Backwards Euler method:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t \left[f\left(x_{n+1}\right)\right] \tag{1a}$$
$$x_{n+1} = x_n + \Delta t \left[Ax_{n+1} + Bu\right] \tag{1b}$$
$$\begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{a(n)} \\ x_{b(n)} \end{bmatrix} + \Delta t \left[\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \left[u\right] \right] \tag{1c}$$

Solving using the matrix equation:

$$\begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{a(n)} \\ x_{b(n)} \end{bmatrix} + \Delta t \left[\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \left[u\right] \right] \tag{2a}$$
$$\begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{a(n)} \\ x_{b(n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1\Delta t & a_2\Delta t \\ a_3\Delta t & a_4\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1\Delta t \\ b_2\Delta t \end{bmatrix} \left[u\right] \tag{2b}$$
$$\begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1\Delta t & a_2\Delta t \\ a_3\Delta t & a_4\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{a(n)} \\ x_{b(n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1\Delta t \\ b_2\Delta t \end{bmatrix} \left[u\right] \tag{2c}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1\Delta t & a_2\Delta t \\ a_3\Delta t & a_4\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{a(n)} \\ x_{b(n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1\Delta t \\ b_2\Delta t \end{bmatrix} \left[u\right] \tag{2d}$$
$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1\Delta t & a_2\Delta t \\ a_3\Delta t & a_4\Delta t \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{a(n)} \\ x_{b(n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1\Delta t \\ b_2\Delta t \end{bmatrix} \left[u\right] \tag{2e}$$
$$\begin{bmatrix} 1 - a_1\Delta t & -a_2\Delta t \\ -a_3\Delta t & 1 - a_4\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{a(n)} \\ x_{b(n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1\Delta t \\ b_2\Delta t \end{bmatrix} \left[u\right] \tag{2f}$$
$$\begin{bmatrix} 1 - a_1\Delta t & -a_2\Delta t \\ -a_3\Delta t & 1 - a_4\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{a(n)} \\ x_{b(n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1\Delta tu \\ b_2\Delta tu \end{bmatrix} \tag{2g}$$
$$\begin{bmatrix} 1 - a_1\Delta t & -a_2\Delta t \\ -a_3\Delta t & 1 - a_4\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{a(n)} \\ x_{b(n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1\Delta tu \\ b_2\Delta tu \end{bmatrix} \tag{2h}$$
$$\begin{bmatrix} 1 - a_1\Delta t & -a_2\Delta t \\ -a_3\Delta t & 1 - a_4\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{a(n)} + b_1\Delta tu \\ x_{b(n)} + b_2\Delta tu \end{bmatrix} \tag{2i}$$
$$\begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - a_1\Delta t & -a_2\Delta t \\ -a_3\Delta t & 1 - a_4\Delta t \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_{a(n)} + b_1\Delta tu \\ x_{b(n)} + b_2\Delta tu \end{bmatrix} \tag{2j}$$
$$\begin{bmatrix} x_{a(n+1)} \\ x_{b(n+1)} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{(1 - a_1\Delta t)(1 - a_4\Delta t) - (-a_2\Delta t)(-a_3\Delta t)} \right) \begin{bmatrix} 1 - a_4\Delta t & a_2\Delta t \\ a_3\Delta t & 1 - a_1\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{a(n)} + b_1\Delta tu \\ x_{b(n)} + b_2\Delta tu \end{bmatrix} \tag{2k}$$

Therefore:

$$x_{a(n+1)} = \frac{\left[x_{a(n)} + b_1\Delta tu\right](1 - a_4\Delta t)}{(1 - a_1\Delta t)(1 - a_4\Delta t) - (-a_2\Delta t)(-a_3\Delta t)} + \frac{\left[x_{b(n)} + b_2\Delta tu\right](a_2\Delta t)}{(1 - a_1\Delta t)(1 - a_4\Delta t) - (-a_2\Delta t)(-a_3\Delta t)} \tag{3a}$$

$$x_{b(n+1)} = \frac{\left[x_{a(n)} + b_1\Delta tu\right](a_3\Delta t)}{(1 - a_1\Delta t)(1 - a_4\Delta t) - (-a_2\Delta t)(-a_3\Delta t)} + \frac{\left[x_{b(n)} + b_2\Delta tu\right](1 - a_1\Delta t)}{(1 - a_1\Delta t)(1 - a_4\Delta t) - (-a_2\Delta t)(-a_3\Delta t)} \tag{4a}$$