在不同的领域内探寻孤立磁荷存在的可能性)。

其次，我们来分析场变量 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ 的环流特性，即在磁场中，任取一个闭合回路 C，注意现在直流闭合回路为 C'，如图 5.2.1 所示，则由式(5.1.4)得

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_C \frac{I}{4\pi}\oint_{C'}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}'\times \boldsymbol{e}_R}{R^2}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{I}{4\pi}\oint_C\oint_{C'}\frac{(-\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times \mathrm{d}\boldsymbol{l}')\cdot \boldsymbol{e}_R}{R^2}$$

$$= -\frac{I}{4\pi}\oint_C\oint_{C'}\frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times \mathrm{d}\boldsymbol{l}')\cdot \boldsymbol{e}_R}{R^2} \tag{5.2.3}$$

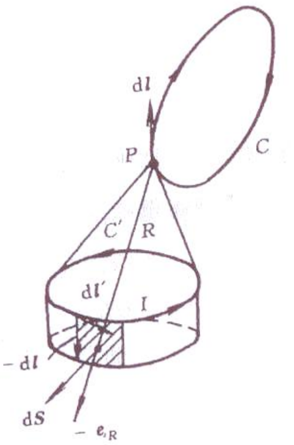

图 5.2.1　回路 C' 的 $\boldsymbol{B}$ 对回路 C 的线积分

图 5.2.1 中 P 点(场点)是积分路径上的一个点，电流回路 C' 所包围的表面对场点 P 构成的一个立体角 Ω。P 点沿回路 C 位移($-\mathrm{d}\boldsymbol{l}$)时，立体角将改变 $\mathrm{d}\Omega$。这同保持 P 点不动，而回路 C' 位移($-\mathrm{d}\boldsymbol{l}$)时立体角的改变是完全一样的。从图 5.2.1 可见，如果回路 C' 位移($-\mathrm{d}\boldsymbol{l}$)，则回路包围的表面由 S'_1 变为 S'_2，表面的增量为 $\mathrm{d}S' = S'_2 - S'_1 = \oint_{C'}(-\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times \mathrm{d}\boldsymbol{l}')$，即图中的环形表面，立体角的改变为

$$\mathrm{d}\Omega = \oint_{C'}\frac{(-\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times \mathrm{d}\boldsymbol{l}')\cdot(-\boldsymbol{e}_R)}{R^2}$$

即

$$-\mathrm{d}\Omega = \oint_{C'}\frac{(-\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times \mathrm{d}\boldsymbol{l}')\cdot \boldsymbol{e}_R}{R^2}$$

这就是 P 点位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 时立体角的改变量，那么 P 点沿着 C 回路移动一周时，立体角的变化为

$$-\Delta\Omega = \int \mathrm{d}\Omega = \oint_C\oint_{C'}\frac{(-\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times \mathrm{d}\boldsymbol{l}')\cdot \boldsymbol{e}_R}{R^2} \tag{5.2.4}$$

比较式(5.2.3)和式(5.2.4)，可知

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{I}{4\pi}\Delta\Omega \tag{5.2.5}$$

环积分的结果取决于 $\Delta\Omega$，一般分为两种情况：

(1)　积分回路 C 不与电流回路 C' 相套链，如图 5.2.1 所示。可见，当从某点开始沿闭合回路 C 绕行一周并回到起始点时立体角又回复到原来的值，即 $\Delta\Omega=0$，而式(5.2.5)变为

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

(2)　若积分回路 C 与电流回路 C' 相套链，即 C 穿过 C' 所包围的面 S' 的情况。如图 5.2.2 所示，如果我们取积分回路的起点为 S' 面上侧的 A 点，终点为在 S' 面下侧的 B 点。由于面元对它上表面上的点所张的立体角为(-2π)而对下表面上的点所张的立体角为($+2\pi$)，故 S' 对 A 点的立体角为(-2π)，对 B 点的立体角为($+2\pi$)，因而 $\Delta\Omega=2\pi-(-2\pi)=+4\pi$，于是有

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{I}{4\pi}(4\pi) = I \tag{5.2.6}$$

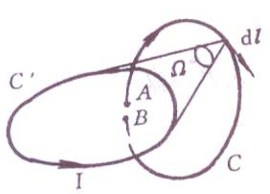

图 5.2.2 积分回路 C 与电流回路 C' 相链情形

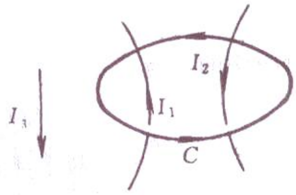

图 5.2.3 积分回路包围的电流：$\Sigma I = I_1 - I_2$

因为 C 与 C' 相套链，I 也就是穿过回路 C 所包围平面 S 的电流，而且当电流与回路 C 存在右螺旋关系时，I 为正；反之，I 为负。综合上述两种情况，用一个方程（积分形式）表示为

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \Sigma I \tag{5.2.7}$$

其中 ΣI 是 C 所包围电流的代数和，在图 5.2.3 中 $\Sigma I = I_1 - I_2$，积分与 I_3 无关。必须说明的是：环积分与 I_3 无关，而被积函数 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ 却是三个电流回路产生的总磁场强度，即 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2 + \boldsymbol{H}_3$，这里 $\boldsymbol{H}_1$ 与 I_1 有关，$\boldsymbol{H}_2$ 与 I_2 有关，$\boldsymbol{H}_3$ 与 I_3 有关。式(5.2.7)称为安培环路定律（积分形式）。

由式(5.2.7)可导出安培环路定律的微分形式方程，由斯托克斯定理

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \nabla \times \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

和

$$\Sigma I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

即

$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

因为回路是任意取的，故有

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{5.2.8}$$

显然安培环路定律的微分形式表明磁场是有旋转的矢量场，源变量 $\boldsymbol{J}$ 与场变量 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ 的关系就是式(5.2.8)。与静电场相比，磁场是一种非保守场。

总结真空中磁场的基本方程式：

积分形式	微分形式	
$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$	$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$	磁通连续性方程
$\oint_S \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I$	$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$	安培环路方程

在真空中本构关系方程为 $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$。

在已知场源变量 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$ 的条件下，用偏微分方程法，就能求得磁场强度 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$。具体作法是：