SÉLECTION BI-OBJECTIFS AVEC COEFFICIENTS INTERVALLES

Darkaoui Mounswif & Dan Mimouni

Mini-projet MADMC, UPMC

Introduction du problème

Données :

- n objets
- un entier k
- une valuation (c_1^i, c_2^i) pour chaque objet i
- un intervalle I = $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$, avec $\alpha_{min} \neq \alpha_{max}$, $\alpha_{min} < 1$, $\alpha_{max} > 0$.

Solutions réalisables : tout sous-ensemble de k objets, caractérisé par un vecteur $x = (x1, \dots, xn)$ ($x_i = 1$ si l'objet i est sélectionné, 0 sinon).

But : déterminer une solution réalisable x minimisant :

$f_I(y) = \max \alpha\, y_1 + (1 - \alpha) y_2 : \alpha \in I$.

où $y = c(x) = (\sum_{i=1}^{n} c_1^i x_i, \sum_{i=1}^{n} c_2^i x_i)$ est le vecteur-coût de la solution x.

Résultats Préliminaires

- Algorithme naïf: Pour chaque vecteur de la liste on le compare deux à deux avec les vecteurs qui le suivent dans la liste.
  Complexité: $O(n_2)$
- Algorithme lexicographique: On tri la liste sur le premier élément, puis un seul parcours de la liste suffit à trouver les vecteurs non dominés.
  Complexité: $O(n * log(n) + n) = O(n * log(n))$

Résultats

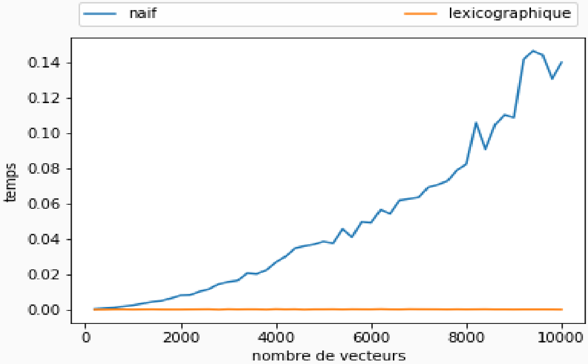

Figure: Comparaison naïf et lexicographique

Programmation dynamique bi-objectif

Taille	{1}	…	{1,…,j-1}	{1,…,j}	…	{1,…,n}
0	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
1						
…						
i-1			F			
i			G	E		
…						
k						$\boxed{}$

PARETO

E : image des sous-ens Pareto optimaux de taille i dans {1,…,j}

F : image des sous-ens Pareto optimaux de taille i-1 dans {1,…,j-1}

G : image des sous-ens Pareto optimaux de taille i dans {1,…,j-1}

Relation de récurrence :
E = OPT(F+f(j) U G)

Première Procédure

- Dans cette procédure on détermine dans un premier temps les points non dominés au sens de Pareto par programmation dynamique bi-objectifs, puis on détermine un point minimax parmi ceux-ci.
- Il existe toujours une solution minimax parmi las vecteurs non dominés au sens de Pareto.
- Pour déterminer les points minimax il suffit de calculer:
  max $\{\alpha\, y_1 + (1 - \alpha)y_2 : \alpha\ \}$ pour $\alpha \in \{\alpha_{min}, \alpha_{max}\}$

Deuxième Procédure

La nature de la fonction minimax nous permet d'optimiser la recherche en utilisant une autre règle de dominance que Pareto qui est la règle de I-dominance:

$$y \ I\text{-domine } y' \text{ si } \begin{cases} \forall \alpha \in I, \alpha y_1 + (1-\alpha) y_2 \leq \alpha y'_1 + (1-\alpha) y'_2 \\ \exists \alpha \in I, \alpha y_1 + (1-\alpha) y_2 \leq \alpha y'_1 + (1-\alpha) y'_2 \end{cases}$$

Deuxième Procédure

Pour pouvoir comparer les deux procédures il nous faut une transformation permettant de passer des résultats d'une des procédure à l'autre. Pour cela nous utilisons les transformations suivante:

- Pour passer de l'image des I-dominant au Pareto dominant : $y = (\frac{((1-\alpha_{max})y'_1-(1-\alpha_{min})y'_2)}{(\alpha_{min}-\alpha_{max})}, \frac{(\alpha_{min}y'_2-\alpha_{max}y'_1)}{(\alpha_{min}-\alpha_{max})})$ avec y = (y_1, y_2) l'image d'un point non I-dominé et y' = (y'_1, y'_2) l'image d'un point non dominé au sens de Pareto

- Pour passer d'une instance des points non I-dominés à une instance des points non-dominés au sens de Pareto: $y'_=(\alpha_{min}y_1 + (1\text{-}\alpha_{min})y_2, \alpha_{max}y_1 + (1\text{-}\alpha_{max})y_2)$ avec y = (y_1, y_2) un point non dominé au sens de Pareto et y' = (y'_1, y'_2) un point non I-dominé

Comparaison des deux méthodes

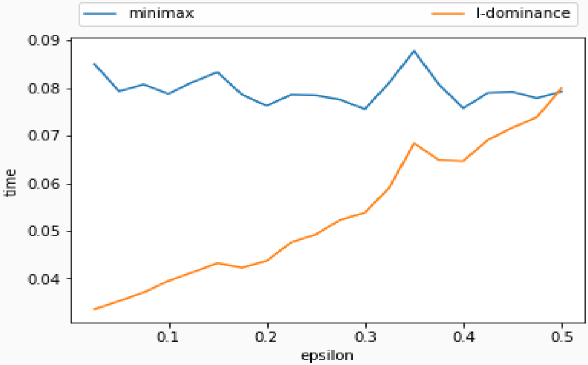

Figure: Comparaison entre Pareto et I dominance en fonction de ϵ