电场能量

- 系统电容
- 静电力
- 电场能量

电位－做功

空间某点的电位：

等于把单位正电荷从电位参考点处移动到该点，外力做的功。或者说：.....

静电场是保守场———路径无关！

令：无穷远处，电位为零： $\psi_{\infty} = 0$

“点电荷”的电位：

$$\psi_{P点} = \int_{P点}^{\infty} \vec{E} \bullet d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R}$$

电场具有能量

能量是守恒的！

能量的来源：

建立电荷系统的过程中，外界做功提供的能量

问题的提出：如何研究系统的电场能量？

思路：归纳法！

(1) 只有1个点电荷时，产生电位

(2) 系统由2个点电荷组成时，…

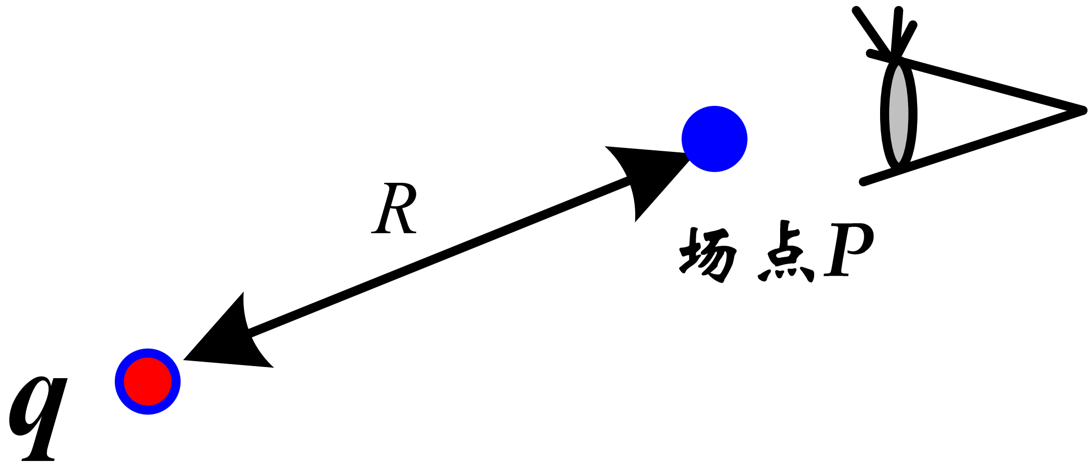
(3) 系统由3个点电荷组成时，…

(4) 系统由n个点电荷组成时，…

系统只由一个电荷组成时：

“点电荷”在场点产生的电位：

$$\psi_{P点} = \int_{P点}^{\infty} \vec{E} \bullet d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R_{源-场}}$$



组建一个只有2个电荷的“电荷系统”

把电荷Q_2从无穷远处移动到离电荷Q_1的距离是R_{12}的位置时，外力做的功：

$$W=\int\left(Q_2\vec{E}_1\right)\bullet d\vec{l}=Q_2\cdot\psi_{@2}=Q_2\cdot\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\cdot R_{12}}$$

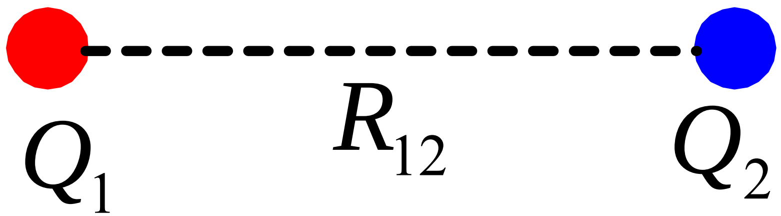
同理：

$$W=Q_1\cdot\psi_{@1}=Q_1\cdot\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0\cdot R_{12}}$$

取：

$$W_2=\ldots=\frac{1}{2}(Q_1\cdot\psi_{@1}+Q_2\cdot\psi_{@2})$$

$$\boxed{W_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1\cdot Q_2}{R_{12}}\right)}$$



电

组建一个有3个电荷的“电荷系统”

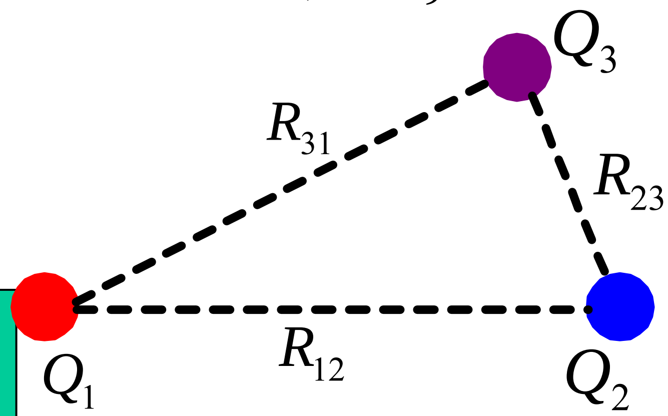
先组建一个只有2个电荷的系统，再“加上”第三个电荷

$$\Delta W = Q_3 \cdot \psi_{@3} = Q_3 \cdot \left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot R_{31}} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot R_{23}} \right)$$

$$W_3 = W_2 + \Delta W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{Q_1 \cdot Q_2}{R_{12}} + \frac{Q_1 \cdot Q_3}{R_{31}} + \frac{Q_2 \cdot Q_3}{R_{23}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ Q_1 \cdot \left(\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot R_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 \cdot R_{13}} \right) + Q_2 \cdot \left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot R_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 \cdot R_{23}} \right) + \ldots \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ Q_1 \cdot \psi_{@1} + Q_2 \cdot \psi_{@2} + Q_3 \cdot \psi_{@3} \right\}$$



$\psi_{@i}$ ：其余电荷在i点处产生的电位

多电荷系统——离散电荷

$$W_2 = \frac{1}{2}(Q_1 \cdot \psi_{@1} + Q_2 \cdot \psi_{@2})$$

$$W_3 = \frac{1}{2}\{Q_1 \cdot \psi_{@1} + Q_2 \cdot \psi_{@2} + Q_3 \cdot \psi_{@3}\}$$

$$\vdots$$

$$W_N = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i \cdot \psi_{@i}$$

其中：

$$\psi_{@i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_{k=1,k\neq i}^{N}\left(\frac{Q_k}{R_{ik}}\right)$$

多电荷系统——体电荷

$$W_N = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i \cdot \psi_{@i} \quad \Rightarrow W_e = \frac{1}{2}\int_V dq \cdot \psi = \frac{1}{2}\int_V \psi \cdot \rho d\tau$$

利用：

$$\rho = \nabla \bullet \vec{D} \qquad \therefore W_e = \frac{1}{2}\int_\infty (\nabla \bullet \vec{D}) \cdot \psi d\tau$$

$$\because \nabla \bullet (u\vec{A}) = u \cdot \nabla \bullet \vec{A} + \vec{A} \bullet \nabla u$$

$$\therefore (\nabla \bullet \vec{D}) \cdot \psi = \nabla \bullet (\psi \vec{D}) - \vec{D} \bullet \nabla \psi$$

$$\therefore W_e = \frac{1}{2}\int_\infty \left(\nabla \bullet (\psi \vec{D}) - \vec{D} \bullet \nabla \psi\right) d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int_\infty \nabla \bullet (\psi \vec{D}) d\tau + \frac{1}{2}\int_\infty \left(- \vec{D} \bullet \nabla \psi\right) d\tau = \frac{1}{2}\int_\infty (\psi \vec{D}) \bullet d\vec{S} + \frac{1}{2}\int_\infty \left(\vec{E} \bullet \vec{D}\right) d\tau$$

化简：

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{\infty}(\psi\vec{D})\bullet d\vec{S} + \frac{1}{2}\int_{\infty}\left(\vec{E}\bullet\vec{D}\right)d\tau$$

$$\because \left|\psi\vec{D}\right| \propto \frac{1}{R}\cdot\frac{1}{R^2} = \frac{1}{R^3} \qquad S \propto R^2$$

$$\therefore \frac{1}{2}\int_{\infty}(\psi\vec{D})\bullet d\vec{S} \approx \frac{1}{R}\Big|_{R\to\infty} = 0$$

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{\infty}\left(\vec{E}\bullet\vec{D}\right)d\tau = \frac{1}{2}\int_{\infty}\underbrace{\left(\varepsilon\cdot E^2\right)}_{\text{各向同性}}d\tau = \int_{\infty}\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2\right)d\tau$$

引入能量密度： $w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$ 单位：J/m^3

能量密度

能量密度： $w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$

$$W_e = \int_{\infty}\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2\right)d\tau = \int_{\infty} w_e dV$$

$$w_e = \begin{cases} \ldots & somewhere \\ \to 0 & else............. \end{cases}$$

例题：

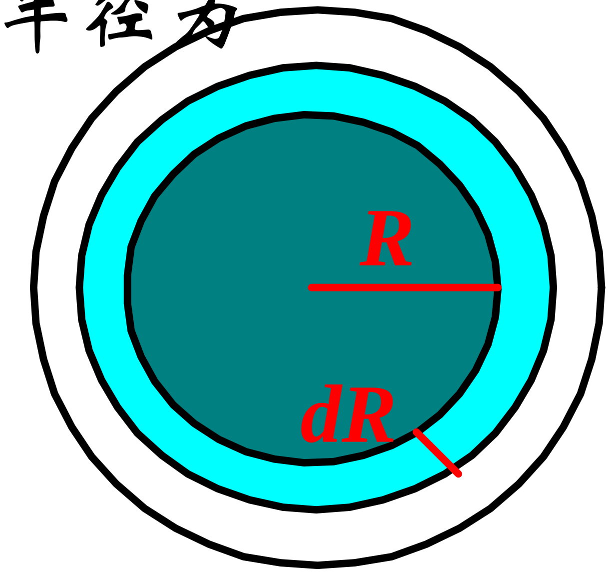
"组合"出一个半径为R_0, 体电荷密度为ρ 的电荷球(如：电子云)，需要的能量

分析：

- 什么物理概念
- 球的对称性有没有用途?
- 用什么解法?

解法一：按照物理过程——“糊泥”

1. “糊到”距离球心R处时，这个半径为R的“半成品”球的电位：



$$\psi_R = \frac{Q_R}{4\pi\varepsilon R} = \frac{(\frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho)}{4\pi\varepsilon R}$$

2. 糊上厚度为dR的球壳(“泥”)：

$$dQ_R = (4\pi R^2 \cdot dR)\cdot\rho$$

3. 糊上厚度为dR的球壳(“泥”)外力需要做的功：

$$dW_e = \psi_R \cdot dQ_R = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0}\cdot\rho^2\cdot R^4 dR$$

总的功(能量)：

$$W_e = \int_{\infty} dW_e = \ldots\int_0^{R_0}\ldots dR = \frac{4\pi\rho^2 R_0^5}{15\varepsilon_0}$$

解法二：直接利用公式： $W_e = \int_{\infty} w_e dV$

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

需要求解：$E = \begin{cases} \dfrac{\rho R_0^3}{3\varepsilon_0 R^2} & R > R_0 \\ \dfrac{\rho R}{3\varepsilon_0} & R_0 > R > 0 \end{cases}$

$$W_e = \int_{\infty} w_e dV = \int_0^{R_0} \cdots + \int_{R_0}^{\infty} \cdots = \frac{4\pi\rho^2 R_0^5}{15\varepsilon_0}$$