



ITSQM

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR
QUITO METROPOLITANO

FORMANDO PROFESIONALES DE ÉLITE



ITSQM^{ET}
INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR
QUITO METROPOLITANO



ITSQM^{ET}
INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR
QUITO METROPOLITANO

UNIDAD III: FUNDAMENTOS DE MATRICES

FORMANDO PROFESIONALES DE ÉLITE



CONTENIDO

3.1. Fundamentos de matrices

- Definiciones.
- Elementos de matrices.
- Tipos de matrices.

3.2. Operaciones matriciales

- Suma y resta.
- Producto por un número real.
- Transposición de matrices.
- Producto por dos matrices.
- Inversa de una matriz.

OBJETIVOS

- Aprender los fundamentos y definición sobre matrices
- Desarrollar los métodos de resolución para problemas con respecto a determinantes
- Conocer las propiedades y campos de aplicación sobre el Método de cofactores y Regla de Sassus.



Matriz

Una matriz real A es un arreglo rectangular de números reales, en donde cada elemento a_{ij} que pertenece a la matriz A tiene dos subíndices. El subíndice i representa la *fila* (disposición horizontal), y el subíndice j representa la *columna* (disposición vertical), en las cuales se encuentra el elemento.

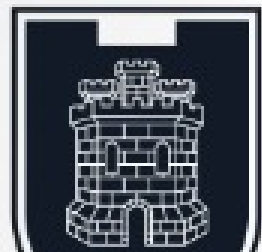
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$



Si la matriz A tiene m filas y n columnas, se dice que es de **dimensión** u **orden** $m \times n$ y se denota como: $A_{m \times n}$. Se usará $\forall i \forall j$ para denotar $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

Las matrices se denotan con letras mayúsculas: $A, B, C...$ y los elementos de las mismas con letras minúsculas y subíndices que indican el lugar que ocupan: $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, \dots$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$



Ejemplo 5.1 Identificación de filas y columnas.

En la matriz $A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

La fila 1 es (1 2), la fila 2 es (3 4), la fila 3 es (5 6).

La columna 1 es $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y la columna 2 es $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Igualdad entre matrices

Dos matrices $A_{m \times n}$ y $B_{p \times q}$ son iguales, si y sólo si:

- $(m=p) \wedge (n=q)$, es decir, son del mismo orden.
- $\forall i \forall j (a_{ij} = b_{ij})$, es decir, cada uno de los elementos correspondientes de las matrices son iguales.

Ejemplo 5.3 Igualdad entre matrices.

Las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \ln(e) & \cos(\pi) \\ \log(1) & \sqrt{4} \end{pmatrix}$

son iguales porque tanto A como B son de orden 2×2 y se cumple que:
 $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$, $a_{22} = b_{22}$.



Clases de Matrices

Matriz fila

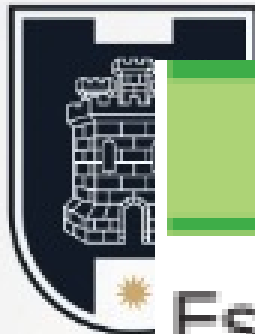
Es una matriz que tiene una sola fila, es decir, su orden es $1 \times n$. Por ejemplo:

$$A_{1 \times 3} = (1 \ 2 \ 3)$$

Matriz columna

Es una matriz que tiene una sola columna, es decir, su orden es $m \times 1$. Por ejemplo:

$$A_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Matriz rectangular

Es una matriz que tiene el número de filas diferente al de columnas, siendo su orden $m \times n$, $m \neq n$. Por ejemplo:

$$A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriz cuadrada

Es una matriz que tiene igual número de filas que de columnas, es decir, $m = n$. Por ejemplo:

$$A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$



Matriz triangular superior

Es una matriz cuadrada que tiene todos los elementos bajo la diagonal principal iguales a cero. Esto es $a_{ij} = 0$ si $i > j$. Por ejemplo:

$$A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular inferior

Es una matriz cuadrada que tiene todos los elementos sobre la diagonal principal iguales a cero. Esto es $a_{ij} = 0$ si $i < j$. Por ejemplo:

$$A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$



Matriz nula

Es una matriz en la que todos sus elementos son iguales a cero. También se denomina matriz cero y se denota por $0_{m \times n}$. Observe que existe una matriz cero por cada dimensión $m \times n$. Por ejemplo:

$$0_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$0_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$0_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal

Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos sobre y bajo la diagonal principal iguales a cero. Esto es $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Por ejemplo:

$$A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$



Matriz escalar

Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos sobre y bajo la diagonal principal iguales a cero, y los elementos de la diagonal principal iguales entre sí. Esto es $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $a_{ii} = k$ con $k \in \mathbb{R}$. La matriz escalar es un caso particular del conjunto de matrices diagonales. Por ejemplo:

$$A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$



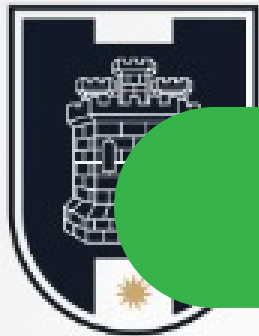
Matriz identidad

Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos iguales a cero, excepto los de la diagonal principal que son iguales a 1 y se denota por $I_{n \times n}$. Note que existe una matriz identidad por cada tamaño $n \times n$ y este tipo de matriz es un caso particular del conjunto de matrices escalares. Por ejemplo:

$$I_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



ITSOM

Operaciones con matrices

Suma entre matrices

Definición 5.3 (Suma entre matrices)

Dadas dos matrices $A_{m \times n}$ y $B_{m \times n}$ del mismo orden, se define la suma de matrices como una nueva matriz $C_{m \times n}$ del mismo orden, $C = A + B$, tal que: $\forall i \forall j (c_{ij} = a_{ij} + b_{ij})$.

Es decir, cada elemento de la matriz C es obtenido sumando cada elemento correspondiente de las matrices A y B .



Multiplicación de una matriz por un escalar

Definición 5.4 (Multiplicación de una matriz por un escalar)

Dado un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ y una matriz $A_{m \times n}$, se define la multiplicación de una matriz por un escalar como una nueva matriz $B_{m \times n}$, $B = \lambda A$, tal que: $\forall i \forall j (b_{ij} = \lambda a_{ij})$.

Es decir, cada elemento de la matriz B es obtenido multiplicando el escalar λ por cada elemento de la matriz A .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \lambda a_{ij} & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$



Multiplicación entre matrices

Definición 5.5 (Multiplicación entre matrices)

Dadas dos matrices $A_{m \times n}$ y $B_{n \times p}$, se define la multiplicación entre matrices como una nueva matriz $C_{m \times p}$ $C = AB$, tal que:

$$\forall i \forall j (c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}).$$

Es decir, cada elemento de la matriz producto C es obtenido sumando los productos de cada elemento de la fila i de la matriz A por el correspondiente elemento de la columna j de la matriz B . Esto se puede expresar de la siguiente manera:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$



Transposición de una matriz

Definición 5.6 (Matriz simétrica)

Una matriz cuadrada A , se dice que es simétrica, si y sólo si $A^T = A$. Esto se puede representar simbólicamente por $\forall i \forall j (a_{ij} = a_{ji})$.

Definición 5.7 (Matriz antisimétrica)

Una matriz cuadrada A , se dice que es antisimétrica, si y sólo si $A^T = -A$. Esto se puede representar simbólicamente por $\forall i \forall j (a_{ij} = -a_{ji})$, que implica además que $a_{ii} = 0$.



Inversa de una matriz

Definición 5.8 (Inversa de una matriz)

Dada una matriz cuadrada A , su inversa, la cual se denota por A^{-1} , es una matriz que cumple con:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$



¡Gracias!