



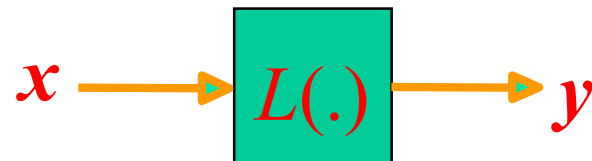
第二章 确定信号分析

信息与通信工程学院
无线信号处理与网络实验室(WSPN)
智能计算与通信研究组(IC²)

彭岳星

yxpeng@bupt.edu.cn

确定信号分析



- 周期信号的傅立叶级数分析
- 傅立叶变换
- 单位冲击函数的傅立叶变换
- 功率信号的傅立叶变换
- 能量谱密度和功率谱密度
- 确定信号的相关函数
- 卷积
- 确定信号通过线性系统
- 希尔伯特变换
- 频带信号带通系统

信号分析：正交变换与正交分解——将复杂信号分解为简单信号

信号间关系分析：相关分析——信号功率特征及相互关系

信号的等效分析：基带信号与频带信号的统一



线代回顾

- 集合

- 一堆不重复的元素，元素类型可以不同
- 元素之间的次序不重要

- 矩阵

- 具有相同维度的一组矢量的集合
- 矢量的排列次序本质上不影响矩阵的性质

- 矢量的线性运算

- 加法：对应元素相加/减
- 数乘：标量对每个元素进行同等的缩放

- 线性空间/矢量空间

- 非空集合 V 上，存在数域 P ，如果 V 对 P 的线性运算满足封闭性， V 为 P 上的线性空间/矢量空间
- 加法：交换律，分配律， 0 元素，负元素
- 数乘：单位元素，交换律，分配律



线代回顾

- 长度/范数

- $x_{l_p} = (\sum_n |x_n|^p)^{1/p}$
- $p = 0$: 稀疏度表征
- $p = 1$: Manhattan距离
- $p = 2$: 欧式距离
- $p = \infty$: 最大值分量
- $1 \leq p$: 凸函数

- 行列式

- 线性变换后两个空间之间的度量比例关系
- e. g. , $X = \{e_1, e_2\}; Y = \{f_1 = e_1 + e_2, f_2 = e_2 - e_1\}; J = \left| \frac{\partial X}{\partial Y} \right| = \frac{1}{2}$

线代回顾

- 内积

- $\langle x, y \rangle = \sum_n x_n y_n = |x||y| \cos \theta$
- $\rho = \cos \theta$: 空间上两向量的相似性度量

- 线性相关/线性无关/最大无关组

- 独立的矢量: 自由度/坐标系
- 最大无关组不唯一: 坐标系可不同, 通过旋转/平移等操作

- 标准正交基的构造

- Gram-Schmidt正交化过程;

- ◆ $\{a_1, \dots, a_n\} \rightarrow \{e_1, \dots, e_k\}$:
$$e_i = \frac{a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle a_i, e_j \rangle e_j}{|a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle a_i, e_j \rangle e_j|}$$

- 投影运算/正交分解

- ◆ 分析: 复杂信号用简单信号来正交组合
- ◆ 傅立叶级数
- ◆ 傅立叶变换, 小波变换



线性代数

● 矩阵：向量的集合

- 矩阵的秩：极大无关组的向量个数
- 特征值/特征向量：坐标与坐标投影值
 - ◆ 满秩的方阵A, $A^H x_i = \lambda_i x_i \rightarrow A^H X = X \Sigma \rightarrow A = X \Sigma X^H$: 特征值分解,
 - ◆ $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$; $\Sigma = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = [\dots \lambda_i e_i \dots]$
 - ◆ 不满秩的矩阵A, 左/右特征向量, $A = U \Sigma V^H$: 奇异值分解
 - ◆ $X^H = X^{-1}$: 酉阵
- 矩阵运算: $Ax = y \rightarrow$ 对向量进行线性变换 (长度/角度)
 - ◆ 特征向量: 一些特殊的向量, 矩阵运算意义上保持方向不变, 只改变长度, 长度由特征值确定
- 矩阵秩: 线性空间的维度
- 解方程
 - ◆ $A^T x = 0$: $x \perp A_i$
 - ◆ $Ax = b$: $b = \sum_i x_i A_i$



矩阵论补充

- 完备的线性空间

- 线性空间：定义了线性运算的空间
- 完备性的线性空间：对线性运算具有封闭性——空间中任意的向量通过线性运算后还在该空间内

- Banach空间与Hilbert空间

- Banach空间：完备的线性赋范空间，即对范数运算具有完备性
- Hilbert空间：完备的内积空间，即对内积运算具有完备性

- 完备的线性空间：子空间的直和

- $A = A_1 \oplus A_2$
 - ◆ $R(A) = R(A_1) + R(A_2)$
 - ◆ $a_1 \perp a_2, \forall a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$

2.1 周期信号的傅立叶级数分析

傅氏级数

- $s(t)$ 是周期为 T 、且满足狄里赫利条件的周期信号，则有：

$$\begin{aligned} s(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(n\omega_0 t) dt;$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(n\omega_0 t) dt; \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

- 周期函数 $s(t)$ 由许多不同幅度、频率和相位的正弦函数构成
 - ◆ 周期时间函数 \leftrightarrow 离散频谱：时频对偶性
 - ◆ $\omega_0 = 2\pi/T$

注：狄里赫利条件：在一个周期内 $s(t)$ 只有有限个第一类不连续点，且可将 T 分为有限个区间，每个区间内 $s(t)$ 为单调函数。一般实际信号均满足此条件

2.1 周期信号的傅立叶级数分析

• 周期函数的正交分解

- 所有周期为 T 的函数构成一个特殊的Hilbert函数空间，该空间的一组完备的标准正交基为 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} e^{jn\omega_0 t} \right\}_{n=0}^{\infty}$ ， $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ ，其中

$\frac{1}{\sqrt{T}}$ 是能量归一化系数： $\int_0^T |e^{jn\omega_0 t}|^2 dt = T$

- 该空间的另一组等价的标准正交基(实数形式)为：

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos n\omega_0 t, \sqrt{\frac{2}{T}} \sin n\omega_0 t \right\}_{n=1}^{\infty}$$

- 周期函数 $s(t)$ 在两组标准正交基下的分解即为傅氏级数展开

$$a_0 = \langle s(t), \frac{1}{\sqrt{T}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T s(t) dt; \quad a_n = \frac{2}{T} \langle s(t), \cos(n\omega_0 t) \rangle;$$

$$b_n = \frac{2}{T} \langle s(t), \sin(n\omega_0 t) \rangle; \quad c_n = \frac{1}{T} \langle s(t), e^{-jn\omega_0 t} \rangle$$

2.2 非周期信号的傅立叶级数

$s(t)$ 为非周期信号, 持续时间为 T_1 , 将其以 $T > T_1$ 为周期

延拓为周期函数 $s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t - nT)$

当 $T \rightarrow \infty$ 时, $s_T(t) = s(t)$, 即 $\lim_{T \rightarrow \infty} s_T(t) = s(t)$

令 $s_T(t)$ 满足狄里赫利条件, 展开为傅氏级数

$$s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_T(t') e^{-jn\omega_0 t'} dt' \right] e^{jn\omega_0 t}$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

当 $T \rightarrow \infty$ 时, $\omega_0 \rightarrow d\omega, n\omega_0 \rightarrow \omega, \sum \rightarrow \int$, 因此有

$$s(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} s_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t') e^{-j\omega t'} dt' e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

2.3 傅立叶变换: 正交变换/投影运算

- 表达式: $g(t) \Leftrightarrow G(f)$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df$$

- 傅氏变换存在的充分条件

- $g(t)$ 在无限区间内绝对可积: $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt < \infty$
- 在每个有限区间内只有有限个极大值和极小值
- 在每个有限区间内只有有限个不连续点

2.4 傅立叶变换的运算特性:时频对偶性

- 线性叠加: $F\{c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t)\} = c_1 G_1(f) + c_2 G_2(f)$
- 复共轭: $F\{g^*(t)\} = \left[\int g(t) e^{-j2\pi(-f)t} dt \right]^* = G^*(-f)$
- 标度换算: $F\{g(at)\} = \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right)$
- 时移: $F\{g(t - t_0)\} = e^{-j2\pi f t_0} G(f)$
- 频移: $F\{e^{j2\pi f_0 t} g(t)\} = G(f - f_0)$
- 调制: $F\{g(t) \cos 2\pi f_0 t\} = \frac{1}{2} [G(f + f_0) + G(f - f_0)]$
- 卷积: $F\{g_1(t) \otimes g_2(t)\} = G_1(f) G_2(f);$
 $F\{g_1(t) g_2(t)\} = G_1(f) \otimes G_2(f)$

2.4 傅氏变换的运算特性-(Cont'd)

- 对偶: $F\{G(t)\} = \int G(t)e^{j2\pi(-f)t}dt = g(-f)$

- 微分: $F\left\{\frac{d^n}{dt^n}g(t)\right\} = \int e^{-j2\pi ft}d\left(g^{(n-1)}(t)\right)$

$$= \underline{g^{(n-1)}(t)e^{-j2\pi ft}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + j2\pi f \int g^{(n-1)}(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$= (j2\pi f)^n G(f)$$

因果系统, 物理系统
 $g(t=\infty)=0, g(t<0)=0$

- 积分: $F\left\{\int_{-\infty}^t g(\tau)d\tau\right\} = \boxed{\frac{G(f)}{j2\pi f}} + \frac{1}{2}\boxed{G(0)}\delta(f)$ \leftarrow 单独定义

$g(t) = h'(t) \Rightarrow G(f) = j2\pi f H(f) \Rightarrow H(f) = \frac{G(f)}{j2\pi f}$

- 面积: $g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)df, G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt$



2.5 单位冲激函数(δ 函数)

- δ 函数的定义：

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \text{ 且 } \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta(t) dt = 1, \forall \epsilon > 0$$

- δ 函数的频谱密度：

$$\Delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi f0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

- δ 函数的物理意义：

一个高度为无穷大、宽度为无穷小、面积为1的脉冲。



2.5 单位冲激函数的性质——采样

$$f(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt$$

证: 因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

物理意义: 可以看作是用 δ 函数在 $t = t_0$ 时刻对 $f(t)$ 抽样。

单位冲激函数是偶函数, 即 $\delta(t) = \delta(-t)$, 故也可写成:

$$f(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t_0 - t) dt$$

2.6 常用功率信号的傅立叶变换

$$F\{1\} = \delta(f)$$

$$F\{u(t)\} = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$



$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

$$F\{\text{sgn}(t)\} = \frac{1}{j\pi f}$$

$$\text{sgn}(t) = u(t) - u(-t)$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

$$\int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \rightarrow \frac{G(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} G(0) \delta(f)$$

任意周期信号: $s_T(t)$

$$F\left\{\sum_n c_n e^{j2\pi n f_0 t}\right\} = \sum_n c_n \underbrace{\delta(f - n f_0)}_{\sum_n c_n \delta(f - n f_0)}$$

$$F\{s_T(t) = \sum_n c_n e^{j2\pi n f_0 t}\} = \sum_n c_n \delta(f - n f_0), f_0 = 1/T$$

平移特性

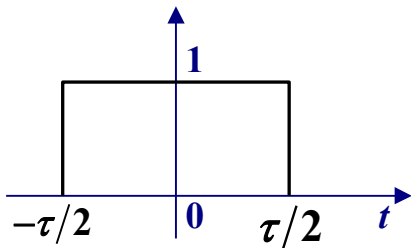
直观理解 周期 → 离散

$$F\{\delta_T(t) = \sum_n \delta(t - nT)\} = \frac{1}{T} \sum_n \delta(f - n f_0), f_0 = 1/T$$

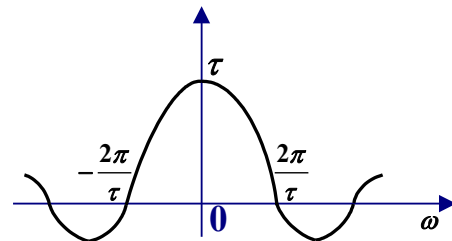
傅立叶展开: $\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn \cdot 2\pi f_0 t}$

2.6 常用功率信号的傅立叶变换（续）

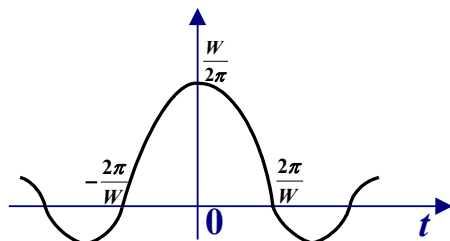
$$\text{Rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$$



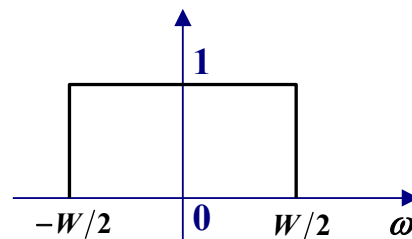
$$\tau \cdot \text{sinc}(f\tau)$$



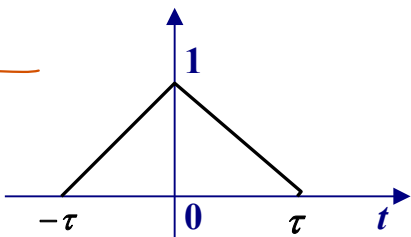
$$W \cdot \text{sinc}(Wt)$$



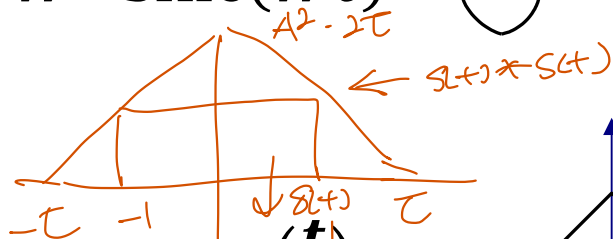
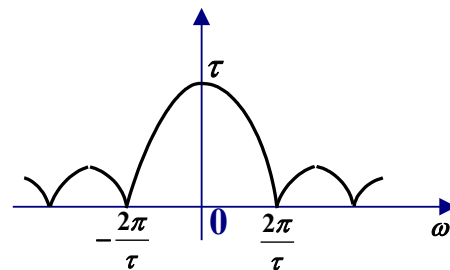
$$\text{Rect}\left(\frac{f}{W}\right)$$



$$\text{tri}\left(\frac{t}{\tau}\right)$$



$$\tau \cdot \text{sinc}^2(f\tau)$$



$$\delta_T(t) = \sum_n \delta(t - nT) \rightarrow \frac{1}{T} \sum_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

$$= \sum_n C_n e^{j2\pi n \frac{t}{T}}$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t - nT) e^{-j2\pi n \frac{t}{T}} dt$$

$$C_n = \frac{1}{T}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\delta_T(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_n \frac{1}{T} e^{j2\pi n \frac{t}{T}} \cdot e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_n e^{j2\pi(nf - f_0)t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(nf - f_0)t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_n \delta(f - nf_0) \end{aligned}$$

2.7 能量信号的频谱密度

$f(t)$ 的能量:

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} E(f) df : \text{Parseval定理}$$

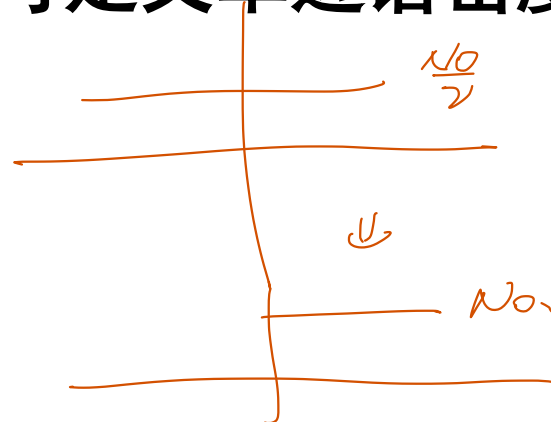
确定性信号

$$E(f) = |F(f)|^2 : \text{能量谱密度, 双边谱密度}$$

$f(t)$ 是实函数, 则 $E(f)$ 是偶函数, 可定义单边谱密度:

负频率移到正频

$$G(f) = \begin{cases} 2E(f) & f > 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases}$$



2.8 功率信号的功率谱密度

首先将信号 $s(t)$ 截短为 $s_T(t)$, $-T/2 < t < T/2$

$s_T(t)$ 是一个能量信号, 可用傅里叶变换求出其
能量谱密度 $|S_T(f)|^2$

$$P = \frac{E}{T}$$

由帕斯瓦尔定理有 $E = \int_{-T/2}^{T/2} s_T^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S_T(f)|^2 df$

将 $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |S_T(f)|^2$ 定义为信号的功率谱密度 $P(f)$,

即 $P(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |S_T(f)|^2$

能量密度

2.8 功率信号的功率谱密度

功率信号的自相关函数：时间平均

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) x(t + \tau) dt$$

功率信号的功率谱密度：Parseval定理

$$P_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) d\tau$$

$R_x(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} P_x(f)$ $e^{-j2\pi f\tau}$

2.8 周期信号的功率谱密度

$$g_T(t) = \sum_n c_n e^{j2\pi n t/T}$$

$$P_g = \frac{E_g}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_n c_n^2 dt = \sum_n c_n^2$$

$$P_g = \int_{-\infty}^{\infty} P_g(f) df$$

$$P_g(f) = \sum_n c_n^2 \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \quad \text{线谱}$$

$$P_g(f) = |G(f)|^2 = \sum_n |c_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \quad \text{确定性信号}$$



2.8 信号长度与相关系数

信号的能量

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)X(f) df$$

信号作为空间中的一个矢量，信号的长度/模

$$|x|_2 = \sqrt{E_x} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

两信号的相关系数：空间夹角的余弦

$$\rho_{xy} = \frac{\langle x, y \rangle}{|x||y|} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)y(\tau) d\tau}{|x||y|} = \cos(\angle xoy) \in [-1, 1]$$

2.8 功率信号的功率谱密度

例1：求单频信号 $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ 的自相关、功率谱、功率

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) x(t + \tau) dt$$

$$e^{-j2\pi f_0 t} \cdot e^{j2\pi f_0 (t + \tau)} = e^{j2\pi f_0 \tau}$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi f_0 \tau} dt = e^{j2\pi f_0 \tau}$$

$\frac{1}{T} \cdot \frac{1}{j2\pi f_0} \cdot e^{j2\pi f_0 \tau} \Big|_{-T/2}^{T/2}$

$$P_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \delta(f - f_0)$$

$e^{j2\pi f_0 \tau} \quad 1 \leftrightarrow \delta(f)$

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} P_x(f) df = 1$$

$\therefore e^{j2\pi f_0 \tau} \leftrightarrow \delta(f - f_0)$

2.8 功率信号的功率谱密度

例2：求周期信号 $x(t) = \sum_n \delta(t - nT)$ 的自相关、功率谱

$$X(f) = \underbrace{\frac{1}{T}}_{C_n} \sum_m \underbrace{\delta(f - mf_0)}_{\delta(f - n f_0) \text{ 是 } \delta \text{ 函数}}$$

$$P_x(f) = |X(f)|^2 = \frac{1}{T^2} \sum_m \delta(f - mf_0) = \frac{1}{T} \sum_m e^{j2\pi mfT}$$

$$R_x(\tau) = F^{-1}\{P_x(f)\} = \frac{1}{T^2} \sum_m e^{j2\pi mf_0\tau}$$

$$= \frac{1}{T} \sum_m \delta(\tau - mT)$$

2.8 功率信号的功率谱密度

例3：求周期信号 $s(t) = \sum_n g(t - nT)$ 的自相关、功率谱
 对信号周期采样。

$$s(t) = \sum_k \underline{c_k} e^{j2\pi kt/T} = \frac{1}{T} \sum_k G\left(\frac{k}{T}\right) e^{j2\pi kt/T}$$

$c_k = \langle s(t), e^{j2\pi kt/T} \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_n g(t) \cdot e^{-j2\pi kt/T} dt$
 共轭

$$S(f) = \frac{1}{T} \sum_k G\left(\frac{k}{T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

$$P_s(f) = |S(f)|^2 = \frac{1}{T^2} \sum_k \left| G\left(\frac{k}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

$$R_s(\tau) = F^{-1}\{P_s(f)\} = ?$$

$s(t) = g(t) \otimes \delta_T(t) \rightarrow S(f) = G(f) \cdot \frac{1}{T} \sum_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$
 $G(f) = G\left(\frac{n}{T}\right)$

2.8 实信号的奇偶对称性问题

- $x(t)$ 是实偶信号，其频谱 $X(f)$ 是实偶函数

$$x^*(-t) = x(t) \rightarrow X(f) = X^*(-f)$$

$$X(-f) = \int x(t) e^{j2\pi ft} dt = \left[\int x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right]^* = X^*(f)$$

- $x(t)$ 是实奇信号，其频谱 $X(f)$ 是虚奇函数

虚奇信号

$$x^*(-t) = -x(t) \rightarrow \underline{X(f)} = -\underline{X^*(f)} = \underline{-X(-f)}$$

$$X(f) = - \int x^*(-t) e^{-j2\pi ft} dt = - \left[\int x(-t) e^{j2\pi ft} dt \right]^* = -X^*(f)$$

$$X(-f) = \int x(t) e^{j2\pi ft} dt = \left[\int x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right]^* = X^*(f) = -X(f)$$

2.9 信号带宽

$S(f)$, $t \in (-\infty, +\infty)$

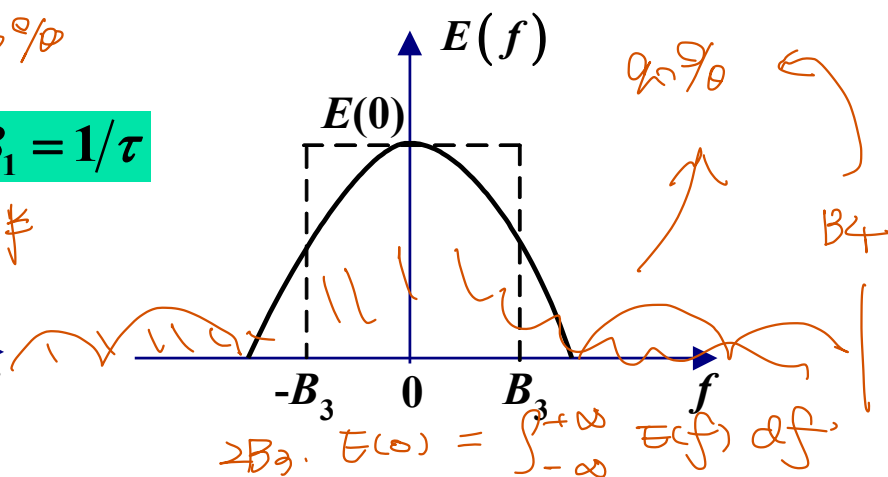
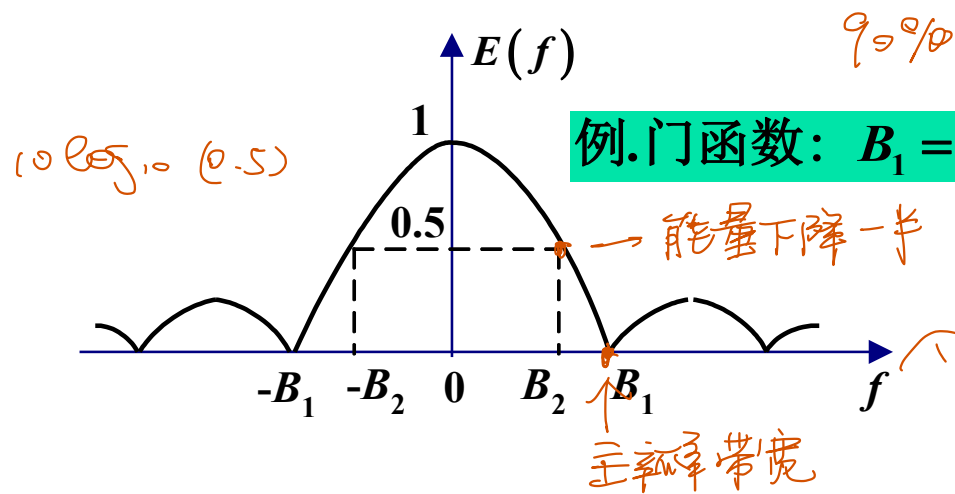
↓
截短 $(0, 1) \Rightarrow$ 频域 $\rightarrow +\infty$

- 信号带宽：信号能量或功率主要部分集中的频率范围
(正频率部分)--Hz 点考虑正频部分

定义方法

- 零点带宽(主瓣带宽): B_1 → 滤波器
- 3dB(半功率点)带宽: B_2
- 等效矩形带宽(等能量带宽): B_3
- 占总能量(功率)的百分比带宽

$$B_3 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} E(f) df}{2E(0)}$$



2.9 信号带宽 - IEEE 802.11a

定义: → 需求

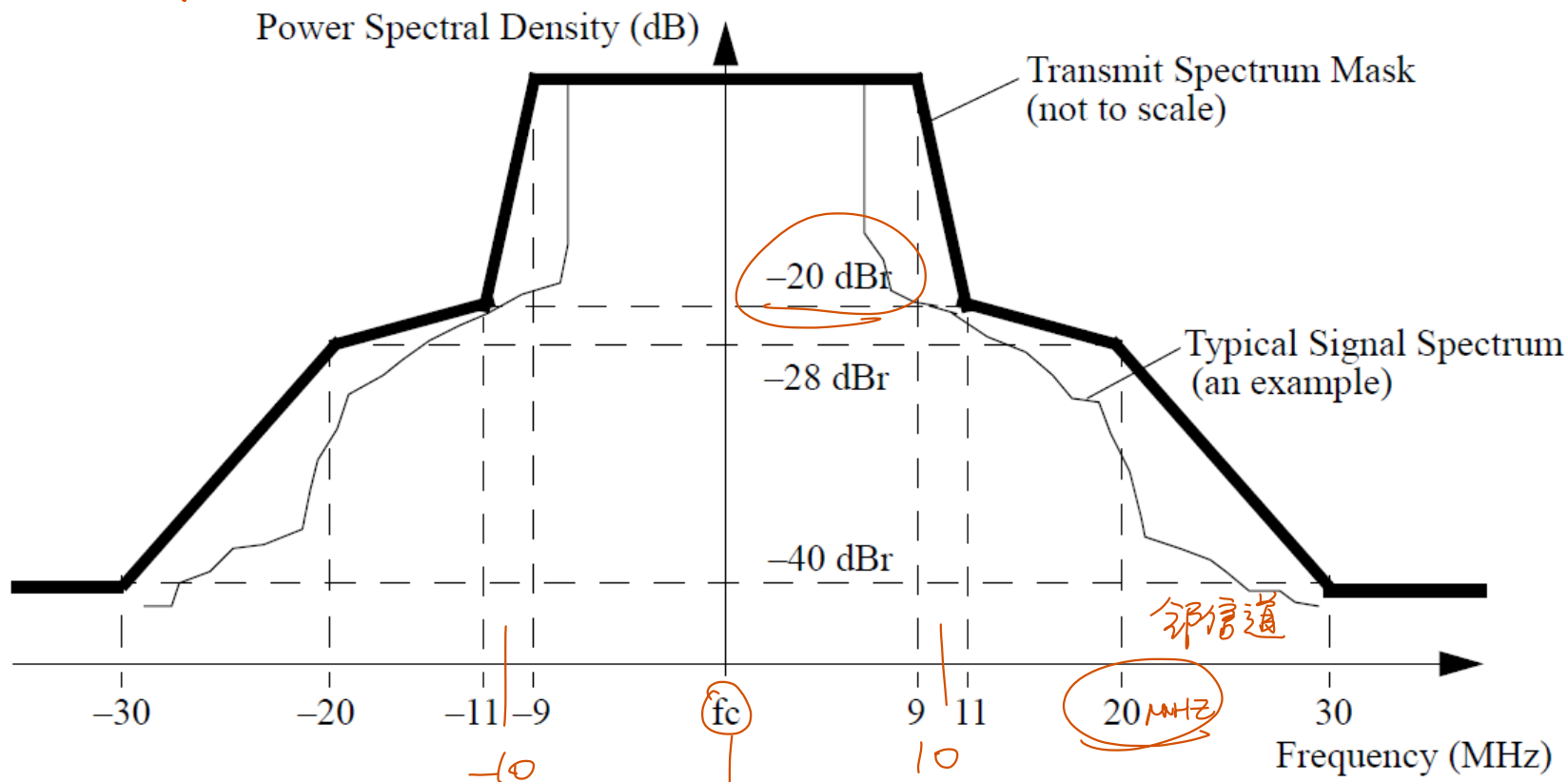


Figure 120—Transmit spectrum mask

2.4 GHz

20 MHz → 真实用 18 MHz

20 MHz → 设计滤波器(损失带宽)



周期信号的功率谱密度

$$g_T(t) = \sum_n c_n e^{j2\pi nt/T}$$

$$P_g = \frac{E_g}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_n c_n^2 dt = \sum_n c_n^2$$

$$P_g = \int_{-\infty}^{\infty} P_g(f) df$$

$$P_g(f) = \sum_n c_n^2 \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

2.10 相关 \longleftrightarrow 卷积

FFT



$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{共轭}}}{x^*}(t - \underline{\tau}) \underline{y(t) dt}$$

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t - \tau) y(t) dt$$

$$= x^*(-\tau) \otimes y(\tau)$$

$$= \langle x(t), y(t + \tau) \rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^*[-(\tau - t)] y(t) dt$$

$$y(t) = x(t) \otimes h(t)$$

$$R_{xy}(\tau) = x^*(-\tau) \otimes y(\tau)$$

$$= x^*(-\tau) \otimes x(\tau) \otimes h(\tau)$$

$$y(t) \cdot x^*(-(\tau - t))$$

$$x(t) \otimes y(t) = \int x(t) y(t - \tau) dt$$

2.11 确定性信号的相关函数

■ 能量信号的自相关函数

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s^*(t)s(t+\tau)dt$$

$$(1) \quad |R(\tau)| \leq R(0)$$

$$(2) \quad E = R(0)$$

$$(3) \quad R(\tau) \leftrightarrow E(f)$$

■ 能量信号的互相关函数

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1^*(t)s_2(t+\tau)dt$$

$$R_{12}(\tau) \leftrightarrow E_{12}(f) = S_1^*(f)S_2(f)$$

■ 归一化相关函数:

$$r_{12}(\tau) = \frac{R_{12}(\tau)}{\sqrt{R_1(0)R_2(0)}}$$

■ 功率信号的自相关函数

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^*(t)s(t+\tau)dt$$

$$(1) \quad |R(\tau)| \leq R(0)$$

$$(2) \quad P = R(0)$$

$$(3) \quad R(\tau) \leftrightarrow P(f)$$

■ 功率信号的互相关函数

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_1^*(t)s_2(t+\tau)dt$$

$$R_{12}(\tau) \leftrightarrow P_{12}(f)$$



2.11 相关函数与谱密度

- 能量信号自相关函数与其能量谱密度互为傅氏变换

$$R(\tau) \leftrightarrow E(f) = |S(f)|^2$$

- 功率信号自相关函数与其功率谱密度互为傅氏变换

$$R(\tau) \Leftrightarrow P(f)$$

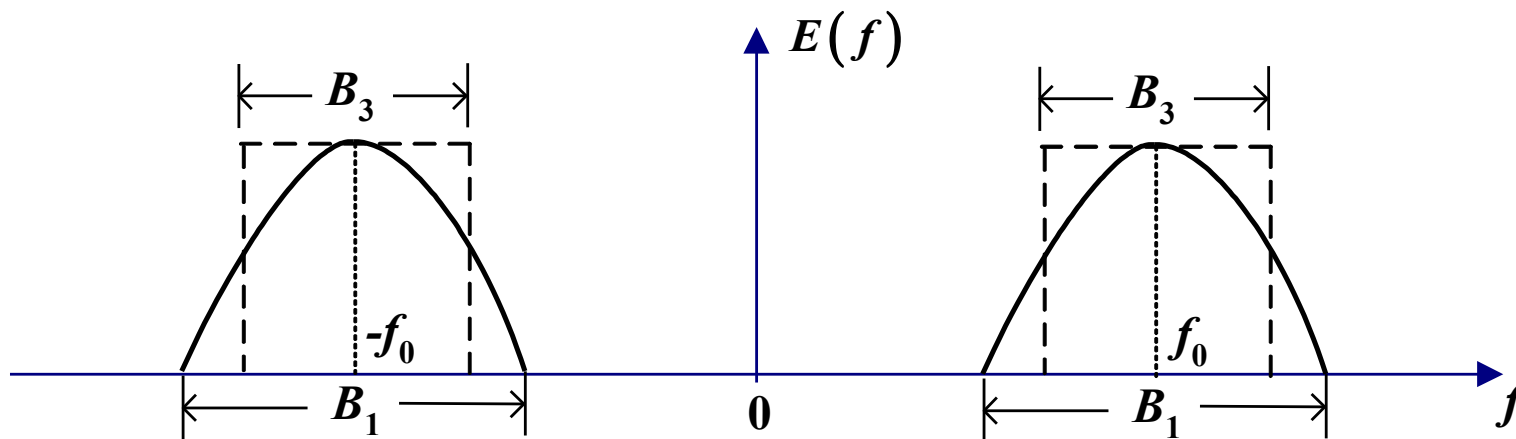
- 能量信号的互相关函数与互能量谱互为傅氏变换

$$R_{12}(\tau) \leftrightarrow E_{12}(f) = |S_1^*(f)S_2(f)|$$

2.12 基带信号与频带信号

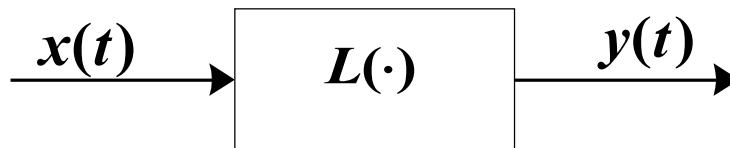
- 基带信号：信号能量或功率集中在零频率附近
- 频带信号：信号能量或功率集中在某一载频附近

$f_0 \gg B_1 \Rightarrow$ 频带信号.



2.13 确定信号通过线性系统(1)

- 单入单出



$$y(t) = L[x(t)]$$

- 线性：系统输入线性组合的响应等于响应的线性组合(叠加原理)

$$y(t) = L[\sum_i c_i x_i(t)] = \sum_i c_i L[x_i(t)]$$

- 时不变性(恒参)

$$L\{\delta(t)\} = h(t) \Rightarrow L\{\delta(t - \tau)\} = h(t - \tau)$$

可观测性可重复性

- 对于线性时不变系统

$$h(t) \leftrightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = |H(f)|e^{j\phi(f)} \text{ —— 传递函数}$$

2.13 确定信号通过线性系统(2)

• 信号不失真条件——理想系统

条件:

$$y(t) = k \cdot x(t - \tau)$$

量子通信: $\tau = 0$

整体变大变小 \uparrow

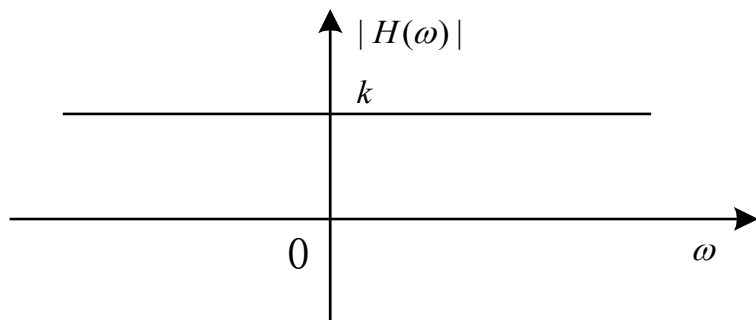
整体时延

$$\begin{cases} h(t) = k \cdot \delta(t - \tau) \\ H(f) = k \cdot e^{-j2\pi f\tau} \end{cases}$$

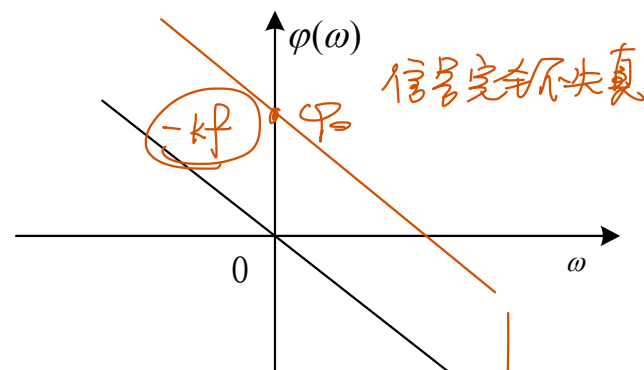
$\rightarrow e^{-j2\pi(f+f_0)\tau}$

\downarrow 随 f 相移

■ 幅频特性



■ 相频特性



信号完全失真

随 f 相移

■ 群时延特性：不同频率分量的到达时间

$$\tau(f) = -\frac{d\phi(f)}{df} = \tau$$

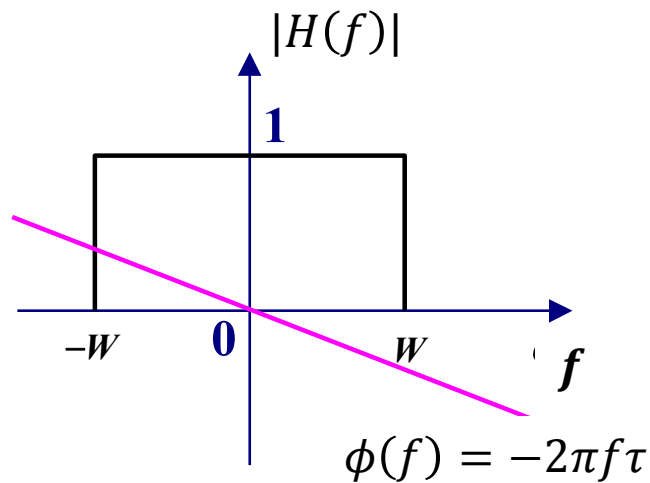
$\phi(f) = \begin{cases} k_0 f \\ k_0 f + k_1 \end{cases}$

$\frac{d\phi(f)}{df} = k_0$

网络不失真

2.13 确定信号通过线性系统(3)

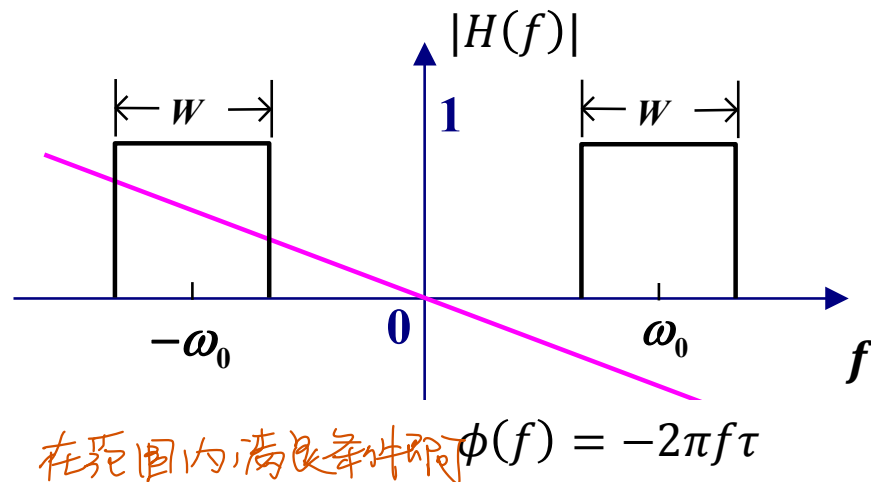
- 理想低通滤波器LPF



$$H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2W}\right) e^{j2\pi f\tau}$$

$$h(t) = 2W \cdot \text{sinc}[2W(t - \tau)]$$

- 理想带通滤波器BPF



- 限带基带信号通过理想LPF不失真

- 限带频带信号通过理想BPF不失真

2.14 Hilbert变换

- 定义：若 $x(t)$ 为实函数

$$\hat{x}(t) = H[x(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau = \frac{1}{\pi t} \otimes x(t)$$

$$h(t) = \frac{1}{\pi t} \Leftrightarrow H(f) = -j \operatorname{sgn}(f)$$

$$x(t) = H^{-1}[\hat{x}(t)] = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t-\tau} d\tau = -\frac{1}{\pi t} \otimes \hat{x}(t)$$

- 性质

- 重变换： $H\{H[x(t)]\} = -x(t)$
- 等能量： $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}^2(t) dt$
- 正交性： $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \hat{x}(t) dt = 0$

2.14 Hilbert变换性质

■ 奇偶性:

$f(t)$ 为奇/偶函数, $\hat{f}(t)$ 为偶/奇函数

$$\hat{f}(-t) = -\frac{1}{\pi t} \otimes f(-t)$$

■ 三角函数:

$$H[\cos 2\pi f_c t] = \sin 2\pi f_c t$$

$$F\{H[\cos 2\pi f_c t]\} = \text{sgn}(f) \frac{\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)}{2j}$$

$$H[\sin 2\pi f_c t] = -\cos 2\pi f_c t$$

$$= \frac{\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c)}{2j}$$

$$= F^{-1}\{\sin 2\pi f_c t\}$$

■ 调制函数:

$$H[m(t)\cos 2\pi f_c t] = m(t) \sin 2\pi f_c t$$

$$F\{H[m(t)\cos 2\pi f_c t]\} = \frac{M(f - f_c) + M(f + f_c)}{2} \times [-j \cdot \text{sgn}(f)] = \frac{M(f - f_c) - M(f + f_c)}{2j}$$

$$H[m(t)\sin 2\pi f_c t] = -m(t)\cos 2\pi f_c t$$

$$= F\{m(t) \sin 2\pi f_c t\}$$

2.15.1 解析信号

- **实信号** $x(t)$ 的解析信号定义为

$$z(t) = x(t) + j \hat{x}(t)$$

$$1) \quad x(t) = \operatorname{Re}\{z(t)\} = \frac{z(t) + z^*(t)}{2}$$

2) if $x(t) \Leftrightarrow X(f)$, $z(t) \Leftrightarrow Z(f)$, then

$$Z(f) = \begin{cases} 2X(f), & f > 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases} = 2X(f)u(f)$$

$$z(t) = 2 \int_0^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

$$3) \quad F\{z^*(t)\} = \begin{cases} 0, & f > 0 \\ 2X(f), & f < 0 \end{cases} = 2X(f)u(-f) \quad \text{物理意义?}$$

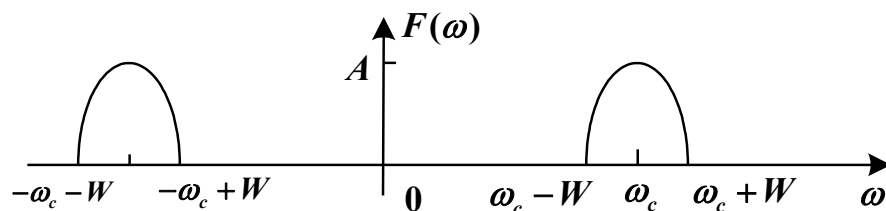


例题

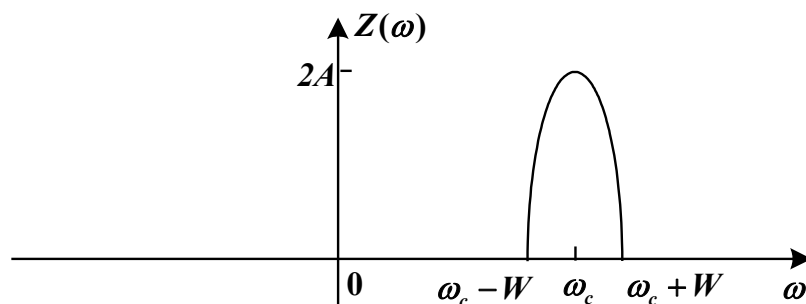
调相信号 $s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + K_P m(t)]$ ，其解析信号（即复信号）的表达式为____，其复包络的表示式为_____。

2.16 频带信号与带通系统(1)

- 频带信号：信号的频谱集中在某一频率附近(带通信号)
- 窄带信号： $f_c \gg 2W$

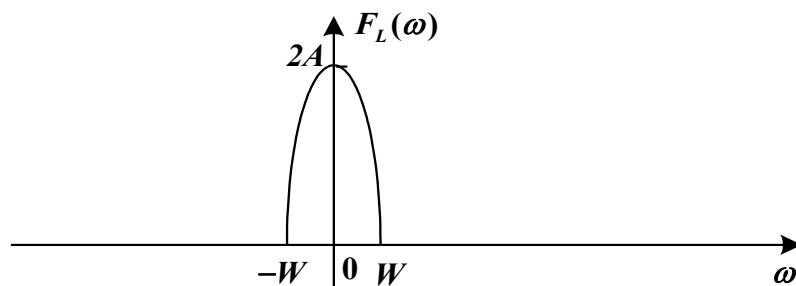


$$f(t) \Leftrightarrow F(f)$$



$$z(t) = f(t) + j\hat{f}(t)$$

$$Z(f) = 2F(f)u(f)$$



$$F_L(f) = Z(f + f_c)$$

$$f_L(t) = z(t)e^{-j2\pi f_c t}$$

$f(t)$ 的复包络

2.16 频带信号与带通系统(2)

□ 频带信号 $f(t)$ 的表示方法

- 解析信号： $z(t) = f(t) + j\hat{f}(t)$

- 等效低通信号：

$$\begin{aligned}f_L(t) &= z(t)e^{-j\omega_c t} \\&= [f(t)\cos\omega_c t + \hat{f}(t)\sin\omega_c t] + j[\hat{f}(t)\cos\omega_c t - f(t)\sin\omega_c t] \\&= f_c(t) + jf_s(t)\end{aligned}$$

$$f(t) = \operatorname{Re}\{z(t)\} = \operatorname{Re}\{f_L(t)e^{j\omega_c t}\} \quad \text{—— 表示法1}$$

$$= f_c(t)\cos\omega_c t - f_s(t)\sin\omega_c t \quad \text{—— 表示法2}$$

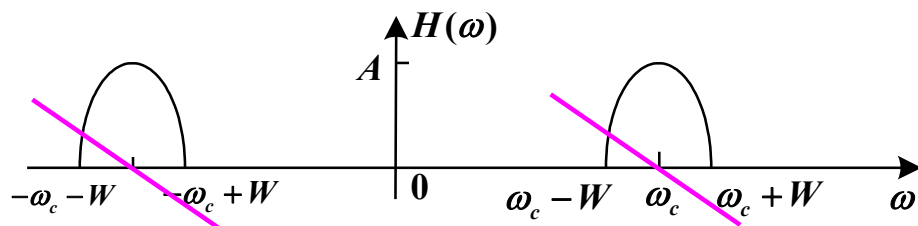
- 若 $f_L(t) = a(t)e^{j\theta(t)}$

$$f(t) = \operatorname{Re}\{f_L(t)e^{j\omega_c t}\} = a(t)\cos[\omega_c t + \theta(t)] \quad \text{—— 表示法3}$$

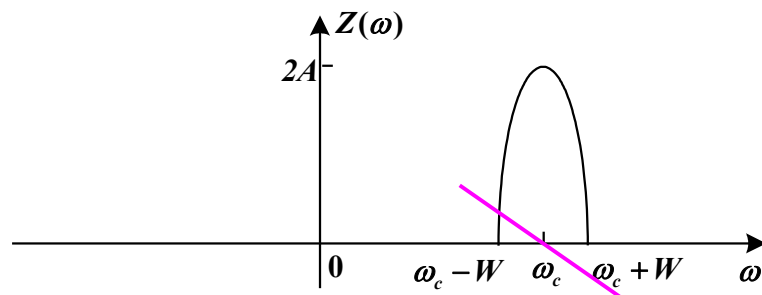
$f_L(t)$ 中包含了 $f(t)$ 除载频之外的所有信息 \longrightarrow $f_L(t)$ 为 $f(t)$ 的等效基带信号

2.16 频带信号与带通系统(3)

- 带通系统：系统的通频带位于某一频率附近
- 窄带系统： $f_c \gg 2W$

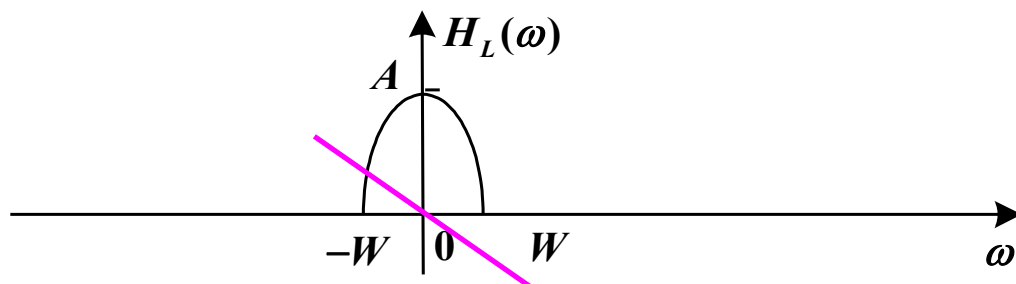


$$h(t) \Leftrightarrow H(f)$$



$$z(t) = h(t) + j\hat{h}(t)$$

$$Z(f) = 2H(f)u(f)$$



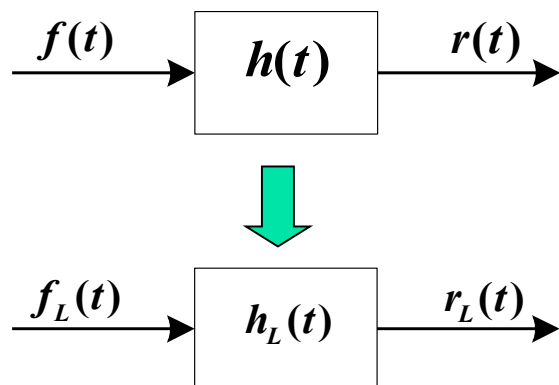
$$H_L(f) = H(f + f_c)u(f + f_c)$$

$$h_L(t) = \frac{1}{2} z(t) e^{-j2\pi f_c t}$$

$h(t)$ 的等效低通特性

2.16 频带信号与带通系统(4)

- 频带信号通过带通系统



$$f(t) = \operatorname{Re} [f_L(t) e^{j\omega_c t}]$$

$$h(t) = 2 \operatorname{Re} [h_L(t) e^{j\omega_c t}]$$

$$r(t) = \operatorname{Re} [r_L(t) e^{j\omega_c t}]$$

结论：在处理频带信号激励带通系统时，可以由等价的低通分析代替，即由 $f_L(t)$ 激励单位冲激响应为 $h_L(t)$ 的低通系统，求得其输出响应 $r_L(t)$ ，再乘以 $e^{j\omega_c t}$ 求其实部，即为带通系统的响应。



例2

带通系统的CIR为 $h(t) = g(t)\cos 2\pi f_c t$, f_c 远大于带通滤波器 $g(t)$ 的截止频率。带通系统的输入信号 $x(t) = m(t)\cos(2\pi f_c t + \phi)$, f_c 远大于基带信号 $m(t)$ 的带宽。求输出信号 $y(t)$