

ДЗ-7: критерий Коши, частичные пределы, теорема Штольца

1. Докажите, что последовательность сходится, пользуясь критерием Коши:

$$a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}.$$

2. Докажите, что последовательность расходится, пользуясь отрицанием критерия Коши:

$$a_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{n}{(n+1)^2}.$$

3. Известно, что подпоследовательности a_{2k} , a_{2k+1} , a_{3k} последовательности a_n сходятся. Докажите, что a_n сходится.

4. Приведите пример последовательности, множество частичных пределов которой а) состоит из трех различных чисел; б) совпадает с \mathbb{N} ; в) совпадает с $[0, 1]$.

5. Найти

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$, если $a_n \rightarrow a$;

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$;

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \dots + (-1)^{n-1}\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$.

6. (*) Найти

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{1 \cdot 2} + \frac{a_{n-1}}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{a_1}{n \cdot (n+1)} \right)$, если $a_n \rightarrow a$;

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1}{n}$, если $a_n \rightarrow a$ и $b_n \rightarrow b$.