Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО».

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа №3
Вариант №12
Численное интегрирование

Выполнил
Путинцев Данил Денисович
Группа P3207
Проверил(а)
Преподаватель: Рыбаков Степан Дмитриевич

Санкт-Петербург 2025 год

Цель лабораторной работы.
Найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

7. Вычисление заданного интеграла.
8. Выводы

Вычислить интеграл, приведенный в таблице 1, точно.

$$\int_1^2 (x^3+2x^2-3x-12)\,dx=\frac{x^4}{4}+2\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}-12x=\left(4+\frac{16}{3}-6-24\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{3}{2}-12\right)=-8.0833$$

Вычислить интеграл по формуле Ньютона – Котеса при *n* = 6.
Коэффициенты Котеса для n = 6

$$c_6^0=c_6^6=41\frac{(b-a)}{840},c_6^1=c_6^5=216\frac{(b-a)}{840},c_6^2=c_6^4=27\frac{(b-a)}{840},c_6^3=272\frac{(b-a)}{840},$$

Найдем x_i:

$$x_i=a+(i-1)\frac{b-a}{n-1},\ x_0=1,x_1=\frac{7}{6},x_2=\frac{4}{3},x_3=\frac{3}{2},x_4=\frac{5}{3},x_5=\frac{11}{6},x_6=2$$

Найдем $f(x_i)$:

$$f(x_0)=-12,f(x_1)=-11.19,f(x_2)=-10.07,f(x_3)=-8.625,f(x_4)=-6.815,f(x_5)=-4.62,f(x_6)=-2$$

Формула Ньютона-Котеса

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{i=1}^n f(x_i)c_n^i=-8.084$$

Метод средних прямоугольников при n = 10

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{i=1}^n h_i f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right),\ x_{i-1/2}=\frac{x_{i-1}+x_i}{2}=x_{i-1}+\frac{h_i}{2}$$

$$h=\frac{2-1}{10}=\frac{1}{10}$$

$$x_{1/2}=1+\frac{1}{20}=\frac{21}{20},x_{3/2}=1+\frac{3}{20}=\frac{23}{10},x_{5/2}=1+\frac{5}{20}=\frac{25}{20},x_{7/2}=1+\frac{7}{20}=\frac{27}{20},x_{9/2}=1+\frac{9}{20}=\frac{29}{20},x_{11/2}=1+\frac{11}{20}=\frac{31}{20}$$

$$x_{13/2}=1+\frac{13}{20}=\frac{33}{20},x_{15/2}=1+\frac{15}{20}=\frac{35}{20},x_{17/2}=1+\frac{17}{20}=\frac{37}{20},x_{19/2}=1+\frac{19}{20}=\frac{39}{20}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{i=1}^n h_i f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)=1/10*f(21/20)+1/10*f(23/20)+1/10*f(25/20)+1/10*f(27/20)$$

+

$$+1/10*f(29/20)+1/10*f(31/20)+1/10*f(33/20)+1/10*f(35/20)+1/10*f(37/20)+$$
$$+1/10*f(39/20)-8.089$$

Метод трапеции

$$\int_a^b f(x)\,dx=h*\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}y_i\right)=\int_a^b f(x)\,dx=\frac{h}{2}*\left(y_0+y_n+2*\sum_{i=1}^{n-1}y_i\right)$$

$y_0 = -12, y_1 = -11.55, y_2 = -10.992, y_3 = -10.323, y_4 = -9.536, y_5 = -8.625, y_6 = -7.584, y_7 = -6.407$
$y_8 = -5.088, y_9 = -3.621, y_{10} = -2$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} * \left(y_0 + y_n + 2 * \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) = 1/20 * (\ldots) = -8.0725$$

Метод Симпсона

$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{3}\left[\left(y_0 + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}) + y_n\right)\right] = -8.0833$$

Сравнить результаты с точным значением интеграла:

Точное значение интеграла равно -8.0833

Для метода Ньютона-Котеса при n = 6, $|I_{точн} - I_{cotes}| = |-8.0833 - (-8.084)| = 0.00066$

Для метода средних прямоугольников при n = 10 $|I_{точн} - I_{sr}| = |-8.0833 - (-8.089)| = 0.00567$

Для метода трапеции при n = 10 $|I_{точн} - I_{trap}| = |-8.0833 - (-8.0725)| = 0.0108$

Для метода Симпсона погрешности нет

Определить относительную погрешность вычислений для каждого метода

Для метода Ньютона-Котеса при n = 6, $\frac{0.00066}{8.0833} * 100\% = 0.008\%$

Для метода средних прямоугольников при n = 10, $\frac{0.00567}{8.0833} * 100\% = 0.07\%$

Для метода трапеции при n = 10 $\frac{0.0108}{8.0833} * 100\% = 0.13\%$

Для метода Симпсона погрешности нет

Как видно из результатов лучший результат показал метод Симпсона

Листинг программы

Код программы: https://github.com/danp1t/ITMO/tree/main/comp_math/lab3

Результаты выполнения программы.

Лабораторная работа №3

Работа сделана Путинцевым Данилом, ИСУ: 409425

Вариант №12

Численное интегрирование

Добро пожаловать в программу, которая осуществляет численное интегрирование

Список команд доступен по команде /help

1. /help - вывести список команд с их описанием
2. /exit - выход из программы
3. /info - вывести информацию о введеденных данных
4. /start - запуск программы
5. /clear - очистка введенных данных
6. /choice_equations - выбор уравнения
7. /input_interval - ввод интервала с клавиатуры
8. /input_epsilon - ввод погрешности с клавиатуры

Введите команду: 4

0. 2x^3 + 3.41x^2 - 1.943x + 2.12

1. sin(x) + cos(x) - 0.4 = 0.2

2. cos(x) - 0.34x = 0.21

3. -3.2x^3 - 3.2x = 2

4. -33x^3 + 21.23x^2 + 3 = 2.32

Введите номер функции: 3

Введите нижнюю границу интервала: 1

Введите верхнюю границу интервала: 4

Введите точность: 0.002

Выберете способ численного интегрирования

1. Метод левых прямоугольников
2. Метод правых прямоугольников
3. Метод средних прямоугольников
4. Метод трапеций
5. Метод Симпсона

Введите номер метода: 3

==

Уравнение: $-3.2x^3 - 3.2x = 2$

Интервал: [1.0, 4.0]

Точность: 0.002

Результат интегрирования: 233.999176

Оценка погрешности: 0.000824

==

Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены и применены на практике численные методы вычисления определенных интегралов. Основное внимание уделялось следующим методам: прямоугольников (левых, правых и средних), трапеций, Ньютона-Котеса и Симпсона. Для реализации этих методов использовался язык программирования Python, что позволило наглядно продемонстрировать их эффективность и точность.