



Modelación Numérica de Sistemas Estocásticos

Daniel Otero Fadul

*Departamento de Matemáticas y Ciencia de Datos
Escuela de Ingeniería y Ciencias*

Los **métodos de Monte Carlo** son algoritmos computacionales en los cuales se usa el azar para resolver problemas que, generalmente, son determinísticos, pero cuya solución por métodos convencionales puede ser muy compleja o prácticamente imposible.

Estos métodos, como veremos, se basan en un importante resultado conocido como la **ley de los grandes números**: sean $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una colección de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Si su momento de primer orden es finito, es decir, $\forall i \in \mathbb{N}, E(X_i) = \mu$, entonces

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \rightarrow \mu$$

converge con probabilidad uno a medida que $n \rightarrow \infty$.

Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Supongamos que queremos calcular

$$\theta = \int_0^1 g(x) dx.$$

Nótese que esta integral se puede interpretar como $E(g(U))$, donde $U \sim U(0, 1)$.
Entonces

$$\theta = E(g(U)).$$

Supongamos que $\{U_i\}_{i=1}^n$ es una colección de variables aleatorias uniformes independientes que toman valores en el intervalo $[0, 1]$. Entonces, la colección $\{g(U_i)\}_{i=1}^n$ es también una colección de variables independientes e idénticamente distribuidas con valor esperado igual a θ . Por lo tanto, por la ley fuerte de los grandes números, tenemos que, con probabilidad uno,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(U_i) = E(g(U)) = \theta.$$

El método anterior se puede adaptar para calcular integrales de la forma

$$\theta = \int_a^b g(x)dx.$$

Si hacemos la sustitución $y = \frac{x-a}{b-a}$ tenemos que

$$\theta = \int_0^1 h(y)dy,$$

donde $h(y) = (b-a)g(a + (b-a)y)$. Por lo tanto, si tenemos una colección $\{U_i\}_{i=1}^n$ de variables aleatorias uniformes independientes e idénticamente distribuidas en el intervalo $[0, 1]$, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(U_i) = E(h(U)) = \theta.$$

De manera similar, por medio de la sustitución $y = \frac{1}{x+1}$, podemos calcular integrales impropias de la siguiente forma:

$$\theta = \int_0^{\infty} g(x) dx.$$

En este caso, se tiene que

$$\theta = \int_0^1 h(y) dy,$$

donde $h(y) = \frac{g\left(\frac{1}{y}-1\right)}{y^2}.$

Lo anterior se puede extender para el caso en que queremos calcular la integral de una función de varias variables:

$$\theta = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 g(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 dx_2 \dots dx_k.$$

Nótese que $\theta = E(g(U_1, U_2, \dots, U_k))$, donde $\{U_i\}_{i=1}^k$ son variables aleatorias uniformes independientes que toman valores en el intervalo $[0, 1]$. Esto implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(U_{1i}, U_{2i}, \dots, U_{ki}) = E(g(U_1, U_2, \dots, U_k)) = \theta.$$

Utilizando los conceptos anteriores, podemos implementar un método para estimar el valor de π . Sean X y Y dos variables independientes uniformes tales que $X \sim Y \sim U(-1, 1)$. Entonces, su función de probabilidad conjunta está dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & (x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1], \\ 0, & (x, y) \notin [-1, 1] \times [-1, 1]. \end{cases}$$

Por otro lado, sea I la siguiente variable aleatoria:

$$I = \begin{cases} 1, & X^2 + Y^2 \leq 1, \\ 0, & X^2 + Y^2 > 1. \end{cases}$$

Entonces, el promedio de n realizaciones de la variable aleatoria I converge a $\pi/4$ a medida que $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_1 + I_2 + \cdots + I_n}{n} = E(I) = P(X^2 + Y^2 \leq 1) = \frac{\pi}{4}.$$

Monte Carlo

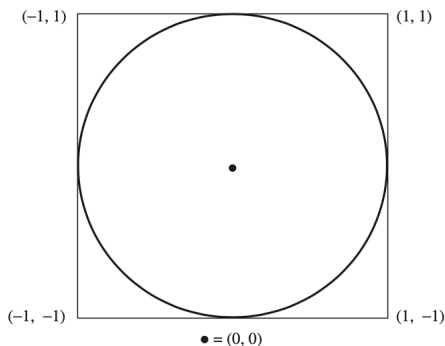


Figura: Si definimos $X = 2U_1 - 1$ y $Y = 2U_2 - 1$, donde $U_1 \sim U_2 \sim U(0,1)$, la proporción de puntos que caen dentro del círculo de radio uno sobre el total de puntos generados aleatoriamente converge a la cuarta parte de π . Imagen tomada de [1].

Recocido Simulado

El recocido simulado, también conocido como “simulated annealing” en inglés, es un método de Monte Carlo que se utiliza en optimización para la minimización, o maximización, de alguna función objetivo. Fue propuesto como un método alternativo que puede salir de, por ejemplo, mínimos locales, sin embargo, no está garantizado que encuentre el mínimo global de una función.

El pseudoalgoritmo del método de recocido simulado para minimizar una función objetivo f es el siguiente:

inicializar x_0 , temperatura inicial $T > 0$, $\alpha \in (0, 1)$;

repetir n veces

elegir aleatoriamente un vecino x de x_0 ;

$\Delta = f(x) - f(x_0)$;

si $\Delta \leq 0$;

$x_0 = x$;

si $\Delta > 0$;

$x_0 = x$ con probabilidad $e^{-\frac{\Delta}{T}}$;

$T = \alpha T$;

retornar x_0 .

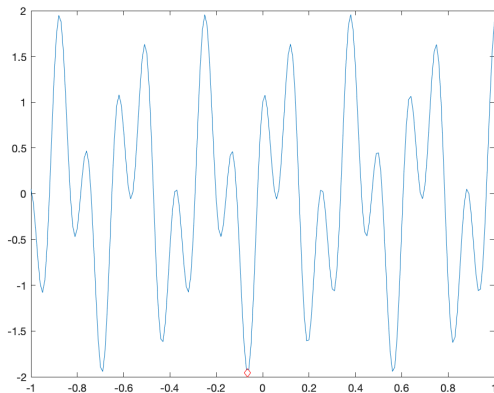


Figura: Minimización de la función $f(x) = \sin(20x) + \cos(50x)$ utilizando el método de recocido simulado. El diamante en rojo muestra el mínimo que se encontró numéricamente.

BIBLIOGRAFÍA

- 1 Ross S., *"Simulation"*, Quinta Edición, Elsevier, 2013.
- 2 Johnson, David S., Cecilia R. Aragon, Lyle A. McGeoch, and Catherine Schevon, *"Optimization by simulated annealing: An experimental evaluation; part I, graph partitioning,"* Operations research 37, no. 6 (1989): 865-892.