Общие сведения

План

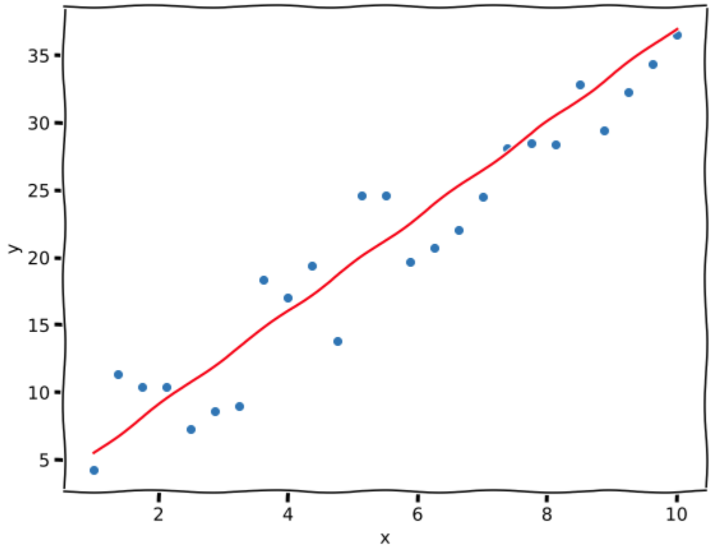
1. Линейная модель регрессии
2. Как линейные модели обучаются?
3. Линейная модель классификации

Что это такое?

x — баллы за экзамен по английскому 1

y — баллы за экзамен по английскому 2

x	y
1	5
3	11
9	35
10	33



Что это такое?

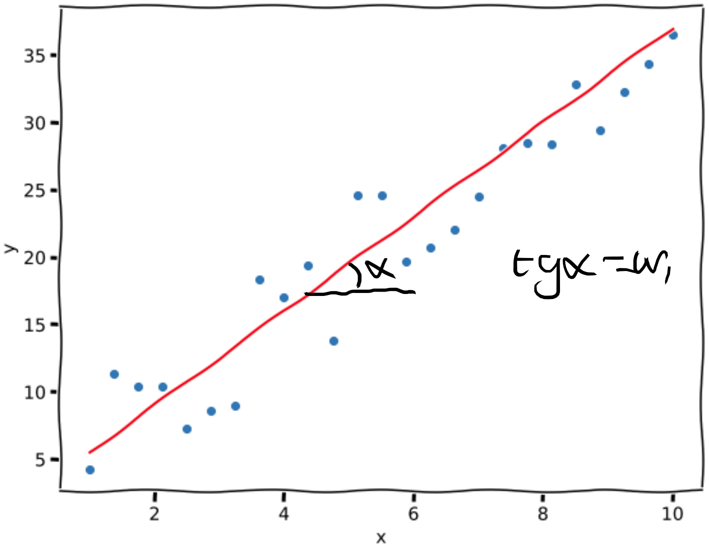
свободный член
(intercept)

случайная ошибка
(error)

$$y = w_0 + w_1 x + \epsilon$$

целевая переменная
(aka target)

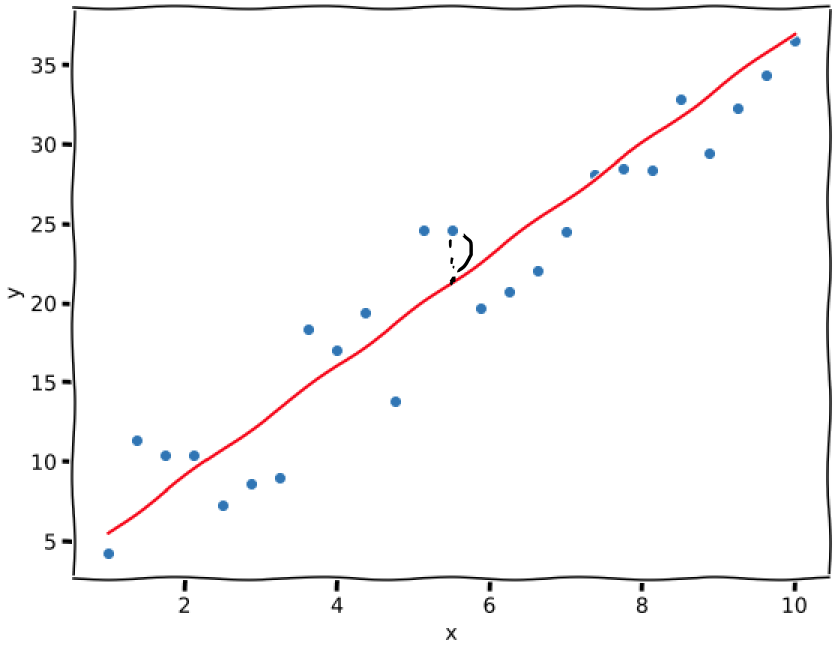
независимая переменная
(slope, predictor)



А какая модель нам нужна?

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \hat{y}_i)^2 \to \min$$

$$MAE = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|y_i - \hat{y}_i| \to \min$$



Интерпретация коэффициентов

Зачем нужны линейные модели?

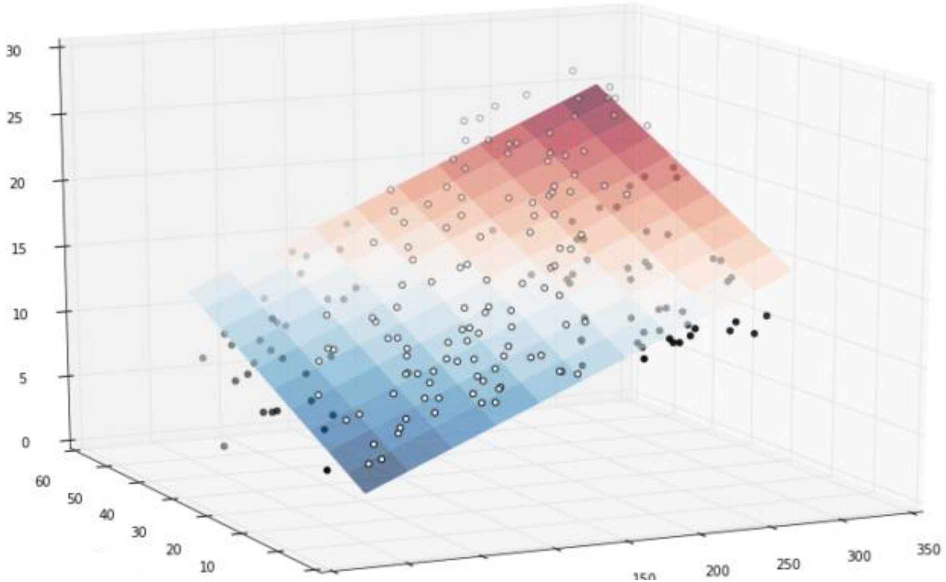
1. Предсказание интересующей нас величины
2. Оценка влияния различных факторов на нашу целевую переменную
3. Линейные модели очень легко использовать и интерпретировать
4. Линейные модели могут восстанавливать даже **нелинейные зависимости**

А если у нас много независимых переменных?

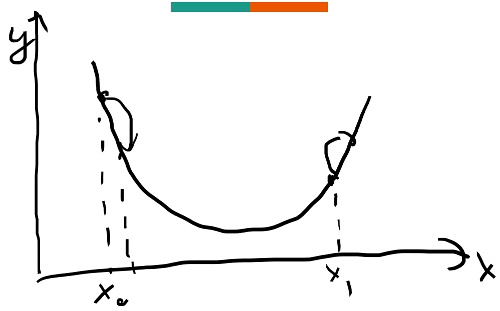
$$y = w_0 + w_1 x + w_2 z + \ldots + w_n t + \epsilon$$

площадь	число комнат	школа близко	цена квартиры
50	2	нет	5000
1000	7	да	11000
30	1	нет	3500
100	4	нет	33333

Множественная линейная регрессия дает нам плоскость



Производные



$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$$

$y = f(x)$	$\frac{dy}{dx} = f'(x)$
k, any constant	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n, any constant n	nx^{n-1}
e^x	e^x
e^{kx}	ke^{kx}
$\ln x = \log_e x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\sin kx$	$k \cos kx$
$\cos x$	$-\sin x$
$\cos kx$	$-k \sin kx$

Производные

$\left(0, 0, \frac{\pi}{2}\right)$ – ответ

$$\varphi(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 - \sin z$$

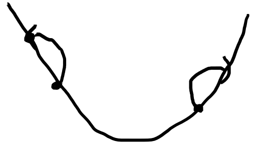
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 4x$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 6\cdot y$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\cos z$$

$$\begin{pmatrix} 4x \\ 6y \\ -\cos z \end{pmatrix}$$ – градиент $\varphi = \nabla_{xyz}\varphi$

Производные (градиент)



- указывает в напр. наиб. роста ф-ции
- Антиградиент указ. в напр. ~~наиб.~~ наискор. убыв.

Производные

Как оценивать коэффициенты модели?

$$\underset{n\times 3}{X},\quad \underset{n\times 1}{y},\quad \underset{4\times 1}{w}$$

$$y = w_0 \cdot 1 + w_1 x_1 \ldots w_3 x_3$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & & & \\ 1 & & & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

$$n\times 4$$

$$\underset{n\times 1}{y} = \underset{n\times 4}{X} \cdot \underset{4\times 1}{w}$$

$$= 1 \cdot w_0 + x_1 w_1 + \ldots + x_3 w_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Как оценивать коэффициенты модели?

$$MSE = \frac{1}{N} (\underset{n\times 1}{y} - \underset{n\times 1}{\overset{\text{matrix}}{X} \overset{\text{bera}}{w}})^2 = \frac{1}{N} (\underset{n\times 1}{y - Xw})^T (\underset{n\times 1}{y - Xw})$$

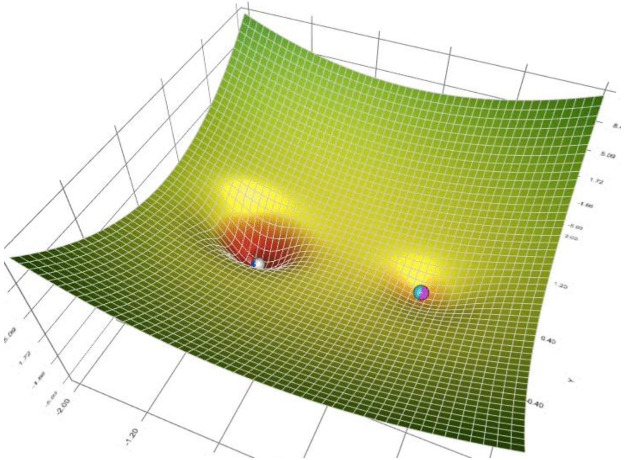
$$\underset{4\times 1}{\nabla_w MSE} = \boxed{-\frac{1}{N} \cdot 2 \cdot \underset{4\times n}{X^T} (\underset{n\times 1}{y - Xw})} = \boxed{\frac{2}{N} \cdot X^T (Xw - y)}$$

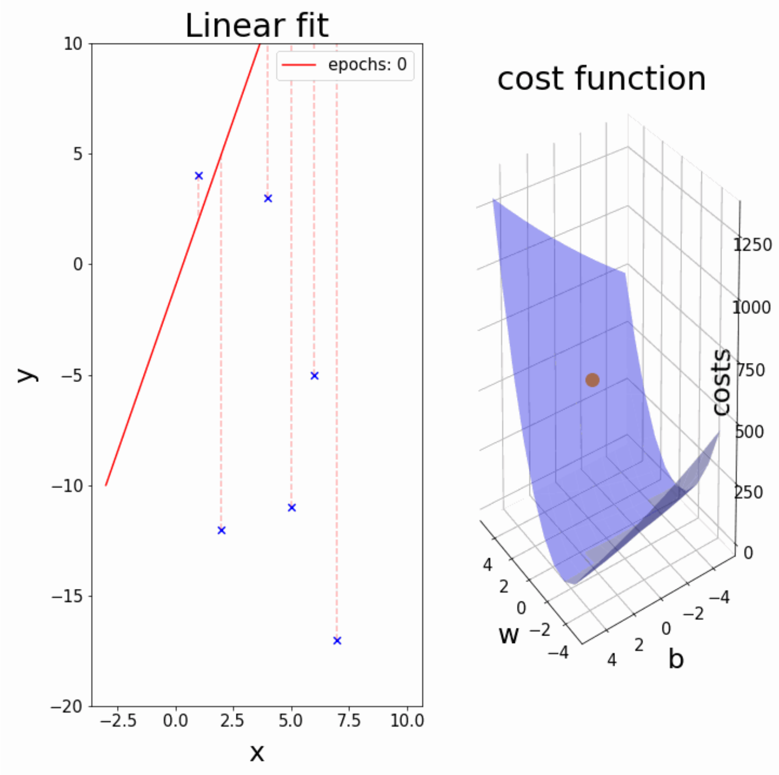
$$\underset{4\times 1}{w_{(i+1)}} = \underset{4\times 1}{w_{(i)}} - \eta \nabla MSE(w_i)$$

η: [0.001, 0.01]

eta – learning rate

Градиентный спуск





Формулы

$$y = w_0 + w_1 x + \epsilon$$

$$y = Xw$$

$$\frac{dLoss}{dw} = \nabla Loss = \frac{2}{n} X^T (Xw - y)$$

$$Loss = \frac{1}{n}(y - Xw)^T (y - Xw)$$

$$\boxed{w = (X^T X)^{-1} X^T y}$$

Градиентный спуск

$$Loss = \frac{1}{N}(y - Xw)^T(y - Xw) \qquad \frac{dLoss}{dw} = \nabla Loss = \frac{2}{N}X^T(Xw - y)$$

```
w = np.random.randn(m + 1)
Пока grad(Loss) != 0:
            w -= η * grad(Loss)
```

Отдых -> логистическая регрессия

Связь событий и признаков

В зависимости от предикторов события могут происходить чаще или реже − логика, совпадающая с логикой связи количественной переменной отклика с набором предикторов.

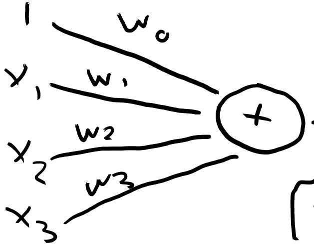
Например, по мере роста температуры воздуха летом чаще будут встречаться люди в шортах: событие “встретился человек в шортах” положительно связано с температурой воздуха.

Событие “проведение исследования” явно связана с предиктором “объем полученного финансирования”, однако эта связь может быть совсем непростой.

А что если хотим классификацию?

$y = \{0, 1\}$

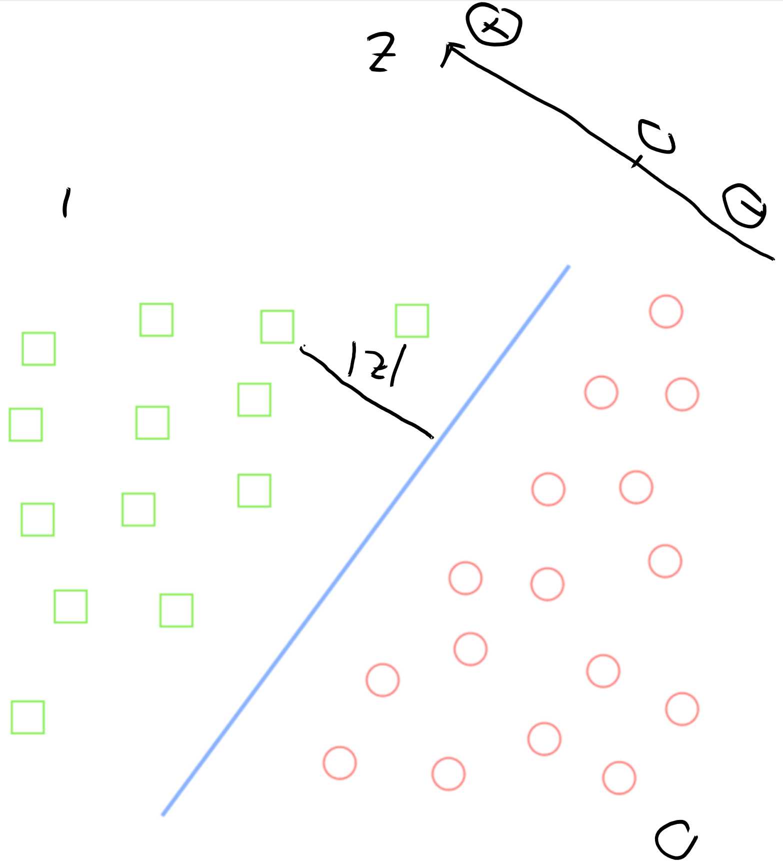
Допустим бинарная классификация



$\rightarrow z \quad (-\infty; +\infty)$

[если z больше $+$, то $y = 1$

[ ] $-$, то $y = 0$



[геометрия ML]

Отношение шансов

Шансы (odds) часто представляют в виде отношения шансов (odds ratio)

Если отношение шансов > 1, то вероятность наступления события выше, чем вероятность того, что оно не произойдет.

Если отношение шансов < 1, то наоборот.

Если можно оценить вероятность положительного события, то отношение шансов выглядит так:

$$odds = \frac{\pi}{1-\pi}$$

Отношение шансов варьируется от 0 до +∞.

Попробуем сами

$(-\infty; +\infty)$

① p_i - [вероятность того, что] $y_i = 1$

$1 - p_i$ - [ ] $y_i = 0$

② $odds = \frac{p_i}{1-p_i}$ $[0; +\infty)$

③. $logit = \ln\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right)$ $(-\infty; +\infty)$

Логиты

Отношение шансов можно преобразовать в логиты(logit):

$$ln(odds) = ln(\frac{\pi}{1-\pi})$$

- Значения логитов − это трансформированные оценки вероятности события.
- Логиты варьируют от $-\infty$ до $+\infty$.
- Логиты симметричны относительно 0, т.е. $ln(1)$.
- Для построения моделей в качестве зависимой переменной удобнее брать логиты.

Считаем вероятность

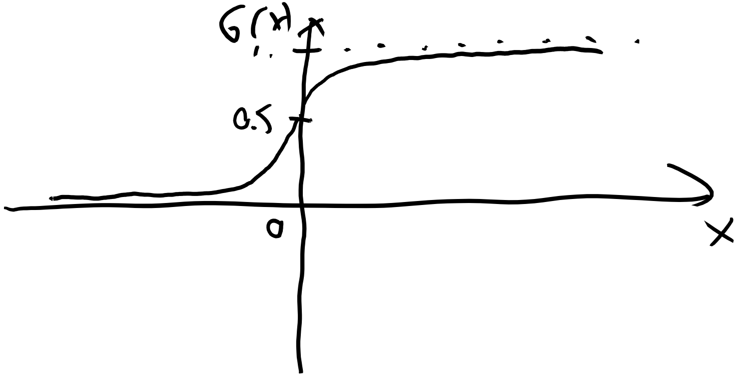
$$\ln\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right) = Xw \quad \Big| \exp$$

$$\frac{p_i}{1-p_i} = e^{Xw}$$

$$p_i = e^{Xw} - p_i e^{Xw}$$

$$p_i(1 + e^{Xw}) = e^{Xw}$$

$$p_i = \frac{e^{Xw}}{1+e^{Xw}} = \frac{1}{e^{-Xw}+1} = \sigma(Xw)$$



Как такое учить? BCE Loss

$$BCE = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} -\left[y_i \cdot \ln p_i + (1-y_i)\cdot \ln(1-p_i)\right]$$

$y_i = \{0, 1\}$

$p_i \in [0, 1]$ $\quad p_i = \sigma(x_i w)$

1) $y_i = 1;\ p_i = 1;\ BCE = 0$

2) $y_i = 1;\ p_i = 0;\ BCE = +\infty$

3) $y_i = 1;\ p_i = 0,5;\ BCE = 0.7$

Как такое учить? BCE Loss

$$\nabla_w BCE = \boxed{X^T \cdot (p - y)}$$

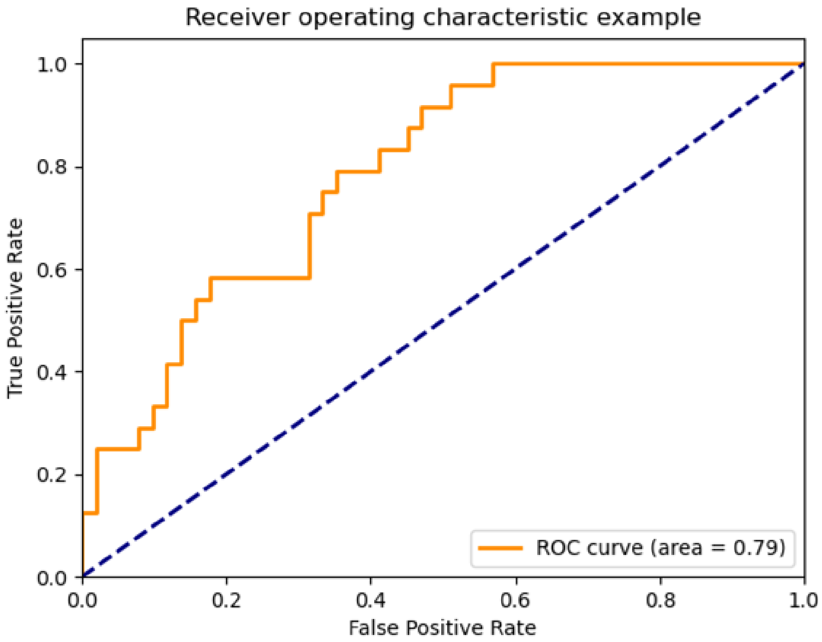
$$p = \sigma(Xw)$$

Качество классификации

Качество классификации. ROC кривая

$$TPR = \frac{TP}{TP+FN} = recall$$

$$FPR = \frac{FP}{FP+TN}$$



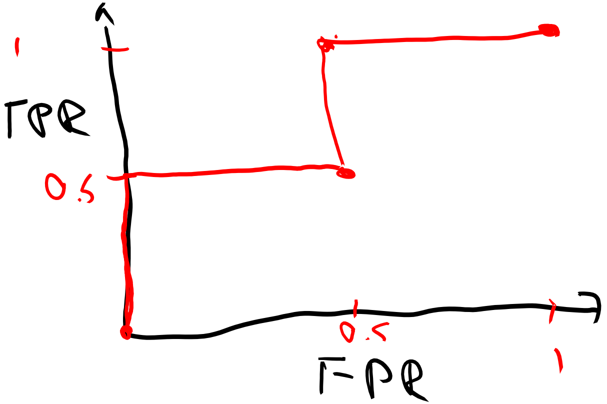
[рисуем свою ROC кривую]

Построение ROC кривой

		пороги					
y	p	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.
1	0.8	1	1	1	1	1	0
0	0.6	1	1	1	1	0	0
1	0.4	1	1	1	0	0	0
0	0.2	1	1	0	0	0	0
	TPR	1	1	1	0.5	0.5	0
	FPR	1	1	0.5	0.5	0	0

$$TPR = \frac{TP}{TP+FN}$$

$$FPR = \frac{FP}{FP+TN}$$



$$\boxed{\text{ROC-AUC} = 0.75}$$