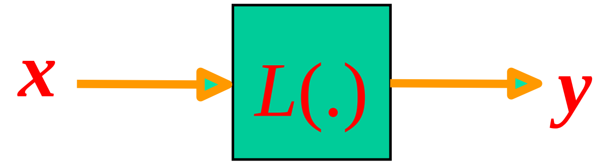
第二章 确定信号分析

信息与通信工程学院
无线信号处理与网络实验室(WSPN)
智能计算与通信研究组(IC²)
彭岳星
yxpeng@bupt.edu.cn

确定信号分析



- 周期信号的傅立叶级数分析
- 傅立叶变换
- 单位冲击函数的傅立叶变换
- 功率信号的傅立叶变换

信号分析：正交变换与正交分解——将复杂信号分解为简单信号

- 能量谱密度和功率谱密度
- 确定信号的相关函数
- 卷积
- 确定信号通过线性系统

信号间关系分析：相关分析——信号功率特征及相互关系

- 希尔伯特变换
- 频带信号带通系统

信号的等效分析：基带信号与频带信号的统一

线代回顾

- **集合**
  - 一堆不重复的元素，元素类型可以不同
  - 元素之间的次序不重要
- **矩阵**
  - 具有相同维度的一组矢量的集合
  - 矢量的排列次序本质上不影响矩阵的性质
- **矢量的线性运算**
  - 加法：对应元素相加/减
  - 数乘：标量对每个元素进行同等的缩放
- **线性空间/矢量空间**
  - 非空集合V上，存在数域P，如果V对P的线性运算满足封闭性，V为P上的线性空间/矢量空间
  - 加法：交换律，分配律，0元素，负元素
  - 数乘：单位元素，交换律，分配律

线代回顾

- **长度/范数**
  - $\boldsymbol{x}_{l_p} = (\sum_n |x_n|^p)^{1/p}$
  - $p = 0$:稀疏度表征
  - $p = 1$:Manhattan距离
  - $p = 2$:欧式距离
  - $p = \infty$:最大值分量
  - $1 \leq p$:凸函数
- **行列式**
  - 线性变换后两个空间之间的度量比例关系
  - e.g., $X = \{e_1, e_2\}; Y = \{f_1 = e_1 + e_2, f_2 = e_2 - e_1\}; J = \left|\frac{\partial X}{\partial Y}\right| = \frac{1}{2}$

线代回顾

- 内积
  - $< x,y > = \sum_n x_n y_n = |x||y|\cos\theta$
  - $\rho = \cos\theta$：空间上两向量的相似性度量
- 线性相关/线性无关/最大无关组
  - 独立的矢量：自由度/坐标系
  - 最大无关组不唯一：坐标系可不同，通过旋转/平移等操作
- 标准正交基的构造
  - Gram-Schmitz正交化过程；
    - $\{a_1,\cdots,a_n\} \rightarrow \{e_1,\cdots,e_k\}$: $e_i = \frac{a_i - \sum_{j=1}^{i-1} < a_i, e_j > e_j}{|a_i - \sum_{j=1}^{i-1} < a_i, e_j > e_j|}$
  - 投影运算/正交分解
    - 分析：复杂信号用简单信号来正交组合
    - 傅立叶级数
    - 傅立叶变换，小波变换

线性代数

- **矩阵：向量的集合**
  - 矩阵的秩：极大无关组的向量个数
  - 特征值/特征向量:坐标与坐标投影值
    - 满秩的方阵A, $A^H x_i = \lambda_i x_i \rightarrow A^H X = X\Sigma \rightarrow A = X\Sigma X^H$:特征值分解，
    - $X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$; $\Sigma = diag\,(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = [\cdots \lambda_i e_i \cdots]$
    - 不满秩的矩阵A，左/右特征向量，$A = U\Sigma V^H$:奇异值分解
    - $X^H = X^{-1}$: 酉阵
  - 矩阵运算：$Ax = y$→对向量进行线性变换（长度/角度）
    - 特征向量：一些特殊的向量，矩阵运算意义上保持方向不变，只改变长度，长度由特征值确定
  - 矩阵秩：线性空间的维度
  - 解方程
    - $A^T x = 0$：$x \perp A_i$
    - $Ax = b$: $b = \sum_i x_i A_i$

矩阵论补充

- **完备的线性空间**
  - 线性空间：定义了线性运算的空间
  - 完备性的线性空间：对线性运算具有封闭性——空间中任意的向量通过线性运算后还在该空间内
- **Banach空间与Hilbert空间**
  - Banach空间：完备的线性赋范空间，即对范数运算具有完备性
  - Hilbert空间：完备的内积空间，即对内积运算具有完备性
- **完备的线性空间：子空间的直和**
  - $A = A_1 \oplus A_2$
    - $R(A) = R(A_1) + R(A_2)$
    - $a_1 \perp a_2, \forall a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$

2.1 周期信号的傅立叶级数分析

- 傅氏级数
  - $s(t)$是周期为T、且满足狄里赫利条件的周期信号，则有：

    $$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega_o t) + b_n\sin(n\omega_0 t)]$$
    $$= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\mathrm{d}t; \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\cos(n\omega_o t)\mathrm{d}t;$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\sin(n\omega_o t)\mathrm{d}t\ ; \quad c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\mathrm{e}^{-jn\omega_o t}\mathrm{d}t$$

  - 周期函数$s(t)$由许多不同幅度、频率和相位的正弦函数构成
    - 周期时间函数 ←→离散频谱：时频对偶性
    - $\omega_0 = 2\pi/T$

注：狄里赫利条件：在一个周期内$s(t)$只有有限个第一类不连续点，且可将T分为有限个区间，每个区间内$s(t)$为单调函数。一般实际信号均满足此条件

2.1 周期信号的傅立叶级数分析

- **周期函数的正交分解**
  - **所有周期为T的函数构成一个特殊的Hilbert函数空间，该空间的一组完备的标准正交基为$\left\{\frac{1}{\sqrt{T}}e^{jn\omega_0 t}\right\}_{n=0}^{\infty}$，$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$，其中$\frac{1}{\sqrt{T}}$是能量归一化系数：$\int_0^T\left|e^{jn\omega_0 t}\right|^2\mathrm{d}t=T$**
  - **该空间的另一组等价的标准正交基(实数形式)为：**

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{T}},\sqrt{\frac{2}{T}}\cos n\omega_0 t,\sqrt{\frac{2}{T}}\sin n\omega_0 t\right\}_{n=1}^{\infty}$$

  - **周期函数$s(t)$在两组标准正交基下的分解即为傅氏级数展开**

$$a_0=<s(t),\frac{1}{\sqrt{T}}>\frac{1}{\sqrt{T}}=\frac{1}{T}\int_0^T s(t)\mathrm{d}t;\quad a_n=\frac{2}{T}<s(t),\cos(n\omega_o t)>;$$

$$b_n=\frac{2}{T}<s(t),\sin(n\omega_o t)>;\qquad c_n=\frac{1}{T}<s(t),\mathrm{e}^{-jn\omega_o t}>$$

2.2　非周期信号的傅立叶级数

$s(t)$为非周期信号，持续时间为T_1，将其以$T > T_1$为周期延拓为周期函数$s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t - nT)$

当$T \to \infty$时，$s_T(t) = s(t)$，即$\lim\limits_{T\to\infty} s_T(t) = s(t)$

令$s_T(t)$满足狄里赫利条件，展开为傅氏级数

$$s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\omega_0}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_T(t')e^{-jn\omega_0 t'}\mathrm{d}t'\right] e^{jn\omega_0 t}$$

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_T(t)e^{-jn\omega_0 t}\mathrm{d}t, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

当$T \to \infty$时，$\omega_0 \to d\omega, n\omega_0 \to \omega$，$\sum \to \int$，因此有

$$s(t) = \lim_{T\to\infty} s_T(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} s(t')e^{-j\omega t'}\mathrm{d}t'\, e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

2.3 傅立叶变换: 正交变换/投影运算

- **表达式**: $g(t) \Leftrightarrow G(f)$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j2\pi f t} \mathrm{d}t$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) e^{j2\pi f t} \mathrm{d}f$$

- **傅氏变换存在的充分条件**
  - $g(t)$**在无限区间内绝对可积**: $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt < \infty$
  - **在每个有限区间内只有有限个极大值和极小值**
  - **在每个有限区间内只有有限个不连续点**

2.4 傅立叶变换的运算特性:时频对偶性

- 线性叠加: $F\{c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t)\} = c_1 G_1(f) + c_2 G_2(f)$
- 复共轭: $F\{g^*(t)\} = \left[\int g(t) e^{-j2\pi(-f)t} dt\right]^* = G^*(-f)$
- 标度换算: $F\{g(at)\} = \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right)$
- 时移: $F\{g(t - t_0)\} = e^{-j2\pi f t_0} G(f)$
- 频移: $F\left\{e^{j2\pi f_0 t} g(t)\right\} = G(f - f_0)$
- 调制: $F\{g(t)\cos 2\pi f_0 t\} = \frac{1}{2}[G(f + f_o) + G(f - f_0)]$
- 卷积: $F\{g_1(t) \otimes g_2(t)\} = G_1(f) G_2(f)$;

  $F\{g_1(t) g(t)\} = G_1(f) \otimes G_2(f)$

2.4 傅氏变换的运算特性-(Cont’d)

- 对偶： $F\{G(t)\} = \int G(t)e^{j2\pi(-f)t}\mathrm{d}t = g(-f)$

- 微分： $F\left\{\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}g(t)\right\} = \int e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}\left(g^{(n-1)}(t)\right)$

$$= g^{(n-1)}(t)e^{-j2\pi ft}|_{-\infty}^{+\infty} + j2\pi f\int g^{(n-1)}(t)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t$$

$$= (j2\pi f)^n G(f)$$

- 积分： $F\left\{\int_{-\infty}^{t} g(\tau)\mathrm{d}\tau\right\} = \frac{G(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}G(0)\delta(f)$

- 面积： $g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)df$， $G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt$

2.5 单位冲激函数(δ函数)

- δ函数的定义：

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty, t=0\\ 0, t\neq 0\end{cases} \text{ 且 } \int_{-\epsilon}^{+\epsilon}\delta(t)\,\mathrm{d}t=1, \forall\epsilon>0$$

- δ函数的频谱密度：

$$\Delta(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-j2\pi ft}dt=e^{-j2\pi f0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$$

- δ函数的物理意义：

一个高度为无穷大、宽度为无穷小、面积为1的脉冲。

2.5 单位冲激函数的性质——采样

$$f(t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t$$

证: 因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t = f(t_0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t = f(t_0)$$

物理意义：可以看作是用δ函数在 $t=t_0$时刻对$f(t)$抽样。

单位冲激函数是偶函数，即$\delta(t)=\delta(-t)$，故也可写成：

$$f(t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t_0-t)\,\mathrm{d}t$$

2.6 常用功率信号的傅立叶变换

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\int_{-\infty}^{t} g(\tau)\mathrm{d}\tau \to \frac{G(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}G(0)\delta(f)$$

$$F\{1\} = \delta(f)$$

$$F\{u(t)\} = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

$$F\{\mathrm{sgn}(t)\} = \frac{1}{j\pi f} \qquad \mathrm{sgn}(t) = u(t) - u(-t)$$

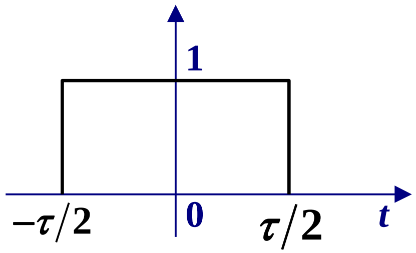
任意周期信号: $s_T(t)$

$$F\left\{s_T(t) = \sum_n c_n e^{j2\pi n f_0 t}\right\} = \sum_n c_n \delta(f - nf_0)\,, f_0 = 1/T$$

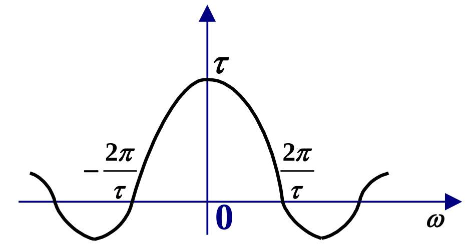
$$F\{\delta_T(t) = \sum_n \delta(t - nT)\} = \frac{1}{T}\sum_n \delta(f - nf_0)\,, f_0 = 1/T$$

2.6 常用功率信号的傅立叶变换（续）

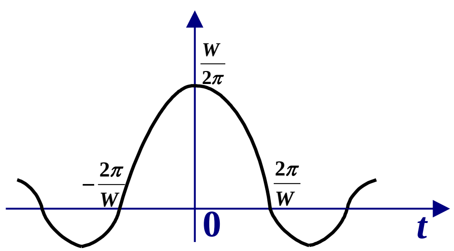
$$\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$$



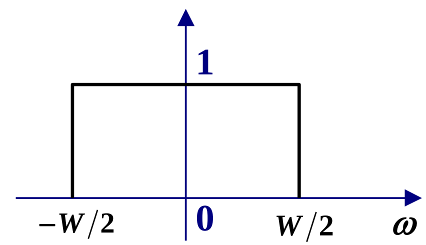
$$\tau\cdot\mathrm{sinc}(f\tau)$$



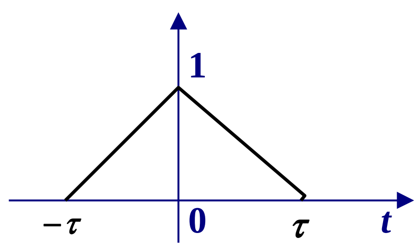
$$W\cdot\mathrm{sinc}(Wt)$$



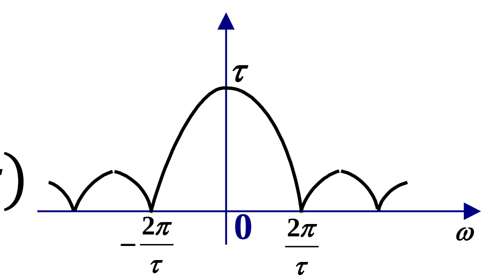
$$\mathrm{Rect}\left(\frac{f}{W}\right)$$



$$\mathrm{tri}\left(\frac{t}{\tau}\right)$$



$$\tau\cdot\mathrm{sinc}^2(f\tau)$$



2.7 能量信号的频谱密度

$f(t)$的能量：

$$E_f=\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}|F(f)|^2 df=\int_{-\infty}^{\infty}E(f)df$$ ：**Parseval定理**

$$E(f)=|F(f)|^2$$ ：**能量谱密度，双边谱密度**

$f(t)$是实函数，则$E(f)$是 偶函数, 可定义单边谱密度：

$$G(f)=\begin{cases}2E(f) & f>0\\ 0 & f<0\end{cases}$$

2.8 功率信号的功率谱密度

首先将信号$s(t)$截短为$s_T(t)$，$-T/2 < t < T/2$

$s_T(t)$是一个能量信号，可用傅里叶变换求出其能量谱密度 $|S_T(\mathrm{t})|^2$

由帕斯瓦尔定理有 $E = \int_{-T/2}^{T/2} s_T^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S_T(f)|^2 df$

将 $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |S_T(f)|^2$ 定义为信号的功率谱密度$P(f)$，即

$$P(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |S_T(f)|^2$$

2.8 功率信号的功率谱密度

功率信号的自相关函数：时间平均

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)x(t+\tau)\,\mathrm{d}t$$

功率信号的功率谱密度：Parseval定理

$$P_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

2.8 周期信号的功率谱密度

$$g_T(t) = \sum_n c_n e^{j2\pi nt/T}$$

$$P_g = \frac{E_g}{T} = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_n c_n^2 \,\mathrm{d}t = \sum_n c_n^2$$

$$P_g = \int_{-\infty}^{\infty} P_g(f)\mathrm{d}f$$

$$P_g(f) = \sum_n c_n^2 \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

2.8 信号长度与相关系数

信号的能量

$$\boldsymbol{E_x} = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\,\mathrm{d}\boldsymbol{t} = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{f})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}\boldsymbol{f}$$

信号作为空间中的一个矢量，信号的长度/模

$$|\boldsymbol{x}|_2 = \sqrt{\boldsymbol{E_x}} = \sqrt{< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} >}$$

两信号的相关系数：空间夹角的余弦

$$\boldsymbol{\rho_{xy}} = \frac{<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\tau})\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}\,|} = \mathbf{cos}(\angle\boldsymbol{xoy}) \ \in [-\mathbf{1}, \mathbf{1}]$$

2.8 功率信号的功率谱密度

例1：求单频信号$x(t)=e^{j2\pi f_0 t}$的自相关、功率谱、功率

$$R_x(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x^*(t)x(t+\tau)\,\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}e^{j2\pi f_0\tau}\,\mathrm{d}t=e^{j2\pi f_0\tau}$$

$$P_x(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau)\,e^{-j2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau=\delta(f-f_0)$$

$$P_x=\int_{-\infty}^{\infty}P_x(f)\,\mathrm{d}f=1$$

2.8 功率信号的功率谱密度

例2：求周期信号$x(t) = \sum_n \delta(t - nT)$的自相关、功率谱

$$X(f) = \frac{1}{T}\sum_m \delta(f - mf_0)$$

$$P_x(f) = |X(f)|^2 = \frac{1}{T^2}\sum_m \delta(f - mf_0) \ = \frac{1}{T}\sum_m e^{j2\pi mfT}$$

$$R_x(\tau) = F^{-1}\{P_x(f)\} = \frac{1}{T^2}\sum_m e^{j2\pi mf_0\tau}$$

$$= \frac{1}{T}\sum_m \delta(\tau - mT)$$

2.8 功率信号的功率谱密度

例3：求周期信号$s(t) = \sum_n g(t - nT)$的自相关、功率谱

$$\mathbf{s}(t) = \sum_k c_k e^{j2\pi kt/T} = \frac{1}{T}\sum_k G\left(\frac{k}{T}\right) e^{j2\pi kt/T}$$

$$S(f) = \frac{1}{T}\sum_k G\left(\frac{k}{T}\right)\delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

$$P_s(f) = |S(f)|^2 = \frac{1}{T^2}\sum_k \left|G\left(\frac{k}{T}\right)\right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

$$R_s(\tau) = F^{-1}\{P_s(f)\} = ?$$

2.8 实信号的奇偶对称性问题

- $x(t)$是实偶信号，其频谱$X(f)$是实偶函数

$$x^*(-t) = x(t) \ \rightarrow X(f) = X^*(-f)$$

$$X(-f) = \int x(t)e^{j2\pi ft}\,\mathrm{d}t = \left[\int x(t)e^{-j2\pi ft}\,\mathrm{d}t\right]^* = X^*(f)$$

- $x(t)$是实奇信号，其频谱$X(f)$是虚奇函数

$$x^*(-t) = -x(t) \ \rightarrow X(f) = -X^*(f) = -X(-f)$$

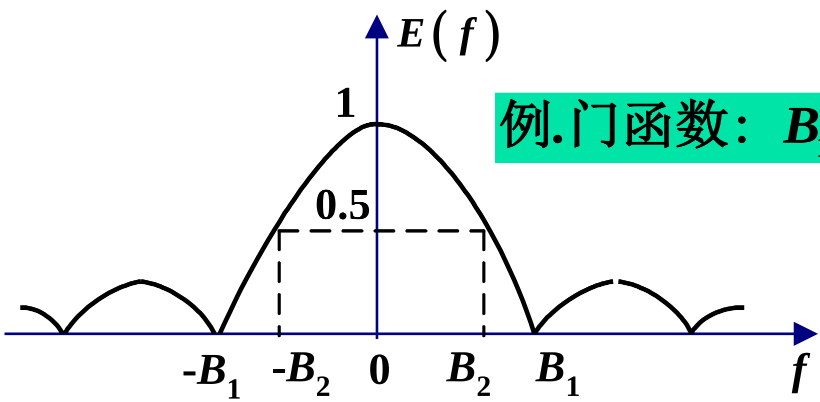
$$X(f) = -\int x^*(-t)e^{-j2\pi ft}\,\mathrm{d}t = -\left[\int x(-t)e^{j2\pi ft}\,\mathrm{d}t\right]^* = -X^*(f)$$

$$X(-f) = \int x(t)e^{j2\pi ft}\,\mathrm{d}t = \left[\int x(t)e^{-j2\pi ft}\,\mathrm{d}t\right]^* = X^*(f) = -X(f)$$

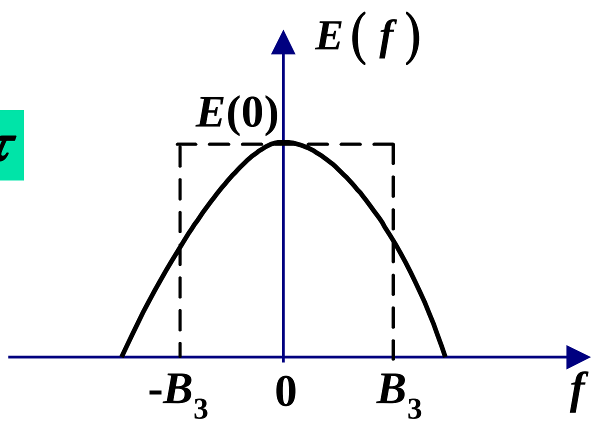
2.9 信号带宽

- **信号带宽：信号能量或功率主要部分集中的频率范围(正频率部分)--Hz**
- **定义方法**
  - 零点带宽(主瓣带宽)：B_1
  - 3dB(半功率点)带宽：B_2
  - 等效矩形带宽（等能量带宽）：B_3
  - 占总能量(功率)的百分比带宽

$$\boldsymbol{B_3 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} E(f)df}{2E(0)}}$$



例.门函数：$B_1 = 1/\tau$



2.9 信号带宽 － IEEE 802.11a

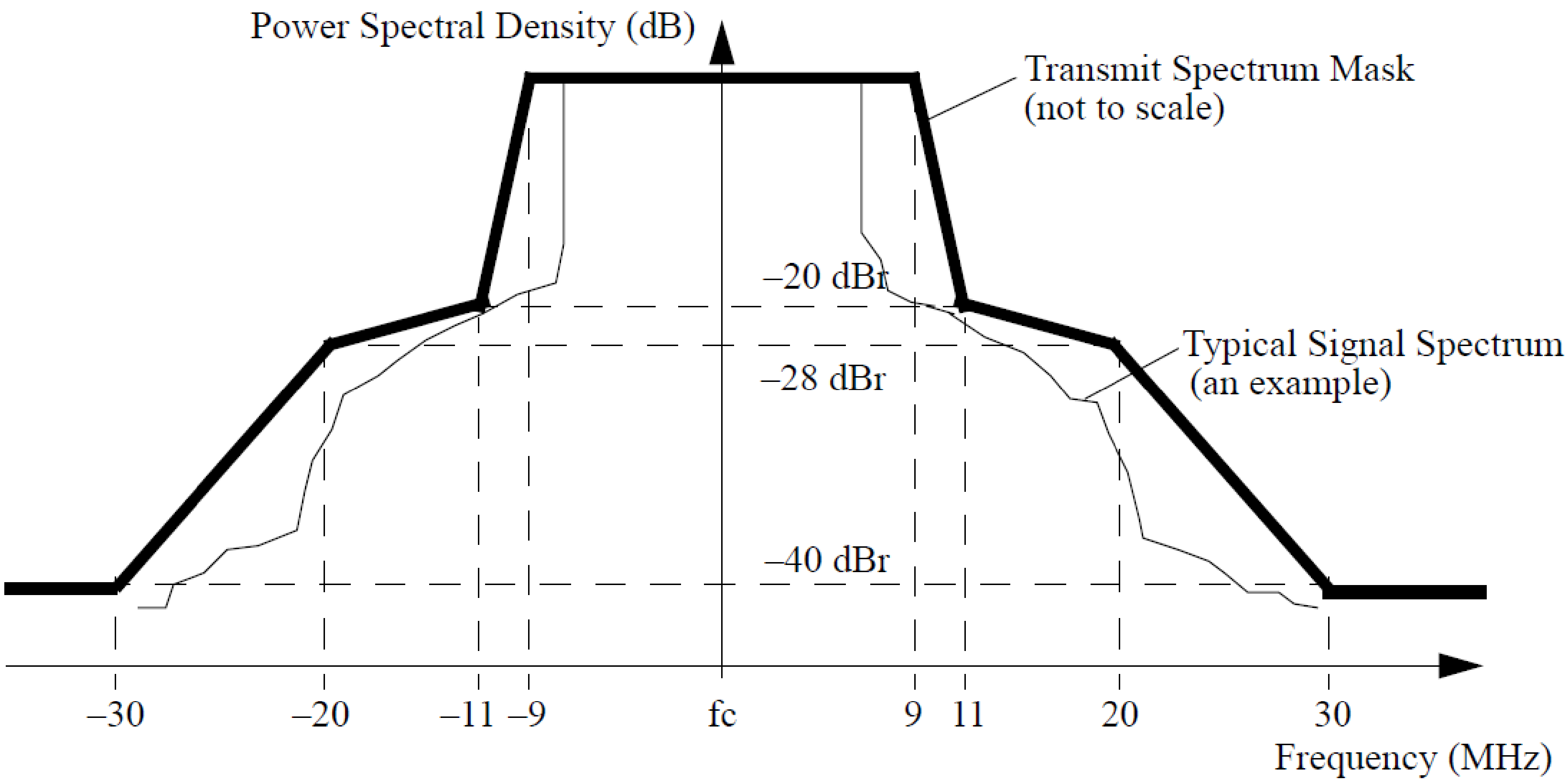


Figure 120—Transmit spectrum mask

周期信号的功率谱密度

$$g_T(t) = \sum_n c_n e^{j2\pi nt/T}$$

$$P_g = \frac{E_g}{T} = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_n c_n^2 \,\mathrm{d}t = \sum_n c_n^2$$

$$P_g = \int_{-\infty}^{\infty} P_g(f)\,\mathrm{d}f$$

$$P_g(f) = \sum_n c_n^2 \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

2.10 相关 ⟺ 卷积

$$R_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x^*(t-\tau)y(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x^*[-(\tau-t)]y(t)\mathrm{d}t$$

$$=x^*(-\tau)\otimes y(\tau)$$

2.11 确定性信号的相关函数

- 能量信号的自相关函数

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s^*(t)s(t+\tau)\mathrm{d}t$$

(1) $\left|R(\tau)\right| \le R(0)$

(2) $E = R(0)$

(3) $R(\tau) \leftrightarrow E(f)$

- 能量信号的互相关函数

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1^*(t)s_2(t+\tau)\mathrm{d}t$$

$$R_{12}(\tau) \leftrightarrow E_{12}(f) = S_1^*(f)S_2(f)$$

- 归一化相关函数：

$$r_{12}(\tau) = \frac{R_{12}(\tau)}{\sqrt{R_1(0)R_2(0)}}$$

- 功率信号的自相关函数

$$R(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s^*(t)s(t+\tau)\mathrm{d}t$$

(1) $\left|R(\tau)\right| \le R(0)$

(2) $P = R(0)$

(3) $R(\tau) \leftrightarrow P(f)$

- 功率信号的互相关函数

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s_1^*(t)s_2(t+\tau)\mathrm{d}t$$

$$R_{12}(\tau) \leftrightarrow P_{12}(f)$$

2.11 相关函数与谱密度

- 能量信号自相关函数与其能量谱密度互为傅氏变换

$$R(\tau) \leftrightarrow E(f) = |S(f)|^2$$

- 功率信号自相关函数与其功率谱密度互为傅氏变换

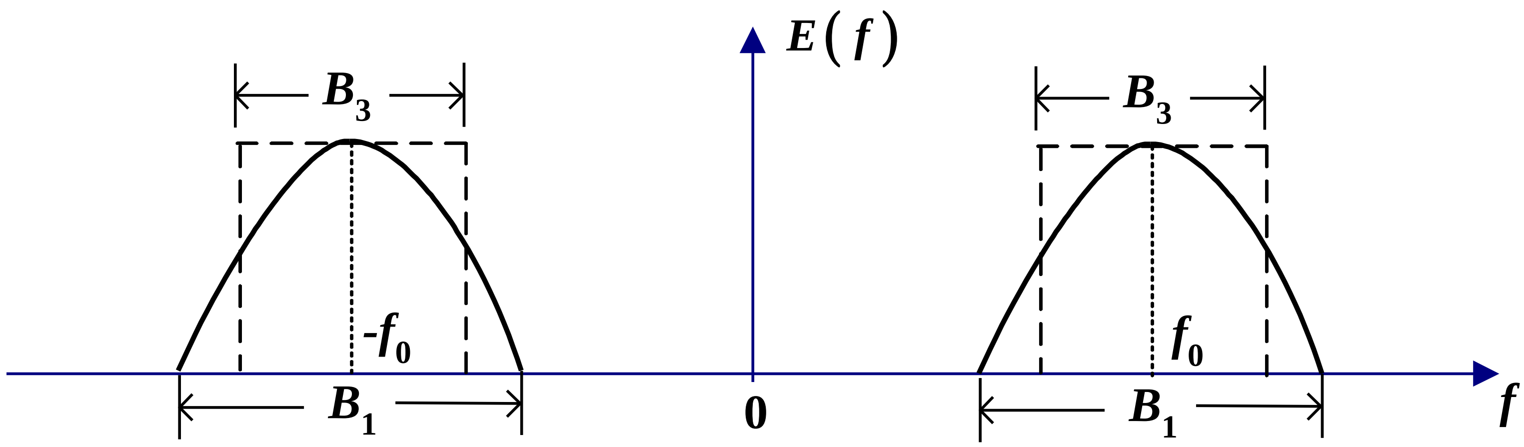
$$R(\tau) \Leftrightarrow P(f)$$

- 能量信号的互相关函数与互能量谱互为傅氏变换

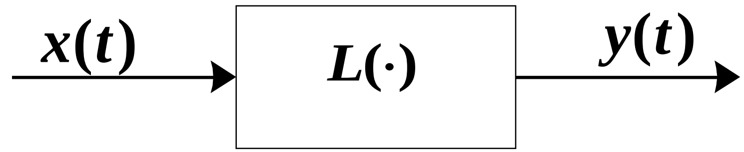
$$R_{12}(\tau) \leftrightarrow E_{12}(f) = |S_1^*(f)S_2(f)|$$

2.12 基带信号与频带信号

- 基带信号：信号能量或功率集中在零频率附近
- 频带信号：信号能量或功率集中在某一载频附近



2.13 确定信号通过线性系统(1)



- 单入单出

$$y(t) = L[x(t)]$$

- 线性：系统输入线性和的响应等于响应的线性和(叠加原理)

$$y(t) = L[\sum_i c_i x_i(t)] = \sum_i c_i L[x_i(t)]$$

- 时不变性(恒参)

$$L\{\delta(t)\} = h(t) \Rightarrow L\{\delta(t-\tau)\} = h(t-\tau)$$

- 对于线性时不变系统

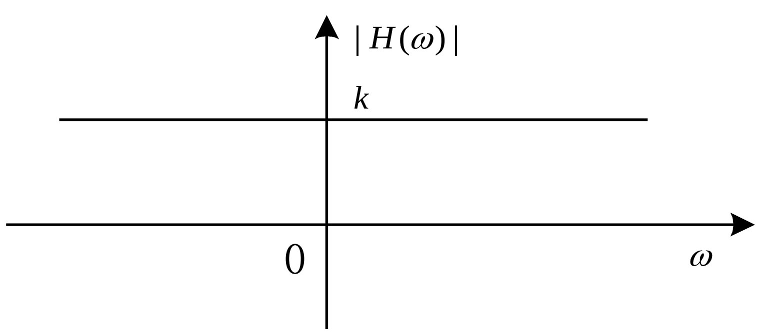
$$h(t) \leftrightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = |H(f)|e^{j\phi(f)}$$ —— 传递函数

2.13 确定信号通过线性系统(2)

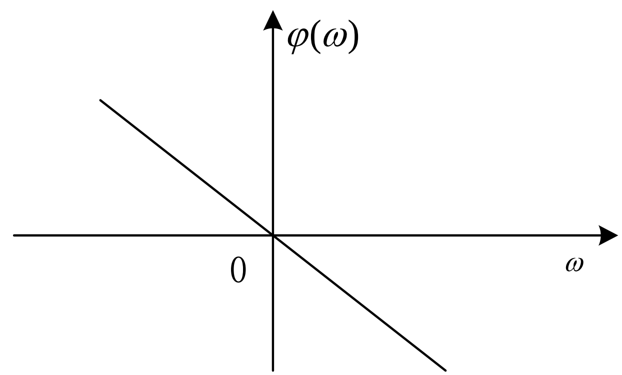
- **信号不失真条件——理想系统**

$$y(t)=k\cdot x(t-\tau) \Rightarrow \begin{cases} h(t)=k\cdot\delta(t-\tau) \\ H(f)=k\cdot e^{-j2\pi f\tau} \end{cases}$$

- **幅频特性**



- **相频特性**

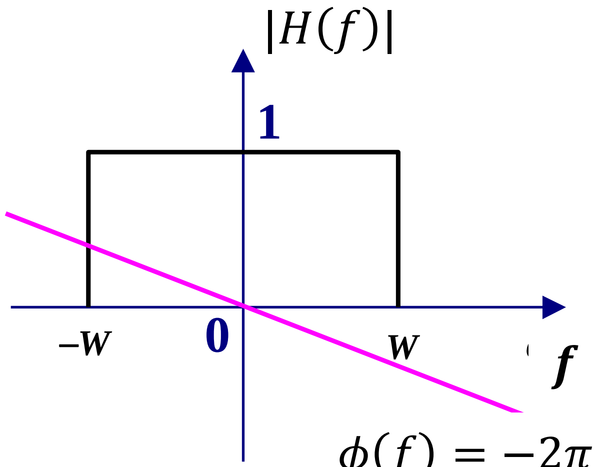


- **群时延特性：不同频率分量的到达时间**

$$\tau(f)=-\frac{\mathrm{d}\phi(f)}{\mathrm{d}f}=\tau$$

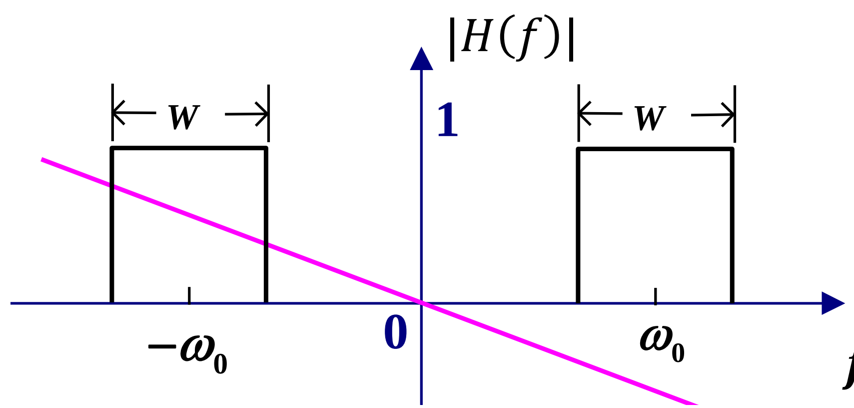
2.13 确定信号通过线性系统(3)

- 理想低通滤波器LPF



$\phi(f) = -2\pi f\tau$

- 理想带通滤波器BPF



$\phi(f) = -2\pi f\tau$

$$H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2W}\right)e^{j2\pi f\tau}$$

$$h(t) = 2W \cdot \mathrm{sinc}[2W(t-\tau)]$$

- 限带基带信号通过理想LPF不失真
- 限带频带信号通过理想BPF不失真

2.14 Hilbert变换

- **定义：若 $x(t)$为实函数**

$$\hat{x}(t) = H[x(t)] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau = \frac{1}{\pi t}\otimes x(t)$$

$$h(t) = \frac{1}{\pi t} \Leftrightarrow H(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f)$$

$$x(t) = H^{-1}[\hat{x}(t)] = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{x}(\tau)}{t-\tau}\mathrm{d}\tau = -\frac{1}{\pi t}\otimes\hat{x}(t)$$

- **性质**
  - **重变换：**$H\{H[x(t)]\} = -x(t)$
  - **等能量：**$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{x}^2(t)\mathrm{d}t$
  - **正交性：**$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\hat{x}(t)\mathrm{d}t = 0$

2.14 Hilbert变换性质

- **奇偶性:**

$$\hat{f}(-t) = -\frac{1}{\pi t} \otimes f(-t)$$

$f(t)$为奇/偶函数，$\hat{f}(t)$为偶/奇函数

- **三角函数：**

$$H[\cos 2\pi f_c t] = \sin 2\pi f_c t$$

$$H[\sin 2\pi f_c t] = -\cos 2\pi f_c t$$

$$F\{H[\cos 2\pi f_c t]\} = \mathrm{sgn}(f)\frac{\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)}{2j} = \frac{\delta(f-f_c)-\delta(f+f_c)}{2j} = F^{-1}\{\sin 2\pi f_c t\}$$

- **调制函数：**

$$H[m(t)\cos 2\pi f_c t] = m(t)\,\sin 2\pi f_c t$$

$$F\{H[m(t)\cos 2\pi f_c t]\} = \frac{M(f-f_c)+M(f+f_c)}{2} \times [-j\cdot\mathrm{sgn}(f)] = \frac{M(f-f_c)-M(f-f_c)}{2j}$$

$$= F\{m(t)\sin 2\pi f_c t\}$$

$$H[m(t)\sin 2\pi f_c t] = -m(t)\cos 2\pi f_c t$$

2.15.1 解析信号

- 实信号 $x(t)$的解析信号定义为

$$z(t)=x(t)+j\,\hat{x}(\mathrm{t})$$

1) $x(t)=\mathrm{Re}\{z(t)\}=\frac{z(t)+z^*(t)}{2}$

2) if $x(t)\Leftrightarrow X(f), z(t)\Leftrightarrow Z(f)$, then

$$Z(f)=\begin{cases}2X(f), f>0\\ 0, \quad\quad f<0\end{cases}=2X(f)u(f)$$

$$z(t)=2\int_0^{\infty}X(f)e^{j2\pi ft}\mathrm{d}f$$

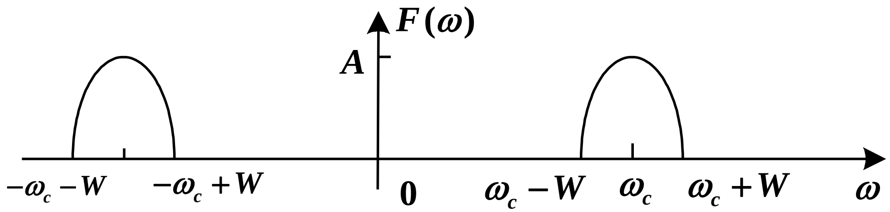
3) $F\{z^*(t)\}=\begin{cases}0, \quad f>0\\ 2X(f), f<0\end{cases}=2X(f)u(-f)$ 物理意义？

例题

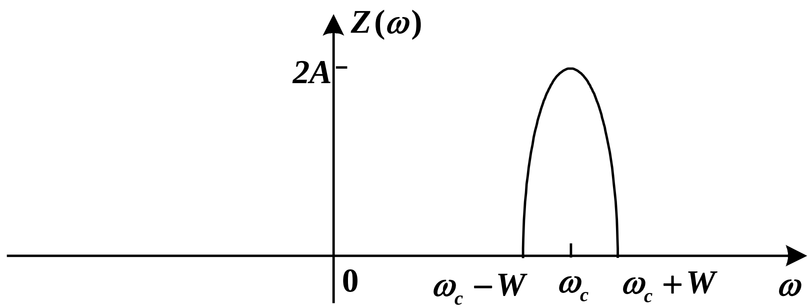
调相信号$s(t)=A_c\cos\left[2\pi f_c t+K_P m(t)\right]$，其解析信号（即复信号）的表达式为_____，其复包络的表示式为______。

2.16 频带信号与带通系统(1)

- 频带信号：信号的频谱集中在某一频率附近(带通信号)
- 窄带信号：$f_c \gg 2W$

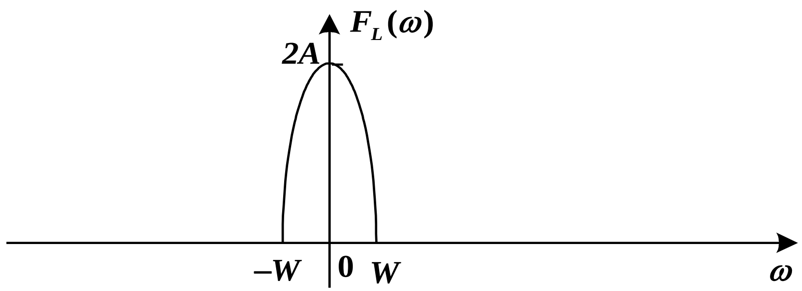


$$f(t) \Leftrightarrow F(f)$$



$$z(t) = f(t) + j\hat{f}(t)$$

$$Z(f) = 2F(f)u(f)$$



$$F_L(f) = Z(f + f_c)$$

$$f_L(t) = z(t)e^{-j2\pi f_c t}$$

$f(t)$的复包络

2.16 频带信号与带通系统(2)

频带信号$f(t)$的表示方法

- 解析信号： $z(t)=f(t)+j\hat{f}(t)$
- 等效低通信号：

$$f_L(t)=z(t)e^{-j\omega_c t}$$

$$=\left[f(t)\cos\omega_c t+\hat{f}(t)\sin\omega_c t\right]+j\left[\hat{f}(t)\cos\omega_c t-f(t)\sin\omega_c t\right]$$

$$=f_c(t)\ +jf_s(t)$$

$$f(t)=\mathrm{Re}\{z(t)\}=\mathrm{Re}\left\{f_L(t)e^{j\omega_c t}\right\}$$ —— 表示法1

$$=f_c(t)\cos\omega_c t-f_s(t)\sin\omega_c t$$ —— 表示法2

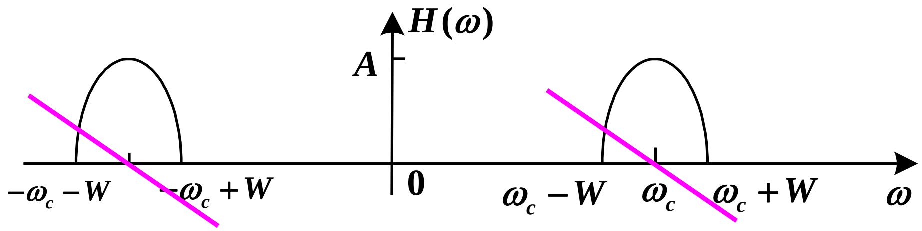
- 若$f_L(t)=a(t)e^{j\theta(t)}$

$$f(t)=\mathrm{Re}\left\{f_L(t)e^{j\omega_c t}\right\}=a(t)\cos[\omega_c t+\theta(t)]$$ —— 表示法3

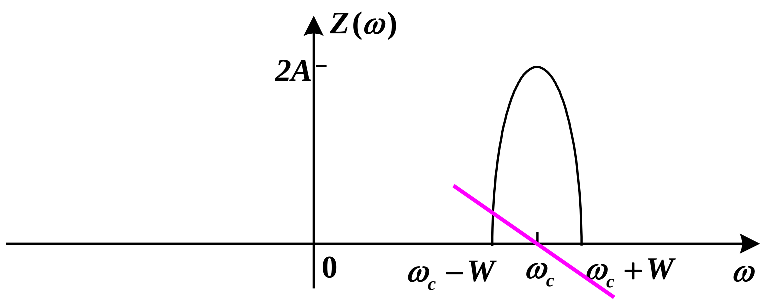
$f_L(t)$中包含了$f(t)$除载频之外的所有信息 → **$f_L(t)$为$f(t)$的等效基带信号**

2.16 频带信号与带通系统(3)

- 带通系统：系统的通频带位于某一频率附近
- 窄带系统： $f_c \gg 2W$

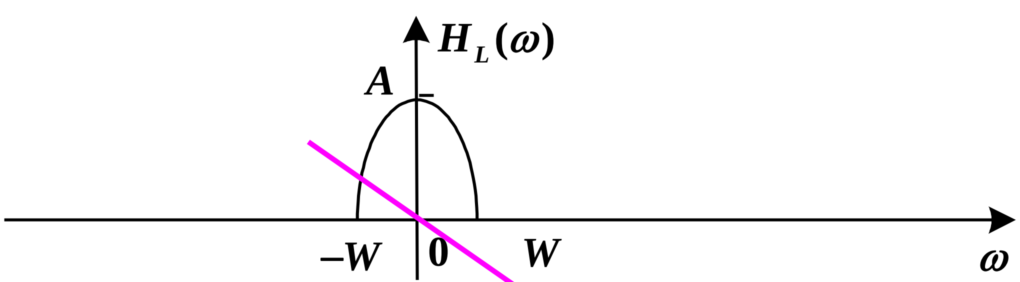


$$h(t) \Leftrightarrow H(f)$$



$$z(t) = h(t) + j\,\hat{h}(t)$$

$$Z(f) = 2H(f)u(f)$$



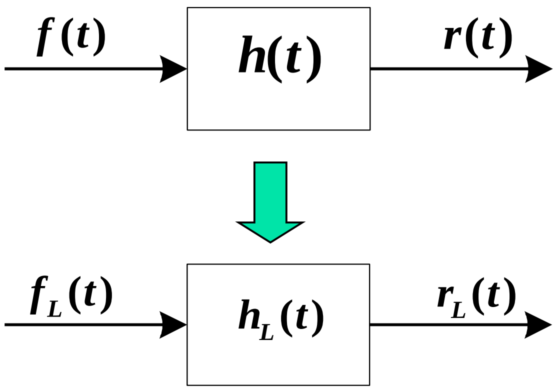
$$H_L(f) = H(f + f_c)u(f + f_c)$$

$$h_L(t) = \frac{1}{2}z(t)e^{-j2\pi f_c t}$$

$h(t)$的等效低通特性

2.16 频带信号与带通系统(4)

- **频带信号通过带通系统**



$$f(t)=\mathrm{Re}\left[f_L(t)e^{j\omega_c t}\right]$$

$$h(t)=2\,\mathrm{Re}\left[h_L(t)e^{j\omega_c t}\right]$$

$$r(t)=\mathrm{Re}\left[r_L(t)e^{j\omega_c t}\right]$$

结论：在处理频带信号激励带通系统时，可以由等价的低通分析代替，即由$f_L(t)$激励单位冲激响应为$h_L(t)$的低通系统，求得其输出响应$r_L(t)$,再乘以$e^{j\omega_c t}$求其实部，即为带通系统的响应。

例2

带通系统的CIR为$h(t) = g(t)\cos 2\pi f_c t$, f_c远大于带通滤波器$g(t)$的截止频率。带通系统的输入信号$x(t) = m(t)\cos(2\pi f_c t + \phi)$, f_c远大于基带信号$m(t)$的带宽。求输出信号$y(t)$