

ДЗ: ограниченность множества, точные границы

1. Докажите ограниченность последовательности:

1) $a_n = \frac{3n-7}{2n+1}$; 2) $a_n = (-1)^n \frac{3n+5}{\sqrt{4n^2-1}}$; 3) $a_n = \frac{n^4}{3^n}$; 4) $a_n = \sqrt[n]{n}$.

2. Докажите неограниченность последовательности:

1) $a_n = \frac{2n^2-n+1}{3n+1}$; 2) $a_n = \frac{\sqrt{n^3+1}}{n+4}$; 3) $a_n = 3^n - n^3$; 4*) $a_n = \sqrt[n]{n!}$.

3. Найдите \sup , \inf , \max , \min ($n \in \mathbb{N}$):

1) $a_n = \frac{1-2n}{3n+5}$; 2) $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$; 3) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1}$;

4. Найти \sup и \inf множества $X = \left\{ \frac{m}{m+n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$.

5. Найти \sup и \inf множества $X = \left\{ \frac{mn}{m^2+n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$.

6. Докажите, что $\sup(X+Y) = \sup X + \sup Y$, где $X+Y := \{x+y : x \in X, y \in Y\}$.

7. Докажите, что $\sup(-X) = -\inf X$, где $-X := \{-x : x \in X\}$.

8. (*) Последовательность x_n задана рекуррентно: $x_1 = a \geq 0$, $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$. Исследовать, является ли она возрастающей или убывающей в зависимости от значения a .