Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО».

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Индивидуальная домашняя работа №4 (ИДЗ №4)
Вариант №48

Выполнил
Путинцев Данил Денисович
Группа P3107
Номер ИСУ: 409425

Санкт-Петербург 2024 год

Задание 1.

Исследовать данную функцию на равномерную непрерывность на данном множестве пользуясь определением.

$f(x) = x - \frac{2}{x^2}$ а) X = [1, +∞); б) X = (0, 1)

а) Для начала выпишем определение равномерной непрерывности

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0: \ \forall a, \ b \in [1,+\infty): \ |a-b|<\delta \ \ |f(a)-f(b)|<\varepsilon$

Очевидно, что функция f(x) является непрерывной на промежутке [1, +∞), так как не существует точек разрыва, которые бы делали прерывной данную функцию. Для доказательства равномерной непрерывности возьмем любое ε > 0 и подберем для него значение δ, такое, чтобы для $\forall a, \ b \in$ [1, +∞), удовлетворяющих неравенству |a — b| < δ, выполнялось неравенство $|a-\frac{2}{a^2}-b+\frac{2}{b^2}|<\varepsilon$

Преобразуем неравенство

$$\frac{a^3-2}{a^2}-\frac{b^3-2}{b^2}=\frac{a^3*b^2-2b^2-b^3*a^2+2a^2}{b^2*a^2} = \frac{a^3*b^2-a^2*b^3+2a^2-2b^2}{a^2*b^2} = \frac{a^2*b^2(a-b)+2(a^2-b^2)}{a^2*b^2} < \varepsilon$$

$$\frac{a^2*b^2(a-b)+2(a-b)(a+b)}{a^2*b^2}=\frac{(a-b)(a^2*b^2+2(a+b))}{a^2*b^2}=\frac{(a-b)(a^2*b^2+2a+2b)}{a^2*b^2}=(a-b)\frac{a^2*b^2+2a+2b}{a^2*b^2}<\varepsilon$$

$(a-b)(1+\frac{2a+2b}{a^2*b^2})<\varepsilon$. Вспомним про модуль $|(a-b)(1+\frac{2a+2b}{a^2*b^2})|<\varepsilon$

Рассмотрим, $\frac{2a+2b}{a^2*b^2}$, мы знаем, что a,b ∈ [1, +∞). Как известно из курса математического анализа степенная функция быстрее возрастает, чем линейная функция. Следовательно, наибольшее значение рассматриваемого элемента будет при a = b = 1. то есть максимальное значение элемента равно 4. Т.е $(a-b)(1+4) = 5(a-b) < \varepsilon$. И тогда $(a-b) < \frac{\varepsilon}{5}$. Тогда для выполнения неравенства достаточно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$. Следовательно, функция равномерно непрерывная на рассматриваемом промежутке.

б) Во втором случае a,b ∈ (0, 1). Рассмотрим, $\frac{2a+2b}{a^2*b^2}$, при стремлении к нулю a или b значение этого элемента будет стремиться к +∞. Но тогда не будет на этом промежутке равномерной непрерывности. Давайте проверим это рассуждение. Для начала напишем отрицание к определению равномерной непрерывности.

$\exists \varepsilon>0 \ \forall \delta>0: \ \exists a, \ b \in (0,1): \ |a-b|<\delta \ \ |f(a)-f(b)| \geqslant \varepsilon$

Пусть ε = 1. Тогда $|(a-b)(1+\frac{2a+2b}{a^2*b^2})| \geqslant 1$. при a,b ∈ (0, 1). Давайте это проверим.

Пусть a = δ < 1. $b = \frac{\delta}{\delta+1}$. Тогда $|a-b|=|\delta-\frac{\delta}{\delta+1}|=|\frac{\delta^2+\delta-\delta}{\delta+1}|=|\frac{\delta^2}{\delta+1}|<\delta$

Рассмотрим,

$$|(a-b)(1+\frac{2a+2b}{a^2*b^2})|=|(\frac{\delta^2}{\delta+1})(1+(\frac{2\delta+\frac{2\delta}{\delta+1}}{\frac{\delta^2*\delta^2}{(\delta+1)^2}}))|=|(\frac{\delta^2}{\delta+1})(1+(\frac{\frac{2\delta^2+4\delta}{\delta+1}}{\frac{\delta^4}{(\delta+1)^2}}))|=|(\frac{\delta^2}{\delta+1})(1+\frac{(2\delta^2+4\delta)(\delta+1)}{\delta^4})|$$

$$.|(\frac{\delta^2}{\delta+1})(\frac{\delta^4}{\delta^4}+\frac{(2\delta^2+4\delta)(\delta+1)}{\delta^4})|=|(\frac{\delta^2}{\delta+1})(\frac{\delta^4+(2\delta^2+4\delta)(\delta+1)}{\delta^4})|=|(\frac{\delta^2}{\delta+1})\frac{(\delta^4+2\delta^3+6\delta^2+4\delta)}{\delta^4}|$$

$|\frac{\delta^4+2\delta^3+6\delta^2+4\delta}{\delta^2*(\delta+1)}|=|\frac{\delta^4+2\delta^3+6\delta^2+4\delta}{\delta^3+\delta^2}|$. Выделим целую часть. Тогда получаем.

$|1+\delta+\frac{5\delta^2+4\delta}{\delta^3+\delta^2}|\geqslant 1$. Что и требовалось доказать. Следовательно, функция не является равномерно непрерывной на этом промежутке.

Задание 2.

Преобразовать выражение к интегральной сумме, доказать существование соответствующего интеграла и найти предел $\lim\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2})$

Преобразуем выражение

$$\lim\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2})=\lim\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2}+\frac{n}{n^2}-\frac{n}{n^2})=\lim\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2}+\frac{n}{n^2})-\lim\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2}$$

$\lim\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+...+\frac{n}{n})-\lim\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2}$. Вспомним определение интегральной суммы: $\sum\limits_{i=1}^{n}f(c_i)*\Delta x$

Здесь $\Delta x=\frac{1}{n}$ - длина частичного отрезка, полученного в результате разбиения отрезка [0; 1] на n равных частей. А $f(c_1)=\frac{1}{n}$, $f(c_2)=\frac{2}{n}$,..., $f(c_i)=\frac{i}{n}$, ..., $f(c_n)=\frac{n}{n}$, где c_i — это концы правых отрезков. Тогда $f(x)=x$. Так как функция $f(x)=x$ непрерывна на отрезке [0; 1], то она интегрируема на нем.

Тогда получаем $\lim\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+...+\frac{n}{n})-\lim\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2}=\lim\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n}*\frac{1}{n}-0=\int\limits_0^1 x\,dx=\frac{x^2}{2}=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$

Задание 3.

Аналитический этап работы с определенным интегралом. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, [a, b] = [1, e]

- Составить верхнюю и нижнюю суммы Дарбу, доказать интегрируемость функции (разбиение использовать равномерное)

Выпишем определение верхней и нижней сумм Дарбу

Верхняя сумма Дарбу = $\sum_{i=1}^{n} M_i * \Delta x_i$, где M_i — это супремум функции f(x), $x \in \Delta x_i$

Нижняя сумма Дарбу = $\sum_{i=1}^{n} m_i * \Delta x_i$, где m_i — это инфинум функции f(x), $x \in \Delta x_i$

Допустим, что функцию разбили на n частей. Для того, чтобы составить верхнюю и нижнюю суммы, нужно изучить поведение функции. Для нахождения поведения функции возьмем производную $f'(x) = (\frac{1}{\sqrt{x}})' = -\frac{1}{2} * \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2 * x^{\frac{3}{2}}}$, нам дан отрезок [1, e], следовательно функция убывает на всем нашем промежутке. Следовательно, для верхних сумм необходимо брать левые точки отрезков нашего разбиения, а для нижних сумм — правые.

Тогда составим верхнюю сумму Дарбу $\sum_{i=1}^{n} M_i * \Delta x_i$. Отрезок у нас от 1 до e. Тогда $\Delta x_i = \frac{e-1}{n}$

Найдем левые значения для наших отрезков разбиения.

$$M_1 = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1, \quad M_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e-1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n+e-1}{n}}}, \quad M_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e-1}{n} + \frac{e-1}{n}}}, \quad \ldots, \quad M_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e-1}{n} * (n-1)}}$$

Тогда верхняя сумма Дарбу равна

$$\sum_{i=1}^{n} M_i * \Delta x_i = \frac{e-1}{n} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e-1}{n}}} * \frac{e-1}{n} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e-1}{n} * (i-1)}} * \frac{e-1}{n} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e-1}{n} * (n-1)}} * \frac{e-1}{n}$$

Теперь составим нижнюю сумму Дарбу $\sum_{i=1}^{n} m_i * \Delta x_i$ Найдем первые значения функции для наших отрезков разбиения.

$$m_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e-1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n+e-1}{n}}}, \quad m_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e-1}{n} + \frac{e-1}{n}}}, \quad \ldots, \quad m_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e-1}{n} * n}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Составим нижнюю сумму Дарбу

$$\sum_{i=1}^{n} m_i * \Delta x_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e-1}{n}}} * \frac{e-1}{n} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e-1}{n} * 2}} * \frac{e-1}{n} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e-1}{n} * i}} * \frac{e-1}{n} \ldots + \frac{1}{\sqrt{e}} * \frac{e-1}{n}$$

Так как функция непрерывна на отрезке [1; e], то она интегрируема.

- Для интеграла Римана данной функции по данному промежутку составить интегральную сумму (можно использовать результат их предыдущего пункта), найти предел этой суммы

Зададим способ задания промежутков, удовлетворяющее следующим условиям

$x_0 = 1, \quad x_1 = x_0 * q, \quad x_i = x_0 * q^i, \quad x_n = x_0 * q^n = e$

То есть последовательность будет у нас геометрической прогрессией. Найдем чему будет равен q: $x_n = x_0 * q^n = e$, $\quad тогда\, q^n = \frac{x_n}{x_0} = \frac{e}{1} = e\,, то\, есть\, q = \sqrt[n]{e}$

Вспомним определение интегральной суммы: $\sum_{i=1}^{n} f(c_i) * \Delta x$

Пусть $c_i = 1 * \sqrt[n]{e^i} = \sqrt[n]{e^i}$, $\Delta x = x_i - x_{i-1} = x_0 * q^i - x_0 * q^{i-1} = q^i - q^{i-1} = q^{i-1}(q-1) \ = \ \sqrt[n]{e^{i-1}}(\sqrt[n]{e}-1)$

Составим интегральную сумму.

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i) * \Delta x \ = \ \frac{1}{\sqrt[2n]{e}} * \sqrt[n]{e^{i-1}}(\sqrt[n]{e}-1) + \frac{1}{\sqrt[2n]{e^2}} * \sqrt[n]{e^{i-1}}(\sqrt[n]{e}-1) + \ldots + \frac{1}{\sqrt[2n]{e^i}} * \sqrt[n]{e^{i-1}}(\sqrt[n]{e}-1) + \ldots + \frac{1}{\sqrt[2]{e}} * \sqrt[n]{e}(\sqrt[n]{e}-1)$$

Преобразуем сумму. Вынесем $\sqrt[n]{e}-1$ за скобки. Тогда получим

$$(\sqrt[n]{e}-1)\left(\frac{1}{\sqrt[2n]{e}} * \sqrt[n]{e^{i-1}} + \frac{1}{\sqrt[2n]{e^2}} * \sqrt[n]{e^{i-1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[2n]{e^i}} * \sqrt[n]{e^{i-1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[2]{e}} * \sqrt[n]{e}\right) = (\sqrt[n]{e}-1)\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i-2}{2n}}$$

Вынесем за скобки $\frac{1}{\sqrt[n]{e^2}}$. Тогда получим $(\sqrt[n]{e}-1)\left(\frac{1}{\sqrt[n]{e^2}}\right)\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{2n}}$. Можно заметить, что мы получили в сумме геометрическую прогрессию. Найдем по формуле её сумму

$$(\sqrt[n]{e}-1)\left(\frac{1}{\sqrt[n]{e}}\right)\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{2n}} = (\sqrt[n]{e}-1)\left(\frac{1}{\sqrt[n]{e}}\right)\left(\sqrt[n]{e}\,\frac{(\sqrt{e}-1)}{\sqrt[2n]{e}-1}\right) = (\sqrt[n]{e}-1)\frac{\sqrt{e}-1}{\sqrt[2n]{e}-1}$$

Найдем предел интегральной суммы

$\lim_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{e}-1)\frac{\sqrt{e}-1}{\sqrt[2n]{e}-1}$. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Перейдем к формуле Тейлора

$$\lim_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{e}-1)\frac{\sqrt{e}-1}{\sqrt[2n]{e}-1} = \lim_{n=1}^{\infty}(\sqrt{e}-1)\frac{\sqrt[n]{e}-1}{\sqrt[2n]{e}-1} = (\sqrt{e}-1) * \lim_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt[2n]{e}-1)(\sqrt[2n]{e}+1)}{\sqrt[2n]{e}-1} = (\sqrt{e}-1) * \lim_{n=1}^{\infty}\sqrt[2n]{e}+1 = 2\sqrt{e}-2$$

- Сравнить полученный результат с ответом по формуле Ньютона-Лейбница

Найдем значение интеграла Римана. $\int_1^e \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}$. Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница. Ответ: $2\sqrt{e}-2$. Ответ сошелся.

Практический этап

Для указанной в вашем варианте и любом другом соседнем варианте функции на данном промежутке проверьте, что ответ, полученный в результате применения всех методов совпадает с тем, что вы получили в аналитическом этапе задания

```
Введите количество равномерных промежутков: 1000000
Площадь при выборе левых точек: 1.2974428794580113
Площадь при выборе правых точек: 1.2974422033667934
Площадь при выборе рандомных точек из отрезка: 1.2974425412641046
Площадь при рассчете с помошью метода трапеции: 1.297442541412373
Площадь при рассчете с помошью метода Симсона: 1.2974425414122752
```

Можно заметить, что при увеличении количества равномерных промежутков площадь стремиться к значению, которое получено аналитически.

Давайте, посмотрим соседний вариант, и найдем ответ.

3. В рамках данного задания необходимо выполнить аналитический и практический этапы работы с определенным интегралом. Подробное условие доступно по ссылке https://github.com/piikt-2-sem-calc/calc-sem-2.
$f(x) = x^2, \quad [a, b] = [1, 2];$

$$\int_1^2 x\,dx = \frac{x^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

```
Введите количество равномерных промежутков: 10000
Площадь при выборе левых точек: 2.333183334999824
Площадь при выборе правых точек: 2.333483334999824
Площадь при выборе рандомных точек из отрезка: 2.3333338064666953
Площадь при рассчете с помошью метода трапеции: 2.333333334999819
Площадь при рассчете с помошью метода Симсона: 2.333333333333161
```

Можно заметить, что при увеличении количества равномерных промежутков площадь стремиться к значению, которое получено аналитически.

Проведите измерения для мелкости $\Delta x_i, \frac{\Delta x_i}{2}, \frac{\Delta x_i}{4}, \frac{\Delta x_i}{8}, \frac{\Delta x_i}{16}$ при фиксированной Δx_i

Пусть $\Delta x_i = \frac{e-1}{100}$. Тогда для $\Delta x_i = \frac{e-1}{100}$ результаты будут такими.

```
Введите количество равномерных промежутков: 100
Площадь при выборе левых точек: 1.3008325543605292
Площадь при выборе правых точек: 1.2940716421858134
Площадь при выборе рандомных точек из отрезка: 1.2974371455877733
Площадь при рассчете с помошью метода трапеции: 1.2974520982731714
Площадь при рассчете с помошью метода Симсона: 1.2974425414552893
```

При $\frac{\Delta x_i}{2}=\frac{e-1}{200}$ результаты будут такими

```
Введите количество равномерных промежутков: 200
Площадь при выборе левых точек: 1.2991351587034388
Площадь при выборе правых точек: 1.295754702616081
Площадь при выборе рандомных точек из отрезка: 1.2974505251242052
Площадь при рассчете с помошью метода трапеции: 1.2974449306597597
Площадь при рассчете с помошью метода Симсона: 1.2974425414036972
```

При $\frac{\Delta x_i}{4}=\frac{e-1}{400}$ результаты будут такими

```
Введите количество равномерных промежутков: 400
Площадь при выборе левых точек: 1.2982882527395527
Площадь при выборе правых точек: 1.296598024695874
Площадь при выборе рандомных точек из отрезка: 1.297426136914316
Площадь при рассчете с помошью метода трапеции: 1.2974431387177137
Площадь при рассчете с помошью метода Симсона: 1.2974425414004735
```

При $\frac{\Delta x_i}{8}=\frac{e-1}{800}$ результаты будут такими

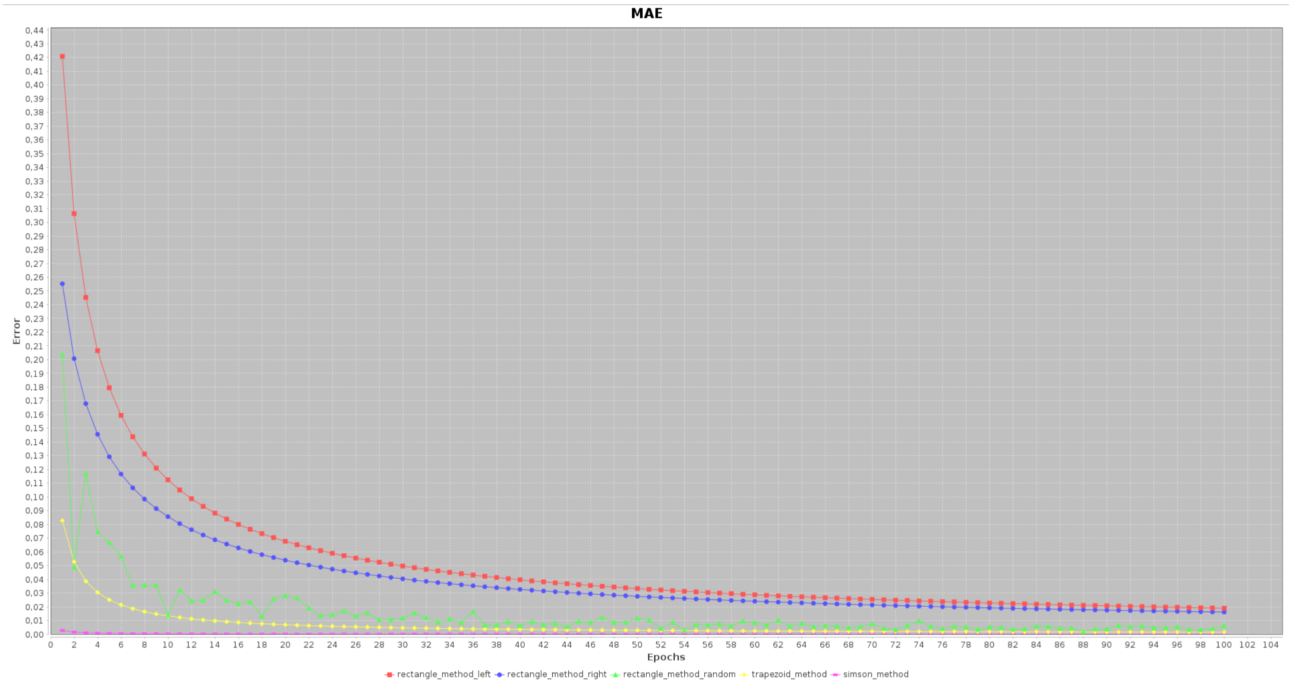
```
Введите количество равномерных промежутков: 800
Площадь при выборе левых точек: 1.2978652477407004
Площадь при выборе правых точек: 1.2970201337188607
Площадь при выборе рандомных точек из отрезка: 1.297431143538363
Площадь при рассчете с помошью метода трапеции: 1.2974426907297778
Площадь при рассчете с помошью метода Симсона: 1.2974425414002677
```

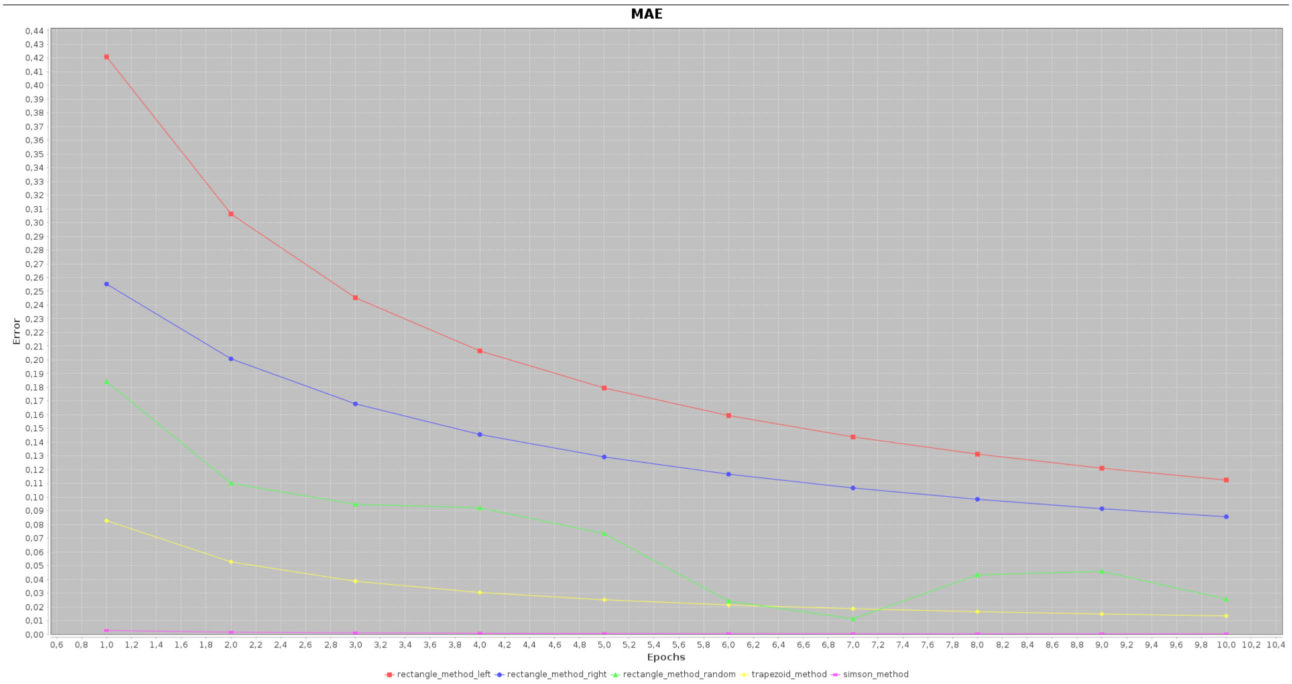
При $\frac{\Delta x_i}{16}=\frac{e-1}{1600}$ результаты будут такими

```
Введите количество равномерных промежутков: 1600
Площадь при выборе левых точек: 1.2976538572380896
Площадь при выборе правых точек: 1.29723130022717
Площадь при выборе рандомных точек из отрезка: 1.2974433452854912
Площадь при рассчете с помошью метода трапеции: 1.2974425787326282
Площадь при рассчете с помошью метода Симсона: 1.297442541400237
```

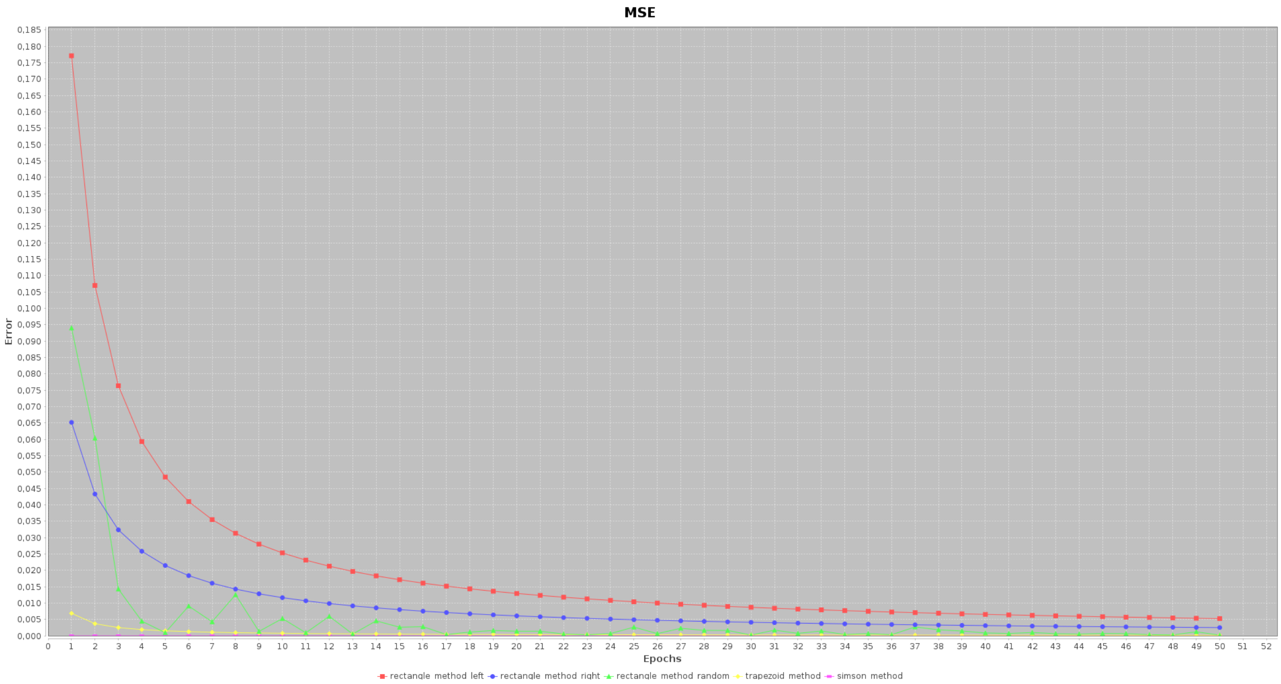
Постройте график зависимости отклонения от величины шага ([MSE](), [MAE]())

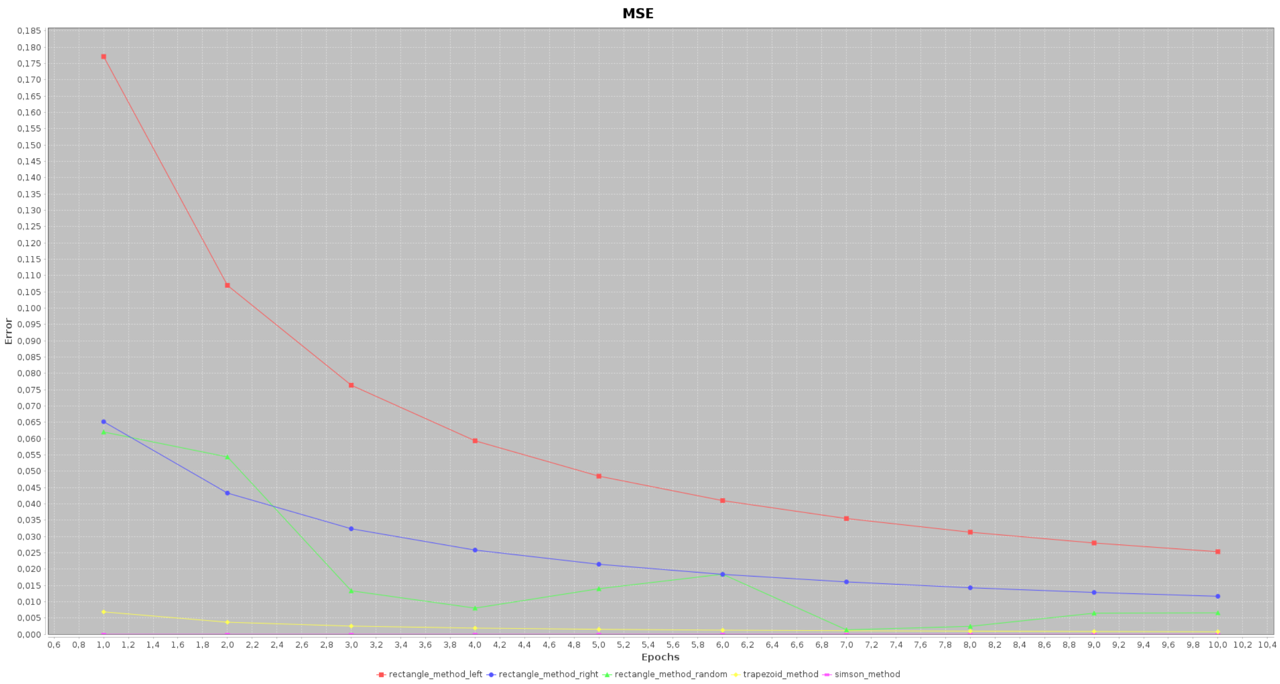
MAE





MSE





Сделайте выводы об эффективности методов (для полного анализа рекомендуется изменять не только функцию, но и сам промежуток), опираясь на следующие параметры:

- сложность вычислений

  Сложность вычислений — это O(n).
- время вычислений. При n = 10000

при n = 100000

```
Введите количество равномерных промежутков: 10000
Площадь при выборе левых точек: 1.297476346916734
Площадь при выборе правых точек: 1.297408737794987
Площадь при выборе рандомных точек из отрезка: 1.2974422993605874
Площадь при рассчете с помошью метода трапеции: 1.2974425423558593
Площадь при рассчете с помошью метода Симсона: 1.297442541400155
Время выполнения алгоритма: 59 мс
```

при n = 1000000

```
Введите количество равномерных промежутков: 1000000
Площадь при выборе левых точек: 1.2974428794580113
Площадь при выборе правых точек: 1.2974422033667934
Площадь при выборе рандомных точек из отрезка: 1.2974425414389983
Площадь при рассчете с помошью метода трапеции: 1.297442541412373
Площадь при рассчете с помошью метода Симсона: 1.2974425414122752
Время выполнения алгоритма: 1401 мс
```

при n = 10000000

```
Введите количество равномерных промежутков: 10000000
Площадь при выборе левых точек: 1.2974425752827996
Площадь при выборе правых точек: 1.297442507673678
Площадь при выборе рандомных точек из отрезка: 1.2974425414677702
Площадь при рассчете с помошью метода трапеции: 1.297442541478426
Площадь при рассчете с помошью метода Симсона: 1.297442541478425
Время выполнения алгоритма: 15436 мс
```

Скорость с n = 1000000 начинает линейно возрастать.

- точность вычислений

Точность вычислений, начиная с n = 10000, уже довольно хорошая (верны первые 3 знака после запятой). Начиная с n = 1000000, точность уже такая, что верны первые 6 знаков после запятой.

Задание 4.

Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрически. Сделать рисунок

$x(t)=(1-\cos t)\sin t\,,\quad y(t)=(a-\cos t)\cos t\quad (a>0)$

Для нахождения площади фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрически, используем эту формулу. $\int x(t)*y'(t)\,dt$. Для начала найдем производную для функции y(t).

$y'(t)=(a-\cos t)'\cos t+(a-\cos t)*(\cos t)'=(0+\sin t)*\cos t+(a-\cos t)*(-\sin t)$ =

= $\sin t*\cos t+\sin t*\cos t-a\sin t=2\sin t*\cos t-a*\sin t$

Затем перемножим подынтегральное выражение.

$(2\sin t*\cos t-a*\sin t)*(1-\cos t)*\sin t\;=\;(2\sin t*\cos t-a*\sin t)*(\sin t-\sin t*\cos t)$ =

= $2\sin^2 t*\cos t-2\sin^2 t*\cos^2 t-a*\sin^2 t+a*\sin^2 t*\cos t$. (*) Итого, получаем

$\int 2\sin^2 t*\cos t-2\sin^2 t*\cos^2 t-a*\sin^2 t+a*\sin^2 t*\cos t\,dt$. По свойству линейности разобьем данный интеграл на сумму интегралов.

$\int 2\sin^2 t*\cos t\,dt-\int 2\sin^2 t*\cos^2 t\,dt-\int a*\sin^2 t\,dt+\int a*\sin^2 t*\cos t\,dt$. Найдем первообразные.

$$\int 2\sin^2 t*\cos t\,dt\;=\;2\int \sin^2 t*\cos t\,dt=2\int \sin^2 t\,d(\sin t)=\frac{2\sin^3 t}{3}$$

Рассмотрим

$$\int 2\sin^2 t\cos^2 t\,dt=2\int \sin^2 t\cos^2 t\,dt=2\int \sin^2 t(1-\sin^2 t)\,dt=2\int \sin^2 t-\sin^4 t\,dt=2\int \sin^2 t\,dt-2\int \sin^4 dt$$
$$=\frac{(4t-\sin 4t)}{16}.$$

Рассмотрим.

$\int a*\sin^2 t\,dt=a\int \sin^2 t\,dt=a\int \frac{1-\cos 2t}{2}=\frac{a}{2}\int 1\,dt-\frac{a}{2}\int \cos 2t\,dt=\frac{ta}{2}-\frac{a}{2}\int \cos 2t\,dt$. Далее воспользуемся формулой замены переменной.

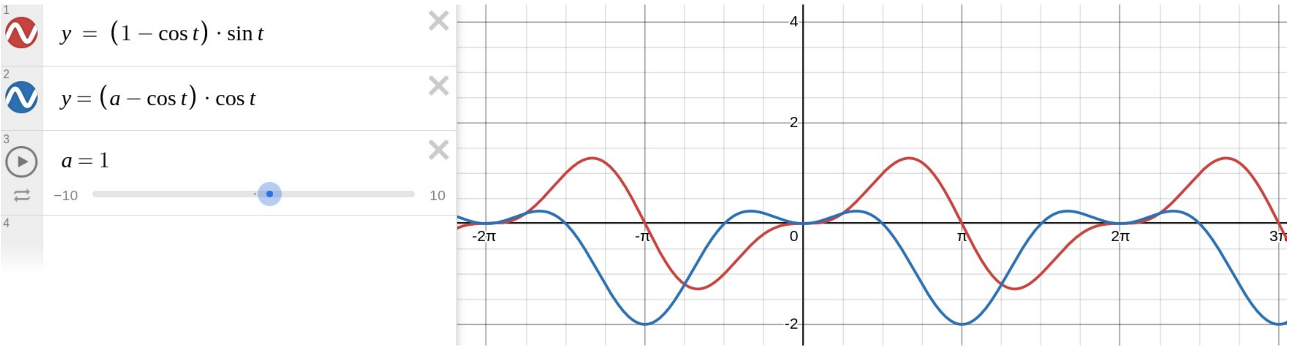
$\textit{Пусть}\quad u=2t\,,du=2dt\,.\quad \textit{Тогда}-\frac{a}{4}\int \cos(u)\,du=-\frac{a}{4}\sin 2t\,,\quad \textit{Итого}:\frac{ta}{2}-\frac{a}{4}\sin 2t$

Рассмотрим последнюю первообразную в этом примере.

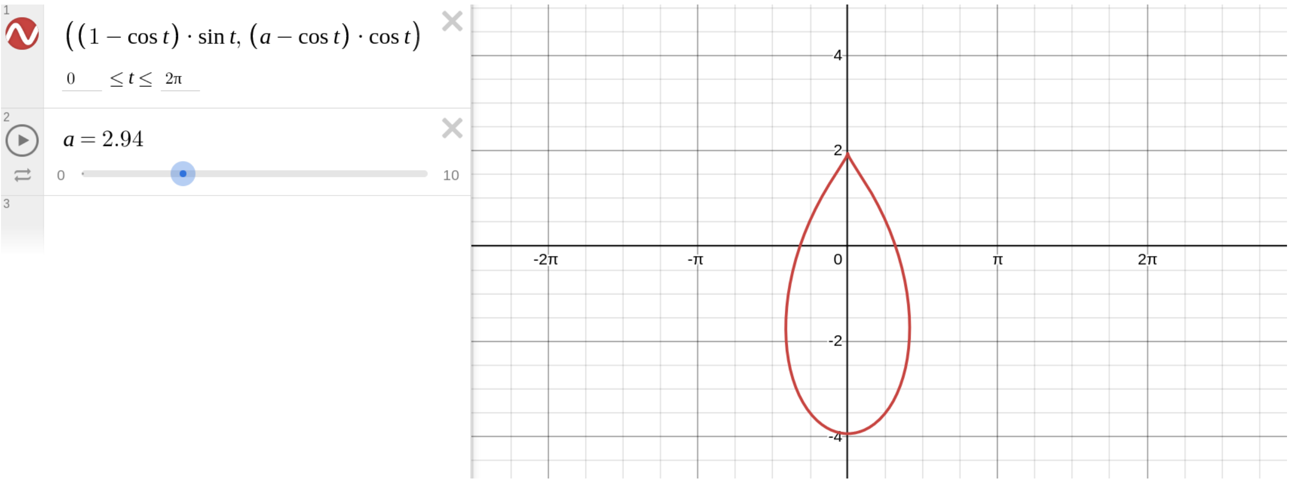
$$\int a*\sin^2 t*\cos t\,dt=a\int \sin^2 t*\cos t\,dt=\frac{a\sin^3 t}{3}(\textit{см. решение}\,1\,\textit{интеграла})$$

Тогда получаем, что первообразная (*) равна $\frac{2\sin^3 t}{3}-\frac{(4t-\sin 4t)}{16}-\frac{ta}{2}+\frac{a}{4}\sin 2t+\frac{a\sin^3 t}{3}$ (F(t))

Нетрудно заметить, что графики x(t) и y(t) периодические и их период — [0, 2П].



А исходный график выглядит таким образом.



Так как функция непрерывная, то она интегрируема, поэтому площадь можно вычислить по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_{0}^{2\Pi} x(t) * y'(t) = F(2\Pi) - F(0) = -\frac{8\Pi}{16} - \frac{2\Pi a}{2} = |-\Pi(a + \frac{1}{2})| = \Pi(a + \frac{1}{2})$$

Задание 5.

Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением $x^3+y^3=3axy$

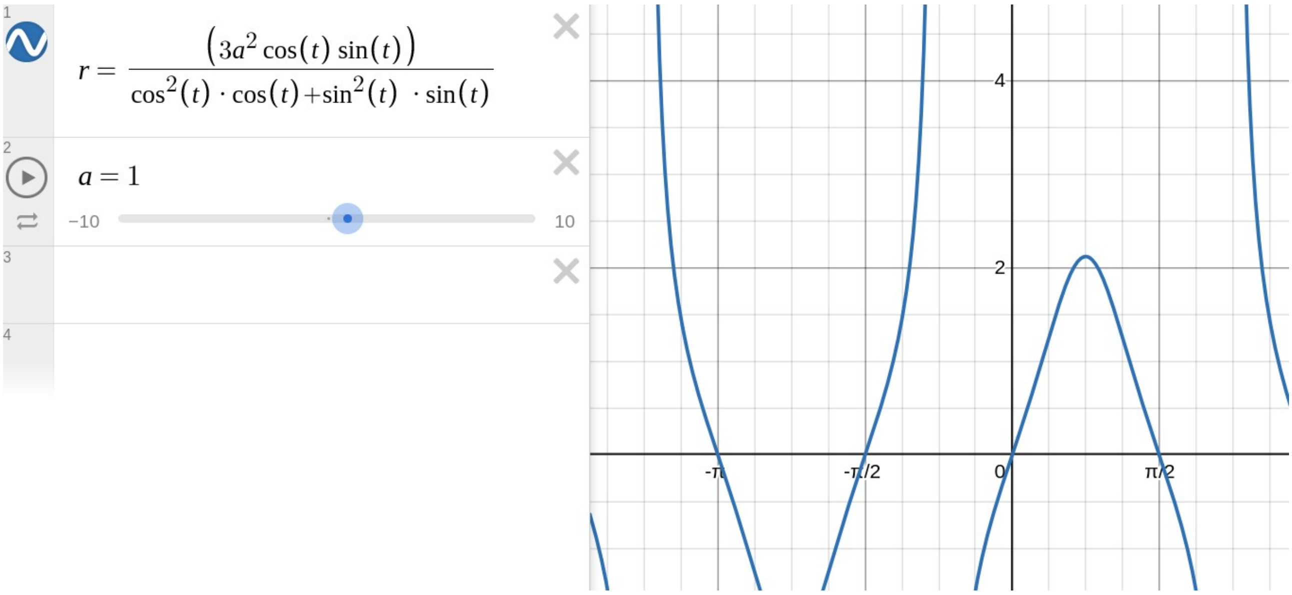
Приведем исходное уравнение к полярным координатам $x=r\cos\wp$, $y=r\sin\wp$

$$r^3\cos^3\wp+r^3\sin^3\wp=3*a*r*\cos\wp*r*\sin\wp$$

$$r^3\cos^3\wp+r^3\sin^3\wp=3ar^2\cos\wp\sin\wp$$

$$r^3(\cos^3\wp+\sin^3\wp)=3ar^2\cos\wp\sin\wp$$

$r=\dfrac{3a^2\cos\wp\sin\wp}{\cos^3\wp+\sin^3\wp}$. Ура, мы нашли r!



Выберем промежуток интегрирование от 0 до $\dfrac{\Pi}{2}$. Так как на этом промежутку r принимает положительное значение.

Мы можем заметить, что наш график не симметричен как относительно оси Y, так и относительно оси X. То есть она состоит всего лишь из одной петли.

Вычислим площадь в полярных координатах по формуле

$$\int_0^{\frac{\Pi}{2}}\frac{1}{2}r^2(\wp)d\wp=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\Pi}{2}}\left(\frac{3a^2\cos\wp\sin\wp}{\cos^3\wp+\sin^3\wp}\right)^2d\wp=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\Pi}{2}}\left(\frac{9a^4\cos^2\wp\sin^2\wp}{\cos^3\wp+\sin^3\wp}\right)^2d\wp=\frac{9a^4}{2}\int_0^{\frac{\Pi}{2}}\frac{\cos^2\wp\sin^2\wp}{(\cos^3\wp+\sin^3\wp)^2}d\wp$$

Вычислим первообразную для подынтегральной функции

$\displaystyle\int\frac{\cos^2\wp\sin^2\wp}{(\cos^3\wp+\sin^3\wp)^2}=\int\frac{tg^2\wp}{\cos^2\wp(tg^6\wp+2tg^3\wp+1)}d\wp$ Используем правило замены переменной.

$x=tg(\wp)$, $dx=\frac{1}{\cos^2\wp}$. $\int\frac{x^2}{x^6+2x^3+1}dx=\int\frac{x^2}{(x^3+1)^2}dx$. Используя метод неопределенных коэффициентов, придем к ответу $\frac{9a^4}{2}\int\frac{x^2}{(x^3+1)^2}dx=-\frac{1}{3x^3+3}*\frac{9a^4}{2}$. Вспомним про замену.

$-\frac{1}{3x^3+3}*\frac{9a^4}{2}=-\frac{9a^4}{6tg^3\wp+6}=-\frac{3a^4}{2tg^3\wp+2}$. Применим формулу Ньютона-Лейбница. Тогда получим.

$F\left(\frac{\Pi}{2}\right)-F(0)=0-\frac{-3a^4}{2}=\frac{3a^4}{2}$

Задание 6.

Кривая задана как пересечение поверхностей, заданных данными уравнениями в декартовых координатах. Задайте кривую параметрически и найдите длину кривой.

$2\,arctg\,\dfrac{z}{x}=\ln y\,,\;\; x^2+z^2=y^2$ Зададим параметризацию кривой.

$$e^{2\arctan\frac{z}{x}}=y\,,\;\; y^2=e^{4\arctan\frac{z}{x}},\;\; \textit{тогда}\;\; x^2+z^2=e^{4\arctan\frac{z}{x}},\;\; \textit{пусть}\;\; t=\frac{z}{x},\;\; \textit{тогда}\, z=xt\,.$$

$$\textit{Итого}\,,\;\; x^2+x^2t^2=e^{4\arctan t}=x^2\left(1+t^2\right)=e^{4\arctan t},\;\; \textit{тогда}\, x^2=\frac{e^{4\arctan t}}{1+t^2}\,,\textit{и тогда}\, x=\sqrt{\frac{e^{4\arctan t}}{1+t^2}}.$$

Получаем такую параметризацию

$$x(t)=\sqrt{\frac{e^{4\arctan t}}{1+t^2}}\,,\;\; y(t)=e^{2\arctan t},\;\; z(t)=\sqrt{\frac{e^{4\arctan t}}{1+t^2}}\,t$$

Найдем длину кривой по формуле $\int\limits_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2\,dt}$

Для начала найдем производные:

$$x'(t)=\frac{\left(e^{2\arctan t}\right)'\sqrt{t^2+1}-\left(t^2+1\right)'e^{2\arctan t}}{t^2+1}=\frac{\sqrt{t^2+1}\,e^{2\arctan t}*2\dfrac{1}{t^2+1}-\dfrac{e^{2\arctan t}}{2\sqrt{t^2+1}}*2t}{t^2+1}=-\frac{(t-2)\,e^{2\arctan t}}{\left(t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y'(t)=\frac{2e^{2\arctan t}}{t^2+1}$$

$$z'(t)=\left(\frac{te^{2\arctan t}}{\sqrt{t^2+1}}\right)'=\frac{\left(te^{2\arctan t}\right)'\sqrt{t^2+1}-\left(\sqrt{t^2+1}\right)'te^{2\arctan t}}{t^2+1}=\frac{\left(e^{2\arctan t}+2te^{2\arctan t}\dfrac{1}{t^2+1}\right)\sqrt{t^2+1}-\dfrac{t^2e^{2\arctan t}}{\sqrt{t^2+1}}}{t^2+1}$$
$$=\frac{(2t+1)\sqrt{t^2+1}\,e^{2\arctan t}}{\left(t^2+1\right)^2}$$

Тогда получим следующую первообразную

$\int\limits_a^b\sqrt{\dfrac{(2-t)^2e^{4\arctan t}}{\left(t^2+1\right)^3}+\dfrac{4e^{4\arctan t}}{\left(t^2+1\right)^2}+\dfrac{(2t+1)^2\left(t^2+1\right)e^{4\arctan t}}{\left(t^2+1\right)^4}}$. Преобразуем подынтегральное выражение

$\textit{Пусть}\;\; X=e^{2\arctan t},\;\; \textit{тогда}$

$$\sqrt{\frac{(2X-Xt)^2+4X^2+4t^2X^2+(2tX+X)^2}{\left(t^2+1\right)^3}}=\sqrt{\frac{4X^2-4X^2t+X^2t^2+4X^2+4t^2X^2+4t^2X^2+4X^2t+X^2}{\left(t^2+1\right)^3}}=\sqrt{\frac{9X^2t^2+9X^2}{\left(t^2+1\right)}}$$

$$\int_a^b \sqrt{\frac{9X^2}{(t^2+1)^2}}=\int_a^b \frac{3X}{t^2+1}=\int_a^b \frac{3e^{2\arctan t}dt}{t^2+1}=3\int_a^b \frac{e^{2\arctan t}dt}{t^2+1}=3\int_a^b \frac{e^{2\arctan t}d(2\arctan t)}{t^2+1}=\frac{3}{2}\int_a^b e^{2\arctan t}d(2\arctan t)=\frac{3}{2}e^{2\arctan t}$$

Так как arctan пробегает значение от -inf до +inf, то это будут наши отрезки интегрирования

$\frac{3}{2}\left(e^{\Pi}-e^{-\Pi}\right)$. Умножим на два. Так как кривая при пересечении симметрична. Тогда получим $3\left(e^{\Pi}-e^{-\Pi}\right)$

Ответ: $3\left(e^{\Pi}-e^{-\Pi}\right)$

Задание 7.

Исследовать интеграл на сходимость в каждой особой точке. Если функция меняет знак — на абсолютную и условную сходимость

$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x\ln x}dx$. Данная функция знакопеременная, имеет три особые точки: 0, 1 и +inf. Разобьем несобственный интеграл на 4 интеграла так, чтобы в каждом из них была одна особая точка. Заметим что функция $\sin x \in R_{loc}$[0, +inf),

Возьмем производную для изучение монотонности.

$(x\ln x)'=\ln x+1.\ \ln x=-1\,,\ \ \textit{при}\ x=\frac{1}{e}\,,\ \ \textit{то есть при}\ x>\frac{1}{e}\ \textit{функция}\ x\ln x\ \textit{монотонно возрастает}$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x\ln x}dx=\int_0^{0.5} \frac{\sin x}{x\ln x}dx+\int_{0.5}^{1} \frac{\sin x}{x\ln x}dx+\int_1^{2} \frac{\sin x}{x\ln x}dx+\int_2^{\infty} \frac{\sin x}{x\ln x}dx$$

Рассмотрим 1 интеграл $\int_0^{0.5} \frac{\sin x}{x\ln x}dx$, функция, $\lim_{f=0+0}\int_f^{0.5} \frac{\sin x}{x\ln x}dx=\int_f^{0.5} \frac{1}{\ln x}dx$. Интеграл сходится так как

$\lim_{f=0+0}\int_f^{0.5} \frac{1}{\ln x}dx=0-\int \frac{1}{\ln x}.\ \textit{А это конечное число так как точка}\ \ 0.5\ \ \textit{не является точкой разрыва}$

Поэтому

$\int \frac{1}{\ln x}\sim C.\ \textit{Следовательно интеграл ограниченный}\,,\ \ \textit{следовательно интеграл сходится}$

Рассмотрим 2 интеграл. $\int_{0.5}^{1} \frac{\sin x}{x\ln x}dx$, по признаку Дирихле интеграл сходится. Так как

$F(w)=\int_{0.5}^{w} \sin x=\cos(w)-\cos(0.5)<+inf\,,\ \ \textit{где}\ \ w\ \in[0.5\,,1)\,,\ \ \textit{а}\ x*\ln x\ \textit{стремится к нулю при}\ x=1$

Рассмотрим 3 интеграл.

$\int_1^{2} \frac{\sin x}{x\ln x}dx=\lim_{e=1+0}\int_e^{2} \frac{\sin x}{x\ln x}dx$, - расходится. Синус на этом множестве знак не меняет. Значит, весь интеграл расходится.

Рассмотрим 4 интеграл.

$\int_2^{+inf} \frac{\sin x}{x \ln x} dx$, *данный интеграл меняет знак . Исследуем его на абсолютную сходимость* .$|\int_2^{+inf} \frac{\sin x}{x \ln x} dx|$

$\sin x$ *ограничен* . $x \ln x$ *стремится к* $+inf$ *, значит интеграл сходится*

Ответ: Интеграл расходится

Задание 8.

Исследовать интеграл на сходимость в каждой особой точке. Если функция меняет знак — на абсолютную и условную сходимость

$\int_0^{\infty} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)\frac{dx}{x\sqrt[4]{x}}$. В данном интеграле есть две особые точки: 0 и +inf. Разобьем интеграл на 2 несобственных интеграла так, чтобы в каждом из них была всего лишь одна особая точка.

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)\frac{dx}{x\sqrt[4]{x}}+\int_1^{\infty} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)\frac{dx}{x\sqrt[4]{x}}$$

Рассмотрим сначала второй интеграл. Он не меняет знак на своем промежутке.

$\int_1^{\infty} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)\frac{dx}{x\sqrt[4]{x}}$. cos — ограничен. Значит, интеграл сходится. $\int_1^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)\frac{dx}{x\sqrt[4]{x}} \le \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{5}{4}}}$

Это эталонный интеграл. Мы знаем, что он сходится.

$\lim^{+inf} \int_1^{\infty} |\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)| \frac{dx}{x\sqrt[4]{x}} = C-0.$ *А это конечное число . Значит интеграл сходится*

Рассмотрим теперь первый интеграл. $\int_0^1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)\frac{dx}{x\sqrt[4]{x}}$. Функция знакопеременная.

Следовательно, будем исследовать на абсолютную сходимость

$t=\frac{1}{\sqrt{x}}-1$, *тогда* $x=\frac{1}{(1+t)^2}$

$\int_0^{inf} \frac{-2\cos t}{\frac{t}{(t+1)^2} * \frac{1}{\sqrt{t+1}} * (t+1)^3} dt = 2\int_0^{+inf} \frac{\cos t}{\sqrt{t+1}} dt$, *рассмотрим* $f=\cos t$ *первообразная ограничена* $\int_0^s \cos t \, dt$

$\sin s - \sin 0 = \sin s$ - ограничен. А функция $\frac{1}{\sqrt{t+1}}$ *монотонно убывает* $\rightarrow 0$. Тогда по признаку Дирихле условно интеграл сходится

Ответ: интеграл сходится условно