通信原理全解析

彭岳星
信息与通信工程学院
北京邮电大学

2019 年 9 月

1. 数学基础

1.1 线性代数与矩阵论

1.1.1 集合与矩阵

集合$A = \{a_1, \dots, a_n\}$，表示一堆不重复的元素$a_m \neq a_n, \forall m \neq n$进行划分，元素之间没有顺序，甚至元素是不是同一类都不做任何要求，例如元素$a_m = \{a_{m,1}, \dots, a_{m,M}\}$是子集合，而$a_n$是单元素。不同集合的区别在于元素不同或者元素构成集合的方式不同。

矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N,1} & \cdots & a_{N,M} \end{bmatrix}$的形式上是一堆数字按一定次序排列在一起。矩阵本质上也是集合，其元素是维度相同的矢量：行矢量或者列矢量，例如：$\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_M\}$，　$\boldsymbol{a_m} = \left[a_{m,1}, \dots, a_{m,N}\right]^T$为列向量。从这个意义上说，矢量的排列位置并不重要，也不影响矩阵的线性结构特征。

1.1.2 线性运算与线性空间

空间是指满足某些特定规则具有特定性质的集合。在这里我们仅关注巴拉赫（Banach）空间与希尔伯特（Hilbert）空间。在此之前，先介绍线性运算、范数、内积、空间的完备性等概念。

矩阵中的线性运算指加法与数乘。加法指两个向量（行向量或列向量）逐元素相加，数乘是用一个数乘以向量的每个元素。需注意的是减法被认为是方向相反的加法运算，因此与加法合并在一起。

范数，简单理解就是长度。一个向量的范数可以有很多种定义，常见的包括l_0范数、l_1-范数、l_2-范数，l_p-范数、l_∞范数。以向量$\boldsymbol{a} = [1,0,2,3,0,10]$为例，介绍几种范数的含义。

- l_0范数定义为向量中非零元素的个数即有：$|\boldsymbol{a}|_0 = 4$ 。l_0范数常用于向量的稀疏性描述，在压缩感知（compressive sensing 或称为压缩采样：compressed sampling）理论中最为常用，用来获得最为稀疏表征的信号（即非零元素最少的信号）。简单的理解是：对于线性方程组求解问题，通常是方程组数和未知数相等时（更严谨一点的说法是表述非齐次线性方程组求解的矩阵为满秩的方阵时），方程组有唯一的非零解。当未知数向量维度很高时，方程组数就需要很多。但如果未知数向量中只有少数的非零元素，但不知道其位置时，依然可以用远少于未知数个数的方程组数来获得唯一非零解。这里的唯一解就是指稀疏度最小的解。
- l_1-范数定义为所有元素的绝对值之和：$|\boldsymbol{a}|_1 = \sum_{n=1}^{N} |a_n| = 16$。在通信行业里常见的曼哈顿距离就是用$l_1$-范数定义的，来源于在纽约的CBD 曼哈顿，从一个地点走到另外一个地点的路径长度，因为只能沿着横平竖直的街道走，路径长度就是经过拐弯地点的坐标值之差的绝对值。
- l_2-范数是最为常见最常用的长度，定义为：$|\boldsymbol{a}|_2 = (\sum_{n=1}^{N} a_n^2)^{1/2} = \sqrt{104}$.欧几里德距就是用其定义的。
- l_p-范数定义为: $|\boldsymbol{a}|_p = (\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p)^{1/p}$. 通常$p$取值为$1 \leq p < \infty$, 原因在于这个范围内的范数是凸的，此外范围内的范数是非凸的。我们以二维矢量$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]$为例，画出各中范数意义下的单位矢量图。从图中可以看出，$1 \leq p$时，单位向量都是凸函数。

- l_∞-范数定义为向量中元素最大的绝对值：$|\boldsymbol{a}|_\infty = \max\limits_n\{|a_n|\} = 10$.

长度需要满足三公理：非负性，齐次性，三角不等式。满足这三公理的长度定义可以认为是相容的。

1.1.3 内积与相关系数

内积的定义是两个向量相对应元素相乘相加的运算，即：$<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>=\sum_{n=1}^{N} x_n y_n = |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\cos\theta$，其中$|\boldsymbol{x}|$是向量$\boldsymbol{x}$的模，$\theta$为两个矢量的夹角。为方便理解内积的物理含义，首先对两个向量的长度进行归一化处理，即$|\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{y}| = 1$，那么内积就转化为向量夹角的余弦，可看作矢量空间上两个单位在方向上的差别：夹角为 0，表示完全相同；夹角为$\pi/2$，表示正交；夹角为π，表示完全相反。

两个向量的相关系数定义为：$\rho = \frac{<x,y>}{|x||y|} = \cos\theta$。它表示的是空间中两个向量的夹角，也被认为是线性空间中两个向量的相似度度量，或者相位空间中两个向量的距离。

线性空间中两个矢量的夹角的物理含义就是线性相关性！因此，矢量长度归一化后的内积的物理含义可理解为矢量的线性相关性（或称为线性相似性）。

1.1.4 完备的线性空间：Banach 空间与 Hilbert 空间

Banach 空间也称为完备的线性赋范空间，这里包含三层意思。1. 线性：即仅考虑加法与点乘两种线性运算；2. 赋范：定义了范数；3. 完备性：对线性运算满足封闭性，即空间中任意向量经过线性运算后的向量依然在该空间内。完备的线性空间的一个必要条件是：该空间必然包含 0 向量。需要注意的是，这里的 0 向量并不总是指分量全为 0 的向量。0 向量是指任何其他向量加上该向量后依然保持不变。

Hilbert 空间是完备的内积空间。首先它必然是完备的线性赋范空间，在其上定义了内积操作，并具有内积运算的完备性。这里的完备性是通过柯西序列的收敛来定义：任何一个柯西序列都收敛到此空间中的某个元素，即它们与某个元素的范数差的极限为 0。我们不严谨的去说明柯西序列收敛性，只是简单的在物理意义上去理解它：有限维的 Banach 空间上定义了合理内积运算的空间是 Hilbert 空间。所有的 Hilbert 空间都是 Banach 空间，但反之不成立。

1.1.5 行列式

这里我们不介绍如何计算行列式，而更多关注行列式的物理含义。事实上很多时候我们都不是特别关注带技巧性或有固定步骤的计算方法，因为有程序包可以直接调用，计算过程对于概念的理解没有帮助时，我们就忽略它。

行列式的本质是什么呢？我们认为是一个空间射到另外一个空间时坐标系变换引起的度量变化。这个可以从“高等数学”中积分计算的变量代换方法中得到启示：

$$\iint_{R_{xy}} h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{R'_{uv}} h\big(x(u,v),y(u,v)\big)|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

其中$|J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$为 Jacobi 行列式，表示从$(x,y)$空间映射到$(u,v)$空间后空间度量的变化。以二维空间上正交的笛卡尔坐标系为例，两个正交基为$\boldsymbol{e}_1 = (1,0)$，$\boldsymbol{e}_2 = (0,1)$.通过线性变换后，两个直角坐标矢量为$\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 = (1,1)$，$\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_1 = (-1,1)$，相应的 Jacobi 行列式为：$|J| = 1/2$。这可理

解为：同一个矢量在两个空间中有不同的表示，但其长度不应该发生变换，因此通过线性映射后需要调整不同空间上度量对应值。可以看到映射到新空间上后，基本度量变为$|df_1\mathrm{d}f_2| = 2|de_1\mathrm{d}e_2|$。

1.1.6 线性相关，标准正交基

线性相关定义为一组向量的线性组合为 0 时是否有非零解：如果有非零解，那么这组向量称之为线性相关组，否则为线性无关组。直观的理解是：这组向量中是否有某个向量能由其他向量线性表示。能否线性表示有什么物理含义呢？我们先从极大无关组的概念出发，介绍线性空间中向量的表征。

极大无关组是指一组向量中构成线性无关且数量最大的一组向量，即：这组向量是线性无关的，且任意另外一个向量都能被这组向量线性表示。这表明这组向量与极大无关组等价，因为这组向量的任何一个向量都可以由极大无关组唯一线性表征。由此，极大无关组是由该组向量构成的空间的一组基，进一步，如果对极大无关组的各个向量进行长度归一化（称为标准化）与正交化（各个向量相互正交）处理，那么它就是该空间的标准正交基，也就是该空间的直角坐标系。

一个线性空间可由一组向量完全确定，例如我们所处的三维立体空间S_3，可由（X,Y,Z）三个相互正交的笛卡尔坐标系完全表征，也可以说由向量组$\mathrm{V}_1 = \{\boldsymbol{e_1} = [1,0,0], \boldsymbol{e_2} = [0,1,0], \boldsymbol{e_3} = [0,0,1]\}$完全表示。这组三维的单位向量就完全表征了我们所处的三维空间S_3，因而可以说S_3由这组三维的单位向量张成，记为：$S_3 = Span\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$。当张成空间的向量组是极大无关组时，空间中任意一个向量都可以由该组向量唯一线性表征；如这个向量组是线性相关组，空间中任意一个向量由该组向量线性表征的方式并不唯一。例如向量组$\mathrm{V}_2 = \{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{a} = [1,1,0]\}$是线性相关组，他们也可张成空间$S_3$，但空间中的向量并不能由该组向量唯一表征，例如$\boldsymbol{b} = [1,1,1] = \boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_3} + 0 \cdot \boldsymbol{a} = 0 \cdot \boldsymbol{e_1} + 0 \cdot \boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_3} + \boldsymbol{a}$。容易看出，向量组$\mathrm{V}_2$不能唯一线性表示空间中向量而向量组$\mathrm{V}_1$能唯一表征的原因在于$\mathrm{V}_2$是线性相关组，而$\mathrm{V}_1$是极大无关组。因此，我们希望得到线性空间的最简向量表征，就需获得空间的标准正交基。

标准正交基是构成空间的向量的极大无关组，并且满足（i）正交性，即该组向量的各个向量相互正交；（ii）单位长度，即该组向量的每个向量长度都为 1。例如上面例子中，空间S_3的标准正交基为$\mathrm{V}_1 = \{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$。需要说明的是，空间的标准正交基并不唯一，例如$\mathrm{V}_3 = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2}), \boldsymbol{e_3}\right\}$也是空间$S_3$的一组标准正交基。

给定一组向量，可通过 Gram-Schmitz 正交化方法得到向量组张成空间的标准正交基，其过程如下所示。

从一组非零的向量$\mathrm{V} = \{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n}\}$中得到标准正交基$\mathrm{V}' = \{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_m}\}$，其中$m \le n$是极大无关组的向量个数，也就是$\mathrm{V}$生成的空间的维度。

第一步： 找到第一个不为 0 的向量，对其长度进行归一化，得到第一个基：$\boldsymbol{e_1} = \boldsymbol{a_1}/|\boldsymbol{a_1}|$

第二步：对第二个不为 0 的向量$\boldsymbol{a_2}$向第一个基进行投影，并从向量$\boldsymbol{a_2}$中消除该投影分量，剩下的分量如不为 0，则一定与投影分量正交，从而与第

一个基正交。对其长度进行归一化，得到第二个正交基：$\boldsymbol{e_2} = \frac{a_2 - <a_2, e_1> e_1}{|a_2 - <a_2, e_1> e_1|}$。

…

第 i 步：对第 i 个不为 0 的向量$\boldsymbol{a_i}$向前面得到的所有基向量进行投影，并从向量$\boldsymbol{a_i}$中消除投影分量，如果剩下的分量不为 0，则一定与前面所有的投影分量都正交，从而与前面获得的基都正交。对消除投影分量后的正交分量的长度进行归一化，得到新的正交基：$\boldsymbol{e_i} = \frac{a_i - \sum_{j=1}^{i-1} <a_i, e_j> e_j}{\left|a_i - \sum_{j=1}^{i-1} <a_i, e_j> e_j\right|}$.

持续进行下去，直到分解完最后一个向量$\boldsymbol{a_n}$，得到最终的标准正交基。

1.1.7 特征值、特征向量，特征值分解，奇异值分解

我们知道矩阵运算本质上是一种线性运算，例如矩阵运算$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$中，矩阵$A$的作用是改变矢量$\boldsymbol{x}$的长度与方向而变为矢量$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{y} = \sum_i x_i \boldsymbol{A_i}$可视为矩阵列向量的线性组合，这里$x_i$表示矢量$\boldsymbol{x}$的第 i 个分量，$\boldsymbol{A_i}$表示矩阵A的第 i 个列向量。

当矩阵A存在满足$A^T\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{x}| = 1$的解时，$\boldsymbol{x}$称为特征向量，$\lambda$为相应的特征值。特征向量表示一些特殊向量：矩阵 A 对这些向量的线性变换并不改变其方向，只是改变其长度，长度的大小由特征值来定义（注意，这里把负的特征值看作是将特征向量长度缩小得太厉害了以至于缩过了界，到了 0 的对面去了。相应的特征值大于 1 看作放大长度，0 到 1 之间看作长度压缩）。

当方阵A满秩时（即 A 的列向量构成线性无关组），将A的所有特征向量排列为矩阵$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_N}]$，有：

$$\boldsymbol{A^T X} = \boldsymbol{X\Lambda} \rightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{X^T \Lambda X}$$

其中$\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$是由特征值构成的对角阵，$\boldsymbol{XX^T} = \boldsymbol{I}$，即特征向量是相互正交的单位向量，这个性质很容易从特征向量的定义得到。满足$\boldsymbol{XX^T} = \boldsymbol{I}$的矩阵称为酉阵（其转置阵就是其逆阵）。我们将上式称为满秩方阵的特征值分解。当 A 不满秩时，同样可以将其特征值与特征向量按特征值分解类似的方式进行分解

1.1.8 齐次/非齐次方程组

前面介绍了矩阵运算本质上是线性运算：将向量在长度与角度上进行变化。

对于齐次方程$\boldsymbol{Ax} = 0$，$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n]$，$\boldsymbol{a}_i$是矩阵$\boldsymbol{A}$的第 i 个列矢量，$\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_n]^T = \sum_i x_i \boldsymbol{e}_i$，其中$\boldsymbol{e}_i$是第 i 个元素为 1 其余元素为 0 的单位矢量。可将齐次方程改写为$\sum_{\mathrm{n}} x_i \boldsymbol{a}_i = 0$。当齐次方程存在非零解时，说明矩阵$\boldsymbol{A}$的列矢量是线性相关的，也就说明了矩阵$\boldsymbol{A}$的秩$\mathrm{Rank}(\boldsymbol{A}) = k < n$。从另一个角度来理解齐次方程组，矩阵$\boldsymbol{A}$的所有行向量都与非零解$\boldsymbol{x}$正交，说明解空间必然与行向量构成的空间正交，即齐次方程组的零子空间与列子空间正交，这两个子空间构成了n维线性空间，或者说该n维线性空间是零子空间与列子空间的直和，记为$\boldsymbol{C^k} \oplus \boldsymbol{Z^m} = \boldsymbol{S^n}$。直和有两个特性：两个子空间$\boldsymbol{C^k}$与$\boldsymbol{Z^m}$的任意向量之间都正交，且空间维度关系满足：$k + m = n$。

对于非齐次方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \neq 0$,同样将其改写为$\sum_{\mathrm{n}} x_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b}$。很容易看出来该方程组的解的含义是向量$\boldsymbol{b}$可由矩阵$\boldsymbol{A}$的列向量线性表征，说明向量$\boldsymbol{b}$在矩阵$\boldsymbol{A}$的列子空间之中。