空间中的电场是球对称分布。为保证分界面上电场切线分量连续，整个球外空间电场应具有球对称性。设上半空间电势为ϕ_1，下半空间电势为ϕ_2，它们都满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\phi=0$$ 中里有球对称性

选球坐标系

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right)=0.$$

它的解为

$$\phi=-\frac{c}{r}+d$$

c，d是待定系数。由$r\to\infty$时，$\phi_1=\phi_2=0$，可定出$d=0$。由导体面上的条件

$$\oint_{r=a}\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial r}dS=-Q$$ $ds=a^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

可定出

$$c=\frac{-Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

球外的电势分布为

$$\phi_1=\phi_2=\frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r} \qquad (2.14)$$

上、下半球上的面电荷密度分别为

$$\sigma_1=-\varepsilon_1\frac{\partial\phi_1}{\partial r}\bigg|_a=\frac{\varepsilon_1 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2} \qquad \text{(上半球)}$$

$$\sigma_2=-\varepsilon_2\frac{\partial\phi_2}{\partial r}\bigg|_a=\frac{\varepsilon_2 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2} \qquad \text{(下半球)}$$

2. 泊松方程解的积分形式

研究静电场的基本任务是在给定电荷分布和区域的边界条

件后，求出电场的分布。解决这个问题的关键在于求解泊松方程。我们先研究泊松方程的一般形式解。

在待求场间任取一区域V（如图3.3），场源点M的坐标为$\boldsymbol{R}'(x',y',z')$，待求场点$P$的坐标为$\boldsymbol{R}(x,y,z)$，在$V$内应用格林第二公式（见第一章5.21式）

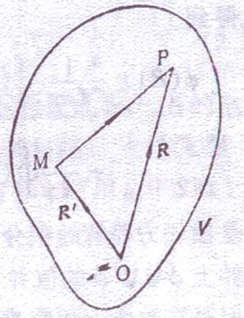

图 3.3

$$\int_V(\psi\nabla'^2\phi-\phi\nabla'^2\psi)\,dV'=\oint_S(\psi\nabla'\phi-\phi\nabla'\psi)\cdot d\boldsymbol{S}' \qquad (2.15)$$

选ϕ是V内泊松方程的解

$$\nabla'^2\phi=-\frac{1}{\varepsilon}\rho(\boldsymbol{R}')$$

$$\psi=\frac{1}{r} \qquad r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

在第一章中已证明下述关系

$$\nabla'^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\boldsymbol{R}'-\boldsymbol{R})$$

将上面各式代入（2.15）式得

$$\int_V(\psi\nabla'^2\phi-\phi\nabla'^2\psi)dV'$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon}\int_V\frac{\rho(\boldsymbol{R}')}{r}dV'+4\pi\int_V\phi(\boldsymbol{R}')\delta(\boldsymbol{R}'-\boldsymbol{R})dV'$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon}\int_V\frac{\rho(\boldsymbol{R}')}{r}dV'+4\pi\phi(\boldsymbol{R})$$

$$=\oint_S\left(\frac{1}{r}\nabla'\phi-\phi\nabla'\frac{1}{r}\right)\cdot d\boldsymbol{S}'$$

由此得到

$$\phi(\boldsymbol{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\frac{\rho(\boldsymbol{R}')}{r}dV'$$

$$+\frac{1}{4\pi}\oint_S\left(\frac{1}{r}\nabla'\phi-\phi\nabla'\frac{1}{r}\right)\cdot d\boldsymbol{S}' \qquad (2\cdot16)$$

这就是泊松方程解的积分形式，这个解只是一个形式解，因为在边界上 ϕ 与 $\nabla'\phi$ 的值并不知道，用它来解决实际问题并不方便，但是在数学上用它来讨论泊松方程解的性质却是很有用的。

由唯一性条件来确定

当电荷分布在有限区域时，由于

静电场

$$\phi\sim\frac{1}{r},\ \nabla'\phi\sim\frac{1}{r^2},\ dS\sim r^2$$

故（2.16）式的面积分值和 $\frac{1}{r}$ 成比例，当包围面 S 扩至无穷，即 $r\to\infty$ 时，（2.16）式就变为

$$\phi(\boldsymbol{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\frac{\rho(\boldsymbol{R}')}{r}dV' \qquad (2\cdot17)$$

这说明当积分区域包括电荷不为零的全部区域时，电势的公式由库仑定律决定。

再研究（2.16）式面积分的含义。应该注意，（2.16）式中的积分区域 V 是从待求场中任意划出来的，在 V 中可能只包括产生场的一部分电荷。(2.16)式中的体积分表示 V 内体分布电荷的贡献，面积分表达了区域 V 以外的电荷分布对 V 内电势的贡献。在(2.16)式的面积分中，令

$$\varepsilon\nabla'\phi\cdot d\boldsymbol{S}'=\sigma d\boldsymbol{S}'$$

$$\varepsilon\phi=\tau$$

则(2.16)式可写为

$$\phi(\boldsymbol{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\frac{\rho(\boldsymbol{R}')}{r}dV'+$$

$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon}\oint_S\frac{\sigma dS'}{r}-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\oint_S\tau d\boldsymbol{S}'\cdot\nabla'\frac{1}{r} \qquad (2.18)$$

上式中第一个面积分表示分布在 S 面上的面电荷产生的电势，第二个面积分代表分布在 S 面上的电偶极矩。上式清楚地说明，在计算 V 内的电势时，V 外的电荷分布可用位于 S 面上的假想面电荷和电偶极子层来等效地代替。

§3 解静电问题的电象法

根据静电场的唯一性定理，无论用什么方法，只要能求得满足边界条件的解，这个解就是唯一的。因此，对于不同的静电问题，可以用各种尽可能简单的方法来求解。

前面已指出，在计算 V 内的电势时，V 外的电荷对 V 内电势的贡献可用位于 V 的界面上的假想面电荷和电偶层来代替。这启发我们去设想，如果在 V 的界面上真实分布有面电荷，那么也应该可用分布在 V 外的电荷来代替。例如，在导体附近放置电荷时，导体面上会产生感应电荷，这些面电荷对所求区域内电势的贡献，可用位于区域外的假想电荷来代替，这些假想电荷的位置和大小可由边界条件确定。这种方法称为电象法。电象法的核心问题是确定假想电荷的位置和大小，确定的依据是保证原有边界条件得到满足。务必牢记，假想电荷必须处于待求场区域以外，只有这样才能保证原有区域内电荷分布不变。

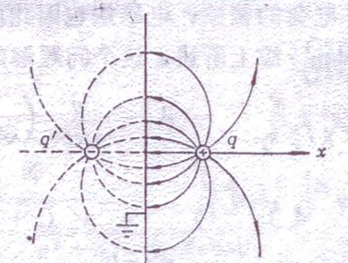

图 3.4

例1 如图3.4所示，在真空中一接地的无限大导体平板附近有一点电荷 q，距平板为 d，求空间电势分布。