Предположим, что распределение соответствует нормальному распределению.

1) Запишем функцию правдоподобия для нормального распределения:

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\ln L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial(\ln L)}{\partial\mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \Rightarrow \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

Найдем $\hat{\mu} = 30{,}6634$

$$\frac{\partial(\ln L)}{\partial\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0$$

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum(x_i-\mu)^2 = 0 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

Найдем $\sigma^2 = 37{,}16$

Свойства оценок

1) $\hat{\mu}$ несмещенная, так как, $\mathbb{E}\hat{\mu} = \mu$

2) $\hat{\sigma}^2$: смещенная, так как $\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$

Если оценивать методом максимального правдоподобия, то оценки построенные таким образом, обладают, как минимум, свойствами состоятельности и асимптотической нормальности (цитата из конспекта).

Теоретическое смещение

$$Bias(\hat{\theta}) = \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta \quad = \mathbb{E}[\hat{\mu}] - \mu = \mu - \mu = 0$$

$$\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2\right] = \frac{\sigma^2(n-1)}{n} =$$

$$= \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} - \sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{n}.$$

Теоретическая дисперсия.

$$Var(\hat{\theta}) = \mathbb{E}\left[\left(\hat{\theta} - \mathbb{E}[\hat{\theta}]\right)^2\right]$$

$$Var(\hat{\mu}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(x_i) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$Var(\hat{\sigma}^2) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2\right) = \frac{\sigma^4 \cdot 2(n-1)}{n^2}$$

Среднеквадратическая ошибка (MSE)

$$MSE(\hat{\theta}) = E\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right] = Var(\hat{\theta}) + Bias(\hat{\theta})^2$$

$$MSE(\hat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{n} - 0 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$MSE(\hat{\sigma}^2) = \frac{\sigma^4 \cdot 2(n-1)}{n^2} - \frac{\sigma^2}{n}$$

Информация Фишера:

$$I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln L(\theta)\right]$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu^2} = -\frac{n}{\sigma^2} \Rightarrow I(\mu) = \frac{n}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial^2(\ln L)}{\partial(\sigma^2)^2} = \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

$$I(\sigma^2) = \frac{n}{2\sigma^4}.$$