

ДЗ-10: непрерывность, эквиваленты

1. Найти для функции $f(x)$ эквивалентную функцию вида Ax^α .

1) $f(x) = \frac{\sin(1/(x+1))}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$, а) при $x \rightarrow +\infty$; б) при $x \rightarrow 0+$;

2) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$, а) при $x \rightarrow +\infty$; б) при $x \rightarrow -\infty$.

2. Найти точки разрыва и определить их тип

(а) $f(x) = \frac{|x-1|}{x^3 - x^2}$;

(с) $f(x) = \frac{3^{1/x} - 2^{1/x}}{3^{1/x} + 2^{1/x}}$;

(b) $f(x) = e^{-1/x}$;

(d) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + e^{nx}}{1 + xe^{nx}}$.

3. Докажите по определению, что функция $y = \ln x$ непрерывна на $(0, +\infty)$.

4. При каких a и b функция будет непрерывна на \mathbb{R} ? Сформулируйте задачу геометрически.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0; \\ ax + b, & 0 \leq x \leq 1; \\ 2 + x^2, & x > 1. \end{cases}$$

5. Докажите, что уравнение $x^5 - 3x = 1$ имеет а) корень на промежутке $(1, 2)$; б) не менее трех корней на \mathbb{R} .

6. Докажите, что уравнение $2^x = 5x$ имеет не менее двух вещественных корней.

7. Докажите, что уравнение $x2^x = 1$ имеет единственное решение в \mathbb{R} .

8. Найдите точки разрыва функции Римана: $r(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \\ 1/n, & x = \frac{m}{n} \text{ — несокр. дробь}; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

9. Найти все непрерывные на \mathbb{R} функции f , если при всех значениях аргумента выполнено равенство $f(2x) - f(x) = x$

10. Найти главную часть вида $C(1-x)^a$ функции

$$f(x) = 4\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[5]{x} + 1$$

при $x \rightarrow 1$

Комментарии и ответы:

1(1) а) $x^{-4/3}$; б) $x^{-1/6} \sin 1$. 1(2) а) $x^{-1}/2$; б) $-2x$.

5,6,7 – используйте теоремы о непрерывных функциях на отрезке.

8 – \mathbb{Q} – точки разрыва, непрерывна на $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

9 – $f(x) = x + C$, C – константа. Воспользуйтесь тем, что $f(2x) - 2x = f(x) - x$, выполните замену и вспомните решение задачи $f(2x) = f(x)$ с практики.

$$10 - \frac{(1-x)^2}{40}$$