Modelación Numérica de Sistemas Estocásticos

Daniel Otero Fadul

Departamento de Matemáticas y Ciencia de Datos
Escuela de Ingeniería y Ciencias

Generación de Números Aleatorios

La generación de números aleatorios es una de las herramientas más importantes a la hora de hacer simulaciones. Hay diversas técnicas para hacer esto, pero estas normalmente se construyen a partir de la generación de **números pseudoaleatorios** que, aunque son generados determinísticamente, se comportan como variables aleatorias uniformes independientes que toman valores en el intervalo $[0, 1]$.

Generación de Números Aleatorios

Uno de los métodos más comunes para generar estos números pseudoaleatorios se basa en partir de una **semilla** x_0 y, recursivamente, generar una secuencia de números x_n definidos como

$$x_n = ax_{n-1} \mod m, \; n = 1, 2, \ldots,$$

donde a y m son enteros positivos y x_n es el residuo de la división de ax_{n-1} sobre m. Esto implica que $x_n \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$, así que la cantidad x_n/m es una aproximación del valor que tomaría una variable aleatoria uniforme definida en el intervalo $[0, 1]$.

Generación de Números Aleatorios

Los números a y m deben satisfacer tres criterios:

- Para cualquier x_0, la secuencia $\{x_n\}_{i=1}^{n}$ debe asemejarse a la secuencia generada por variables aleatorias uniformes independientes que toman valores en el intervalo $[0, 1]$.
- Para cualquier x_0, la cantidad de números pseudoaleatorios que pueden ser generados antes de que se produzca una repetición debe ser considerablemente grande.
- Estos números pueden ser calculados eficientemente en un computador.

Para satisfacer estos criterios es común que m sea un número primo grande. Por ejemplo, para un computador de 32 bits, una opción es $m = 2^{31} - 1$ y $a = 7^5$.

Generación de Números Aleatorios

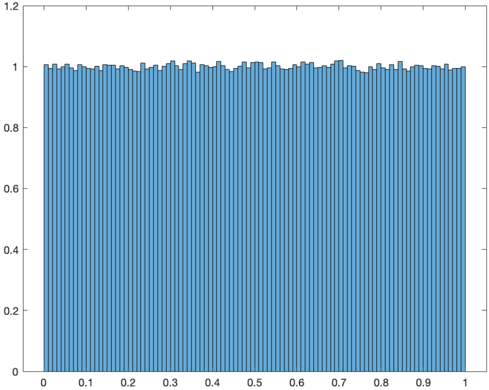

Figura: Histograma de la generación de un millón de números aleatorios utilizando el método descrito anteriormente con $x_0 = 1$, $a = 7^5$ y $m = 2^{31} - 1$.

Generación de Números Aleatorios

Por cierto, si queremos generar número aleatorios sigan una distribución uniforme de la forma $U(a, b)$ podemos utilizar la siguiente transformación:

$$\hat{U} = a + (b - a)U,$$

donde $U \sim U(0, 1)$.

Variable Aleatoria de Bernoulli

Una forma simple de generar una secuencia de n números aleatorios que sigan una distribución de Bernoulli con parámetro p es la siguiente: generar la secuencia $\{U_i\}_{i=1}^n$, donde cada U_i se genera utilizando la técnica ya mencionada. Para crear la secuencia $\{X_i\}_{i=1}^n$, cada X_i se define como

$$X_i = \begin{cases} 1, & U_i \leq p, \\ 0, & U_i > p. \end{cases}$$

Método de la Transformada Inversa

La idea anterior se puede extender para generar número aleatorios que sigan una distribución arbitraria. Sea $f : E \to \mathbb{R}$ alguna función de masa de probabilidad tal que $f(x) = P(X = x)$, $x = x_0, x_1, \ldots$. Entonces, el valor que tomaría la variable aleatoria discreta X con función de masa de probabilidad f se puede definir como

$$X = \begin{cases} x_0, & U < F(x_0), \\ x_1, & F(x_0) \leq U < F(x_1), \\ & \vdots \\ x_i, & F(x_i) \leq U < F(x_{i+1}), \\ & \vdots \end{cases}$$

donde $U \sim U(0,1)$.

Variable Aleatoria de Poisson

La función de masa de probabilidad de una variable aleatoria de Poisson X con parámetro λ se define como

$$p_n = P(X = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots$$

Nótese que

$$p_{n+1} = \frac{\lambda}{n+1}p_n, \;\; n \geq 0.$$

Generación de Números Aleatorios

Teneniendo en cuenta lo anterior, podemos utilizar esta versión del método de la transformada inversa para generar un número aleatorio de Poisson:

inicializar $n = 0$, $p = e^{-\lambda}$, $F = p$;
generar $U \sim U(0,1)$;
repetir si $U > F$
  $p = \frac{\lambda}{n+1} p$;
  $F = F + p$;
  $n = n + 1$;
hasta que $U < F$.
retornar $X = n$.

El Algoritmo de la Transformada Inversa

Este algoritmo es la contraparte del método de la transformada inversa pero para variables aleatorias continuas. Está basado en el siguiente resultado:

Sea $U \sim U(0,1)$. Para cualquier función de distribución acumulada F la variable aleatoria X definida como

$$X = F^{-1}(U),$$

donde F^{-1} es la inversa de F, su función de distribución acumulada es, justamente, F.

Variable Aleatoria Exponencial

Si X tiene una distribución exponencial con parámetro λ, entonces su función de distribución acumulada está dada por

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} u &= F(x) \\ &= 1 - e^{-\lambda x} \\ e^{-\lambda x} &= 1 - u \\ x &= -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u). \end{aligned}$$

Así que $F^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)$.

Lo anterior implica que la variable aleatoria

$$X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U),$$

donde $U \sim U(0,1)$, tiene una distribución exponencial. Ya que $1-U \sim U(0,1)$, entonces

$$X = -\frac{1}{\lambda}\ln(U),$$

también tiene una distribución exponencial con parámetro λ.

El Método Polar

Este método se basa en la relación que existe entre coordenadas cartesianas y polares para generar dos números aleatorios X y Y independientes y que siguen distribuciones normales estándar.

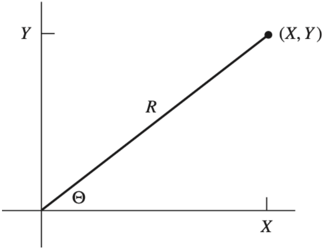

Figura: Gráfica que muestra la relación que existe entre coordenadas polares y cartesianas. Imagen tomada de [1]

Generación de Números Aleatorios

Lo anterior implica que

$$\begin{aligned} R^2 &= X^2 + Y^2 \\ \Theta &= \arctan\left(\frac{Y}{X}\right). \end{aligned}$$

Por otro lado, ya que X y Y son independientes y $X \sim Y \sim N(0,1)$, su función de densidad de probabilidad conjunta es igual a

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}. \end{aligned}$$

Generación de Números Aleatorios

Sea $f(d,\theta)$ la función de densidad de probabilidad conjunta de Θ y R^2, donde

$$\begin{aligned} d &= x^2 + y^2 \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

Entonces, aplicando una transformación de variables y teniendo en cuenta a que es igual $f(x,y)$, tenemos que

$$\begin{aligned} f(d,\theta) &= \frac{1}{4\pi}e^{-\frac{d}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{d}{2}}\right),\ d \in [0,\infty),\ \theta \in [0,2\pi]. \end{aligned}$$

Nótese que $f(d,\theta)$ es la multiplicación de las funciones de densidad de probabilidad de una variable aleatoria exponencial con parámetro $\lambda = \frac{1}{2}$ y una variable aleatoria uniforme $U(0,2\pi)$.

Generación de Números Aleatorios

Dado lo anterior, podemos definir el siguiente algoritmo para generar dos números aleatorios independientes X y Y que siguen una distribución normal estándar:

generar $U_1 \sim U(0,1)$ y $U_2 \sim U(0,1)$;
calcular $R^2 = -2\ln(U_1)$;
calcular $\Theta = 2\pi U_2$;
retornar $X = R\cos(\Theta) = \sqrt{-2\ln(U_1)}\cos(2\pi U_2)$;
retornar $Y = R\operatorname{sen}(\Theta) = \sqrt{-2\ln(U_1)}\operatorname{sen}(2\pi U_2)$.

Generación de Números Aleatorios

Lo anterior nos genera números aleatorios que vienen de una distribución normal con media cero y varianza uno. Si queremos generar números aleatorios que sean realizaciones de una variable aleatoria normal con media μ y varianza σ^2 podemos utilizar la siguiente transformación:

$$\hat{X} = \mu + \sigma X.$$

Nótese que

$$\begin{aligned} E(\hat{X}) &= E(\mu + \sigma X) \\ &= E(\mu) + \sigma E(X) \\ &= \mu, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{X}) &= \text{Var}(\mu + \sigma X) \\ &= \sigma^2 \text{Var}(X) \\ &= \sigma^2. \end{aligned}$$

BIBLIOGRAFÍA

1 Ross S., *"Simulation"*, Quinta Edición, Elsevier, 2013.