

### ДЗ: предел последовательности

Вычислите предел

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cos n!}{2^n + 1}$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}}$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(3n+1) \cdot (3n+4)} \right)$
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} \right)$

Вычислите предел последовательности, которая задано рекуррентно

1.  $a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{a_n + 3}{4}$
2.  $a_1 = a, a_{n+1} = qa_n + d$
3.  $a_1 = \frac{ab}{a+b}, a_{n+1} = \frac{ab}{a+b-a_n}, (a, b > 0)$

**Теорема Тёплица** Пусть даны числа  $c_{nk}, n \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$ , образующие нижнетреугольную матрицу

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ c_{11} & & & & & \\ c_{21} & c_{22} & & & & \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

и удовлетворяющую условиям

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_{nk} = 0$  при всех  $k \in \mathbb{N}$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_{nk} = 1$
3.  $\exists C > 0 : \forall n \in \mathbb{N}$  имеем  $\sum_{k=1}^n |c_{nk}| \leq C$

Тогда для любой сходящейся последовательности  $\{a_n\}$  последовательность  $\{b_n\}$ , где  $b_n = \sum_{k=1}^n c_{nk} a_k$ , также сходится и  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$