SESIÓN DISTRIBUCIÓN MUESTRAL Y TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL

CONTENIDOS:

- La distribución de muestreo.
- Ley de los grandes números.
- Teorema del límite central.
- Distribución de la población, distribución de la muestra y distribución muestral.
- Cálculo de probabilidades con la distribución muestral.
- Distribución muestral de proporciones.

LA DISTRIBUCIÓN DE MUESTREO

La distribución muestral y el teorema del límite central son conceptos fundamentales en estadística y ciencia de datos. Estos tópicos permiten entender cómo se comportan las muestras extraídas de una población y cómo inferir propiedades de la población a partir de muestras.

La distribución de muestreo es la distribución de probabilidad de un estadístico (como la media, la proporción o la varianza) calculado a partir de múltiples muestras de una población.

Si tomamos varias muestras de tamaño n de una población y calculamos un estadístico (por ejemplo, la media) para cada muestra, la distribución de esos estadísticos forma una distribución de muestreo.

Propiedades de la Distribución de Muestreo de la Media

Media de la distribución muestral:

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \mu$$

Ilustración 1 Fórmula media de la distribución muestral

Es decir, la media de la distribución de muestreo es igual a la media de la población.

Desviación estándar de la distribución muestral (Error estándar):

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Ilustración 2 Fórmula desviación estándar de la distribución muestral

Donde:

- σ es la desviación estándar de la población
- n es el tamaño de la muestra

Cuanto mayor es el tamaño de la muestra n, menor es el error estándar, lo que significa que las medias muestrales estarán más concentradas alrededor de la media poblacional.

Ejemplo

Supongamos que la población tiene una media μ=50 y una desviación estándar σ=10. Si tomamos muestras de tamaño n = 25, la distribución de muestreo de la media tendrá:

Media: E $(\bar{X})$ = 50

Desviación estándar (error estándar):

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$$

Ilustración 3 Ejemplo desviación estándar

Esto significa que la media de las muestras oscilará en torno a 50 con una variabilidad de 2 unidades.

Código en Python

```python
import numpy as np

# Datos de la población
mu = 50  # Media de la población
sigma = 10  # Desviación estándar de la población
n = 25  # Tamaño de la muestra

# Calcular la media de la distribución de muestreo
media_muestral = mu  # La media de la distribución de muestreo es igual a la media poblacional

# Calcular el error estándar (desviación estándar de la distribución de muestreo)
error_estandar = sigma / np.sqrt(n)

# Imprimir los resultados
print(f"Media de la distribución de muestreo: {media_muestral}")
print(f"Error estándar: {error_estandar}")
```

Ilustración 4 Código en Python

Salida esperada

Si corres el código anterior, obtendrás:

```
Media de la distribución de muestreo: 50
Error estándar: 2.0
```

Ilustración 5 Salida

LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

La Ley de los Grandes Números (LGN) es un principio fundamental en la teoría de la probabilidad y la estadística. Establece que, a medida que el tamaño de la muestra n aumenta, la media muestral $\bar{X}$ se aproxima a la media poblacional μ.

Fórmula matemática

Si X1, X2, …, Xn son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media μ, entonces:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to \mu \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Ilustración 6 Fórmula ley de grandes números

Ejemplo

Lanzamiento de una moneda:

- Si lanzamos una moneda 10 veces, la proporción de caras puede ser diferente de 0.5.
- Si lanzamos la moneda 10,000 veces, la proporción de caras estará muy cerca de 0.5.

Promedio de alturas:

- Si medimos la altura de 5 personas, la media puede diferir de la media poblacional.
- Si medimos la altura de 100,000 personas, el promedio se acercará a la media real de la población.

Simulación en Python

Podemos simular la Ley de los Grandes Números para observar cómo la media muestral converge hacia la media poblacional. Aquí tienes un ejemplo usando Python:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros
mu = 0.5  # Media poblacional (probabilidad de cara)
n_experimentos = 10000  # Número de lanzamientos de moneda
muestras_acumuladas = np.cumsum(np.random.rand(n_experimentos) < mu) / np.arange(1, n_experimentos + 1)

# Gráfico
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(range(1, n_experimentos + 1), muestras_acumuladas, label="Proporción acumulada de caras", color="blue")
plt.axhline(y=mu, color="red", linestyle="--", label="Media poblacional (μ = 0.5)")
plt.xlabel("Número de lanzamientos")
plt.ylabel("Proporción de caras")
plt.title("Ley de los Grandes Números: Convergencia hacia μ")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

Explicación del código:

- Simulamos lanzamientos de una moneda justa ($\mu=0.5$).
- Calculamos la proporción acumulada de caras después de cada lanzamiento.
- Graficamos cómo esta proporción converge hacia $\mu=0.5$ a medida que aumenta el número de lanzamientos.

Tipos de Ley de los Grandes Números

Ley Débil de los Grandes Números (LGN Débil)

- Garantiza que la media muestral converge en probabilidad a la media poblacional.
- Se expresa como:

$$P\left(\left|\bar{X}-\mu\right|>\epsilon\right)\to 0 \quad \text{cuando } n\to\infty$$

Ilustración 7 Expresión LGN Débil

Es decir, la probabilidad de que la media muestral difiera de la media poblacional en más de ϵ se hace cada vez más pequeña a medida que n crece.

Ley Fuerte de los Grandes Números (LGN Fuerte)

- Afirma que la media muestral converge casi seguramente a la media poblacional.
- Se expresa como:

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\bar{X}=\mu\right)=1$$

Ilustración 8 Expresión LGN Fuerte

Lo que significa que, con probabilidad 1, la media muestral será igual a la media de la población cuando n sea muy grande.

Importancia de la Ley de los Grandes Números

- Fundamento de la estadística inferencial: Justifica la representatividad de muestras grandes.
- Explica la estabilidad de promedios en fenómenos aleatorios.
- Base para estimaciones confiables en encuestas, muestreos y predicciones.

TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL

El Teorema del Límite Central (TLC) es un concepto fundamental en estadística y probabilidad. Afirma que, bajo ciertas condiciones, la distribución de la media muestral se aproxima a una distribución normal, sin importar la forma original de la distribución de la población.

Definición Matemática

Si X1, X2,…,Xn son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d) con media μ y varianza σ^2 , entonces, para un tamaño de muestra suficientemente grande n, la distribución de la media muestral:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Ilustración 9 Fórmula de distribución de la media muestral

se aproxima a una distribución normal con media μ y varianza σ^2/n:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Ilustración 10 Fórmula teorema limite central

Consecuencias del TLC

- Para muestras grandes, la media muestral sigue una distribución normal, incluso si la población no es normal.

- El error estándar de la media disminuye conforme aumenta el tamaño de la muestra:

$$\text{Error estándar} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Ilustración 11 Fórmula error estándar

- El TLC es la base de muchas técnicas estadísticas, incluyendo pruebas de hipótesis e intervalos de confianza.

Ejemplo Práctico

Tiempo de espera en un restaurante:

- Supongamos que el tiempo de espera sigue una distribución desconocida, con una media de 15 minutos y una varianza de 9.
- Si tomamos muestras de n = 30 clientes y calculamos el promedio de espera, la distribución de esas medias muestrales se aproximará a una normal, aunque la distribución original no lo sea.

$$\text{Error estándar} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{30}} = \frac{3}{\sqrt{30}} \approx 0.5477\,\text{minutos.}$$

Ilustración 12 Error estándar

Por lo tanto, la distribución de las medias muestrales será aproximadamente:

$$\bar{X} \sim N(15, 0.5477^2)$$

Ilustración 13 Distribución de las medias muestrales

Esto significa que podemos usar esta aproximación para calcular probabilidades o construir intervalos de confianza para el tiempo de espera promedio.

Altura de estudiantes en una universidad:

- Si la distribución original de alturas es asimétrica (por ejemplo, sesgada hacia la derecha). Al tomar muestras de tamaño n ≥ 30, la distribución de las alturas promedio tenderá a ser normal.
  Si la media de la población es μ=1.70m y la desviación estándar es σ=0.08m, entonces la distribución de las medias muestrales será:

$$\bar{X} \sim N\left(1.70, \frac{0.08^2}{n}\right)$$

Ilustración 14 Distribución de medias muestrales

Para n=50, el error estándar sería:

$$\text{Error estándar} = \frac{0.08}{\sqrt{50}} \approx 0.0113\,\text{m}.$$

Esto facilita el análisis de las alturas promedio, ya que podemos asumir normalidad incluso si la distribución original no lo es.

Importancia del TLC

- Permite realizar inferencias estadísticas, incluso cuando la distribución poblacional es desconocida.
- Es la base para construir intervalos de confianza y realizar pruebas de hipótesis.
- Explica por qué las estadísticas basadas en grandes muestras siguen distribuciones normales, lo que facilita su análisis.

Simulación en Python

Podemos simular el Teorema del Límite Central para observar cómo la distribución de las medias muestrales converge hacia una distribución normal, incluso si la población original no es normal. Aquí tienes un ejemplo:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import expon


# Parámetros
n = 30  # Tamaño de la muestra
num_simulaciones = 10000  # Número de simulaciones
poblacion = expon(scale=1)  # Distribución exponencial (no normal)

# Simular medias muestrales
medias_muestrales = [np.mean(poblacion.rvs(n)) for _ in range(num_simulaciones)]

# Gráfico
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.hist(medias_muestrales, bins=30, density=True, color="skyblue", edgecolor="black", label="Distribución de medias muestrales")
x = np.linspace(min(medias_muestrales), max(medias_muestrales), 100)
plt.plot(x, norm.pdf(x, loc=np.mean(medias_muestrales), scale=np.std(medias_muestrales)), color="red", label="Distribución normal ajustada")
plt.title("Teorema del Límite Central: Convergencia hacia la normalidad")
plt.xlabel("Media muestral")
plt.ylabel("Densidad")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

Explicación del código:

- Generamos muestras de tamaño n=30 a partir de una distribución exponencial (no normal).
- Calculamos las medias muestrales para cada simulación.
- Graficamos la distribución de las medias muestrales y comparamos con una distribución normal ajustada.

El Teorema del Límite Central es esencial para la inferencia estadística, ya que permite el uso de herramientas basadas en la distribución normal incluso cuando los datos provienen de distribuciones arbitrarias. Su capacidad para garantizar la convergencia hacia la normalidad hace que sea una piedra angular en campos como la economía, la medicina, la ingeniería y las ciencias sociales. Al comprender y aplicar este teorema, podemos analizar datos de manera más robusta y tomar decisiones informadas basadas en evidencia estadística.

DISTRIBUCIÓN DE LA POBLACIÓN, DISTRIBUCIÓN DE LA MUESTRA Y DISTRIBUCIÓN MUESTRAL

Distribución de la Población:

- Representa la distribución de una variable en toda la población.
- Incluye todos los posibles valores que puede tomar la variable de interés.
- Suelen desconocerse sus parámetros (media μ y varianza σ^2).
- Ejemplo: La distribución de alturas de todos los estudiantes de una universidad.

Distribución de la Muestra:

- Describe la distribución de la variable en una muestra específica extraída de la población.
- Su media y varianza ($\bar{X}$, s^2) son estimaciones de los parámetros poblacionales.
- Ejemplo: Alturas de una muestra de 100 estudiantes seleccionados al azar de la universidad.

Distribución Muestral:

- Es la distribución de un estadístico (como la media o la proporción) calculado a partir de muchas muestras de tamaño n.
- Ejemplo: La distribución de medias de altura obtenidas al tomar múltiples muestras de 100 estudiantes cada una.
- Importante:
  - Si el tamaño de la muestra es suficientemente grande, la distribución muestral de la media se aproxima a una normal (según el Teorema del Límite Central).
  - Su media es μ y su desviación estándar es $\sigma/\sqrt{\mathrm{n}}$ (error estándar).

Relación entre las distribuciones

1. Distribución de la Población:
   - Es la distribución original y puede tener cualquier forma (normal, uniforme, sesgada, etc.).
   - Contiene todos los datos de interés, pero generalmente no es accesible en su totalidad.
2. Distribución de la Muestra:

- Es una representación parcial de la población, obtenida mediante un proceso de muestreo.
- Sirve como base para calcular estadísticos (como la media y la varianza) que estiman los parámetros poblacionales.

3. Distribución Muestral:
   - Describe el comportamiento de los estadísticos (como la media muestral) cuando se repite el proceso de muestreo muchas veces.
   - Es fundamental para la inferencia estadística, ya que permite hacer inferencias sobre los parámetros poblacionales a partir de los estadísticos muestrales.

Ejemplo práctico:

Supongamos que queremos estimar el ingreso promedio de una ciudad:

1. Distribución de la Población:
   - Representa los ingresos de todos los habitantes de la ciudad.
   - Podría tener una forma sesgada hacia la derecha, ya que hay pocas personas con ingresos muy altos y muchas con ingresos bajos o medios.
2. Distribución de la Muestra:
   - Consiste en los ingresos de 200 personas seleccionadas al azar de la ciudad.
   - Calculamos la media muestral ($\bar{X}$) y la varianza muestral (s^2) para estimar los parámetros poblacionales.
3. Distribución Muestral:
   - Imaginemos que repetimos el proceso de muestreo muchas veces, tomando diferentes muestras de 200 personas cada vez y calculando la media de ingresos para cada muestra.
   - La distribución de estas medias muestrales será aproximadamente normal (según el TLC), con:
     - Media igual a la media poblacional (μ).
     - Error estándar igual a $\frac{\sigma}{\sqrt{200}}$

Simulación en Python

Podemos simular las tres distribuciones para comprender mejor su relación:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import norm

# Parámetros de la población
np.random.seed(42)
# Distribución exponencial (no normal)
poblacion = np.random.exponential(scale=10, size=100000)

# Tamaño de la muestra
n = 200
num_simulaciones = 1000

# Simular múltiples muestras y calcular sus medias
medias_muestrales = [np.mean(np.random.choice(poblacion, size=n))
                     for _ in range(num_simulaciones)]

# Gráficos
plt.figure(figsize=(15, 5))

# Distribución de la población
plt.subplot(1, 3, 1)
plt.hist(poblacion, bins=50, color="blue", alpha=0.7, edgecolor="black")
plt.title("Distribución de la Población")
plt.xlabel("Ingresos")
plt.ylabel("Frecuencia")

# Distribución de una muestra
muestra = np.random.choice(poblacion, size=n)
plt.subplot(1, 3, 2)
plt.hist(muestra, bins=20, color="green", alpha=0.7, edgecolor="black")
plt.title("Distribución de la Muestra")
plt.xlabel("Ingresos")
plt.ylabel("Frecuencia")

# Distribución muestral
plt.subplot(1, 3, 3)
plt.hist(medias_muestrales, bins=30, color="orange", alpha=0.7, edgecolor="black")
plt.title("Distribución Muestral")
plt.xlabel("Medias Muestrales")
plt.ylabel("Frecuencia")

plt.tight_layout()
plt.show()
```

Ilustración 15 Simulación en Python

Explicación del código:

- Generamos una población con una distribución exponencial (sesgada).
- Extraemos una muestra de tamaño n=200 y mostramos su distribución.
- Simulamos múltiples muestras y graficamos la distribución de las medias muestrales, que tiende a ser normal según el TLC.

CÁLCULO DE PROBABILIDADES CON LA DISTRIBUCIÓN MUESTRAL

Para calcular probabilidades usando la distribución muestral, seguimos estos pasos:

- Identificar el estadístico:
  - Puede ser la media muestral ($\overline{X}$), la proporción muestral ($\hat{p}$), entre otros
- Determinar la distribución muestral:
  - Si la población sigue una distribución normal, la media muestral también lo hará.
  - Si la población no es normal pero el tamaño de la muestra es grande ($n \geq 30$), podemos usar el Teorema del Limite Central (TLC) para aproximar la distribución muestral a una normal.
- Calcular probabilidades (SE):
  - Para la media muestral:

$$SE = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Ilustración 16 Fórmula para calcular media muestral

  - Para la proporción muestral:

$$SE = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Ilustración 17 Fórmula para calcular proporción muestral

- Estandarizar con la distribución normal estándar Z:
  - Convertimos el valor de interés a una puntuación Z

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Ilustración 18 Estandarizar con la distribución normal estándar Z

  - Luego, usamos tablas Z o software estadístico para encontrar la probabilidad.

Ejemplo:

Si la media poblacional es μ=50 y la desviación estándar σ=10, calcular P ($\bar{X}$ > 52) para una muestra de tamaño n = 36

Paso 1: Calcular el error estándar

$$SE = \frac{10}{\sqrt{36}} = \frac{10}{6} = 1.67$$

Ilustración 19 Calculo del error estándar

Paso 2: Convertir a Z

$$Z = \frac{52 - 50}{1.67} = \frac{2}{1.67} \approx 1.20$$

Ilustración 20 Conversión a Z

Paso 3: Consultar la tabla Z

$$P(Z > 1.20) \approx 0.1151$$

Ilustración 21 Consultar tabla Z

Interpretación:

La probabilidad de que la media muestral sea mayor a 52 es aproximadamente 11.51%.

Cálculo en Python

Podemos realizar este cálculo en Python utilizando la biblioteca scipy.stats:

```python
from scipy.stats import norm

# Parámetros
mu = 50       # Media poblacional
sigma = 10    # Desviación estándar poblacional
n = 36        # Tamaño de la muestra
x_bar = 52    # Valor de la media muestral

# Paso 1: Calcular el error estándar
error_estandar = sigma / np.sqrt(n)

# Paso 2: Convertir a Z
z = (x_bar - mu) / error_estandar

# Paso 3: Calcular la probabilidad
prob = 1 - norm.cdf(z)

print(f"Error estándar: {error_estandar:.2f}")
print(f"Valor Z: {z:.2f}")
print(f"P(X̄ > 52): {prob:.4f} ({prob * 100:.2f}%)")
```

Ilustración 22 Calculo en Python

Salida esperada:

```
Error estándar: 1.67
Valor Z: 1.20
P(X̄ > 52): 0.1151 (11.51%)
```

Ilustración 23 Salida

DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DE PROPORCIONES

La distribución muestral de proporciones describe cómo varía la proporción muestral $\hat{p}$ en múltiples muestras tomadas de una población.

Propiedades:

- Si p es la proporción poblacional y se toman muestras de tamaño n, entonces la proporción muestral $\hat{p}$ sigue aproximadamente una distribución normal cuando n es suficiente grande (np ≥ 5 y n(1 − p) ≥ 5)
- La media de la distribución muestral de $\hat{p}$ es igual a la proporción poblacional:

$$\mu_{\hat{p}} = p$$

Ilustración 24 Distribución muestral de proporciones

- El error estándar (SE) de la proporción muestral se calcula como:

$$SE = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Ilustración 25 Error estándar

Ejemplo:

Si el 40% de una población prefiere un producto (p > 0.40) calcular la probabilidad de que en una muestra de tamaño n = 100, la proporción muestral sea mayor a 0.45.

Paso 1: Calcular el error estándar

$$SE = \sqrt{\frac{0.40(1-0.40)}{100}} = \sqrt{\frac{0.40 \times 0.60}{100}} = \sqrt{0.0024} \approx 0.049$$

Ilustración 26 Calculo de error estándar

Paso 2: Convertir a puntuación Z

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{SE} = \frac{0.45 - 0.40}{0.049} = \frac{0.05}{0.049} \approx 1.02$$

Ilustración 27 Conversión a puntuación Z

Paso 3: Buscar en la tabla Z

$$P(Z > 1.02) \approx 0.1539$$

Ilustración 28 Buscar resultado en tabla Z

Conclusión:

La probabilidad de que la proporción muestral supere 0.45 en una muestra de tamaño 100 es aproximadamente 15.39%.

En Python

```
from scipy.stats import norm
import math

# Parámetros
p = 0.40        # Proporción poblacional
n = 100         # Tamaño de la muestra
p_hat = 0.45    # Proporción muestral deseada

# Paso 1: Calcular el error estándar (SE)
error_estandar = math.sqrt((p * (1 - p)) / n)

# Paso 2: Convertir a puntuación Z
z = (p_hat - p) / error_estandar

# Paso 3: Calcular la probabilidad P(p̂ > 0.45)
prob = 1 - norm.cdf(z)

# Imprimir resultados
print(f"Error estándar: {error_estandar:.4f}")
print(f"Valor Z: {z:.2f}")
print(f"P(p̂ > 0.45): {prob:.4f} ({prob * 100:.2f}%)")
```

Ilustración 29 Calculo en Python

Salida esperada

Al ejecutar el código anterior, obtendrás:

```
Error estándar: 0.0490
Valor Z: 1.02
P(p̂ > 0.45): 0.1539 (15.39%)
```

Explicación del Código

Parámetros iniciales:

- p: Proporción poblacional (p=0.40).
- n: Tamaño de la muestra (n=100).
- p_hat: Proporción muestral deseada ($\hat{p}$ =0.45).

Cálculo del error estándar (SE):

- Usamos la fórmula:

$$SE = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Ilustración 30 Fórmula

- En Python, esto se implementa como:

```python
error_estandar = math.sqrt((p * (1 - p)) / n)
```

Ilustración 31 Implementación en Python

Estandarización a Z:

- Usamos la fórmula:

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{SE}$$

Ilustración 32 Fórmula

- En Python

```
z = (p_hat - p) / error_estandar
```

Ilustración 33 Calculo en Python

Cálculo de la probabilidad:

- Usamos la función de distribución acumulada (cdf) de la distribución normal estándar para encontrar P(Z≤z).
- Como queremos P($\hat{p}$ >0.45), calculamos:

$$P(\hat{p} > 0.45) = 1 - P(Z \leq z)$$

Ilustración 34 Fórmula

- En Python

```
prob = 1 - norm.cdf(z)
```

Ilustración 35 Calculo en Python

Aplicaciones Prácticas

1. Encuestas y estudios de opinión:
   - Determinar la probabilidad de que una proporción muestral (por ejemplo, el porcentaje de personas que apoyan a un candidato político) exceda o sea menor que cierto valor.
   - Evaluar la precisión de los resultados de encuestas basadas en muestras.
2. Control de calidad en manufactura:
   - Estimar la probabilidad de que un defecto ocurra en más de una cierta proporción de productos fabricados.
   - Monitorear procesos para asegurar que cumplen con estándares de calidad.
3. Pruebas de hipótesis sobre proporciones:
   - Determinar si una proporción observada en una muestra es significativamente diferente de una proporción hipotética.
   - Aplicar pruebas estadísticas como la prueba Z para proporciones.
4. Marketing y estudios de mercado:
   - Evaluar la aceptación de un nuevo producto en una población objetivo.
   - Calcular la probabilidad de alcanzar ciertos umbrales de éxito en campañas publicitarias.

Importancia del Teorema del Límite Central

Este ejemplo también ilustra cómo el Teorema del Límite Central (TLC) permite aproximar la distribución de la proporción muestral $\hat{p}$ a una distribución normal cuando el tamaño de la muestra es suficientemente grande ($n \geq 30$). Esto facilita el uso de herramientas estadísticas basadas en la distribución normal para hacer inferencias sobre proporciones poblacionales.