

**ДЗ-11: подготовка к кр (пределы, непрерывность, асимптотическое сравнение функций)**

1. Найти эквивалентную функцию вида  $A(x-1)^\alpha$  при  $x \rightarrow 1$  для  $f(x) = x^x - 1$ .
2. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{\cos x} - 2^x}{\ln(e^{x^2} + 1) - \ln(2^x + 1)}$ .
3. Докажите, что  $\sqrt{x^2 + 2bx + c} = x + b + O(1/x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ .
4. Докажите, что  $x = o(a^x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , пользуясь только тем, что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{a^n} = 0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).
5. Докажите, что  $\ln x = o(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$  (пользуясь предыдущим).
6. Докажите, что  $\sqrt{x^2 + 4} \operatorname{arctg} x = O(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  и  $x = O(\sqrt{x^2 + 4} \operatorname{arctg} x)$  при  $x \rightarrow \infty$ .
7. Пусть  $x_1 = a$ ,  $x_{n+1} = \sin x_n$ . Докажите, что  $x_n$  сходится и найдите предел.
8. (\*) Найти  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^2}{x^2 + 1} \right)^{\operatorname{ctg} \pi x}$
9. (\*) Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{a} \left[ \frac{b}{x} \right], a \neq 0$
10. (\*) Известно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-1}/2) = 0$ . Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$
11. (\*) Пусть  $x_1 = 0$ ,  $x_{n+1} = \cos x_n$ . Докажите, что  $x_n$  сходится и ее предел равен корню уравнения  $\cos x = x$ .