 0)dx + \int_0^y (x + 0)dy + \int_0^z (x + y)dz = xy + xz + yz.$$

É claro que se k é uma constante, então $\varphi(x, y, z) + k$ é, também, um potencial do campo \mathbf{F} . ■

Domínio Estrelado

Um domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ denomina-se *estrelado*, em relação ao ponto P de Ω , se o segmento de reta PQ está inteiramente contido em Ω , seja qual for o ponto Q de Ω . Por exemplo, no plano \mathbb{R}^2 , o interior de um paralelogramo, o disco e o próprio \mathbb{R}^2 são domínios estrelados, em relação a qualquer um de seus pontos. O domínio $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ não é estrelado em relação a ponto algum. Se Ω é estrelado em relação ao ponto P , e γ é uma curva fechada em Ω , então a *deformação contínua*

$$\gamma_s(t) = (1 - s)\gamma(t) + sP, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

reduz a curva γ ao ponto P , sem sair de Ω , porque $\gamma_s(t) \in \Omega$, $\forall s, t$, e, além disso, $\gamma_0 = \gamma$ e $\gamma_1 = P$. Portanto, Ω é simplesmente conexo. Se retirarmos do \mathbb{R}^2 o eixo x , obtemos um domínio simplesmente conexo e não estrelado.

Seja $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial conservativo sobre um domínio Ω , e suponhamos que Ω seja estrelado em relação ao ponto $A(a, b, c)$ de Ω . O potencial $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de \mathbf{F} é determinado pela fórmula

$$\varphi(x, y, z) = \int_A^P \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} + k, \quad (5.18)$$

sendo k uma constante real e $P(x, y, z)$ um ponto genérico de Ω . A integral de linha em (5.18) não depende do caminho, e se considerarmos o segmento de reta $\mathbf{r}(t) = A + t\mathbf{AP}$, $0 \leq t \leq 1$, obtemos

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z) &= \int_A^P \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} + k = \int_0^1 [\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t)] dt \\ &= \int_0^1 [\mathbf{F}(a + t(x-a), b + t(y-b), c + t(z-c)) \bullet (x-a, y-b, z-c)] dt.\end{aligned}$$

Exemplo 5.52 *Mostrar que o campo vetorial $\mathbf{F} = (e^x \sin y)\mathbf{i} + (e^x \cos y)\mathbf{j} + \mathbf{k}$ é conservativo e determinar um potencial do qual ele deriva.*

Solução O campo \mathbf{F} é de classe C^1 no domínio simplesmente conexo \mathbb{R}^3 e, nesse domínio, $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Logo, \mathbf{F} é um campo conservativo. Considerando \mathbb{R}^3 como um domínio estrelado em relação à origem, obtemos

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z) &= \int_0^1 [\mathbf{F}(tx, ty, tz) \bullet (x, y, z)] dt + k \\ &= x \int_0^1 e^{tx} \sin(ty) dt + y \int_0^1 e^{tx} \cos(ty) dt + z \int_0^1 dt + k = e^x \sin y + z + k. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Exemplo 5.53 *Vamos reconsiderar o campo $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 3z\mathbf{k}$ do Exemplo 5.8. Naquele exemplo, resolvendo o sistema de equações diferenciais*

$$\varphi_x = L = x^2, \quad \varphi_y = M = y \quad \text{e} \quad \varphi_z = N = -3z,$$

encontramos a família de potenciais

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{2}z^2 + k.$$

Agora, o potencial será encontrado via integral de linha. Considerando a origem $O(0, 0, 0)$ como ponto de partida, usamos (5.17) e obtemos o potencial

$$\begin{aligned}\psi(x, y, z) &= \int_0^x L(t, 0, 0) dt + \int_0^y M(x, t, 0) dt + \int_0^z N(x, y, t) dt \\ &= \int_0^x t^2 dt + \int_0^y t dt - \int_0^z 3t dt = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{2}z^2.\end{aligned}$$

Observamos que o potencial $\psi(x, y, z)$ encontrado pela integral de linha, corresponde ao valor $k = 0$, que é exatamente $\varphi(0, 0, 0)$. \blacksquare

Exercícios & Complementos.

1. Verifique se a forma é exata e, nos casos afirmativos, determine um potencial do qual ele deriva.

(a) $(\sin y - y \sin x + x) dx + (\cos x + x \cos y + y) dy.$

(b) $[\sin(xy) + xy \cos(xy)] dx + [x^2 \cos(xy)] dy.$

(c) $(x + z) dx - (y + z) dy + (x - y) dz.$

(d) $2xy^3 dx + x^2y^3 dy + 3x^2yz^2 dz.$

- (e) $3y^4z^2dx + 4x^3y^2dy - 3x^2y^2dz$.
- (f) $(2x^2 + 8xy^2)dx + (3x^3y - 3xy)dy - (4y^2z^2 + 2x^3z)dz$.
- (g) $(y^2\cos x + z^3)dx - (4 - 2y\sin x)dy + (3xz^2 + 2)dz$.
- (h) $(4xy - 3x^2z^2 + 1)dx + (2x^2 + 2)dy - (2x^3z + 3z^2)dz$.
- (i) $(e^x\sin z + 2yz)dx + (2xz + 2y)dy + (e^x\cos z + 2xy + 3z^2)dz$.
2. Verifique que o campo de forças $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ não é conservativo, e calcule o trabalho realizado pelo campo \mathbf{F} , para mover uma partícula do ponto $A(1, 0, 1)$ ao ponto $B(-1, 0, e^\pi)$, ao longo da curva $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (e^t)\mathbf{k}$.
3. Mostre que não existe um campo vetorial \mathbf{F} , cujo rotacional é $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
4. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivada contínua em $[a, b]$. Determine em que região do plano xy o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = yf(xy)\mathbf{i} + xf(xy)\mathbf{j}$ é conservativo.
5. Seja γ um caminho parcialmente regular que liga os pontos $A(1, 2)$ e $B(2, 1)$ e não intercepta o eixo x . É verdade que

$$\int_{\gamma} \frac{ydx - xdy}{y^2} = 3/2?$$

5.6 O Teorema de Green no Plano

Para motivar o que será desenvolvido nesta seção, deixe-nos considerar a região D do plano xy , delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$, e vamos orientar a curva ∂D , fronteira da região D , de modo que ao percorrê-la, a região D permaneça do nosso lado esquerdo. Na Figura 5.20, ilustramos a região D , onde vemos que $\partial D = \gamma_1 + \gamma_2$ é um contorno simples, fechado e parcialmente regular.

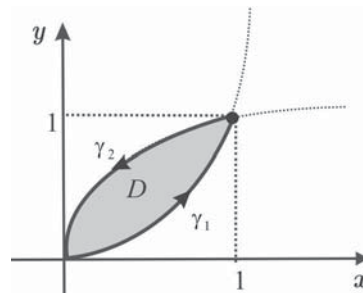


Figura 5.20: Região entre as curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

Vamos comparar as integrais:

$$\oint_{\partial D} L(x, y) dx + M(x, y) dy \quad (\text{I}) \quad \text{e} \quad \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) dA, \quad (\text{II})$$

sendo $L(x, y) = xy$ e $M(x, y) = y^2 - x^2$. Calculando a integral dupla (II), obtemos

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) dA &= \iint_D (-2x - x) dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (-3x) dy dx \\ &= -3 \int_0^1 x (\sqrt{x} - x^2) dx = -9/20 \end{aligned}$$

e para calcular a integral de linha (I), usaremos a propriedade aditiva:

$$\oint_{\partial D} Ldx + Mdy = \oint_{\gamma_1 + \gamma_2} Ldx + Mdy = \oint_{\gamma_1} Ldx + Mdy + \oint_{\gamma_2} Ldx + Mdy.$$

A curva γ_1 é descrita por $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, e usando x como parâmetro, obtemos:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_1} Ldx + Mdy &= \int_{\gamma_1} xydx + (y^2 - x^2) dy = \int_0^1 [x^3 + 2x(x^4 - x^2)] dx \\ &= \int_0^1 (2x^5 - x^3) dx = 1/12. \end{aligned}$$

Por outro lado, a curva γ_2 é descrita por $x = y^2$ e ao longo desta curva, o percurso do ponto A até a origem é feito com y variando de 1 até 0. Usando y como parâmetro, obtemos:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_2} Ldx + Mdy &= \int_{\gamma_2} xydx + (y^2 - x^2) dy = - \int_0^1 [2y^4 + (y^2 - y^4)] dy \\ &= - \int_0^1 (y^4 + y^2) dy = -8/15. \end{aligned}$$

Assim, encontramos

$$\oint_{\partial D} Ldx + Mdy = \oint_{\gamma_1} Ldx + Mdy + \oint_{\gamma_2} Ldx + Mdy = \frac{1}{12} - \frac{8}{15} = -9/20.$$

O resultado $-9/20$, encontrado para integrais (I) e (II), não é uma coincidência. O *Teorema de Green*,¹⁴ que formularemos a seguir, estabelece que, sob determinadas condições, é válida a relação

$$\oint_{\partial D} Ldx + Mdy = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) dA.$$

Estamos tratando com integrais ao longo de caminhos orientados e, é claro, a orientação da trajetória é relevante.

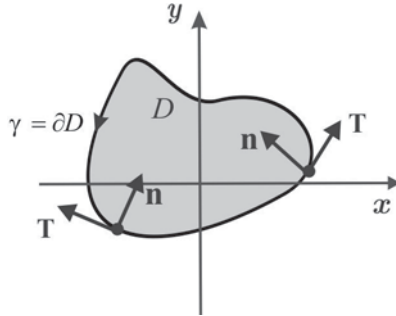


Figura 5.21: Fronteira $\gamma = \partial D$ orientada.

Na Figura 5.21 ilustramos a orientação positiva da fronteira de uma região D , delimitada por uma curva simples, fechada e parcialmente regular γ . A orientação positiva corresponde àquela em que o campo de vetores normais \mathbf{n} , obtido por rotação anti-horária de 90° do campo tangente

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|},$$

sempre aponta para dentro da região D . Intuitivamente, a orientação positiva de γ corresponde àquela que, ao percorrê-la, deixa a região D à nossa esquerda.

¹⁴George Green (1793-1841), matemático inglês.

Teorema 5.54 (Teorema de Green) *Seja γ uma curva simples, fechada e parcialmente regular, que delimita uma região D do plano xy . Se $L(x, y)$ e $M(x, y)$ são funções de classe C^1 , isto é, com derivadas parciais de primeira ordem contínuas, na região $D \cup \partial D$, então*

$$\oint_{\gamma} Ldx + Mdy = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) dxdy,$$

onde a curva $\gamma = \partial D$ é orientada no sentido positivo (anti-horário).

Demonstração Por simplicidade, vamos considerar o caso particular em que D é a região da Figura 5.22, delimitada por um retângulo de lados paralelos aos eixos coordenados.

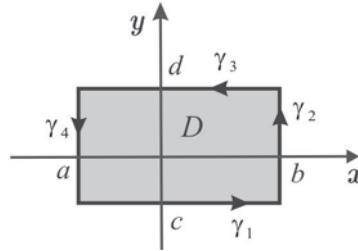


Figura 5.22: Região retangular D .

A fronteira de D é a curva simples, fechada e parcialmente regular, formada pelos segmentos de reta γ_1 , γ_2 , γ_3 , e γ_4 , isto é, $\partial D = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$. Temos pela propriedade aditiva que

$$\oint_{\partial D} Ldx + Mdy = \sum_{i=1}^4 \oint_{\gamma_i} Ldx + Mdy. \quad (5.19)$$

■ Sobre o segmento γ_1 , temos $y = c$, $dy = 0$, $a \leq x \leq b$ e, portanto,

$$\oint_{\gamma_1} Ldx + Mdy = \int_a^b L(x, c) dx.$$

■ Sobre o segmento γ_2 , temos $x = b$, $dx = 0$, $c \leq y \leq d$ e, portanto,

$$\oint_{\gamma_2} Ldx + Mdy = \int_c^d M(b, y) dy.$$

■ Sobre o segmento γ_3 , temos $y = d$, $dy = 0$, $a \leq x \leq b$ e, portanto,

$$\oint_{\gamma_3} Ldx + Mdy = - \int_a^b L(x, d) dx.$$

■ Sobre o segmento γ_4 , temos $x = a$, $dx = 0$, $c \leq y \leq d$ e, portanto,

$$\oint_{\gamma_4} Ldx + Mdy = - \int_c^d M(a, y) dy.$$

O sinal "-" que figura nas integrais sobre γ_3 e γ_4 é devido à orientação. De (5.19), resulta

$$\oint_{\partial D} Ldx + Mdy = \left[- \int_a^b [L(x, d) - L(x, c)] dx \right] + \left[\int_c^d [M(b, y) - M(a, y)] dy \right] \quad (5.20)$$

e aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo¹⁵ a cada integral do lado direito de (5.20), encontramos

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D} Ldx + Mdy &= - \int_a^b \left[\int_c^d L_y(x, y) dy \right] dx + \int_c^d \left[\int_a^b M_x(x, y) dx \right] dy \\ &= \int_a^b \int_c^d [M_x(x, y) - L_y(x, y)] dy dx = \iint_D (M_x - L_y) dA. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Exemplo 5.55 Com auxílio do Teorema de Green, calcular a integral de linha

$$\oint_{\partial D} 3xydx + 2x^2dy,$$

onde D é a região delimitada pela reta $y = x$ e a parábola $y = x^2 - 2x$.

Solução A região D é do tipo vertical simples, e está ilustrada na Figura 5.23; ela é descrita pelas desigualdades $D : 0 \leq x \leq 3, \quad x^2 - 2x \leq y \leq x$.

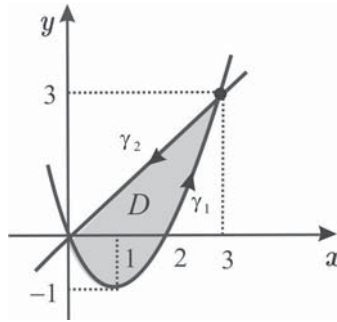


Figura 5.23: Região D entre as curvas $y = x$ e $y = x^2 - 2x$.

As componentes da forma diferencial são $L = 3xy$ e $M = 2x^2$, de modo que $M_x - L_y = 4x - 3x$, e usando o Teorema de Green, obtemos

$$\oint_{\partial D} 3xydx + 2x^2dy = \iint_D x dx dy = \int_0^3 \left[\int_{x^2-2x}^x x dy \right] dx = \int_0^3 x^2(3-x) dx = \frac{27}{4}. \quad \blacksquare$$

Exemplo 5.56 Os possíveis valores para a integral de linha

$$\oint_{\gamma} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2},$$

onde γ é uma circunferência que não passa pela origem, são $\pm 2\pi$ e 0. De fato, se γ é uma circunferência centrada na origem de raio ε , com orientação positiva, vimos no Exemplo 5.41 que a integral tem valor 2π . Invertendo a orientação, o valor da integral passa a ser -2π . Por outro lado, se a circunferência γ não envolve a origem, podemos usar o Teorema de Green na região D , delimitada por γ , e considerando que $L_y = M_x$, em D , resulta

$$\oint_{\gamma} Ldx + Mdy = \iint_D (M_x - L_y) dx dy = 0.$$

Ressaltamos que o Teorema de Green não se aplica, se a circunferência γ envolver a origem. ■

¹⁵Teorema Fundamental do Cálculo: $\int_a^b G_x(x, \xi) dx = G(b, \xi) - G(a, \xi)$, G de class C^1 .

Exemplo 5.57 Calcular $\oint_{\gamma} ydx + 3xdy$, onde γ resulta da interseção do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ com o plano $z = 2$.

Solução A curva γ é a circunferência de raio $R = 2$, situada no plano $z = 2$, com centro $C(0, 0, 2)$. Pelo Teorema de Green, temos

$$\oint_{\gamma} ydx + 3xdy = \iint_D (3 - 1)dxdy = 2A(D) = 8\pi. \quad \blacksquare$$

5.6.1 Regiões Multiplamente Conexas

Desejamos usar o Teorema de Green para calcular a integral de linha

$$\oint_{\gamma} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2},$$

ao longo de uma curva simples, fechada e parcialmente regular γ , que envolve a origem, como ilustrado na Figura 5.24.

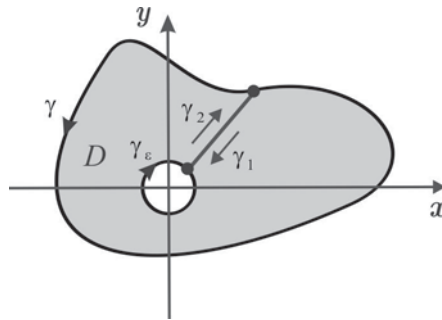


Figura 5.24: Região D multiplamente conexa.

O Teorema de Green não pode ser aplicado diretamente, tendo em vista que a forma não é de classe C^1 , na região delimitada pela curva γ . Para contornar a situação, consideramos uma circunferência centrada na origem, de raio $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, de modo que $\gamma_{\varepsilon} \cap \gamma = \emptyset$, e um segmento de reta servindo de *ponte de ligação*, entre as curvas γ e γ_{ε} . Com esses artifícios, construímos uma região simplesmente conexa D , com fronteira $\partial D = \gamma + \gamma_{\varepsilon} + \gamma_1 + \gamma_2$, de modo que a forma diferencial é exata e de classe C^1 , em $D \cup \partial D$. Como $\gamma_2 = -\gamma_1$, então

$$\int_{\gamma_1} Ldx + Mdy + \int_{\gamma_2} Ldx + Mdy = 0$$

e, portanto,

$$\int_{\partial D} Ldx + Mdy = \int_{\gamma} Ldx + Mdy + \int_{\gamma_{\varepsilon}} Ldx + Mdy. \quad (5.21)$$

Do Teorema de Green, resulta

$$\oint_{\partial D} Ldx + Mdy = \iint_D (M_x - L_y) dxdy = 0$$

e de (5.21), obtemos

$$\oint_{\gamma} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = - \oint_{\gamma_{\varepsilon}} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = 2\pi,$$

conforme encontramos no Exemplo 5.41.

Para encerrar esta seção, analisaremos a aplicabilidade do Teorema de Green, no caso em que a região multiplamente conexa D tem dois buracos, como na Figura 5.25.

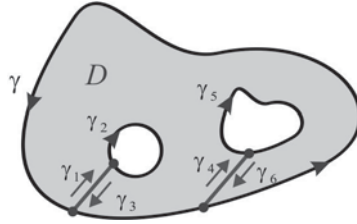


Figura 5.25: Região D com dois buracos.

Se $\mathbf{F} = L(x, y)\mathbf{i} + M(x, y)\mathbf{j}$ é um campo de classe C^1 , na região $D \cup \partial D$, obtemos a partir do Teorema de Green a seguinte relação:

$$\iint_D (M_x - L_y) dA = \oint_{\gamma} Ldx + Mdy + \oint_{\gamma_2} Ldx + Mdy + \oint_{\gamma_5} Ldx + Mdy.$$

Se o campo \mathbf{F} for conservativo, então $M_x - L_y = 0$ e teremos

$$\oint_{\gamma} Ldx + Mdy + \oint_{\gamma_2} Ldx + Mdy + \oint_{\gamma_5} Ldx + Mdy = 0.$$

Observamos que $\gamma_3 = -\gamma_1$ e $\gamma_6 = -\gamma_4$, de modo que

$$\oint_{\gamma_1} Ldx + Mdy + \oint_{\gamma_5} Ldx + Mdy = 0 \quad \text{e} \quad \oint_{\gamma_4} Ldx + Mdy + \oint_{\gamma_6} Ldx + Mdy = 0.$$

5.6.2 Aplicações do Teorema de Green

Cálculo de Áreas Planas

Seja D uma região do plano xy , delimitada por uma curva γ , simples, fechada e parcialmente regular. Se considerarmos no Teorema de Green $L(x, y) \equiv 0$ e $M(x, y) = x$, obteremos

$$\oint_{\gamma} xdy = \iint_D dA = A(D). \quad (5.22)$$

Da mesma forma, considerando $L(x, y) = -y$ e $M(x, y) \equiv 0$, resulta

$$-\oint_{\gamma} ydx = \iint_D dA = A(D). \quad (5.23)$$

Finalmente, somando (5.22) e (5.23), membro a membro, obtemos

$$A(D) = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} xdy - ydx. \quad (5.24)$$

Exemplo 5.58 (área da elipse) Calcular, por integral de linha, a área da região D limitada pela elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Solução Considerando a parametrização

$$x = a \cos t \text{ e } y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

da elipse, obtida no Exemplo 5.19, segue da fórmula (5.22) que

$$A = \int_0^{2\pi} a(\cos t) b(\sin t) dt = ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi ab. \quad \blacksquare$$

Exemplo 5.59 (área em coordenadas polares) Calcular a área da cardioide de equação polar

$$r = a(1 - \cos \theta), \quad a > 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Solução Em coordenadas polares r e θ , temos $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ e, portanto,

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \text{ e } dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta.$$

Assim, em coordenadas polares, a fórmula da área (5.24) se escreve

$$A(D) = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} [r \cos \theta (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) - r \sin \theta (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta)] = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} r^2 d\theta,$$

onde a região D é delimitada pela curva γ , simples, fechada e parcialmente regular. No caso da cardioide, obtemos

$$A(D) = \frac{a^2}{2} \oint_{\gamma} (1 - \cos \theta)^2 d\theta = \frac{3\pi}{2} a^2. \quad \blacksquare$$

Fluxo e Circulação por Integral Dupla

Suponhamos que o campo bidimensional $\mathbf{F}(x, y) = L(x, y)\mathbf{i} + M(x, y)\mathbf{j}$ representa o campo de velocidades de um fluido, e que desejamos medir a quantidade de fluido que atravessa a curva γ , na unidade de tempo. Observando a Figura 5.26, vemos que a quantidade de fluido (*fluxo*) que atravessa a porção ds , na direção da normal, é medida pela área do retângulo de base ds e altura $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$, onde $\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k}$ é a normal unitária exterior à curva γ .

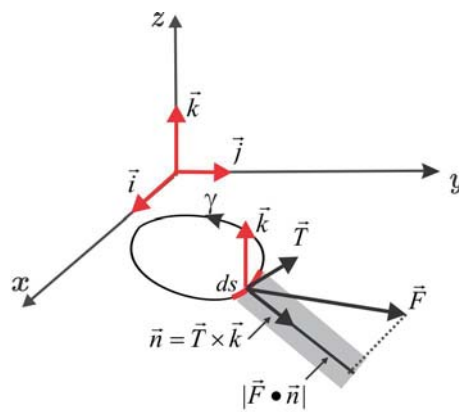


Figura 5.26: Fluxo do campo \mathbf{F} .

O fluxo total do campo \mathbf{F} através de γ , na direção \mathbf{n} , é, portanto,

$$\int_{\gamma} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) ds. \quad (5.25)$$

A integral (5.25) denomina-se a *integral do fluxo* do campo \mathbf{F} ao longo de γ . Considerando que $\mathbf{T}ds = (dx)\mathbf{i} + (dy)\mathbf{j} + (dz)\mathbf{k}$, então

$$\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ dx & dy & dz \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (dy)\mathbf{i} - (dx)\mathbf{j}$$

e, dessa forma, obtemos a seguinte regra para o cálculo do fluxo do campo \mathbf{F} :

$$\int_{\gamma} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) ds = \int_{\gamma} (L\mathbf{i} + M\mathbf{j}) \bullet [(dy)\mathbf{i} - (dx)\mathbf{j}] ds = \int_{\gamma} Ldy - Mdx. \quad (5.26)$$

Quando a curva γ for fechada, a integral

$$\oint_{\gamma} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T}) ds = \oint_{\gamma} Ldx + Mdy \quad (5.27)$$

denominar-se-á *circulação* do campo \mathbf{F} ao longo de γ . Além disso, o trabalho total realizado por um campo de forças \mathbf{F} , para deslocar uma partícula ao longo de γ , do ponto A até o ponto B , é dado por

$$W = \int_A^B (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T}) ds.$$

Exemplo 5.60 Calcular a circulação e o fluxo do campo $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$, através da circunferência $\gamma : x^2 + y^2 = 1$.

Solução A circulação do campo \mathbf{F} é dada pela integral (5.27) e temos

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T}) ds &= \oint_{\gamma} (-ydx + xdy) = \int_0^{2\pi} [(-\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t)] dt \\ &= \int_0^{2\pi} [(\cos t)^2 + (\sin t)^2] dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Por outro lado, o fluxo do campo \mathbf{F} é dado por (5.26) e temos

$$\int_{\gamma} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) ds = - \int_{\gamma} xdx + ydy = - \int_0^{2\pi} [(\cos t)(-\sin t) + (\sin t)(\cos t)] dt = 0. \quad \blacksquare$$

Se o campo bidimensional $\mathbf{F} = L(x, y)\mathbf{i} + M(x, y)\mathbf{j}$ é de classe C^1 , em uma região D , delimitada por uma curva simples, fechada e regular γ , podemos expressar, via Teorema de Green, o fluxo e a circulação de \mathbf{F} por uma integral dupla. Para o fluxo temos por (5.26)

$$\oint_{\gamma} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) ds = \oint_{\gamma} Ldy - Mdx = (\text{usar Green}) = \iint_D (M_x + L_y) dxdy = \iint_D \operatorname{div}(\mathbf{F}) dxdy.$$

A fórmula

$$\oint_{\gamma} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) ds = \iint_D (\operatorname{div} \mathbf{F}) dxdy \quad (5.28)$$

é conhecida como *Fórmula da Divergência* ou *Fórmula de Gauss* em \mathbb{R}^2 . Por outro lado, temos

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{k} = (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{k} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ L & M & 0 \end{vmatrix} = M_x - L_y$$

e, portanto, a circulação do campo \mathbf{F} se expressa por

$$\oint_{\gamma} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T}) ds = \oint_{\gamma} Ldx + Mdy = (\text{usar Green}) = \iint_D (M_x - L_y) dxdy = \iint_D [\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{k}] dxdy.$$

A seguinte *formulação vetorial* do Teorema de Green

$$\oint_{\gamma} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T}) ds = \iint_D (\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{k}) dxdy$$

é conhecida por *Fórmula de Stokes* em \mathbb{R}^2 .

Exemplo 5.61 Calcular, por integral dupla, o fluxo e a circulação do campo $\mathbf{F} = (x-y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$, através da circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

Solução Usando as formulações vetoriais do Teorema de Green, com D a região delimitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \text{fluxo} \quad \oint_{\gamma} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) ds &= \iint_D (\text{div } \mathbf{F}) dxdy = \iint_D dxdy = \pi \\ \text{circulação} \quad \oint_{\gamma} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T}) ds &= \iint_D [\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{k}] dxdy = \iint_D 2dxdy = 2\pi. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 5.62 Calcular o fluxo e a circulação do campo $\mathbf{F} = (xy)\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$, através da fronteira da região triangular D , de vértices $O(0,0)$, $A(2,2)$ e $B(0,2)$.

Solução Na Figura 5.27 ilustramos a região D que será interpretada, para efeito de integral dupla, como uma região vertical simples.

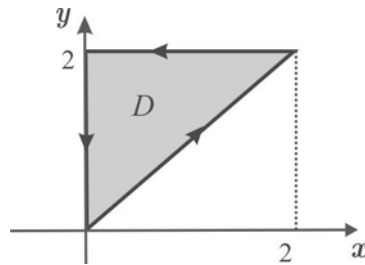


Figura 5.27: Região triangular do Exemplo 5.62.

Temos que $\text{div } \mathbf{F} = y + 4$ e para o fluxo encontramos

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) ds &= \iint_D (\text{div } \mathbf{F}) dA = \iint_D (y + 4) dA = \\ &= \int_0^2 \int_x^2 (y + 4) dy dx = \int_0^2 \left[4y + \frac{1}{2}y^2 \right]_x^2 dx \\ &= \int_0^2 \left(10 - 4x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = 32/3. \end{aligned}$$

Por outro lado, $\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{k} = -x$ e a circulação do campo \mathbf{F} é

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T}) ds &= \iint_D [\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{k}] dA = \iint_D (-x) dA \\ &= - \int_0^2 \int_x^2 x dy dx = - \int_0^2 (2x - x^2) dx = -4/3. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Identidades de Green

Para obter as Identidades de Green, usaremos a fórmula da divergência com uma escolha adequada para o campo vetorial \mathbf{F} . Seja D uma região compacta do \mathbb{R}^2 , delimitada por uma curva simples, fechada e parcialmente regular, onde estão definidos dois campos escalares u e v , com derivadas parciais de 2ª ordem contínuas em D (esta classe de diferenciabilidade torna possível a aplicabilidade do Teorema de Green). Se na Fórmula da Divergência (5.28) fizermos $\mathbf{F} = v\nabla u$, e usarmos a propriedade $\operatorname{div}(v\nabla u) = v\Delta u + \nabla u \bullet \nabla v$, obteremos

$$\iint_D (v\Delta u) \, dxdy + \iint_D (\nabla u \bullet \nabla v) \, dxdy = \oint_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds, \quad (5.29)$$

conhecida como 1ª Identidade de Green.

Se na identidade (5.29) permutarmos u com v e subtrairmos os resultados, chegaremos à 2ª Identidade de Green

$$\iint_D (v\Delta u - u\Delta v) \, dxdy = \oint_{\partial D} \left(v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) ds. \quad (5.30)$$

As identidades (5.29) e (5.30) aparecem com frequência no estudo do comportamento na fronteira ∂D , de soluções de certas equações diferenciais que modelam fenômenos físicos.

Exercícios & Complementos

1. Calcule as seguintes integrais de linha:

- (a) $\oint_{\gamma} (\sin x + 4xy) \, dx + (2x^2 - \cos y) \, dy$, γ é qualquer curva regular fechada simples.
- (b) $\oint_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx + y \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \, dy$, γ é qualquer curva regular fechada simples, que não envolve a origem.
- (c) $\oint_{\gamma} 2dx + (x^2 - y \tan y) \, dy$, γ é o círculo $(x-1)^2 + y^2 = 1$.
- (d) $\oint_{\gamma} L(x) \, dx + M(y) \, dy$, γ é um círculo de raio r e $L(x)$ e $M(y)$ são funções contínuas, com derivadas parciais de primeira ordem contínuas na região delimitada pela curva γ .
- (e) $\oint_{\gamma} \exp(x) \sin y \, dx + \exp(x) \cos y \, dy$, γ é a elipse $3x^2 + 8y^2 = 24$.
- (f) $\oint_{\gamma} x^2 \, dx + xy \, dy$. γ é a cardioide $r = 1 + \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

2. Sejam D o anel descrito por $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ e $L(x, y)$ e $M(x, y)$ funções contínuas, com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em D , tais que $L_y = M_x$ na região D . Quantos valores são possíveis para a integral de linha

$$\oint_{\gamma} L \, dx + M \, dy,$$

sendo γ uma curva regular por partes, fechada, simples e contida em D ? Este resultado pode ser ilustrado com campo vetorial Faraday¹⁶

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}.$$

¹⁶Michael Faraday (1791-1867), físico e químico inglês.

3. Sejam γ uma curva regular fechada simples, orientada, que não passa por $(0, 0)$, e $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$. Mostre que se \mathbf{n} é o vetor normal unitário exterior à curva γ , então a integral de linha

$$\oint_{\gamma} (\nabla f \bullet \mathbf{n}) ds$$

assume apenas os valores 0 e 4π , caso a curva γ envolva ou não a origem.

4. Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, com derivadas parciais de segunda ordem contínuas tal que $\Delta f = 0$ em D . Mostre que

$$\int_{\partial D} f_y dx - f_x dy = 0.$$

5. Com as hipóteses do exercício precedente, mostre que

$$\int_{\partial D} (f_x dy - f_y dx) g = \iint_D (g_x f_x + g_y f_y) dx dy,$$

para qualquer função $g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, com derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em D .

6. Seja γ uma curva orientada, simples, fechada e regular que delimita uma região $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Se $\mathbf{n} = n_1 \mathbf{i} + n_2 \mathbf{j}$ representa o vetor normal unitário exterior à curva γ , mostre que

$$\oint_{\gamma} n_1(x, y) ds = \oint_{\gamma} n_2(x, y) ds = 0.$$

7. Se $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tem derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em D , mostre que

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \oint_{\partial D} f n_1 ds,$$

com $\mathbf{n} = n_1 \mathbf{i} + n_2 \mathbf{j}$, o vetor normal unitário exterior à fronteira ∂D .

Respostas & Sugestões

Seção 5.2 Campos Vetoriais

- (a) $2xyz^3 \mathbf{i} + x^2 z^3 \mathbf{j} + 3x^2 y z^2 \mathbf{k}$, (b) $-2y + z$, (c) $2x^2 \mathbf{i} + (x - 4xy) \mathbf{j}$, (d) $3x^2 y z^4 - 3x^2 y^2 z^3 + 6x^4 y^2 z^2$,
(e) $(4x^4 y z^3 + 3x^2 y^3 z^2) \mathbf{i} + (4x^3 y z^3 - 8x^3 y^2 z^3) \mathbf{j} - (2xy^3 z^3 + x^3 z^4) \mathbf{k}$.
- Siga as etapas do Exemplo 5.8 para encontrar o potencial.

(a) $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + K.$

(b) $\varphi(x, y) = x^3 y + K.$

(c) $\varphi(x, y) = x^2 \exp(y) + xy - y^2 + K.$

(d) $\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + K.$

(e) $\varphi(x, y) = xy^2 - \frac{3}{2}x^2 + \sin y + K.$

(f) não.

- (g) não.
- (h) não.
- (i) não.
- (j) não.
- (k) $\varphi(x, y, z) = x^2 + \frac{3}{2}y^2 + 2z^2 + K$.
- (l) $\varphi(x, y, z) = xy + xz + yz + K$.
- (m) $\varphi(x, y, z) = x^2yz + K$
- (n) $\varphi(x, y, z) = xy \sin z + K$

3. Consequência direta das regras de derivação.
4. Use o item (d) do exercício precedente.
5. Calcule $\text{rot}(\mathbf{G} - \mathbf{G}_0)$ e conclua que $\mathbf{G} - \mathbf{G}_0$ é conservativo.
6. É imediato verificar que $\text{div} \mathbf{F} = 0$. Os campos potenciais \mathbf{G} são determinados com base no Exercício 5.

- (a) Como $L = 2x$, $M = y$ e $N = -3z$ temos que

$$\mathbf{F} \times \mathbf{OP} = 4tyz\mathbf{i} - 5txz\mathbf{j} + txy\mathbf{k}$$

temos que, portanto

$$\mathbf{G} = (4tyz\mathbf{i} - 5txz\mathbf{j} + txy\mathbf{k}) \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}(4yz\mathbf{i} - 5xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}).$$

Se considerarmos $\mathbf{G}_0 = yz\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j}$ e

$$\text{grad } \varphi = \mathbf{G} - \mathbf{G}_0 = \frac{1}{3}(yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}),$$

teremos

$$\varphi_x = \frac{1}{3}yz, \quad \varphi_y = \frac{1}{3}xz \quad \text{e} \quad \varphi_z = \frac{1}{3}xy$$

e, portanto, $\varphi(x, y, z) = \frac{1}{3}xyz + k$, k constante.

- (b) $\mathbf{G} = x^2\mathbf{j} + (xz + y^2)\mathbf{k} + \text{grad } \varphi$. Neste caso, $\mathbf{G}_0 \bullet \mathbf{i} = 0$.
- (c) $\mathbf{G} = x\mathbf{j} + (y - x)\mathbf{k} + \text{grad } \varphi$.
- (d) $\mathbf{G} = (y^2 - 2xz)\mathbf{k} + \text{grad } \varphi$.
- (e) $\mathbf{G} = (\exp(x) - x \exp(y))\mathbf{j} + \text{grad } \varphi$.
- (f) $\mathbf{G} = 3x^2\mathbf{j} + (2y^3 - 6xz)\mathbf{k} + \text{grad } \varphi$.
- (g) $\mathbf{G} = -x(x + y^2)\mathbf{j} + (x^3 + y^3)\mathbf{k} + \text{grad } \varphi$.
- (h) Temos $L = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $M = \frac{x}{x^2 + y^2}$ e $N = 0$ e, portanto,

$$\mathbf{F} \times \mathbf{OP} = \frac{txz}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{tyz}{x^2 + y^2}\mathbf{j} - t\mathbf{k},$$

obtemos

$$\mathbf{G} = \left(\frac{xz}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{yz}{x^2 + y^2}\mathbf{j} - \mathbf{k} \right) \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} \left(\frac{xz}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{yz}{x^2 + y^2}\mathbf{j} - \mathbf{k} \right).$$

Seção 5.3 Caminhos Regulares

1. No item (f) se considerarmos $x = \cos t$, $y = \sin t$ e $z = t$, obteremos $x^2 + y^2 = 1$, $z = t$ e, portanto, o gráfico da curva γ é uma hélice circular.
2. A coordenada $y(t)$ da curva γ é dada por: $y(0) = 0$ e para $0 < t \leq 1$ temos $y(t) = t^2 \sin(1/t)$, com derivada $y'(t)$ dada por: $y'(0) = 0$ e

$$y'(t) = 2t \sin(1/t) + t^2 \cos(1/t) \cdot (-1/t^2) = 2t \sin(1/t) - \cos(1/t), \quad t \in (0, 1],$$

Se considerarmos $t_n = 1/n\pi$, com $n \in \mathbb{N}$, teremos $t_n \rightarrow 0$ e, contudo, $y'(t_n) = (-1)^n$ não tem limite, com $n \rightarrow \infty$. Assim, $y'(t)$ é descontínua em $t = 0$. Portanto, a curva $\mathbf{r}(t)$ não é regular.

3. Pondo $x = t$ e $y = t^2$, obtemos $y = x^2$. Logo, o gráfico da curva γ_1 é um arco de parábola. As curvas γ_1 e γ_2 possuem o mesmo traço, com orientações opostas, pois a mudança de parâmetro $\phi(t) = 3 - t$ tem derivada negativa $\phi'(t) = -1$.
4. Vamos provar apenas o item (b).

- (a) Como $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ e $P = \mathbf{r}(1) = (1, 2, 1)$, o vetor velocidade nesse ponto é $\mathbf{r}'(1) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, e a reta tangente à curva γ no ponto P é dada por

$$x = 1 + s, \quad y = 2 + 2s, \quad z = 1 + 2s, \quad s \in \mathbb{R}.$$

O plano normal à curva γ no ponto P é dado por

$$\mathbf{PX} \bullet \mathbf{r}'(1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z = 8.$$

- | | | | |
|-----|--|----------------|--|
| (b) | | reta tangente: | $x = -4s, \quad y = 1, \quad z = \pi/8 + s, \quad s \in \mathbb{R},$ |
| | | plano normal: | $-4x + z = \pi/8.$ |
| (c) | | reta tangente: | $x = e^3(1 + 3s), \quad y = e^{-3}(1 - 3s), \quad z = 3\sqrt{2}(1 + s), \quad s \in \mathbb{R},$ |
| | | plano normal: | $xe^3 - ye^{-3} + \sqrt{2}z = e^6 - e^{-6} + 6.$ |
| (d) | | reta tangente: | $x = 1 + s, \quad y = 1 + 3s, \quad z = 1 + 4s, \quad s \in \mathbb{R},$ |
| | | plano normal: | $x + 3y + 4z = 8.$ |
| (e) | | reta tangente: | $x = \pi/2 + 2s, \quad y = 5, \quad z = 1 - 3s, \quad s \in \mathbb{R},$ |
| | | plano normal: | $2x - 3z = \pi - 3.$ |

5. Como

$$\mathbf{r}(t) = \frac{2t\mathbf{i}}{1+t^2} + \frac{(1-t^2)\mathbf{j}}{1+t^2} + \mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}'(t) = \frac{2(1-t^2)\mathbf{i}}{(1+t^2)^2} + \frac{-4t\mathbf{j}}{(1+t^2)^2},$$

temos que

$$|\mathbf{r}(t)| = \sqrt{2}, \quad |\mathbf{r}'(t)| = \frac{2}{1+t^2} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}(t) \bullet \mathbf{r}'(t) = 0$$

e, portanto,

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{r}(t) \bullet \mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}(t)| |\mathbf{r}'(t)|} = 0,$$

mostrando que o ângulo entre os vetores $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}'(t)$ é constante, isto é, não depende de t .

6. Em cada caso, k , k_1 e k_2 representam constantes e exibiremos alguns detalhes para o item (e).

- (a) $y = kx$.
- (b) $y = k_1x$ e $z = k_2x$.
- (c) $y = bx/a + k_1$ e $z = cx/a + k_2$.
- (d) $z - x = xz$ e $x + 2y^2 = 8xy^2$.
- (e) De acordo com (5.11), as curvas integrais do campo $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ são as soluções do sistema

$$\frac{dx}{L} = \frac{dy}{M} = \frac{dz}{N}$$

e manipulações com essas equações nos levam à relação

$$dx + dy + dz = \frac{1}{3}(L + M + N) \left(\frac{dx}{L} + \frac{dy}{M} + \frac{dz}{N} \right).$$

Como $L + M + N = 0$, resulta

$$dx + dy + dz = 0 \Leftrightarrow x + y + z = k_1.$$

Ainda de (5.11), obtemos

$$\frac{xdx}{xL} = \frac{ydy}{yM} = \frac{zdz}{zN} \Leftrightarrow xdx + ydy + zdz = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = k_2,$$

com $k_2 > 0$. Portanto, as curvas integrais de \mathbf{F} são as circunferências

$$\begin{cases} x + y + z = k_1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = k_2, \quad k_2 > 0, \end{cases}.$$

resultante do corte das esferas $x^2 + y^2 + z^2 = k_2$ pelos planos $x + y + z = k_1$.

Seção 5.4 Calculando Integral de Linha

1. Como

$$x = \cos t, \quad y = \sin t \quad \text{e} \quad z = t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

temos que

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} dt = 2\sqrt{2}\pi.$$

2. (a) $-\frac{15}{2}$, (b) 0, (c) $\log\left(\frac{4}{9}\right) - 2$, (d) $\frac{\pi}{4}$, (e) $\frac{\sqrt{2}}{3}$, (f) 2π , (g) $\frac{1}{2}$, (h) 0, (i) $\frac{4}{3}$, (j) $-\frac{\pi}{2}$, (k) $4\pi(\alpha - b)$, (l) 0, (m) $-\frac{9}{20}$, (n) 19.
3. (a) $\frac{243\pi}{4}$, (b) $\frac{40}{3}$, (c) $\frac{5}{6}$, (d) $\frac{137}{10}$, (e) 13.
4. 0.
5. $1/4$
6. $1/3$
7. Segue diretamente da relação $\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T}) ds = |\mathbf{F}| \cos \theta ds$.

8. Sejam $\mathbf{r}_1(t)$, $t \in [a, b]$ e $\mathbf{r}_2(u)$, $u \in [\gamma, d]$ as representações paramétricas de γ_1 e γ_2 , respectivamente. Existe uma bijeção $\varphi : [a, b] \rightarrow [\gamma, d]$, $u = \varphi(t)$, com derivada contínua e de mesmo sinal em $[a, b]$, tal que

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_2(\varphi(t)), \quad t \in [a, b].$$

Se \mathbf{F} é um campo vetorial contínuo na região Ω contendo as curvas γ_1 e γ_2 , então

$$\int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{r}_1 = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) \bullet \mathbf{r}'_1(t) dt$$

e como $u = \varphi(t)$ e $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_2(u)$, temos que $du = \varphi'(t)dt$ e

$$\mathbf{r}'_1(t) = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_2}{du} \varphi'(t) = \mathbf{r}'_2(u) \varphi'(t).$$

Logo,

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) \bullet \mathbf{r}'_1(t) dt = \pm \int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(u)) \bullet (\mathbf{r}'_2(u)) \varphi'(t) dt = \pm \int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(u)) \bullet \mathbf{r}'_2(u) du.$$

pois $\varphi'(t) > 0$ ou $\varphi'(t) < 0$.

Seção 5.5 Independência do Caminho

1. Como ilustração, vamos exibir as soluções para os itens (a) e (i).

- (a) Temos $L = \sin y - y \sin x + x$ e $M = \cos x + x \cos y + y$, de modo que

$$M_x = -\sin x + \cos y = L_y$$

e a forma diferencial é exata. e o potencial é solução do sistema

$$\varphi_x = \sin y - y \sin x + x \quad (\text{I}) \quad \text{e} \quad \varphi_y = \cos x + x \cos y + y. \quad (\text{II})$$

Integrando (I) parcialmente em relação a x , obtemos

$$\varphi(x, y) = x \sin y + y \cos x + \frac{1}{2}x^2 + h(y).$$

Derivando a última equação em relação a y e comparando com (II), vem

$$\varphi_y = x \cos y + \cos x + h_y = \cos x + x \cos y + y.$$

Logo, $h_y = y$, ou seja, $h = \frac{1}{2}y^2$. Assim,

$$\varphi(x, y) = x \sin y + y \cos x + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + k.$$

- (b) $\varphi(x, y) = x \sin xy + k$.
 (c) $\varphi(x, y, z) = (x - y)z + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + k$.
 (d) não.
 (e) não.
 (f) não.

(g) $\varphi(x, y, z) = y^2 \sin x + xz^3 - 4y + 2z + k.$

(h) $\varphi(x, y, z) = x + 2x^2y - x^3z^2 + 2y - z^3 + k.$

(i) O campo $\mathbf{F} = (e^x \sin z + 2yz)\mathbf{i} + (2xz + 2y)\mathbf{j} + (e^x \cos z + 2xy + 3z^2)\mathbf{k}$ é de classe C^1 no domínio estrelado \mathbb{R}^3 e um cálculo direto nos dá

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = (2x - 2x)\mathbf{i} + (e^x \cos z + 2y - (e^x \cos z + 2y))\mathbf{j} + (2z - 2z)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

e, portanto, \mathbf{F} é um campo conservativo. Como

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(tx, ty, tz) &= (e^{tx} \sin(tz) + 2t^2yz)\mathbf{i} + (2t^2xz + 2ty)\mathbf{j} \\ &\quad + (e^{tx} \cos(tz) + 2t^2xy + 3t^2z^2)\mathbf{k}, \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(tx, ty, tz) \bullet \mathbf{r}(x, y, z) &= x [e^{tx} \sin(tz) + 2t^2yz] + y (2t^2xz + 2ty) \\ &\quad + z [e^{tx} \cos(tz) + 2t^2xy + 3t^2z^2] \end{aligned}$$

e o potencial $\varphi(x, y, z)$ é

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \int_0^1 x (e^{tx} \sin(tz) + 2t^2yz) + y (2t^2xz + 2ty) \\ &\quad + z (e^{tx} \cos(tz) + 2t^2xy + 3t^2z^2) dt + k \\ &= e^x \sin z + 2xyz + y^2 + z^3 + k, \end{aligned}$$

sendo k constante.

2. $2e^{2\pi} - 5e^\pi - 5\pi - \frac{3}{10}.$

3. Calcule $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{F})$.

4. Em qualquer região contida em $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq xy \leq b\}$.

Seção 5.6 Teorema de Green

1. (a) 0, (b) 0, (c) 2π , (d) 0, (e) 0, (f) 0.

2. Veja o Exemplo 5.56.

3. Inteiramente análogo ao Exercício 2.

4. Como $L = f_y$ e $M = -f_x$ temos, pelo Teorema de Green, que

$$\oint_{\partial D} f_y dx - f_x dy = \iint_D (-f_{xx} - f_{yy}) dx dy = - \iint_D \Delta f dx dy = 0.$$

5. Aplicando o Teorema de Green, com $L = -gf_y$ e $M = gf_x$, resulta

$$\oint_{\partial D} (f_x dy - f_y dx) g = \iint_D [\partial_x (gf_x) + \partial_y (gf_y)] dx dy.$$

Observando que

$$\partial_x (gf_x) = g_x f_x + g f_{xx} \text{ e } \partial_y (gf_y) = g_y f_y + g f_{yy},$$

obtemos

$$\partial_x (gf_x) + \partial_y (gf_y) = g_x f_x + g_y f_y + g (f_{xx} + f_{yy}) = g_x f_x + g_y f_y$$

e, portanto,

$$\oint_{\partial D} (f_x dy - f_y dx) g = \iint_D (g_x f_x + g_y f_y) dx dy.$$

6. O campo vetorial $\mathbf{F} = \mathbf{i}$ tem componentes $L = 1$, $M = 0$ e $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$. Da fórmula da divergência (5.28), obtemos

$$\oint_{\gamma} n_1(x, y) ds = \oint_{\gamma} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) ds = \iint_D (\operatorname{div} \mathbf{F}) dx dy = 0,$$

onde a região D é delimitada por γ . Procedendo de forma similar com o campo $\mathbf{F} = \mathbf{j}$, obtemos

$$\oint_{\gamma} n_2(x, y) ds = \oint_{\gamma} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) ds = \iint_R (\operatorname{div} \mathbf{F}) dx dy = 0.$$

7. Considerando o campo vetorial $\mathbf{F} = f(x, y) \mathbf{i}$, obtemos $L = f(x, y)$, $M = 0$ e $\operatorname{div} \mathbf{F} = f_x$. Assim, pela fórmula vetorial do Teorema de Green, obtemos

$$\oint_{\partial D} n_1 f(x, y) ds = \oint_{\partial D} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) ds = \iint_D (\operatorname{div} \mathbf{F}) dx dy = \iint_D f_x dx dy.$$