Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО».

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Индивидуальная домашняя работа №4 (ИДЗ №4)
Вариант №48

Выполнил
Путинцев Данил Денисович
Группа P3107
Номер ИСУ: 409425

Санкт-Петербург 2024 год

Задание 1.

Исследовать данную функцию на равномерную непрерывность на данном множестве пользуясь определением.

$f(x) = x - \frac{2}{x^2}$ а) X = [1, +∞); б) X = (0, 1)

а) Для начала выпишем определение равномерной непрерывности

$\forall \varepsilon>0 \;\; \exists \delta>0: \;\; \forall a, \;\; b \in [1,+\infty): \;\; |a-b|<\delta \;\; |f(a)-f(b)|<\varepsilon$

Очевидно, что функция f(x) является непрерывной на промежутке [1, +∞), так как не существует точек разрыва, которые бы делали прерывной данную функцию. Для доказательства равномерной непрерывности возьмем любое ε > 0 и подберем для него значение δ, такое, чтобы для $\forall a, \;\; b \in$ [1, +∞), удовлетворяющих неравенству |a — b| < δ, выполнялось неравенство $|a-\frac{2}{a^2}-b+\frac{2}{b^2}|<\varepsilon$

Преобразуем неравенство

$$\frac{a^3-2}{a^2}-\frac{b^3-2}{b^2}=\frac{a^3*b^2-2b^2-b^3*a^2+2a^2}{b^2*a^2} = \frac{a^3*b^2-a^2*b^3+2a^2-2b^2}{a^2*b^2} = \frac{a^2*b^2(a-b)+2(a^2-b^2)}{a^2*b^2} < \varepsilon$$

$$\frac{a^2*b^2(a-b)+2(a-b)(a+b)}{a^2*b^2}=\frac{(a-b)(a^2*b^2+2(a+b))}{a^2*b^2}=\frac{(a-b)(a^2*b^2+2a+2b)}{a^2*b^2}=(a-b)\frac{a^2*b^2+2a+2b}{a^2*b^2}<\varepsilon$$

$(a-b)(1+\frac{2a+2b}{a^2*b^2})<\varepsilon$. Вспомним про модуль $|(a-b)(1+\frac{2a+2b}{a^2*b^2})|<\varepsilon$

Рассмотрим, $\frac{2a+2b}{a^2*b^2}$, мы знаем, что a,b ∈ [1, +∞). Как известно из курса математического анализа степенная функция быстрее возрастает, чем линейная функция. Следовательно, наибольшее значение рассматриваемого элемента будет при a = b = 1. то есть максимальное значение элемента равно 4. Т.е $(a-b)(1+4) = 5(a-b) < \varepsilon$. И тогда $(a-b) < \frac{\varepsilon}{5}$. Тогда для выполнения неравенства достаточно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$. Следовательно, функция равномерно непрерывная на рассматриваемом промежутке.

б) Во втором случае a,b ∈ (0, 1). Рассмотрим, $\frac{2a+2b}{a^2*b^2}$, при стремлении к нулю a или b значение этого элемента будет стремиться к +∞. Но тогда не будет на этом промежутке равномерной непрерывности. Давайте проверим это рассуждение. Для начала напишем отрицание к определению равномерной непрерывности.

$\exists \varepsilon>0 \;\; \forall \delta>0: \;\; \exists a, \;\; b \in (0,1): \;\; |a-b|<\delta \;\; |f(a)-f(b)| \geqslant \varepsilon$

Пусть ε = 1. Тогда $|(a-b)(1+\frac{2a+2b}{a^2*b^2})| \geqslant 1$. при a,b ∈ (0, 1). Давайте это проверим.

Пусть a = δ < 1. $b = \frac{\delta}{\delta+1}$. Тогда $|a-b|=|\delta-\frac{\delta}{\delta+1}|=|\frac{\delta^2+\delta-\delta}{\delta+1}|=|\frac{\delta^2}{\delta+1}|<\delta$

Рассмотрим,

$$|(a-b)(1+\frac{2a+2b}{a^2*b^2})|=|(\frac{\delta^2}{\delta+1})(1+(\frac{2\delta+\frac{2\delta}{\delta+1}}{\frac{\delta^2*\delta^2}{(\delta+1)^2}}))|=|(\frac{\delta^2}{\delta+1})(1+(\frac{\frac{2\delta^2+4\delta}{\delta+1}}{\frac{\delta^4}{(\delta+1)^2}}))|=|(\frac{\delta^2}{\delta+1})(1+\frac{(2\delta^2+4\delta)(\delta+1)}{\delta^4})|$$

$$.|(\frac{\delta^2}{\delta+1})(\frac{\delta^4}{\delta^4}+\frac{(2\delta^2+4\delta)(\delta+1)}{\delta^4})|=|(\frac{\delta^2}{\delta+1})(\frac{\delta^4+(2\delta^2+4\delta)(\delta+1)}{\delta^4})|=|(\frac{\delta^2}{\delta+1})\frac{(\delta^4+2\delta^3+6\delta^2+4\delta)}{\delta^4}|$$

$|\frac{\delta^4+2\delta^3+6\delta^2+4\delta}{\delta^2*(\delta+1)}|=|\frac{\delta^4+2\delta^3+6\delta^2+4\delta}{\delta^3+\delta^2}|$. Выделим целую часть. Тогда получаем.

$|1 + \delta + \frac{5\delta^2+4\delta}{\delta^3+\delta^2}|\geqslant 1$. Что и требовалось доказать. Следовательно, функция не является равномерно непрерывной на этом промежутке.

Задание 2.

Преобразовать выражение к интегральной сумме, доказать существование соответствующего интеграла и найти предел $\lim\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2})$

Преобразуем выражение

$$\lim\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2})=\lim\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2}+\frac{n}{n^2}-\frac{n}{n^2})=\lim\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2}+\frac{n}{n^2})-\lim\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2}$$

$\lim\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+...+\frac{n}{n})-\lim\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2}$. Вспомним определение интегральной суммы: $\sum\limits_{i=1}^{n}f(c_i)*\Delta x$

Здесь $\Delta x=\frac{1}{n}$ - длина частичного отрезка, полученного в результате разбиения отрезка [0; 1] на n равных частей. А $f(c_1)=\frac{1}{n},\ f(c_2)=\frac{2}{n}\ ,...,\ f(c_i)=\frac{i}{n},\ ...,\ f(c_n)=\frac{n}{n}$, где c_i — это концы правых отрезков. Тогда $f(x)=x$. Так как функция $f(x)=x$ непрерывна на отрезке [0; 1], то она интегрируема на нем.

Тогда получаем $\lim\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+...+\frac{n}{n})-\lim\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2}=\lim\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n}*\frac{1}{n}-0=\int\limits_0^1 x\,dx=\frac{x^2}{2}=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$

Задание 3.

Аналитический этап работы с определенным интегралом. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, [a, b] = [1, e]

- Составить верхнюю и нижнюю суммы Дарбу, доказать интегрируемость функции (разбиение использовать равномерное)

Выпишем определение верхней и нижней сумм Дарбу

Верхняя сумма Дарбу = $\sum_{i=1}^{n} M_i * \Delta x_i$, где M_i — это супремум функции f(x), $x \in \Delta x_i$

Нижняя сумма Дарбу = $\sum_{i=1}^{n} m_i * \Delta x_i$, где m_i — это инфинум функции f(x), $x \in \Delta x_i$

Допустим, что функцию разбили на n частей. Для того, чтобы составить верхнюю и нижнюю суммы, нужно изучить поведение функции. Для нахождения поведения функции возьмем производную $f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2} * \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2 * x^{\frac{3}{2}}}$, нам дан отрезок [1, e], следовательно функция убывает на всем нашем промежутке. Следовательно, для верхних сумм необходимо брать левые точки отрезков нашего разбиения, а для нижних сумм — правые.

Тогда составим верхнюю сумму Дарбу $\sum_{i=1}^{n} M_i * \Delta x_i$. Отрезок у нас от 1 до e. Тогда $\Delta x_i = \frac{e-1}{n}$

Найдем левые значения для наших отрезков разбиения.

$$M_1 = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1, \quad M_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e-1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n+e-1}{n}}}, \quad M_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e-1}{n} + \frac{e-1}{n}}}, \quad \ldots, \quad M_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e-1}{n} * (n-1)}}$$

Тогда верхняя сумма Дарбу равна

$$\sum_{i=1}^{n} M_i * \Delta x_i = \frac{e-1}{n} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e-1}{n}}} * \frac{e-1}{n} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e-1}{n} * (i-1)}} * \frac{e-1}{n} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e-1}{n} * (n-1)}} * \frac{e-1}{n}$$

Теперь составим нижнюю сумму Дарбу $\sum_{i=1}^{n} m_i * \Delta x_i$ Найдем первые значения функции для наших отрезков разбиения.

$$m_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e-1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n+e-1}{n}}}, \quad m_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e-1}{n} + \frac{e-1}{n}}}, \quad \ldots, \quad m_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e-1}{n} * n}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Составим нижнюю сумму Дарбу

$$\sum_{i=1}^{n} m_i * \Delta x_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e-1}{n}}} * \frac{e-1}{n} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e-1}{n} * 2}} * \frac{e-1}{n} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e-1}{n} * i}} * \frac{e-1}{n} \ldots + \frac{1}{\sqrt{e}} * \frac{e-1}{n}$$

Так как функция непрерывна на отрезке [1; e], то она интегрируема.

- Для интеграла Римана данной функции по данному промежутку составить интегральную сумму (можно использовать результат их предыдущего пункта), найти предел этой суммы

Зададим способ задания промежутков, удовлетворяющее следующим условиям

$x_0 = 1, \quad x_1 = x_0 * q, \quad x_i = x_0 * q^i, \quad x_n = x_0 * q^n = e$

То есть последовательность будет у нас геометрической прогрессией. Найдем чему будет равен q: $x_n = x_0 * q^n = e,\ \ тогда\, q^n = \frac{x_n}{x_0} = \frac{e}{1} = e,\, то\, есть\, q = \sqrt[n]{e}$

Вспомним определение интегральной суммы: $\sum_{i=1}^{n} f(c_i) * \Delta x$

Пусть $c_i = 1 * \sqrt[n]{e^i} = \sqrt[n]{e^i}$, $\Delta x = x_i - x_{i-1} = x_0 * q^i - x_0 * q^{i-1} = q^i - q^{i-1} = q^{i-1}(q-1) = \sqrt[n]{e^{i-1}}(\sqrt[n]{e}-1)$

Составим интегральную сумму.

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i) * \Delta x = \frac{1}{\sqrt[2n]{e}} * \sqrt[n]{e^{i-1}}(\sqrt[n]{e}-1) + \frac{1}{\sqrt[2n]{e^2}} * \sqrt[n]{e^{i-1}}(\sqrt[n]{e}-1) + \ldots + \frac{1}{\sqrt[2n]{e^i}} * \sqrt[n]{e^{i-1}}(\sqrt[n]{e}-1) + \ldots + \frac{1}{\sqrt[2]{e}} * \sqrt[n]{e}(\sqrt[n]{e}-1)$$

Преобразуем сумму. Вынесем $\sqrt[n]{e}-1$ за скобки. Тогда получим

$$(\sqrt[n]{e}-1)\left(\frac{1}{\sqrt[2n]{e}} * \sqrt[n]{e^{i-1}} + \frac{1}{\sqrt[2n]{e^2}} * \sqrt[n]{e^{i-1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[2n]{e^i}} * \sqrt[n]{e^{i-1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[2]{e}} * \sqrt[n]{e}\right) = (\sqrt[n]{e}-1) \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i-2}{2n}}$$

Вынесем за скобки $\frac{1}{\sqrt[n]{e^2}}$. Тогда получим $(\sqrt[n]{e}-1)\left(\frac{1}{\sqrt[n]{e^2}}\right) \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{2n}}$. Можно заметить, что мы получили в сумме геометрическую прогрессию. Найдем по формуле её сумму

$$(\sqrt[n]{e}-1)\left(\frac{1}{\sqrt[n]{e}}\right) \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{2n}} = (\sqrt[n]{e}-1)\left(\frac{1}{\sqrt[n]{e}}\right)\left(\sqrt[n]{e}\,\frac{(\sqrt{e}-1)}{\sqrt[2n]{e}-1}\right) = (\sqrt[n]{e}-1)\frac{\sqrt{e}-1}{\sqrt[2n]{e}-1}$$

Найдем предел интегральной суммы

$\lim_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{e}-1)\frac{\sqrt{e}-1}{\sqrt[2n]{e}-1}$. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Перейдем к формуле Тейлора

$$\sqrt{e}-1 * \lim_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt[n]{e}-1)}{\sqrt[2n]{e}-1} = \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + o(n^3)}{\frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{48n^3} + o(n^3)} = 2 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{48n^3} + o(n^3) = 2 * (\sqrt{e}-1) = 2\sqrt{e}-2$$

- Сравнить полученный результат с ответом по формуле Ньютона-Лейбница

Найдем значение интеграла Римана. $\int_1^e \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}$. Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница. Ответ: $2\sqrt{e}-2$. Ответ сошелся.

Практический этап

Для указанной в вашем варианте и любом другом соседнем варианте функции на данном промежутке проверьте, что ответ, полученный в результате применения всех методов совпадает с тем, что вы получили в аналитическом этапе задания

```
Введите количество равномерных промежутков: 1000000
Площадь при выборе левых точек: 1.2974428794580113
Площадь при выборе правых точек: 1.2974422033667934
Площадь при выборе рандомных точек из отрезка: 1.2974425412641046
Площадь при рассчете с помошью метода трапеции: 1.297442541412373
Площадь при рассчете с помошью метода Симсона: 1.2974425414122752
```

Можно заметить, что при увеличении количества равномерных промежутков площадь стремиться к значению, которое получено аналитически.

Давайте, посмотрим соседний вариант, и найдем ответ.

3. В рамках данного задания необходимо выполнить аналитический и практический этапы работы с определенным интегралом. Подробное условие доступно по ссылке https://github.com/piikt-2-sem-calc/calc-sem-2.
$f(x) = x^2, \quad [a,b] = [1,2];$

$$\int_1^2 x\,dx = \frac{x^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

```
Введите количество равномерных промежутков: 10000
Площадь при выборе левых точек: 2.333183334999824
Площадь при выборе правых точек: 2.333483334999824
Площадь при выборе рандомных точек из отрезка: 2.3333338064666953
Площадь при рассчете с помошью метода трапеции: 2.333333334999819
Площадь при рассчете с помошью метода Симсона: 2.333333333333161
```

Можно заметить, что при увеличении количества равномерных промежутков площадь стремиться к значению, которое получено аналитически.

Проведите измерения для мелкости $\Delta x_i, \frac{\Delta x_i}{2}, \frac{\Delta x_i}{4}, \frac{\Delta x_i}{8}, \frac{\Delta x_i}{16}$ при фиксированной Δx_i

Пусть $\Delta x_i = \frac{e-1}{100}$. Тогда для $\Delta x_i = \frac{e-1}{100}$ результаты будут такими.

```
Введите количество равномерных промежутков: 100
Площадь при выборе левых точек: 1.3008325543605292
Площадь при выборе правых точек: 1.2940716421858134
Площадь при выборе рандомных точек из отрезка: 1.2974371455877733
Площадь при рассчете с помошью метода трапеции: 1.2974520982731714
Площадь при рассчете с помошью метода Симсона: 1.2974425414552893
```

При $\frac{\Delta x_i}{2}=\frac{e-1}{200}$ результаты будут такими

```
Введите количество равномерных промежутков: 200
Площадь при выборе левых точек: 1.2991351587034388
Площадь при выборе правых точек: 1.295754702616081
Площадь при выборе рандомных точек из отрезка: 1.2974505251242052
Площадь при рассчете с помошью метода трапеции: 1.2974449306597597
Площадь при рассчете с помошью метода Симсона: 1.2974425414036972
```

При $\frac{\Delta x_i}{4}=\frac{e-1}{400}$ результаты будут такими

```
Введите количество равномерных промежутков: 400
Площадь при выборе левых точек: 1.2982882527395527
Площадь при выборе правых точек: 1.296598024695874
Площадь при выборе рандомных точек из отрезка: 1.297426136914316
Площадь при рассчете с помошью метода трапеции: 1.2974431387177137
Площадь при рассчете с помошью метода Симсона: 1.2974425414004735
```

При $\frac{\Delta x_i}{8}=\frac{e-1}{800}$ результаты будут такими

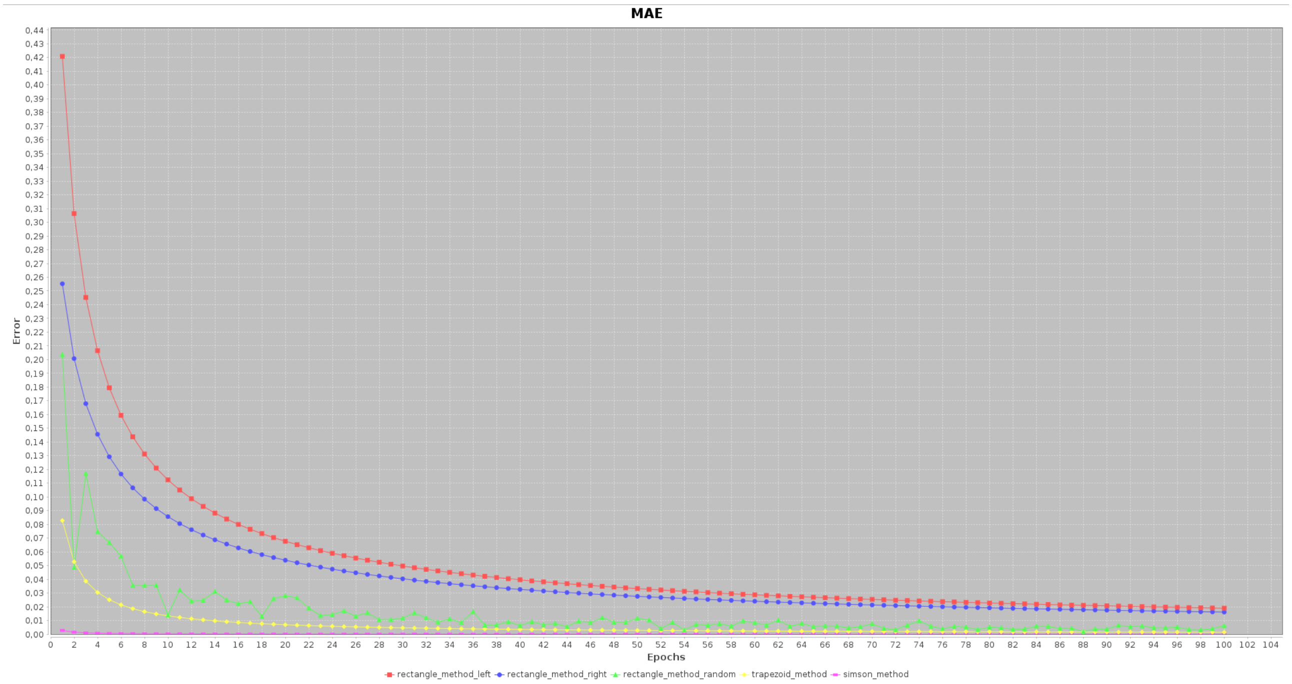
```
Введите количество равномерных промежутков: 800
Площадь при выборе левых точек: 1.2978652477407004
Площадь при выборе правых точек: 1.2970201337188607
Площадь при выборе рандомных точек из отрезка: 1.297431143538363
Площадь при рассчете с помошью метода трапеции: 1.2974426907297778
Площадь при рассчете с помошью метода Симсона: 1.2974425414002677
```

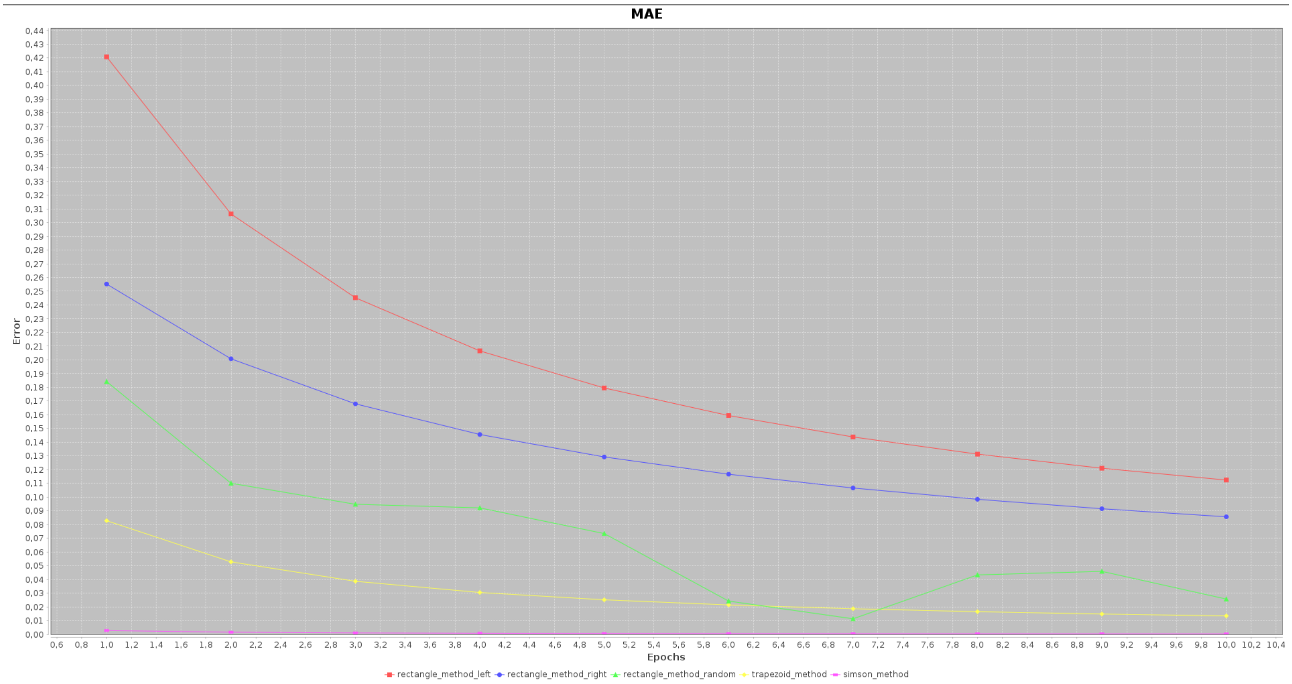
При $\frac{\Delta x_i}{16}=\frac{e-1}{1600}$ результаты будут такими

```
Введите количество равномерных промежутков: 1600
Площадь при выборе левых точек: 1.2976538572380896
Площадь при выборе правых точек: 1.29723130022717
Площадь при выборе рандомных точек из отрезка: 1.2974433452854912
Площадь при рассчете с помошью метода трапеции: 1.2974425787326282
Площадь при рассчете с помошью метода Симсона: 1.297442541400237
```

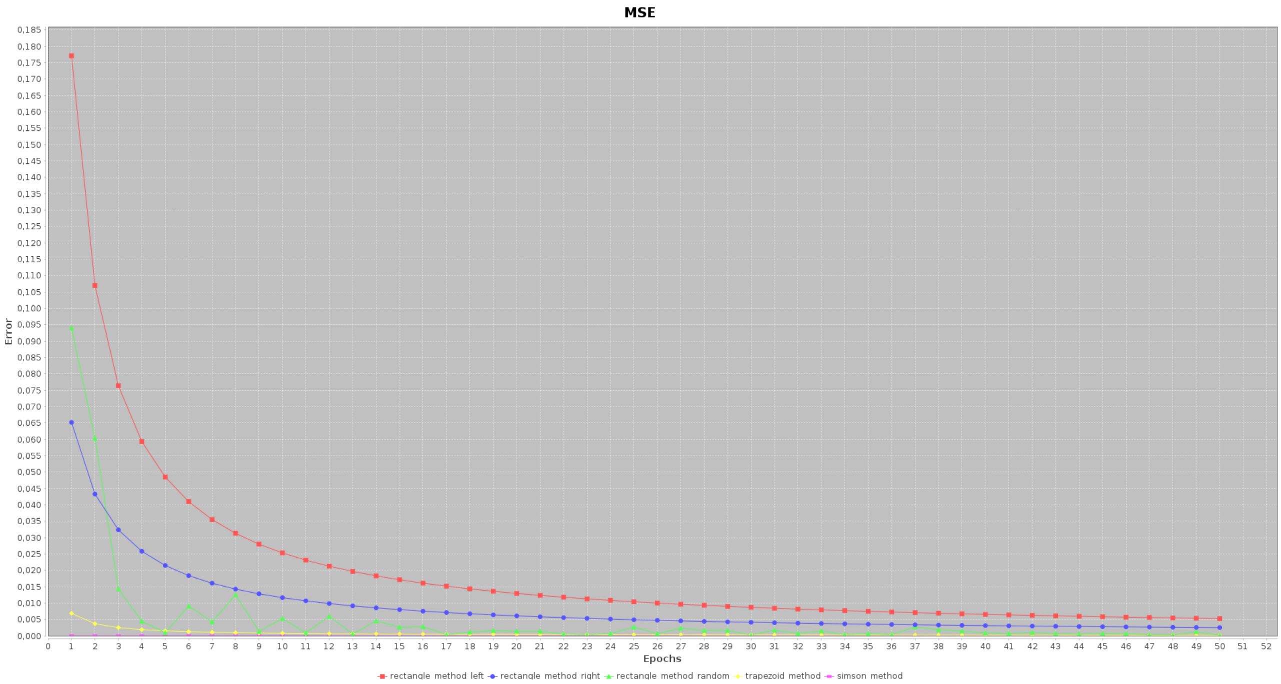
Постройте график зависимости отклонения от величины шага ([MSE](), [MAE]())

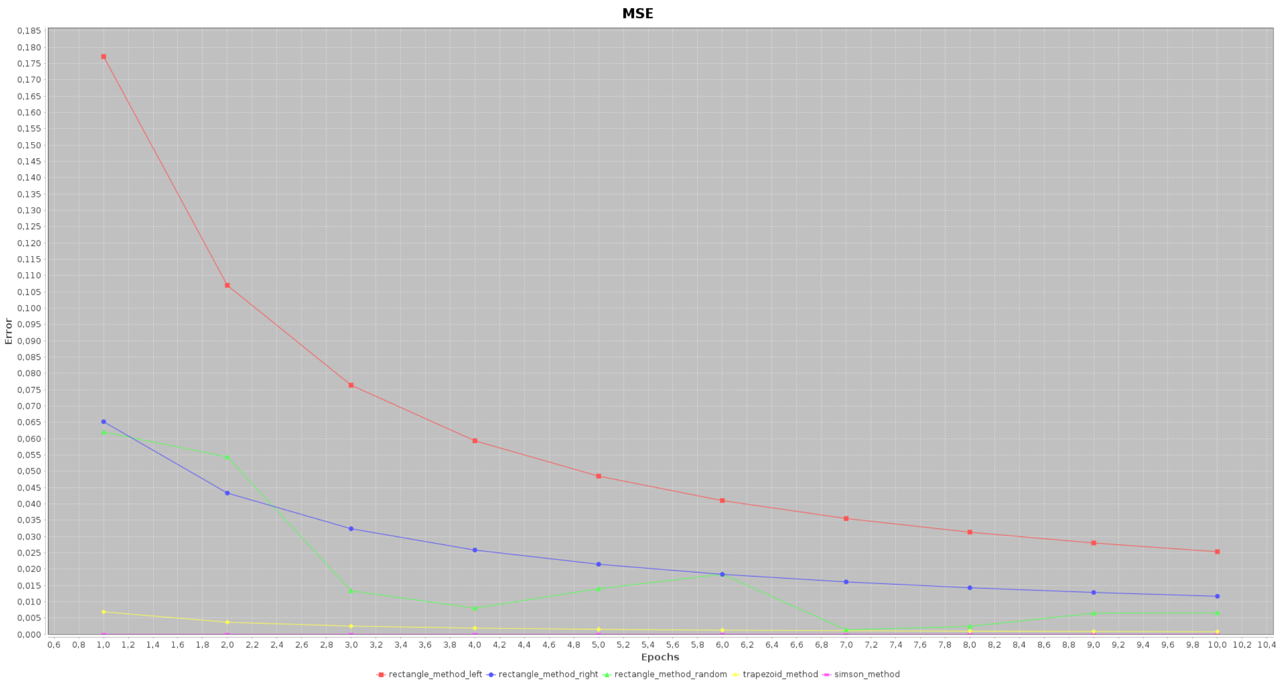
MAE





MSE





Сделайте выводы об эффективности методов (для полного анализа рекомендуется изменять не только функцию, но и сам промежуток), опираясь на следующие параметры:

- сложность вычислений

  Сложность вычислений — это O(n).
- время вычислений. При n = 10000

при n = 100000

```
Введите количество равномерных промежутков: 10000
Площадь при выборе левых точек: 1.297476346916734
Площадь при выборе правых точек: 1.297408737794987
Площадь при выборе рандомных точек из отрезка: 1.2974422993605874
Площадь при рассчете с помошью метода трапеции: 1.2974425423558593
Площадь при рассчете с помошью метода Симсона: 1.297442541400155
Время выполнения алгоритма: 59 мс
```

при n = 1000000

```
Введите количество равномерных промежутков: 1000000
Площадь при выборе левых точек: 1.2974428794580113
Площадь при выборе правых точек: 1.2974422033667934
Площадь при выборе рандомных точек из отрезка: 1.2974425414389983
Площадь при рассчете с помошью метода трапеции: 1.297442541412373
Площадь при рассчете с помошью метода Симсона: 1.2974425414122752
Время выполнения алгоритма: 1401 мс
```

при n = 10000000

```
Введите количество равномерных промежутков: 10000000
Площадь при выборе левых точек: 1.2974425752827996
Площадь при выборе правых точек: 1.297442507673678
Площадь при выборе рандомных точек из отрезка: 1.2974425414677702
Площадь при рассчете с помошью метода трапеции: 1.297442541478426
Площадь при рассчете с помошью метода Симсона: 1.297442541478425
Время выполнения алгоритма: 15436 мс
```

Скорость с n = 1000000 начинает линейно возрастать.

- точность вычислений

Точность вычислений, начиная с n = 10000, уже довольно хорошая (верны первые 3 знака после запятой). Начиная с n = 1000000, точность уже такая, что верны первые 6 знаков после запятой.