Теория графов. Глава 6. Планарные графы.

Д. В. Карпов

12.2021

Плоские и планарные графы

Определение

Граф называется *планарным*, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы его рёбра не пересекались во внутренних точках. Вершины изображаются точками, а рёбра — ломаными. Внутренние точки любой ломаной, изображающей ребро графа, не должны быть вершинами графа.

Определение

Плоским графом (или *плоским изображением*) мы будем называть конкретное изображение планарного графа на плоскости без пересечений и самопересечений рёбер.

• Таким образом, планарному графу могут соответствовать разные плоские графы.

Грань плоского графа

• Изображение плоского графа делит плоскости на части — *грани*. Это ключевой объект для плоского графа, отличающий его от абстрактного планарного графа. Ниже мы дадим формальное определение граней.

• На плоскости изображен плоский граф G. Пусть M — множество всех точек плоскости, не входящих в изображение G.

• Пусть запись $A \sim B$ означает, что точки $A, B \in M$ можно соединить ломаной, не пересекающей изображение графа G. Укажем три важных свойства $\sim$.

Утверждение

$\sim$ — отношение эквивалентности.

Доказательство. • Рефлексивность. $A \sim A$

• Симметричность. Если $A \sim B$, то $B \sim A$.

• Транзитивность. Если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$. □

Определение

Грани плоского графа G — классы эквивалентности по отшению $\sim$.

• Таким образом, все точки плоскости, не лежащие на изображении графа G, разбиты на грани.

• Две точки из одной грани графа G могут быть соединены ломаной, не пересекающей изображение G.

• Любая ломаная, соединяющая две точки из разных граней, пересекает изображение G.

Теорема Жордана для замкнутой ломаной

Теорема 1

(C. Jordan, 1887.) *Замкнутая несамопересекающаяся ломаная P делит точки плоскости, не лежащие на P, на две такие части, что выполнены следующие условия:*

(1) *любые две точки из одной части можно соединить ломаной, не пересекающей P;*

(2) *любая ломаная, соединяющая две точки из разных частей, пересекает P.*

Доказательство. • Пусть $P_1 \dots P_m$ — вершины P в порядке обхода по часовой стрелке. Обозначим через M множество всех точек плоскости, не лежащих на P.

• Зафиксируем на плоскости вектор ℓ, не параллельный ни одной из сторон P. Из каждой точки $A \in M$ выпустим луч $\ell(A)$ в направлении ℓ.

• В случае, если $\ell(A)$ содержит вершину P_i многоугольника P, но стороны $P_{i-1}P_i$ и P_iP_{i+1} лежат в одной полуплоскости относительно содержащей $\ell(A)$ прямой, мы будем говорить, что многоугольник P в вершине P_i *касается* $\ell(A)$.

- Посчитаем число $p(A)$ точек пересечения $\ell(A)$ с P, не являющихся касаниями. Очевидно, что $p(A)$ конечно.
- Часть M_0 будет состоять из всех точек $A \in M$, для которых $p(A)$ четно, а часть M_1 будет состоять из всех точек $B \in M$, для которых $p(B)$ нечетно.

Утверждение

M_0 и M_1 непусты.

Доказательство. • Рассмотрим прямую ℓ_0, параллельную вектору ℓ, и проходящую через внутреннюю точку ломаной P (то есть через, не являющуюся ее вершиной).

- При движении по ℓ_0 в направлении вектора ℓ отметим последнее пересечение с ℓ во внутренней точке — пусть это точка X.
- Рассмотрим содержащий X малый отрезок $[Y, Z]$ на этом ℓ_0, не пересекающий P в отличных от X точках, пусть Y лежит перед X при движении в направлении ℓ.
- Тогда $p(Y) = 1$ (единственное пересечение в точке X), а $p(Z) = 0$.

Утверждение

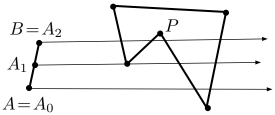
Пусть $A, B \in M$ и отрезок $[A, B]$ не пересекает P. Тогда $p(A)$ и $p(B)$ имеют одинаковую четность. В частности, выполнено условие (2).

Доказательство. • Если $AB \parallel \ell$, то утверждение очевидно.

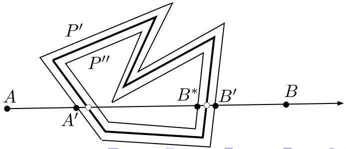
• Если нет, то отметим на отрезке AB все такие точки $A_1, \dots, A_k$ в направлении от A к B, что $\ell(A_i)$ касается P (если они есть). Положим $A_0 = A$ и $A_{k+1} = B$.

• Тогда для каждого $i \in [0..k]$, все точки отрезка $[A_i, A_{i+1}]$ имеют, очевидно, одинаковое значение функции p, а при переходе на соседний отрезок функция p может иметь четный скачок (каждое касание $\ell(A_i)$ многоугольника P добавляет точкам с одной стороны от A_i двойку к количеству пересечений, см. рис. a).

• В любом случае, на всем отрезке $[A, B]$ функция p имеет одинаковую четность. $\square$



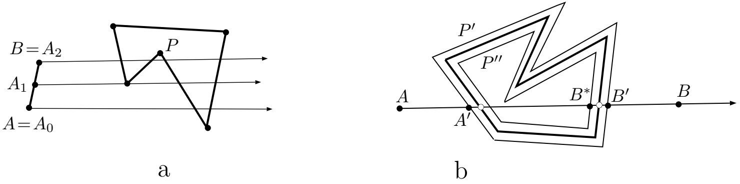
a



b

Докажем (1).

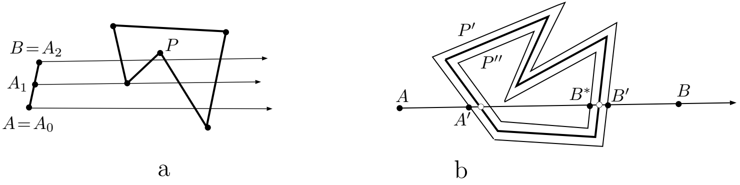
• Пусть $A, B \in M_i$. Если отрезок $[A, B]$ не пересекает P, то все понятно. Пусть пересекает, причем A_1 и B_1 — ближайшие к A и B соответственно точки пересечения.



• Отметим на отрезке $[A, A_1]$ точку A' очень близко к A_1, а на отрезке $[B_1, B]$ — точку B' очень близко к B_1, пусть $|A_1A'| = |B_1B'| = \delta$ (см. рис. b). Тогда $p(A) = p(A')$ и $p(B) = p(B')$.

• Проведем вдоль каждой стороны многоугольника P две параллельных прямых на расстоянии δ с разных сторон, выбрав это число столь малым, чтобы в результате получились два "очень близких" к P многоугольника P' и P'' так, чтобы стороны P' и P'' не пересекали сторон P. (Достаточно выбрать δ меньше, чем минимальное расстояние от стороны P до вершины, на ней не лежащей.)

• НУО A' лежит на P'. Если и B' лежит на P', то мы построили от A' до B' ломаную, не пересекающую P, тогда такая ломаная построена и от A до B.



• Пусть B' лежит на P'', тогда обозначим через B^* точку пересечения P' с прямой AB, лежащую около B (разумеется, на расстоянии δ).

• Несложно понять, что $p(B^*) - p(B') = \pm 1$ (разница состоит в том, что ровно для одной из этих точек учитывается пересечение в точке B_1).

• Однако применив доказанное выше утверждение, получим $p(B^*) \equiv p(A') \equiv p(A) \equiv p(B) \equiv p(B') \pmod 2$, противоречие. □

Плоскость и сфера

• Плоскость и сфера переводятся друг в друга *стереографической проекцией*.

• Поставим сферу на плоскость, точку касания назовём южным полюсом, противоположную точку — северным полюсом N. Каждая точка $A \neq N$ сферы перейдёт в точку пересечения плоскости и луча NA.

Утверждение

Граф является планарным тогда и только тогда, когда его можно изобразить на сфере без пересечения рёбер во внутренних точках.

Доказательство. • Переводя изображение графа со сферы на плоскость нужно лишь выбрать северный полюс так, чтобы он не совпадал ни с одной из вершин графа и не попадал на рёбра. □

- Плоское изображение планарного графа ограничено (его можно поместить в большой круг).
- Поэтому в плоском изображении планарного графа есть ровно одна неограниченная *внешняя грань*, которая визуально сильно отличается от всех остальных, а в сферическом изображении такой грани нет.
- Грань сферического изображения графа, содержащая северный полюс будет соответствовать при стереографической проекции внешней грани плоского изображения.
- Таким образом, перемещая северный полюс на разные грани, можно любую грань сферического изображения сделать внешней гранью в плоском изображении графа. Это лишний раз подчеркивает, что на самом деле внешняя грань не отличается от остальных.

Граница грани

- Рассмотрим ребро e плоского графа G. Либо по разные стороны от e расположены разные грани (тогда ребро e — *граничное* ребро этих двух граней), либо по обе стороны от e — одна и та же грань, тогда назовем ребро e *внутренним* ребром этой грани. Обозначим через E_d множество всех граничных и внутренних рёбер грани d.
- *Граничные вершины* грани d — это концы ребер из E_d. Обозначим множество граничных вершин грани d через V_d.
- Граничные и внутренние рёбра грани d — это в точности те рёбра, до которых от внутренней точки грани d можно дойти по ломаной, не пересекая изображение графа.
- Граничные вершины грани d — это в точности те вершины, до которых можно дойти по ломаной от внутренних точек этой грани, не пересекая её граничных и внутренних рёбер.
- *Граница* грани d — это подграф $B(d)$ графа G с множеством вершин V_d и множеством рёбер E_d.
- *Размер границы* грани d мы определим, как количество граничных рёбер этой грани плюс удвоенное количество внутренних рёбер. Обозначать эту величину будем через $b(d)$.

Свойство 1

Если сложить размеры границ всех граней, получится удвоенное количество рёбер.

Доказательство. Внутреннее ребро грани два раза считается в размере границы этой грани. Граничное ребро двух граней по разу считается в их размерах. □

Свойство 2

Любые две точки на границе грани d можно соединить ломаной, проходящей в d.

Доказательство. Пусть A — внутренняя точка грани d. От нее можно провести ломаные, не пересекающие изображение G до любых двух граничных. Все точки на этих ломаных лежат в d. □

Свойство 3

Если две точки A и B на изображении графа G можно соединить ломаной L, не пересекающей изображения G, то A и B лежат на границе некоторой грани.

Доказательство. A и B лежат на границе грани d, содержащей все внутренние точки L (см. рисунок a). $\square$

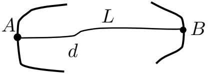
Определение

Рассмотрим любую вершину a плоского графа G и упорядочим выходы ребер из a по часовой стрелке. Два ребра, выходы которых — соседние в этом порядке, будем называть *соседними в вершине a*.

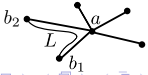
Свойство 4

Пусть ab_1 и ab_2 — два соседних ребра в вершине a. Тогда рёбра ab_1 и ab_2 лежат в границе некоторой грани.

Доказательство. вершины b_1 и b_2 можно соединить ломаной вдоль b_1ab_2, не пересекающей изображения G (см. рисунок b). Поэтому, рёбра ab_1 и ab_2 лежат в границе некоторой грани. $\square$

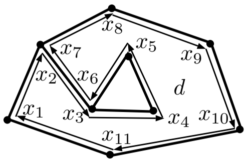


a

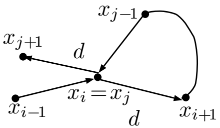


b

- Пусть G — плоский граф, $d \in F(G)$, а $x_1x_2 \in E_d$.
- Пройдем по ребру x_1x_2 от x_1 к x_2. НУО справа по ходу движения расположена грань d. Повернем в вершине x_2 направо до выхода соседнего ребра x_2x_3. (Если $d_G(x_2) = 1$, то $x_3 = x_1$, это нам не мешает.) Очевидно, $x_2x_3 \in E_d$. Пойдем по этому ребру от x_2 к x_3, справа опять будет расположена грань d. И так далее. В конечном итоге мы вернемся на ребро x_1x_2 (в вершину x_1 мы можем вернуться и раньше!). Получился замкнутый циклический маршрут (см. рис. а).



a



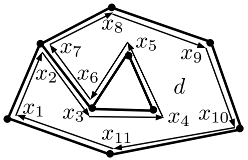
b

a b

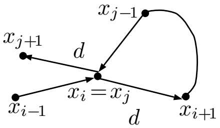
• Пусть получился циклический маршрут $Z = x_1x_2 \dots x_k$. Рассмотрим вершину x_i. по построению, Z обходит вокруг x_i — скажем, против часовой стрелки. Пусть мы вышли из вершины x_i по ребру x_ix_{i+1}, а следующий раз вернулись в эту вершину по ребру $x_{j-1}x_j$ (в этом случае $x_i = x_j$, см. рис. b).

• Тогда сектор между выходами рёбер x_ix_{i+1} и x_jx_{j-1} из вершины $x_i = x_j$ не принадлежит грани d. Следовательно, Z проходит все рёбра из E_d, инцидентные вершине x_i. Поскольку это верно для любой вершины Z, этот маршрут обходит все рёбра одной из компонент графа $B(d)$.

• Обозначим через $Z(U)$ такой маршрут для компоненты U, а через $Z(d)$ — объединение построенных маршрутов для всех компонент $B(d)$.



a



b

• Если маршрут $Z(d)$ проходит ребро e дважды, то, очевидно, в разных направлениях. Значит, по обе стороны от e расположена грань d, то есть e — внутреннее ребро d.

• Пусть e — внутреннее ребро грани d (см. ребро $x_2x_3 = x_6x_7$ на рисунке). Тогда при проходе по e в любом из направлений справа будет расположена грань d. Поэтому, маршрут $Z(d)$ дважды пройдет e — в обоих направлениях.

Лемма 1

Для плоского графа G выполнены следующие утверждения.

1) *Если $d \in F(G)$ и $B(d)$ несвязна, то разные компоненты связности графа $B(d)$ лежат в разных компонентах связности графа G.*

2) *Граф G несвязен, если и только если он имеет грань с несвязной границей.*

Доказательство. 1) • Пусть B_1 и B_2 — две компоненты $B(d)$. Изображение компоненты B_1 ограничено и не пересекает других компонент $B(d)$. Следовательно, изображение B_1 можно отделить от изображения B_2 замкнутой ломаной в грани d, не пересекающей ребер G (такую ломаную можно построить, почти повторив маршрут $Z(B_1)$: вместо каждого прохода по ребру, проведем его копию на малом расстоянии δ в грани d, как в доказательстве теоремы Жордана).

• Значит, между B_1 и B_2 нет пути в графе G.

2) Очевидно, можно обойти все грани графа G, каждый раз переходя в грань имеющую с предыдущей общую сторону или вершину (достаточно отметить по внутренней точке на каждой грани и проложить на плоскости маршрут, все эти точки обходящий).

• Тогда, если граница каждой грани связна, то связно и их объединение, а это граф G, противоречие. Значит, несвязный граф имеет грань с несвязной границей.

• Если G имеет грань с несвязной границей, то G несвязен по пункту 1. $\square$

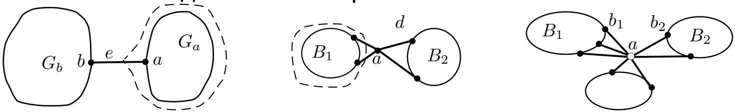
Лемма 2

Внутренние рёбра граней плоского графа G — в точности все мосты графа G.

Доказательство. • Пусть внутреннее ребро e грани d — не мост, тогда оно лежит в простом цикле C. По теореме Жордана цикл делит плоскость на две области, а грань d может лежать только в одной из них.

• Наоборот, пусть $e = ab$ — мост. Тогда граф $G - e$ имеет две компоненты G_a и G_b, содержащие a и b соответственно.

• Изображение компоненты G_a ограничено и не пересекает G_b, значит, существует замкнутая ломаная P в грани d, отделяющая G_a от G_b (см. рис. a). Очевидно, P пересекает ребро e, а значит, по обе стороны от моста e расположена одна и та же грань. □



a b c

Лемма 3

Пусть d — грань реберно двусвязного графа G. Тогда $B(d)$ — цикл (не обязательно простой).

Доказательство. • Так как G связен, $B(d)$ — связный граф по Лемме 1. Значит, и $Z(d)$ связен. Так как внутренних рёбер у d нет (граф не имеет мостов), $Z(d)$ — цикл. □

• Докажем, что граница грани почти всегда однозначно задает эту грань.

Лемма 4

Если две разные грани f и f' плоского графа G имеют одинаковые границы, то G — простой цикл.

Доказательство. • Пусть B — общая граница этих граней, $e \in E(B)$. По Лемме 2 тогда e — не мост графа G, а значит, существует простой цикл Z, содержащий e.

• Тогда Z делит плоскость на две области — $O \supset f$ и $O' \supset f'$.

• Пусть $e' \in B \setminus Z$. Тогда e' лежит внутри одной из областей O и O' — скажем, в O'. В этом случае, e' не может быть граничным ребром грани $f \subset O$, противоречие. □

Лемма 5

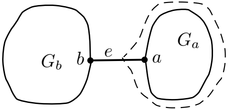
Пусть G — плоский граф.

1) *Если грань d и ее граничная вершина a таковы, что B_1 и B_2 — разные компоненты графа $B(d) - a$, то B_1 и B_2 лежат в разных компонентах графа $G - a$. В частности, a — точка сочленения графа G.*

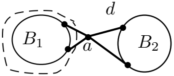
2) *Граф G без петель вершинно двусвязен, если и только если границы его граней — простые циклы.*

Доказательство. 1) Аналогично доказательству Леммы 1, плоское изображение B_1 можно отделить от изображения B_2 ломаной, не пересекающей ребер $G - a$ (см. рис. b), а значит, между B_1 и B_2 нет рёбер в графе $G - a$.

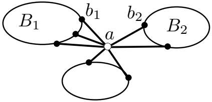
- Следовательно, a — точка сочленения графа G.



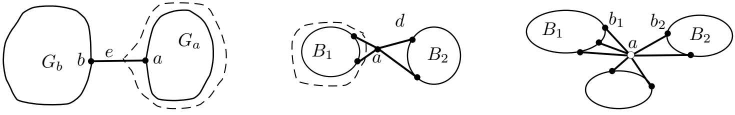
a



b



c



a b c

2) • Пусть a — точка сочленения графа G. Рассмотрим плоское изображение несвязного графа $G - a$, полученное из G удалением вершины a.

• В силу Леммы 1 граф $G - a$ имеет несвязную грань d, а граф G не имеет. Значит, a лежит на грани d и смежна со всеми компонентами ее границы.

• Упорядочим выходы ребер из a по часовой стрелке. Тогда есть два соседних ребра, выходящих к разным компонентам графа $B(d)$ — скажем, ребро ab_1 к компоненте B_1 и ребро ab_2 к компоненте B_2 (см. рис. c).

• Точка сочленения a отделяет b_1 от b_2 в графе G. Существует грань f графа G, граница которой содержит a, b_1 и b_2. Тогда a — точка сочленения $B(f)$.

• Наоборот, если грань d такова, что $B(d)$ имеет точку сочленения, то по пункту 1 граф G также имеет точку сочленения.

Грани трёхсвязного графа

Определение

• Цикл C графа G — *неразделяющий*, если граф $G - V(C)$ связен.

• Цикл C — *индуцированный*, если он не имеет хорд (то есть, является индуцированным подграфом на своем множестве вершин).

Лемма 6

Пусть G — трёхсвязный плоский граф. Тогда множество границ его граней есть в точности множество его неразделяющих индуцированных циклов.

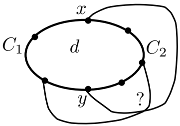
Доказательство. $\supset$. Пусть C — неразделяющий индуцированный цикл в G. Тогда в одной из областей, на которые C делит плоскость — назовём ее d — нет вершин графа G. Так как индуцированный цикл C не имеет диагоналей, внутри d рёбер тоже нет. Значит d — грань, а цикл C — её граница.

$\subset$. • Пусть C — граница грани d графа G. Тогда C — простой цикл.

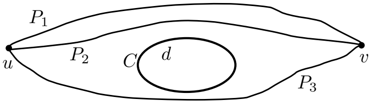
• Предположим, что C имеет диагональ xy. Вершины x и y делят цикл C на две дуги C_1 и C_2.

• Граф $G - x - y$ должен быть связен ввиду трёхсвязности графа G. Значит, в $G - x - y$ есть C_1C_2-путь P.

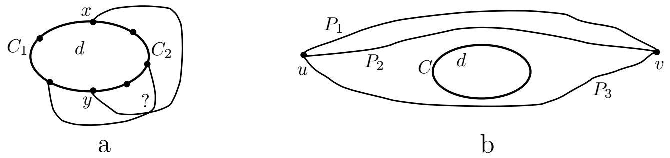
• Понятно, что и диагональ xy, и путь P должны проходить вне грани d, но тогда они пересекаются (см. рис. a), что невозможно.



a



b



• Докажем, что граф $G - V(C)$ связен.

• Пусть $u, v \in V(G) \setminus V(C)$. По теореме Уитни в трёхсвязном графе G существуют три независимых uv-пути P_1, P_2 и P_3, которые делят плоскость на три области.

• Грань d лежит в одной из этих областей, пусть это область, граница которой образована путями P_2 и P_3 (см. рис. b). Тогда P_1 не пересекается с границей грани d — циклом C — а значит, вершины u и v связаны в $G - V(C)$.

• Таким образом, граница грани графа G является индуцированным неразделяющим циклом. $\square$

Разные изображения одного графа. Изоморфизм

• Слева и справа на рисунке — плоские изображения одного и того же графа. Но это разные изображения! У правого изображения есть грань, в границе которой 6 вершин, а у левого — нет.

Определение

Пусть G и G' — два плоских графа, а биекция $\varphi : V(G) \to V(G')$ удовлетворяет следующим условиям.

(1) $xy \in E(G) \iff \varphi(x)\varphi(y) \in E(G')$;

(2) $U \subset V(G)$ является множеством граничных вершин некоторой грани графа G, если и только если $\varphi(U) = \{\varphi(x) \ : \ x \in U\}$ является множеством граничных вершин некоторой грани графа G'.

Тогда φ — *изоморфизм плоских графов* G и G', а сами эти плоские графы *изоморфны*.

Теорема 2

(H. Whitney, 1933.) *Любые два плоских изображения трёхсвязного планарного графа G изоморфны как плоские графы.*

Доказательство. • Пусть G_1 и G_2 плоские изображения G, причем $x_1 \in V(G_1)$ и $x_2 \in V(G_2)$ — изображения вершины $x \in V(G)$.

• Определим отображение $\varphi : V(G_1) \to V(G_2)$ так: $\varphi(x_1) = x_2$ для любой вершины $x_1 \in V(G_1)$. Очевидно, $x_1y_1 \in E(G_1) \iff xy \in E(G) \iff \varphi(x_1)\varphi(y_1) = x_2y_2 \in E(G_2)$.

• По Лемме 6 границы граней плоского графа G_1 — это в точности неразделяющие индуцированные циклы графа G_1, а границы граней плоского графа G_2 — это в точности неразделяющие индуцированные циклы G_2. Это свойство не имеет отношения к плоскому изображению.

• $U_1 \subset V(G_1)$ — множество вершин неразделяющего индуцированного цикла в G_1 (то есть, границы грани G_1) $\iff$ $U \subset V(G)$ множество вершин неразделяющего индуцированного цикла в G $\iff$ $\varphi(U_1) = U_2 \subset V(G_2)$ — множество вершин неразделяющего индуцированного цикла в G_2 (то есть, границы грани G_2).

• Следовательно, φ — изоморфизм плоских графов.

Формула Эйлера

• В разных плоских изображениях планарного графа G могут получаться разные грани. Однако их количество является инвариантом графа, как говорит нам формула Эйлера.

Теорема 3

(L. Euler, 1752.) *Пусть G — плоский граф с v вершинами, e рёбрами и f гранями, имеющий k компонент связности. Тогда $v - e + f = 1 + k$.*

Доказательство. Индукцией по количеству рёбер.

База для случая, когда граф G — лес, очевидна: в этом случае $f = 1$, $e = v - k$.

Переход • Пусть для меньших графов формула Эйлера уже доказана и G — не лес.

• Тогда в графе есть цикл, пусть ребро ℓ входит в цикл. Так как ℓ — не мост, по ребру ℓ граничат две разные страны, которые объединяются в одну в графе $G - \ell$.

• Таким образом, в графе $G - \ell$ v вершин, k компонент, $e - 1$ ребро и $f - 1$ страна. Теперь формула Эйлера для G следует из формулы Эйлера для $G - \ell$, которая верна по индукционному предположению.

• Мы будем обозначать количество вершин, рёбер и граней плоского графа G буквами v, e и f соответственно.

Следствие 1

Пусть G — планарный граф без петель и кратных рёбер, $v \geq 3$. Тогда выполняются следующие утверждения.

1) $e \leq 3v - 6$.

2) *Если граф G — двудольный, то $e \leq 2v - 4$.*

Доказательство. 1) • Докажем, что размер границы каждой грани графа G не менее 3. В самом деле, пусть $d \in F(G)$, $b(d) \leq 2$.

• Так как петель и кратных рёбер нет, $B(d)$ не имеет циклов. Следовательно, все рёбра внутренние. Тогда такое ребро всего одно, а значит, $e = 1$ и утверждение очевидно.

• Сумма размеров границ всех граней равна $2e$, а размер каждой границы не менее 3. Следовательно, $2e \geq 3f$ или $f \leq \frac{2e}{3}$.

• Тогда из формулы Эйлера $v - \frac{e}{3} = v - e + \frac{2e}{3} \geq v - e + f \geq 2$, откуда следует доказываемое неравенство.

2) • Докажем, что размер границы каждой грани двудольного графа G не менее 4.

• В самом деле, пусть $d \in F(G)$, $b(d) \leq 3$. Поскольку в двудольном графе нет циклов длины 3, и в G нет кратных рёбер, все рёбра внутренние. Тогда такое ребро всего одно, а значит, $e = 1$ и утверждение очевидно.

• Сумма размеров границ всех граней равна $2e$, а размер каждой границы не менее 4. Следовательно, $f \leq \frac{e}{2}$.

• Тогда из формулы Эйлера
$v - \frac{e}{2} = v - e + \frac{e}{2} \geq v - e + f \geq 2$, откуда следует доказываемое неравенство. □

Следствие 2

Пусть G — планарный граф без петель и кратных рёбер. Тогда $\delta(G) \leq 5$.

Доказательство. • В случае $v \leq 2$ утверждение очевидно.

• Пусть $v \geq 3$ и при этом $\delta(G) \geq 6$. Тогда $6v \leq 2e$, то есть, $e \geq 3v$ — противоречие со Следствием 1. □

Следствие 3

K_5 и $K_{3,3}$ — непланарные графы.

Доказательство. 1) Пусть K_5 планарен. Для этого графа $v = 5$, $e = 10$. По пункту 1 следствия 1 мы имеем $10 = e \le 3v - 6 = 9$, что неверно.

2) Пусть $K_{3,3}$ планарен. Для этого двудольного графа $v = 6$, $e = 9$. По пункту 2 следствия 1 мы имеем $9 = e \le 2v - 4 = 8$, что неверно. □

Определение

• Граф H' называется *подразбиением* графа H, если H' может быть получен из H заменой некоторых рёбер на простые пути (каждое заменяемое ребро xy меняется на простой xy-путь). При этом, все добавлямые вершины различны и имеют степень 2.

• Вершины H в графе H' называются главными.

• $G \supset H$ означает, что граф G имеет подграф, изоморфный подразбиению графа H.

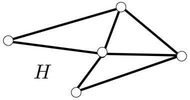
Следствие 4

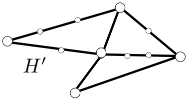
1) *Подразбиение графа H планарно, если и только если H планарен.*

2) *Любое подразбиение графа K_5 или $K_{3,3}$ непланарно.*

Доказательство. 1) Изображение как ребра, так и простого пути — ломаная.

2) Следует из пункта 1 и Следствия 3. □





Лемма 7

Пусть $x, y \in V(G)$, $xy \in E(G)$. Тогда выполняются следующие утверждения.
1) *Если $G \cdot xy \supset K_{3,3}$, то $G \supset K_{3,3}$.*
2) *Если $G \cdot xy \supset K_5$, то $G \supset K_5$ или $G \supset K_{3,3}$.*

Доказательство. • Пусть $w = x \cdot y$, а H — подграф $G \cdot xy$, являющийся подразбиением $K_{3,3}$ или K_5.

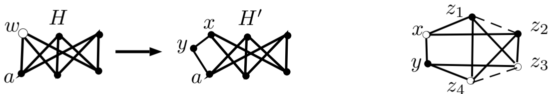
• Если $w \notin V(H)$ то, очевидно, $G \supset K_{3,3}$ или $G \supset K_5$, соответственно.

• Далее $w \in V(H)$. Построим подграф H' графа G следующим образом: $V(H') = V(H) \setminus \{w\} \cup \{x, y\}$. Все рёбра из $E(H)$, не инцидентные w, включим в $E(H')$. Для каждого ребра $aw \in E(H)$ включим его в $E(H')$ то из ребер ax или ay, которое есть в графе G (если есть оба этих ребра, возьмем любое из них). Наконец, поместим в $E(H')$ ребро xy.

• Рёбра графа $H' - xy$, инцидентные вершине x, назовем *красными*, а рёбра графа $H' - xy$, инцидентные вершине y — *синими*. Вместе красных и синих рёбер ровно $d_H(w)$.

• Если в графе H' нет синих рёбер, то $H' - y$ — подграф графа G, изоморфный H. Аналогично для красных рёбер. В этом случае доказательство леммы закончено.

• Пусть ay — единственное синее ребро в H'. Тогда ребру $aw \in E(H)$ соответствует путь ayx в графе H', то есть, H' является подразбиением графа H (см. рис. a). В этом случае лемма доказана, аналогично для случая, когда есть ровно одно красное ребро.



a b

• Пусть теперь и красных, и синих рёбер не менее, чем по два. Тогда $d_H(w) \geq 4$, откуда сразу же следует, что $H \supset K_5$, $d_H(w) = 4$.

• Пусть тогда z_1, z_2, z_3, z_4 — четыре оставшиеся главные вершины графа H. Каждая пара из вершин w, z_1, z_2, z_3, z_4 соединена в H путём — подразбиением соответствующего ребра графа K_5. Разные пути не имеют общих внутренних вершин. Этим путям соответствуют пути в графе H'.

• НУО в H' есть xz_1-путь, xz_2-путь, yz_3-путь и yz_4-путь (см. рис. b). Тогда $H' \supset K_{3,3}$: каждая из вершин x, z_3, z_4 соединена путём с каждой из вершин y, z_1, z_2, разные пути не имеют общих внутренних вершин.

Теорема 4

(K. Kuratowski, 1930) *Граф G (возможно, имеющий кратные рёбра и петли) непланарен, если и только если G имеет подграф, являющийся подразбиением K_5 или $K_{3,3}$.*

Доказательство. $\Leftarrow$. Следствие 4.

$\Rightarrow$. • Предположим противное и рассмотрим минимальный контрпример G (непланарный граф, не содержащий подразбиений K_5 и $K_{3,3}$).

• Любой не содержащий подразбиений K_5 и $K_{3,3}$ граф с меньшим чем G числом вершин или с таким же, как у G числом вершин и меньшим числом рёбер обязательно является планарным.

Утверждение 1

G не имеет петель и кратных рёбер.

Доказательство. • Пусть e — петля графа G. Тогда граф $G - e$ планарен и из его планарности следует планарность графа G (можно дорисовать петлю к плоскому изображению $G - e$).

• Теперь пусть G имеет два кратных ребра e и f. Тогда граф $G - e$ планарен и из его планарности следует планарность графа G (можно дорисовать ребро e вдоль ребра f в плоском изображении $G - e$).

Утверждение 2

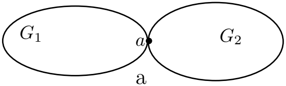
G трехсвязен.

Доказательство. • Если G несвязен, то его компоненты не содержат подразбиений K_5 и $K_{3,3}$, а значит, планарны. Тогда планарен и граф G, противоречие.

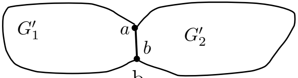
• Пусть G имеет точку сочленения a. Тогда $G = G_1 \cup G_2$, где $V(G_1) \cap V(G_2) = \{a\}$.

• Графы G_1 и G_2 не содержат подразбиений K_5 и $K_{3,3}$, а значит, планарны.

• Тогда планарен и граф G (можно изобразить G_1 и G_2 так, чтобы a оказалась на границе внешней грани обоих изображений и склеить их, см. рисунок а). Противоречие.



а



b

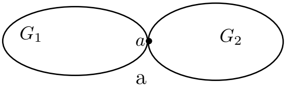
• Наконец, пусть G двусвязен, но имеет разделяющее множество $S = \{a, b\}$. Тогда $G = G_1 \cup G_2$, где $V(G_1) \cap V(G_2) = S$. Пусть $G_i' = G_i + ab$.

• Предположим, что G_1' содержит подграф H — подразбиение графа K_5 или $K_{3,3}$. Так как H не может быть подграфом G, $ab \in E(H) \setminus E(G)$.

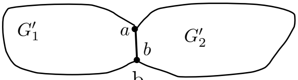
• Однако, G содержит ab-путь P по вершинам G_2. Заменив в H ребро ab на путь P, мы получим подразбиение H' графа H, являющееся подграфом G. Тогда G содержит подразбиение K_5 или $K_{3,3}$, что не так.

• Таким образом, G_1' не содержит подразбиений K_5 и $K_{3,3}$, а значит, G_1' планарен. Аналогично, G_2' планарен.

• Тогда можно изобразить эти графы на плоскости так, чтобы ребро ab в обоих изображениях лежало в границах внешних граней и склеить эти изображения (см. рис. b). Противоречие. $\square$



a

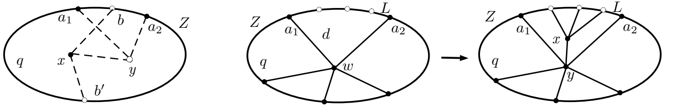


b

- Вернемся к доказательству теоремы.
- Очевидно, $G \neq K_4$. По Теореме 4.7 существует такое ребро $xy \in E(G)$, что граф $G \cdot xy$ трёхсвязен, пусть $w = x \cdot y$.
- По Лемме 7 мы имеем $G \cdot xy \not\supset K_5$, $G \cdot xy \not\supset K_{3,3}$, следовательно, граф $G \cdot xy$ планарен.
- Пусть $G' = G \cdot xy - w \simeq G - x - y$ (изоморфность этих двух графов очевидна).
- Рассмотрим плоское изображение графа G', получающееся из изображения $G \cdot xy$ удалением вершины w, пусть q — грань G', на которой расположена вершина w.
- Граф G' двусвязен, поэтому граница грани q — это простой цикл Z.
- Отметим на Z вершины, смежные с y (обозначим их множество через A) и пронумеруем их в циклическом порядке: $a_1, a_2, \dots, a_n$. Из трёхсвязности G следует, что $n \geq 2$. Пусть B — множество вершин цикла Z, смежных с x.
- Если $A = B$ то $n \geq 3$ (так как граф $G - A$ в этом случае несвязен), тогда G содержит подразбиение K_5 с главными вершинами x, y, a_1, a_2, a_3, противоречие.
- Далее НУО $B \not\subset A$ пусть вершина $b \in B \setminus A$ лежит на дуге $L = a_1 Z a_2$, не содержащей других вершин из A.

• Предположим, что вершина $b' \in B$ не лежит на L (возможно, b' совпадает с одной из вершин множества A, но $b' \notin \{a_1, a_2\}$).

• Тогда циклический порядок вершин a_1, b, a_2, b' на Z именно такой, а значит, G содержит подразбиение $K_{3,3}$ с главными вершинами x, a_1, a_2 (одна доля) и y, b, b' (вторая доля), противоречие (см. рис. a).



a b c

• Остается случай, когда все вершины множества B лежат на дуге L (возможно, совпадают с a_1 или a_2).

• В этом случае рассмотрим исходное плоское изображение графа $G \cdot xy$ и удалим с него все ребра от w до вершин из $B \setminus A$ (см. рис. b).

• Ребра от A до w делят грань q на n граней, одна из них — грань d, ограниченная L и ребрами wa_1, wa_2.

• Мы можем изобразить внутри d вершину x и соединить ее ребрами с w и вершинами из B, не нарушая планарности (см. рис. c). Для построения плоского изображения G остается только переименовать w в y.

Триангуляции

Определение

1) Будем называть грань *треугольником*, если ее граница — это треугольник.
2) Плоский граф называется *триангуляцией*, если каждая его грань — треугольник. Кратные рёбра и петли запрещены.
3) *Триангулировать* плоский граф значит провести в нём дополнительные рёбра так, чтобы получилась триангуляция.

• По Лемме 4 триангуляция — двусвязный граф.

Лемма 8

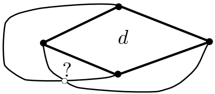
Пусть G — плоский граф без петель, $v(G) \geq 3$. Тогда G можно триангулировать так, без появления новых пар кратных ребер.

Доказательство. • Пусть G — не триангуляция. Тогда G имеет грань d, не являющуюся треугольником. Пусть $H = G(V_d)$.

• По Лемме 1 любые две вершины из V_d можно соединить ломаной в d, эта ломаная не будет пересекать ребер графа G.

• Значит, если граф H неполный, то мы можем добавить в него ребро без образования новых пар кратных ребер.

- Пусть $H = K_m$. Так как $|V_d| \geq 3$ и граф H планарен, $m \in \{3, 4\}$.
- Если граница $B(d)$ грани d недвусвязна, то ее точка сочленения по Лемме 6 — точка сочленения графа G, но это невозможно в случае, когда V_d — клика.
- Следовательно, $B(d)$ — двусвязный граф, а значит, это простой цикл.
- Так как $B(d)$ — не треугольник, это цикл длины 4. Тогда две диагонали этого цикла проведены вне грани f, что, очевидно, невозможно: такие диагонали пересекут друг друга (см. рисунок). $\square$



- Пусть у триангуляции T $2n$ граней, тогда у нее $3n$ рёбер. По формуле Эйлера $v = n + 2$. Тогда $e(T) = 3v(T) - 6$.
- Мы знаем, что для любого плоского графа G выполнено $e(G) \leq 3v(G) - 6$. Таким образом, триангуляция — максимальный плоский граф, в котором нельзя дорисовать без пересечений ни одного нового ребра.

Лемма 9

В любой триангуляции T с $v(T) \geq 4$ есть ребро e, входящее ровно в два треугольника — в две грани, граничащие по e.

Доказательство. • Любое ребро $f \in E(T)$ входит в две грани, и эти грани граничат только по f (иначе в T есть пара кратных рёбер). Значит, нам достаточно найти ребро e, не входящее в *разделяющий* треугольник — такой, что в обеих частях плоскости относительно него есть вершины графа.

• Если в T нет разделяющего треугольника, то утверждение очевидно — нам подойдет любое ребро.

• Предположим, что разделяющие треугольники есть и рассмотрим такой разделяющий треугольник abc, что внутри него нет других разделяющих треугольников.

• Однако внутри abc есть вершины а значит, есть и ребро e. Тогда ребро e не может входит в разделяющий треугольник, так как такой треугольник содержался бы внутри abc, что противоречит выбору abc.

Изображение с прямыми рёбрами

Теорема 5

(K. Wagner, 1936.) *Пусть G — планарный граф без кратных рёбер. Тогда существует плоское изображение G, в котором все рёбра – отрезки.*

Доказательство. • Будем доказывать утверждение индукцией по количеству вершин графа, база для графа на одной вершине очевидна.

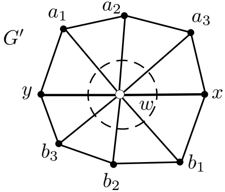
• Достаточно доказать теорему для случая, когда G — триангуляция, так как по Лемме 8 любой граф можно триангулировать без появления кратных рёбер. Будем доказывать, что можно выпрямить триангуляцию, тогда будет выпрямлен и исходный граф.

• По Лемме 9 выберем ребро $e = uv \in E(G)$ так, чтобы оно входило ровно в два треугольника — грани xuv и yuv.

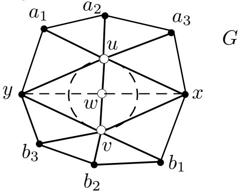
• Тогда $G' = G \cdot uv$ — триангуляция с плоским изображением, в котором "сжаты" грани xuv и yuv, а остальные грани — такие же, как в G. Кратных рёбер в G' нет.

• По индукционному предположению, существует изображение G' с прямыми рёбрами. Далее рассматриваем его.

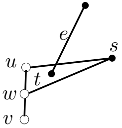
- Упорядочим вершины из $\mathrm{N}_G(u)$ в порядке выхода их рёбер из u по часовой стрелке: $x, v, y, a_1, \dots, a_k$. Так как G – триангуляция, любые две соседние в этом порядке вершины вместе с u образуют треугольную грань.
- Упорядочим вершины из $\mathrm{N}_G(v)$ в порядке выхода их рёбер из v по часовой стрелке: $y, u, x, b_1, \dots, b_m$. Так как G – триангуляция, любые две соседние в этом порядке вершины вместе с v образуют треугольную грань.
- Тогда в графе G' вершины из $\mathrm{N}_{G'}(w)$ будут упорядочены по часовой стрелке в порядке выходов рёбер из w так: $y, a_1, \dots, a_k, x, b_1, \dots, b_m$ (рис. a). Любые две соседние (по выходу ребра из w) вершины образуют вместе с w треугольную грань.



a



b



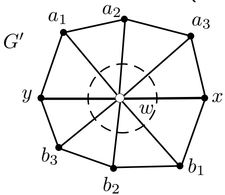
c

• Найдем минимум расстояний между вершинами в G', а также минимум расстояний от вершин до не инцидентных им рёбер (напомним, что рёбра — это отрезки). Пусть d — наименьший из этих минимумов. Очевидно, $d > 0$.

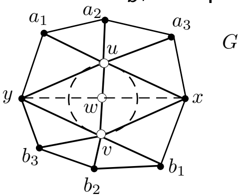
• Проведем окружность S радиуса $\delta = \frac{d}{2}$ с центром w. Понятно, что внутри S вершин графа G' нет и пересекают эту окружность только рёбра с концом в w.

• Ломаная xwy делит многоугольник $P = xa_1 \dots a_k y b_1 \dots b_m$ на два многоугольника: P_a, содержащий $a_1, \dots, a_k$ и P_b, содержащий $b_1, \dots, b_m$.

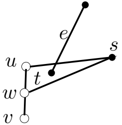
• Проведем диаметр uv окружности S так, чтобы x и y лежали по разную сторону от соответствующей прямой и u лежала в P_a (тогда v лежит в P_b, см. рис. b).



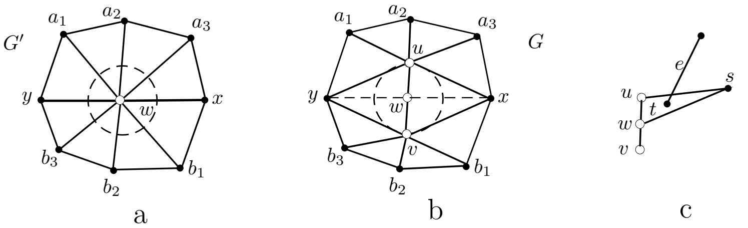
a



b



c



• Удалим все рёбра, инцидентные w, из графа. Теперь проведем отрезки от u до x, y, $a_1, \dots, a_k$ и от v до x, y, $b_1, \dots, b_m$ (см. рис. b). Очевидно, никакие два проведенных отрезка не пересекают друг друга.

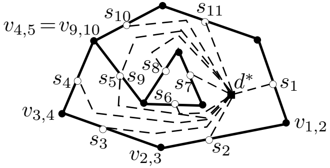
• Остается доказать, что проведенные отрезки не пересекают других рёбер графа G.

• Пусть, скажем, ребро us пересекает какое-то другое ребро e (см. рис. c). Стороны sw и wu треугольника swu не могут пересекать e. Следовательно, один из концов e — назовем его t — лежит в треугольнике swu. Но тогда t лежит в иреугольнике swu и расстояние от t до отрезка sw, очевидно, меньше $|uw| = \frac{d}{2}$, противоречие. $\square$

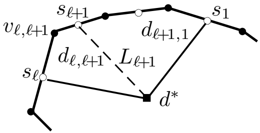
Лемма 10

Пусть G — связный плоский граф, $d \in F(G)$, Пусть $k = b(d)$, а $e_1 \dots e_k$ — рёбра из E_d в порядке циклического обхода $Z(d)$ (нумерация — циклическая по модулю k, внутренние рёбра грани d встречаются в этой нумерации дважды).

Отметим точку d^* на грани d и по точке s_i на каждом ребре e_i. Тогда в грани d можно провести ломаные $L_1, \dots, L_k$ без общих внутренних точек, соединяющие d^* с $s_1, \dots, s_k$ соответственно. При этом, циклический порядок выходов ломаных в точке d^* будет $L_1, \dots, L_k$ (см. рис. а).



a



b

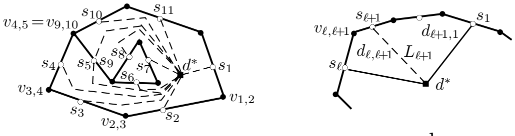
Доказательство. Рассмотрим отдельно от всего графа грань d и добавим вершины $s_1, \dots, s_k, d^*$.

- Внутреннюю точку d^* грани d можно соединить ломаной L_1 в грани d с точкой s_1 на границе грани. Далее пусть $k \geq 2$.

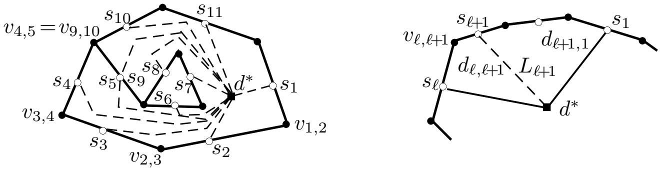
- Так как добавленное ребро $L_1 = d^*s_1$ — мост, это внутреннее ребро полученной грани d_0, в границу которой добавилась вершина d^*.

- Пусть $v_{i,i+1}$ — вершина, в которой обход $Z(d)$ переходит с ребра e_i на ребро e_{i+1}.

- Докажем индукцией по $2 \leq \ell \leq k$, что можно провести в грани d описанные выше ломаные $L_1, L_2, \ldots, L_\ell$ так, что грань d будет разбита на грани $d_{1,2}, \ldots, d_{\ell,1}$, причем границу $d_{i,i+1}$ образуют ломаные L_i и L_{i+1}, а также участок циклического обхода $Z(d)$ между s_i и s_{i+1}, содержащий $v_{i,i+1}$. Границу грани $d_{\ell,1}$ образуют ломаные L_i и L_1, а также участок циклического обхода $Z(d)$ между s_ℓ и s_1, содержащий $v_{\ell,\ell+1}$.



a b



a b

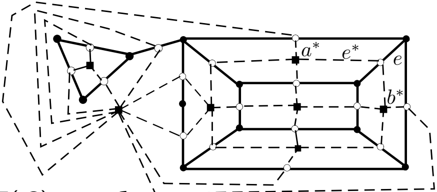
База для $\ell = 2$ очевидна — в грани d_0 можно провести ломаную L_2, соединяющую граничные точки d^* и s_2. В результате ломаная L_2L_1 разобьет d на две части $d_{1,2}$ и $d_{2,1}$, очевидно, обладающие нужными свойствами.

Переход $\ell \to \ell + 1$. Рассмотрим грань $d_{\ell,1}$. На ее границе лежат точки d^* и $s_{\ell+1}$, которые можно соединить в грани $d_{\ell,1}$ ломаной L_{i+1} (см. рис. b). В результате грань $d_{\ell,1}$ будет разбита этой ломаной на две грани $d_{\ell,\ell+1}$ и $d_{\ell+1,1}$ с нужными свойствами. $\square$

Двойственный граф

- Пусть G — связный плоский граф. Вершины *двойственного графа* G^* будут соответствовать граням графа G: внутри каждой грани a графа G мы отметим соответствующую ей вершину a^* графа G^*. Будем говорить, что вершина a^* *двойственна* грани a.

- Зафиксируем на каждом ребре графа G по точке, которую назовём *серединой* этого ребра. Точку a^* можно соединить внутри грани a непересекающимися ломаными с серединами всех входящих в границу грани a рёбер, как описано в Лемме 10 (см. рис.). Сделаем так для каждой грани графа G.



- Пусть $e \in E(G)$ — ребро, по которому граничат две грани a и b графа G (возможно, $a = b$). Ему будет соответствовать ребро e^* двойственного графа G^*, соединяющее двойственные граням a и b вершины a^* и b^* и проходящее через середину ребра e. Назовём ребро e^* *двойственным* к e.

• Если грани a и b совпадают (или, что равносильно, ребро e — мост), то e^* — петля.

• Вершины $a^*, b^* \in V(G^*)$ оказываются соединены таким количеством рёбер, сколько общих рёбер имеют границы граней a и b.

• Таким образом, существует естественная биекция между рёбрами G и рёбрами G^* (каждому ребру графа G ставится в соответствие двойственное). Следовательно, $e(G) = e(G^*)$.

• Граф G^* зависит не только от графа G, но и от изображения этого графа на плоскости, потому мы определяем G^* для плоского графа G. Для разных плоских изображений одного планарного графа могут получиться неизоморфные двойственные графы.

• Двойственный граф не зависит ни от того, какие точки мы выберем внутри граней исходного графа G, ни от того, какие точки мы назовем серединами рёбер. Нетрудно доказать, что получатся изоморфные плоские графы.

• Итак, вершины графа G^* соответствуют граням графа G, а рёбра графа G^* соответствуют рёбрам графа G. Чему в G соответствуют грани G^*?

Лемма 11

Пусть G — связный плоский граф. Тогда существует биекция между $V(G)$ и $F(G^*)$, которая ставит в соответствии каждой вершине $a \in V(G)$ грань $a^* \in F(G^*)$, содержащую a.

Доказательство. • Рассмотрим грань $a^* \in F(G^*)$ и докажем, что на ней изображена хотя бы одна вершина графа G.

• Рассмотрим ребро $e^* \in E_{a^*}$. По построению его пересекает ребро e графа G. Следовательно, часть изображения ребра e лежит в грани a^*. По построению e пересекает ровно одно ребро графа G^* и ровно один раз, следовательно, хотя бы один конец e (а это вершина графа G) лежит в a^*.

• Нам известно, что $f(G) = v(G^*)$, $e(G) = e(G^*)$. По формуле Эйлера, $v(G) + f(G) - e(G) = 2 = v(G^*) + f(G^*) - e(G^*)$, откуда следует, что $f(G^*) = v(G)$.

• Значит, на каждой грани a^* плоского графа G^* лежит ровно одна вершина графа G, которую мы и обозначим через a. □

В обозначениях Леммы 11 мы будем говорить, что вершина $a \in V(G)$ и грань $a^* \in F(G^*)$ *двойственны* друг другу.

Лемма 12

Пусть G — связный плоский граф. Тогда $(G^*)^* \simeq G$.

Доказательство. • Отметим на каждой грани $a^* \in F(G^*)$ двойственную ей вершину $a \in V(G)$ (это можно сделать по Лемме 11). На каждом ребре $e^* \in E(G^*)$ отметим в качестве середины как раз ту точку, что была использована при построении G^*.

• После этого от каждой вершин графа G проведем "половинки" инцидентных ей ребер из $E(G)$, как раз до их середин. В результате будут в точности проведены ребра графа G, как на исходном изображении. Получится граф G.

• Итак, на каждой грани $a^* \in F(G^*)$ отмечена ровно одна вершина, которая соединена с некоторыми серединами ребер из $E(G^*)$ непересекающимися ломаными так, что для каждого ребра $e^* \in E(G^*)$ проведено двойственное ребро $e \in E(G)$.

• Следовательно, от точки a на грани $a^* \in G^*$ проведены ломаные до всех середин ребер из $B(a^*)$, причем до граничных ребер — с одной, а до внутренних — с обеих сторон. Таким образом, построеннный граф G — это двойственный граф $(G^*)^*$.

• Так как построение двойственного графа не зависит от выбора точек на гранях и середин ребер, $(G^*)^* \simeq G$.

Раскраски карт

• Карта — связный плоский граф без мостов. Его грани иногда называют *странами*.

• Раскраска граней плоского графа G называется *правильной*, если две грани, имеющие общее ребро, покрашены в разные цвета.

• Для плоского графа G мы будем обозначать через $\chi^*(G)$ минимальное количество цветов, для которого существует правильная раскраска граней графа G.

• Нетрудно понять, что правильные раскраски граней плоского графа G взаимно однозначно соответствуют правильным раскраскам вершин двойственного графа G^*. Поэтому $\chi^*(G) = \chi(G^*)$ и $\chi(G) = \chi^*(G^*)$.

• **Гипотеза четырёх красок. (F. Guthrie, 1852.)** Страны любой карты можно правильным образом покрасить в 4 цвета.

• 4CC эквивалентна следующему утверждению: $\chi(G) \le 4$ для любого планарного графа G без петель.

Теорема о 5 красках

Теорема 6

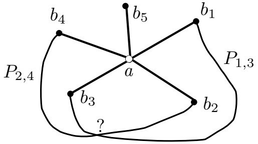
(F. Kempe, 1879.) *Для любого планарного графа G без петель $\chi(G) \le 5$.*

Доказательство. • Индукция по $v(G)$, база для случая $v(G) \le 5$ очевидна. По Следствию 2 граф G имеет вершину a степени не более 5.

• Граф $G - a$ также планарен и по индукционному предположению мы знаем, что $\chi(G - a) \le 5$. Пусть ρ — правильная раскраска вершин $G - a$ в 5 цветов.

• Если вершины из $\mathrm{N}_G(a)$ покрашены не более чем в 4 цвета, мы можем докрасить вершину a и получить правильную раскраску вершин G.

• Остается случай, когда ρ красит $\mathrm{N}_G(a)$ в 5 цветов. Тогда $d_G(a) = 5$, пусть $\mathrm{N}_G(a) = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$, причем соседи упорядочены по выходу рёбер из a (по часовой стрелке). Не умаляя общности, можно считать, что $\rho(a_i) = i$ для всех $i \in [1..5]$.



• Пусть $G_{1,3}$ — индуцированный подграф $G - a$ на вершинах цветов 1 и 3, а U — его компонента связности, содержащая b_1. Если во всех вершинах U поменять местами цвета 1 и 3, раскраска останется правильной, а b_1 будет покрашена в цвет 3.

• Если в новой раскраске невозможно докрасить вершину a, в ее окрестности должен остаться цвет 1 — но в него может быть покрашена только вершина b_3 и только в случае $b_3 \in U$.

• Значит, достаточно рассмотреть случай, когда вершины b_1 и b_3 соединены путём $P_{1,3}$ по вершинам цветов 1 и 3 (см. рисунок).

• Аналогично, достаточно рассмотреть случай, когда вершины b_2 и b_4 соединены путём $P_{2,4}$ по вершинам цветов 2 и 4. Тогда пути $P_{1,3}$ и $P_{2,4}$ должны пересекаться, что, очевидно, невозможно.

• В 1880 году Тэйт опубликовал свой подход к доказательству 4CC. Доказательствло оказалась неверным, но теорема об эквивалентной переформулировке 4CC оказалась очень полезной: в последующих работах авторы доказывали не собственно 4CC, а эквивалентную переформулировку о рёберных раскрасках триангуляции.

Определение

Пусть T — триангуляция. Назовём *Тэйтовой раскраской* триангуляции T такую раскраску рёбер T в три цвета, что все рёбра каждой грани разноцветны.

• Далее рассматриваются графы без петель, иначе вопросы о правильной раскраске вершин бессмысленны.

Теорема 7

(P. G. Tait, 1880.) *Четыре утверждения равносильны.*

1° *Для любого плоского графа G выполняется $\chi(G) \le 4$.*

2° *Для любого рёберно двусвязного плоского графа G выполняется $\chi^*(G) \le 4$.*

3° *Для любого рёберно двусвязного плоского кубического графа G выполняется $\chi'(G) = 3$.*

4° *Для любой триангуляции T существует Тэйтова раскраска.*

Доказательство. $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$. Рёберно двусвязный граф G не имеет мостов, следовательно, его двойственный граф G^* не имеет петель. Тогда $\chi^*(G) = \chi(G^*) \le 4$.

$3^\circ \Rightarrow 4^\circ$. Очевидно, двойственный граф T^* триангуляции T является рёберно двусвязным кубическим графом, а правильная раскраска его рёбер в 3 цвета — Тэйтовой раскраской рёбер T.

$4^\circ \Rightarrow 3^\circ$. Пусть G — кубический рёберно двусвязный плоский граф. Очевидно, двойственный граф G^* — триангуляция, а Тэйтова раскраска триангуляции G^* является правильной раскраской рёбер G в три цвета.

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$. • Пусть G — плоский рёберно двусвязный кубический граф. У него есть правильная раскраска ρ^* граней в 4 цвета. Поскольку всё равно, как нумеровать цвета, мы будем считать, что ρ^* принимает значения из $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$.

• Так как G — рёберно двусвязный граф, каждое ребро $e \in E(G)$ разделяет две разные грани a и b. Мы положим $\rho'(e) = \rho^*(a) + \rho^*(b)$. Так как $a \neq b$, то $\rho^*(a) \neq \rho^*(b)$, следовательно, $\rho'(e) \neq (0,0)$. Таким образом, ρ' — раскраска рёбер графа G в три цвета.

• Докажем, что раскраска ρ' — правильная. Пусть v — вершина графа G, а a, b, c — три содержащие её грани. Как уже отмечалось, все эти грани различны, любые две из них имеют общее ребро.

• Следовательно, $\rho^*(a)$, $\rho^*(b)$ и $\rho^*(c)$ — три разных цвета, откуда следует, что три цвета инцидентных вершине v рёбер $\rho^*(a)+\rho^*(b)$, $\rho^*(a)+\rho^*(c)$, $\rho^*(b)+\rho^*(c)$ также различны.

• Таким образом, ρ' — правильная раскраска рёбер G в 3 цвета.

• Следовательно, $\chi'(G) = 3$ (так как очевидно, что $\chi'(G) \geq 3$).

$3^\circ \Rightarrow 1^\circ$. • Достаточно рассмотреть связный граф G с $v(G) \geq 3$. По Лемме 6 граф G является подграфом триангуляции H.

• Рассмотрим рёберно двусвязный кубический граф H^*. Существует правильная раскраска ρ' рёбер этого графа в 3 цвета.

• Пусть $H^*_{i,j}$ — подграф H^* на рёбрах цветов $i, j \in \{1, 2, 3\}$ в раскраске ρ'. Тогда $d_{H^*_{i,j}}(v) = 2$ для любой вершины $v \in V(H^*)$, следовательно, $H^*_{i,j}$ — объединение нескольких циклов.

• Легко видеть, что существует правильная раскраска $\rho^*_{i,j}$ граней графа $H^*_{i,j}$ в два цвета.

• Рассмотрим произвольную грань a графа H^*. Пусть a_{12} — грань H^*_{12}, частью которой является a, а a_{13} — грань H^*_{13}, частью которой является a (понятно, что a_{12} и a_{13} определены однозначно).

• Положим $\rho^*(a) = (\rho^*_{1,2}(a_{1,2}), \rho^*_{1,3}(a_{1,3}))$.

• Мы получили раскраску граней графа H^* в четыре цвета.

- Покажем, что раскраска ρ^* является правильной.
- Рассмотрим имеющие общее ребро e грани a и b графа H^*, пусть $a = a_{1,2} \cap a_{1,3}$, $b = b_{1,2} \cap b_{1,3}$ — определённые выше представления в виде пересечений граней.
- Если $\rho'(e) \in \{1, 2\}$, то $a_{1,2} \neq b_{1,2}$, причём эти грани графа $H^*_{1,2}$ граничат по ребру e, следовательно, $\rho^*_{1,2}(a_{1,2}) \neq \rho^*_{1,2}(b_{1,2})$, а тогда и $\rho^*(a) \neq \rho^*(b)$.
- Если $\rho'(e) = 3$, то аналогично $\rho^*_{1,3}(a_{1,3}) \neq \rho^*_{1,3}(b_{1,3})$ и $\rho^*(a) \neq \rho^*(b)$.
- Таким образом, $\chi(G) \leq \chi(H) = \chi^*(H^*) \leq 4$, что и требовалось доказать. $\square$