

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский университет ИТМО».

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Моделирование  
Учебно-исследовательская работа №1  
Вариант №285

Выполнил  
Путинцев Д. Д  
Группа Р3307  
Проверил(а)  
Преподаватель: Тропченко А. А.

Санкт-Петербург 2025 год

## Цель работы

Изучение методов обработки и статистического анализа результатов измерений на примере заданной числовой последовательности путем оценки числовых моментов и выявления свойств последовательности на основе корреляционного анализа, а также аппроксимация закона распределения заданной последовательности по двум числовым моментам случайной величины.

## Этап 1. Форма №1

Оценки математического ожидания, дисперсии, среднеквадратического отклонения, коэффициента вариации заданной числовой последовательности и доверительные интервалы для оценки математического ожидания с доверительными вероятностями 0,9; 0,95 и 0,99, сведенные в таблицу

Таблица 1: Характеристики заданной ЧП (вариант 285)

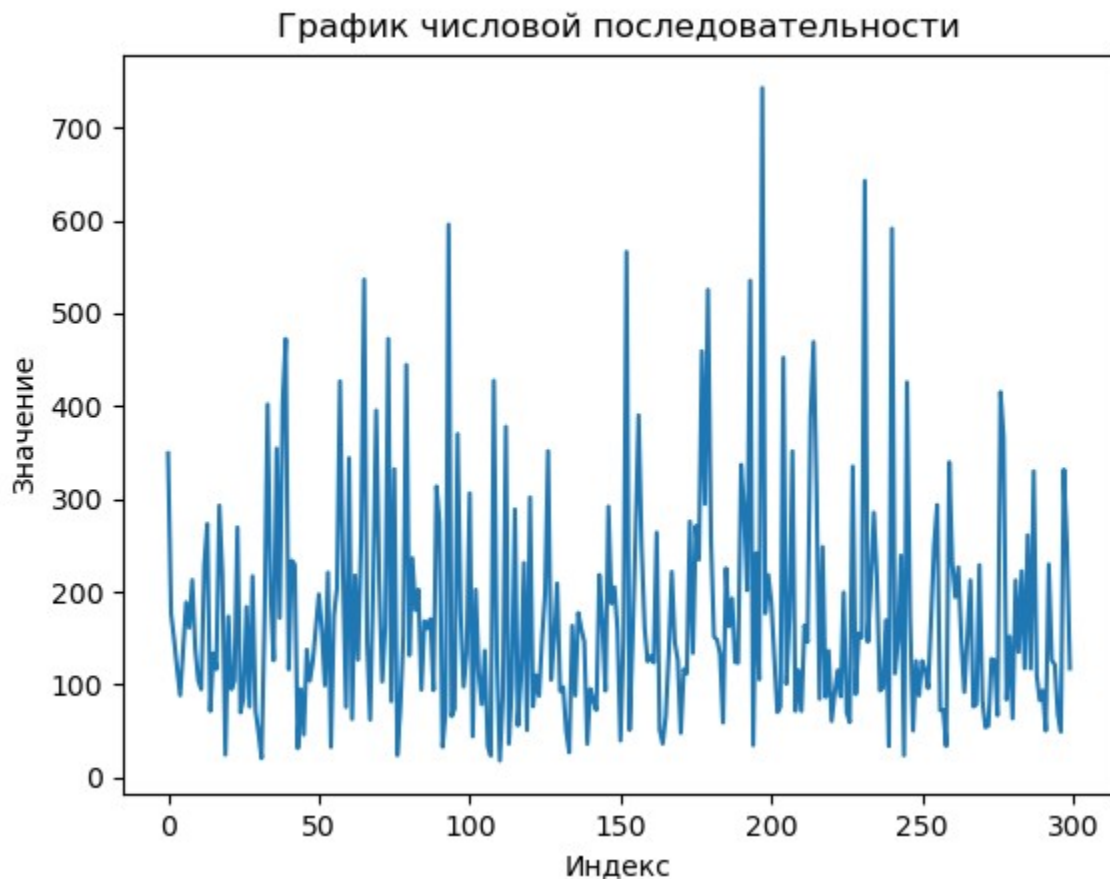
Характеристика		Количество случайных величин					
		10	20	50	100	200	300
Мат.ож.	Знач.	172.080	163.961	165.514	181.411	178.538	175.513
	%	-1.956	-6.582	-5.697	3.36	1.724	
Дов. инт. (0,9)	Знач.	±37.237	±29.451	±23.758	±19.707	±14.444	±11.665
	%	±219.22	±152.47	±103.669	±68.941	±23.823	
Дов. инт. (0,95)	Знач.	±44.371	±35.093	±28.309	±23.482	±17.211	±13.9
	%	±219.22	±152.47	±103.662	±68.935	±23.82	
Дов. инт. (0,99)	Знач.	±58.313	±46.12	±37.205	±30.861	±22.619	±18.267
	%	±219.19	±152.45	±103.651	±68.926	±23.811	
Дисперсия	Знач.	5125.034	6411.777	10431.054	14354.435	15422.512	15088.219
	%	-66.033	-57.505	-30.866	-4.863	2.216	
С.к.о.	Знач.	71.589	80.074	102.133	119.81	124.187	122.834
	%	-41.719	-34.811	-16.853	-2.462	1.101	
К-т вариации	Знач.	0.416	0.488	0.617	0.660	0.696	0.7
	%	-40.571	-30.286	-11.857	-5.714	-0.571	

% - относительные отклонения рассчитанных значений от значений, полученных для выборки из трехсот величин

**Вывод из 1 этапа:** На основании анализа данных можно заключить, что с увеличением объема выборки наблюдается тенденция к стабилизации оценок. Максимальное ожидаемое значение демонстрирует колебания, но в целом остается в одном диапазоне, что указывает на сходимость оценки математического ожидания. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение существенно возрастают при малых объемах выборки, однако при выборках в 200-300 элементов их рост замедляется и значения стабилизируются, что свидетельствует о достижении репрезентативности. Доверительные интервалы для всех уровней значимости закономерно сужаются с ростом числа наблюдений, отражая повышение точности оценки. Коэффициент вариации изменяется незначительно, особенно на больших выборках, что подтверждает относительную устойчивость разброса данных относительно среднего значения при увеличении объема выборки.

## Этап 2. График №1.

Значение заданной числовой последовательности с результатами анализа характера числовой последовательности.



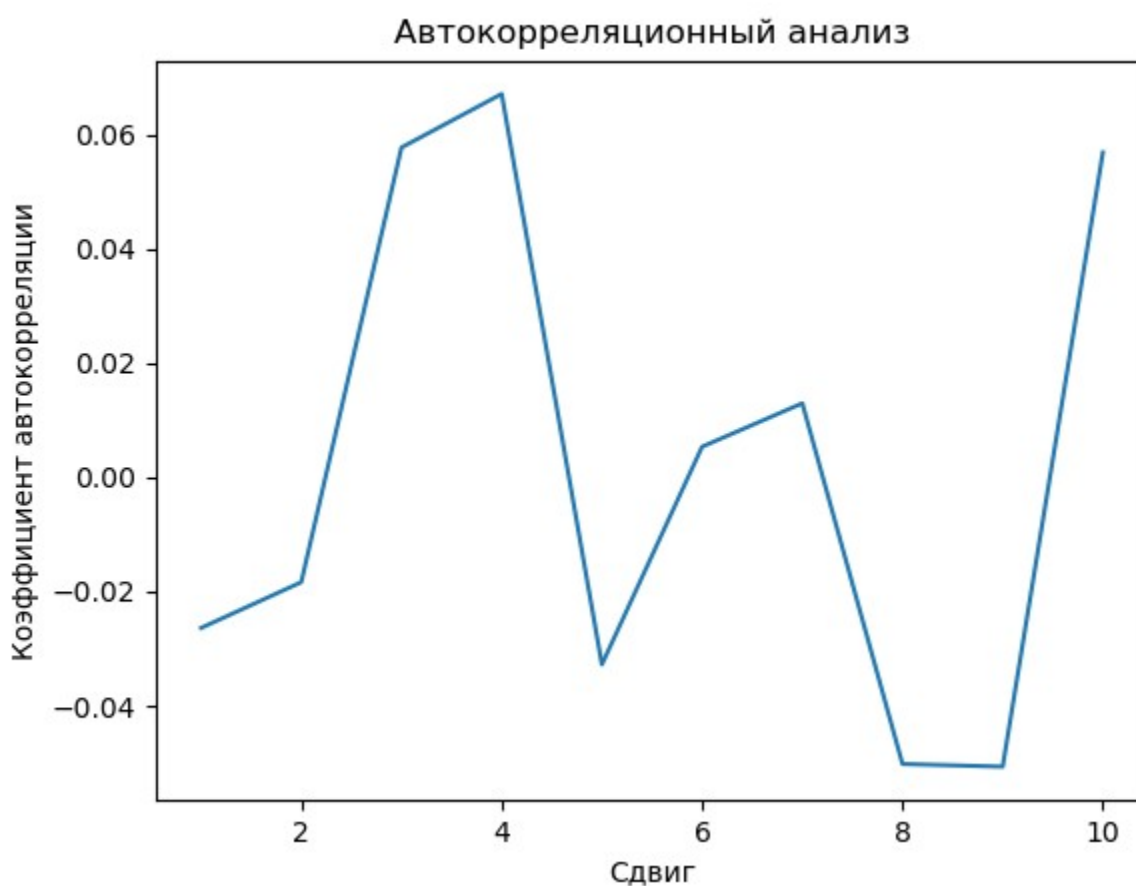
**Вывод из этапа №2:**

Изучив график, можно сделать вывод, что исходная последовательность не является возрастающей или убывающей, но есть незначительные схожести с периодическим движением.

### Этап 3. Форма 3.

Результаты автокорреляционного анализа (значения коэффициентов автокорреляции со сдвигом 1, 2, 3, ...), представленные как в числовом (форма 3), так и в графическом виде.

Сдвиг ЧП	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
К-т АК	-0,0284	-0,0153	0,0635	0,0618	-0,0372	0,0009	0,0094	-0,0440	-0,0507	0,0551



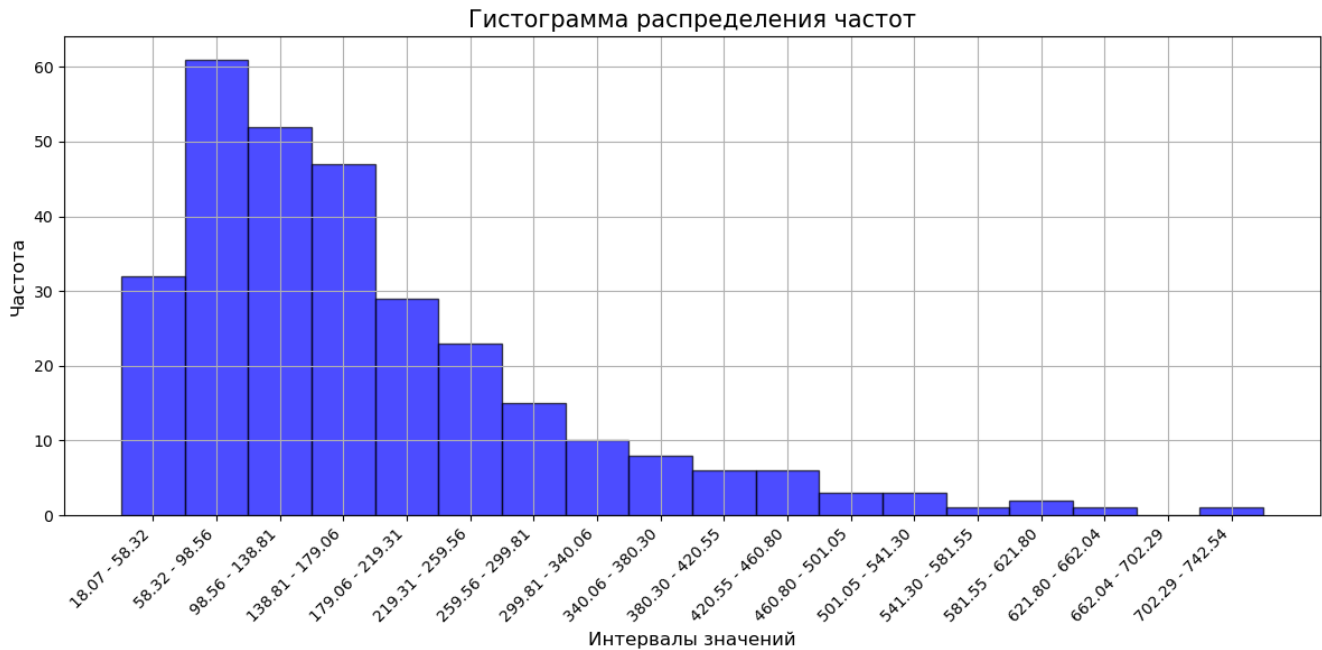
#### Вывод из 3 этапа:

Значения коэффициентов автокорреляции для всех рассмотренных сдвигов (от 1 до 10) являются близкими к нулю, находясь в диапазоне от -0.0507 до 0.0635. Их малая величина и отсутствие какой-либо систематической тенденции к убыванию или возрастанию свидетельствуют о том, что статистически значимой линейной связи между последовательными значениями ряда не существует.

Таким образом, заданную числовую последовательность можно считать случайной

## Этап 4. График 2.

Гистограмма распределения частот для заданной числовой последовательности (график 2)



### Вывод из 4 этапа:

Исходя из гистограммы мы можем видеть, что большая часть значений располагается в промежутке от 18.07 до 259.56. Из коэффициента вариации (0.7), можно предположить, что закон распределения ЧП - Эрланга К-го порядка.

## Этап 5.

Параметры, рассчитанные по двум начальным моментам и определяющие вид аппроксимирующего закона распределения заданной случайной последовательности (равномерный; экспоненциальный; нормированный Эрланга; гипоекспоненциальный; гиперэкспоненциальный).

Для заданной числовой последовательности коэффициент вариации  $v = 0.7$ , что меньше единицы. Это ключевой показатель, который однозначно указывает на то, что аппроксимирующим законом распределения является нормированное распределение Эрланга 2-го порядка.

Были рассчитаны параметры этого распределения на основе математического ожидания  $t = M(X) = 175.513$  и коэффициента вариации  $v = 0.7$ :

Параметр формы (порядок) распределения Эрланга:  $k \approx \frac{1}{v^2} \approx \frac{1}{0.7^2} \approx 2.04$

Параметр интенсивности:  $\lambda = \frac{k}{t} \approx \frac{2}{175.513} \approx 0.0114$

**Вывод из этапа 5:** Таким образом, аппроксимирующий закон распределения для данной числовой последовательности — распределение Эрланга 2-го порядка.

## Этап 6

Описание алгоритма (программы) формирования аппроксимирующего закона распределения и расчета значений всех числовых характеристик

*Для генерации случайной последовательности, соответствующей распределению Эрланга 2-го порядка, используется среда Excel. На отдельном листе задаются параметры:*

$\lambda = 0,0114$  (интенсивность)

$k = 2$  (порядок распределения)

Алгоритм формирования:

В столбце С (ячейки С1:С300) генерируется числовая последовательность по формуле Эрланга 2-го порядка:

$$= -1 * (0,0114) * \ln(\text{СЛЧИС}()) - 1 / (0,0114) * \ln(\text{СЛЧИС}())$$

где \$B\$1 - ячейка с параметром  $\lambda = 0,0114$

Формула копируется по всем 300 ячейкам столбца С

**Вывод из 6 этапа:** Нам удалось сформировать числовую последовательность из 300 значений по аппроксимирующему закону распределения Эрланга 2-го порядка в Excel. Алгоритм использует одну формулу для генерации всех значений последовательности в столбце С, что обеспечивает простоту и эффективность реализации.

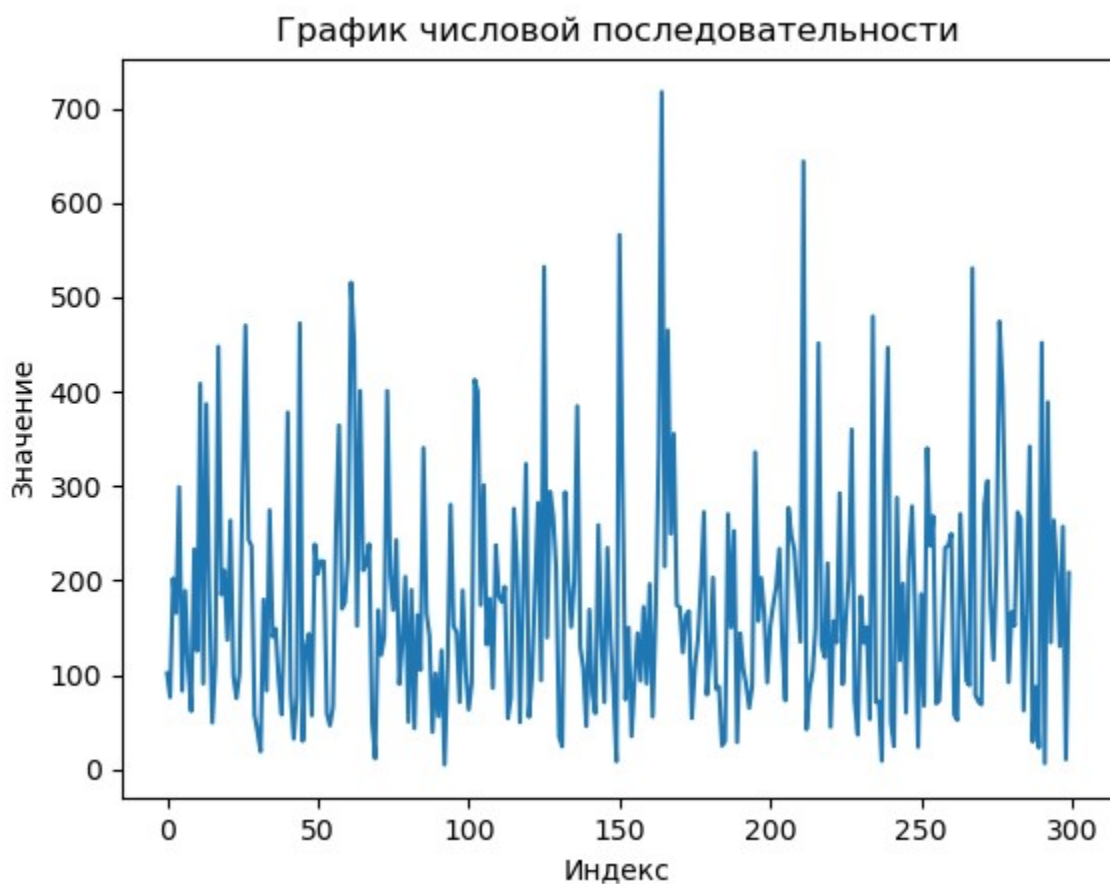
## 7 этап. График 3. Форма 2.

Выводы по результатам сравнения сгенерированной в соответствии с полученным аппроксимирующим законом распределения последовательности случайных величин и заданной числовой последовательности.

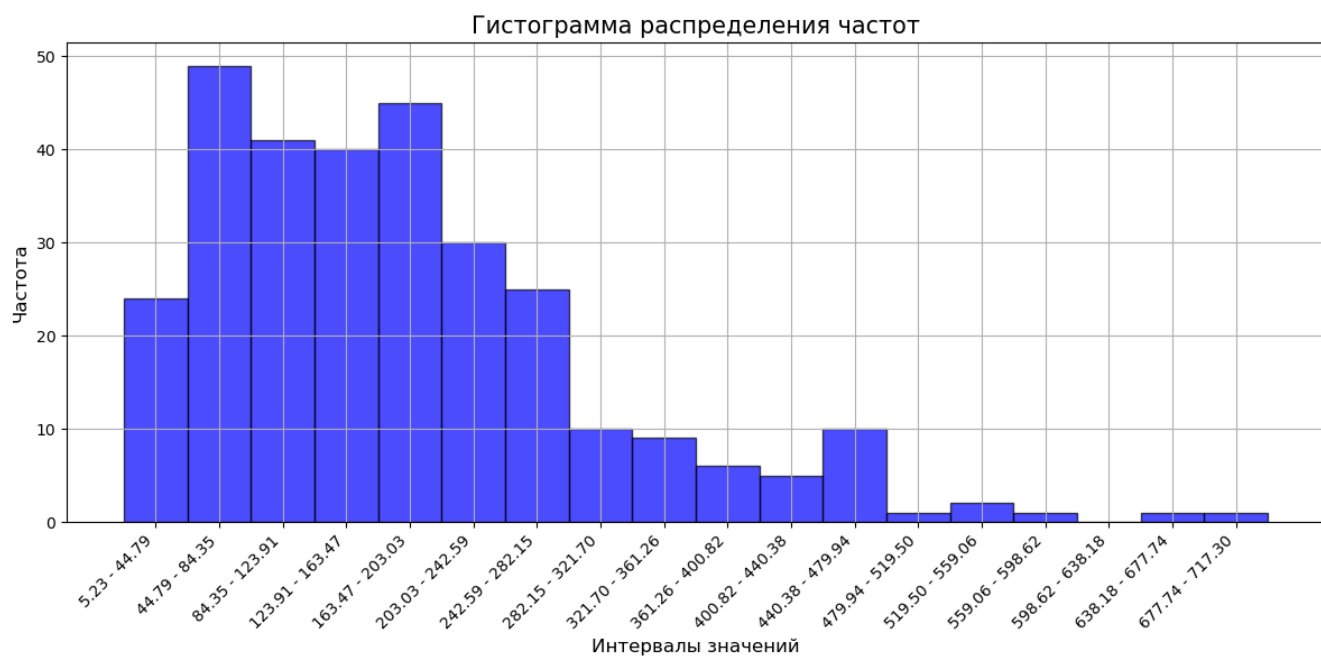
Таблица 2: Характеристики сгенерированной случайной ЧП

Закон распределения: Эрланг 2-го порядка							
Характеристика	Количество случайных величин						
		10	20	50	100	200	300
Мат.ож.	Знач.	152,16	186,04	171,19	172,87	174,68	177,96
	%	-14.498	4.54	-3.804	-2.86	-1.843	
Дов. инт. (0,9)	Знач.	±40,79	±43,23	±28,04	±19,12	±13,93	±11,63
	%	±250.73	±271.711	±141.1	±64,4	±19.777	
Дов. инт. (0,95)	Знач.	±48,6	±51,52	±33,41	±22,78	±16,6	±13,86
	%	±250.65	±271.71	±141.053	±64.358	±19.77	
Дов. инт. (0,99)	Знач.	±63,87	±67,7	±43,91	±29,94	±21,82	±18,21
	%	±250.741	±271.77	±141.131	±64.415	±19.824	
Дисперсия	Знач.	6148,08	13817,6	14529,53	13510,61	14350,49	14992,82
	%	-58.993	-7.839	-3.09	-9.886	-4.284	
С.к.о.	Знач.	78,41	117,55	120,54	116,24	119,79	122,45
	%	-35.97	-4.002	-1.56	-5.071	-2.172	
К-т вариации	Знач.	0,52	0,63	0,7	0,67	0,69	0,69
	%	-24.638	-8.696	1.45	-2.899	0	

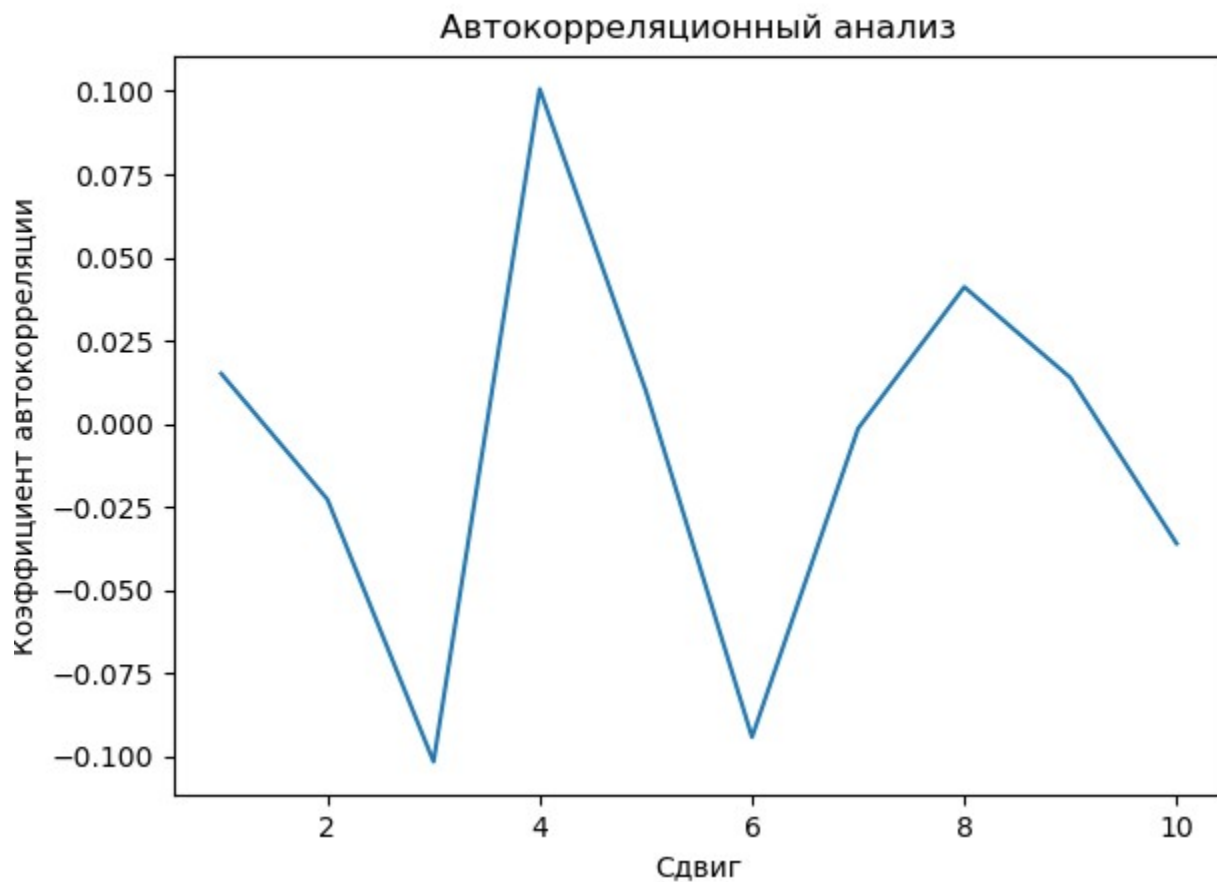
Математическое ожидание отличается от математического ожидания исходной выборки на величину, не превосходящую доверительные интервалы. Это говорит о том, что аппроксимация выполнена качественно







При сравнении полученных гистограмм видно, что полученная нами последовательность похожа на исходную. Тем самым, мы доказали, что выбранная нами аппроксимация подходит



Коэффициент автокорреляции интервалов от 1 до 10 приближены к нулю, следовательно, можно сказать, что выборка случайна.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \times \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = -0.033$$

Для сгенерированной и полученной последовательности мы рассчитали корреляционную зависимость. Как мы видим, корреляции между исходной и сгенерированной случайной последовательностями нет.

**Вывод из 7 этапа:** Сравнение гистограммы распределения частот исходной числовой последовательности и плотности распределения закона Эрланга 2-го порядка показало, что исходная ЧП успешно аппроксимируется данным законом распределения. Сравнение числовых характеристик исходной и сгенерированной ЧП выявило значительное сходство основных параметров.

## Итоговые выводы

В рамках лабораторной работы была исследована числовая последовательность, для которой

определены основные статистические характеристики: математическое ожидание (~175,5), дисперсия (~15088) и коэффициент вариации (~0,7). Анализ графика последовательности показал ее случайный характер без выраженных трендов или периодичности. Автокорреляционный анализ подтвердил случайный характер последовательности - коэффициенты автокорреляции для всех сдвигов близки к нулю.

На основании значения коэффициента вариации (0,7) был определен аппроксимирующий закон распределения - нормированный закон Эрланга 2-го порядка. По рассчитанным параметрам ( $\lambda = 0,0114$ ,  $k = 2$ ) была сгенерирована новая последовательность.

Сравнение статистических характеристик исходной и сгенерированной последовательностей показало их близкое соответствие: математические ожидания (175,513 и 177,96), СКО (122,834 и 122,45) и коэффициенты вариации (0,7 и 0,69) практически совпадают. Незначительные отличия не выходят за пределы доверительных интервалов, что подтверждает адекватность аппроксимации.

Таким образом, поставленная задача успешно решена - определен закон распределения исходной последовательности и сгенерирована новая последовательность с аналогичными статистическими свойствами.