ДЗ-9: вычисление пределов с помощью эквивалентов

1. Вычислить

   (a) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\Big(\dfrac{\pi}{\cos x}-2x\operatorname{tg}x\Big);$

   (b) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a};$

   (c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x-e^2}{(x-4)e^x+xe^2};$

   (d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2x^2-x)}{\ln(x^4+x^2-x)}.$

2. Вычислите

   (a) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}};$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\ln(2x^2-x)}{\ln(x^4+x^2-x)};$

   (c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a};$

   (d) (*) $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(x^2-\ln(\operatorname{ch}x^2)\Big).$

3. Докажите, что если $f(x)\sim g(x)$ при $x\to x_0$, то $\sqrt{f(x)}\sim\sqrt{g(x)}$ при $x\to x_0$.

4. Докажите, что при $x\to\infty$ многочлен эквивалентен своему старшему члену, т.е.

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0\ \sim\ a_nx^n\ x\to\infty.$$

Комментарии:

1) говорят, что функции f и g эквивалентны при $x\to x_0$ и пишут $f\sim g$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1.$

2) Правило замены на эквивалент:

$$f\sim f_1,\ g\sim g_1 \text{ при } x\to x_0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to x_0}f\cdot g=\lim_{x\to x_0}f_1\cdot g_1,\ \lim_{x\to x_0}\frac{f}{g}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1}{g_1}.$$

3) Таблица эквивалентов при $x\to 0$:

- $\sin x\sim x;$
- $\operatorname{tg}x\sim x;$
- $\arcsin x\sim x;$
- $\operatorname{arctg}x\sim x;$
- $1-\cos x\sim x^2/2;$
- $e^x-1\sim x;$
- $a^x-1\sim x\ln a;$
- $\ln(1+x)\sim x;$
- $\log_a(1+x)\sim x/\ln a;$
- $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x;$

4) $\operatorname{ch}x:=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ – гиперболический косинус.