

Backwards Euler method:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t [f(x_{n+1})] \quad (1a)$$

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t [Ax_{n+1} + Bu] \quad (1b)$$

$$\begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{a(n)} \\ x_{b(n)} \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} [u] \quad (1c)$$

Solving using the matrix equation:

$$\begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{a(n)} \\ x_{b(n)} \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} [u] \quad (2a)$$

$$\begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{a(n)} \\ x_{b(n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \Delta t & a_2 \Delta t \\ a_3 \Delta t & a_4 \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \Delta t \\ b_2 \Delta t \end{bmatrix} [u] \quad (2b)$$

$$\begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 \Delta t & a_2 \Delta t \\ a_3 \Delta t & a_4 \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{a(n)} \\ x_{b(n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \Delta t \\ b_2 \Delta t \end{bmatrix} [u] \quad (2c)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 \Delta t & a_2 \Delta t \\ a_3 \Delta t & a_4 \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{a(n)} \\ x_{b(n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \Delta t \\ b_2 \Delta t \end{bmatrix} [u] \quad (2d)$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 \Delta t & a_2 \Delta t \\ a_3 \Delta t & a_4 \Delta t \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{a(n)} \\ x_{b(n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \Delta t \\ b_2 \Delta t \end{bmatrix} [u] \quad (2e)$$

$$\begin{bmatrix} 1 - a_1 \Delta t & -a_2 \Delta t \\ -a_3 \Delta t & 1 - a_4 \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{a(n)} \\ x_{b(n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \Delta t \\ b_2 \Delta t \end{bmatrix} [u] \quad (2f)$$

$$\begin{bmatrix} 1 - a_1 \Delta t & -a_2 \Delta t \\ -a_3 \Delta t & 1 - a_4 \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{a(n)} \\ x_{b(n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \Delta t u \\ b_2 \Delta t u \end{bmatrix} \quad (2g)$$

$$\begin{bmatrix} 1 - a_1 \Delta t & -a_2 \Delta t \\ -a_3 \Delta t & 1 - a_4 \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{a(n)} + b_1 \Delta t u \\ x_{b(n)} + b_2 \Delta t u \end{bmatrix} \quad (2h)$$

$$\begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - a_1 \Delta t & -a_2 \Delta t \\ -a_3 \Delta t & 1 - a_4 \Delta t \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_{a(n)} + b_1 \Delta t u \\ x_{b(n)} + b_2 \Delta t u \end{bmatrix} \quad (2i)$$

$$\begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{(1 - a_1 \Delta t)(1 - a_4 \Delta t) - (-a_2 \Delta t)(-a_3 \Delta t)} \right) \begin{bmatrix} 1 - a_4 \Delta t & a_2 \Delta t \\ a_3 \Delta t & 1 - a_1 \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{a(n)} + b_1 \Delta t u \\ x_{b(n)} + b_2 \Delta t u \end{bmatrix} \quad (2j)$$

Therefore:

$$x_{a(n+1)} = \frac{[x_{a(n)} + b_1 \Delta t u] (1 - a_4 \Delta t)}{(1 - a_1 \Delta t)(1 - a_4 \Delta t) - (-a_2 \Delta t)(-a_3 \Delta t)} + \frac{[x_{b(n)} + b_2 \Delta t u] (a_2 \Delta t)}{(1 - a_1 \Delta t)(1 - a_4 \Delta t) - (-a_2 \Delta t)(-a_3 \Delta t)} \quad (3a)$$

$$x_{b(n+1)} = \frac{[x_{a(n)} + b_1 \Delta t u] (a_3 \Delta t)}{(1 - a_1 \Delta t)(1 - a_4 \Delta t) - (-a_2 \Delta t)(-a_3 \Delta t)} + \frac{[x_{b(n)} + b_2 \Delta t u] (1 - a_1 \Delta t)}{(1 - a_1 \Delta t)(1 - a_4 \Delta t) - (-a_2 \Delta t)(-a_3 \Delta t)} \quad (4a)$$