



第三章 随机过程

信息与通信工程学院
无线信号处理与网络实验室(WSPN)
智能计算与通信研究组(IC²)
彭岳星

yxpeng@bupt.edu.cn

6119 8066 ext.2



随机过程

- 随机过程的统计特性
- 平稳/循环平稳随机过程
- 高斯随机过程
- 平稳随机过程通过线性系统
- 高斯白噪声
- 窄带平稳随机过程
- 余弦波加窄带平稳高斯随机过程
- 匹配滤波器

3.1 随机过程的统计（概率）特性

离散，连续

- 随机过程的统计性质可由其分布函数/概率累积函数（CDF）和概率密度函数（PDF）描述。

- $X(t)$ 的 n 维分布函数(CDF): $p(x < X) = \int_{-\infty}^X p(x) dx$
例如.

$$F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n\}$$

- $X(t)$ 的 n 维概率密度函数(PDF):

$$\frac{\partial F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} = p_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$$

3.2 随机过程的数字特征

- 数学期望: $E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp_X(x, t)dx = m_X(t)$ 一阶累积量 中心. 质心. 重心
- 方差: $D[X(t)] = E\{[X(t) - m_X(t)]^2\} = \sigma_X^2(t)$ 二阶累积量. 离散能量.
- 标准差: $\sigma_X(t)$ 信号能量: $E\{x^2(t)\} = m_X^2(t) + \sigma_X^2(x)$
- 自协方差: $C_X(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - m_X(t_1)][X(t_2) - m_X(t_2)]\}$
- 自相关: $R_X(\underline{t_1}, \underline{t_2}) = E\{X(t_1)X(t_2)\}$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_X(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$
- 归一化自协方差 (相关系数): $\rho_X(t_1, t_2) = \frac{C_X(t_1, t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)}$
 $R_X(t) = E\{x^2(t)\} \Rightarrow \text{总能量} = \overline{x^2} + \overline{x}^2 = (E_x)^2$

3.3 两随机过程的联合分布函数与数字特征

- $X(t), Y(t)$ 为两个随机过程, 其 $n+m$ 维联合分布函数:

$$\begin{aligned} & F_{n,m}(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n; y_1, \dots, y_m, t'_1, \dots, t'_m) \\ &= P\{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n; Y(t'_1) \leq y_1, \dots, Y(t'_m) \leq y_m\} \end{aligned}$$

- $X(t)$ 的 n 维概率密度函数:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_{n,m}(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n; y_1, \dots, y_m, t'_1, \dots, t'_m)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n \partial y_1 \cdots \partial y_m} \\ &= p_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n; y_1, \dots, y_m, t'_1, \dots, t'_m) \end{aligned}$$

- 互协方差函数:

$$C_{XY}(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - m_X(t_1)][Y(t_2) - m_Y(t_2)]\}$$

- 互相关函数:

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)Y(t_2)\}$$



3.4 平稳随机过程

- 狭义平稳(严平稳)

$$p_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = p_n(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau), \quad \forall n, \tau$$

- 广义平稳(宽平稳)

- 一维分布与时间无关，二维分布只与时间间隔 τ 有关

- 数字特征
$$\begin{cases} E\{X(t)\} = m_X; \\ D\{X(t)\} = \sigma_X^2; \end{cases} \quad \begin{cases} R_X(t_1, t_2) = R(t_1 - t_2) = R(\tau) \\ C_X(t_1, t_2) = R(\tau) - m_X^2 = C_X(\tau) \end{cases}$$

- 联合宽平稳随机过程

- 若 $X(t)$, $Y(t)$ 是宽平稳随机过程，且

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)Y(t_2)\} = R_{XY}(\tau) = X(-\tau) \otimes Y(\tau)$$

$$\tau = t_2 - t_1$$



3.5 各态历经性 (遍历性)

- 各态历经性(遍历性): 随机过程的任一实现, 经历了随机过程的所有的可能状态, 可以用 “时间平均” 来代替 “统计平均”
 - 均值遍历过程: 统计平均与其样函数的时间平均值以概率1相等
 - 自相关遍历过程: 样函数的时间平均自相关函数以概率1等于统计自相关
- 若随机过程的均值与自相关均为遍历, 则称为宽遍历随机过程
- 若随机过程的所有统计平均特性与其样函数对应的时间平均特性以概率1相等, 则称为严遍历过程或狭义遍历过程
- 遍历过程一定是平稳过程, 平稳过程不一定是遍历过程



3.6 维纳-辛钦定理

维纳-辛钦定理： 平稳随机过程的自相关函数与功率谱密度函数互为傅氏变换

$$R_X(\tau) \Leftrightarrow P_X(f)$$



3.7 高斯过程

- 一维正态分布: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

- 二维正态分布

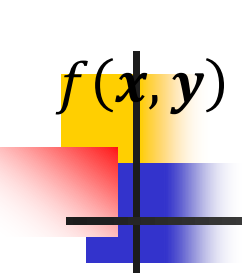
$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right)\right)$$

- n 维正态分布

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})\right)$$

$$\boldsymbol{\mu} = E\{\mathbf{X}\}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = E\{(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T\}$$



$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right)\right)$$

$$f(X) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(X - \mu)^T \Sigma^{-1}(X - \mu)\right)$$

■ 性质:

- 广义平稳 \Leftrightarrow 狭义平稳: 二阶统计特性决定高阶统计特性
- 各随机变量之间互不相关 \Leftrightarrow 统计独立: 指数分布特征
 - 不相关: $\rho_{xy} = 0$; 独立: 任何关系 $p(xy) = p(x)p(y)$;

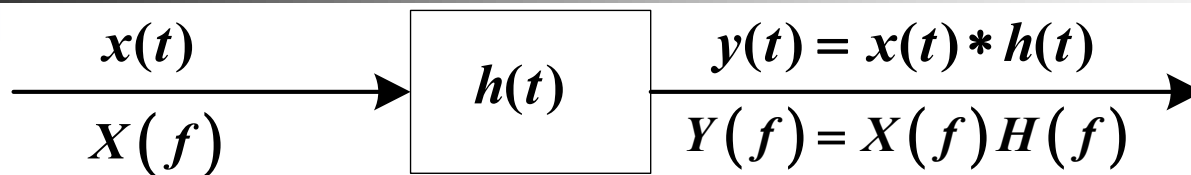
■ 概率积分函数: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$

■ 误差函数: $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz = 2\Phi(\sqrt{2}x) - 1$

■ 互补误差函数: $\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-z^2} dz = 1 - \text{erf}(x) = 2 - 2\Phi(\sqrt{2}x)$

■ Q函数(尾函数): $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \Phi(x) = \Phi(-x)$

3.8 平稳随机过程通过线性系统(1)



■ 输出随机过程的均值

$$\begin{aligned} E[y(t)] &= E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau\right\} \\ &= m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau = m_X H(0) \end{aligned}$$

$$m_Y = E\{x(t) \otimes h(t)\} = m_X \otimes H(0)$$

$$R_{x_1 x_2}(\tau) = x_1^*(-\tau) * x_2(\tau) = R_{x_1 x_2}^*(-\tau)$$

$$R_{x_1 x_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^*(t) x_2(t+\tau) dt$$

■ 输出随机过程的自相关函数

$$\begin{aligned} R_y(t, t+\tau) &= E\{y(t)y(t+\tau)\} \\ &= E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau+u-v) h(u) h(v) du dv\right\} \\ &= R_y(\tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= y(-\tau) \otimes y(\tau) = x(-\tau) \otimes h(-\tau) \otimes x(\tau) \otimes h(\tau) \\ &= R_X(\tau) \otimes h(-\tau) \otimes h(\tau) \end{aligned}$$

平稳

3.8 平稳随机过程通过线性系统(2)

■ $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互相关函数与互功率谱密度

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)Y(t_2)\} \quad \text{先相关再卷积}$$

$$= E\{X(t_1) \int h(u)X(t_2 - u)du\}$$

$$= \int h(u)E\{X(t_1)X(t_2 - u)\}du$$

$$= \int R_X(\tau - u)h(u)du$$

$$= R_X(\tau) \otimes h(\tau)$$

$$P_{XY}(\tau) = P_X(f)H(f)$$

$$R_{XY}(\tau) = x(-\tau) \otimes y(\tau) = x(-\tau) \otimes x(\tau) \otimes h(\tau) = R_X(\tau) \otimes h(\tau)$$

3.8 平稳随机过程通过线性系统 (3)

例：实平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau)$ ，求 $X(t)$ 与 $\hat{X}(t)$ 的相关函数

$$\hat{X}(t) = X(t) * h(t) \quad h(t) = \frac{1}{\pi t} \text{ 为奇函数}$$

$$R_{X\hat{X}}(\tau) = E\{X(t) \int h(u)x(t + \tau - u)du\} = \int h(u)R_X(\tau - u)du = \hat{R}_X(\tau)$$

$$R_{X\hat{X}}(\tau) = X(-\tau) * \hat{X}(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) = \hat{R}_X(\tau) \quad \text{—— 奇函数}$$

$$R_{\hat{X}X}(\tau) = R_{X\hat{X}}(-\tau) = -\hat{R}_X(\tau) \quad \text{—— 奇函数}$$

$X(t)$ 为正态随机过程 $\xrightarrow{\text{线性变换}}$ $\hat{X}(t)$ 为正态随机过程

$X(t)$ 与 $\hat{X}(t)$ 都为高斯过程

高斯

$X(t)$ 与 $\hat{X}(t)$ 在同一时刻不相关

独立

3.8 平稳随机过程通过线性系统 (4)

- 输出随机过程功率谱密度

$$R_Y(t, t + \tau) = R_Y(\tau)$$

$$\begin{aligned} P_Y(f) &= \mathbf{F}\{h^*(-\tau) \otimes h(\tau) \otimes R_X(\tau)\} \\ &= \mathbf{F}\{R_h(\tau) \otimes R_X(\tau)\} \\ &= H^*(f)H(f)P_X(f) \\ &= P_X(f)|H(f)|^2 \end{aligned}$$

- 如系统为希尔伯特变换，则

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) = R_{\hat{X}}(\tau)$$

$$P_Y(f) = P_X(f) = P_{\hat{X}}(f)$$

- 输入/输出信号间关系

$$y(t) = x(t) \otimes h(t)$$

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

$$\begin{aligned} r_{xy}(\tau) &= x(-\tau) \otimes y(\tau) \\ &= r_x(\tau) \otimes h(\tau) \end{aligned}$$

$$P_{xy}(f) = P_x(f)H(f)$$

$$\begin{aligned} r_y(\tau) &= y(-\tau) \otimes y(\tau) \\ &= r_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau) \end{aligned}$$

$$P_y(f) = P_x(f)|H(f)|^2$$

3.9 高斯白噪声

- 定义： $n(t)$ 为0均值高斯随机过程，其功率谱密度为

$$P_n(f) = \frac{N_0}{2} \quad \longleftrightarrow \quad R_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

- 性质

(1) 若 $X = \int_0^T n(t) \phi(t) dt$, $\phi(t)$ 为确定函数，则 X 为高斯随机变量，其数学期望为0，方差为 $\sigma_X^2 = \frac{N_0}{2} \int_0^T \phi^2(t) dt = \frac{N_0}{2} E_\phi$

$$X(\tau) = n(-\tau) \otimes \phi(\tau) \rightarrow R_X(\tau) = R_n(\tau) \otimes R_\phi(\tau)$$

$$P_X(f) = P_n(f) P_\phi(f) \rightarrow P_X = \frac{N_0}{2} \int P_\phi(f) df = \frac{N_0}{2} \int \phi^2(t) dt$$

(2) 若 $X_1 = \int_0^T n(t) \phi_1(t) dt$, $X_2 = \int_0^T n(t) \phi_2(t) dt$, $\phi_1(t), \phi_2(t)$ 为确定函数，则 $E\{X_1 X_2\} = \frac{N_0}{2} \int_0^T \phi_1(t) \phi_2(t) dt$

$$X_i(\tau) = n(-\tau) \otimes \phi_i(\tau) \rightarrow R_{X_1 X_2}(\tau) = X_1(-\tau) \otimes X_2(\tau)$$

$$R_{X_1 X_2}(\tau) = n(\tau) \otimes \phi_1(-\tau) \otimes n(-\tau) \otimes \phi_2(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \otimes R_{\phi_1 \phi_2}(\tau)$$



3.9 高斯白噪声

(3) 限带高斯白噪声的功率谱为 $P_n(f) = \frac{N_0}{2} \text{Rect}\left(\frac{f}{2f_H}\right)$,

其相关函数为: $R_n(\tau) = N_0 f_H \text{sinc}(2f_H \tau)$

因 $R_n\left(\frac{k}{2f_H}\right) = N_0 f_H \cdot \text{sinc}(k\pi) = 0, k \in \mathbb{Z}$, 故 $n(t)$ 与

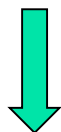
$n\left(t + \frac{k}{2f_H}\right)$ 不相关, 从而统计独立

三角公式

$$\begin{cases} \sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \\ \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \end{cases}$$

$$\text{令} : a = \frac{u+v}{2}, b = \frac{u-v}{2},$$

$$\text{即} : u = a + b, v = a - b$$



$$\sin u = \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} + \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

$$\sin v = \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} - \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u = \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} - \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

$$\cos v = \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} + \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$



$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

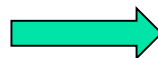
$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$= 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$



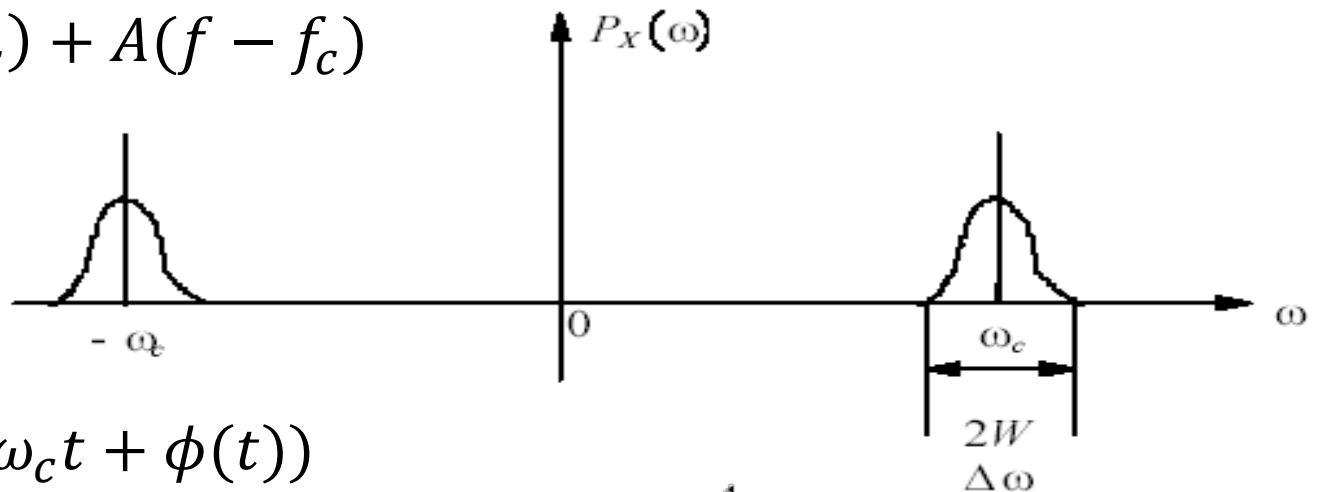
$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

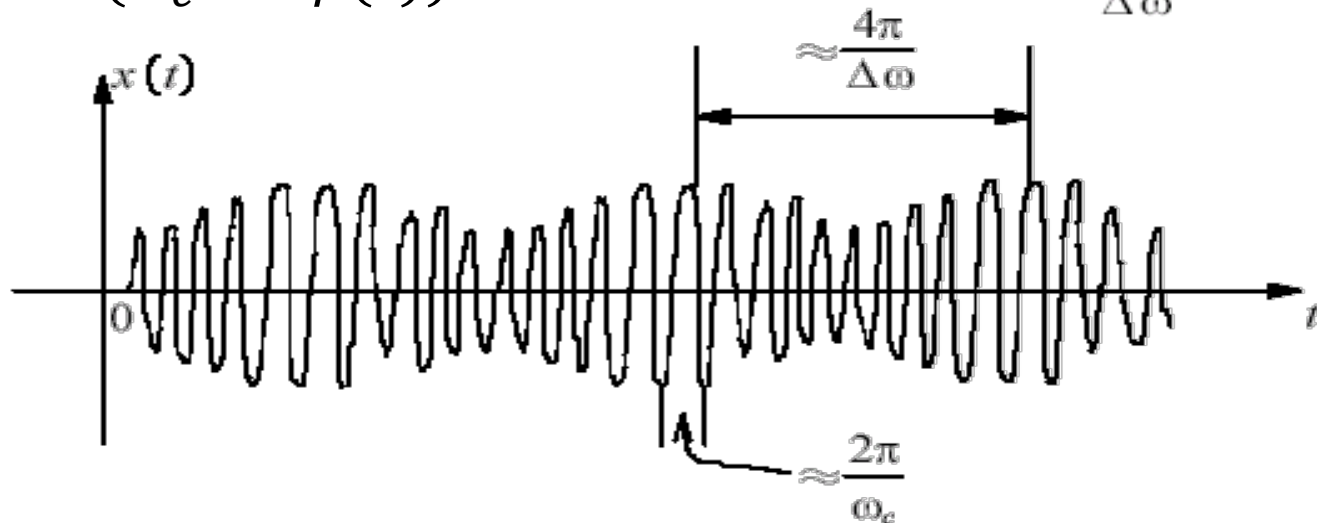
3.10.1 窄平稳随机过程

- 定义: 平稳过程 $x(t)$ 的带宽远远小于其中心频率, 即 $\Delta f \ll f_c$

$$X(f) = A(f + f_c) + A(f - f_c)$$



$$x(t) = a(t) \cos(\omega_c t + \phi(t))$$





3.10.2 窄带平稳随机过程的表示

$$x(t) = a(t) \cos[\omega_c t + \phi(t)]$$

$$= x_c(t) \cos \omega_c t - x_s(t) \sin \omega_c t$$

$$x_c(t) = a(t) \cos \phi(t) : \text{同相分量}$$

$$x_s(t) = a(t) \sin \phi(t) : \text{正交分量}$$

$$a(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)} : \text{包络}$$

$$\phi(t) = \text{atan} \frac{x_s}{x_c} : \text{相位}$$

$x(t)$ 的等效低通表示:

$$z(t) = x(t) + j\hat{x}(t) = [x_c(t) + jx_s(t)]e^{j\omega_c t} = x_L(t)e^{j\omega_c t}$$

$$x_L(t) = z(t)e^{-j\omega_c t} = x_c(t) + jx_s(t) = a(t)e^{j\phi(t)}$$

3.10.3 $Z(t)$, $X_L(t)$ 的自相关与功率谱

- $Z(t)$ 的自相关函数和功率谱密度

$$R_Z(\tau) = 2[R_X(\tau) + j\hat{R}_X(\tau)] \quad \longleftarrow \quad Z(t) = X(t) + j\hat{X}(t)$$

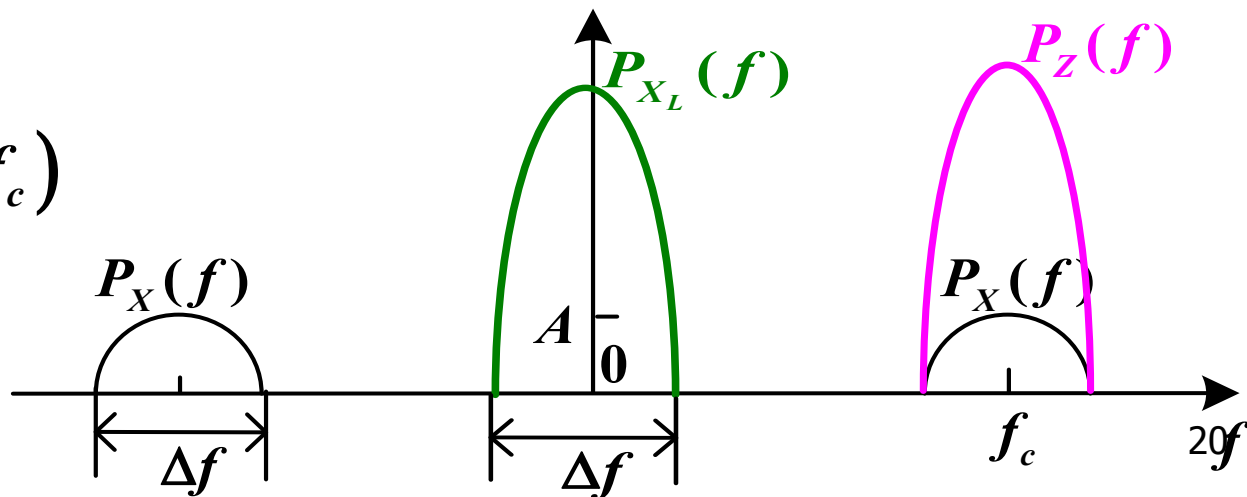
$$P_Z(f) = 4P_X(f)u(f)$$

$$\begin{aligned} R_Z(\tau) &= E\{Z^*(t)Z(t+\tau)\} \\ &= R_X(\tau) + R_{\hat{X}}(\tau) \\ &\quad + j[R_{X\hat{X}}(\tau) - R_{\hat{X}X}(\tau)] \end{aligned}$$

- $X_L(t)$ 的自相关函数和功率谱密度

$$R_{X_L}(\tau) = R_Z(\tau)e^{-j2\pi f_c\tau} \quad \longleftarrow \quad Z(t) = X_L(t)e^{j2\pi f_c t}$$

$$P_{X_L}(f) = P_Z(f + f_c)$$





3.10.4 $X_c(t)$ 和 $X_s(t)$ 的性质(1)

$$\begin{cases} X(t) = X_c(t) \cos \omega_c t - X_s(t) \sin \omega_c t \\ \hat{X}(t) = X_c(t) \sin \omega_c t + X_s(t) \cos \omega_c t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X_c(t) = X(t) \cos \omega_c t + \hat{X}(t) \sin \omega_c t \\ X_s(t) = \hat{X}(t) \cos \omega_c t - X(t) \sin \omega_c t \end{cases}$$

(1) 若 $E\{X(t)\} = 0$, 有 $E\{\hat{X}(t)\} = 0$, 则有 $E\{X_c(t)\} = E\{X_s(t)\} = 0$

(2) 若 $X(t)$ 是高斯过程 , 则 $\hat{X}(t), X_c(t), X_s(t)$ 也是高斯过程

(3) 若 $X(t)$ 是宽平稳过程 , 则 $X_c(t), X_s(t)$ 为宽平稳过程

$$\begin{aligned} R_{X_c}(t, t + \tau) &= E\{X_c^*(t) X_c(t + \tau)\} \\ &= E\{[X(t) \cos \omega_c t + \hat{X}(t) \sin \omega_c t][X(t + \tau) \cos \omega_c(t + \tau) + \hat{X}(t + \tau) \sin \omega_c(t + \tau)]\} \\ &= R_X(\tau) \cos \omega_c t \cos \omega_c(t + \tau) + R_{\hat{X}}(\tau) \sin \omega_c t \sin \omega_c(t + \tau) \\ &\quad + R_{X\hat{X}}(\tau) \cos \omega_c t \sin \omega_c(t + \tau) + R_{\hat{X}X}(\tau) \sin \omega_c t \cos \omega_c(t + \tau) \\ &= R_X(\tau) \cos \omega_c \tau + \hat{R}_X(\tau) \sin \omega_c \tau \\ &= R_{X_c}(\tau) \end{aligned}$$

$$R_{X_s}(t, t + \tau) = E\{X_s^*(t) X_s(t + \tau)\} = R_X(\tau) \cos \omega_c \tau + \hat{R}_X(\tau) \sin \omega_c \tau = R_{X_c}(\tau) \quad 21$$



3.10.4 $X_c(t)$ 和 $X_s(t)$ 的性质(2)

$$\begin{cases} X_c(t) = X(t) \cos \omega_c t + \hat{X}(t) \sin \omega_c t \\ X_s(t) = \hat{X}(t) \cos \omega_c t - X(t) \sin \omega_c t \end{cases}$$

(4) 若 $X(t)$ 是宽平稳过程, 则 $X_c(t), X_s(t)$ 为联合宽平稳过程

$$\begin{aligned} R_{X_c X_s}(t, t + \tau) &= E\{X_c^*(t) X_s(t + \tau)\} \\ &= R_{\hat{X}}(\tau) \sin \omega_c t \cos \omega_c(t + \tau) - R_X(\tau) \cos \omega_c t \sin \omega_c(t + \tau) \\ &\quad + R_{X \hat{X}}(\tau) \cos \omega_c t \cos \omega_c(t + \tau) - R_{\hat{X} X}(\tau) \sin \omega_c t \sin \omega_c(t + \tau) \\ &= R_X(\tau) \sin \omega_c \tau + \hat{R}_X(\tau) \cos \omega_c \tau \\ &= R_{X_c X_s}(\tau) \end{aligned}$$

$R_{X_s}(\tau) = R_X(\tau) \cos \omega_c \tau + \hat{R}_X(\tau) \sin \omega_c \tau = R_{X_c}(\tau)$

(5) $R_{X_c}(0) = R_{X_s}(0) = R_X(0) = \sigma_X^2$

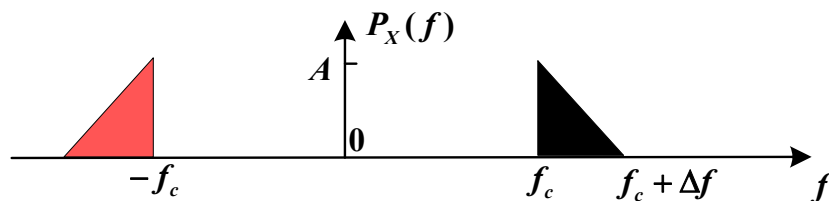
(6) $R_{X_c X_s}(0) = -R_{X_s X_c}(0) = \hat{R}_X(0) = 0$, 因为 $\hat{R}_X(\tau)$ 是奇函数

(7) 因为 $R_{X_c}(\tau) = R_{X_s}(\tau)$, 所以有 $P_{X_c}(f) = P_{X_s}(f)$

3.10.4 $X_c(t)$ 和 $X_s(t)$ 的性质(3)

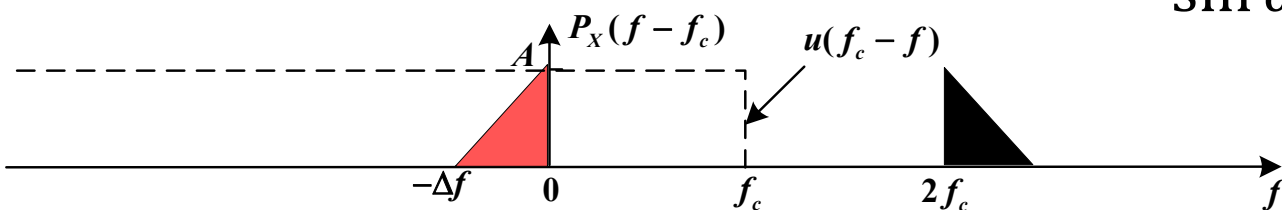
$$(8) R_{X_c}(\tau) = R_{X_s}(\tau) = R_X(\tau) \cos \omega_c \tau + \hat{R}_X(\tau) \sin \omega_c \tau$$

$$\begin{aligned} P_{X_c}(f) &= [P_X(f)u(-f)] * \delta(f - f_c) + [P_X(f)u(f)] * \delta(f + f_c) \\ &= P_X(f - f_c)u(f_c - f) + P_X(f + f_c)u(f + f_c) \end{aligned}$$



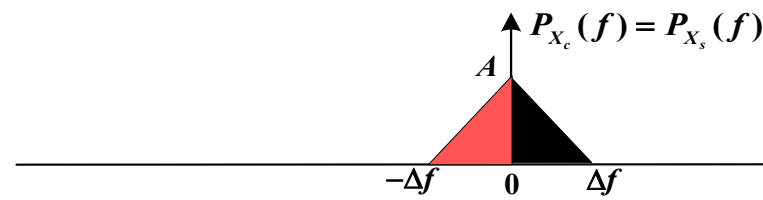
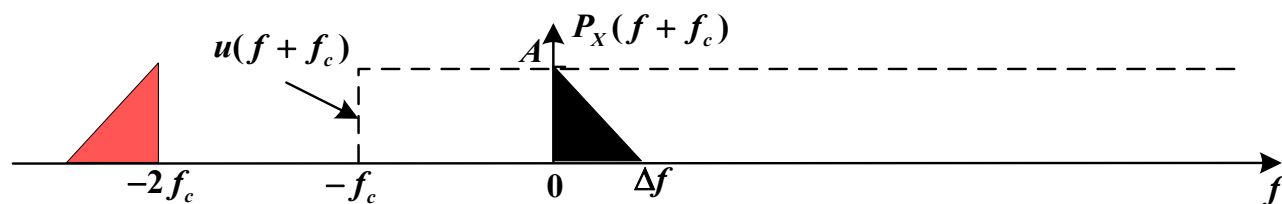
$$\cos \omega_c \tau \rightarrow \frac{\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)}{2}$$

$$\sin \omega_c \tau \rightarrow \frac{\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c)}{2j}$$



$$u(f) = \frac{1 + \text{sgn}(f)}{2}$$

$$u(-f) = \frac{1 - \text{sgn}(t)}{2}$$



3.10.4 $X_c(t)$ 和 $X_s(t)$ 的性质(4)

- 对于能量或功率严格限制在带内的信号，当 $\Delta f < f_c$

$$P_{X_c}(f) = P_{X_s}(f) = \begin{cases} P_X(f - f_c) + P_X(f + f_c), & -f_c \leq f \leq f_c \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 对于非严格限频信号， $\Delta f \ll f_c$ 时，此公式近似成立。

- 当 $P_X(f)$ 对称于 f_c 时 \longrightarrow 等效基带过程为实过程

$$P_X(f) = \frac{1}{2} [P_{X_c}(f + f_c) + P_{X_c}(f - f_c)]$$

$$R_X(\tau) = R_{X_c}(\tau) \cos 2\pi f_c \tau = R_{X_s}(\tau) \cos 2\pi f_c \tau$$



3.10.5 $X_c(t)$ 和 $X_s(t)$ 的联合概密

- $X_c(t)$ 和 $X_s(t)$ 是 *i.i.d* 高斯随机变量，同一时刻相互独立其联合概率密度为

$$\begin{aligned} p_{X_c X_s}(x_c, x_s) &= p_{X_c}(x_c) p_{X_s}(x_s) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x_c^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x_s^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x_c^2 + x_s^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

3.10.6 $a(t)$ 和 $\phi(t)$ 的联合概密

$$X_c(t) = a(t) \cos \phi(t)$$

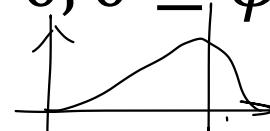
$$X_s(t) = a(t) \sin \phi(t)$$

$$p_{X_c X_s}(x_c, x_s) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x_c^2 + x_s^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial a} & \frac{\partial x_s}{\partial a} \\ \frac{\partial x_c}{\partial \phi} & \frac{\partial x_s}{\partial \phi} \end{vmatrix} = a$$

$$\begin{aligned} p_{a\phi}(a, \phi) &= p_{X_c X_s}[X_c(a, \phi), X_s(a, \phi)] |J| \\ &= \frac{a}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right), a \geq 0, 0 \leq \phi < 2\pi \end{aligned}$$

$$p_a(a) = \int_0^{2\pi} p_{a\phi}(a, \phi) d\phi = \frac{a}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right), a \geq 0$$



瑞利分布

$$p_{\phi}(\phi) = \int_0^{\infty} p_{a\phi}(a, \phi) da = \frac{1}{2\pi}, 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

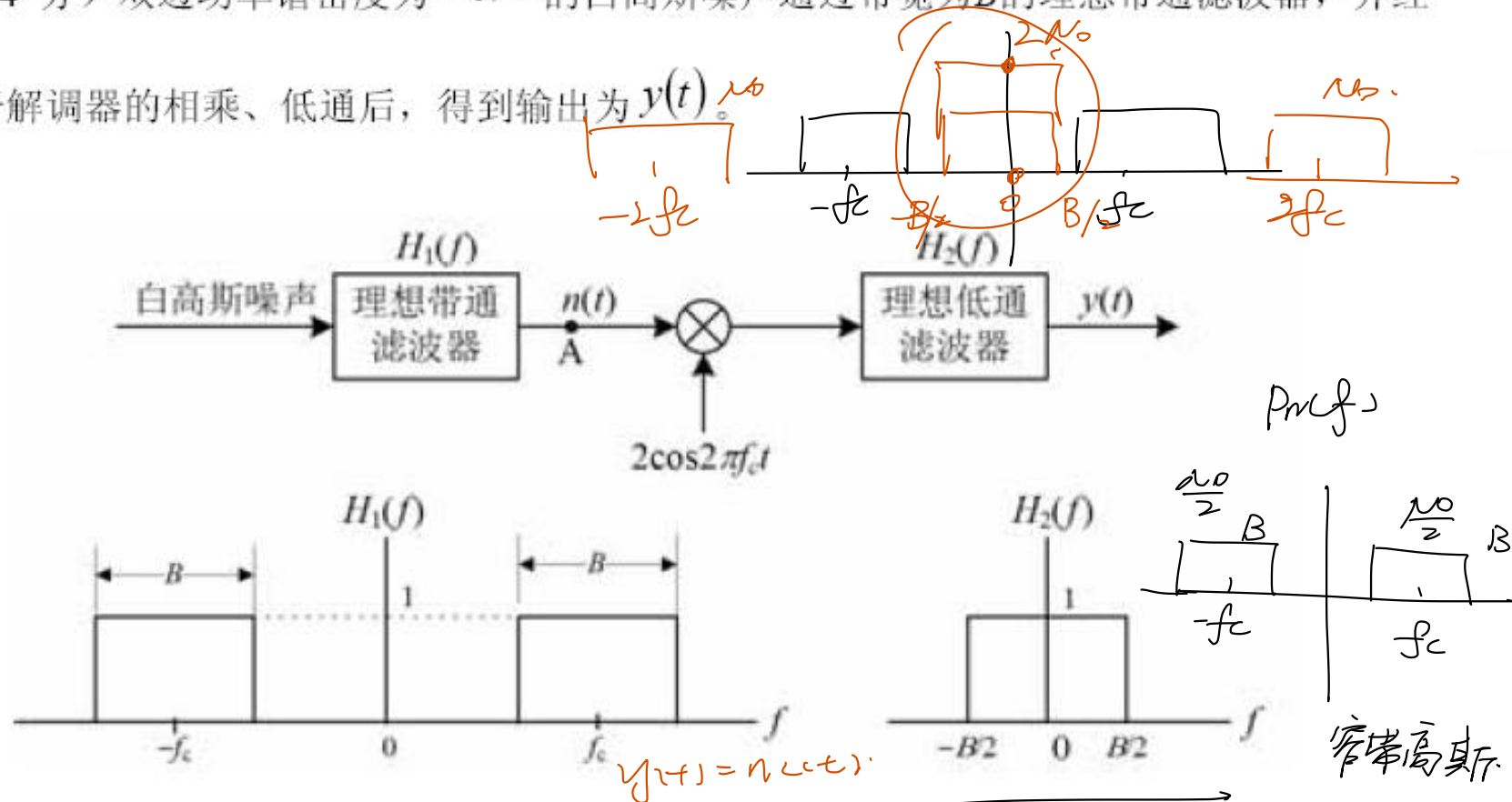


均匀分布

$p_{a\phi}(a, \phi) = p_a(a)p_{\phi}(\phi)$ 同一时刻 $p_a(a)$ 与 $p_{\phi}(\phi)$ 独立

、(14 分) 双边功率谱密度为 $N_0/2$ 的白高斯噪声通过带宽为 B 的理想带通滤波器，并经

相干解调器的相乘、低通后，得到输出为 $y(t)$ 。



next to next - not same

$n(t) + n(t) \cos 2\omega t - n(t) \sin 2\omega t$
 $n(t)$ same

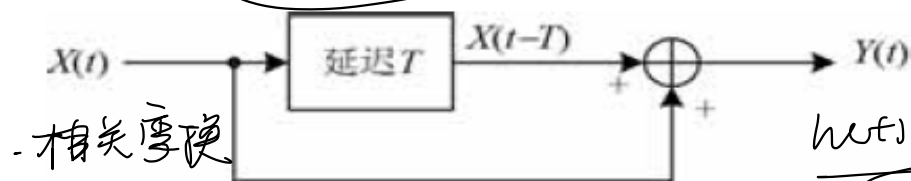
(a) 请写出图中A点噪声 $n(t)$ 的数学表示式，并画出 $n(t)$ 的双边功率谱密度 $P_n(f)$ 图；

(b) 请写出图中 $y(t)$ 的表示式，并画出 $y(t)$ 的双边功率谱密度图；

$n(t) \times 2 \cos 2\pi f_c t$

$n(t) 2 \cos 2\omega t - n(t) 2 \sin 2\omega t \cos \omega t$
 $= n(t) \cdot (1 + \cos 2\omega t) - n(t) \sin 2\omega t$

下图中的 $X(t)$ 是均值为零的平稳遍历随机过程，已知其自相关函数是 $R_X(\tau)$ 。



相关函数

$$H(f) = e^{-j\pi f T} \cdot 2 \cos \pi f T$$

$$h(t) = \delta(t-T) + \delta(t)$$

$$H(f) = 1 + e^{-j2\pi f T}$$

(1) 求 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 的平均功率 P_X 及 P_Y ;

$$P_Y(f) = P_X(f) \cdot |H(f)|^2$$

(2) 写出 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 的双边功率谱密度 $P_X(f)$ 及 $P_Y(f)$ 的计算公式;

$$P_Y(f) = P_X(f) \cdot 4 \cos^2 \pi f T$$

$$\begin{aligned} & e^{-j\pi f T} \cdot e^{-j\pi f T} \\ & + e^{-j\pi f T} \cdot e^{j\pi f T} \\ & = e^{-j\pi f T} (e^{-j\pi f T} + e^{j\pi f T}) \\ & \quad \quad \quad 2 \cos \pi f T \end{aligned}$$

3.11 匹配滤波器 (1)

■ MF: 某一特定时刻的输出信噪比最大的线性滤波器

□ 滤波器输入: $x(t) = s(t) + n(t)$ $x(t) = s(t) + n(t) \rightarrow \boxed{h} \rightarrow y(t) = s_o(t) + n_o(t)$

■ $s(t) \Leftrightarrow S(f)$

■ $n(f)$ 为高斯白噪声, 均值为零, 双边功率谱密度 $N_0/2$.

□ 滤波器输出: $y(t) = s_o(t) + n_o(t)$

瞬时输出信号功率: $|s_o(t)|^2$; 输出噪声的统计平均功率: $E\{n_o^2(t)\}$

■ $s_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi ft}df$

■ $E\{n_o^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} P_{n_o}(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} |H(f)|^2 df$

输出信噪比 $\gamma_o = \frac{|s_o(t_0)|^2}{E\{n_o^2(t_0)\}} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi ft_0} df \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} |H(f)|^2 df}$

3.11 匹配滤波器(2)

■ 许瓦兹不等式:

输入信号能量

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y(f)df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df$$

$X(f) = K \cdot Y^*(f)$ 时等式成立

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y(f)df \right| = |\langle X(f), Y^*(f) \rangle| = |X(f)| |Y^*(f)| \cos \theta$$

$$\gamma_o = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi f t_0} df \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} |H(f)|^2 df} \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} |H(f)|^2 df}$$

↗ $[0, 180]$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df}{N_0/2} = \frac{2E_s}{N_0}$$

当 $H(f) = K \cdot S^*(f)e^{-j2\pi f t_0}$ 时, 输出信噪比达到最大 ~匹配滤波器

3.11 匹配滤波器(3)

■ **白噪声干扰下**，当滤波器的传输特性与输入信号频谱的复共轭相一致时，将能在**给定时刻 t_0** 获得**最大输出信噪比 $2E_s/N_0$** 。这种**最大信噪比意义下的最佳线性滤波器**被称为**匹配滤波器**。

$$H(f) = K \cdot S^*(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

$$h(t) = K \int_{-\infty}^{\infty} S^*(f) e^{j2\pi f (t-t_0)} df = K \cdot s^*(t_0 - t)$$

滤波器的物理可实现条件： $t < 0$ 时，要求 $h(t) = 0$ ，即

$$s(t_0 - t) = 0 \text{ when } t < 0 \rightarrow s(t) = 0 \text{ when } t > t_0$$

假设 $s(t)$ 在 t_1 瞬间消失，则 $t_0 \geq t_1$ ，通常取 $t_0 = t_1$ 。

$$u(t) = s(t_0 - t)$$

$$S_0(t_0) = s(t) * u(t) = \int s(\tau) u(t - \tau) d\tau$$

$$= \int s(\tau) s(t_0 - t - \tau) d\tau$$

$t = t_0$

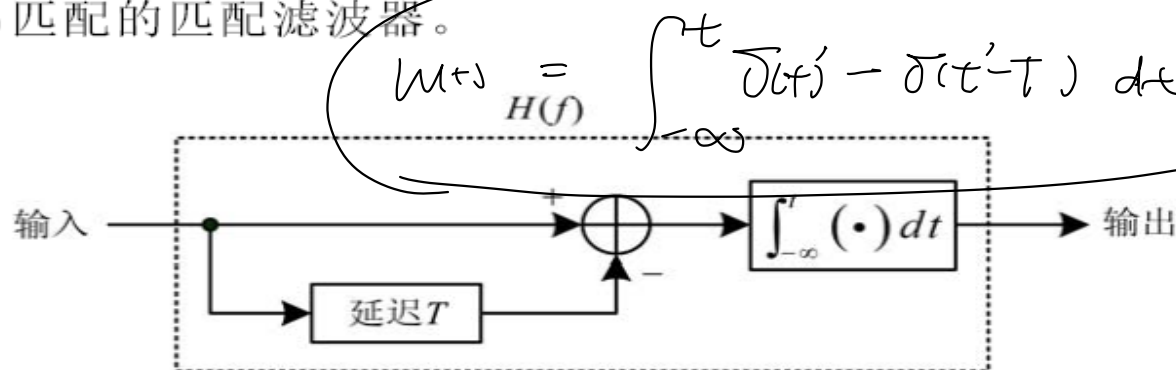
$$= \int_{t=t_0} s(\tau) s(-\tau) d\tau = \int_0^{t_0} s(\tau)^2 d\tau$$

$0 \sim t_0$ 能量形式



信号的总能量
没有损失。

二. (12 分) 已知下图所示的系统是在加性白高斯噪声干扰条件下, 对某个脉冲 $g(t)$ 匹配的匹配滤波器。

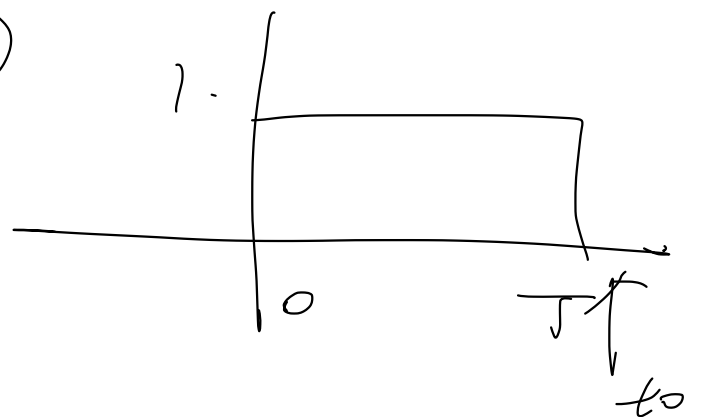


$$H(f) = \int_{-\infty}^t \delta(t') - \delta(t' - T) dt'$$

- (1) 请写出该匹配滤波器的冲激响应 $h(t)$ 及传递函数 $H(f)$ 的表达式;
- (2) 假设 $g(t)$ 在 $(0, T)$ 之外为 0, 请写出脉冲 $g(t)$ 的表达式并画出波形。

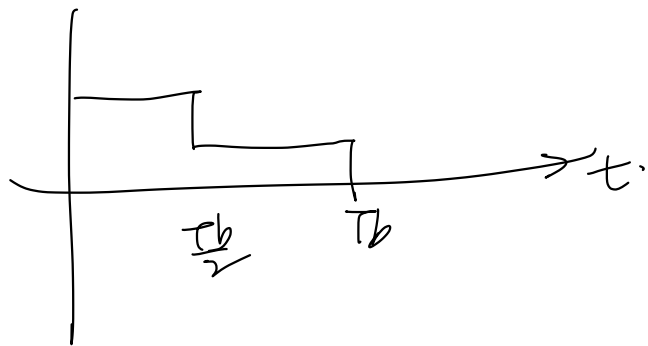
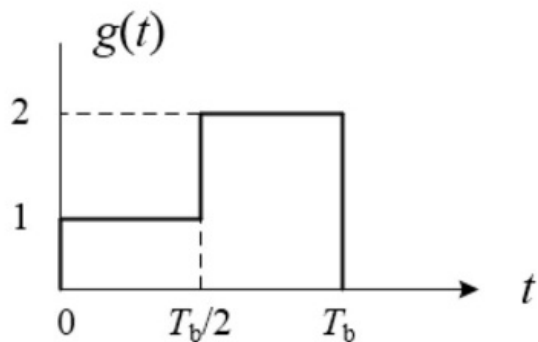
$$\int_{-\infty}^t \delta(t') dt' - \int_{-\infty}^t \delta(t' - T) dt'$$

$$\text{Rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)$$



例2

数字波形 $g(t)$ 如下图所示，用其承载信息比特，通过AWGN信道，接收端采用匹配滤波器对接收信号进行接收检测。求匹配滤波器 $h(t)$ 的波形、最佳采样时刻、匹配滤波器的输出波形





3.12 循环平稳随机过程

- 定义：若随机过程的**统计平均**和**自相关函数**是时间的**周期函数**，则称为周期平稳随机过程或循环平稳随机过程。
- $x_c(t) = x(t) \cos \omega_c t$; $x_s(t) = x(t) \sin \omega_c t$

$$E\{x_c(t)\} = m_x \cos \omega_c t : \text{周期函数}$$

$$E\{x_s(t)\} = m_x \sin \omega_c t : \text{周期函数}$$

$$R_{x_c}(t, t + \tau) = R_{x_s}(\tau) = R_x(\tau) \cos \omega_c \tau + \hat{R}_x(\tau) \sin \omega_c \tau$$

周期/循环平稳过程

3.13 循环平稳随机过程的功率谱

■ 随机过程： $X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT)$, $\{a_n\}$ 是随机序列， $g(t)$ 为码元波形，若

■ $m_a = E\{a_n\}$ 为常数；

■ a_n 的自相关函数 $R_a(n, n+k) = E\{a_n^* a_{n+k}\} = R_a(k)$

则 $X(t)$ 为周期平稳过程

$$E\{X(t)\} = E\{\sum_n a_n g(t - nT)\} = m_a \sum_n g(t - nT) \quad : \text{周期函数}$$

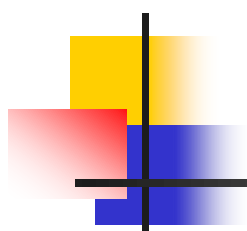
$$\begin{aligned} R_X(t, t + \tau) &= \sum_n \sum_m E\{a_n^* a_m\} g^*(t - nT) g(t + \tau - mT) \\ &= \sum_n \sum_m R_a(m - n) g^*(t - nT) g(t + \tau - mT) \\ &= R_X(t + kT, t + \tau + kT) : \text{周期函数} \end{aligned}$$



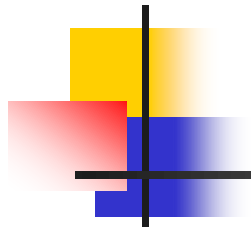
3.13 循环平稳随机过程的功率谱

$$\overline{R_X(t, t + \tau)} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_X(t, t + \tau) dt = \bar{R}_X(\tau)$$

$$P_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{R}_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$



将功率谱密度为低通型的平稳过程 $X(t)$ 与正弦载波 $\sin(2\pi f_c t + \varphi)$ 相乘, 得到 $Y(t) = X(t)\sin(2\pi f_c t + \varphi)$, 若相位 φ 是在 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机变量, 且与 $X(t)$ 统计独立, 则 $Y(t)$ 是 平稳 随机过程; 若 φ 是常数, 则 $Y(t)$ 是 ② 随机过程。
循环平稳



作业：1、2、5、6、7、8