ITSQMET

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR
QUITO METROPOLITANO

FORMANDO PROFESIONALES DE ÉLITE

senescyt

CACES

ITSQMET
INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR
QUITO METROPOLITANO

UNIDAD II: FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

ING. FRANCISCO TAPIA

CONTENIDO

2.2. Definición, domino y rango de una relación y una función.

- Fundamentos y definición de una relación y función.
- Dominio y rango de una relación y función.
- Variable dependiente e independiente.

OBJETIVOS

- Aprender los fundamentos y definición de una relación y función.
- Desarrollar los métodos de resolución para problemas de dominio y rango de una relación y función.
- Conocer las propiedades y campos de aplicación de las variable dependiente e independiente.

Función de una variable real

Sean X y Y dos conjuntos no vacíos, subconjuntos de los números reales. Una función de variable real de X en Y es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento de X un único elemento de Y. Esto se representa simbólicamente por:

$$\begin{aligned} f: X &\to Y \\ x &\to y = f(x) \end{aligned}$$

A la variable x se le llama variable independiente y a la variable y se la conoce como variable dependiente.

Dominio de una función de variable real

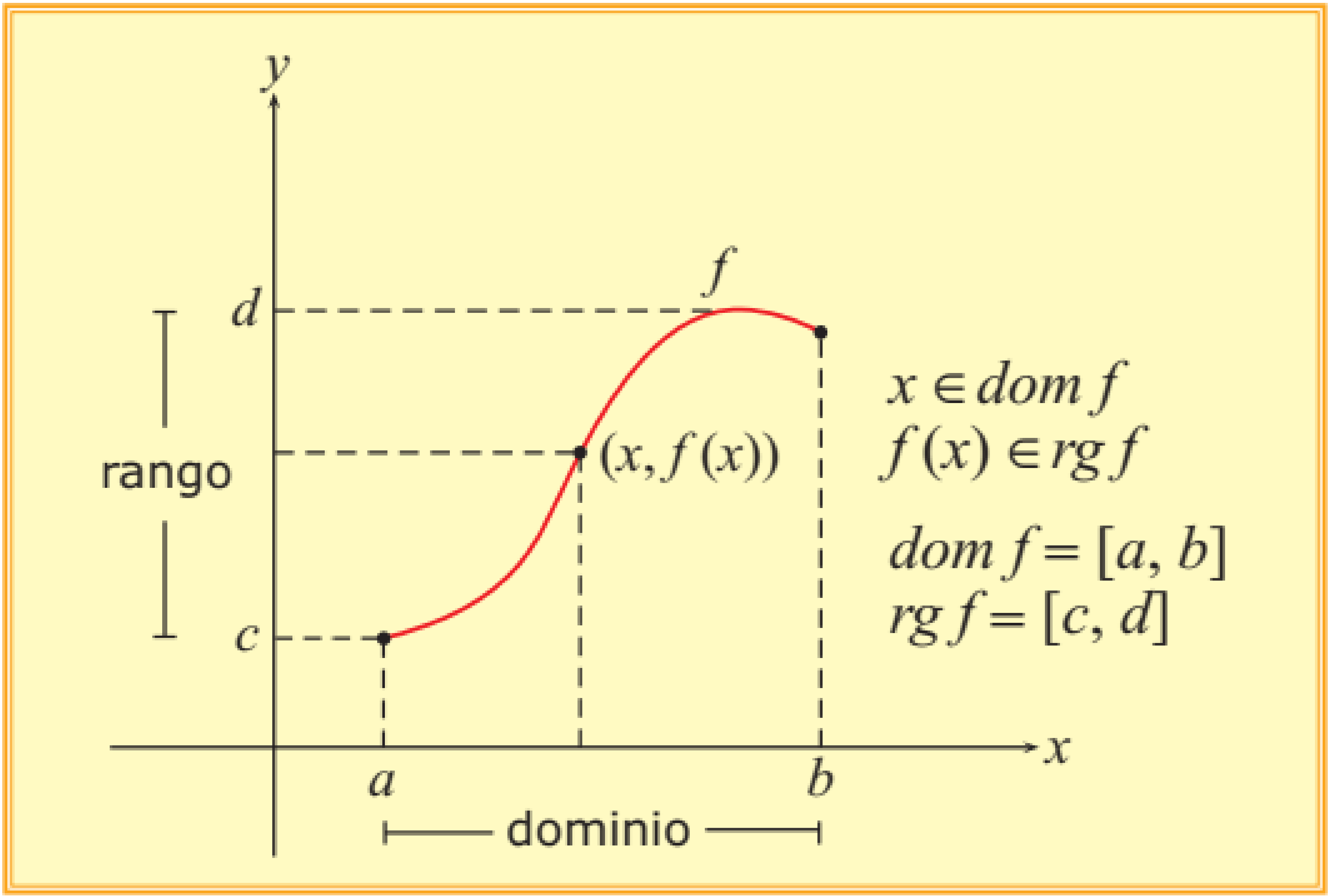
Sea f una función de variable real f: X → Y. El conjunto X para el cual se encuentra definida, constituye el dominio de la función. Este conjunto se representa simbólicamente por $dom\, f$.

Rango de una función de variable real

Sea f una función de variable real f: X → Y, el conjunto de todas las imágenes de los elementos del dominio, constituye el rango de la función. Este conjunto se representa simbólicamente por $rg\, f$.

Representación gráfica de funciones

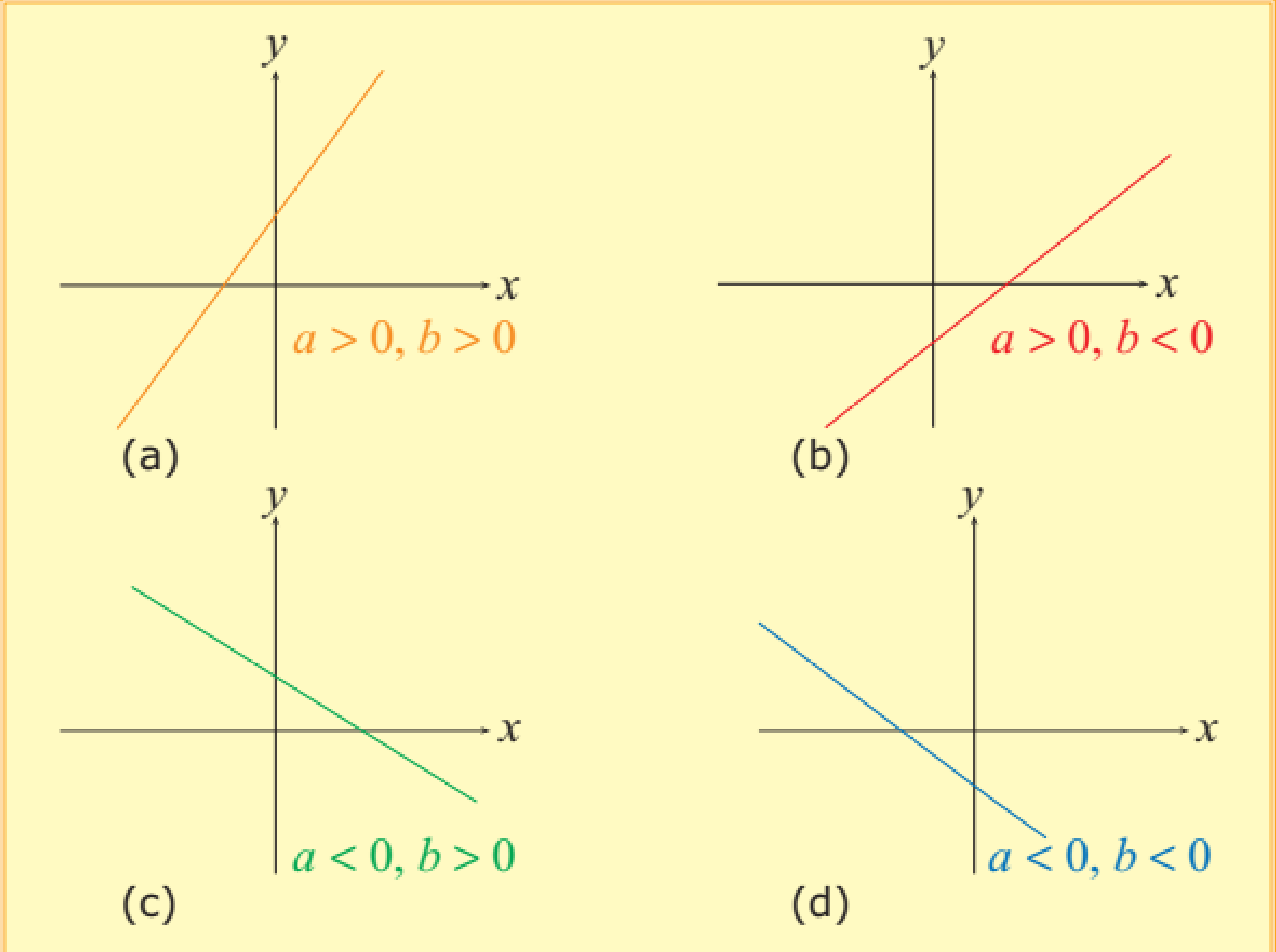
Si ***f*** es una función de **A** en **B**, entonces la gráfica de ***f*** es el conjunto de puntos o pares ordenados de **A x B**, tales que sus coordenadas ***(x,y)*** pertenecen a ***f.***



Funciones Lineales

Sean a y b números reales, la función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ cuya regla de correspondencia es $f(x) = ax + b$, recibe el nombre de función lineal.

- Su gráfica es una **recta.**
- Su pendiente está dada por a
- Su intercepto con el eje Y es el punto **(0, b)**.



Funciones Cuadráticas

Sean a, b y c números reales con $a \neq 0$, la función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ cuya regla de correspondencia es $f(x) = ax^2 + bx + c$, recibe el nombre de función cuadrática.

- **Forma canónica de la función cuadrática.**

$$f(x) = ax^2 + bx + c \equiv f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Esta última expresión es la forma canónica de la función cuadrática, siendo $\Delta = b^2 - 4ac$, valor que se denomina **discriminante**.

El punto de coordenadas $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ es el vértice de la parábola, punto en el cual la gráfica de f alcanza su valor máximo o mínimo en y.

- **Rango de la función cuadrática**

Se trata de determinar el subconjunto de $\mathbb{R}$ que es el rango de la función cuadrática, esto es, el conjunto de valores que toma $f(x) = ax^2 + bx + c$, cuando x varía de $-\infty$ a $+\infty$.

Consideremos los siguientes casos:

i) $\boxed{a > 0}$

$$\boxed{\therefore\ rg\, f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)}$$

ii) $\boxed{a < 0}$

$$\boxed{\therefore\ rg\, f = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]}$$

- **Forma factorizada de la función cuadrática.**

Dada la regla de correspondencia de f, si $\Delta \geq 0$, siempre es posible factorizarla y llevarla a la forma $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, donde x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación cuadrática $f(x) = 0$.

Ejemplo 3.20 Forma factorizada de la función cuadrática.

Obtenga la forma factorizada de $f(x) = x^2 - 5x - 6$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

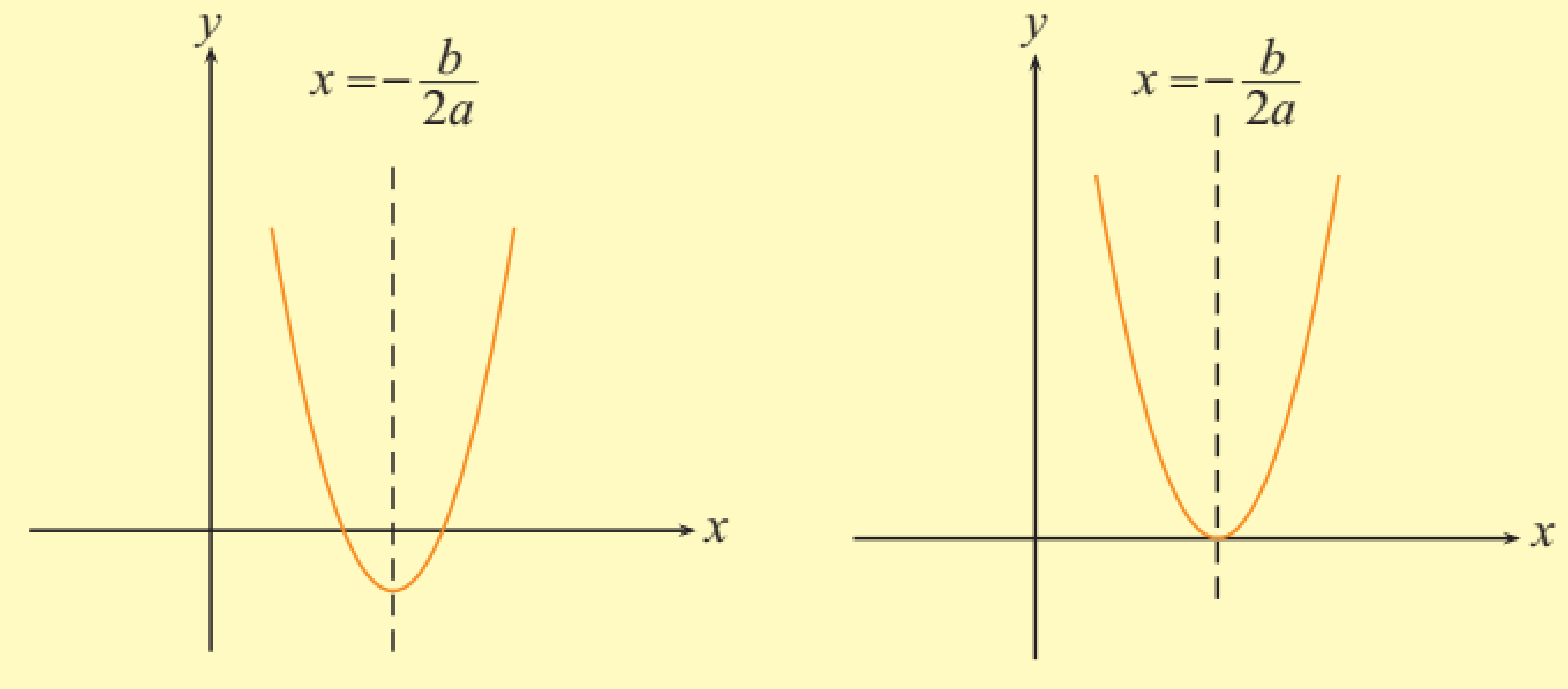
Solución:

La expresión equivalente factorizada es: $f(x) = (x - 6)(x + 1)$.
Las raíces de la ecuación cuadrática $f(x) = 0$ son: $(x = 6) \vee (x = -1)$.

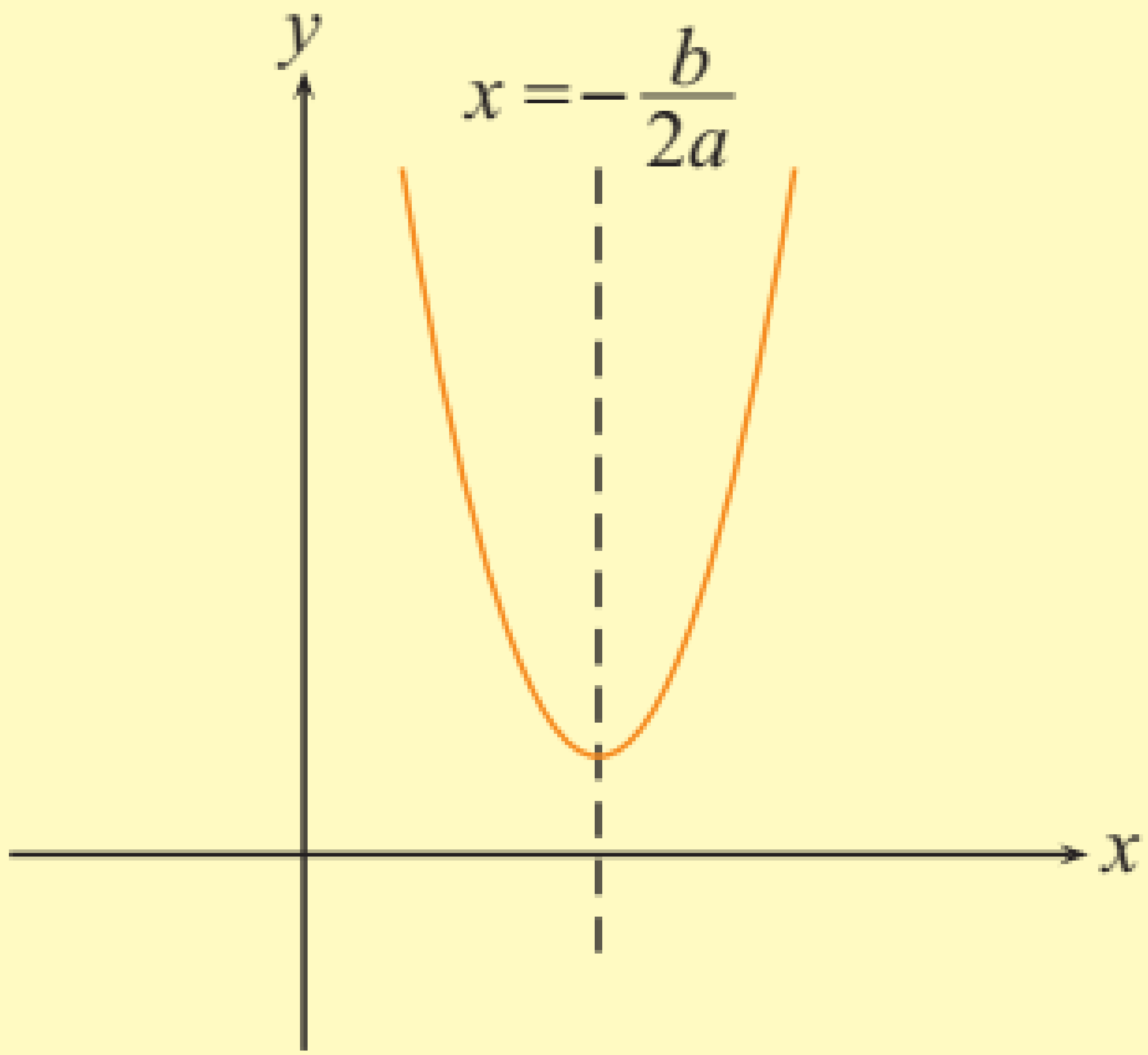
- **Gráfica de la función cuadrática.**

Para graficar la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ en el plano cartesiano, se debe tener en cuenta que:

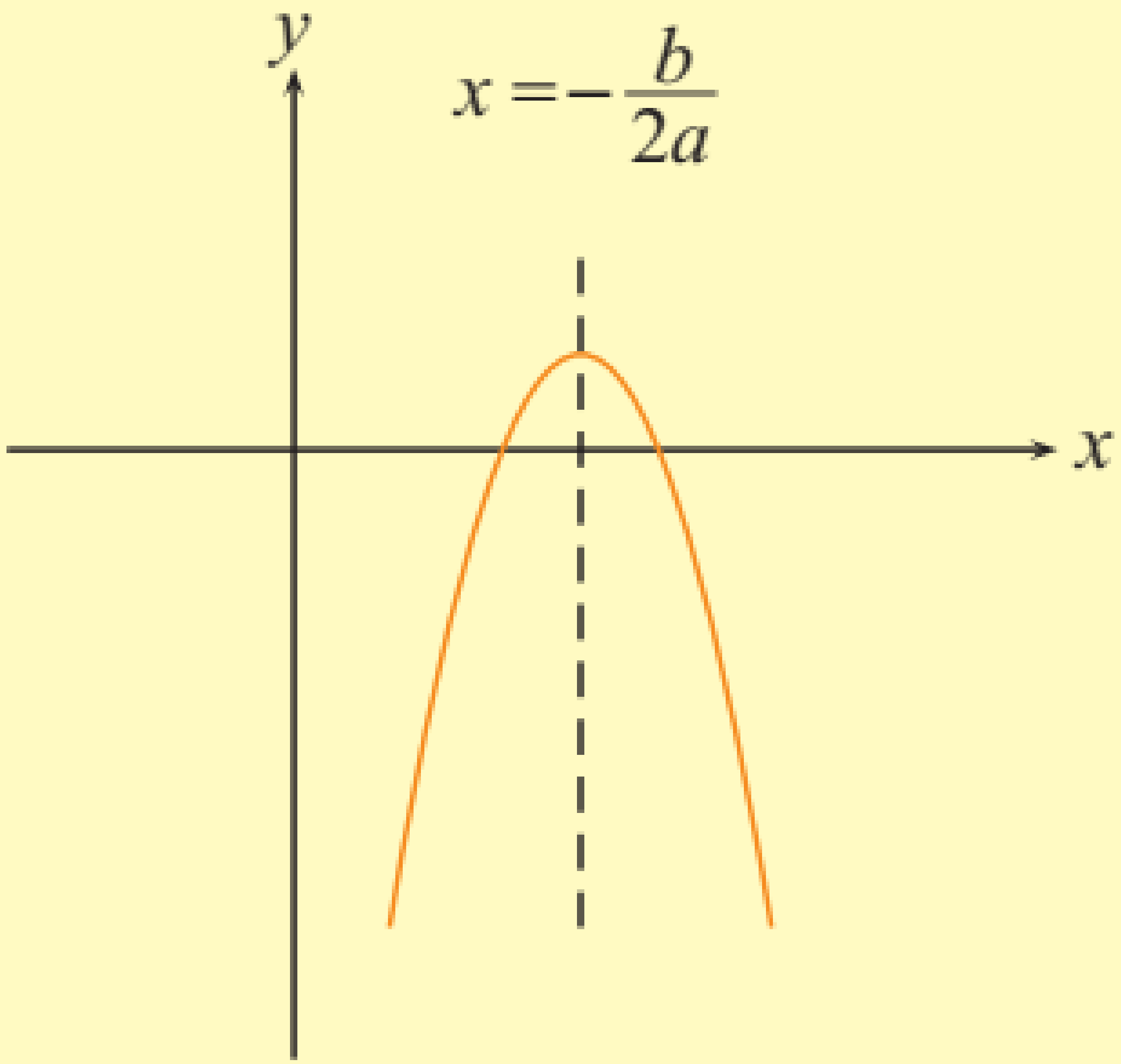
- Su gráfica es una parábola.
- Tiene simetría con respecto a la recta $x = -\frac{b}{2a}$.
- El signo de a indica la concavidad de la curva. Si $a > 0$, la parábola es cóncava hacia arriba; y, si $a < 0$, la parábola es cóncava hacia abajo.
- El signo de Δ está relacionado con la cantidad de intersecciones con el eje X. Si $\Delta > 0$, la gráfica de f tiene dos intersecciones con el eje X. Si $\Delta = 0$, la gráfica de f interseca al eje X en un solo punto. Por último, si $\Delta < 0$, la gráfica de f no interseca al eje X.



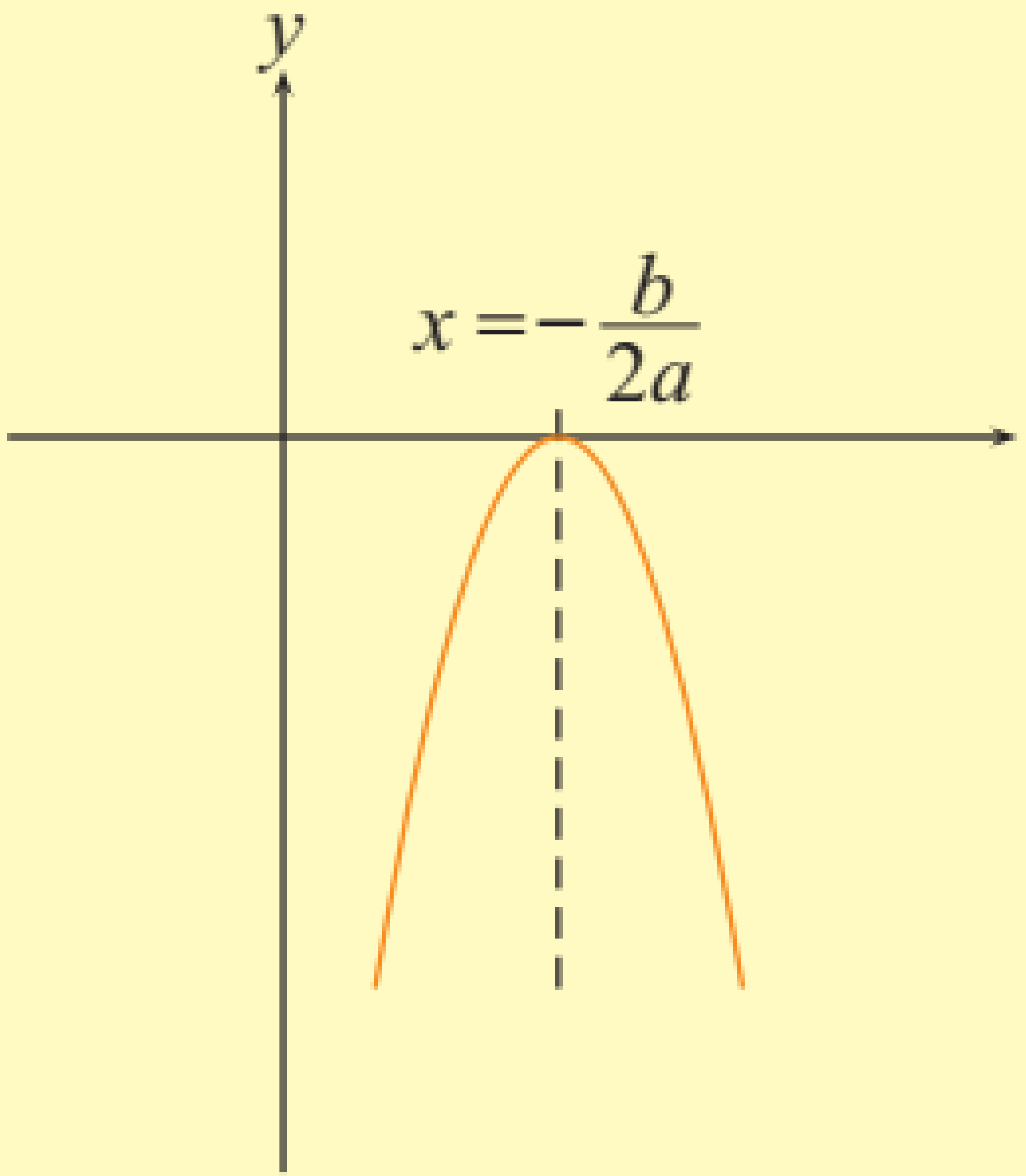
a) $(a > 0) \wedge (\Delta > 0)$ b) $(a > 0) \wedge (\Delta = 0)$



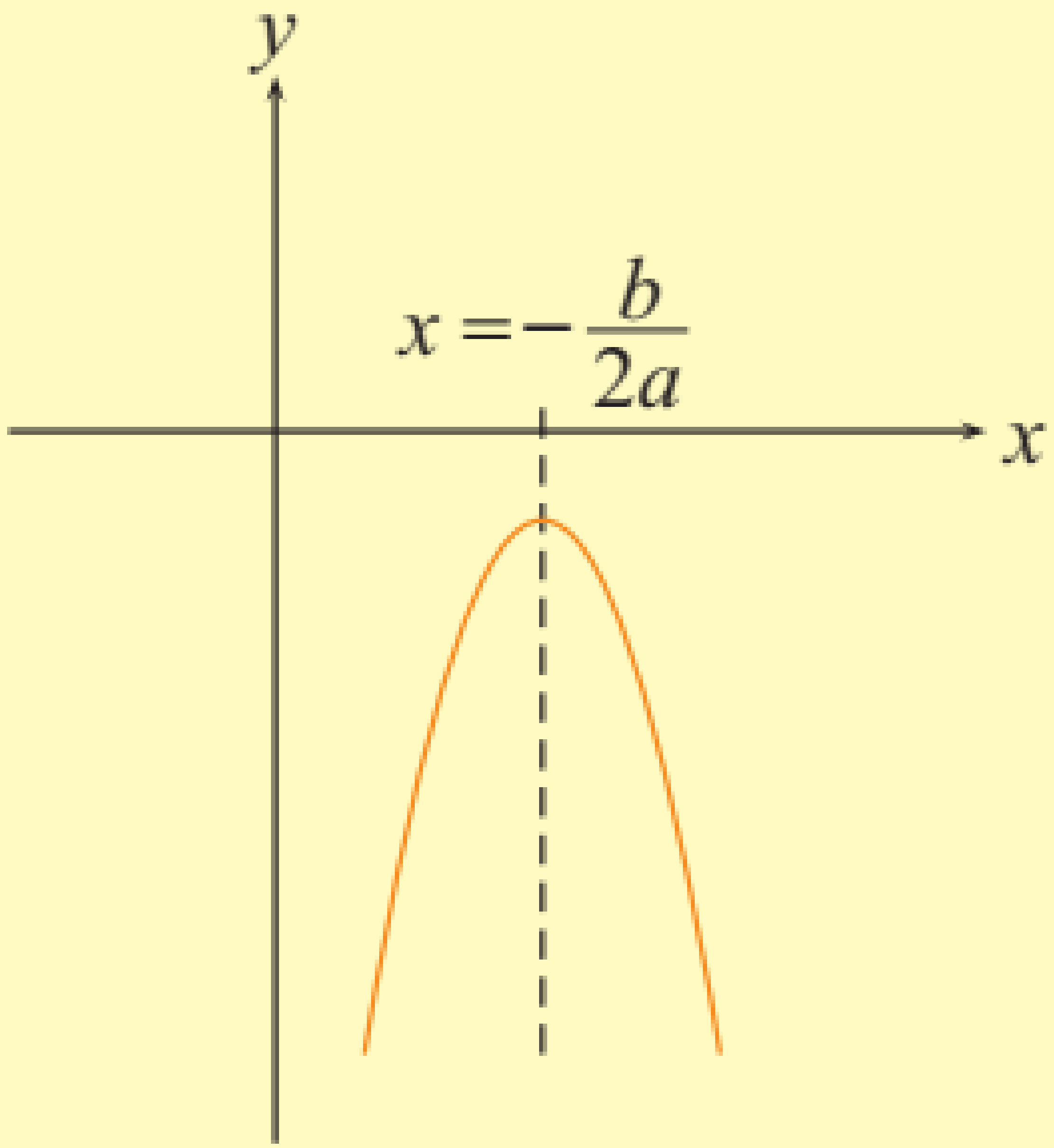
c) $(a > 0) \wedge (\Delta < 0)$



d) $(a < 0) \wedge (\Delta > 0)$



e) $(a < 0) \wedge (\Delta = 0)$



f) $(a < 0) \wedge (\Delta < 0)$

¡Gracias!