Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО».

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Типовик №1
Вариант №25

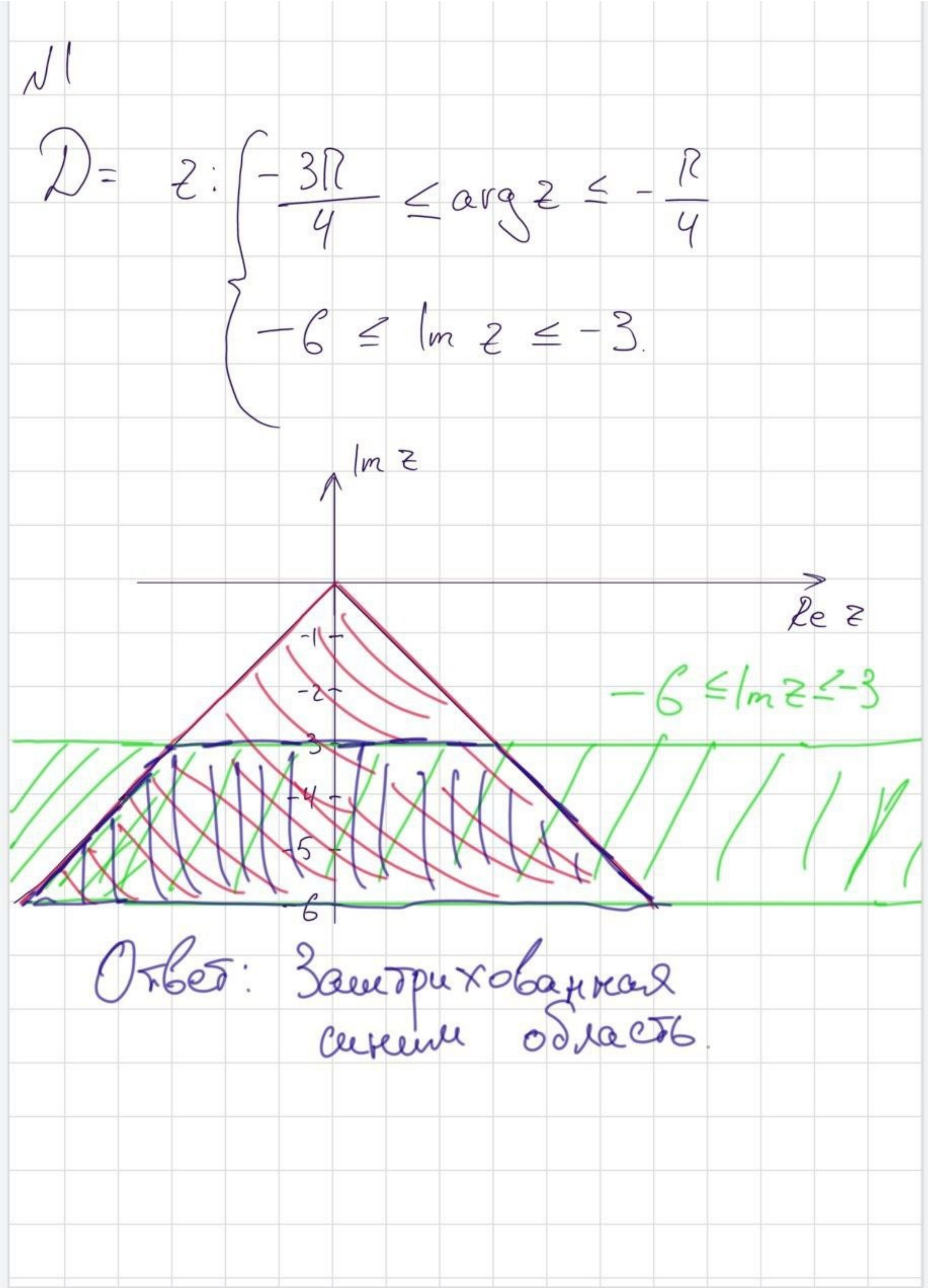
Выполнил
Путинцев Данил Денисович
Группа Р3207
Номер ИСУ: 409425

Санкт-Петербург 2024 год

Задание 1

Изобразить на комплексной плоскости множество D

$D = z: -3\pi/4 \le arg\, z \le -\pi/4, \ -6 \le \Im z \le -3$



Задание 2

Найти все значения функции в указанной точке

Arcsin(i)

Вспомним определение $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

Тогда пусть $w = \arcsin z \Leftrightarrow \sin w = z$

$\sin w = z \Leftrightarrow \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z$. *Умножим на* $2i$: $e^{iw} - e^{-iw} - 2zi = 0$. *Сделаем замену*: $t = e^{iw}$. *Тогда получим*:

$t - 2zi - \frac{1}{t} = 0$. *Умножим на* t: $t^2 - 2tzi - 1 = 0$. *Решим квадратное уравнение*: $D = -4z^2 + 4$

$t = \frac{2zi \pm \sqrt{-4z^2 + 4}}{2} = iz \pm \sqrt{1 - z^2} = e^{iw}$

Логорифмируем: $iw = Ln(iz \pm \sqrt{1 - z^2})$. *Тогда* $w = -i\,Ln(iz \pm \sqrt{1 - z^2})$

Получаем, что arcsin(z) = $-i\,Ln(iz \pm \sqrt{1 - z^2})$

Подставим

$\arcsin(0 + i) = -i\,Ln(i(0 + i) \pm \sqrt{1 - (0 + i)^2}) = -i\,Ln(-1 \pm \sqrt{2}) = -i \ln|-1 \pm \sqrt{2}| + i * arg(-1 \pm \sqrt{2} + 2\pi k)$

Ответ:

1. $-i * \ln\sqrt{3} + i * arg(-1 + \sqrt{2} + 2\pi k)$
2. $-i * \ln\sqrt{3} + i * arg(-1 - \sqrt{2} + 2\pi k)$

Задание 3

Найти аналитическую функцию по известной её действительной или мнимой части

$u(x, y) = \log(x^2 + y^2) + x - 2y$

Найдем частные производные: $\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} + 1$; $\frac{\delta u}{\delta y} = \frac{2y}{x^2 + y^2} - 2$

Проверим необходимое условие аналичности функции

$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = 0$. Найдем частные производные: $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = \frac{2(x^2 + y^2) - 4x^2}{(x^2 + y^2)^2}$; $\frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = \frac{2(x^2 + y^2) - 4y^2}{(x^2 + y^2)^2}$

Сложим частные производные:

$\frac{2(x^2 + y^2) - 4x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2(x^2 + y^2) - 4y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$. Следовательно, условие выполняется.

По условию Коши-Римана: $\frac{\delta u}{\delta x}=\frac{\delta v}{\delta y}=\frac{2x}{x^2+y^2}+1$. Проинтегрируем:

$v(x,y)=\int \frac{2x}{x^2+y^2}+1\,dy=2\,arctg(\frac{y}{x})+y+\phi(x)$

$\frac{2y}{x^2+y^2}-2=-\frac{\delta}{\delta x}(2\,arctg(\frac{y}{x})+y+\phi(x))=2*\frac{y}{x^2+y^2}-\phi'(x)$ Итого:

$\frac{2y}{x^2+y^2}-2=\frac{2y}{x^2+y^2}-\phi'(x);\ \ \textit{Получается},\ \ \textit{что}\,\phi'(x)=2,\ \ \textit{значит}\,\phi(x)=2x+C$

Тогда $v(x,y)=2\,arctg(\frac{y}{x})+y+2x+C$

Исходная функция: $f(z)=\log(x^2+y^2)+x-2y+i(2\,arctg(\frac{y}{x})+y+2x+C)$

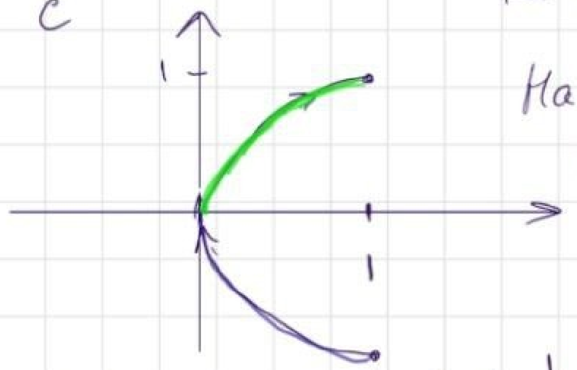
Ответ: $f(z)=\log(x^2+y^2)+x-2y+i(2\,arctg(\frac{y}{x})+y+2x+C)$

Задание 4

Вычислить интеграл по заданной кривой в указанном направлении

$\int_C Re\,z\,dz,\ \ C-\textit{полуокружность}\,|z-1|=1,\ \ Re\,z\le 1.\ \ \textit{Начало пути интегрирования в точке}\ z=1-i$

$$\int_C \operatorname{Re} z \, dz \qquad |z-1| = 1, \quad \operatorname{Re} z \le 1$$



Начало пути интегрирование

$a = 1 - i$

$b = 1 + i$

$$C(t) = 1 - \cos t + i \cdot \sin t \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

$$\int_C \operatorname{Re} z \, dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos t)\cdot(\sin t + i\cdot\cos t)\,dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t + i\cdot\cos t - \cos t\cdot\sin t - i\cdot\cos^2 t \, dt$$

$$= -\frac{i\cdot\sin 2t}{4} - \frac{\sin^2 t}{2} + i\cdot\sin t - \cos t - \frac{it}{2}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-i\cdot\sin(-\pi)}{4} - \frac{\sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2} + i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) -$$

$$-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{i\pi}{4} + \frac{i\cdot\sin(\pi)}{4} + \frac{\sin^2\frac{\pi}{2}}{2} - i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{i\pi}{4} = -\frac{1}{2} - i + \frac{i\pi}{4} + \frac{1}{2} - i + \frac{i\pi}{4}$$

$$= -2i + \frac{i\pi}{2}$$

Ответ: $-2i + \frac{i\pi}{2}$