Практика 8 (КТ). Вычисление пределов функций с помощью эквивалентов

1. Вычислить пределы, пользуясь свойствами пределов

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$;

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sin\sqrt{x^2+1} - \sin\sqrt{x^2-1}\right)$.

---

2. Вычислить

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$;

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 7x}$;

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \sin 2x \cdot \operatorname{ctg} 3x \cdot 2^x$;

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x \operatorname{arctg} 2x}$;

   (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{3^x - 1}$;

   (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[4]{1+x} - 1}{\log_2(1+2x)}$;

   (g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{\sqrt[k]{2+x} - \sqrt[k]{2}}$;

   (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_2(2+x) - \log_2(2+2x)}{x\ln(2+x)}$;

   (i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_2(2+x) - \log_3(3+x)}{\ln(1-\sin 2x)}$;

   (j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \ln\left(\dfrac{2x+3}{3-2x}\right)$;

   (k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x - \sin 7x}{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 4x}$;

   (l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos 3x}{\ln(1+3x^2)}$;

   (m) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sqrt[5]{1+2x} - \sqrt[6]{1-3x}}{\cos\sqrt{x} - 1}$;

   (n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x} - e^{\sin 3x}}{\sqrt{1+2x} - 1}$;

   (o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\cos 4x} - \sqrt[5]{\cos 5x}}{\ln\cos x}$;

   (p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$;

---

3. Вычислить

   (a) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x \cos x}{x^2 - \pi^2}$;

   (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}$;

   (c) $\lim\limits_{x\to \infty} x \sin\dfrac{\pi}{x}$;

   (d) $\lim\limits_{x\to \infty} x^2\left(\cos\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{3}{x}\right)$;

   (e) $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{\lg x - 1}{x - 10}$;

   (f) $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2}\cos x - 1}$;

   (g) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \left(\dfrac{\pi}{\cos x} - 2x\operatorname{tg} x\right)$;

   (h) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a}$;

   (i) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^x - e^2}{(x-4)e^x + xe^2}$;

---

4. Посложнее:

   (a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{\pi} - \sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$;

   (b) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$;

   (c) $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{\ln(2x^2 - x)}{\ln(x^4 + x^2 - x)}$;

   (d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(2x^2 - x)}{\ln(x^4 + x^2 - x)}$;

   (e) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^{a^x} - a^{x^a}}{a^x - x^a}$;

   (f) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x^2 - \ln(\operatorname{ch} x^2)\right)$;

Можно пользоваться

1. Правило замены на эквивалент: $f \sim f_1$, $g \sim g_1$ при $x \to x_0 \Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0} f\cdot g = \lim\limits_{x\to x_0} f_1\cdot g_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f}{g} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1}{g_1}$.
2. Непрерывность элементарных функций (докажем позже).
3. $a^b = \exp(b\ln a)$, $a > 0$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$; $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$;
5. Эквиваленты при $x \to 0$: $\sin x \sim x$ и т.д.