Analiza și Prognoza seriilor de timp

Seminar 2: Modele ARMA

Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Cuprins Seminar

Activitățile de Astăzi:

1. **Test de recapitulare** — Verificarea înțelegerii conceptelor ARMA
2. **Întrebări Adevărat/Fals** — Verificări conceptuale
3. **Probleme practice** — Practică cu AR/MA
4. **Exemple rezolvate** — Ajustare și diagnostice
5. **Subiecte de discuție** — Aplicații practice
6. **Exerciții cu asistență AI** — Modelare om vs. AI

Test 1: Operatorul Lag

Întrebare

Care este rezultatul aplicării $(1 - L)^2$ lui X_t?

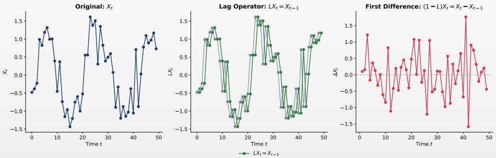
Variante de răspuns

(A) $X_t - X_{t-1}$ indent **(B)** $X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$ indent **(C)** $X_t + X_{t-1} + X_{t-2}$ indent **(D)** $X_t - X_{t-2}$

Test 1: Răspuns

Răspuns: B

$X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$



Explicație:

$$(1-L)^2 X_t = (1 - 2L + L^2) X_t$$
$$= X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$$

Operatorul lag: $L^k X_t = X_{t-k}$

Aceasta este **diferența de ordinul doi** a lui X_t.

TSA_ch2_lag_operator

Test 2: Staționaritatea AR(1)

Întrebare

Pentru ce valoare a lui ϕ procesul AR(1) $X_t = 0.5 + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$ este staționar?

Variante de răspuns

(A) $\phi = 1.2$ indent **(B)** $\phi = 1.0$ indent **(C)** $\phi = -0.8$ indent **(D)** $\phi = -1.5$

Test 2: Răspuns

Răspuns: C

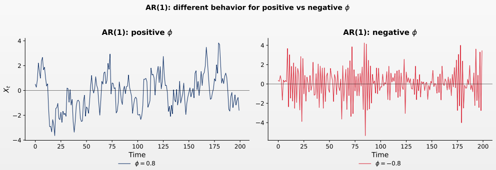
$\phi = -0.8$ (Staționar)

Condiția de staționaritate AR(1):

$$|\phi| < 1$$

Verificarea fiecărei opțiuni:

- A: $|1.2| = 1.2 > 1$ ×
- B: $|1.0| = 1$ (rădăcină unitară) ×
- C: $|-0.8| = 0.8 < 1$ ✓
- D: $|-1.5| = 1.5 > 1$ ×



AR(1): regiunea staționară $|\phi| < 1$

TSA_ch2_ar1

Test 3: Modelul ACF

Întrebare

Observați următorul model ACF: vârf semnificativ la lag 1, apoi toate lag-urile în benzile de încredere. PACF arată descreștere graduală. Ce model este sugerat?

Variante de răspuns

(A) AR(1) indent **(B)** MA(1) indent **(C)** ARMA(1,1) indent **(D)** Zgomot alb

Test 3: Răspuns

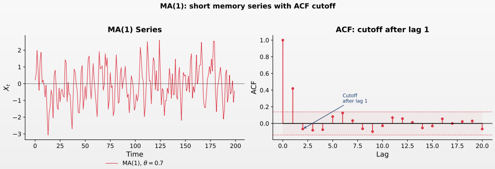
Răspuns: B

MA(1)

Regula cheie de identificare:

- ACF se anulează după lag $q \Rightarrow$ MA(q)
- PACF se anulează după lag $p \Rightarrow$ AR(p)

Aici: ACF se anulează la lag 1, PACF descrește $\Rightarrow$ **MA(1)**



MA(1): ACF se anulează după lag 1

TSA_ch2_ma1

Test 4: Invertibilitatea MA

Întrebare

Pentru procesul MA(1) $X_t = \varepsilon_t + 1.5\varepsilon_{t-1}$, este procesul invertibil?

Variante de răspuns

(A) Da, deoarece procesele MA sunt întotdeauna invertibile

(B) Da, deoarece $1.5 > 0$

(C) Nu, deoarece $|\theta| = 1.5 > 1$

(D) Nu, deoarece procesele MA nu sunt niciodată invertibile

Test 4: Răspuns

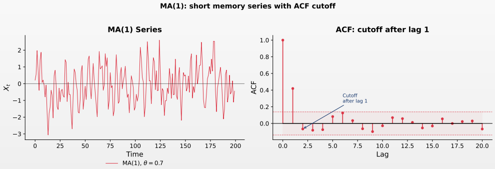
Răspuns: C

Nu este invertibil ($|\theta| = 1.5 > 1$)

Invertibilitatea MA(1):
Necesită $|\theta| < 1$

Echivalent: rădăcina lui $\theta(z) = 1 + \theta z = 0$ trebuie să fie în afara cercului unitate.
Aici: $z = -1/1.5 = -0.67$ este **în interior**!

$\Rightarrow$ **Nu este invertibil**



Invertibilitate: rădăcina în afara cercului unitate

TSA_ch2_ma1

Test 5: Reprezentarea ARMA

Întrebare

Forma compactă $\phi(L)X_t = \theta(L)\varepsilon_t$ reprezintă ce model?

Variante de răspuns

(A) Model AR pur

(B) Model MA pur

(C) Model ARMA

(D) Niciunul dintre cele de mai sus

Test 5: Răspuns

Răspuns: C

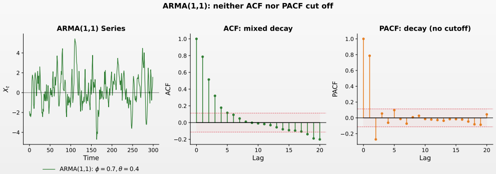
Model ARMA

Notația cu polinoame lag:

- $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \cdots - \phi_p L^p$
- $\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \cdots + \theta_q L^q$

Cazuri speciale:

- $\theta(L) = 1$: AR pur
- $\phi(L) = 1$: MA pur



ARMA(1,1): combină AR și MA

TSA_ch2_arma

Test 6: Criterii Informaționale

Întrebare

Când comparăm ARMA(1,1) și ARMA(2,1) folosind BIC, care afirmație este corectă?

Variante de răspuns

(A) BIC mai mic înseamnă întotdeauna prognoze mai bune

(B) BIC penalizează complexitatea mai puțin decât AIC

(C) Modelul cu BIC mai mic este preferat

(D) BIC poate compara doar modele cu același număr de parametri

Test 6: Răspuns

Răspuns: C

Modelul cu BIC mai mic este preferat

Criterii Informaționale:

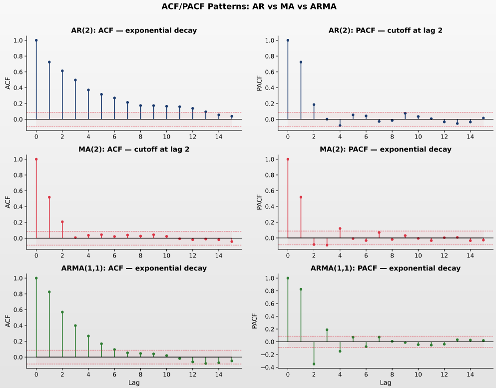
$$\text{AIC} = -2\ln(\hat{L}) + 2k$$

$$\text{BIC} = -2\ln(\hat{L}) + k\ln(n)$$

$\hat{L}$ = maximul funcției de verosimilitate, k = nr. parametri, n = eșantion

BIC penalizează complexitatea **mai mult** decât AIC (pentru $n > 7$).

$\Rightarrow$ BIC favorizează modele mai simple.



Selecția modelului: AIC vs BIC

TSA_ch2_model_selection

Test 7: Testul Ljung-Box

Întrebare

După ajustarea unui model ARMA(2,1), rulați testul Ljung-Box pe reziduuri și obțineți valoare-p = 0.02. Ce concluzie trageți?

Variante de răspuns

(A) Modelul este adecvat

(B) Reziduurile sunt zgomot alb

(C) Există autocorelație semnificativă în reziduuri

(D) Modelul are prea mulți parametri

Test 7: Răspuns

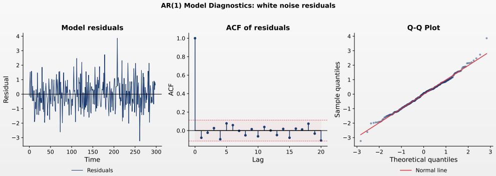
Răspuns: C

Autocorelație semnificativă în reziduuri

Testul Ljung-Box:

- H_0: Reziduurile sunt zgomot alb
- H_1: Autocorelație prezentă

valoare-p $= 0.02 < 0.05$
$\Rightarrow$ **Respingem H_0**
Modelul este **inadecvat** — încercați alte ordine.



Diagnostice: ACF trebuie să fie zgomot alb

TSA_ch2_diagnostics

Test 8: Prognoză

Întrebare

Pentru un model AR(1) cu $\phi = 0.6$ și medie $\mu = 10$, ce se întâmplă cu prognozele când orizontul $h \to \infty$?

Variante de răspuns

(A) Prognozele cresc fără limită

(B) Prognozele converg la 0

(C) Prognozele converg la $\mu = 10$

(D) Prognozele oscilează pentru totdeauna

Test 8: Răspuns

Răspuns: C

Prognozele converg la $\mu = 10$

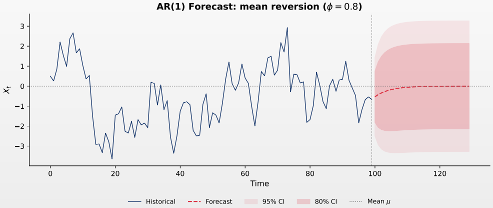
Formula de prognoză AR(1):

$$\hat{X}_{n+h|n} = \mu + \phi^h (X_n - \mu)$$

Deoarece $|\phi| = 0.6 < 1$:

$$\lim_{h \to \infty} \phi^h = 0$$

$\Rightarrow$ Prognozele converg la μ.
Revenire la medie!



Prognoze AR(1): revenire la medie

TSA_ch2_forecasting

Test 9: Rădăcinile AR(2)

Întrebare

Un proces AR(2) are rădăcinile caracteristice $z_1 = 0.8$ și $z_2 = -0.5$. Este staționar?

Variante de răspuns

(A) Da, deoarece ambele rădăcini sunt în interiorul cercului unitate

(B) Nu, deoarece o rădăcină este negativă

(C) Nu, deoarece rădăcinile trebuie să fie în afara cercului unitate

(D) Nu se poate determina fără mai multe informații

Test 9: Răspuns

Răspuns: C

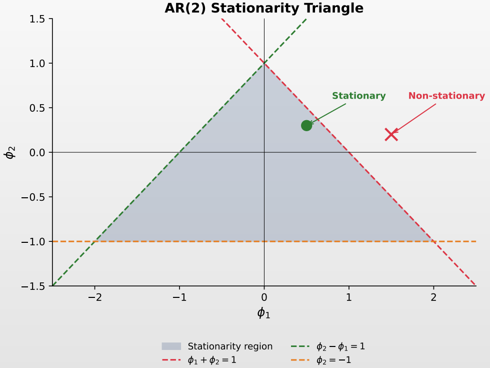
Rădăcinile trebuie să fie în afara cercului unitate

Condiția de staționaritate:
Rădăcinile lui $\phi(z) = 0$ trebuie să fie **în afara** cercului unitate ($|z| > 1$).

Aici:

- $|z_1| = 0.8 < 1$ ×
- $|z_2| = 0.5 < 1$ ×

Ambele în interior $\Rightarrow$ **Nestaționar**



AR(2): rădăcini și triunghiul de staționaritate

TSA_ch2_ar2

Test 10: Proprietățile MA(q)

Întrebare

Pentru un proces MA(2), ACF-ul:

Variante de răspuns

(A) Descrește exponențial indent **(B)** Se anulează după lag 2 indent **(C)** Se anulează după lag 1 indent **(D)** Nu se anulează niciodată

Test 10: Răspuns

Răspuns: B

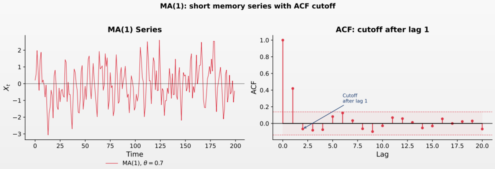
Se anulează după lag 2

Proprietatea ACF pentru MA(q):

$$\rho(h) = 0 \text{ pentru } h > q$$

- MA(1): ACF se anulează după lag 1
- MA(2): ACF se anulează după lag 2
- MA(q): ACF se anulează după lag q

Caracteristica cheie de identificare!



MA: anularea ACF este semnătura

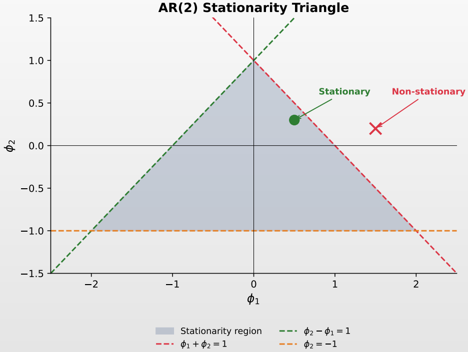
TSA_ch2_ma1

Adevărat sau Fals? — Întrebări

Afirmație	**A/F?**
1. Un proces AR(2) poate prezenta comportament pseudo-ciclic.	?
2. Procesele MA necesită o condiție de staționaritate.	?
3. PACF-ul unui proces AR(p) se anulează după lag p.	?
4. Dacă AIC selectează ARMA(2,1) și BIC selectează ARMA(1,1), nu pot fi ambele corecte.	?
5. Intervalele de încredere se îngustează pe măsură ce orizontul crește.	?
6. Ecuațiile Yule-Walker pot fi folosite pentru a estima parametrii MA.	?

Adevărat sau Fals? — Răspunsuri

1. **ADEVĂRAT**: AR(2) cu rădăcini complexe ⇒ oscilații amortizate
2. **FALS**: Procesele MA sunt întotdeauna staționare; au nevoie de *invertibilitate*
3. **ADEVĂRAT**: Caracteristica cheie de identificare a AR(p)
4. **FALS**: Ambele sunt „corecte" pentru criteriile lor (AIC: estimare, BIC: parsimonie)
5. **FALS**: IC se *lărgesc* cu orizontul (mai multă incertitudine)
6. **FALS**: Yule-Walker este pentru AR; MA folosește MLE



AR(2): rădăcini complexe ⇒ cicluri

TSA_ch2_ar2

Exercițiul 1: Proprietățile AR(1)

Problemă: Considerați procesul AR(1):

$$X_t = 2 + 0.7X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, 9)$$

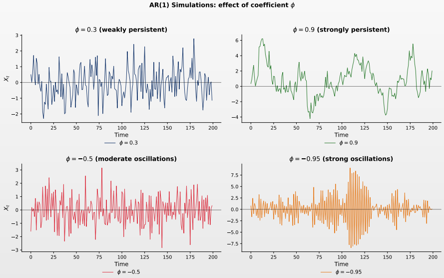
Calculați:

1. Media μ
2. Varianța $\gamma(0)$
3. Autocovarianța $\gamma(1)$ și $\gamma(2)$
4. Autocorelația $\rho(1)$ și $\rho(2)$

Exercițiul 1: Soluție

Dat: $c = 2$, $\phi = 0.7$, $\sigma^2 = 9$

1. **Media:** $\mu = \frac{c}{1-\phi} = \frac{2}{1-0.7} = \frac{2}{0.3} = \mathbf{6.67}$
2. **Varianța:** $\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} = \frac{9}{1-0.49} = \mathbf{17.65}$
3. **Autocovarianța:** $\gamma(1) = \phi \cdot \gamma(0) = 0.7 \times 17.65 = \mathbf{12.35}$
$\gamma(2) = \phi^2 \cdot \gamma(0) = 0.49 \times 17.65 = \mathbf{8.65}$
4. **Autocorelația:** $\rho(1) = \phi = \mathbf{0.7}$, $\quad \rho(2) = \phi^2 = \mathbf{0.49}$



Simulare AR(1) și ACF

TSA_ch2_ex1_ar1

Exercițiul 2: Proprietățile MA(1)

Problemă: Considerați procesul MA(1):

$$X_t = 5 + \varepsilon_t - 0.4\varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \sim WN(0,4)$$

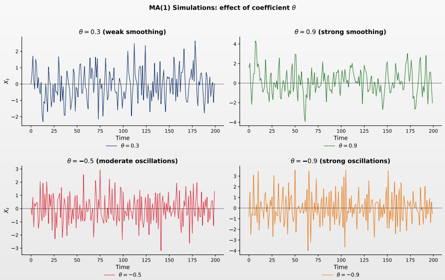
Calculați:

1. Media μ
2. Varianța $\gamma(0)$
3. Autocovarianța $\gamma(1)$
4. Autocorelația $\rho(1)$
5. Este acest proces invertibil?

Exercițiul 2: Soluție

Dat: $\mu = 5$, $\theta = -0.4$, $\sigma^2 = 4$

1. **Media:** $\mathbb{E}[X_t] = \mu =$ **5**
2. **Varianța:** $\gamma(0) = \sigma^2(1+\theta^2) = 4(1.16) =$ **4.64**
3. **Autocovarianța:** $\gamma(1) = \theta\sigma^2 = -0.4 \times 4 =$ **-1.6**
4. **Autocorelația:** $\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{-1.6}{4.64} =$ **-0.345**
5. **Invertibilitate:** $|\theta| = 0.4 < 1 \Rightarrow$ **Da**



MA(1): ACF se anulează după lag 1

TSA_ch2_ex2_ma1

Exercițiul 3: Rădăcinile Caracteristice

Problemă: Considerați procesul AR(2):

$$X_t = 0.5X_{t-1} + 0.3X_{t-2} + \varepsilon_t$$

1. Scrieți ecuația caracteristică
2. Găsiți rădăcinile caracteristice
3. Este acest proces staționar?

Exercițiul 3: Soluție

1. Ecuația caracteristică:

$$\phi(z) = 1 - 0.5z - 0.3z^2 = 0$$

Sau: $0.3z^2 + 0.5z - 1 = 0$

2. Rădăcinile (formula cuadratică):

$$z = \frac{-0.5 \pm \sqrt{0.25 + 1.2}}{0.6}$$

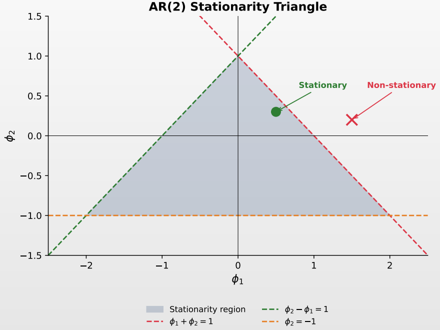
$$z_1 = \mathbf{1.17}, \quad z_2 = \mathbf{-2.84}$$

3. Verificarea staționarității:

$|z_1| = 1.17 > 1$ ✓

$|z_2| = 2.84 > 1$ ✓

Ambele în afara cercului unitate ⇒ **Staționar**



Rădăcini în afara cercului ⇒ staționar

TSA_ch2_ex3_roots

Exercițiul 4: Prognoză

Problemă: Ați ajustat un model AR(1):

$$X_t = 3 + 0.8X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \sigma^2 = 4$$

Dat $X_{100} = 20$, calculați:

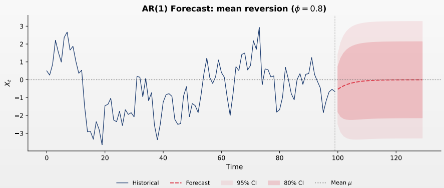
1. Prognoza la 1 pas înainte $\hat{X}_{101|100}$
2. Prognoza la 2 pași înainte $\hat{X}_{102|100}$
3. Prognoza pe termen lung când $h \to \infty$
4. Intervalul de încredere de 95% pentru $\hat{X}_{101|100}$

Exercițiul 4: Soluție

Dat: $c = 3,\ \phi = 0.8,\ \sigma^2 = 4,\ X_{100} = 20$

Media: $\mu = \frac{3}{1-0.8} = \mathbf{15}$

1. **Prognoza la un pas:** $\hat{X}_{101|100} = 3 + 0.8 \times 20 = \mathbf{19}$
2. **Prognoza la doi pași:**
$\hat{X}_{102|100} = 3 + 0.8 \times 19 = \mathbf{18.2}$
3. **Prognoza pe termen lung:**
$\lim_{h\to\infty} \hat{X}_{100+h|100} = \mu = \mathbf{15}$
4. **IC 95%:** $19 \pm 1.96 \times 2 = \mathbf{[15.08,\ 22.92]}$



Prognoza converge la medie

TSA_ch2_ex4_forecast

Exercițiu Python 1: Simulare și Ajustare AR(1)

Sarcină:

1. Simulați 300 de observații dintr-un AR(1) cu $\phi = 0.6$
2. Reprezentați grafic seria și ACF/PACF
3. Ajustați un model AR(1) și comparați $\hat{\phi}$ vs ϕ real
4. Examinați diagnosticele reziduurilor

Cod cheie:

```
from statsmodels.tsa.arima.model import ARIMA
model = ARIMA(x, order=(1, 0, 0)).fit()
print(model.summary())
```

TSA_ch2_python_simulate

Exercițiu Python 2: Selecția modelului

Sarcină:

1. Încărcați o serie de timp și verificați staționaritatea (testul ADF)
2. Comparați AIC/BIC pentru AR(1), MA(1), ARMA(1,1), ARMA(2,1)
3. Selectați cel mai bun model
4. Generați prognoze cu intervale de încredere

Funcții cheie:

- `adfuller(x)` pentru testul de staționaritate
- `model.aic`, `model.bic` pentru criterii
- `model.get_forecast(h)` pentru predicții

TSA_ch2_python_selection

Exercițiu Python 3: Verificarea Diagnosticelor

Sarcină: După ajustarea unui model, efectuați diagnostice complete:

1. Reprezentați grafic reziduurile în timp
2. Reprezentați grafic ACF-ul reziduurilor
3. Creați graficul Q-Q pentru normalitate
4. Rulați testul Ljung-Box

Funcții cheie:

- `model.resid` pentru reziduuri
- `plot_acf(resid)` pentru graficul ACF
- `stats.probplot(resid)` pentru graficul Q-Q
- `acorr_ljungbox(resid, lags=[10])` pentru test

TSA_ch2_python_diagnostics

Discuție 1: Selecția modelului

Scenariu: Modelați rate de inflație lunare. După verificarea staționarității:

- ACF: semnificativ la lag-urile 1, 2, 3, apoi descrește
- PACF: semnificativ la lag-urile 1, 2, apoi se anulează
- AIC selectează ARMA(2,3)
- BIC selectează AR(2)

Întrebări:

1. Ce sugerează modelul ACF/PACF?
2. De ce nu sunt de acord AIC și BIC?
3. Ce model ați alege și de ce?
4. Ce verificări suplimentare ați efectua?

Discuție 2: Evaluarea prognozei

Scenariu: Ajustați un model ARMA(1,1) pe randamente zilnice de acțiuni. Ajustarea în eșantion arată bine (Ljung-Box $p = 0.45$), dar RMSE în afara eșantionului este mai rău decât mersul aleatoriu.

Întrebări:

1. Este aceasta surprinzător? De ce sau de ce nu?
2. Ce ne spune despre predictibilitatea randamentelor?
3. Ar trebui să concluzionați că modelul ARMA este inutil?
4. Ce alternative ați putea considera?

Indiciu: Gândiți-vă la Ipoteza Pieței Eficiente și la ce captează ARMA vs. volatility clustering.

AI în Modelarea ARMA

Context

Instrumentele AI pot ajusta modele ARMA și genera diagnostice automat. Competența critică este **evaluarea corectitudinii metodologiei**.

Întrebări cheie pentru orice analiză ARMA generată de AI:

1. A verificat staționaritatea **înainte** de ajustare?
2. Ordinul modelului este justificat de ACF/PACF?
3. Reziduurile sunt zgomot alb (testul Ljung-Box)?
4. Rădăcinile sunt în interiorul cercului unitate?
5. Orizontul de prognoză este rezonabil pentru model?

Exercițiu AI 1: Criticați o analiză AI

Scenariu

Ați cerut unui AI: „Ajustează cel mai bun model pe datele de pete solare." A returnat:

- A ajustat ARMA(4,3) cu AIC = 2415.3
- Niciun test de staționaritate efectuat
- Ljung-Box valoare-p = 0.03 (raportat ca „acceptabil")
- Prognoză pe 50 de ani cu intervale de încredere înguste

Critica voastră:

1. ARMA(4,3) este supra-parametrizat? Ce ar sugera BIC?
2. De ce Ljung-Box p = 0.03 **nu** este acceptabil la pragul de 5%?
3. Prognozele pe 50 de ani sunt fiabile pentru modele ARMA? De ce?
4. Care este metodologia Box-Jenkins corectă care a fost omisă?

Exercițiu AI 2: Prompt Refinement pentru ARMA

Sarcina

Îmbunătățiți iterativ prompt-urile pentru ajustarea unui model AR pe datele de pete solare.

Runda 1 (vag): *„Ajustează un model de serie de timp pe pete solare"*

- ☐ Ce a produs AI-ul? Ce lipsește?

Runda 2 (mai bun): *„Testează staționaritatea cu ADF, examinează ACF/PACF, ajustează AR(p) folosind BIC, verifică reziduurile cu Ljung-Box"*

- ☐ AI-ul a urmat metodologia Box-Jenkins?

Runda 3 (expert): *„Urmează Box-Jenkins: (1) trasează și testează staționaritatea, (2) identifică ordinul din ACF/PACF, (3) estimează AR(2), (4) Ljung-Box pe reziduuri, (5) prognozează 20 pași cu IC 95%"*

- ☐ Comparați rezultatele din toate cele trei runde

Exercițiu AI 3: Competiție de selecție a modelului

Sarcina

Descărcați date lunare de șomaj din `statsmodels.datasets`.

Abordarea voastră (manuală):

- Analiza ACF/PACF → modele candidate
- Comparați AIC/BIC pentru AR(1), AR(2), MA(1), ARMA(1,1)
- Diagnostice reziduale pentru modelul selectat
- Prognoză rolling pe ultimele 20 de observații

Abordare AI:

- Cereți AI-ului să „găsească cel mai bun model ARMA și să prognozeze"

Comparați:

- Ce model a selectat fiecare? Coincid?
- Comparați RMSE out-of-sample
- AI-ul a folosit prognoze rolling sau doar multi-step?

Rezumat Formule cheie

Concept	Formula
Media AR(1)	$\mu = c/(1-\phi)$
Varianța AR(1)	$\gamma(0) = \sigma^2/(1-\phi^2)$
ACF AR(1)	$\rho(h) = \phi^h$
Staționaritate AR(1)	$\lvert\phi\rvert < 1$
Varianța MA(1)	$\gamma(0) = \sigma^2(1+\theta^2)$
ACF MA(1)	$\rho(1) = \theta/(1+\theta^2)$, $\rho(h) = 0$ pentru $h > 1$
Invertibilitate MA(1)	$\lvert\theta\rvert < 1$
Prognoza AR(1)	$\hat{X}_{n+h\mid n} = \mu + \phi^h(X_n - \mu)$
IC Prognoză	$\hat{X} \pm z_{\alpha/2} \times \sqrt{\text{MSFE}(h)}$
AIC	$-2\ln(\hat{L}) + 2k$
BIC	$-2\ln(\hat{L}) + k\ln(n)$

Notații: $\hat{L}$ = maximul funcției de verosimilitate, k = nr. parametri, n = dimensiunea eșantionului, c = constantă, σ^2 = varianța zgomotului alb

Întrebări?

Succes la exerciții!

Următorul Seminar: ARIMA și Modele Sezoniere

Bibliografie I

Manuale fundamentale

- Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*, 3rd ed., OTexts.
- Shumway, R.H., & Stoffer, D.S. (2017). *Time Series Analysis and Its Applications*, 4th ed., Springer.
- Brockwell, P.J., & Davis, R.A. (2016). *Introduction to Time Series and Forecasting*, 3rd ed., Springer.

Serii de timp financiare

- Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*, 3rd ed., Wiley.
- Franke, J., Härdle, W.K., & Hafner, C.M. (2019). *Statistics of Financial Markets*, 4th ed., Springer.

Bibliografie II

Abordari moderne si Machine Learning

- Nielsen, A. (2019). *Practical Time Series Analysis*, O'Reilly Media.
- Petropoulos, F., et al. (2022). *Forecasting: Theory and Practice*, International Journal of Forecasting.
- Makridakis, S., Spiliotis, E., & Assimakopoulos, V. (2020). The M4 Competition, International Journal of Forecasting.

Resurse online si cod

- **Quantlet**: `https://quantlet.com` — Repository de cod pentru statistica
- **Quantinar**: `https://quantinar.com` — Platforma de invatare metode cantitative
- **GitHub TSA**: `https://github.com/QuantLet/TSA/tree/main/TSA_ch2` — Cod Python pentru acest seminar