Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО».

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Индивидуальная домашняя работа №5 (ИДЗ №5)
Вариант №30

Выполнил
Путинцев Данил Денисович
Группа Р3107
Номер ИСУ: 409425

Санкт-Петербург 2024 год

1. Исследовать ряд на сходимость.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3*7*...*(4n-1)*1}{6*10*...*(4n+2)\sqrt{n}}$$

Ряд не знакопеременный.

Рассмотрим $\frac{3*7*...*(4n-1)}{6*10*...*(4n+2)}=\frac{3}{6}*\frac{7}{10}*...*\frac{4n-1}{4n+2}$. Заметим, что каждая дробь в этом произведении меньше единицы, поэтому эту часть суммы можно оценить какой-нибудь константой. $\frac{3}{6}*\frac{7}{10}*...*\frac{4n-1}{4n+2}\le\frac{1}{2}$. Тогда ряд можно оценить следующим образом:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3*7*...*(4n-1)*1}{6*10*...*(4n+2)\sqrt{n}}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{1}{2}}}$. Мы знаем, что ряд

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{a}}, \textit{при}\, a<1\ \textit{расходится}$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$. А ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\ \textit{расходится}.\ \textit{Значит расходится и}\ \ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$

Ответ: ряд расходится.

2. Исследовать ряд на сходимость (абсолютную и условную)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\frac{\pi}{n}}{n}$$

Исследуем ряд на абсолютную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n\cos\frac{\pi}{n}}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos\frac{\pi}{n}|}{n}\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2(\frac{\pi}{n})}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\sin^2(\frac{\pi}{n})}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\frac{\sin^2(\frac{\pi}{n})}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(\frac{\pi}{n})}{n}.$$

Первая сумма — гармонический ряд, который расходится. Рассмотрим вторую сумму: числитель стремится к нулю. Следовательно, мы можем заменить числитель на эквивалент

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(\frac{\pi}{n})}{n}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{\pi^2}{n^2})}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\pi^2}{n^3})=\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^3})-\textit{а этот ряд сходится абсолютно}$$

Итого, получаем: расх - сход => вся сумма расходится => ряд не сходится абсолютно (по признакам сравнения).

Исследуем ряд на условную сходимость. По признаку Абеля-Дирихле:

Пусть

$b_n=\frac{1}{n},\ \ a_n=(-1)^n\cos\frac{\pi}{n},\ \ b_n-\textit{монотонная функция}.\textit{Согласно признаку Дирихле получаем}$

$\sum_{n=1}^{+inf}(-1)^n\cos\frac{\pi}{n}\leq\sum_{n=1}^{+inf}(-1)^n(\textit{т.к}\ \ \cos\frac{\pi}{n}\ \ \textit{стремится к}\cos 0=1)$ (по лемме о неравенстве между последовательностями). $\sum_{n=1}^{+inf}(-1)^n\cos\frac{\pi}{n}\leq\sum_{n=1}^{+inf}(-1)^n\leq 1\,\textit{то есть сумма ограничена}$

Теперь исследуем b_n:

$\lim_{n=1}^{\infty}b_n=\lim_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=0$. Последовательность b_n стремится к нулю при $n\to\infty$. Следовательно ряд условно сходится по признаку Дирихле.

Ответ: ряд сходится условно.

Задание 3.

Исследовать ряд на сходимость (для знакопеременных рядов — на абсолютную и условную сходимость).

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_{n}^{2n}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+n^2}}$$

Исследуем на абсолютную сходимость

$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n+1}\int_{n}^{2n}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+n^2}}|=\sum_{n=1}^{\infty}|\int_{n}^{2n}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+n^2}}|=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n}^{2n}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+n^2}}$. x = 2n

Оценим интеграл таким образом $\int_{n}^{2n}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+n^2}}\geq\frac{n}{\sqrt[3]{8n^3+n^2}}$. Это возможно, так как интеграл — площадь под графиком, а второе выражение — это площадь самого маленького значения функции умноженной на 2n - n = n.

Тогда $\frac{n}{\sqrt[3]{8n^3+n^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{8+\frac{1}{n}}}$. Получаем такую сумму $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{8+\frac{1}{n}}}$. Данный ряд расходится, так как не выполняется необходимое условие. Тогда по признакам сравнения исходный ряд тоже расходится. Значит, абсолютной сходимости нет.

Теперь исследуем на условную сходимость.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_{n}^{2n}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+n^2}}$. По признаку Лейбница, мы знаем, чтобы сумма условно сходилась, интеграл должен стремиться к нулю, а также быть монотонным. Интеграл является монотонным, так как по сути мы вычисляем площадь, и чем меньше подынтегральное выражение, тем меньше площадь. Докажем, что данный интеграл стремиться к нулю.

$\lim_{n=1}^{\infty}\int_{n}^{2n}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+n^2}}\sim\lim_{n=1}^{\infty}\int_{n}^{2n}\frac{dx}{n}$ = ln(2). А это не ноль. Значит ряд условно не сходится. Значит, ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

Задание 4

Найти предел f(x) данной функциональной последовательности $f_n(x)$ при n → ∞ выяснить, будет ли эта сходимость равномерной на заданных множествах.

$$f_n(x) = \ln(x^4 + \frac{1}{n}),\ \ E_1 = (0, +\infty);\ \ E_2 = (a, +\infty),\ \ a > 0$$

$$\lim_{n=1}^{\infty} (\ln(x^4 + \frac{1}{n})) = \ln x^4$$

Рассмотрим первое множество E_1 = (0, +∞)

Равномерная сходимость будет доказана, если мы докажем, sup $|f_n(x)$ — f(x)| → 0 при n → +inf при $x \in (0, +inf)$

$sup|\ln(x^4 + \frac{1}{n}) - \ln(x^4)|\ =\ sup|\ln(\frac{x^4 + \frac{1}{n}}{x^4})|\ =\ sup|\ln(1 + \frac{1}{nx^4})|$. Если 1 <= x, то ряд равномерно сходится. Но если 0 < x < 1, то может найтись такой x. что данный супремум не будет стремиться к нулю. Пусть $x \le [\sqrt[4]{\frac{1}{n}}]$, тогда ряд не будет стремится к нулю Поэтому ряд не будет равномерно сходится.

Теперь рассмотрим второе множество E_2 = (a, +∞)
Тогда, если
$a = [\sqrt[4]{\frac{1}{n}}] + 1, то\ функциональная\ последовательность\ будет\ равномерно\ сходится. т. к$

$|\ln(1 + \frac{1}{nx^4})| \le |\ln(1 + \frac{1}{1+n})| < \varepsilon$. Т.е $a = [\sqrt[4]{\frac{1}{n}}] + 1$. Функциональная последовательность равномерно сходится.

Ответ: при E_1 не сходится, при $E_2 = ([\sqrt[4]{\frac{1}{n}}] + 1, +inf)$ сходится равномерно.

Задание 5.

Исследовать на равномерную сходимость ряда на данных множествах.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\cos(\pi n)}{\sqrt[4]{n^4+x^4}}$, $D=[0,\frac{\pi}{2}]$

Используем признак Абеля-Дирихле. Частичная сумма $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi)=|\frac{1}{2}((-1)^k-1)|\leq 2$ *равномерно ограниченная на D*. А последовательность $\frac{x}{\sqrt[4]{n^4+x^4}}$ равномерно стремится к нулю при n → ∞. Следовательно, по признаку Дирихле, ряд равномерно сходится.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2+x^3*n^{\frac{3}{2}}}\sin\sqrt[5]{\frac{x}{n}}$. D_1=(0, 1), D_2 =(1, +∞) Используем признак Дирихле.

Частичная сумма $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\sqrt[5]{\frac{x}{n}}$ *ограничена*,

Теперь рассмотрим $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2+x^3*n^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2+x^3*n}$. Данная функция монотонна. Ограничим мажорантой. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2+x^3*n}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^3*n}$. При x, принадлежащему D_1, данный ряд расходится, потому что он гармонический. Следовательно на D_1 нет равномерной сходимости.

Теперь исследуем равномерную сходимость на промежутке D_2.

Легко заметить, что $\frac{1}{x^3 n}$ *стремится к нулю при* n → ∞. Значит по признаку Дирихле, ряд равномерно сходится

Ответ: а) Ряд равномерно сходится на D, б) Ряд равномерно не сходится на D_1 и ряд равномерно сходится на D_2

Задание 6.

Найдите область определения данной функции и докажите её непрерывность на области определения.

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{x\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{n}e^{nx}}$. Непрерывность функции на области определения можно доказать с помощью равномерной сходимости ряда.

Для начала найдем область определения данной функции. Ясно, что функция неопределена в точке x=0. Других проблемных точек нет. Пусть x<0 t=-x, тогда t>0 и тогда сумма будет выглядеть так.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nt}}{-t\sqrt{n}}$. Мы знаем, что показательная функция быстрее возрастает. Следовательно ряд расходится при любых x<0. Пусть теперь x>0.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{n}e^{nx}}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}e^{nx}}$. Ясно, что при x>0 ряд сходится. А 0 не входит, так как в исходной сумме — это точка разрыва.

Теперь докажем её непрерывность на данном промежутке. Для это докажем равномерную непрерывность ряда на промежутке (0; +∞).

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{n}e^{nx}}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{nx}}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{nx}}. \text{ А по интегральному признаку сходится на промежутке } (0;+inf)$

Ответ: область определения данной функции (0; +∞)

Задание 7

Найдите сумму данного числового ряда, используя приемы дифференцирования и интегрирования степенного ряда.

Почему данный ряд можно интегрировать и дифференцировать?

Потому что степенной ряд внутри его интервала сходимости можно дифференцировать почленно и интегрировать. А так как x = ½, то мы можем это делать. Так как у этого ряда радиус сходимости (-1, 1).

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n . \text{Сделаем замену } x = \frac{1}{2} \quad \text{Тогда} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 x^n)'.$

Теперь рассмотрим сумму $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 x^n)' = (\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n)'$

$\sum_{n\geq 1}^{\infty} n^2 x^n = x \sum_{n\geq 1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = x \sum_{n\geq 1}^{\infty} (n x^n)' = x (\sum_{n\geq 1}^{\infty} n x^n)'$

$\sum_{n\geq 1}^{\infty} (n x^n) = x \sum_{n\geq 1}^{\infty} n x^{n-1} = x \sum_{n\geq 1}^{\infty} (x^n)' = x (\sum_{n\geq 1}^{\infty} x^n)' = x (\frac{1}{1-x})' = x * (\frac{-1}{(1-x)^2}) = x (\frac{1}{1-x})' = -\frac{x}{(1-x)^2}$

Мы нашли последнюю производную. Теперь вернемся $x (\sum_{n\geq 1}^{\infty} n x^n)'$ к этому моменту

$x (\sum_{n\geq 1}^{\infty} x^n)' = -x \frac{x}{(1-x)^2}$. Теперь найдем $(\sum_{n=1}^{\infty} n x^n)' = (-x \frac{x}{(1-x)^2})' = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$

Теперь найдем $x (\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n)' = x (\frac{x(x+1)}{(1-x)^3})' = \frac{x^3 + 4x^2 + x}{(1-x)^4} . \text{Подставим } x = \frac{1}{2}$. Тогда сумма равняется 26

Ответ: 26

Задание 8

$f(x)=|x|, \sum_{n=1}^{+inf} \frac{1}{(2n-1)^2}$

Для функции f(x), заданной на отрезке [-pi; pi], построить три ряда Фурье: общий тригонометрический ряд, ряд Фурье по синусам и по косинусам. Для каждого полученного ряда:

- построить (при помощи desmos или python 3+/java, другие инструменты по согласованию с практиком) графики нескольких частичных сумм (например, S_5, S_{10}, S_{50})
- построить график функции f(x)
- убедиться (визуально), что частичные суммы приближают исходную функцию
- написать сумму ряда Фурье

Зафиксируйте x = x_0 так, чтобы ряд Фурье (общий тригонометрический) содержал искомую сумму ряда. Как в вашем случае можно обосновать равенство функции и ряда? Выразите сумму из равенства функции и ряда при найденном x_0.

Общий тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$$

Вычислим

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos 0\, dx, \quad заметим\ что\ функция\ |x|\ четная, \quad поэтому\ a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} |x|\, dx=\frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{2}=\pi$$

Посчитаем $a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} |x|\cos nx\, dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\, sign(x)\cos nx\, dx$. Проинтегрируем по частям

$$u=x; \quad du=1\, dx; \quad dv=\cos(nx)\, dx; \quad v=\sin\frac{(nx)}{n}=sign(x)\left(\frac{x\sin nx}{n}-\int\frac{\sin(nx)}{n}dx\right)=$$

$$=\frac{x\, sign(x)\sin(nx)}{n}+\frac{sign(x)\cos(nx)}{n^2}=\frac{(-1)^n*2-2}{\pi n^2}$$

Посчитаем

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\sin(nx)\, dx=0 \quad (т.к\quad функция\ нечетная,\ а\ на\ симметричном\ отрезке\ интеграл\ равен\ 0)$$

Тогда $f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n*2-2}{\pi n^2}\cos nx$

Ряд Фурье по косинусам

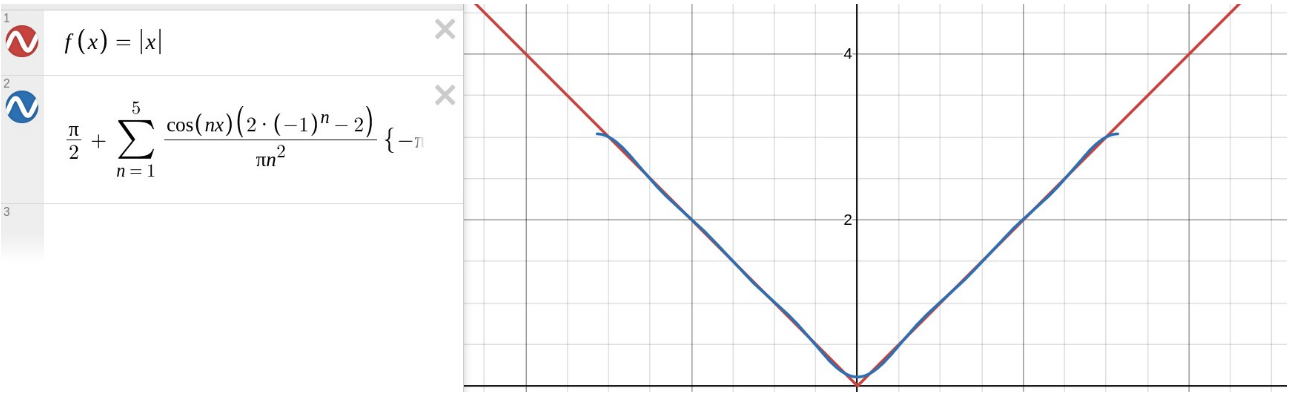
$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n*2-2}{\pi n^2}\cos nx$$

Ряд Фурье по синусам

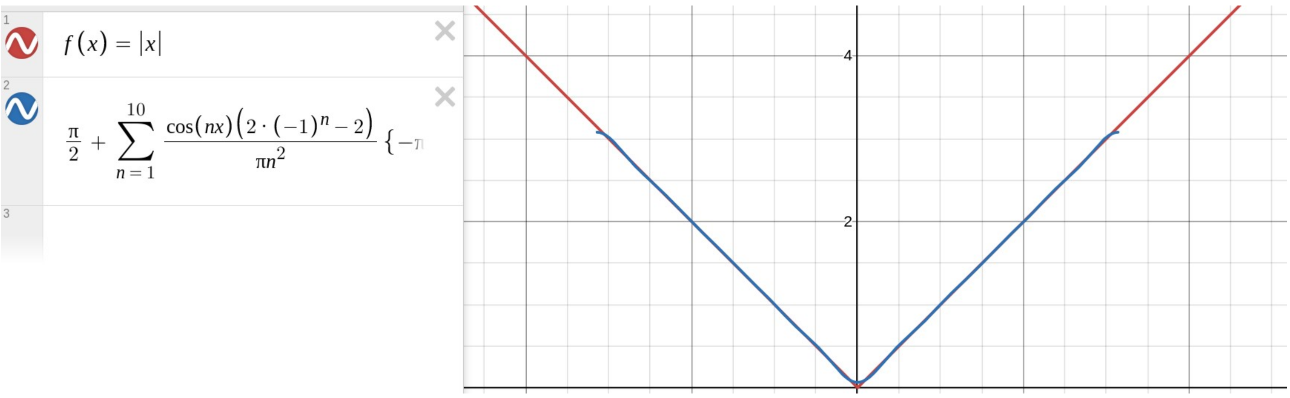
$$\sum_{n=1}^{\infty}0*\sin(nx)$$

График функции f(x)

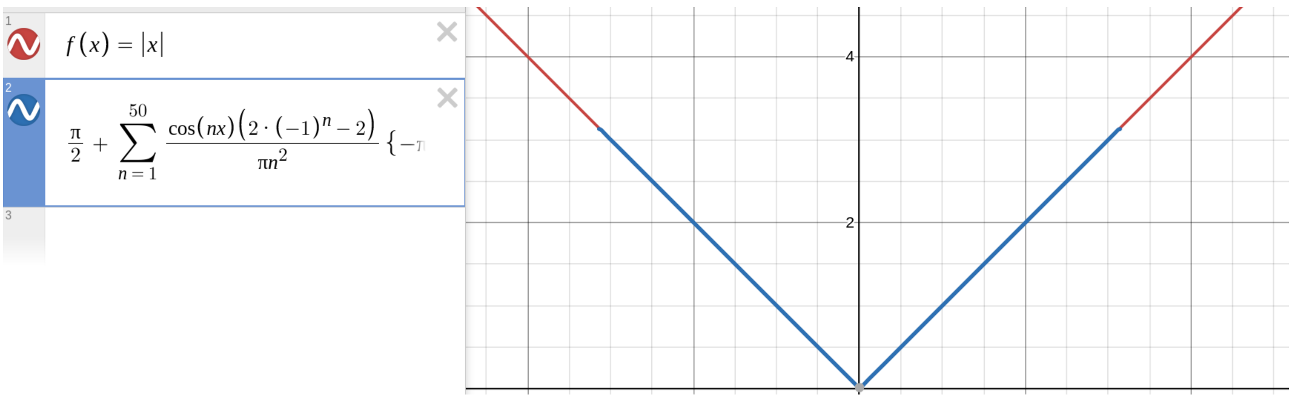
S_5



S_{10}



S_{50}



Подберем такое x_0, чтобы сосчитать ряд

$$\sum_{n=1}^{+inf} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

Заметим, что при i, которые не делятся на 2, верно следующее равенство

$$\sum_{n=1}^{+inf} \frac{1}{(2n-1)^2} = \sum_{i=1}^{+inf} \frac{1}{i^2}.$$

Рассмотрим общий ряд Фурье. $f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n * 2 - 2}{\pi n^2} \cos nx$

Преобразуем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos(nx)$. Мы знаем, что n пробегает по всем нечетным. Тогда получаем $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi n^2} \cos(nx)$. Тогда для того чтобы преобразовать к исходному ряду, $\cos(nx) = \frac{\pi}{-4}$, при этом n у нас нечетное. Тогда

$nx = \arccos(\frac{-\pi}{4})$ $x = \frac{\arccos(\frac{-\pi}{4})}{n}$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi n^2} \cos(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

В данном случае равенство функции и ряда объясняется тем, что f(x) — непрерывная функция и имеет конечное число точек разрыва первого рода. Функция f(x) монотонна на отрезке [0; pi]. Тогда теореме Дирихле функция f(x) сходится во всех точках заданного отрезка.