



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

# Capitolul 3: Modele ARIMA

Seminar



# Cuprins Seminar

- 1 Test de Recapitulare
- 2 Întrebări Adevărat/Fals
- 3 Probleme Practice
- 4 Exemple Rezolvate
- 5 Analiză pe Date Reale
- 6 Subiecte de Discuție
- 7 Exercițiu cu asistență AI
- 8 Rezumat

## Test 1: Ordinul de Integrare

### Întrebare

O serie de timp  $Y_t$  necesită două diferențe pentru a deveni staționară. Care este ordinul ei de integrare?

- ☐ A  $I(0)$
- ☐ B  $I(1)$
- ☐ C  $I(2)$
- ☐ D Nu poate fi determinat

## Test 1: Ordinul de Integrare

### Întrebare

O serie de timp  $Y_t$  necesită două diferențe pentru a deveni staționară. Care este ordinul ei de integrare?

- ☐ A  $I(0)$
- ☐ B  $I(1)$
- ☒ C  $I(2)$
- ☐ D Nu poate fi determinat

Răspuns: C –  $I(2)$

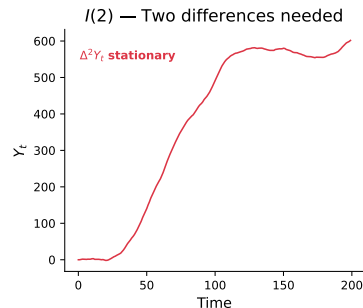
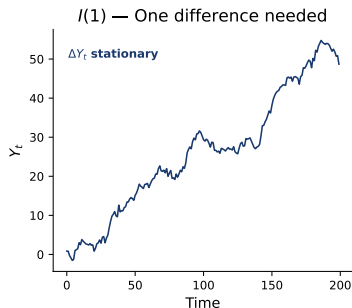
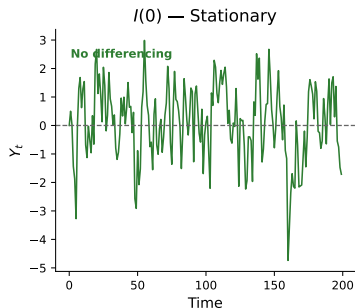
**Definiție:**  $Y_t \sim I(d)$  dacă  $\Delta^d Y_t$  este staționară dar  $\Delta^{d-1} Y_t$  nu este.

**Exemplu:** Dacă  $Y_t$  urmează  $\Delta^2 Y_t = \varepsilon_t$ , atunci:

- $\Delta Y_t = \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$  (încă are rădăcină unitară)
- $\Delta^2 Y_t = \varepsilon_t$  (zgomot alb, staționară)

**Lumea reală:** Nivelurile prețurilor pot fi  $I(2)$  când inflația însăși este nestaționară.

# Vizual: Procese Integrate



$I(0)$ : staționară.  $I(1)$ : o diferență necesară.  $I(2)$ : două diferențe necesare pentru a deveni staționară.

### Întrebare

Pentru un mers aleatoriu  $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$  cu  $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$ , care este  $\text{Var}(Y_t)$ ?

- ☒ A)  $\sigma^2$
- ☐ B)  $t \cdot \sigma^2$
- ☐ C)  $\sigma^2/t$
- ☐ D)  $\sigma^2/(1 - \phi^2)$

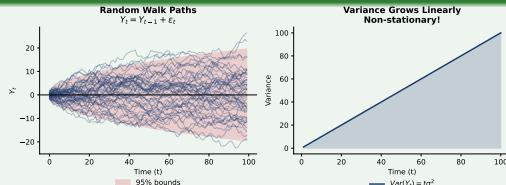
## Test 2: Proprietățile Mersului Aleatoriu

### Întrebare

Pentru un mers aleatoriu  $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$  cu  $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$ , care este  $\text{Var}(Y_t)$ ?

- A)  $\sigma^2$
- B)  $t \cdot \sigma^2$
- C)  $\sigma^2/t$
- D)  $\sigma^2/(1 - \phi^2)$

Răspuns: B –  $t \cdot \sigma^2$



Demonstrație:  $Y_t = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i \Rightarrow \text{Var}(Y_t) = t\sigma^2$  (crește liniar  $\Rightarrow$  nestăționară!)

## Test 3: Ipotezele Testului ADF

### Întrebare

În testul Augmented Dickey-Fuller, care este ipoteză nulă?

- ☐ A) Seria este staționară
- ☐ B) Seria are o rădăcină unitară
- ☐ C) Seria nu are autocorelație
- ☐ D) Seria este distribuită normal



## Test 3: Ipotezele Testului ADF

### Întrebare

În testul Augmented Dickey-Fuller, care este ipoteză nulă?

- ☐ A) Seria este staționară
- ☒ B) Seria are o rădăcină unitară
- ☐ C) Seria nu are autocorelație
- ☐ D) Seria este distribuită normal

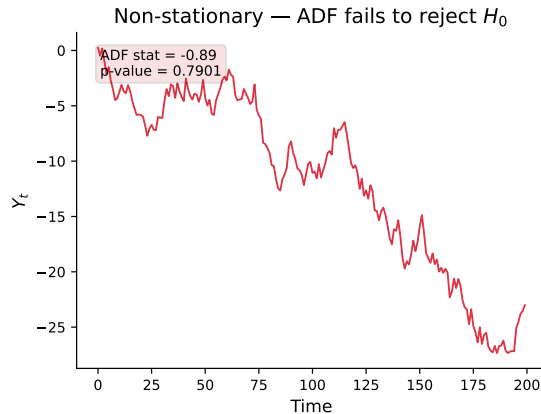
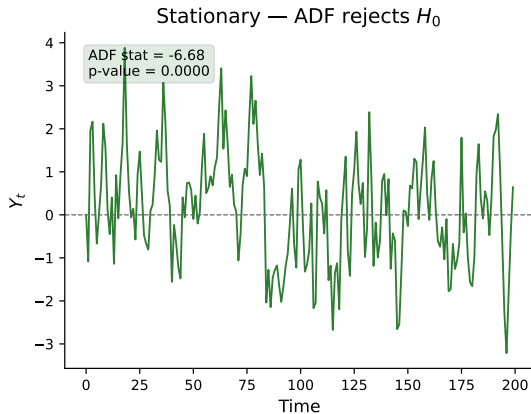
Răspuns: B – Seria are o rădăcină unitară

**Regresia ADF:**  $\Delta Y_t = \alpha + \gamma Y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \delta_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t$

**Ipoteze:**  $H_0 : \gamma = 0$  (rădăcină unitară, nestacionară) vs  $H_1 : \gamma < 0$  (staționară)

**Decizie:** Respingem  $H_0$  dacă statistica  $t <$  valoarea critică (de ex.,  $-2.86$  la 5%). Folosește distribuția specială Dickey-Fuller, nu  $t$  standard.

## Vizual: Testul ADF



Stânga: staționară – ADF respinge rădăcina unitară. Dreapta: nestăționară – ADF nu respinge.

### Întrebare

Ce înseamnă ARIMA(2,1,1)?

- ☐ A) AR(2) pe date diferențiate cu erori MA(1)
- ☐ B) AR(1) cu 2 diferențe și MA(1)
- ☐ C) MA(2) cu 1 diferență și AR(1)
- ☐ D) 2 lag-uri, 1 trend, 1 componentă sezonieră

## Test 4: Notăția ARIMA

### Întrebare

Ce înseamnă ARIMA(2,1,1)?

- A) AR(2) pe date diferențiate cu erori MA(1)
- B) AR(1) cu 2 diferențe și MA(1)
- C) MA(2) cu 1 diferență și AR(1)
- D) 2 lag-uri, 1 trend, 1 componentă sezonieră

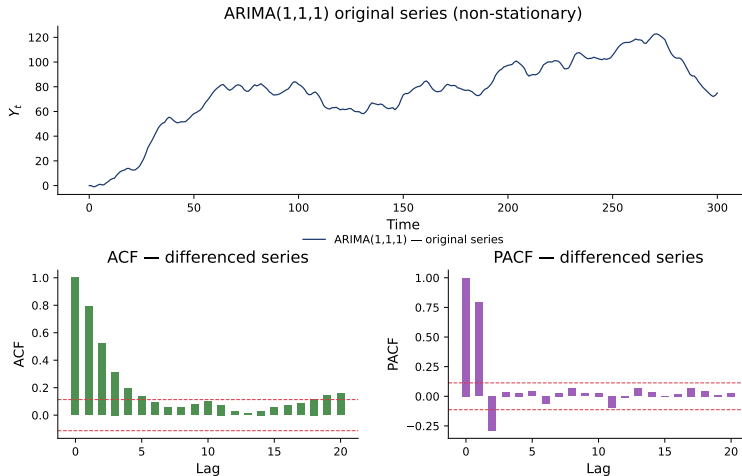
Răspuns: A – AR(2) pe date diferențiate cu erori MA(1)

ARIMA( $p, d, q$ ):  $\phi(L)(1-L)^d Y_t = \theta(L)\varepsilon_t$

ARIMA(2,1,1) se expandează la:  $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)(1 - L)Y_t = (1 + \theta_1 L)\varepsilon_t$ , sau echivalent:  
 $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)\Delta Y_t = (1 + \theta_1 L)\varepsilon_t$

Interpretare: Mai întâi diferențiem seria, apoi ajustăm ARMA(2,1) pe  $\Delta Y_t$ .

# Vizual: Procesul ARIMA



Sus: seria ARIMA originală. Jos: după diferențiere, folosim ACF/PACF pentru a identifica ordinea AR și MA.

## Test 5: Operatorul de Diferență

### Întrebare

Care este  $(1 - L)^2 Y_t$  expandat?

- A)  $Y_t - Y_{t-1}$
- B)  $Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$
- C)  $Y_t + 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$
- D)  $Y_t - Y_{t-2}$

## Test 5: Operatorul de Diferență

### Întrebare

Care este  $(1 - L)^2 Y_t$  expandat?

- A)  $Y_t - Y_{t-1}$
- B)  $Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$
- C)  $Y_t + 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$
- D)  $Y_t - Y_{t-2}$

Răspuns: B –  $Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$

Expandare folosind teorema binomială:

$$(1 - L)^2 = 1 - 2L + L^2$$

Aplicare lui  $Y_t$ :

$$(1 - L)^2 Y_t = Y_t - 2L \cdot Y_t + L^2 \cdot Y_t = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$$

Notă: Aceasta este egală cu  $\Delta(\Delta Y_t) = \Delta Y_t - \Delta Y_{t-1}$ , “schimbarea schimbărilor”.

### Întrebare

Cum diferă testul KPSS de testul ADF?

- ☐ A) KPSS testează sezonalitatea, ADF testează trenduri
- ☐ B) KPSS are staționaritatea ca nulă, ADF are rădăcina unitară ca nulă
- ☐ C) KPSS este mai puternic decât ADF
- ☐ D) Nu există diferență



## Test 6: KPSS vs ADF

### Întrebare

Cum diferă testul KPSS de testul ADF?

- A) KPSS testează sezonabilitatea, ADF testează trenduri
- B) KPSS are staționaritatea ca nulă, ADF are rădăcina unitară ca nulă
- C) KPSS este mai puternic decât ADF
- D) Nu există diferență

Răspuns: B – Ipoteze nule inversate

ADF Test	KPSS Test
$H_0$ : Unit Root	$H_0$ : Stationary
$H_1$ : Stationary	$H_1$ : Unit Root
Reject if $t\text{-stat} < \text{critical}$	Reject if $LIM > \text{critical}$

Decision Matrix		
ADF rejects	KPSS fails to reject	→ Stationary
ADF fails to reject	KPSS rejects	→ Unit Root
Both reject	or both fail	→ Inconclusive

Strategie: Folosiți ambele teste împreună pentru inferență robustă!

### Întrebare

Dacă  $Y_t \sim I(1)$  și calculăm  $\Delta^2 Y_t$ , ce se întâmplă?

- A) Obținem o serie staționară mai bună
- B) Introducem autocorelație negativă artificială
- C) Varianța scade
- D) Nu se schimbă nimic

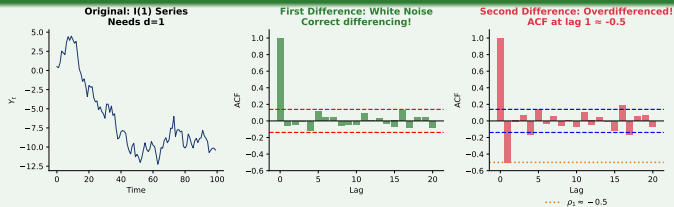
## Test 7: Supradiferențierea

### Întrebare

Dacă  $Y_t \sim I(1)$  și calculăm  $\Delta^2 Y_t$ , ce se întâmplă?

- A) Obținem o serie staționară mai bună
- B) Introducem autocorelație negativă artificială
- C) Varianța scade
- D) Nu se schimbă nimic

Răspuns: B – Autocorelație negativă artificială



Diagnostic: ACF la lag 1  $\approx -0.5$  semnalează supradiferențiere. Reduceți  $d$  cu 1!

### Întrebare

Pentru un model ARIMA(0,1,0) (mers aleatoriu), cum se comportă varianța prognozei când orizontul  $h$  crește?

- ☐ A) Rămâne constantă
- ☐ B) Scade la zero
- ☐ C) Crește liniar cu  $h$
- ☐ D) Converge la o limită finită

## Test 8: Variația Prognozei

### Întrebare

Pentru un model ARIMA(0,1,0) (mers aleatoriu), cum se comportă varianța prognozei când orizontul  $h$  crește?

- ☐ A) Rămâne constantă
- ☐ B) Scade la zero
- ☒ C) Crește liniar cu  $h$
- ☐ D) Converge la o limită finită

Răspuns: C – Crește liniar cu  $h$

**Prognoza mersului aleatoriu:**  $\hat{Y}_{T+h|T} = Y_T$  (cea mai bună prognoză este valoarea curentă)

**Eroarea de prognoză:**  $Y_{T+h} - \hat{Y}_{T+h|T} = \sum_{i=1}^h \varepsilon_{T+i}$

**Varianță:**

$$\text{Var}(Y_{T+h} - \hat{Y}_{T+h|T}) = h\sigma^2$$

**IC 95%:**  $Y_T \pm 1.96\sqrt{h}\sigma$  (se lărgeste cu  $\sqrt{h}$ )

## Test 9: Puterea Testului de Rădăcină Unitară

### Întrebare

Testul ADF are putere scăzută când:

- ☐ A) Dimensiunea eșantionului este foarte mare
- ☐ B) Rădăcina adevărată este aproape dar nu egală cu 1
- ☐ C) Seria nu are trend
- ☐ D) Seria este clar staționară

## Test 9: Puterea Testului de Rădăcină Unitară

### Întrebare

Testul ADF are putere scăzută când:

- ☐ A) Dimensiunea eșantionului este foarte mare
- ☐ B) Rădăcina adevărată este aproape dar nu egală cu 1
- ☐ C) Seria nu are trend
- ☐ D) Seria este clar staționară

Răspuns: B – Rădăcina aproape dar nu egală cu 1

**Exemplu:** AR(1) cu  $\phi = 0.95$  vs mers aleatoriu ( $\phi = 1$ )

**Problemă:** Ambele au modele ACF similare (descreștere lentă), dar una este staționară!

**Putere scăzută:** Probabilitate mare de eroare de tip II (eșec în respingerea lui  $H_0$  fals). **Soluții:** dimensiuni mai mari ale eșantionului, testul Phillips-Perron (robust la heteroscedasticitate), teste de rădăcină unitară pe paneluri (serii multiple).

## Test 10: Selecția Modelului ARIMA

### Întrebare

După o diferențiere, ACF arată un vârf doar la lag 1, și PACF descrește. Modelul potrivit este:

- ☐ A) ARIMA(1,1,0)
- ☐ B) ARIMA(0,1,1)
- ☐ C) ARIMA(1,1,1)
- ☐ D) ARIMA(0,2,1)



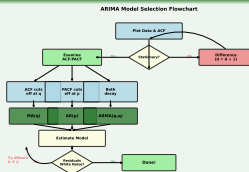
## Test 10: Selecția Modelului ARIMA

### Întrebare

După o diferențiere, ACF arată un vârf doar la lag 1, și PACF descrește. Modelul potrivit este:

- A) ARIMA(1,1,0)
- B) ARIMA(0,1,1)
- C) ARIMA(1,1,1)
- D) ARIMA(0,2,1)

Răspuns: B – ARIMA(0,1,1)



Model: ACF se anulează la lag 1, PACF descrește  $\Rightarrow$  MA(1) pentru seria diferențiată. Model complet: ARIMA(0,1,1) = IMA(1,1)

## Test 11: Staționaritate în Trend vs Staționaritate în Diferențe

### Întrebare

Un proces staționar în trend devine staționar prin:

- ☐ A) Luarea diferențelor de ordinul întâi
- ☐ B) Eliminarea trendului determinist prin regresie
- ☐ C) Luarea diferențelor de ordinul doi
- ☐ D) Aplicarea ajustării sezoniere

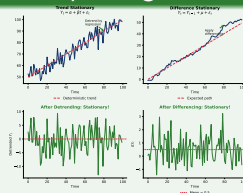
## Test 11: Staționaritate în Trend vs Staționaritate în Diferențe

### Întrebare

Un proces staționar în trend devine staționar prin:

- A) Luarea diferențelor de ordinul întâi
- B) Eliminarea trendului determinist prin regresie
- C) Luarea diferențelor de ordinul doi
- D) Aplicarea ajustării sezoniere

Răspuns: B – Eliminarea trendului determinist prin regresie



**Staționar în trend:** Eliminarea trendului prin regresie (șocurile sunt temporare). **Staționar în diferențe:** Diferențiere (șocurile sunt permanente). Tratatamentul greșit afectează modelul!

## Test 12: Invertibilitatea ARIMA

### Întrebare

ARIMA(0,1,1) cu  $\theta_1 = 1.2$  este:

- ☐ A) Staționară și invertibilă
- ☐ B) Nestaționară dar invertibilă
- ☐ C) Nestaționară și neinvertibilă
- ☐ D) Staționară dar neinvertibilă

## Test 12: Invertibilitatea ARIMA

### Întrebare

ARIMA(0,1,1) cu  $\theta_1 = 1.2$  este:

- A) Staționară și invertibilă
- B) Nestaționară dar invertibilă
- C) Nestaționară și neinvertibilă
- D) Staționară dar neinvertibilă

Răspuns: C – Nestaționară și neinvertibilă

**Staționaritate:**  $d = 1$  înseamnă o rădăcină unitară  $\Rightarrow$  **Nestaționară**

**Invertibilitate:** Polinomul MA este  $\theta(z) = 1 + 1.2z$ ; rădăcină:  $z = -1/1.2 = -0.833$  (în interiorul cercului unitate). Invertibilitatea necesită rădăcina în afara cercului unitate, iar  $|\theta_1| = 1.2 > 1 \Rightarrow$  **Neinvertibilă**.

**Corecție:** Rescrieți cu  $\theta^* = 1/1.2 = 0.833$  și ajustați varianța.

## Test 13: Regresia Falsă

### Întrebare

Regresând un mers aleatoriu pe un alt mers aleatoriu independent, de obicei se obține:

- A) Nicio relație semnificativă
- B)  $R^2$  ridicat și statistici t semnificative (fals)
- C) Corelație negativă
- D) Multicolinearitate perfectă

## Test 13: Regresia Falsă

### Întrebare

Regresând un mers aleatoriu pe un alt mers aleatoriu independent, de obicei se obține:

- A) Nicio relație semnificativă
- B)  $R^2$  ridicat și statistici  $t$  semnificative (fals)
- C) Corelație negativă
- D) Multicolinearitate perfectă

Răspuns: B –  $R^2$  ridicat și statistici  $t$  semnificative (fals)

**Granger & Newbold (1974):** Fenomenul regresiei false

**Simptome:**  $R^2$  ridicat (adesea  $> 0.9$ ) între serii neînrudite, statistici  $t$  semnificative, statistică Durbin-Watson foarte scăzută ( $\ll 2$ ), reziduuri nestaționare.

**Soluții:** (1) Diferențiați ambele serii, sau (2) Testați pentru cointegrare

## Test 14: Prognoza pe Termen Lung

### Întrebare

Prognoza pe termen lung din ARIMA(1,1,0) cu  $\phi_1 = 0.7$  convergă la:

- A) Zero
- B) Media necondiționată
- C) O extrapolare liniară a trendului
- D) Ultima valoare observată



## Test 14: Prognoza pe Termen Lung

### Întrebare

Prognoza pe termen lung din ARIMA(1,1,0) cu  $\phi_1 = 0.7$  convergă la:

- A) Zero
- B) Media necondiționată
- C) O extrapolare liniară a trendului
- D) Ultima valoare observată

Răspuns: C – O extrapolare liniară a trendului

**Model:**  $(1 - \phi_1 L)(1 - L)Y_t = c + \varepsilon_t$

**Prognoza pe termen lung:** Pentru modelele  $I(1)$  cu derivă  $c$ :  $\hat{Y}_{T+h} \approx Y_T + h \cdot \frac{c}{1-\phi_1}$

**Diferențe cheie:** ARMA staționară: prognozele  $\rightarrow$  media necondiționată;  $I(1)$  fără derivă: prognozele  $\rightarrow$  ultima valoare (plată);  $I(1)$  cu derivă: prognozele  $\rightarrow$  extrapolare liniară.

### Întrebare

Determinați dacă fiecare afirmație este Adevărată sau Falsă:

- 1 Un proces  $I(2)$  necesită două diferențe pentru a deveni staționar.
- 2 Testul ADF include întotdeauna un termen constant.
- 3  $ARIMA(0,1,0)$  este un alt nume pentru un mers aleatoriu.
- 4 Diferențierea unei serii staționare o face “mai staționară.”
- 5 Testul KPSS are staționaritatea ca ipoteză nulă.
- 6 Modelele ARIMA pot captura doar modele liniare.

*Răspunsul pe slide-ul următor...*

### Răspunsuri

- 1 Un proces  $I(2)$  necesită două diferențe pentru a deveni staționar.  
 $I(d)$  înseamnă că  $d$  diferențe sunt necesare.  $I(2)$  = două rădăcini unitare. **ADEVĂRAT**
- 2 Testul ADF include întotdeauna un termen constant.  
Alegeți: fără constantă, doar constantă, sau constantă + trend. **FALS**
- 3 ARIMA(0,1,0) este un alt nume pentru un mers aleatoriu.  
 $(1 - L)Y_t = \varepsilon_t \Rightarrow Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$ . **ADEVĂRAT**
- 4 Diferențierea unei serii staționare o face “mai staționară.”  
Supradiferențierea creează MA neinvertibil; afectează performanța modelului. **FALS**
- 5 Testul KPSS are staționaritatea ca ipoteză nulă.  
KPSS:  $H_0$  = staționară. Opus testului ADF. **ADEVĂRAT**
- 6 Modelele ARIMA pot captura doar modele liniare.  
ARIMA este liniar în parametri. Modelele neliniare necesită GARCH, rețele neuronale, etc. **ADEVĂRAT**

## Problema 1: Testarea Rădăcinii Unitare

### Exercițiu

Aveți date trimestriale de PIB pentru 80 de trimestre. Testul ADF (cu constantă și trend) dă o statistică de test de  $-2.85$ . Valoarea critică la 5% este  $-3.41$ .

- 1 Care este concluzia dumneavoastră despre staționaritate?
- 2 Ce ați face în continuare?

## Problema 1: Testarea Rădăcinii Unitare

### Exercițiu

Aveți date trimestriale de PIB pentru 80 de trimestre. Testul ADF (cu constantă și trend) dă o statistică de test de  $-2.85$ . Valoarea critică la 5% este  $-3.41$ .

- 1 Care este concluzia dumneavoastră despre staționaritate?
- 2 Ce ați face în continuare?

### Soluție

- 1 Deoarece  $-2.85 > -3.41$ , **nu respingem**  $H_0$ . Datele par să aibă o rădăcină unitară (nestaționare).
- 2 Luați prima diferență  $\Delta Y_t$  și repetați testul ADF pe seria diferențiată pentru a confirma că este acum staționară.

## Problema 2: Identificarea Modelului

### Exercițiu

După diferențierea o dată a unei serii de timp, ACF arată:

- Vârf semnificativ la lag 1 ( $\rho_1 = 0.4$ )
- Toate celelalte lag-uri ne semnificative

PACF arată descreștere graduală.

Ce model ARIMA este sugerat?

## Problema 2: Identificarea Modelului

### Exercițiu

După diferențierea o dată a unei serii de timp, ACF arată:

- Vârf semnificativ la lag 1 ( $\rho_1 = 0.4$ )
- Toate celelalte lag-uri ne semnificative

PACF arată descreștere graduală.

Ce model ARIMA este sugerat?

### Soluție

- ACF se anulează după lag 1  $\Rightarrow$  componentă MA(1)
- PACF descrește  $\Rightarrow$  Confirmă structura MA
- Deoarece am diferențiat o dată:  $d = 1$

**Model sugerat: ARIMA(0,1,1) sau IMA(1,1)**

## Problema 3: Ecuația ARIMA

### Exercițiu

Scrieți ecuația completă pentru ARIMA(1,1,1):

$$(1 - \phi_1 L)(1 - L)Y_t = c + (1 + \theta_1 L)\varepsilon_t$$

Expandați complet în termenii  $Y_t$ ,  $Y_{t-1}$ ,  $Y_{t-2}$ , etc.



## Problema 3: Ecuația ARIMA

### Exercițiu

Scrieți ecuația completă pentru ARIMA(1,1,1):

$$(1 - \phi_1 L)(1 - L)Y_t = c + (1 + \theta_1 L)\varepsilon_t$$

Expandați complet în termenii  $Y_t$ ,  $Y_{t-1}$ ,  $Y_{t-2}$ , etc.

### Soluție

Expandând  $(1 - \phi_1 L)(1 - L) = 1 - L - \phi_1 L + \phi_1 L^2 = 1 - (1 + \phi_1)L + \phi_1 L^2$ :

$$Y_t - (1 + \phi_1)Y_{t-1} + \phi_1 Y_{t-2} = c + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Sau echivalent:

$$Y_t = c + (1 + \phi_1)Y_{t-1} - \phi_1 Y_{t-2} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

## Problema 4: Calculul Prognozei

### Exercițiu

Dat ARIMA(0,1,1):  $\Delta Y_t = \varepsilon_t + 0.3\varepsilon_{t-1}$

La momentul  $T$ :  $Y_T = 100$ ,  $\hat{\varepsilon}_T = 2$ ,  $\sigma^2 = 4$

Calculați:

- 1  $\hat{Y}_{T+1|T}$  (prognoza la un pas)
- 2  $\hat{Y}_{T+2|T}$  (prognoza la doi pași)

## Problema 4: Calculul Prognozei

### Exercițiu

Dat ARIMA(0,1,1):  $\Delta Y_t = \varepsilon_t + 0.3\varepsilon_{t-1}$

La momentul  $T$ :  $Y_T = 100$ ,  $\hat{\varepsilon}_T = 2$ ,  $\sigma^2 = 4$

Calculați:

- ❶  $\hat{Y}_{T+1|T}$  (prognoza la un pas)
- ❷  $\hat{Y}_{T+2|T}$  (prognoza la doi pași)

### Soluție

- ❶  $\hat{Y}_{T+1|T} = Y_T + 0.3\hat{\varepsilon}_T = 100 + 0.3(2) = 100.6$
- ❷  $\hat{Y}_{T+2|T} = \hat{Y}_{T+1|T} + 0.3 \cdot 0 = 100.6 + 0 = 100.6$   
(Șocurile viitoare  $\varepsilon_{T+1}, \varepsilon_{T+2}$  sunt prognozate ca 0)

## Problema 5: Intervale de Încredere

### Exercițiu

Continuând de la Problema 4, calculați intervalele de încredere de 95% pentru  $\hat{Y}_{T+1|T}$  și  $\hat{Y}_{T+2|T}$ .

Reamintim:  $\sigma^2 = 4$ ,  $\theta_1 = 0.3$

## Problema 5: Intervale de Încredere

### Exercițiu

Continuând de la Problema 4, calculați intervalele de încredere de 95% pentru  $\hat{Y}_{T+1|T}$  și  $\hat{Y}_{T+2|T}$ .

Reamintim:  $\sigma^2 = 4$ ,  $\theta_1 = 0.3$

### Soluție

Pentru IMA(1,1), ponderile  $MA(\infty)$  sunt  $\psi_0 = 1$ ,  $\psi_j = 1 + \theta_1$  pentru  $j \geq 1$ .

**1 pas:**  $\text{Var}(e_{T+1}) = \sigma^2 \psi_0^2 = 4$ , deci  $SE = 2$

$$100.6 \pm 1.96(2) = [96.68, 104.52]$$

**2 pași:**  $\text{Var}(e_{T+2}) = \sigma^2(\psi_0^2 + \psi_1^2) = 4(1 + 1.3^2) = 10.76$ ,  $SE = 3.28$

$$100.6 \pm 1.96(3.28) = [94.17, 107.03]$$

## Exemplu: Testarea Rădăcinii Unitare în Prețurile Acțiunilor

### Scenariu

Aveți prețuri de închidere zilnice pentru o acțiune pe parcursul a 500 de zile. Vreți să determinați dacă prețurile urmează un mers aleatoriu.

### Abordare Pas cu Pas

- 1 **Inspecție vizuală:** Reprezentați grafic prețurile – probabil arată trend
- 2 **Testul ADF pe prețuri:** Așteptați să nu respingeți  $H_0$  (rădăcină unitară)
- 3 **Luați randamentele logaritmice:**  $r_t = \ln(P_t/P_{t-1}) = \Delta \ln(P_t)$
- 4 **Testul ADF pe randamente:** Ar trebui să respingeți  $H_0$  (staționară)
- 5 **Concluzie:** Log prețurile sunt  $I(1)$ , randamentele sunt  $I(0)$

## Exemplu: Box-Jenkins pentru Date de Inflație

### Scenariu

Rate lunare ale inflației pentru 10 ani. Construiți un model ARIMA.

### Flux de lucru

- ❶ **Reprezentare grafică și test:** ADF sugerează limită – încercați atât  $d = 0$  cât și  $d = 1$
- ❷ **Dacă  $d = 0$ :** Ajustați modele ARMA, comparați AIC
- ❸ **Dacă  $d = 1$ :** Examinați ACF/PACF ale lui  $\Delta Y_t$ 
  - ACF: vârf la lag 1, apoi se anulează
  - PACF: descrește
  - $\Rightarrow$  Încercați ARIMA(0,1,1)
- ❹ **Estimare:** Ajustați ARIMA(0,1,1), verificați coeficienții
- ❺ **Diagnostic:** Ljung-Box pe reziduuri (vrem  $p > 0.05$ )
- ❻ **Comparare:** AIC al ARIMA(0,1,1) vs ARMA(1,1) pe niveluri

## Exemplu: Interpretarea Rezultatelor Python

### Rezultate ARIMA din statsmodels

```

                        ARIMA Model Results
=====
Dep. Variable:          D.y    No. Observations:   99
Model:                 ARIMA(1,1,1)    AIC          285.32
                                   BIC          295.63
=====

```

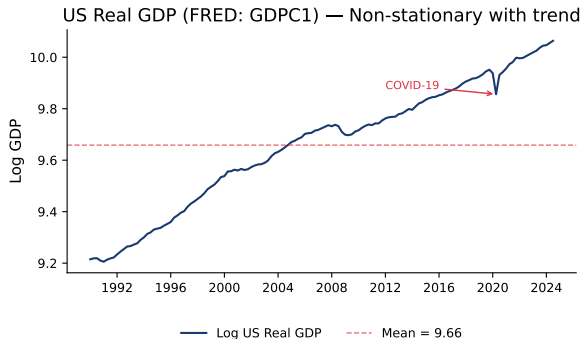
	coef	std err	z	P> z
const	0.0521	0.048	1.085	0.278
ar.L1	0.4532	0.102	4.443	0.000
ma.L1	-0.2891	0.118	-2.450	0.014
sigma2	1.2340	0.176	7.011	0.000

### Interpretare

- Coeficientul AR (0.45) este semnificativ, coeficientul MA (-0.29) este semnificativ
- Constanta (0.052) nesemnificativă – am putea seta  $c = 0$
- Verificare:  $|\phi_1| < 1$  (staționară),  $|\theta_1| < 1$  (invertibilă) – OK!

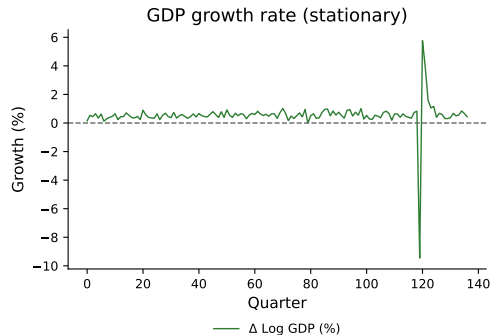
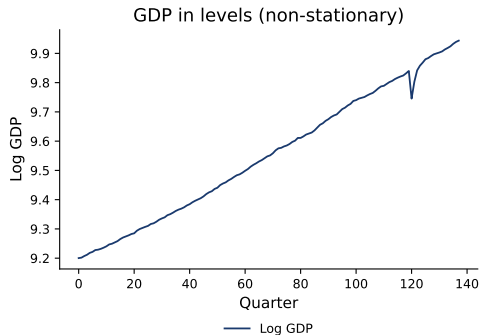


## Studiu de Caz: PIB Real SUA (1990–2024)



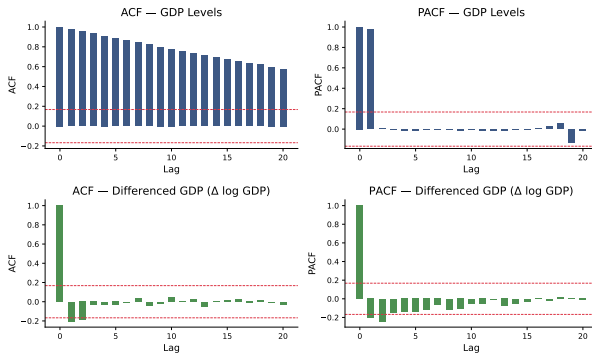
- PIB Real SUA în miliarde de dolari 2017 (date trimestriale)
- **Trend ascendent** clar – tipic pentru seriile macroeconomice
- Scăderi notabile în timpul recesiunilor (2008-2009, 2020)
- Nestaționară: necesită diferențiere înainte de modelarea ARIMA

# Staționaritate Prin Diferențiere



- **Stânga:** PIB în niveluri – trend ascendent clar (nestaționară)
- **Dreapta:** Rata de creștere a PIB =  $\Delta \log(Y_t) \times 100$  – staționară
- Prima diferențiere a log PIB elimină trendul stochastic
- Rata de creștere fluctuează în jurul unei medii constante ( $\approx 0.6\%$  trimestrial)

# ACF/PACF: Niveluri vs Diferențiate



- Rândul de sus: ACF/PACF ale nivelurilor PIB – descreștere lentă indică nestaționaritate
- Rândul de jos: ACF/PACF ale creșterii PIB – mai ales în limitele de încredere
- Modelul sugerează că un model ARIMA de ordin mic este potrivit

## Rezultate Estimare ARIMA: Creșterea PIB SUA

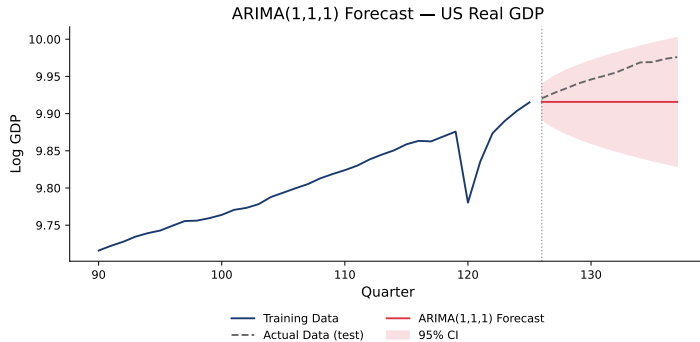
Model: ARIMA(1, 1, 1) pe log(PIB)

Parametru	Estimat	Eroare Std.	z-stat	valoare-p
$\phi_1$ (AR.L1)	0.312	0.185	1.69	0.091
$\theta_1$ (MA.L1)	-0.087	0.203	-0.43	0.668
$\sigma^2$	0.00012	—	—	—

### Interpretare

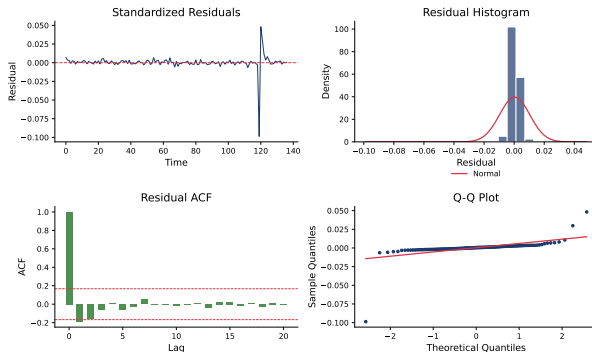
- ARIMA de ordin mic captează rezonabil dinamica PIB
- Coeficientul AR(1) pozitiv – creșterea PIB arată persistență
- Alternativă: mersul aleatoriu simplu (ARIMA(0,1,0)) adesea competitiv

# Proгноză: ARIMA vs Real



- Albastru: date istorice de antrenare; Verde: date reale de test
- Roșu întrerupt: prognoze ARIMA cu interval de încredere 95%
- Prognozele captează direcția generală a trendului
- Intervalele de încredere se largesc pe măsură ce orizontul de prognoză crește

# Diagnostic Model: Analiza Reziduurilor



- Reziduurile nu arată modele sistematice în timp
- Distribuție aproximativ normală (histogramă și grafic Q-Q)
- ACF-ul reziduurilor în limite – fără autocorelație semnificativă rămasă
- Modelul captează adecvat procesul generator de date

## Întrebare Cheie

De ce este important să distingem între trendurile deterministe și stochastice?

## Puncte de Discuție

- **Consecințele tratamentului greșit:**
  - Eliminarea trendului prin regresie la o rădăcină unitară  $\Rightarrow$  staționaritate falsă
  - Diferențierea unei serii staționare în trend  $\Rightarrow$  supradiferențiere
- **Interpretare economică:**
  - Trend determinist: șocurile sunt temporare
  - Trend stohastic: șocurile au efecte permanente
- **Implicații de politică:**
  - O recesiune reduce permanent PIB-ul, sau economia revine la trend?

### Întrebare Cheie

Când ar trebui să folosiți AIC vs BIC pentru selecția modelului ARIMA?

### Considerații

- **AIC:** Minimizează eroarea de predicție, poate supraajusta
  - Mai bun pentru prognoză
  - Tinde să selecteze modele mai mari
- **BIC:** Selecție consistentă a modelului, mai simplu
  - Mai bun pentru identificarea modelului “adevărat”
  - Penalizează complexitatea mai puternic
- **Sfat practic:** Raportați ambele, preferați BIC dacă diferă substanțial



### Întrebare Cheie

Care sunt principalele limitări ale modelelor ARIMA?

### Puncte de Discuție

- **Liniaritate:** Nu poate captura dinamici neliniare
- **Varianță constantă:** Presupune homoscedasticitate (fără efecte GARCH)
- **Fără rupturi structurale:** Parametrii presupuși constanți
- **Univariat:** Ignoră relațiile cu alte variabile
- **Simetric:** Tratează șocurile pozitive și negative la fel
- **Prognoze pe termen lung:** Incertitudinea crește rapid

### Extensii

Aceste limitări motivează GARCH (volatilitate), VAR (multivariat), modele cu schimbări de regim, etc.

## Exercițiu AI: Gândire critică

### Prompt de testat în ChatGPT / Claude / Copilot

“Folosind yfinance, descarcă cursul de schimb lunar EUR/USD ( $\text{EURUSD}=\text{X}$ ) din 2010-01 până în 2024-12 (180 observații). Testează prezența rădăcinii unitare cu ADF și KPSS. Determină ordinul de diferențiere  $d$ . Estimează un model  $\text{ARIMA}(p, d, q)$  folosind atât analiza ACF/PACF, cât și `auto_arima`. Compară cele două abordări. Împarte datele în antrenare (2010–2023) și test (2024) și evaluează prognoza pe 12 luni cu RMSE și MAE. Vreau cod Python complet cu grafice.”

### Exercițiu:

- 1 Rulați prompt-ul într-un LLM la alegere și analizați critic răspunsul.
- 2 Folosește ambele teste (ADF și KPSS) pentru a decide  $d$ ? Verifică supra-diferențierea?
- 3 Rezultatele ACF/PACF coincid cu ordinele alese de `auto_arima`? Dacă nu, de ce?
- 4 Intervalele de încredere ale prognozei se lărgesc cu orizontul? (proprietate cheie  $I(1)$ )
- 5 Menționează ipoteza de mers aleatoriu (random walk) pentru cursul de schimb?

**Atenție:** Codul generat de AI poate rula fără erori și arăta profesional. *Asta nu înseamnă că e corect.*

### Ce am Acoperit

- ➊ **Integrare și diferențiere:** Procesele  $I(d)$  necesită  $d$  diferențe
- ➋ **Testarea rădăcinii unitare:** ADF testează  $H_0$ : rădăcină unitară; KPSS testează  $H_0$ : staționară
- ➌ **ARIMA(p,d,q):** Combină ARMA cu diferențierea
- ➍ **Identificarea modelului:** Folosiți modelele ACF/PACF și criteriile informaționale
- ➎ **Prognoză:** Prognoze punctuale și intervale de încredere în creștere

### Următorul Seminar

Exerciții practice Python cu date economice reale:

- Testarea rădăcinii unitare cu statsmodels
- Auto-ARIMA cu pmdarima
- Prognoză și diagnostice model