

# Дискретная математика

## Глава 3. Элементарная комбинаторика

А. В. Пастор

03.10.2022

## Дополнительные материалы по комбинаторике

1. М. Холл, *Комбинаторика*. М.: Мир, 1970.
2. Р. Стенли, *Перечислительная комбинаторика*. М.: Мир, 1990.

Слайды по дискретной математике будут публиковаться по адресу

<https://logic.pdmi.ras.ru/~pastor/ITM0/2022-23/>

## Основные комбинаторные числа: число размещений

- *Число размещений* из  $n$  элементов по  $k$  — это количество последовательностей длины  $k$ , составленных из различных элементов  $n$ -элементного множества. Обозначается  $A_n^k$ .
- Это число можно интерпретировать как
  - ▶ число инъективных отображений  $f: [1..k] \rightarrow [1..n]$ ;
  - ▶ число способов разложить  $k$  шаров по  $n$  ящикам (шары имеют номера от  $1 \div k$ , ящики —  $1 \div n$ , в ящик помещается не более одного шара).
- *Число размещений с повторениями* из  $n$  элементов по  $k$  — это количество последовательностей длины  $k$ , составленных из элементов  $n$ -элементного множества. Обозначается  $\tilde{A}_n^k$ .
- Это число можно интерпретировать как
  - ▶ число отображений  $f: [1..k] \rightarrow [1..n]$ ;
  - ▶ число способов разложить  $k$  шаров по  $n$  ящикам (шары имеют номера от  $1 \div k$ , ящики — от  $1 \div n$ , в ящик можно класть любое число шаров).
- Мы уже доказывали, что  $A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$  и  $\tilde{A}_n^k = n^k$ .

## Основные комбинаторные числа: число сочетаний

- **Число сочетаний** из  $n$  элементов по  $k$  — это количество  $k$ -элементных подмножеств в  $n$ -элементном множестве (где  $0 \leq k \leq n$ ).
- Возможные обозначения:  $C_n^k$  или  $\binom{n}{k}$ .
- Это число можно интерпретировать как
  - ▶ число строго монотонно возрастающих функций  $f: [1..k] \rightarrow [1..n]$ ;
  - ▶ число способов разложить  $k$  одинаковых шаров по  $n$  пронумерованным ящикам (в каждый ящик помещается не более одного шара).

### Теорема

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Доказательство. Пусть  $|X| = n$ .

- Есть  $A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$  способов выбрать последовательность из  $k$  различных элементов  $X$ .
- Каждая такая последовательность задает  $k$ -элементное подмножество  $X$ .
- Каждое подмножество посчитано  $k!$  раз, ибо его элементы можно упорядочить  $k!$  способами. Итого,  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$  различных подмножеств. □

## Основные комбинаторные числа: число сочетаний с повторениями

- *Число сочетаний с повторениями* из  $n$  элементов по  $k$  — это количество неупорядоченных наборов из  $k$  элементов  $n$ -элементного множества (в отличие от множества, в наборе один и тот же элемент может встречаться несколько раз).
- Возможные обозначения:  $\tilde{C}_n^k$  или  $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$ .
- Это число можно интерпретировать как
  - ▶ число нестрого монотонно возрастающих функций  $f: [1..k] \rightarrow [1..n]$ ;
  - ▶ число способов разложить  $k$  неразличимых шаров по  $n$  ящикам (в ящик можно класть любое число шаров);
  - ▶ число способов выбрать  $k$  предметов, если есть предметы  $n$  типов (на складе есть хотя бы по  $k$  предметов каждого типа; предметы одного типа абсолютно неразличимы).

# Формула для числа сочетаний с повторениями

## Теорема

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k.$$

## Лемма

Число решений уравнения  $t_1 + t_2 + \dots + t_n = k$  в  $\mathbb{N}_0$  равно  $\tilde{C}_n^k$ . (1)

Доказательство. Пусть  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

- Строим биекцию между решениями уравнения (1) и неупорядоченными наборами из  $k$  элементов множества  $X$ .
- Каждому решению  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  ставим в соответствие набор, состоящий из  $t_1$  экземпляров элемента  $x_1$ ,  $t_2$  экземпляров  $x_2$ ,  $\dots$ ,  $t_n$  экземпляров  $x_n$ .
- Обратно, каждому набору  $\mathcal{T}$  ставим в соответствие решение  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ , где  $t_i$  — число экземпляров  $x_i$  в  $\mathcal{T}$ . □

## Формула для числа сочетаний с повторениями: доказательство

### Доказательство теоремы.

- Расположим в ряд  $k$  шариков и  $n - 1$  перегородку.
- Всего есть  $C_{n+k-1}^k$  таких расположений.
- Обозначим через  $t_1$  число шариков до первой перегородки;  $t_2$  — между первой и второй перегородками;  $\dots$ ;  $t_n$  — после  $(n - 1)$ -й перегородки.
- Получаем биекцию между решениями уравнения (1) и такими расположениями шаров и перегородок.



## Свойства чисел сочетаний

- $C_n^k = C_n^{n-k}$  (очевидно).

- $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$ .

Доказательство.  $C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} =$   
 $= \frac{n! \cdot (k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n! \cdot (n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n! \cdot (n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = C_{n+1}^{k+1}.$  □

**Другой способ доказательства.** Пусть  $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ .

- ▶  $(k+1)$ -элементные подмножества  $X$  бывают двух видов: содержащие  $x_0$  и не содержащие  $x_0$ .
- ▶ Если  $x_0 \notin S \subset X$ , то  $S \subset X' = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Таких подмножеств  $C_n^{k+1}$ .
- ▶ Если  $x_0 \in S \subset X$ , то удалим  $x_0$  из  $S$ . Получим подмножество  $S' \subset X'$ , где  $|S'| = k$ . Таких подмножеств  $C_n^k$ . □

*Большинство соотношений на  $C_n^k$  имеют как алгебраическое, так и комбинаторное доказательство.*



- Треугольник Паскаля

				1						
			1		1					
		1		2		1				
	1		3		3		1			
1		4		6		4		1		
	1	5		10		10		5		1

- $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ .

Доказательство.

Алгебраически:

$$kC_n^k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = nC_{n-1}^{k-1}.$$

Комбинаторно: Как в левой, так и в правой части формулы записано число  $k$ -элементных подмножеств  $n$ -элементного множества, в которых один элемент отмечен.



## Свойства чисел сочетаний

- (Бином Ньютона)  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$ .

Доказательство.

►  $(a + b)^n = \underbrace{(a + b)(a + b) \dots (a + b)}_{n \text{ скобок}};$

► слагаемое  $a^{n-k} b^k$  получается, если из  $k$  скобок выбрать  $b$ , а из остальных —  $a$ .

► Это можно сделать  $C_n^k$  способами. □

- Другое название чисел  $C_n^k$  — *биномиальные коэффициенты*.

- $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = (1 + 1)^n = 2^n$ .

► Комбинаторное доказательство: в левой и в правой части записано число подмножеств  $n$ -элементного множества. □

- $C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n = (1 - 1)^n = 0$ .

- $C_n^0 + C_n^2 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + \dots = 2^{n-1}$ .

## Свойства чисел сочетаний

Докажем формулу  $C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$  комбинаторно.

Доказательство. Докажем, что  $C_n^0 + C_n^2 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + \dots$

- Пусть  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ .
- Построим биекцию между всеми четными и всеми нечетными подмножествами  $X$ .
- Пусть  $f(S) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} S \cup \{x_n\}, & x_n \notin S \\ S \setminus \{x_n\}, & x_n \in S. \end{cases}$
- Получаем отображение  $f: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ , обладающее следующим свойством:  $\forall S (f(f(S)) = S)$ .
  - ▶ Отображение, обладающее таким свойством называется **инволюцией**.
  - ▶ В частности, это означает, что  $f$  обратно самому себе, следовательно,  $f$  — биекция.
- При этом,  $|S|$  и  $|f(S)|$  всегда имеют разную четность.
- Таким образом,  $f$  также задает биекцию между всем четными и всеми нечетными подмножествами  $X$ .



## Определение

Пусть  $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$ , где  $m \in \mathbb{N}$  и  $n, k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}_0$ . Тогда число способов разбить  $n$ -элементное множество  $X$  на  $m$  непересекающихся подмножеств  $X_1, X_2, \dots, X_m$ , где  $|X_i| = k_i$ , обозначается  $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m}$  и называется **мультиномиальным коэффициентом**.  
(Другое название: **полиномиальный коэффициент**.)

## Теорема

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}.$$

**Доказательство.** Есть  $n!$  способов упорядочить элементы множества  $X$ .

- Для каждого способа, помещаем первые  $k_1$  элементов в  $X_1$ ; следующие  $k_2$  элементов в  $X_2$  и т. д.
- Получаем разбиение  $X$  на подмножества нужного размера.
- Каждое разбиение посчитано  $k_1! k_2! \dots k_m!$  раз. □

## Теорема

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}.$$

**Доказательство.** Аналогично доказательству Бинома Ньютона.

- При раскрытии скобок слагаемое  $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}$  получается, если выбрать из  $k_1$  скобок слагаемое  $a_1$ , из  $k_2$  скобок слагаемое  $a_2$ , ..., из  $k_m$  скобок слагаемое  $a_m$ .

- Такой выбор можно сделать в точности  $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m}$  способами. □

## Примеры

1. Пусть  $A, B$  — конечные множества. Тогда

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

2. Пусть  $A, B, C$  — конечные множества. Тогда

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| = \\ = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + \\ + |A \cap B \cap C|. \end{aligned}$$

## Формула включений-исключений

### Теорема (Формула включений-исключений)

Пусть  $A_1, \dots, A_n$  — конечные множества. Тогда

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [1..n]} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|. \quad (1)$$

Доказательство.

- ▶ Пусть  $x \in A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$  и  $x$  не принадлежит остальным  $A_j$ .
- ▶ Тогда  $x$  учитывается в формуле (1) с коэффициентом

$$\sum_{\ell=1}^k (-1)^{\ell+1} C_k^{\ell} = 1.$$



## Формула включений-исключений

Следствие (другая формулировка формулы включений-исключений)

Пусть  $X$  — конечное множество,  $|X| = N$ ;

- $P_1, \dots, P_n$  — свойства элементов множества  $X$  (т. е. одноместные предикаты на  $X$ );
- $N_{i_1, \dots, i_k}$  — число элементов, удовлетворяющих  $P_{i_1}, \dots, P_{i_k}$ ;
- $N(0)$  — число элементов, не удовлетворяющих ни одному свойству.

Тогда

$$\begin{aligned} N(0) = N - \sum_i N_i + \sum_{i_1 < i_2} N_{i_1, i_2} - \dots \\ \dots + (-1)^k \sum_{i_1 < \dots < i_k} N_{i_1, \dots, i_k} + \dots \\ \dots + (-1)^n N_{1, \dots, n}. \quad (2) \end{aligned}$$



# Субфакториалы (задача о беспорядках)

## Определение

- *Перестановкой* на множестве  $M$  называется произвольная биекция  $\sigma: M \rightarrow M$ .
- *Неподвижной точкой* перестановки  $\sigma$  называется такой элемент  $x \in M$ , что  $\sigma(x) = x$ .
- $S_n$  — множество всех перестановок на  $[1..n]$ .

## Замечание

Мы знаем, что  $|S_n| = n!$ .

## Определение

$D(n)$  — число перестановок из  $S_n$ , не имеющих неподвижных точек.

# Субфакториалы: рекуррентная формула

## Теорема

$$D(n+1) = n(D(n) + D(n-1)).$$

## Доказательство.

- ▶ Пусть  $\sigma \in S_{n+1}$ ;  $k = \sigma(n+1)$ ;  $\ell = \sigma^{-1}(n+1)$ .
- ▶ Возможны два случая:  $k \neq \ell$  или  $k = \ell$ .

1° Пусть  $k \neq \ell$ .

- Тогда  $\sigma'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sigma(x), & x \neq \ell \\ k, & x = \ell \end{cases}$  — перестановка из  $S_n$  без неподвижных точек.
- Для каждого  $k \in [1..n]$  есть  $D(n)$  таких перестановок.

2° Пусть  $k = \ell$ .

- Тогда  $\sigma|_{[1..n] \setminus \{k\}}$  — перестановка на  $[1..n] \setminus \{k\}$  без неподвижных точек.
- Для каждого  $k \in [1..n]$  есть  $D(n-1)$  таких перестановок.

- ▶ Итого, получаем  $nD(n) + nD(n-1)$  перестановок без неподвижных точек.



## Субфакториалы: явная формула

### Замечание

Для обычных факториалов выполняется такое же соотношение:

$$(n+1)! = n(n! + (n-1)!).$$

Поэтому числа  $D(n)$  называют *субфакториалами*.

### Теорема

$$D(n) = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Доказательство. Пусть  $X = S_n$ .

- $P_i$  — свойство “ $\sigma(i) = i$ ” для перестановки  $\sigma \in S_n$ .
- Тогда  $N = n!$  и  $N_{i_1, \dots, i_k} = (n-k)!$ .
- По формуле (2) имеем:  $D(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k (n-k)! C_n^k = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ . □

## Субфакториалы: явная формула

Следствие

$$D(n) = \text{round}\left(\frac{n!}{e}\right); \text{ более того, } \left|D(n) - \frac{n!}{e}\right| < \frac{1}{n+1}.$$

Доказательство. Напомним, что  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ . Тогда

- $$\begin{aligned} \frac{n!}{e} &= n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} + n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \\ &= D(n) + (-1)^{n+1} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1} n!}{(n+\ell)!}; \end{aligned}$$
- $$\left|D(n) - \frac{n!}{e}\right| = \left| \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1} n!}{(n+\ell)!} \right| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \dots \right|;$$
- $$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1} n!}{(n+\ell)!} = \left( \frac{n!}{(n+1)!} - \frac{n!}{(n+2)!} \right) + \left( \frac{n!}{(n+3)!} - \frac{n!}{(n+4)!} \right) + \dots > 0;$$
- $$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1} n!}{(n+\ell)!} = \frac{1}{n+1} - \left( \frac{n!}{(n+2)!} - \frac{n!}{(n+3)!} \right) - \left( \frac{n!}{(n+4)!} - \frac{n!}{(n+5)!} \right) - \dots < \frac{1}{n+1}. \quad \square$$

## Функция Эйлера

### Определение

- Натуральные числа  $a$  и  $b$  называются **взаимно простыми**, если у них нет общего натурального делителя, отличного от единицы.
- $\varphi(n)$  — количество натуральных чисел, меньше либо равных  $n$  и взаимно простых с  $n$  (**функция Эйлера**).

### Теорема

Пусть  $n = p_1^{a_1} \dots p_s^{a_s}$  (где  $p_1, \dots, p_s$  — различные простые и  $a_1, \dots, a_s$  — натуральные числа). Тогда  $\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_s})$ .

Доказательство. Пусть  $X = [1..n]$ .

- $P_i$  — свойство " $x \vdots p_i$ " для числа  $x \in X$ .
- Тогда  $N_{i_1, \dots, i_k} = \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}}$ .
- По формуле (2) имеем:

$$\varphi(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq s} \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}} = n(1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_s}).$$



## Число сюръективных отображений

### Теорема

Число сюръективных отображений  $f: [1..k] \rightarrow [1..n]$  равно  $\sum_{s=1}^n (-1)^{n-s} C_n^s s^k$ .

### Доказательство.

- Пусть  $X$  — множество всех отображений  $f: [1..k] \rightarrow [1..n]$ .
- $P_i$  — свойство " $f^{-1}(i) = \emptyset$ " для отображения  $f \in X$ .
  - ▶ Тогда  $N = |X| = n^k$ ;
  - ▶  $N_{i_1, \dots, i_\ell} = (n - \ell)^k$  — количество функций, удовлетворяющих данным  $\ell$  свойствам.
  - ▶  $f \in X$  — сюръекция  $\Leftrightarrow f$  не удовлетворяет ни одному из свойств.
- Следовательно, число сюръекций равно  $N(0)$ .
- По формуле включений-исключений имеем:

$$N(0) = \sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell C_n^\ell (n - \ell)^k = \sum_{s=1}^n (-1)^{n-s} C_n^s s^k.$$

(Последнее равенство получено заменой переменной  $s = n - \ell$ ).

