Modelación Numérica de Sistemas Estocásticos

Daniel Otero Fadul

Departamento de Matemáticas y Ciencia de Datos
Escuela de Ingeniería y Ciencias

Axiomas de la Probabilidad

Un **experimento aleatorio** es un procedimiento bien definido que produce un resultado observable que no se puede predecir con antelación. Sea Ω el conjunto que contiene todos los resultados posibles de un experimento aleatorio; a este conjunto se le conoce como **espacio muestral**. Cualquier subconjunto de Ω se le llama **evento**.

Por ejemplo, lanzar una moneda dos veces es un experimento aleatorio que tiene el siguiente espacio muestral:

$$\Omega = \{SS, SC, CS, CC\},$$

donde S y C hacen referencia a que un lanzamiento haya sido "sello" o "cara", respectivamente. Un posible evento de este experimento es $A = \{CC\}$.

Nótese que, ya que los eventos son conjuntos, todas las operaciones de conjuntos son válidas también para eventos.

Axiomas de la Probabilidad

La probabilidad de un evento A es una medida de qué tan probable es que ocurra dicho evento. Esta medida debe cumplir con los siguientes axiomas:

- $\forall A \subseteq \Omega$, $P(A) \in [0,1]$.
- $P(\Omega) = 1$.
- Para toda colección contable de eventos disyuntos $\{A_i\}_{i=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$,

$$P\left(\cup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Axiomas de la Probabilidad

Estos axiomas se utilizan para definir y probar distintos resultados en probabilidad. Por ejemplo, podemos calcular la probabilidad del complemento de un evento A:

$$\begin{aligned} 1 &= P(\Omega) \\ &= P(A \cup A^c) \\ &= P(A) + P(A^c). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Sea $A = \{CC\}$. Asumiendo que cada posible resultado de Ω tiene la misma probabilidad de ocurrir, tenemos que

$$\begin{aligned} P(A^c) &= 1 - P(A) \\ &= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Probabilidad Condicional

Sean A y B dos eventos que pertenecen a un espacio muestral Ω. La probabilidad de que ocurra el vento A dado que se sabe que el evento B ocurrió se define como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Si A y B son independientes, se tiene que $P(A|B) = P(A)$, lo que implica que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Probabilidad Condicional

Retomemos el experimento de la moneda. El espacio muestral está dado por $\Omega = \{SS, SC, CS, CC\}$. Sea A el evento de que al menos un lanzamiento fue cara, y sea B el evento de que al menos uno de dos lanzamientos fue sello. ¿A qué es igual $P(A|B)$?

Tenemos que $A = \{SC, CS, CC\}$ y $B = \{SS, SC, CS\}$. Por lo tanto, $A \cap B = \{SC, CS\}$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\
&= \frac{P(\{SC\}) + P(\{CS\})}{P(\{SS\}) + P(\{SC\}) + P(\{CS\})} \\
&= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

Probabilidad Total

Sea $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ una colección de eventos mutuamente excluyentes que forman una partición del espacio muestral: $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ y $\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$. Entonces, para cualquier evento $B \subset \Omega$, tenemos que

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B) \\ &= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \cdots + P(B|A_n)P(A_n). \end{aligned}$$

Nótese que $\forall i, \; P(A_i) > 0$.

Probabilidad Total

Papá Noel empaca los juguetes que reparte en Navidad en cajas que contienen veinte juguetes. Suponga que el 60% de todas las cajas que reparte Papá Noel no contienen juguetes defectuosos, 30% contienen sólo un juguete defectuoso, y 10% contienen dos juguetes defectuosos. Si se elige una caja al azar, ¿cuál es la probabilidad de elegir aleatoriamente, sin reemplazo, dos juguetes sin defectos?

Probabilidad Total

Sean C_0, C_1 y C_2 los eventos de caja con cero juguetes defectuosos, caja con un juguete defectuoso y caja con dos juguetes defectuosos, respectivamente. Sea J_0 el evento de sacar dos juguetes sin defectos de una caja. Entonces,

$$\begin{aligned}
P(J_0) &= P(J_0|C_0)P(C_0) + P(J_0|C_1)P(C_1) + P(J_0|C_2)P(C_2) \\
&= (1)\left(\frac{6}{10}\right) + \left(\frac{19}{20}\frac{18}{19}\right)\left(\frac{3}{10}\right) + \left(\frac{18}{20}\frac{17}{19}\right)\left(\frac{1}{10}\right) \\
&= \frac{903}{950} = 0.9505\ldots
\end{aligned}$$

Teorema de Bayes

Sea $\{A_i\}_{i=1}^n$ una colección de eventos mutuamente excluyentes que forman una partición del espacio muestral: $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$, $\cup_{i=1}^n A_i = \Omega$ y $P(A_i) > 0$ $\forall i$. Entonces, para cualquier evento $B \subset \Omega$ tal que $P(B) > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} P(A_i|B) &= \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \cdots + P(B|A_n)P(A_n)}. \end{aligned}$$

Teorema de Bayes

Cuando la partición de Ω es de solo dos elementos ($A \cup \bar{A} = \Omega$), tenemos el siguiente caso especial:

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})}. \end{aligned}$$

Teorema de Bayes

Sean C_0, C_1 y C_2 los eventos de caja con cero juguetes defectuosos, un juguete defectuoso y dos juguetes defectuosos, respectivamente. Sea J_0 el evento de sacar dos juguetes sin defectos de una caja. Entonces, para responder la primera pregunta, necesitamos calcular $P(C_0|J_0)$:

$$
\begin{aligned}
P(C_0|J_0) &= \frac{P(J_0|C_0)P(C_0)}{P(J_0|C_0)P(C_0)+P(J_0|C_1)P(C_1)+P(J_0|C_2)P(C_2)} \\
&= \frac{(1)\left(\frac{6}{10}\right)}{(1)\left(\frac{6}{10}\right)+\left(\frac{19}{20}\frac{18}{19}\right)\left(\frac{3}{10}\right)+\left(\frac{18}{20}\frac{17}{19}\right)\left(\frac{1}{10}\right)} \\
&= 0.631229\ldots
\end{aligned}
$$

Variables Aleatorias

Una variable aleatoria es una variable cuyos valores dependen de un fenómeno aleatorio. Más formalmente, una variable aleatoria $X : \Omega \to E$, donde E es algún espacio medible, es una función que le asigna a cada elemento del espacio muestral Ω un número entero o real. Por ejemplo, para el experimento de la moneda, podríamos definir a X como la siguiente variable aleatoria:

X
$SS \to 0$
$SC \to 1$
$CS \to 2$
$CC \to 3$

Variables Aleatorias Discretas

Una variable aleatoria es discreta si el conjunto de valores que toma es *contable*. Justamente, la variable que definimos en la diapositiva anterior es un ejemplo de variable aleatoria discreta.

Variables Aleatorias Discretas

Toda variable aleatoria discreta tiene asociada una **función de masa de probabilidad**, la cual le asigna probabilidades a cada valor que puede tomar la variable aleatoria. Esta función $f : E \to \mathbb{R}$ debe cumplir con las siguientes condiciones:

- $\forall x \in E,\ f(x) \geq 0.$
- $\sum_x f(x) = 1.$
- $P(X = x) = f(x).$

Además, asociada a la función de masa de probabilidad tenemos la **función de distribución acumulada**:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y \leq x} f(y).$$

Por ejemplo, volviendo a la moneda que lanzamos dos veces, la función de masa de probabilidad sería igual a

$$f(x) = \frac{1}{4},\ x = 0, 1, 2, 3. \tag{1}$$

Nótese que $f(1) = P(X = 1) = P(\{SC\})$.

Variables Aleatorias Continuas

Una variable aleatoria es continua si el conjunto de valores que toma es *no contable*. Por ejemplo, la temperatura de una habitación o el tiempo que esperamos la llegada de un bus en una estación son ejemplos de variables aleatorias continuas.

Variables Aleatorias Continuas

Toda variable aleatoria continua tiene asociada una **función de densidad de probabilidad**. Esta función $f : E \to \mathbb{R}$ debe cumplir con las siguientes condiciones:

- $\forall x \in E,\ f(x) \geq 0$.
- $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$.
- $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$.

La función de densidad de probabilidad también tiene asociada una **función de distribución acumulada**:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy.$$

Nótese que

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x).$$

Variables Aleatorias Continuas

Consideremos la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^2, & -1 < x < 2 \\ 0, & x \notin (-1, 2) \end{cases} \tag{2}$$

¿A qué es igual $P(0 < X < 1)$?

$$\begin{aligned} P(0 < X < 1) &= \int_0^1 \frac{1}{3}x^2 dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 x^2 dx \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1\right) \\ &= \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Función de Probabilidad Conjunta

Los conceptos anteriores se pueden extender para incluir funciones que muestren las relaciones que existen entre dos variables aleatorias o más. Si tenemos dos variables aleatorias discretas X y Y, se puede definir la **función de masa de probabilidad conjunta** de la siguiente forma:

$$P(X = x, Y = y) = f(x, y).$$

En el caso de que X y Y sean variables aleatorias continuas, tenemos que

$$P(X \in A, Y \in B) = \int_B \int_A f(x, y) dxdy,$$

donde $f(x, y)$ es la **función de densidad de probabilidad conjunta**.

Función de Probabilidad Conjunta

Se puede demostrar, para variables aleatorias discretas, que X y Y son independientes si y solo si

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y),$$

para todo x y y, donde f_X y f_Y son las funciones de masa de probabilidad de las variables X y Y, respectivamente.

De manera similar, si X y Y son variables aleatorias continuas, estas son independientes si y solo si, para todo x y y,

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y),$$

donde f_X y f_Y son las funciones de densidad de probabilidad de las variables X y Y, respectivamente.

Valor Esperado

El valor esperado de una variable aleatoria discreta se define como

$$E(X) = \sum_{x} x f(x).$$

Este se puede entender como un promedio o como un parámetro de localización: el valor en el que nuestra función de masa de probabilidad está “centrada” o ubicada.

Valor Esperado

Volviendo a recordar la función de masa de probabilidad del experimento aleatorio de la moneda, tenemos que el valor esperado de X es igual a

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=0}^{3} x f(x) \\
&= (0)\frac{1}{4} + (1)\frac{1}{4} + (2)\frac{1}{4} + (3)\frac{1}{4} \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

Valor Esperado

En el caso de una variable aleatoria continua tenemos que

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx.$$

Vale la pena mencionar que el valor esperado también se conoce como el *momento de primer orden* de la variable aleatoria X.

Valor Esperado

Para la función de densidad de probabilidad que mencionamos anteriormente tenemos que

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-1}^{2} x\left(\frac{1}{3}x^2\right)dx \\ &= \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} x^3 dx \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{2}\right)dx \\ &= \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Valor Esperado

Vale la pena mencionar que el valor esperado tiene las siguientes propiedades:

- $\forall a \in \mathbb{R}$, $E(aX) = aE(X)$.
- Sean X_1 y X_2 variables aleatorias. Entonces, $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$.
- Para una variable aleatoria discreta X, $E(g(X)) = \sum_x g(x)f(x)$.
- De manera similar, para una variable aleatoria continua X, tenemos que $E(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)dx$.

Varianza

La varianza de una variable aleatoria X es una medida de dispersión de esta alrededor de su media o valor esperado. Esta se define como

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= E((X - E(X))^2) \\ &= E(X^2) - (E(X))^2.\end{aligned}$$

Esta medida de dispersión tiene estas propiedades:

- $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.
- Si X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes,

$$\mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2).$$

Varianza

Para la variable aleatoria X con función de masa de probabilidad definida en (1), tenemos que la varianza es igual a

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
&= \sum_{x=0}^{3} x^2 f(x) - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\
&= (0^2)\frac{1}{4} + (1^2)\frac{1}{4} + (2^2)\frac{1}{4} + (3^2)\frac{1}{4} - \frac{9}{4} \\
&= \frac{5}{4}.
\end{aligned}
$$

Varianza

La varianza de la variable aleatoria continua X, cuya función de densidad de probabilidad está definida en (2), es igual a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
&= \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} x^4 dx - \left(\frac{5}{4}\right)^2 \\
&= \frac{1}{3}\left(\left.\frac{x^5}{5}\right|_{-1}^{2}\right) - \frac{25}{16} \\
&= \frac{11}{5} - \frac{25}{16} = \frac{51}{80}.
\end{aligned}$$

Distribución de Bernoulli

Para la distribución de Bernoulli tenemos una variable aleatoria X que solo toma dos valores: X es igual a 1 con probabilidad p e igual a 0 con probabilidad $1 - p$. Su función de masa de probabilidad es igual a

$$f(x) = \begin{cases} 1 - p, & x = 0 \\ p, & x = 1 \end{cases}$$

Distribuciones de Probabilidad

Además, tenemos que

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{1} x f(x) \\ &= (0)(1-p) + (1)p = p. \end{aligned}$$

En cuanto a la varianza, está es igual a

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \sum_{x=0}^{1} x^2 f(x) - p^2 \\ &= (0^2)(1-p) + (1^2)p - p^2 = p(1-p). \end{aligned}$$

Distribución Binomial

Sea $\{X_i\}_{i=1}^n$ una colección de variables de Bernoulli independientes e idénticamente distribuidas. La variable aleatoria binomial X se define como

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

En este caso, la función de masa de probabilidad está dada por

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \; x = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Distribuciones de Probabilidad

El valor esperado de X se puede calcular de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} E(X) &= E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \\ &= np. \end{aligned}$$

De manera similar, tenemos que la varianza es igual a

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) \\ &= np(1-p). \end{aligned}$$

Distribuciones de Probabilidad

Supongamos que lanzamos una moneda diez veces. Si asumimos que en cada lanzamiento la probabilidad de que salga cara y sello es la misma, es decir, $p = 1/2$ y $n = 10$, ¿cuál es la probabilidad de que en seis lanzamientos salga cara?

Esto es equivalente a calcular $P(X = 6)$:

$$
\begin{aligned}
P(X = 6) &= f(6) \\
&= \binom{10}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-6} \\
&= \frac{10!}{(10-6)!6!} \left(\frac{1}{64}\right) \left(\frac{1}{16}\right) \\
&= \frac{105}{512}
\end{aligned}
$$

Distribución Uniforme

Una de las distribuciones más simples es la distribución uniforme. La variable aleatoria continua X asociada a esta distribución toma valores en un intervalo acotado de la recta real. La función de densidad de probabilidad es igual a

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$

La función de distribución acumulativa está dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Distribuciones de Probabilidad

El valor esperado de X es igual a

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)dx \\ &= \int_a^b \frac{x}{b-a}dx \\ &= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

La varianza está dada por

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} \\ &= \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

Distribuciones de Probabilidad

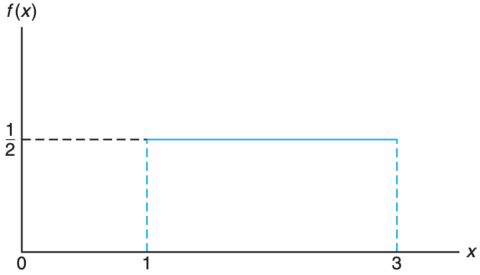

Figura: Gráfica de una función de densidad de probabilidad uniforme para una variable aleatoria que toma valores en el intervalo $[1, 3]$. Imagen tomada de [2].

Distribución Normal

La distribución más importante en estadística es la distribución normal, también conocida como distribución Gaussiana en honor a Karl Friedrich Gauss. La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria normal X está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

donde $\mu = E(X)$ y $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$.

Distribuciones de Probabilidad

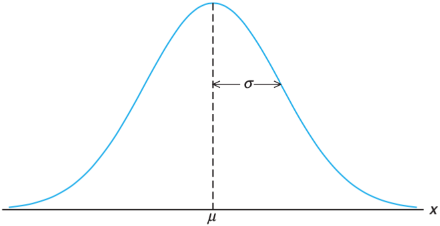

Figura: Gráfica de la distribución normal con parámetros μ y σ. Imagen tomada de [2].

Sea X una variable aleatoria normal con $\mu = 50$ y $\sigma = 10$. ¿Cuál es la probabilidad de que X tome valores entre 45 y 62?

$$
\begin{aligned}
P(45 < X < 62) &= P\left(\frac{45-50}{10} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{62-50}{10}\right) \\
&= P\left(-\frac{1}{2} < Z < \frac{6}{5}\right) \\
&= P\left(Z < \frac{6}{5}\right) - P\left(Z < -\frac{1}{2}\right) \\
&= 0.8849 - 0.3085 = 0.5764.
\end{aligned}
$$

BIBLIOGRAFÍA

1 Ross S., *"Simulation"*, Quinta Edición, Elsevier, 2013.

2 Walpole R. E., Myers R. H., Myers S. L., Keying Y., *"Probability and Statistics for Engineers and Scientists"*, 9th Edition, Prentice Hall, 2012.