



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

# Capitolul 2: Modele ARMA

Seminar



# Cuprins Seminar

- 1 Test Grilă
- 2 Întrebări Adevărat/Fals
- 3 Exerciții de Calcul
- 4 Exerciții Python
- 5 Analiză pe Date Reale
- 6 Întrebări de Discuție
- 7 Rezumat

## Test 1: Operatorul Lag

### Întrebare

Care este rezultatul aplicării  $(1 - L)^2$  lui  $X_t$ ?

- A.  $X_t - X_{t-1}$
- B.  $X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$
- C.  $X_t + X_{t-1} + X_{t-2}$
- D.  $X_t - X_{t-2}$

*Răspunsul pe slide-ul următor...*

## Test 1: Soluție

Răspuns:  $B - X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$

Explicație:

$$\begin{aligned}(1 - L)^2 X_t &= (1 - 2L + L^2) X_t \\ &= X_t - 2LX_t + L^2 X_t \\ &= X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}\end{aligned}$$

Aceasta este **diferența de ordinul doi** a lui  $X_t$ .

**Notă:**  $(1 - L)$  este operatorul de diferențiere de ordinul întâi,  $(1 - L)^2$  este diferența de ordinul doi.

## Test 2: Staționaritatea AR(1)

### Întrebare

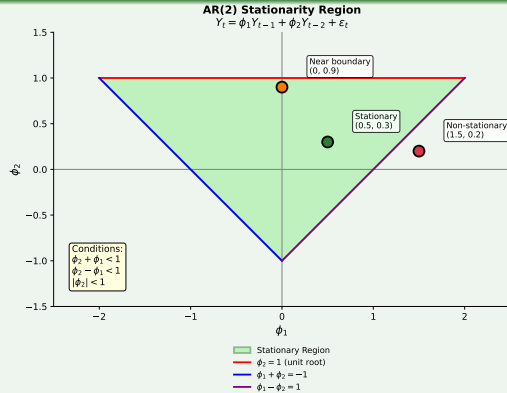
Pentru ce valoare a lui  $\phi$  procesul AR(1)  $X_t = 0.5 + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$  este staționar?

- A.  $\phi = 1.2$
- B.  $\phi = 1.0$
- C.  $\phi = -0.8$
- D.  $\phi = -1.5$

*Răspunsul pe slide-ul următor...*

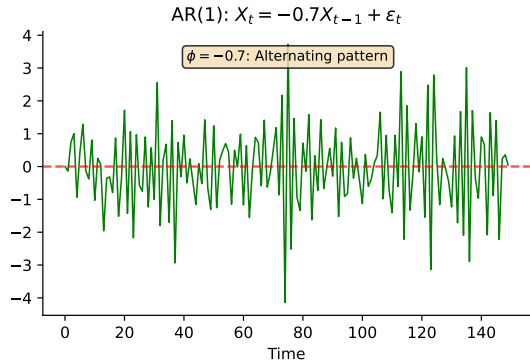
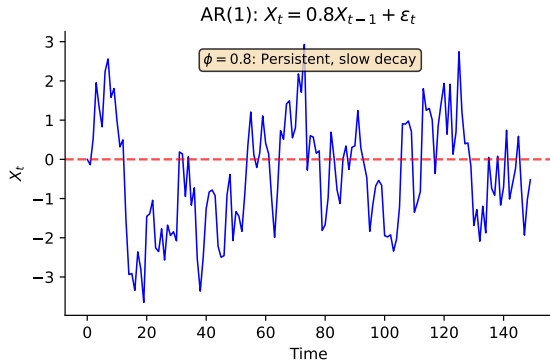
## Test 2: Soluție

Răspuns: C –  $\phi = -0.8$  (Staționar)



Staționaritate AR(1):  $|\phi| < 1$  (rădăcina în afara cercului unitate). Doar C satisface:  $|-0.8| = 0.8 < 1$

## Vizual: Comportamentul Procesului AR(1)



$\phi$  pozitiv: modele persistente, netede.  $\phi$  negativ: comportament oscilant în jurul mediei.

### Întrebare

Observați următorul model ACF: vârf semnificativ la lag 1, apoi toate celelalte lag-uri sunt în interiorul benzilor de încredere. PACF arată descreștere graduală. Ce model este sugerat?

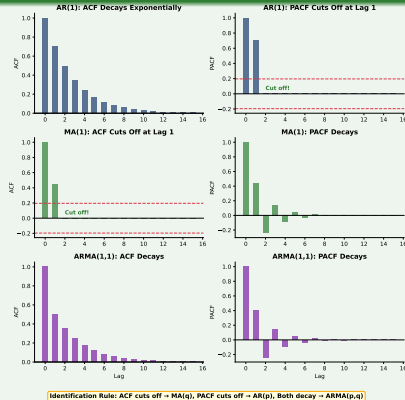
- A. AR(1)
- B. MA(1)
- C. ARMA(1,1)
- D. Zgomot alb

*Răspunsul pe slide-ul următor...*



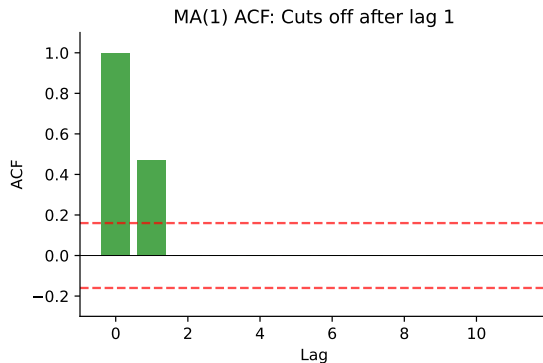
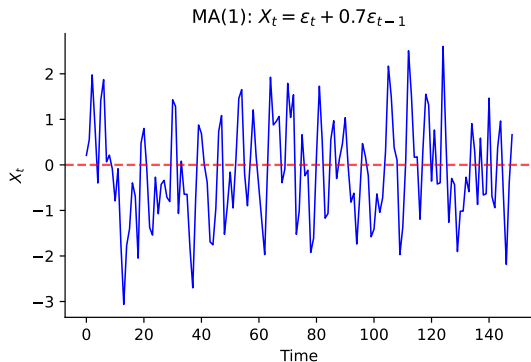
## Test 3: Soluție

Răspuns: B – MA(1)



Model: ACF se întrerupe după lag 1  $\Rightarrow$  MA(1); PACF descrește  $\Rightarrow$  confirmă structura MA (nu AR)

## Vizual: Procesul MA(1) și ACF



Procesul MA(1) (stânga). Semnătura cheie: ACF se întrerupe brusc după lag 1 (dreapta).

### Întrebare

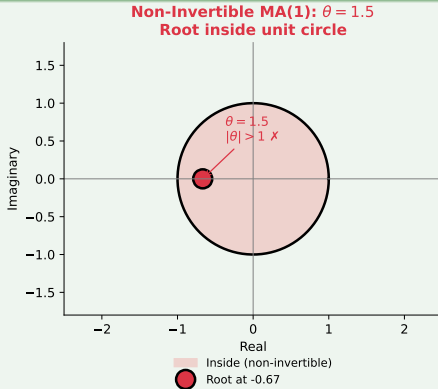
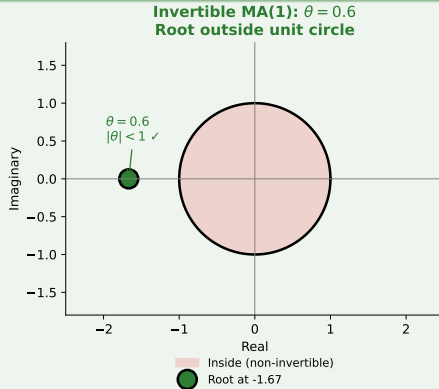
Pentru procesul MA(1)  $X_t = \varepsilon_t + 1.5\varepsilon_{t-1}$ , este procesul invertibil?

- ☐ A. Da, deoarece procesele MA sunt întotdeauna invertibile
- ☐ B. Da, deoarece  $1.5 > 0$
- ☐ C. Nu, deoarece  $|\theta| = 1.5 > 1$
- ☐ D. Nu, deoarece procesele MA nu sunt niciodată invertibile

*Răspunsul pe slide-ul următor...*

## Test 4: Soluție

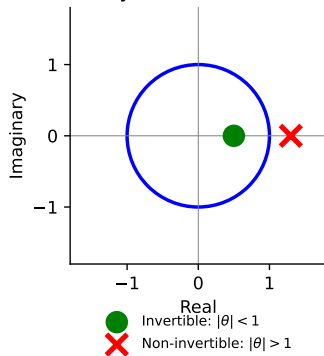
Răspuns: C – Nu este invertibil ( $|\theta| = 1.5 > 1$ )



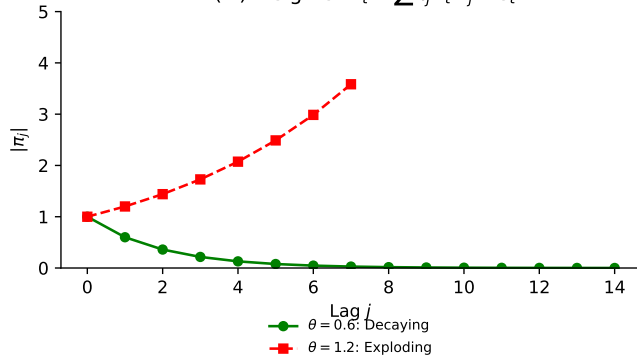
**Invertibilitate MA:** Rădăcina  $z = -1/\theta$  trebuie să fie în afara cercului unitate  $\Leftrightarrow |\theta| < 1$ . Aici  $z = -0.67$  este în interior!

## Vizual: Conceptul de Invertibilitate

Invertibility: Root outside unit circle



AR( $\infty$ ) weights:  $X_t = \sum \pi_j X_{t-j} + \varepsilon_t$



Stânga: invertibilitatea necesită rădăcini în afara cercului unitate. Dreapta: ponderile AR( $\infty$ ) descresc doar când  $|\theta| < 1$ .

### Întrebare

Forma compactă  $\phi(L)X_t = \theta(L)\varepsilon_t$  reprezintă ce model?

- ☐ A. Model AR pur
- ☐ B. Model MA pur
- ☐ C. Model ARMA
- ☐ D. Niciunul dintre cele de mai sus

*Răspunsul pe slide-ul următor...*

### Răspuns: C – Model ARMA

- $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p$  este polinomul AR
- $\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q$  este polinomul MA

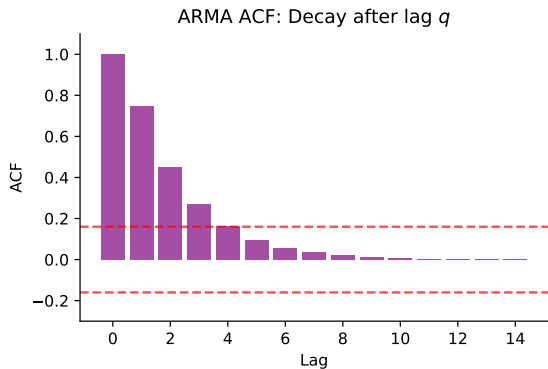
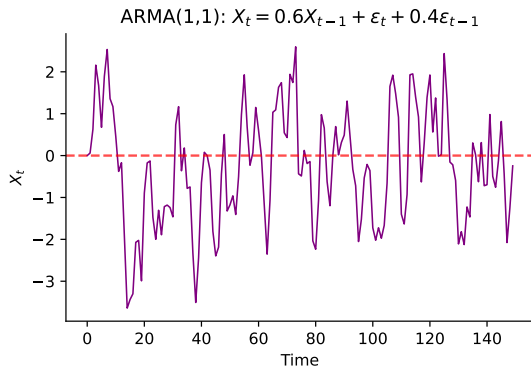
Ecuția  $\phi(L)X_t = \theta(L)\varepsilon_t$  se expandează la:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Acesta este modelul general **ARMA(p,q)**.

**Cazuri speciale:**  $\theta(L) = 1$  (fără MA): AR pur;  $\phi(L) = 1$  (fără AR): MA pur

## Vizual: Procesul ARMA



ARMA(1,1) combină componente AR și MA. ACF arată descreștere după lag-ul inițial.



### Întrebare

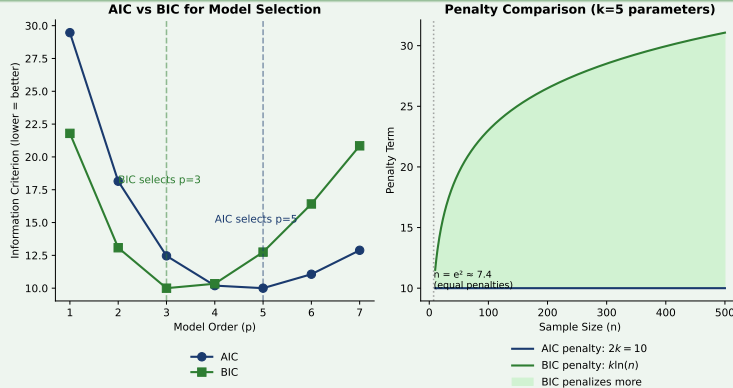
Când comparăm  $\text{ARMA}(1,1)$  și  $\text{ARMA}(2,1)$  folosind BIC, care afirmație este corectă?

- ☐ A. BIC mai mic înseamnă întotdeauna prognoze mai bune
- ☐ B. BIC penalizează complexitatea mai puțin decât AIC
- ☐ C. Modelul cu BIC mai mic este preferat
- ☐ D. BIC poate compara doar modele cu același număr de parametri

*Răspunsul pe slide-ul următor...*

## Test 6: Soluție

Răspuns: C – BIC mai mic este preferat



AIC:  $-2 \ln(\hat{L}) + 2k$     BIC:  $-2 \ln(\hat{L}) + k \ln(n)$     BIC penalizează complexitatea mai mult  $\Rightarrow$  modele mai simple

## Test 7: Testul Ljung-Box

### Întrebare

După ajustarea unui model ARMA(2,1), rulați testul Ljung-Box pe reziduuri și obțineți valoare- $p = 0.02$ . Ce concluzie trageți?

- ☐ A. Modelul este adecvat
- ☐ B. Reziduurile sunt zgomot alb
- ☐ C. Există autocorelație semnificativă în reziduuri
- ☐ D. Modelul are prea mulți parametri

*Răspunsul pe slide-ul următor...*

Răspuns: C – Există autocorelație semnificativă în reziduuri

Testul Ljung-Box are:

- $H_0$ : Reziduurile sunt zgomot alb (fără autocorelație)
- $H_1$ : Reziduurile au autocorelație semnificativă

Cu valoare- $p = 0.02 < 0.05$ :

- **Respingem  $H_0$**
- Concluzie: reziduurile **nu** sunt zgomot alb
- Modelul este **inadecvat** — structură semnificativă rămâne

**Pasul următor:** Încercați un model diferit (de exemplu, creșteți  $p$  sau  $q$ )

## Test 8: Prognoză

### Întrebare

Pentru un model AR(1) cu  $\phi = 0.6$  și medie  $\mu = 10$ , ce se întâmplă cu prognozele când orizontul  $h \rightarrow \infty$ ?

- ☐ A. Prognozele cresc fără limită
- ☐ B. Prognozele converg la 0
- ☐ C. Prognozele converg la  $\mu = 10$
- ☐ D. Prognozele oscilează pentru totdeauna

*Răspunsul pe slide-ul următor...*

## Test 8: Soluție

Răspuns: C – Prognozele converg la  $\mu = 10$

Pentru AR(1), prognoza la  $h$  pași înainte este:

$$\hat{X}_{n+h|n} = \mu + \phi^h(X_n - \mu)$$

Deoarece  $|\phi| = 0.6 < 1$ :

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \phi^h = 0$$

Prin urmare:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \hat{X}_{n+h|n} = \mu + 0 \cdot (X_n - \mu) = \mu = 10$$

**Observație cheie:** Prognozele pe termen lung din modele ARMA staționare converg întotdeauna la media necondiționată.

## Test 9: Rădăcinile AR(2)

### Întrebare

Un proces AR(2) are rădăcinile caracteristice  $z_1 = 0.8$  și  $z_2 = -0.5$ . Este staționar?

- ☐ A. Da, deoarece ambele rădăcini sunt în interiorul cercului unitate
- ☐ B. Nu, deoarece o rădăcină este negativă
- ☐ C. Nu, deoarece rădăcinile trebuie să fie în afara cercului unitate
- ☐ D. Nu se poate determina fără mai multe informații

*Răspunsul pe slide-ul următor...*

## Test 9: Soluție

Răspuns: C – Rădăcinile trebuie să fie în afara cercului unitate

Pentru staționaritatea AR, rădăcinile lui  $\phi(z) = 0$  trebuie să fie **în afara** cercului unitate, adică  $|z| > 1$ .

Aici:  $|z_1| = 0.8 < 1$  și  $|z_2| = 0.5 < 1$  – ambele **în interior** cercului unitate.

→ **Nestaționar** (de fapt exploziv)

**Notă:** Condiție echivalentă: coeficienții  $\phi_1, \phi_2$  trebuie să satisfacă triunghiul de staționaritate.



## Test 10: Proprietățile MA(q)

### Întrebare

Pentru un proces MA(2), ACF-ul:

- ☐ A. Descrește exponențial
- ☐ B. Se întrerupe după lag 2
- ☐ C. Se întrerupe după lag 1
- ☐ D. Nu se întrerupe niciodată

*Răspunsul pe slide-ul următor...*

Răspuns: B – Se întrerupe după lag 2

Pentru  $MA(q)$ , ACF-ul este exact zero pentru lag-uri  $> q$ .

- $MA(1)$ : ACF se întrerupe după lag 1
- $MA(2)$ : ACF se întrerupe după lag 2
- $MA(q)$ : ACF se întrerupe după lag  $q$

Aceasta este caracteristica cheie de identificare: întreruperea ACF  $\Rightarrow$  ordinul MA.  
Între timp, PACF-ul proceselor MA descrește (nu se întrerupe).

### Întrebare

De ce ar putea fi preferat  $\text{ARMA}(1,1)$  față de  $\text{AR}(5)$  chiar dacă ambele se potrivesc la fel de bine?

- ☐ A. Modelele ARMA sunt întotdeauna mai bune
- ☐ B. Mai puțini parametri reduc riscul de supraajustare
- ☐ C. Modelele AR nu pot captura trenduri
- ☐ D. Componentele MA sunt mai stabile

*Răspunsul pe slide-ul următor...*

Răspuns: B – Mai puțini parametri reduc riscul de supraajustare

**Principiul parsimoniei:** preferați modele mai simple.

- ARMA(1,1): 2 parametri ( $\phi_1, \theta_1$ )
- AR(5): 5 parametri ( $\phi_1, \dots, \phi_5$ )

Mai puțini parametri înseamnă:

- Risc mai mic de supraajustare
- Prognoze mai bune în afara eșantionului
- Model mai interpretabil

BIC penalizează complexitatea mai mult decât AIC, selectând adesea modele mai simple.

## Test 12: Diagnosticul Reziduurilor

### Întrebare

După ajustarea unui model ARMA, ACF-ul reziduurilor arată un vârf semnificativ la lag 5. Aceasta sugerează:

- A. Modelul este adecvat
- B. Modelul ar putea avea nevoie de termeni de ordin mai mare
- C. Reziduurile sunt zgomot alb
- D. Datele sunt nestaționare

*Răspunsul pe slide-ul următor...*

## Test 12: Soluție

Răspuns: B – Modelul ar putea avea nevoie de termeni de ordin mai mare

Reziduurile bune ar trebui să fie zgomot alb fără ACF semnificativ.

Un vârf semnificativ la lag 5 indică structură de autocorelație rămasă necaptată de model.

### Acțiuni:

- Luați în considerare adăugarea termenilor AR sau MA
- Verificați dacă componenta AR(5) sau MA(5) ajută
- Rulați din nou testul Ljung-Box după modificare

### Întrebare

Teorema descompunerii Wold afirmă că orice proces staționar poate fi scris ca:

- ☐ A. Un proces AR finit
- ☐ B. Un proces MA finit
- ☐ C. Un proces MA infinit plus o componentă deterministă
- ☐ D. Un proces ARIMA

*Răspunsul pe slide-ul următor...*

Răspuns: C – Un proces MA infinit plus o componentă deterministă

Teorema lui Wold: Orice proces staționar poate fi scris ca:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + \eta_t$$

unde  $\eta_t$  este deterministic și  $\sum \psi_j^2 < \infty$ .

**Implicație:** MA( $\infty$ ) este reprezentarea cea mai generală. Modelele ARMA sunt aproximări eficiente ale acestui MA infinit.



## Test 14: Rădăcină Unitară vs Trend Staționar

### Întrebare

Cum faceți un proces cu rădăcină unitară să devină staționar?

- A. Scădeți un trend liniar
- B. Luați diferențe de ordinul întâi
- C. Aplicați media mobilă
- D. Folosiți ajustare sezonieră

*Răspunsul pe slide-ul următor...*

## Test 14: Soluție

Răspuns: B – Luați diferențe de ordinul întâi

- **Rădăcină unitară** (trend stochastic): Folosiți **diferențierea**
- **Trend staționar** (trend determinist): Folosiți **regresia** pentru eliminarea trendului

Pentru mersul aleatoriu  $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$ :

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = \varepsilon_t$$

care este zgomot alb staționar.

### Întrebare

Determinați dacă fiecare afirmație este Adevărată sau Falsă:

- 1 Un proces  $AR(2)$  poate prezenta comportament pseudo-ciclic.
- 2 Procesele MA necesită o condiție de staționaritate.
- 3 PACF-ul unui proces  $AR(p)$  se întrerupe după lag  $p$ .
- 4 Dacă AIC selectează  $ARMA(2,1)$  și BIC selectează  $ARMA(1,1)$ , nu pot fi ambele corecte.
- 5 Intervalele de încredere ale prognozei se îngustează pe măsură ce orizontul de prognoză crește.
- 6 Ecuațiile Yule-Walker pot fi folosite pentru a estima parametrii MA.

*Răspunsul pe slide-ul următor...*

### Răspunsuri

- ❶ **ADEVĂRAT**: AR(2) cu rădăcini complexe arată oscilații amortizate
- ❷ **FALS**: Procesele MA sunt întotdeauna staționare; au nevoie de condiția de *invertibilitate*
- ❸ **ADEVĂRAT**: Aceasta este caracteristica cheie de identificare a AR(p)
- ❹ **FALS**: Ambele pot fi „corecte” — optimizează criterii diferite (AIC favorizează potrivirea, BIC favorizează parsimonia)
- ❺ **FALS**: Intervalele de încredere se *lărgesc* pe măsură ce orizontul crește (mai multă incertitudine)
- ❻ **FALS**: Yule-Walker este doar pentru modele AR; MA folosește MLE

## Exercițiu 1: Proprietățile AR(1)

**Problemă:** Considerați procesul AR(1):

$$X_t = 2 + 0.7X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, 9)$$

Calculați:

- ❶ Media  $\mu$
- ❷ Varianța  $\gamma(0)$
- ❸ Autocovarianța  $\gamma(1)$  și  $\gamma(2)$
- ❹ Autocorelația  $\rho(1)$  și  $\rho(2)$

## Exercițiu 1: Soluție

Dat:  $c = 2$ ,  $\phi = 0.7$ ,  $\sigma^2 = 9$

1. Media:

$$\mu = \frac{c}{1 - \phi} = \frac{2}{1 - 0.7} = \frac{2}{0.3} = 6.67$$

2. Variația:

$$\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2} = \frac{9}{1 - 0.49} = \frac{9}{0.51} = 17.65$$

3. Autocovarianța:

$$\gamma(1) = \phi \cdot \gamma(0) = 0.7 \times 17.65 = 12.35$$

$$\gamma(2) = \phi^2 \cdot \gamma(0) = 0.49 \times 17.65 = 8.65$$

4. Autocorelația:

$$\rho(1) = \phi = 0.7, \quad \rho(2) = \phi^2 = 0.49$$

## Exercițiu 2: Proprietățile MA(1)

**Problemă:** Considerați procesul MA(1):

$$X_t = 5 + \varepsilon_t - 0.4\varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, 4)$$

Calculați:

- ❶ Media  $\mu$
- ❷ Varianța  $\gamma(0)$
- ❸ Autocovarianța  $\gamma(1)$
- ❹ Autocorelația  $\rho(1)$
- ❺ Este acest proces invertibil?

## Exercițiu 2: Soluție

Dat:  $\mu = 5$ ,  $\theta = -0.4$ ,  $\sigma^2 = 4$

1. Media:

$$\mathbb{E}[X_t] = \mu = 5$$

2. Variația:

$$\gamma(0) = \sigma^2(1 + \theta^2) = 4(1 + 0.16) = 4 \times 1.16 = 4.64$$

3. Autocovarianța la lag 1:

$$\gamma(1) = \theta\sigma^2 = -0.4 \times 4 = -1.6$$

4. Autocorelația:

$$\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{-1.6}{4.64} = -0.345$$

5. Invertibilitate:  $|\theta| = 0.4 < 1 \rightarrow$  **Da, invertibil**



## Exercițiu 3: Rădăcinile Caracteristice

**Problemă:** Considerați procesul AR(2):

$$X_t = 0.5X_{t-1} + 0.3X_{t-2} + \varepsilon_t$$

- 1 Scrieți ecuația caracteristică
- 2 Găsiți rădăcinile caracteristice
- 3 Este acest proces staționar?

## Exercițiu 3: Soluție

### 1. Ecuația caracteristică:

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 = 1 - 0.5z - 0.3z^2 = 0$$

Sau:  $0.3z^2 + 0.5z - 1 = 0$

### 2. Rădăcinile (folosind formula quadratică):

$$z = \frac{-0.5 \pm \sqrt{0.25 + 1.2}}{0.6} = \frac{-0.5 \pm 1.204}{0.6}$$

$$z_1 = \frac{0.704}{0.6} = 1.17, \quad z_2 = \frac{-1.704}{0.6} = -2.84$$

### 3. Verificarea staționarității:

Ambele rădăcini au  $|z| > 1$ :  $|z_1| = 1.17 > 1$  și  $|z_2| = 2.84 > 1$

→ **Staționar** (rădăcini în afara cercului unitate)

## Exercițiu 4: Prognoză

**Problemă:** Ați ajustat un model AR(1):

$$X_t = 3 + 0.8X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \sigma^2 = 4$$

Dat  $X_{100} = 20$ , calculați:

- ❶ Prognoza la 1 pas înainte  $\hat{X}_{101|100}$
- ❷ Prognoza la 2 pași înainte  $\hat{X}_{102|100}$
- ❸ Prognoza pe termen lung  $\hat{X}_{100+h|100}$  când  $h \rightarrow \infty$
- ❹ Intervalul de încredere de 95% pentru  $\hat{X}_{101|100}$

## Exercițiu 4: Soluție

Dat:  $c = 3$ ,  $\phi = 0.8$ ,  $\sigma^2 = 4$ ,  $X_{100} = 20$

Media:  $\mu = \frac{3}{1-0.8} = 15$

1. Prognoza la un pas:

$$\hat{X}_{101|100} = c + \phi X_{100} = 3 + 0.8 \times 20 = 19$$

2. Prognoza la doi pași:

$$\hat{X}_{102|100} = c + \phi \hat{X}_{101|100} = 3 + 0.8 \times 19 = 18.2$$

3. Prognoza pe termen lung:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \hat{X}_{100+h|100} = \mu = 15$$

4. IC 95% pentru 1 pas:

$$\text{MSFE}(1) = \sigma^2 = 4, \quad \sqrt{\text{MSFE}(1)} = 2$$

$$IC : 19 \pm 1.96 \times 2 = [15.08, 22.92]$$

# Exercițiu Python 1: Simulare și Ajustare AR(1)

## Sarcină:

- 1 Simulați 500 de observații dintr-un AR(1) cu  $\phi = 0.7$
- 2 Reprezentați grafic seria și ACF/PACF
- 3 Ajustați un model AR(1) și verificați dacă  $\hat{\phi} \approx 0.7$
- 4 Examinați diagnosticele reziduurilor

## Cod indiciu:

```
np.random.seed(42)
n = 500
phi = 0.7
x = np.zeros(n)
for t in range(1, n):
    x[t] = phi * x[t-1] + np.random.randn()
```

## Exercițiu Python 2: Selectarea Modelului

### Sarcină:

- 1 Încărcați o serie de timp reală (de exemplu, randamente de acțiuni)
- 2 Verificați staționaritatea folosind testul ADF
- 3 Comparați AIC/BIC pentru ARMA(1,0), ARMA(0,1), ARMA(1,1), ARMA(2,1)
- 4 Selectați cel mai bun model
- 5 Generați prognoze cu intervale de încredere

### Funcții cheie:

- `adfuller()` pentru testul de staționaritate
- `ARIMA(data, order=(p,0,q)).fit()` pentru ajustare
- `results.aic`, `results.bic` pentru criterii
- `results.get_forecast(h)` pentru predicții

## Exercițiu Python 3: Verificarea Diagnosticelor

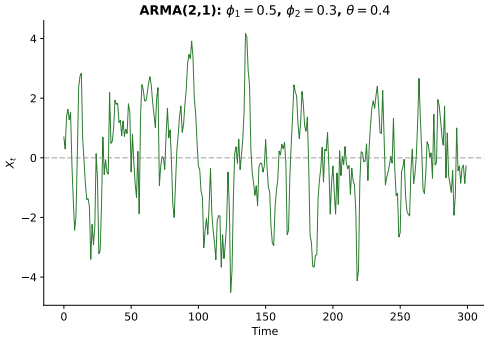
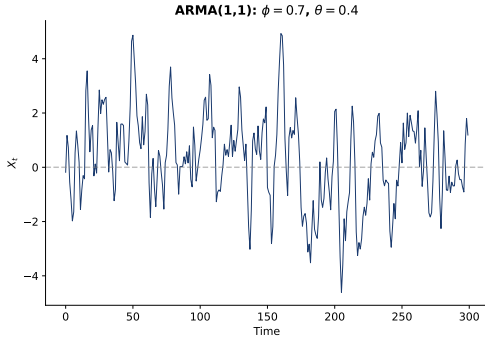
**Sarcină:** După ajustarea unui model, efectuați diagnostice complete:

- 1 Reprezentați grafic reziduurile în timp
- 2 Reprezentați grafic ACF-ul reziduurilor
- 3 Creați graficul Q-Q
- 4 Rulați testul Ljung-Box
- 5 Verificați dacă rădăcinile AR/MA sunt în afara cercului unitate

**Funcții cheie:**

- `results.resid` pentru reziduuri
- `plot_acf(resid)` pentru graficul ACF
- `stats.probplot(resid)` pentru graficul Q-Q
- `acorr_ljungbox(resid)` pentru testul portmanteau
- `results.arroots`, `results.maroots` pentru rădăcini

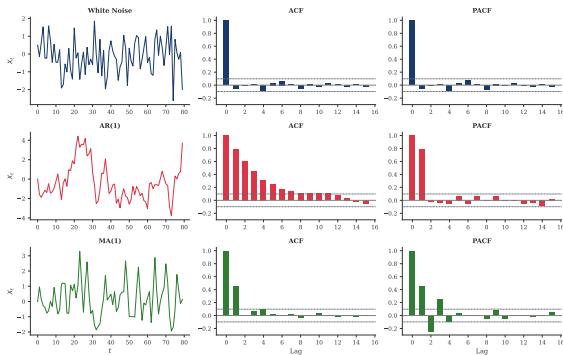
# Studiu de Caz: Indicele Producției Industriale



- Producția industrială SUA: date lunare, deja staționare (rate de creștere)
- Arată modele ARMA tipice: revenire la medie cu dependență pe termen scurt
- Gruparea volatilității vizibilă – ARMA captează media condiționată
- Potrivit pentru modelarea ARMA fără diferențiere



# Recunoașterea Modelului ACF/PACF



- ACF arată descreștere graduală – sugerează componentă AR
- PACF se întrerupe după lag 2 – sugerează că AR(2) ar putea fi potrivit
- Unele lag-uri semnificative în ACF dincolo de lag 2 – termenii MA ar putea ajuta
- Model consistent cu ARMA(2,1) sau modele similare de ordin mic

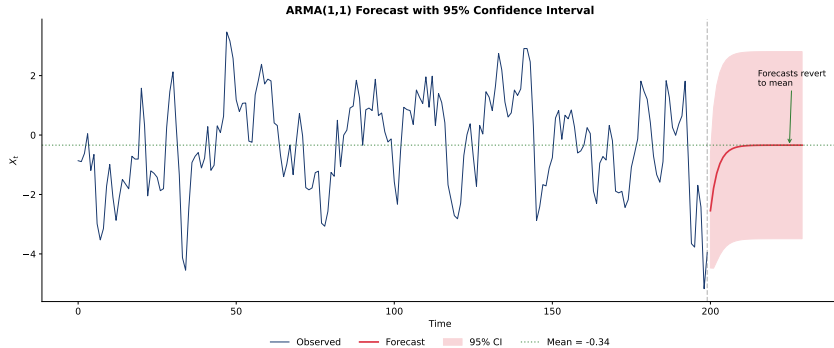
Model: ARMA(2,1) pentru Creșterea Producției Industriale

Parametru	Estimat	Eroare Std.	z-stat	valoare-p
$c$ (const)	0.156	0.048	3.25	0.001
$\phi_1$ (AR.L1)	0.423	0.089	4.75	< 0.001
$\phi_2$ (AR.L2)	0.187	0.072	2.60	0.009
$\theta_1$ (MA.L1)	-0.156	0.091	-1.71	0.087

### Selecția Modelului

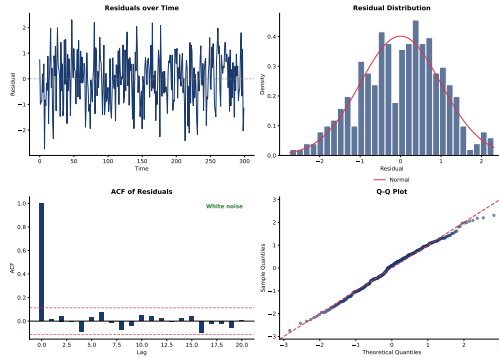
AIC: -412.5, BIC: -398.2. Modelul trece verificările de staționaritate și invertibilitate.

# Performanța Prognozei



- Prognozele ARMA revin la media necondiționată
- Prognozele pe termen scurt captează dinamica recentă
- Intervalele de încredere se extind cu orizontul de prognoză
- Compararea cu prognoza naivă arată îmbunătățirea ARMA

# Diagnosticale Modelului



- Reziduurile par aleatoare fără modele sistematice
- ACF-ul reziduurilor în limitele de încredere
- Graficul Q-Q arată normalitate aproximativă
- Testul Ljung-Box:  $p > 0.05$  – fără autocorelație semnificativă în reziduuri

## Discuție 1: Selecția Modelului

**Scenariu:** Modelați rate de inflație lunare. După verificarea staționarității (trecută), găsiți:

- ACF: semnificativ la lag-urile 1, 2, 3, apoi descrește
- PACF: semnificativ la lag-urile 1, 2, apoi se întrerupe
- AIC selectează ARMA(2,3)
- BIC selectează ARMA(2,0) = AR(2)

**Întrebări:**

- 1 Ce sugerează modelul ACF/PACF?
- 2 De ce nu sunt de acord AIC și BIC?
- 3 Ce model ați alege și de ce?
- 4 Ce verificări suplimentare ați efectua?

## Discuție 2: Evaluarea Prognozei

**Scenariu:** Ajustați un model ARMA(1,1) pe randamente zilnice de acțiuni. Ajustarea în eșantion arată bine (valoare-p Ljung-Box = 0.45), dar RMSE în afara eșantionului este mai rău decât o prognoză simplă de mers aleatoriu.

### Întrebări:

- 1 Este aceasta surprinzător? De ce sau de ce nu?
- 2 Ce ne spune aceasta despre predictibilitatea randamentelor de acțiuni?
- 3 Ar trebui să concluzionați că modelul ARMA este inutil?
- 4 Ce alternative ați putea considera?

**Indiciu:** Gândiți-vă la Ipoteza Pieței Eficiente și la ce captează ARMA vs ce nu captează (de exemplu, gruparea volatilității).

## Discuție 3: Aplicație în Lumea Reală

**Scenariu:** Un economist de la banca centrală vă cere să prognozați creșterea trimestrială a PIB-ului pentru planificarea politicii.

### Întrebări:

- ❶ Ce analiză preliminară ați face înainte de a ajusta ARMA?
- ❷ PIB-ul este adesea nestaționar — cum ați gestiona aceasta?
- ❸ Ați folosi AIC sau BIC pentru selecția modelului? De ce?
- ❹ Cum ați comunica incertitudinea prognozei factorilor de decizie?
- ❺ Ce limitări ale modelelor ARMA ar trebui să menționați?

## Concluzii Cheie din Seminarul de Astăzi

- ❶ **Modele AR:** Valoarea curentă depinde de valorile trecute
  - Staționaritate:  $|\phi| < 1$  pentru AR(1)
  - PACF se întrerupe la lag  $p$
- ❷ **Modele MA:** Valoarea curentă depinde de șocurile trecute
  - Întotdeauna staționare; invertibilitate:  $|\theta| < 1$  pentru MA(1)
  - ACF se întrerupe la lag  $q$
- ❸ **Selecția modelului:** Folosiți modelele ACF/PACF + criterii informaționale
- ❹ **Diagnostic:** Reziduurile trebuie să fie zgomot alb (testul Ljung-Box)
- ❺ **Prognoză:** Prognozele punctuale converg la medie; incertitudinea crește

Următorul Seminar: ARIMA și Modele Sezoniere



# Referințe



Box, G.E.P., Jenkins, G.M., Reinsel, G.C., & Ljung, G.M. (2015). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. 5th ed., Wiley.



Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.



Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*. 3rd ed., OTexts.



Brockwell, P.J., & Davis, R.A. (2016). *Introduction to Time Series and Forecasting*. 3rd ed., Springer.

## Instrumente Software:

- `statsmodels` – Modele ARIMA pentru Python
- `pmdarima` – Selecție automată ARIMA
- `pandas` – Manipulare date serii de timp
- `matplotlib` – Vizualizare

## Date și Exemple:

- Procese AR, MA și ARMA simulate
- Exemple bazate pe Hyndman & Athanasopoulos (2021)

# Vă mulțumesc!

Întrebări?