ITSQMET

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR
QUITO METROPOLITANO

FORMANDO PROFESIONALES DE ÉLITE

senescyt

CACES

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR QUITO METROPOLITANO

UNIDAD III: FUNDAMENTOS DE MATRICES

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR QUITO METROPOLITANO

CONTENIDO

3.1. Fundamentos de matrices

- Definiciones.
- Elementos de matrices.
- Tipos de matrices.

3.2.Operaciones matriciales

- Suma y resta.
- Producto por un número real.
- Transposición de matrices.
- Producto por dos matrices.
- Inversa de una matriz.

OBJETIVOS

- Aprender los fundamentos y definición sobre matrices
- Desarrollar los métodos de resolución para problemas con respecto a determinantes
- Conocer las propiedades y campos de aplicación sobre el Método de cofactores y Regla de Sassus.

Matriz

Una matriz real A es un arreglo rectangular de números reales, en donde cada elemento a_{ij} que pertenece a la matriz A tiene dos subíndices. El subíndice i representa la *fila* (disposición horizontal), y el subíndice j representa la *columna* (disposición vertical), en las cuales se encuentra el elemento.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si la matriz A tiene m filas y n columnas, se dice que es de **dimensión** u **orden** m x n y se denota como: A_{mxn}. Se usará $\forall i \, \forall j$ para denotar $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Las matrices se denotan con letras mayúsculas: A, B, C... y los elementos de las mismas con letras minúsculas y subíndices que indican el lugar que ocupan: a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, ...

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5.1 Identificación de filas y columnas.

En la matriz $A_{3x2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

La fila 1 es $(1 \quad 2)$, la fila 2 es $(3 \quad 4)$, la fila 3 es $(5 \quad 6)$.

La columna 1 es $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y la columna 2 es $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Igualdad entre matrices

Dos matrices $A_{m\times n}$ y $B_{p\times q}$ son iguales, si y sólo si:

- $(m=p) \wedge (n=q)$, es decir, son del mismo orden.
- $\forall i \forall j (a_{ij}=b_{ij})$, es decir, cada uno de los elementos correspondientes de las matrices son iguales.

Ejemplo 5.3 Igualdad entre matrices.

Las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} ln(e) & cos(\pi) \\ log(1) & \sqrt{4} \end{pmatrix}$

son iguales porque tanto A como B son de orden 2 x 2 y se cumple que:
$a_{11}=b_{11},\ a_{12}=b_{12},\ a_{21}=b_{21},\ a_{22}=b_{22}$.

Clases de Matrices

Matriz fila

Es una matriz que tiene una sola fila, es decir, su orden es $1 \times n$. Por ejemplo:

$$A_{1x3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz columna

Es una matriz que tiene una sola columna, es decir, su orden es $m \times 1$. Por ejemplo:

$$A_{3x1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Matriz rectangular

Es una matriz que tiene el número de filas diferente al de columnas, siendo su orden m x n, $m \neq n$. Por ejemplo:

$$A_{3x2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriz cuadrada

Es una matriz que tiene igual número de filas que de columnas, es decir, $m = n$. Por ejemplo:

$$A_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular superior

Es una matriz cuadrada que tiene todos los elementos bajo la diagonal principal iguales a cero. Esto es $a_{ij} = 0$ si $i > j$. Por ejemplo:

$$A_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular inferior

Es una matriz cuadrada que tiene todos los elementos sobre la diagonal principal iguales a cero. Esto es $a_{ij} = 0$ si $i < j$. Por ejemplo:

$$A_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriz nula

Es una matriz en la que todos sus elementos son iguales a cero. También se denomina matriz cero y se denota por $0_{m \times n}$. Observe que existe una matriz cero por cada dimensión m x n. Por ejemplo:

$$0_{2x2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 0_{3x2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_{3x4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal

Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos sobre y bajo la diagonal principal iguales a cero. Esto es $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Por ejemplo:

$$A_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz escalar

Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos sobre y bajo la diagonal principal iguales a cero, y los elementos de la diagonal principal iguales entre sí. Esto es $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $a_{ii} = k$ con $k \in \mathbb{R}$. La matriz escalar es un caso particular del conjunto de matrices diagonales. Por ejemplo:

$$A_{3x3} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Matriz identidad

Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos iguales a cero, excepto los de la diagonal principal que son iguales a 1 y se denota por $I_{n\times n}$. Note que existe una matriz identidad por cada tamaño n x n y este tipo de matriz es un caso particular del conjunto de matrices escalares. Por ejemplo:

$$I_{2\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_{4\times4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices

Suma entre matrices

Definición 5.3 (Suma entre matrices)

Dadas dos matrices A_{mxn} y B_{mxn} del mismo orden, se define la suma de matrices como una nueva matriz C_{mxn} del mismo orden, $C = A + B$, tal que: $\forall i \forall j (c_{ij} = a_{ij} + b_{ij})$.

Es decir, cada elemento de la matriz C es obtenido sumando cada elemento correspondiente de las matrices A y B.

Multiplicación de una matriz por un escalar

Definición 5.4 (Multiplicación de una matriz por un escalar)

Dado un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ y una matriz $A_{m\times n}$, se define la multiplicación de una matriz por un escalar como una nueva matriz $B_{m\times n}$, $B = \lambda A$, tal que: $\forall i \forall j (b_{ij} = \lambda a_{ij})$.

Es decir, cada elemento de la matriz B es obtenido multiplicando el escalar λ por cada elemento de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \lambda a_{ij} & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Multiplicación entre matrices

Definición 5.5 (Multiplicación entre matrices)

Dadas dos matrices A_{mxn} y B_{nxp}, se define la multiplicación entre matrices como una nueva matriz C_{mxp}, $C = AB$, tal que:
$\forall i \forall j (c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj})$.

Es decir, cada elemento de la matriz producto C es obtenido sumando los productos de cada elemento de la fila i de la matriz A por el correspondiente elemento de la columna j de la matriz B. Esto se puede expresar de la siguiente manera:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Transposición de una matriz

Definición 5.6 (Matriz simétrica)

Una matriz cuadrada A, se dice que es simétrica, si y sólo si $A^T = A$. Esto se puede representar simbólicamente por $\forall i\, \forall j (a_{ij} = a_{ji})$.

Definición 5.7 (Matriz antisimétrica)

Una matriz cuadrada A, se dice que es antisimétrica, si y sólo si $A^T = -A$. Esto se puede representar simbólicamente por $\forall i\, \forall j (a_{ij} = -a_{ji})$, que implica además que $a_{ii} = 0$.

Inversa de una matriz

Definición 5.8 (Inversa de una matriz)

Dada una matriz cuadrada A, su inversa, la cual se denota por A^{-1}, es una matriz que cumple con:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

¡Gracias!