
Группа Р3207 К работе допущен _____

Студент Путинцев Д.Д Работа выполнена 14.09.2024

Преподаватель Агабабаев В.А. Отчет принят _____

Рабочий протокол и отчет по лабораторной работе №1.01

Исследование распределения случайной величины

1. Цель работы.

Исследование распределения случайной величины на примере многократных измерений определённого интервала времени.

2. Задачи, решаемые при выполнении работы.

1. Провести многократные измерения определённого интервала времени.
2. Построить гистограмму распределения результатов измерения.
3. Вычислить среднее значение и дисперсию полученной выборки.
4. Сравнить гистограмму с графиком функции Гаусса с такими же как и у экспериментального распределения средним значением и дисперсией.

3. Объект исследования.

Случайная величина — измерение промежутка времени равного 10 секундам, ориентируясь на часы с секундной стрелкой, с использованием цифрового секундомера.

4. Метод экспериментального исследования.

Многократное измерение определённого интервала времени и нахождение распределения значений этой случайной величины.

5. Рабочие формулы и исходные данные.

Формула выборочного среднего: $\langle t \rangle_N = \frac{1}{N}(t_1 + t_2 + \dots + t_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i$,

Формула среднеквадратичного отклонения среднего значения: $\sigma_{\langle t \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle_N)^2}$

Формула выборочного среднеквадратичного отклонения: $\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle_N)^2}$

Формула максимальной плотности нормального распределения: $p_{\max} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$

Функция Гаусса для нахождения нормального распределения: $p(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t - \langle t \rangle)^2}{2\sigma^2}}$

Формула доверительного интервала: $\Delta t = t_{\alpha, N} \sigma_{\langle t \rangle}$

6. Измерительные приборы.

№ п/п	Наименование	Тип прибора	Используемый диапазон	Погрешность прибора
1	Часы с секундной стрелкой	Аналоговый	0 — 15 с	0.5 с
2	Секундомер	Цифровой	0 — 15 с	0.01 с

7. Схема установки (перечень схем, которые составляют Приложение 1).

Часы с секундной стрелкой с ценой деления 1 с и секундомер с ценой деления 0.01 с. Запускаем второй прибор, когда на первом приборе стрелка проходит через кратное 5 количеству секунд, после чего ждем 10 секунд, наблюдая за секундной стрелкой на первом приборе, когда секундная стрелка прошла 10 секунд, снова нажимаем на секундомер, чтобы остановить время. Значение на секундомере записываем в таблицу.

8. Результаты прямых измерений и их обработки (таблицы, примеры расчетов). Смотри таблицу №1.

9. Расчет результатов (таблицы, примеры расчетов).

Найдем выборочное среднее как среднеарифметическое всех результатов измерений:

$$\langle t \rangle_N = \frac{1}{N} (t_1 + t_2 + \dots + t_N) = \frac{1}{50} (9.72 + 10.09 + \dots + 9.94) = \frac{1}{50} * 501.8 = 10.036 \text{ с}$$

Найдем выборочное среднеквадратичное отклонение по формуле:

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle_N)^2} = \sqrt{\frac{1}{49} \sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle_N)^2} = \sqrt{\frac{1}{49} 1.0643} \approx 0.15 \text{ с}$$

Вычислим максимальное значение плотности распределения p_{\max} .

$$p_{\max} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} = \frac{1}{0.15 \sqrt{2\pi}} \approx 2.66 \text{ с}^{-1}$$

1. Отыщем в Табл. 1 наименьший t_{\min} и наибольший t_{\max} из результатов измерений
 $t_{\min} = 9.72 \text{ с}$, $t_{\max} = 10.3 \text{ с}$

Рассчитаем среднеквадратичное отклонение среднего значения по формуле:

$$\sigma_{\langle t \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle_N)^2} = \sqrt{\frac{1}{50 * 49} * 1.0643} \approx 0.021 \text{ с}$$

Найдем табличное значение коэффициента Стьюдента $t_{\alpha, N}$ для доверительной вероятности $\alpha = 0,95$. $t_{\alpha, N} = 2.0096$

$$\Delta t = t_{\alpha, N} \sigma_{\langle t \rangle} = 2,0096 * 0,021 = 0,0422 \text{ с}$$

10. Расчет погрешностей измерений.

1. Найдем среднее арифметическое значение.

$$\langle t \rangle_N = \frac{1}{N} (t_1 + t_2 + \dots + t_N) = \frac{1}{50} (9.72 + 10.09 + \dots + 9.94) = \frac{1}{50} * 501.8 = 10.036 \text{ с}$$

2. Вычислим оценку среднего квадратического отклонения (СКО) результата измерения

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle_N)^2} = \sqrt{\frac{1}{49} \sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle_N)^2} = \sqrt{\frac{1}{49} 1.0643} \approx 0.15 \text{ с}$$

3. Рассчитаем доверительный интервал случайной погрешности (случайную погрешность)

$$\Delta t = t_{\alpha, N} \sigma_{\langle t \rangle} = 2,0096 * 0,021 = 0,042 \text{ с}$$

4. Найдем абсолютную погрешность измерений с учетом случайной погрешности и

инструментальной погрешности

Инструментальная погрешность $\Delta_{\text{ин}} = 0.01$

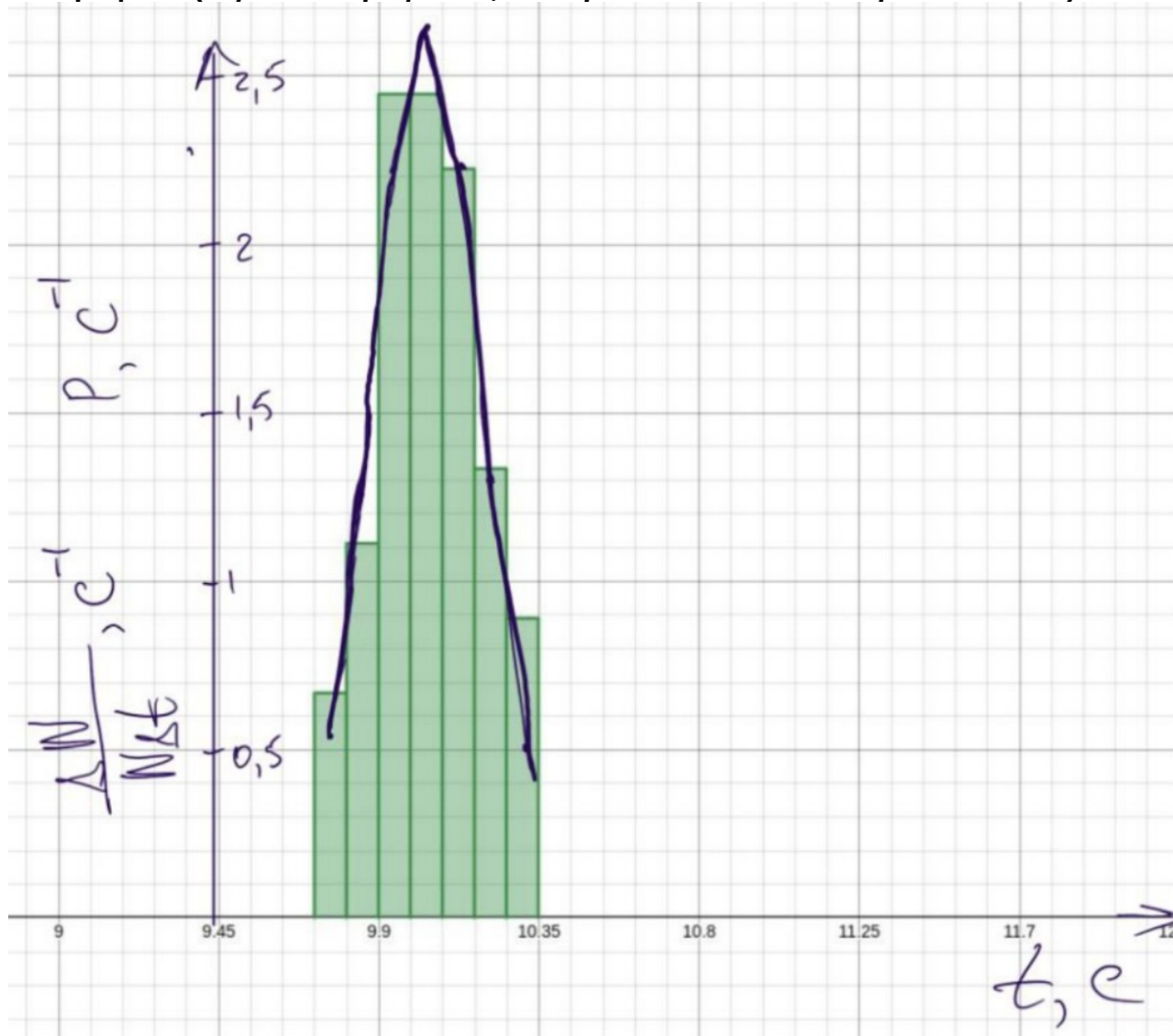
Абсолютная погрешность: $\Delta_x = \sqrt{\Delta t^2 + \left(\frac{2}{3} \Delta_{\text{ин}}\right)^2} = \sqrt{0.042^2 + \left(\frac{2}{3} * 0.01\right)^2} \approx 0.04 \text{ c}$

5. Вычислим относительную погрешность измерений: $\epsilon_x = \frac{\Delta_x}{\langle t \rangle_N} * 100\% = \frac{0.042}{10.036} * 100\% \approx 0.4\%$

Конечный результат измерений:

$x = (10.04 \pm 0.04) \text{ c}$; $\epsilon_x = 0.4\%$; $\alpha = 0,95$

11. Графики (перечень графиков, которые составляют Приложение 2).



12. Окончательные результаты.

Среднее арифметическое всех результатов измерений $\langle t \rangle_N = 10.036$

Выборочное среднеквадратичное отклонение $\sigma_N = 0.15 \text{ c}$

Максимальное значение плотности распределения $p_{\text{max}} = 2.7 \text{ c}^{-1}$

Среднеквадратичное отклонение среднего значения $\sigma_{\langle t \rangle} = 0.021 \text{ c}$

Табличное значение коэффициента Стьюдента $t_{\alpha, N}$ для доверительной вероятности $\alpha = 0,95$. $t_{\alpha, N} = 2.01$

Доверительные интервал $\Delta t = 0.04 \text{ c}$

Конечный результат измерений: $x = (10.04 \pm 0.04) \text{ c}$; $\epsilon_x = 0.4\%$; $\alpha = 0,95$

13. Выводы и анализ результатов работы.

Делая эту работу, я научился работать с многократными измерениями случайных величин. В данной работе я узнал, как изучать и анализировать замеры случайных величин. Познакомился со многими математическими приемами, которые помогли мне посчитать погрешность измерений.

Результаты работы показали мне каким образом распределяются случайные величины при многократных измерениях. Мои замеры оказались довольно точными, так как погрешность незначительная. Мы ожидали относительную погрешность в 10%, а получили относительную погрешность в 0.4%

Приложение

Таблица 1: Результаты прямых измерений

№	t, c	$t_i - \langle t \rangle_N, c$	$(t_i - \langle t \rangle_N)^2, c^2$
1	9.72	-0.32	0.1024
2	10.09	0.05	0.0025
3	9.98	-0.06	0.0036
4	9.94	-0.1	0.01
5	10.04	0	0
6	9.92	-0.12	0.0144
7	10.15	0.11	0.0121
8	10.26	0.22	0.0484
9	10.16	0.12	0.0144
10	10.07	0.03	0.009
11	10.09	0.05	0.025
12	10.04	0	0
13	9.97	-0.07	0.0049
14	10.05	0.01	0.0001
15	10.09	0.05	0.0025
16	10.25	0.21	0.0441
17	10.25	0.21	0.0441
18	9.85	-0.19	0.0361
19	10.21	0.17	0.0289
20	10.08	0.04	0.0016
21	9.95	-0.09	0.0081
22	9.96	-0.08	0.0065
23	10.19	0.15	0.0225
24	10.09	0.05	0.025
25	10.01	-0.03	0.009
26	10.21	0.17	0.0289
27	10.03	-0.01	0.0001
28	9.98	-0.06	0.0036
29	9.82	-0.22	0.0484
30	10.30	0.26	0.0676
31	10.08	0.04	0.0016
32	10.27	0.23	0.0529

33	9.94	-0.1	0.01
34	10.05	0.01	0.0001
35	9.85	-0.19	0.0361
36	9.78	-0.26	0.0676
37	10.11	0.07	0.0049
38	10.03	-0.01	0.0001
39	9.93	-0.11	0.0121
40	9.97	-0.07	0.0049
41	9.84	-0.2	0.04
42	9.99	-0.05	0.0025
43	10.26	0.22	0.0484
44	9.80	-0.24	0.0576
45	10.02	-0.02	0.0004
46	10.02	-0.02	0.0004
47	9.82	-0.22	0.0484
48	10.12	0.08	0.0064
49	10.23	0.19	0.0361
50	9.94	-0.1	0.01
	$\langle t \rangle_N = 10.04 \text{ c}$	$\sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle_N) = -0.2 \text{ c}$	$\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle_N)^2} = 0.15 \text{ c}$ $p_{max} = 2.66 \text{ c}^{-1}$

Таблица 2: Данные для построение гистограммы

Границы интервалов, с	ΔN	$\frac{\Delta N}{N \Delta t}, c^{-1}$	t, с	ρ, c^{-1}
9.72	3	0.66	9.765	0.52
9.81				
9.81	5	1.11	9.855	1.284
9.9				
9.9	11	2.44	9.945	2.213
9.99				
9.99	11	2.44	10.035	2.66
10.08				
10.08	10	2.22	10.125	2.230
10.17				
10.17	6	1.33	10.215	1.305
10.26				
10.26	4	0.88	10.305	0.53
10.35				

Таблица 3: Стандартные доверительные интервалы

	Интервал, с		ΔN	$\frac{\Delta N}{N}$	P
	от	до			
$\langle t \rangle_N \pm \sigma_N$	9.89	10.19	33	0.66	0.683
$\langle t \rangle_N \pm 2\sigma_N$	9.74	10.34	49	0.98	0.954
$\langle t \rangle_N \pm 3\sigma_N$	9.59	10.49	50	1	0.997