ML на Python

Неделя 3. День 9. Статистика. Тестирование гипотез

(05.03.2024)

Проверка статистических гипотез

Примеры гипотез

Нулевая гипотеза

Средний объем легких у курящих и не курящих людей не различается

Альтернативная гипотеза

Односторонняя

Двусторонняя

Объем легких у курящих людей меньше/больше, чем у некурящих

Объем легких у курящих и не курящих людей различается

Сравнение средних. z-критерий

Формулировка:

$$Z_N = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}$$

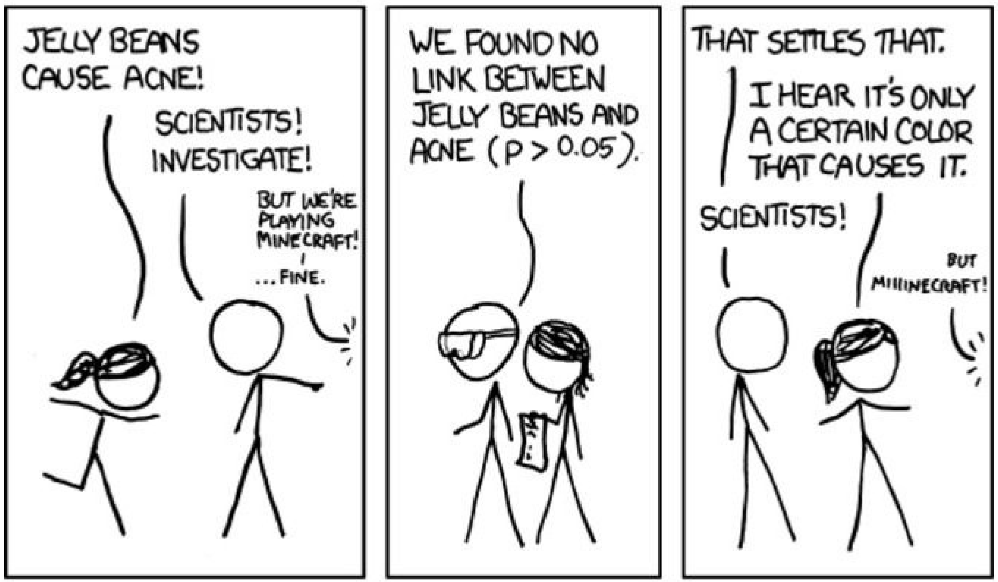
Сравнение средних. z-критерий

Распределение статистики:

$$Z_N = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}$$

p-value

Вероятность получить более экстремальное значение статистики, когда нулевая гипотеза верна



Заблуждения о p-value

1. p-value вероятность того, что верна сама H_0 — нет, расчет производится при условии, что H_0 верна
2. p-value — это вероятность получить такое значение статистики при справедливой H_0 — такое или более экстремальное
3. $p > 0.05$, то различий между группами на самом деле нет (у нас просто нет оснований отклонить нулевую гипотезу)

Ошибки при тестировании гипотез

	H0 верна	H0 не верна
Отклонить H0	Ошибка I рода	
Принять H0		Ошибка II рода

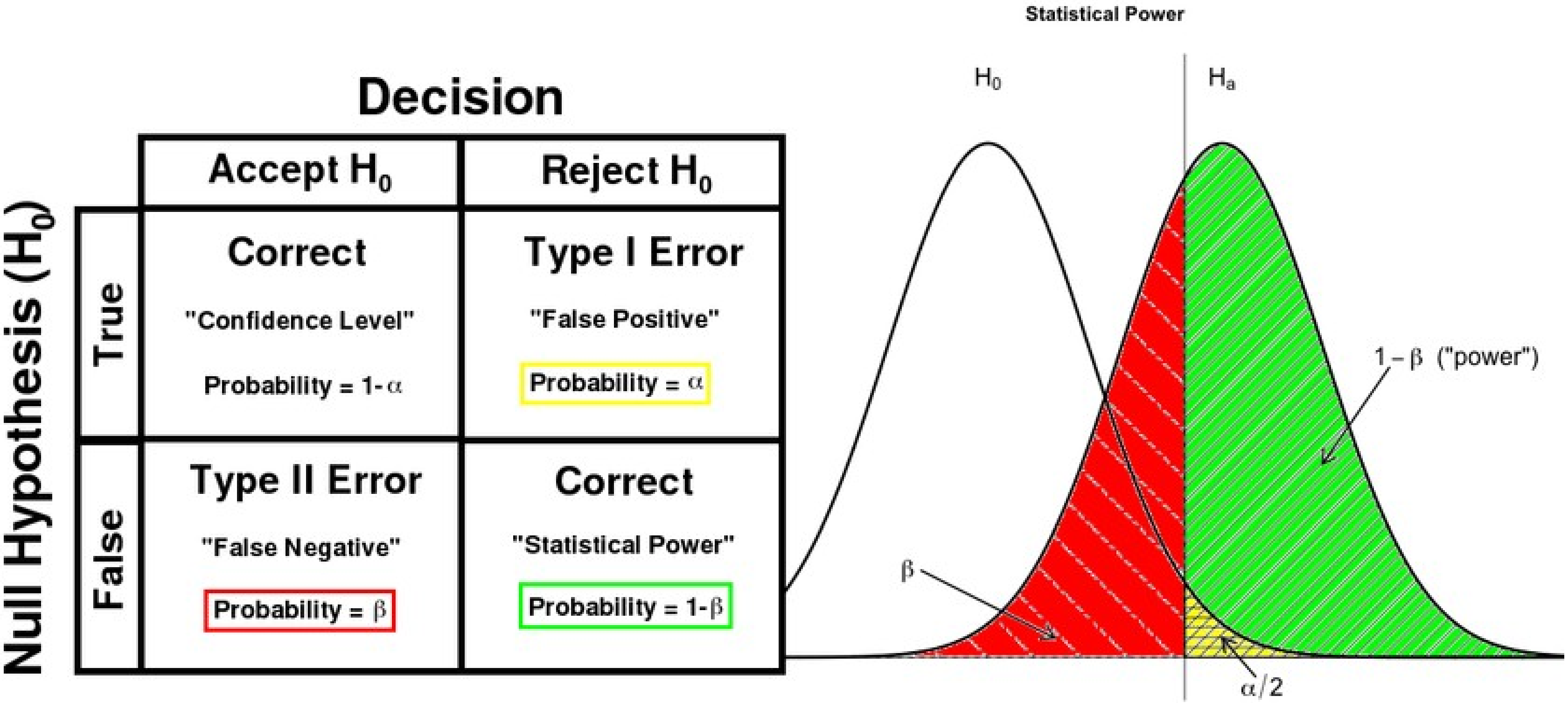
Какая ошибка хуже?...Зависит от ситуации.

В науке считается, что ошибка I рода опаснее, так как нарушает бритву Оккама “не плодить сущности сверх необходимого”.

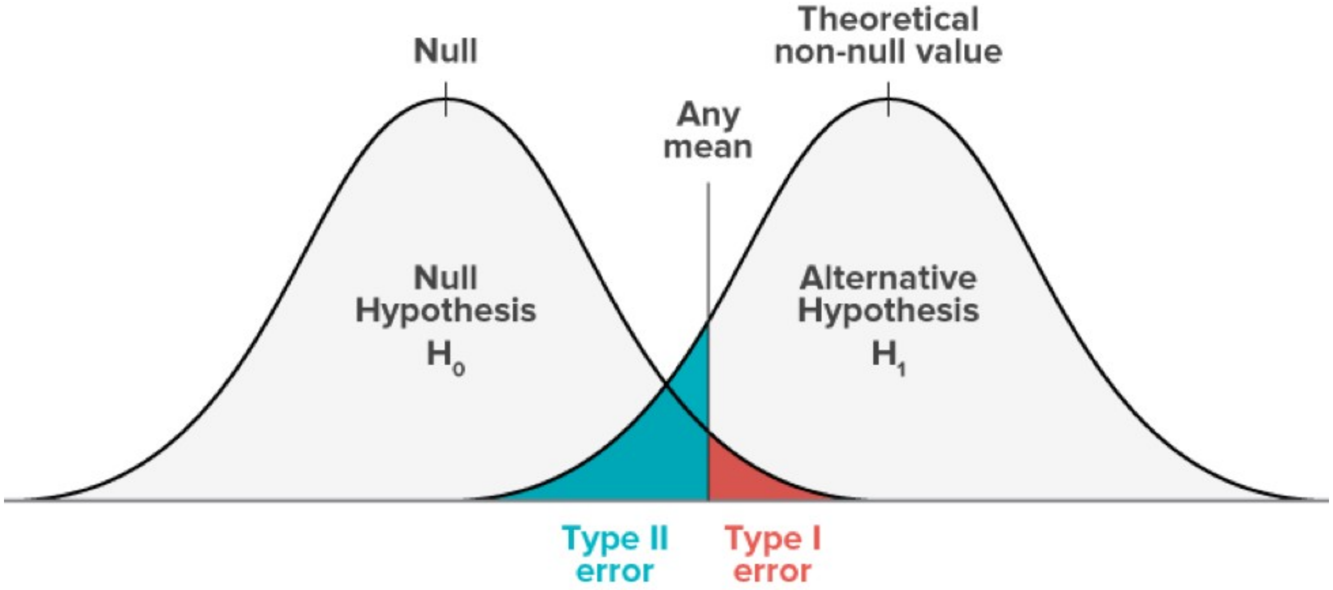
Но в медицине обе ошибки могут стоить очень дорого.

Мощность теста

Мощность теста

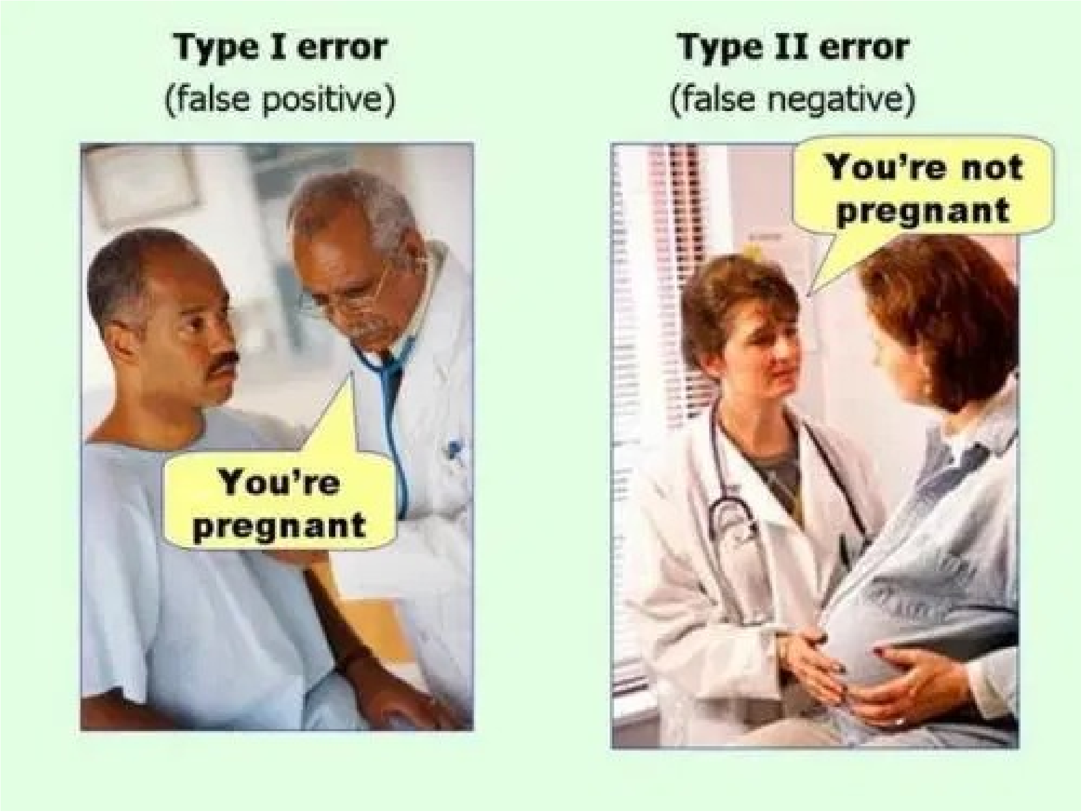


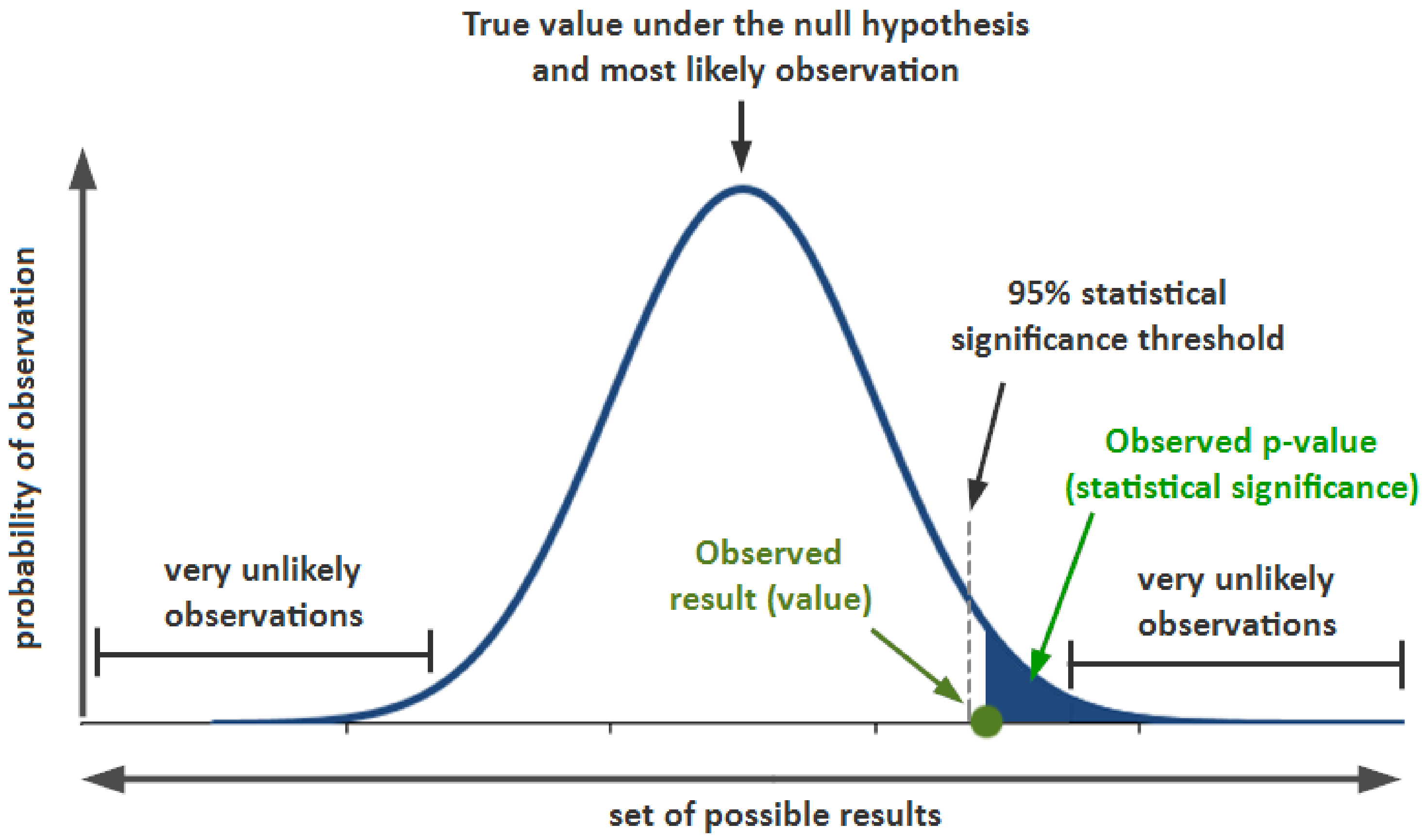
Мощность теста



При увеличении выборки — возрастает

Ошибки при тестировании гипотез




True value under the null hypothesis
and most likely observation
95% statistical
significance threshold
Observed p-value
(statistical significance)
probability of observation
very unlikely
observations
Observed
result (value)
very unlikely
observations
set of possible results

Анализ мощности

A priori

- какой нужен объем выборки, чтобы найти различия с разумной долей уверенности?
- различия какой величины мы можем найти, если известен объем выборки?

Post hoc

- смогли бы мы найти различия при помощи нашего эксперимента (α,n), если бы величина эффекта была X?

Анализ *a priori*

тест	t-критерий
уровень значимости	*alpha*=0.05
желаемая мощность теста	0.8
ожидаемая величина	**???**

Величина эффекта

Коэффициент Коэна

$$d = \frac{\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2}{\sigma}$$

$$d = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{2}}}$$

Effect size	***d***
Very small	0.01
small	0.20
Medium	0.50
Large	0.80
Very large	1.20
Huge	2.0

Как оценить ожидаемую величину эффекта

- Пилотные исследования
- Литература
- Общебиологические знания
- Технические требования

t-тест

t-критерий Стьюдента (одновыборочный)

Смоделируем ситуацию:

В статье показано, что в среднем программист пишет 100 строчек кода в день. Мы провели собственное исследование и мы получили среднее = 110 строк, s = 5.1 (N = 21)

Продуктивнее ли наши программисты?

H_0 — Наши программисты работают также как и все программисты в мире

H_A — Наши программисты продуктивнее обычных программистов

t-критерий Стьюдента (одновыборочный)

Подставляем значения в формулу и получаем t значение = 8.84

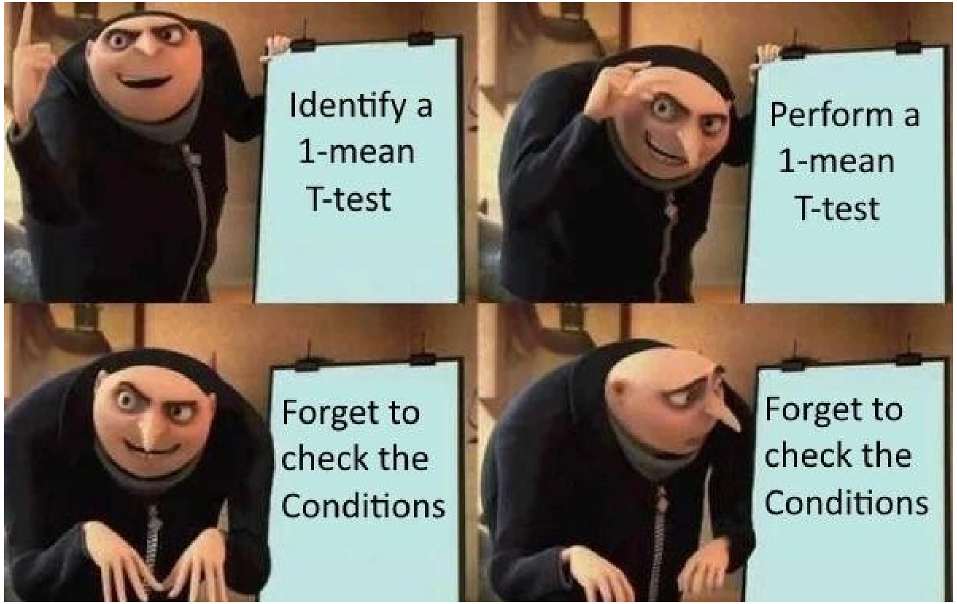
Много это или мало?

$$t = \frac{\overline{X} - m}{s_X / \sqrt{n}}$$

`2 * (1 - pt(8.84, df = 21 - 1))` = 0.00000002410724 - значение p-value

Критерии данных для t-test

- Наблюдения в выборке должны быть независимы друг от друга.
- Объем выборки достаточно велик **или** величины нормально распределены.



t-критерий Стьюдента (двухвыборочный)

H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ — средние значения не различаются в двух группах

H_A: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ — средние значения различаются

Нас интересует **разность выборочных средних**, которая будет равна 0 при верной нулевой гипотезе.

$$t = \frac{\text{Наблюдаемая~величина - Ожидаемое~значение}}{\text{Стандартная~ошибка}}$$

Критерии данных для двухвыборочного t-test

- Наблюдения независимы друг от друга
- Выборки независимы друг от друга
- Объем выборки достаточно велик или величины нормально распределены

Разновидности t-test

Двухвыборочный t-тест используется для проверки значимости различий между средними

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{SE_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{SE_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

стандартная ошибка разности двух средних, может рассчитываться по-разному

- t-тест Стьюдента — если считать, что дисперсии в группах равны
- t-тест Уэлча — если считать, что дисперсии могут быть разными

Разновидности t-test

Однако, если выборки у вас связанные, то необходимо использовать парный t-test. Это необходимо использовать в случае, если наблюдения в выборках взаимосвязаны:

- прием сначала одного, а затем второго препарата
- сравнение групп до и после воздействия

Параметрические критерии

- Предполагают знание о виде распределения случайной величины
- t-критерий Стьюдента — данные должны быть нормально распределены
- Если данных много и они не скошены — можно использовать t-критерий Стьюдента
- А если данных мало или они специфичные?

Непараметрические критерии

Непараметрические критерии

- Не предполагают знание о виде распределения случайной величины
- Не знаем вид распределения нашей выборки — давайте перейдём к другой, но такой, чтобы мы понимали распределение

Критерий знаков

- Проверим, что медиана выборки равна некоторому числу m (одновыборочная версия)
- Не знаем про распределение выборки — не используем абсолютные значения выборки!
- Сравним значения с заданной медианой m — будем получать 0 и 1 (меньше m и больше m)
- Получаем новую бинарную выборку, ожидаем, что $p = 1/2$, так как сравнивали с медианой m
- Биномиальное распределение у новой выборки!

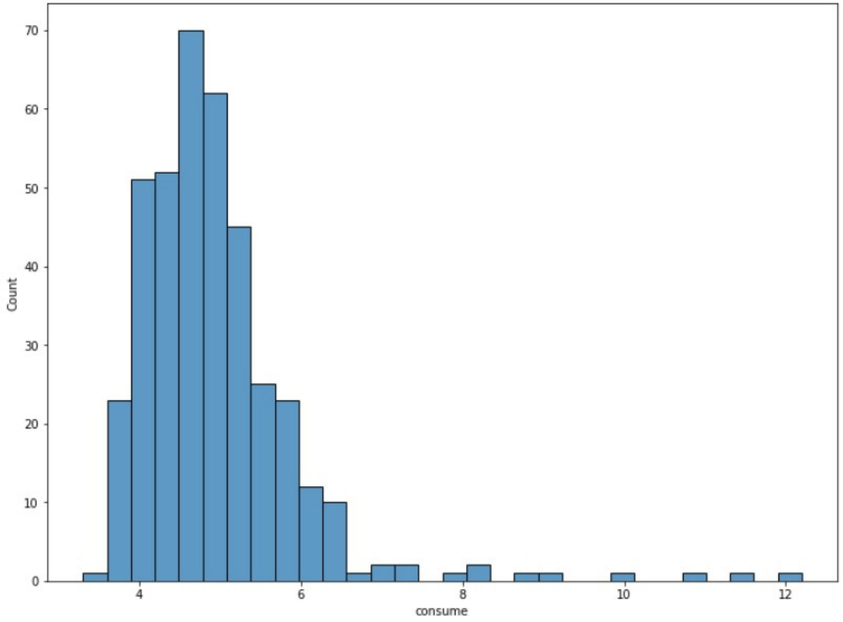
Критерий знаков

- Выборка: $X_1, \ldots, X_N \sim P$ (P — не известно)
- Нулевая гипотеза: $\mathrm{median}(X) = m$
- Альтернативная гипотеза: $\mathrm{median}(X) \neq m$
- Статистика T_N
- Нулевое распределение: $T_N \sim \mathrm{Bin}(N, 1/2)$

$$T_N = \sum_{i=1}^{N} [X_i > m]$$

Критерий знаков

```python
sns.histplot(data["consume"], bins=30);
```



Критерий знаков

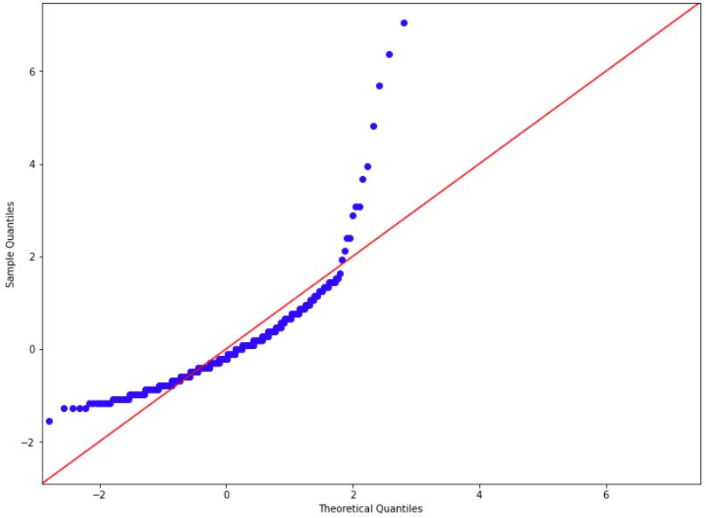
```
[23] from scipy.stats import shapiro

     shapiro(data["consume"])
```

```
ShapiroResult(statistic=0.7749733328819275, pvalue=1.0203466473862174e-22)
```

```
import statsmodels.api as sm

values = (data["consume"] - data["consume"].mean()) / data["consume"].std()
sm.qqplot(values, line="45");
```



Критерий знаков

```
[31] from scipy.stats import binom

     m = 4.85
     N = len(data["consume"])
     tN = (data["consume"] > m).sum()

     binom(n=N, p=0.5).cdf(tN) * 2
```

```
0.028905970266677763
```

```
[32] from statsmodels.stats.descriptivestats import sign_test

     sign_test(data["consume"], mu0=m)
```

```
(-22.0, 0.028905970266677763)
```

Критерий знаков

- Выборка: $X_{11}, \ldots, X_{1N}, X_{21}, \ldots, X_{2N}$ — связанные выборки
- Нулевая гипотеза: $P(X_1 > X_2) = 1/2$
- Альтернативная гипотеза: $P(X_1 > X_2) \neq 1/2$
- Статистика T_N
- Нулевое распределение: $T_N \sim Bin(N, 1/2)$

$$T_N = \sum_{i=1}^{N} [X_{1i} > X_{2i}]$$

Критерий рангов

- Мы превратили выборку в выборку бинарных величин — потеряли часть информации и получили более слабый по мощности критерий
- Промежуточный вариант — отказаться от абсолютных значений, но сохранить порядок в выборке

Ранги

- Вариационный ряд — отсортированная по возрастанию выборка

$$X_1, \ldots, X_N \Rightarrow X_{(1)} \leq \ldots < X_{(k1)} = \ldots = X_{(k2)} < \ldots \leq X_{(N)}$$

- Группы равных элементов — связки
- Если X_i не в связке, то $rank(X_i) = r: X_i = X_{(r)}$
- Если X_i в связке от k_1 до k_2, то $rank(X_i) = (k_1 + k_2) / 2$

Ранги

```
sample = data.head(10).copy()
sample["consume_rank"] = sample["consume"].rank()
sample[["consume", "consume_rank"]]
```

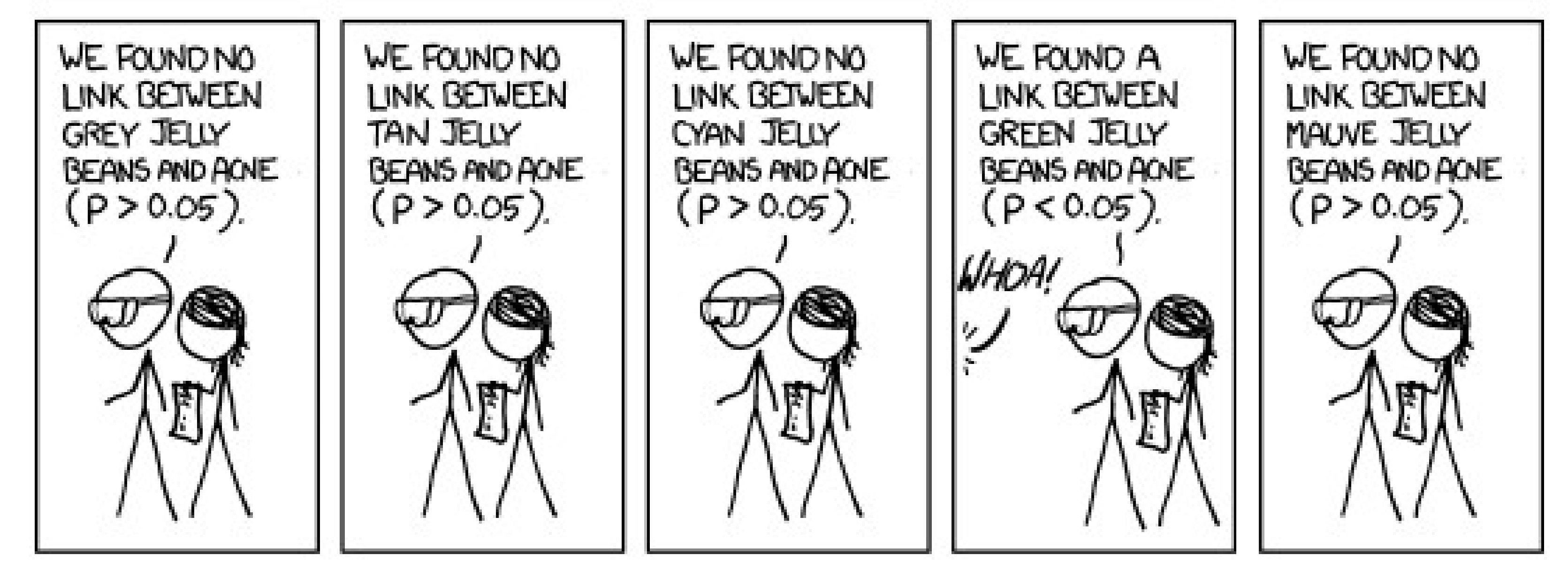
	consume	consume_rank
0	5.0	5.5
1	4.2	2.0
2	5.5	8.0
3	3.9	1.0
4	4.5	4.0
5	6.4	9.5
6	4.4	3.0
7	5.0	5.5
8	6.4	9.5
9	5.3	7.0

Критерий Манна-Уитни-Уилкоксона

- Есть 2 выборки X и Y, измеренных хотя бы в ранговой шкале.
- Выборки должны быть независимы
- H0: P(X > Y) = P(X < Y)
- Для этого вычисляется специальная U-статистика:
    - Честно считаем для всех возможных пар количество случаев, когда $x_i > y_j$, ситуации равенства считаем за 0.5, получим U1
    - Аналогично, перевернув знак, считаем U2
    - В качестве U берем минимум из этих величин
- Есть и другие методы подсчета U, менее вычислительно громоздкие

Для U-статистики есть специальные таблицы, дающие p-value по n_1 и n_2, однако для больших объемов выборок статистика имеет близкое к нормальному распределение.

Множественная проверка



Множественная проверка гипотез

- Научились проверять одну гипотезу
- А если гипотез не 1, а 100?

Множественная проверка гипотез

- Выбранный уровень значимости ($\alpha = 0.05$)
  - в теории - вероятность ложно отвергнуть нулевую гипотезу
  - на практике - шансы посчитать, что ваш препарат работает, когда это не так
- Что происходит, если гипотез 10?

Множественная проверка гипотез

- Оценим шансы ложно принять хотя бы 1 препарат за работающий
- Вероятность правильно не принять 1 препарат: $(1 - \alpha)$
- Вероятность правильно не принять 10 препаратов: $(1 - \alpha)^{10}$
- Вероятность ложно принять хотя бы 1 из 10 препаратов: $1 - (1 - \alpha)^{10}$

- Для 10 препаратов, $\alpha = 0.05$: $P = 0.40126$

Множественная проверка гипотез

- Для 10 препаратов, $\alpha = 0.05$: $P = 0.40126$
- То есть вероятность ошибки первого рода 0.4!

- Если $N = 100$: $P = 0.99408$
- То есть найдется хотя бы 1 препарат, который будет лучше плацебо (но просто случайно)

Ошибка первого рода

- Ранее хотели ошибку первого рода α
- Теперь хотим того же, но для группы экспериментов

- Групповая ошибка первого рода: FWER(V > 0)
- V — число ложноотвергнутых гипотез
- FamilyWise Error Rate

- Цель: $FWER(V > 0) \leq \alpha$
- Как добиться? Подобрать α_i для проверки гипотезы H_i

Поправка Бонферрони

- Возьмём новые уровни значимости: $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = \alpha / m$
- Вспомним вероятность отвергнуть хотя бы 1 из N гипотез: $1 - (1 - \alpha_i) ^\wedge N = 1 - (1 - \alpha/N) ^\wedge N$
- Для N=10: 0.04889 ≈ 0.05
- Для N=100: 0.04878 ≈ 0.05

- Однако сильно уменьшает мощность тестов (то есть возможность детектировать эффект при его наличии)

Нисходящие методы проверки

- Посчитали уровни значимости для гипотез $H_1, \dots, H_m$
- Отсортируем их и соответствующие им гипотезы:
- $p_{(1)} \le \dots \le p_{(m)}$ $H_{(1)}, \dots, H_{(m)}$
- Проверять будем по следующему алгоритму:
  - Если $p_{(1)} > \alpha_{(1)}$, то принимаем все нулевые гипотезы $H_{(1)}, \dots, H_{(m)}$, иначе отвергаем $H_{(1)}$ и проверяем дальше
  - Если $p_{(2)} > \alpha_{(2)}$, то принимаем все нулевые гипотезы $H_{(2)}, \dots, H_{(m)}$, иначе отвергаем $H_{(2)}$ и проверяем дальше
  - …

Метод Холма

- Обеспечивает FWER на уровне α

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{m}$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha}{m-1}$$

$$\alpha_i = \frac{\alpha}{m-i+1}$$

$$\alpha_m = \alpha$$