

Trabalho Prático: Problema de Roteamento de Veículos com Janelas de Tempo

Daniel Nascimento Paiva
Universidade Federal de Minas Gerais
daniel-np@ufmg.br

Aluno de Graduação

RESUMO

Para este trabalho da matéria de Modelagem e Resolução de Problemas de Otimização Combinatória será implementada e analisada a formulação do Problema de Roteamento de Veículos com Janelas de Tempo (Vehicle Routing Problem with Time Windows - VRPTW) e também uma adaptação dele considerando capacidades diferentes para cada veículo.

VRPTW, Branch and Bound, formulações

1. Problema do Roteamento de Veículos com Janelas de Tempo

O problema de roteamento de veículos (VRP) envolve encontrar um conjunto de rotas que começam e terminam em um depósito e que juntas cobrem um conjunto de clientes. Cada cliente tem uma demanda específica, e nenhum veículo pode atender mais clientes do que sua capacidade permite. O objetivo é minimizar a distância total percorrida, o número de veículos utilizados, ou uma combinação desses fatores. O VRP é tido como um problema NP-hard e os algoritmos exatos propostos na literatura são capazes de resolver apenas problemas de menores dimensões e na maioria das vezes não levam em consideração a complexidade de problemas reais.

Neste trabalho, será analisado o problema de roteamento de veículos com janelas de tempo (VRPTW), que é uma generalização do VRP onde o serviço em qualquer cliente começa dentro de um intervalo de tempo específico, chamado de janela de tempo. Janelas de tempo são chamadas de "soft" quando podem ser consideradas não obrigatórias por um custo de penalidade. Elas são "hard" quando não podem ser violadas, ou seja, se um veículo chegar muito cedo a um cliente, deve esperar até que a janela de tempo abra; e não é permitido chegar atrasado. Este é o caso considerado nesse trabalho.

O VRPTW tem se tornado uma ferramenta essencial na modelagem de vários aspectos do design e operação da cadeia de suprimentos. Aplicações importantes do VRPTW incluem entregas a supermercados, entregas bancárias e postais, coleta industrial de lixo, roteamento de ônibus escolares, serviço de patrulha de segurança e e-commerce.

2. Formulações

A abordagem exata é baseada em um problema clássico de programação linear inteira mista (MIP) com a minimização da distância total percorrida. Esta formulação, introduzida por Cordeau et al. (2002), é comumente usada quando se discute o VRPTW. Geralmente, assume-se que os veículos são homogêneos com a mesma capacidade. Após essa primeira formulação, será apresentada uma com veículos heterogêneos com capacidades diferentes. Os conjuntos, parâmetros e a modelagem do VRPTW estão elaborados a seguir:

2.1. Formulação Clássica

O objetivo é projetar um conjunto de rotas de veículos com a distância total mínima, satisfazendo que cada cliente seja atendido apenas uma vez, cada rota comece e termine no depósito, e as restrições de capacidade e janela de tempo sejam garantidas. Nesse sentido, o VRPTW pode ser formulado da seguinte forma:

2.1.1. Conjuntos e Parâmetros

- C : Conjunto de clientes, onde os clientes são denotados por $1, 2, \dots, n$.
- N : Conjunto de nós visitados, consistindo no conjunto C com o nó 0 (depósito).
- V : Conjunto de veículos.
- Q : Capacidade do veículo, $Q \geq 0$.
- d_i : Demanda do cliente i ($i \in C$), $d_i \geq 0$.
- d_{ij} : Distância de viajar de i para j ($i, j \in N, i \neq j$), $c_{ij} \geq 0$.
- t_{ij} : Tempo de viagem da aresta (i, j) ($i, j \in N, i \neq j$), $t_{ij} > 0$.
- (e_i, l_i) : Janela de tempo para o cliente i ($i \in N$).
- s_i : Tempo de serviço no cliente i ($i \in C$), $s_i \geq 0$.

O modelo contém dois conjuntos de variáveis de decisão, como:

2.1.2. Variáveis

- $x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{se o veículo } k \text{ atravessa diretamente de } i \text{ para } j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
com $i, j \in N, k \in V, i \neq j$
- b_{ik} : o tempo em que o veículo k começa a atender o cliente i .

2.1.3. Modelo

$$\min f_{VRPTW} = \sum_{k \in V} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} d_{ij} x_{ijk} \quad (1)$$

s.a:

$$\sum_{j \in N} \sum_{k \in V} x_{ijk} = 1 \quad \forall i \in C \quad (2)$$

$$\sum_{i \in C} d_i \sum_{j \in N} x_{ijk} \leq Q \quad \forall k \in V \quad (3)$$

$$\sum_{j \in N} x_{0jk} \leq 1 \quad \forall k \in V \quad (4)$$

$$\sum_{i \in N} x_{ihk} - \sum_{j \in N} x_{hjk} = 0 \quad \forall h \in C, \forall k \in V \quad (5)$$

$$b_{ik} + s_i + t_{ij} - M(1 - x_{ijk}) \leq b_{jk} \quad \forall i, j \in N, \forall k \in V \quad (6)$$

$$e_i \leq b_{ik} \leq l_i \quad \forall i \in N, \forall k \in V \quad (7)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in N, \forall k \in V \quad (8)$$

$$b_{ik} \geq 0 \quad \forall i \in N, \forall k \in V \quad (9)$$

A função objetivo (1) visa minimizar a distância total percorrida. A restrição (2) garante que cada cliente seja visitado exatamente uma vez. A restrição (3) assegura que a capacidade do veículo não seja excedida. As restrições (4), (5) afirmam que cada veículo deve partir do depósito 0, ir para outro destino após chegar a um cliente. A restrição (6) indica a relação entre o tempo de partida em um cliente j com o tempo de partida, tempo de serviço e tempo de viagem do seu predecessor i em uma rota. As desigualdades (7) garantem que a janela de tempo seja satisfeita enquanto a formulação (8) e (9) determinam o domínio das variáveis de decisão.

M é um escalar grande e pode ser substituído por $\max\{l_i + s_i + t_{ij} - e_j, 0\} \quad \forall i, j \in C$.

Além disso, pode-se notar que as variáveis de tempo de início de serviço b_{ik} impõem uma orientação única de rota para cada veículo k , o que elimina qualquer subtour. Portanto, a restrição de eliminação de subtour do VRPTW é desnecessária, e, em vez disso, o problema de subtour pode ser implicado na restrição (6).

2.2. Formulação Adaptada

A formulação adaptada considera veículos heterogêneos. Assim, será adicionado um parâmetro de capacidade para cada veículo, e a restrição (3) será modificada para a restrição (10).

- Q_k : Capacidade do veículo k , $Q_k \geq 0$.

$$\sum_{i \in C} d_i \sum_{j \in N} x_{ijk} \leq Q_k \quad \forall k \in V \quad (10)$$

3. Resultados e Discussões

As duas formulações apresentadas foram implementadas utilizando a linguagem Python, a biblioteca Pyomo e o solver Gurobi, obtido por meio de uma licença acadêmica. Os testes foram realizados em um computador com processador AMD Ryzen 5 4600H, 16 GB de RAM e 6 threads. Um tempo limite de 30 minutos (1800 segundos) foi configurado para cada instância.

As instâncias utilizadas foram propostas por Solomon (1987) e obtidas no site da CVRPLIB. Elas são classificadas em dois tipos: randômicas, onde os nós foram gerados aleatoriamente, e clusterizadas, onde os nós estão agrupados em clusters. O conjunto original de instâncias possui 100 clientes; para este trabalho, foram analisadas apenas as instâncias com 25 e 50 clientes devido à complexidade do problema. As instâncias variam em parâmetros como janelas de tempo e demanda de cada cliente. Para as formulações clássicas, a frota é composta por 25 veículos com capacidade de 200, enquanto para a formulação adaptada, as frotas são de 25 veículos com capacidades variando de 100 a 200.

A seguir, apresentam-se exemplos de como os nós estão organizados para os dois tipos de instâncias com 100 clientes:

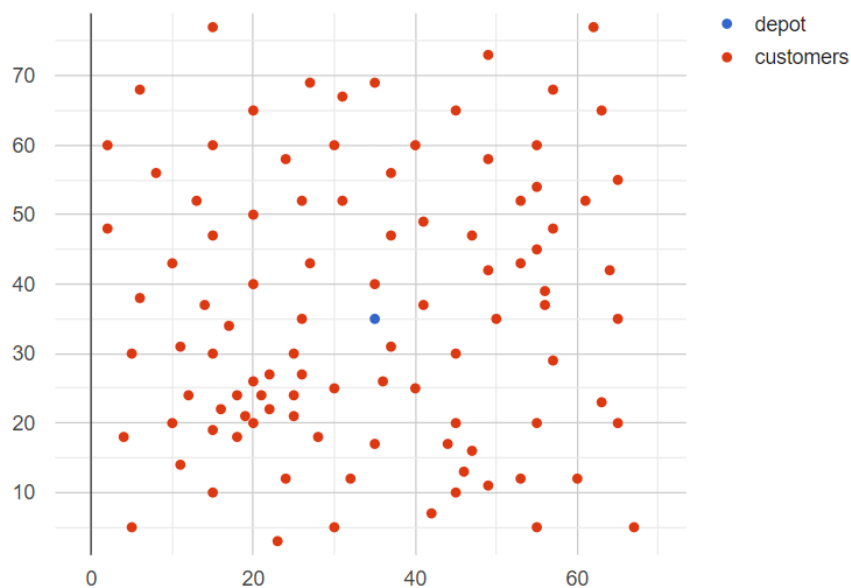


Figura 1: Exemplo de instância do tipo randômica com 100 clientes

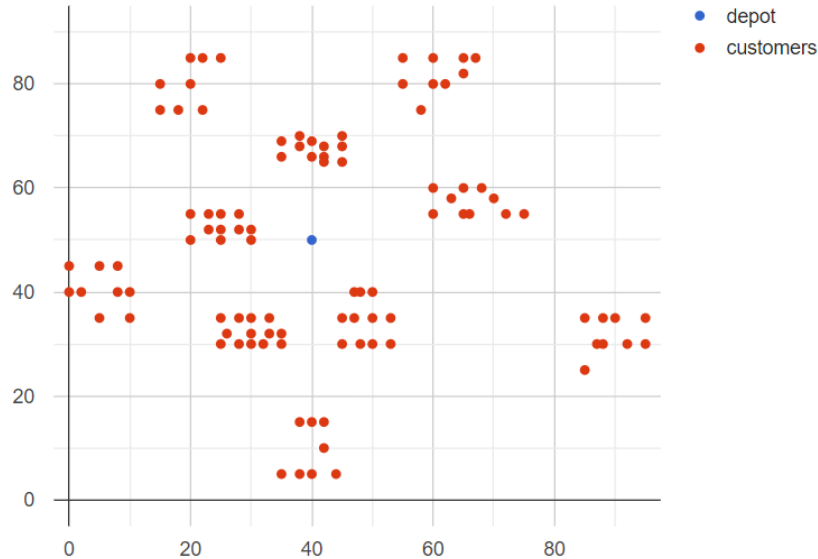


Figura 2: Exemplo de instância do tipo clusterizada com 100 clientes

A seguir, são apresentados os resultados obtidos para as formulações clássica e adaptada, com 25 e 50 clientes, para as instâncias dos tipos randômicas (R) e clusterizadas (C). Para cada instância, foram fornecidos os seguintes dados: nome da instância, relaxação linear no nó raiz da árvore de Branch and Bound (LBR), limite superior (UB), limite inferior (LB), gap de otimalidade (GAP) em %, gap de relaxação linear (GAP_{LBR}) na raiz do algoritmo Branch-and-Bound ($\frac{UB-LBR}{LBR}$) em %, tempo de execução em segundos e número de nós no algoritmo de Branch and Bound. Para as formulações clássicas, também foram apresentados os valores ótimos conhecidos das instâncias.

Tabela 1: Instâncias do tipo R com 25 Clientes para a formulação clássica

Instance	LBR	OTM	UB	LB	GAP(%)	$GAP_{LBR}(\%)$	Tempo	Nº Nós
r101	618.33	618.33	618.33	618.33	0.0%	0.00%	0.63	1
r102	356.50	548.11	548.11	511.45	6.8%	53.75%	1800.00	279640
r103	301.71	455.70	455.70	389.55	14.5%	51.04%	1800.00	217279
r104	286.66	437.06	437.06	352.48	19.35%	52.46%	1800.00	162648
r105	453.25	531.54	531.54	531.54	0.0%	17.27%	4.18	904
r106	318.74	466.48	466.48	410.19	12.07%	46.35%	1800.00	268903
r107	292.54	429.03	429.03	366.27	14.063%	46.66%	1800.00	173231
r108	277.49	398.29	398.29	339.55	14.74%	43.54%	1800.00	164004

Tabela 2: Instâncias do tipo C com 25 Clientes para a formulação clássica

Instance	LBR	OTM	UB	LB	GAP(%)	$GAP_{LBR}(\%)$	Tempo	Nº Nós
c101	191.81	191.81	191.81	191.81	0.00%	0.00%	0.73	1
c102	152.51	190.74	190.74	190.74	0.00%	25.10%	156.46	71496
c103	124.58	190.74	190.74	145.21	23.87%	53.13%	1800.00	232252
c104	122.82	187.45	187.45	135.25	27.85%	52.70%	1800.00	199401
c105	184.03	191.81	191.81	191.81	0.00%	4.23%	1.23	6
c106	191.81	191.81	191.81	191.81	0.00%	0.00%	0.73	1
c107	174.78	191.81	191.81	191.81	0.00%	9.72%	1.83	31
c108	78.85	191.81	191.81	191.81	0.00%	143.09%	237.17	44560

Tabela 3: Instâncias do tipo R com 25 Clientes para a formulação adaptada

Instance	LBR	UB	LB	GAP(%)	$GAP_{LBR}(\%)$	Tempo	Nº Nós
r101	618.33	618.33	618.33	0.00%	0.00%	0.18	1
r102	356.50	548.11	471.01	14.10%	53.76%	1800.00	190897
r103	301.71	464.21	353.65	23.80%	53.84%	1800.00	172266
r104	286.66	417.77	327.86	21.50%	45.75%	1800.00	147423
r105	453.25	531.54	531.54	0.00%	17.27%	317.89	129366
r106	318.74	466.48	357.60	23.30%	46.36%	1800.00	205772
r107	292.54	426.73	332.67	22.00%	45.91%	1800.00	158866
r108	277.49	398.29	318.33	20.10%	43.55%	1800.00	135902

Tabela 4: Instâncias do tipo C com 25 Clientes para a formulação adaptada

Instance	LBR	UB	LB	GAP(%)	$GAP_{LBR}(\%)$	Tempo	Nº Nós
c101	191.81	191.81	191.81	0.00%	0.00%	0.83	1
c102	152.51	190.74	171.05	10.32%	25.05%	1800.00	313942
c103	124.58	190.74	134.64	29.41%	53.09%	1800.00	163167
c104	122.82	206.26	130.35	36.80%	67.96%	1800.00	154650
c105	184.03	191.81	191.81	0.00%	4.23%	1.23	5
c106	191.81	191.81	191.81	0.00%	0.00%	0.82	1
c107	174.78	191.81	191.81	0.00%	9.73%	5.15	466
c108	78.85	191.81	164.07	14.47%	143.32%	1800.00	338010

Tabela 5: Instâncias do tipo R com 50 Clientes para a formulação clássica

Instance	LBR	OTM	UB	LB	GAP(%)	$GAP_{LBR}(\%)$	Tempo	Nº Nós
r101	1031.95	1046.70	1046.70	1046.70	0.00%	1.43%	2.13	9
r102	568.44	905.22	905.22	728.83	19.49%	59.23%	1800.00	6325
r103	463.98	772.90	783.63	532.18	32.09%	68.89%	1800.00	2697
r104	422.67	626.40	662.33	465.68	29.69%	56.69%	1800.00	6119
r105	786.27	914.31	914.31	914.31	0.00%	16.30%	729.05	76619
r106	508.78	790.76	790.76	536.67	32.13%	55.40%	1800.00	11537
r107	443.19	712.10	733.64	481.75	34.33%	65.54%	1800.00	8810
r108	414.36	618.70	662.26	440.02	33.56%	59.83%	1800.00	12826

Tabela 6: Instâncias do tipo C com 50 Clientes para a formulação clássica

Instance	LBR	OTM	UB	LB	GAP(%)	$GAP_{LBR}(\%)$	Tempo	Nº Nós
c101	362.05	363.25	363.25	363.25	0.00%	0.33%	1.54	1
c102	262.93	362.17	362.17	333.66	7.87%	37.87%	1800.00	115787
c103	199.30	362.17	404.42	218.83	45.90%	103.01%	1800.00	16189
c104	196.12	359.00	440.22	210.05	52.29%	124.49%	1800.00	16045
c105	360.45	364.76	364.76	364.76	0.00%	1.19%	2.43	1
c106	360.58	364.76	364.76	364.76	0.00%	1.16%	2.43	1
c107	360.58	364.76	364.76	364.76	0.00%	1.16%	2.13	1
c108	153.11	363.25	363.25	284.97	21.55%	137.31%	1800.00	33078

Tabela 7: Instâncias do tipo R com 50 Clientes para a formulação adaptada

Instance	LBR	UB	LB	GAP(%)	$GAP_{LBR}(\%)$	Tempo	Nº Nós
r101	1031.95	1046.70	1046.70	0.00%	1.44%	2.33	1
r102	568.44	905.22	687.53	24.42%	59.20%	1800.00	4031
r103	463.98	790.75	527.44	33.24%	70.39%	1800.00	3039
r104	422.67	655.56	465.91	29.47%	55.12%	1800.00	5578
r105	786.27	914.31	890.76	3.12%	16.27%	1800.00	110040
r106	508.78	792.41	515.63	35.69%	55.66%	1800.00	14907
r107	443.19	754.50	484.18	36.75%	70.33%	1800.00	12120
r108	414.36	653.07	461.89	29.00%	57.68%	1800.00	13882

Tabela 8: Instâncias do tipo C com 50 Clientes para a formulação adaptada

Instance	LBR	UB	LB	GAP(%)	$GAP_{LBR}(\%)$	Tempo	Nº Nós
c101	362.05	416.29	416.29	0.00%	15.00%	208.99	7332
c102	262.93	403.98	277.70	31.30%	53.67%	1800.00	27789
c103	199.30	480.58	214.19	55.40%	141.56%	1800.00	15681
c104	196.12	457.92	208.78	54.24%	133.29%	1800.00	15846
c105	360.45	398.44	398.44	0.00%	10.53%	137.49	7439
c106	360.58	407.22	407.22	0.00%	12.93%	390.64	39423
c107	360.45	404.17	397.35	2.00%	12.09%	1800.00	130461
c108	153.11	390.82	185.27	52.60%	155.71%	1800.00	55158

Por fim, após o resultado dos testes foram plotados gráficos de como as soluções ficaram. A seguir tem-se os resultados para duas instâncias em cada uma das formulações com 50 clientes. Os resultados obtidos são soluções ótimas.

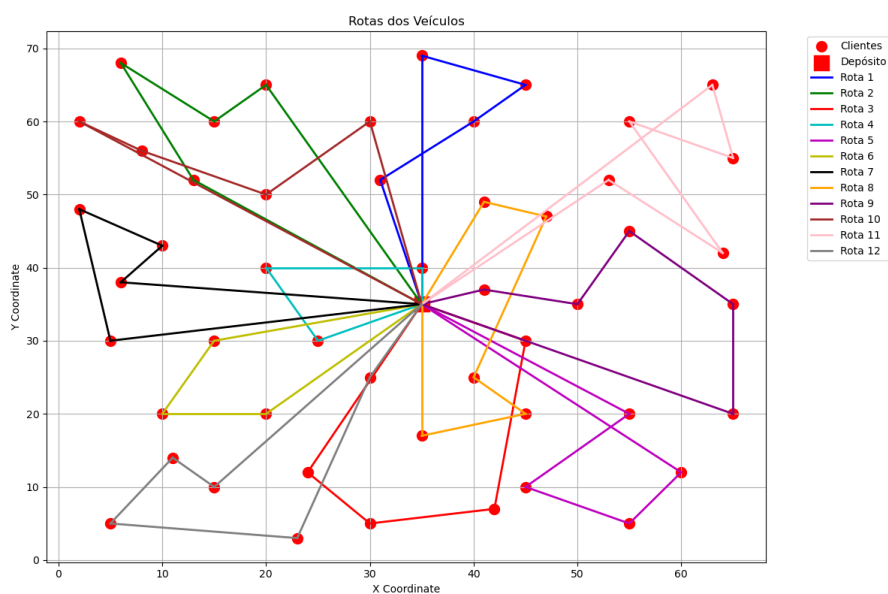


Figura 3: Exemplo de solução da instância r101 com 50 clientes na formulação clássica

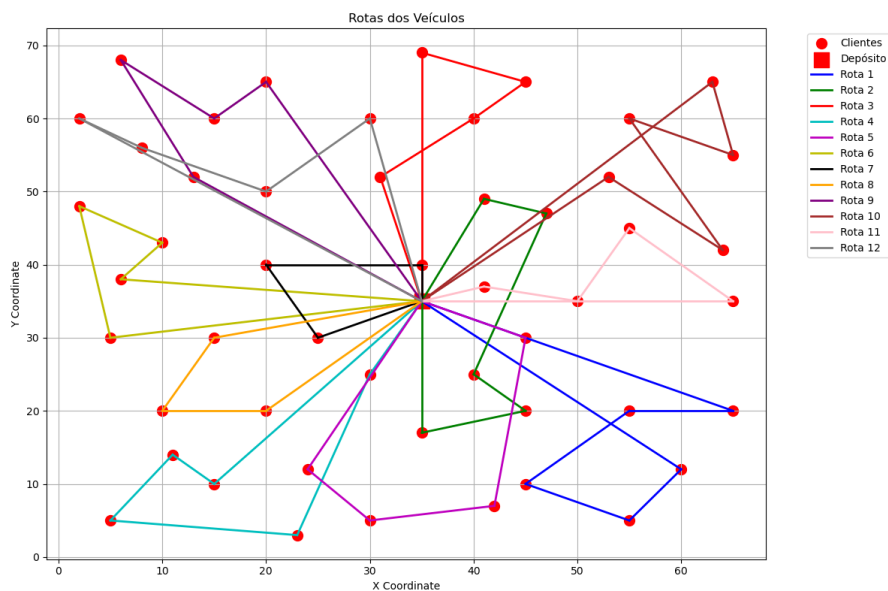


Figura 4: Exemplo de solução da instância r101 com 50 clientes na formulação adaptada

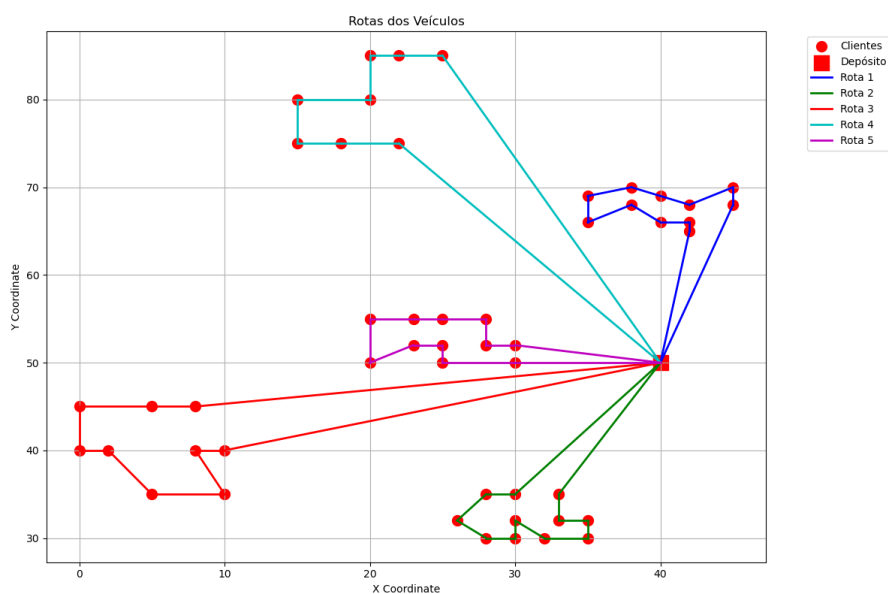


Figura 5: Exemplo de solução da instância c106 com 50 clientes na formulação clássica

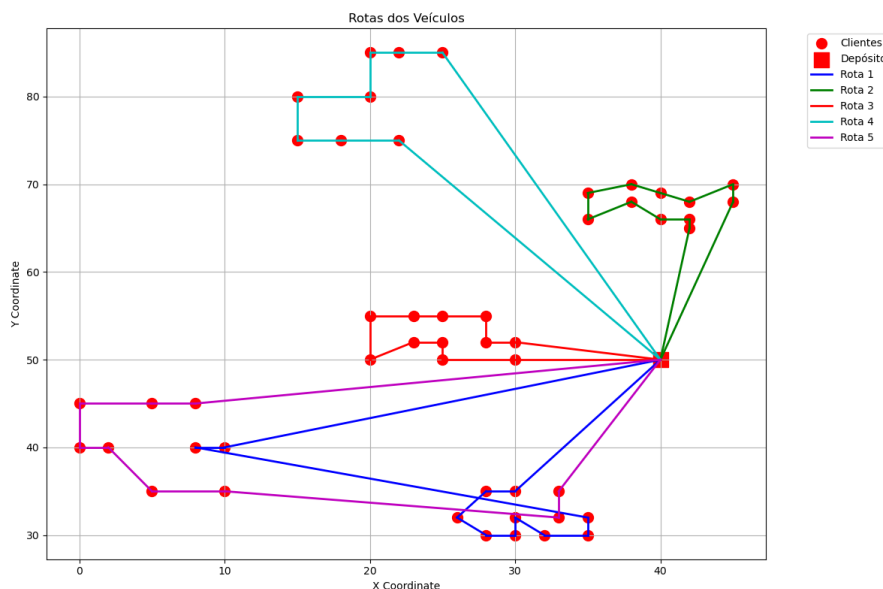


Figura 6: Exemplo de solução da instância c106 com 50 clientes na formulação adaptada

A partir das oito categorias de testes realizados e seus respectivos resultados, observou-se que, para ambas as formulações, as instâncias classificadas como Clusterizadas foram resolvidas com maior facilidade em comparação com as Randomizadas. As instâncias Clusterizadas apresentaram um GAP médio, tempo de resolução e número de nós de Branch and Bound menores do que as Randomizadas.

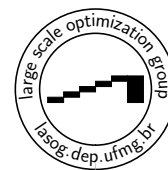
Adicionalmente, para ambas as formulações, a relaxação linear (LBR) obteve valores iguais ou bem próximos. No entanto, devido à alteração na restrição de capacidade, a formulação adaptada demonstrou ser mais difícil de resolver para a maioria das instâncias comparando a formulação clássica. Por isso a média do GAP_{LBR} é maior para a formulação adaptada e também o GAP, tempo e número de nós de Branch and Bound.

Em grande parte das instâncias, o valor da relaxação linear não se aproximou do Upper Bound, indicando que a relaxação linear dessas modelagens não é suficientemente eficaz.

Finalmente, é importante destacar que garantir a solução ótima na maioria das instâncias é um desafio devido à complexidade do problema. Como evidenciado pelos testes com a formulação clássica, o Upper Bound frequentemente atinge o valor ótimo disponível no repositório de instâncias, mas o Lower Bound não consegue chegar nesse valor.

4. Referências

1. Cordeau, J., Desaulniers, G., Desrosiers, J., Solomon, M., Soumis, F., 2002. VRP with Time Windows, in: The Vehicle Routing Problem, Discrete Mathematics and Applications. Society for Industrial and Applied Mathematics, 157–193.
2. Pyomo Documentation. Available online at <https://pyomo.readthedocs.io/en/stable/>.
3. CVRPLIB library. Available online at <http://vrp.atd-lab.inf.puc-rio.br/index.php/en/>.



4. Solomon Benchmark. Available at <http://web.cba.neu.edu/~msolomon/problems.htm>