



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 2: Modele ARMA



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

Obiective de învățare

La finalul acestui capitol, veți fi capabili să:

1. **Definiți** și simulați procese $AR(p)$, $MA(q)$ și $ARMA(p, q)$
2. **Verificați** condițiile de staționaritate și invertibilitate
3. **Identificați** ordinele p și q prin analiza ACF/PACF
4. **Estimați** parametrii prin Yule-Walker, MLE și criterii informaționale (AIC, BIC)
5. **Diagnosticați** modelul prin analiza reziduurilor și testul Ljung-Box
6. **Prognozați** folosind modele ARMA cu intervale de încredere
7. **Aplicați** metodologia Box-Jenkins pe date reale (pete solare)

Surse de date și instrumente software

Surse de date

- ▣ **Yahoo Finance**
 - ▶ Prețuri acțiuni, criptomonede, valute
- ▣ **FRED (Federal Reserve)**
 - ▶ PIB, șomaj, rate dobânzi
- ▣ **Seturi clasice**
 - ▶ Sunspots, AirPassengers, CO₂
- ▣ **Statsmodels datasets**
 - ▶ Serie pete solare, Nile, Lynx

Python

- ▣ `statsmodels` — modele ARMA/ARIMA
- ▣ `pmdarima` — selecție automată
- ▣ `pandas` — manipulare date
- ▣ `matplotlib` — vizualizare
- ▣ `scipy` — optimizare, teste

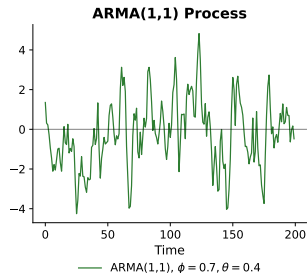
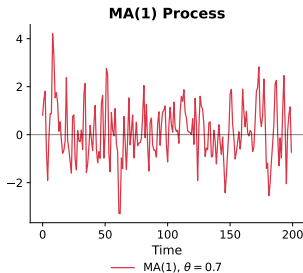
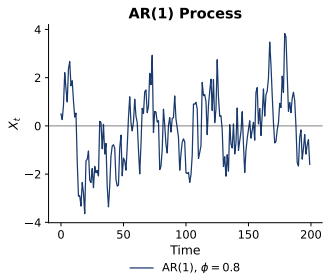
R

- ▣ `forecast` — `auto.arima`, Arima
- ▣ `tseries` — teste serii de timp
- ▣ `lmtest` — teste diagnostic
- ▣ `astsa` — exemple și date

Structura capitolului

De ce modele ARMA?

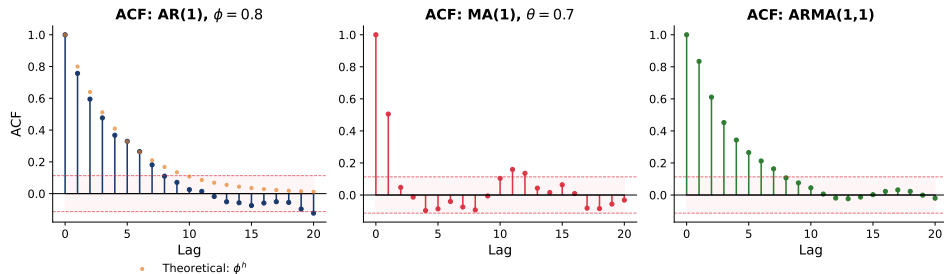
Stationary processes: AR, MA and ARMA



- ▣ **Procese AR:** Valoarea curentă depinde de valorile trecute \succ comportament de revenire la medie
- ▣ **Procese MA:** Valoarea curentă depinde de șocurile trecute \succ memorie scurtă
- ▣ **ARMA:** Combină ambele mecanisme pentru modelare flexibilă

Identificarea modelului prin tipare ACF

Distinct ACF patterns for different models



ACF reflectă structura modelului

- **Tipare distincte:** AR: descreștere exponențială; MA: anulare bruscă; ARMA: descreștere mixtă
- **Identificare:** Analiza vizuală a ACF/PACF ghidează selecția ordinelor p și q

Recapitulare: Staționaritatea

Din capitolul 1

- Un proces $\{X_t\}$ este **slab staționar** dacă:
 1. $\mathbb{E}[X_t] = \mu$ (medie constantă)
 2. $\text{Var}(X_t) = \sigma^2 < \infty$ (varianță constantă, finită)
 3. $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$ (covarianța depinde doar de lag-ul h)

De ce contează staționaritatea pentru ARMA

- Modelele ARMA presupun staționaritate – parametrii rămân stabili în timp, structura de autocorelație se menține
- Date nestaționare \succ diferențiați mai întâi (ARIMA, Cap. 3)

Obiectivul capitolului

- Modele parametrice pentru serii staționare \succ combinând dependența de observațiile anterioare (AR) cu influența șocurilor aleatoare (MA)

Operatorul lag (operatorul de întârziere)

Definiție 1 (Operatorul lag)

- **Operatorul lag** L (sau operatorul de întârziere B) deplasează o serie de timp înapoi cu o perioadă:
 $LX_t = X_{t-1}$

Proprietăți

- $L^k X_t = X_{t-k}$ (deplasare înapoi cu k perioade)
- $L^0 X_t = X_t$ (identitate)
- $(1 - L)X_t = X_t - X_{t-1} = \Delta X_t$ (prima diferență)
- $(1 - L)^d X_t = \Delta^d X_t$ (diferența de ordin d)

Polinoame lag

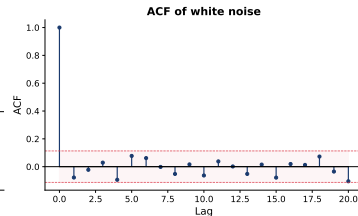
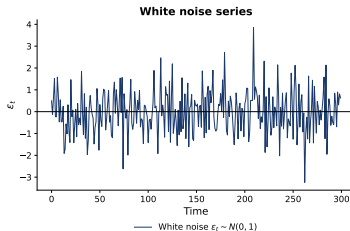
- **Polinom AR:** $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p$
- **Polinom MA:** $\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q$

Zgomot alb: ilustrare vizuală

Caracteristici cheie

- **Sus:** Fluctuații aleatorii, fără tipare, varianță constantă
- **Jos:** ACF doar un vârf la lag 0; celelalte în limitele de semnificație \succ fără dependență liniară

 TSA_ch2_white_noise



Procesul de zgomot alb

Definiție 2 (Zgomot Alb)

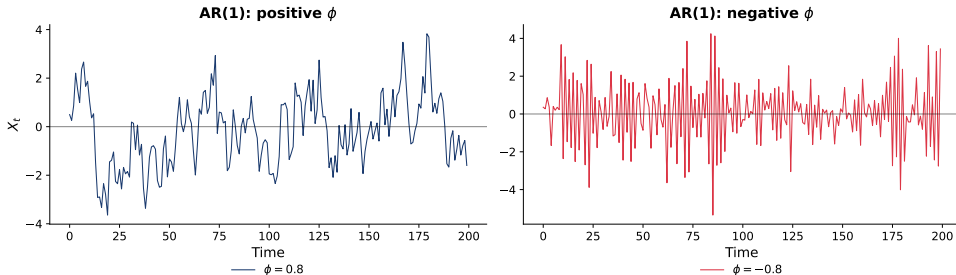
- Un proces $\{\varepsilon_t\}$ este **zgomot alb**, notat $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, dacă:
 1. $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$ pentru toți t
 2. $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$ pentru toți t
 3. $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ pentru toți $t \neq s$

Proprietăți

- **Element de bază:** Zgomotul alb stă la baza tuturor modelelor ARMA
- **ACF:** $\rho(0) = 1$, $\rho(h) = 0$ pentru $h \neq 0$; PACF: același tipar
- **Zgomot alb Gaussian:** $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ i.i.d.
- **Nepredictibil:** Zgomotul alb *nu* este predictibil \succ este pur aleatoriu

AR(1): ilustrație vizuală

AR(1): different behavior for positive vs negative ϕ



Interpretarea vizuală

- ϕ **pozitiv**: Fluctuații persistente, revenire graduală la medie
- ϕ **negativ**: Comportament oscilant, alternând în jurul mediei
- $|\phi|$ mai mare \curvearrowright persistență mai mare, revenire mai lentă

Modelul AR(1): definiție

Definiție 3 (Proces AR(1))

- Un **proces autoregresiv de ordin 1** este: $X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$
- $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ și $|\phi| < 1$ pentru staționaritate

Interpretare

- c : constantă (interceptul)
- ϕ : coeficient autoregresiv
 - ▶ Măsoară persistența seriei
- ε_t : inovație (șoc)

Notăție cu operatorul lag

- $(1 - \phi L)X_t = c + \varepsilon_t$
- $\phi(L)X_t = c + \varepsilon_t$
- $\phi(L) = 1 - \phi L$

Condiția de staționaritate AR(1)

Condiție necesară și suficientă: $|\phi| < 1$

- ▣ Rădăcina ecuației caracteristice trebuie să fie în afara cercului unitate

Nestaționar ($|\phi| \geq 1$)

- ▣ $|\phi| = 1$: mers aleatoriu
 - ▶ Rădăcină unitate, varianță $\rightarrow \infty$
- ▣ $|\phi| > 1$: proces exploziv

Ecuația caracteristică

- ▣ $\phi(z) = 1 - \phi z = 0 \implies z = 1/\phi$
- ▣ Staționaritate \Leftrightarrow rădăcina în afara cercului unitate ($|z| > 1$)

Proprietățile AR(1)

AR(1) staționar cu $|\phi| < 1$

▣ Proprietățile momentelor:

Media: $\mu = \mathbb{E}[X_t] = \frac{c}{1-\phi}$

Varianța: $\gamma(0) = \text{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$

Autocovarianța: $\gamma(h) = \frac{\phi^h \sigma^2}{1-\phi^2}$

Autocorelația (ACF): $\rho(h) = \phi^h$

Observație cheie

▣ **Semnătura AR(1):** ACF scade exponențial cu factorul ϕ

- ▶ $\phi > 0$: descreștere monotonă spre zero
- ▶ $\phi < 0$: oscilații amortizate (semne alternante)

Demonstrație: media AR(1)

Afirmație

- Pentru AR(1): $X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$, media este $\mu = \frac{c}{1-\phi}$

Demonstrație

- Luăm speranța ambelor părți: $\mathbb{E}[X_t] = c + \phi \mathbb{E}[X_{t-1}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t]$
- Prin staționaritate, $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_{t-1}] = \mu$, și $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$: $\mu = c + \phi \mu$
- Rezolvând: $\mu - \phi \mu = c \implies \mu(1 - \phi) = c \implies \boxed{\mu = \frac{c}{1 - \phi}}$

Cerință

- **Condiție necesară:** $\phi \neq 1$ pentru ca media să fie definită
 - ▶ Dacă $\phi = 1$ (rădăcină unitară), media este nedefinită
 - ▶ Procesul devine mers aleatoriu (nestaționaritate)

Demonstrație: varianța AR(1)

Afirmație

$$\square \text{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$$

Demonstrație

\square Presupunem $c = 0$. Luăm varianța din $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$:

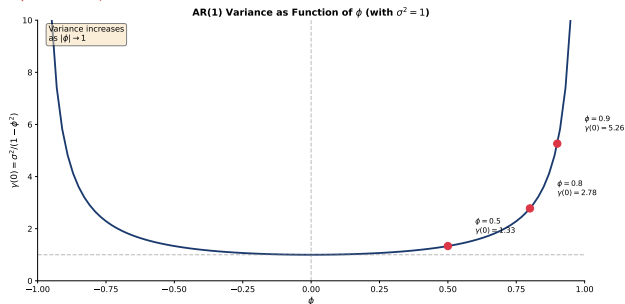
$$\square \text{Var}(X_t) = \phi^2 \text{Var}(X_{t-1}) + \text{Var}(\varepsilon_t) + 2\phi \underbrace{\text{Cov}(X_{t-1}, \varepsilon_t)}_{=0}$$

\square Prin staționaritate, $\text{Var}(X_t) = \text{Var}(X_{t-1}) = \gamma(0)$:

$$\square \gamma(0) = \phi^2 \gamma(0) + \sigma^2 \implies \gamma(0)(1 - \phi^2) = \sigma^2 \implies \boxed{\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}}$$

Notă

\square Necesită $|\phi| < 1$ pentru varianță pozitivă. Când $|\phi| \rightarrow 1$, varianța $\rightarrow \infty$

Varianța AR(1) ca funcție de ϕ 

Observații

- Pe măsură ce $|\phi| \rightarrow 1$, varianța explodează \succ nestăționaritate
- Pentru $\phi = 0$: $\gamma(0) = \sigma^2$ (zgomot alb); varianța crește monoton cu $|\phi|$

Demonstrație: funcția de autocorelație AR(1)

Afirmație: $\rho(h) = \phi^h$ pentru $h \geq 0$

▣ Găsim autocovarianța $\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t-h})$

Demonstrație

▣ Înmulțim $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$ cu X_{t-h} și luăm media:

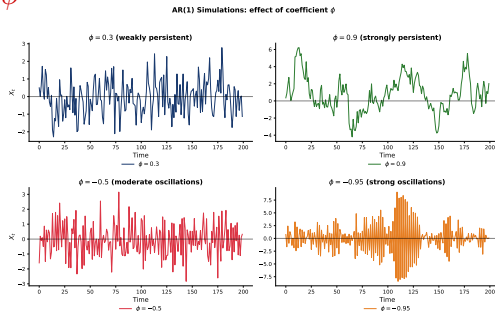
▣ $\mathbb{E}[X_t X_{t-h}] = \phi \mathbb{E}[X_{t-1} X_{t-h}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-h}]$

▣ Pentru $h \geq 1$: $\mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-h}] = 0 \succ \gamma(h) = \phi \gamma(h-1)$

▣ Relație recursivă de la $\gamma(0)$: $\gamma(1) = \phi \gamma(0)$, $\gamma(2) = \phi^2 \gamma(0)$, ... $\gamma(h) = \phi^h \gamma(0)$

▣ ACF: $\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \frac{\phi^h \gamma(0)}{\gamma(0)} = \boxed{\phi^h}$

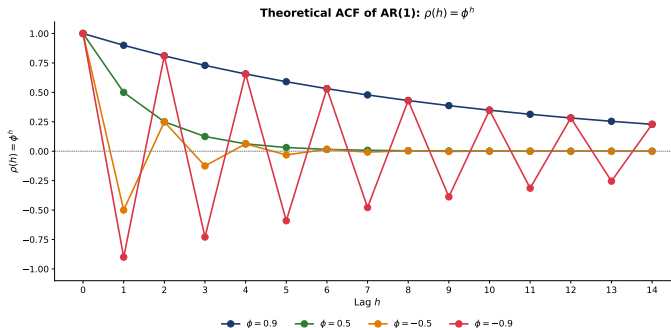
Simulări AR(1): efectul lui ϕ



Interpretare

- ▣ Valori diferite ale lui ϕ produc comportamente distincte: $|\phi|$ mai mare \succ mai multă persistență
- ▣ ϕ pozitiv creează evoluții netede; ϕ negativ creează oscilații
- ▣ Pe măsură ce $|\phi| \rightarrow 1$, procesul se apropie de nestăționaritate

ACF teoretic AR(1)

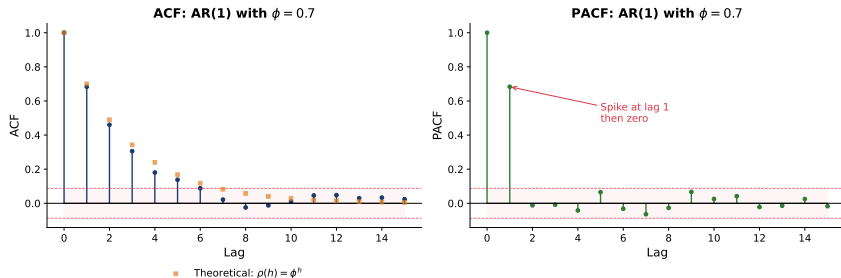


Tipar ACF

- **Formula:** $\rho(h) = \phi^h$ \succ descreștere exponențială
- $\phi > 0$: descreștere monotonă; $\phi < 0$: semne alternante

ACF și PACF AR(1): teorie vs eșantion

ACF and PACF for AR(1): theory vs sample



Interpretare

- **ACF:** Descreștere exponențială cu factorul ϕ ; formula: $\rho(h) = \phi^h$
- **PACF:** Un singur vârf la lag 1, apoi se anulează \succ identifică AR(1)
- Estimările din eșantion fluctuează în jurul valorilor teoretice

Demonstrație: condiția de staționaritate AR(1)

Afirmație

- AR(1) este staționar dacă și numai dacă $|\phi| < 1$

Demonstrație

- Substituție recursivă: $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t = \phi(\phi X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \dots$
- După n pași: $X_t = \phi^n X_{t-n} + \sum_{j=0}^{n-1} \phi^j \varepsilon_{t-j}$
- Dacă $|\phi| < 1$: $\phi^n \rightarrow 0$ când $n \rightarrow \infty$, deci $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}$
- Varianță finită: $\text{Var}(X_t) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j} = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} < \infty$ (serie geometrică)

Concluzie

- Converge $\iff |\phi| < 1$. Pentru $|\phi| \geq 1$, termenul $\phi^n X_{t-n}$ nu dispare \Rightarrow varianță infinită

Funcția de autocorelație parțială (PACF)

Definiție 4 (PACF)

- ▣ **Autocorelația parțială** de ordin k , notată π_k , măsoară corelația dintre X_t și X_{t-k} **după eliminarea** efectelor liniare ale variabilelor intermediare $X_{t-1}, \dots, X_{t-k+1}$

Definiție formală

- ▣ $\pi_1 = \rho(1)$
- ▣ Pentru $k \geq 2$: π_k este ultimul coeficient din:
$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \dots + \alpha_k X_{t-k} + e_t$$
- ▣ $\pi_k = \alpha_k$ (coeficientul lui X_{t-k})

Calculul prin Yule-Walker

- ▣ Se rezolvă ecuațiile Yule-Walker de ordin k
- ▣ $\pi_k =$ ultimul element al vectorului soluție

Utilitate

- ▣ **Identificare:** PACF determină ordinul p al unui model AR
 - ▶ PACF se anulează după lag p

Tipare ACF și PACF AR(1)

ACF al AR(1)

- ▣ Scade exponențial: $\rho(h) = \phi^h$
 - ▶ $\phi > 0$: toate pozitive
 - ▶ $\phi < 0$: semne alternante

PACF al AR(1)

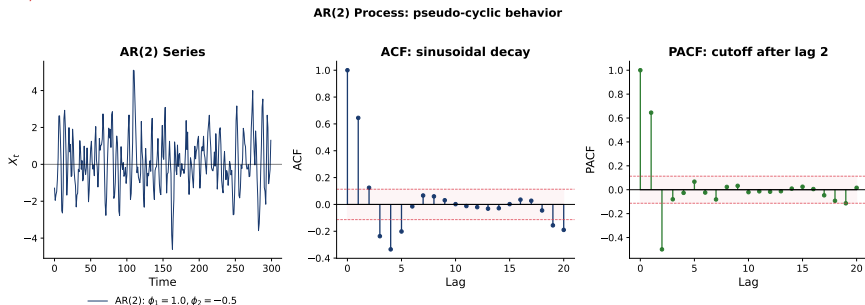
- ▣ Se anulează după lag 1
 - ▶ $\pi_1 = \phi, \pi_k = 0$ pentru $k > 1$

	ACF	PACF
AR(1)	Descreștere exponențială	Se anulează la lag 1

Tipar cheie

- ▣ Acesta este tiparul cheie de identificare pentru AR(1)!

AR(p): ilustrație vizuală



Observații

- AR(2) poate prezenta comportament pseudo-ciclic (rădăcini complexe); ACF sinusoidală amortizată
- PACF se anulează după lag 2 \succ tiparul cheie de identificare

Modelul AR(p): forma generală

Definiție 5 (Proces AR(p))

- ▣ Un **proces autoregresiv de ordin p** este: $X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$
- ▣ **Operator lag**: $\phi(L)X_t = c + \varepsilon_t$, unde $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p$

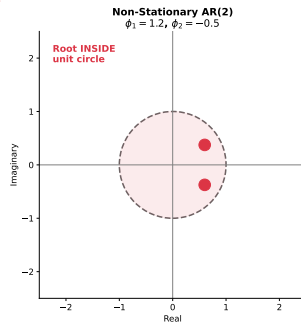
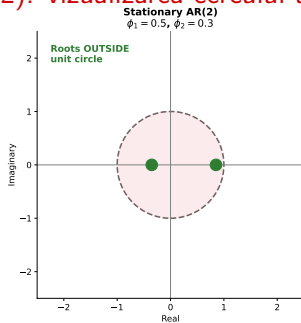
Condiție de staționaritate

- ▣ Toate rădăcinile lui $\phi(z) = 0$ trebuie să se afle **în afara** cercului unitate
- ▣ Echivalent: toate rădăcinile au modul > 1

Tiparul PACF

- ▣ PACF se anulează după lag p
- ▣ ACF scade (exponențial sau cu oscilații amortizate)

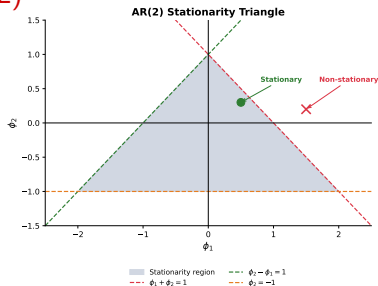
Staționaritatea AR(2): vizualizarea cercului unitate



Polinomul caracteristic și condiția cercului unitate

- Polinomul caracteristic al unui proces $AR(p)$: $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p$
- Toate rădăcinile lui $\phi(z) = 0$ trebuie să se afle **în afara** cercului unitate ($|z| > 1$)
- Rădăcini pe cerc: nestaționar; rădăcini în interior: proces exploziv

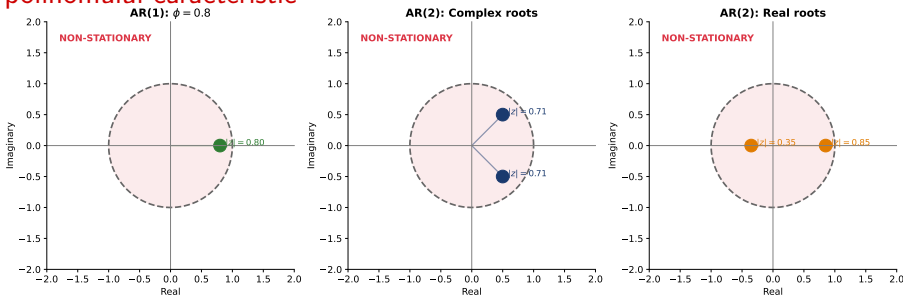
Triunghiul de staționaritate AR(2)



Regiunea de staționaritate

- Regiunea triunghiulară definește combinațiile de parametri AR(2) staționari
- Granițe:** $\phi_1 + \phi_2 < 1$, $\phi_2 - \phi_1 < 1$ și $|\phi_2| < 1$
- Punctele din afara regiunii \succ procese nestaționare sau explozive

Rădăcinile polinomului caracteristic



Tipuri de rădăcini

- **Rădăcini reale:** descreștere exponențială în ACF
- **Rădăcini complexe:** oscilații amortizate (pseudo-cicluri)
- Toate rădăcinile trebuie să fie în afara cercului unitate

Modelul AR(2)

Definiție 6 (Proces AR(2))

$$\square X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

Condiții de staționaritate

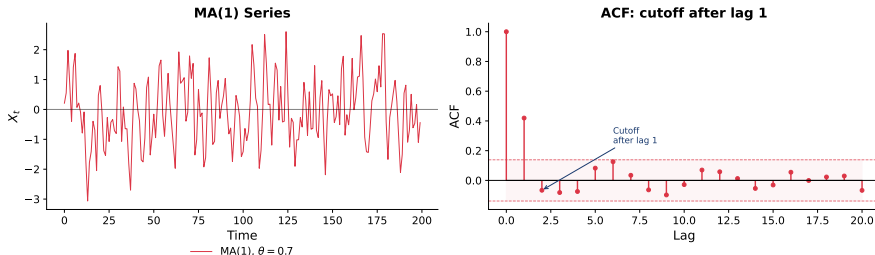
$$\square \phi_1 + \phi_2 < 1; \quad \phi_2 - \phi_1 < 1; \quad |\phi_2| < 1$$

Comportamentul ACF

- **Rădăcini reale:** amestec de două descreșteri exponențiale
- **Rădăcini complexe:** tipar sinusoidal amortizat (pseudo-cicluri)
- **PACF:** Se anulează după lag 2 ($\pi_k = 0$ pentru $k > 2$)

MA(1): ilustrație vizuală

MA(1): short memory series with ACF cutoff



Interpretare vizuală

- **Panoul stâng:** Serie MA(1) \succ revenire rapidă la medie
- **Panoul drept:** ACF cu **anulare după lag 1**; PACF descreștere exponențială

Modelul MA(1): definiție

Definiție 7 (Proces MA(1))

- Un **proces de medie mobilă de ordin 1** este: $X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$
- $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$

Interpretare

- μ : media procesului
- θ : coeficient MA
 - Măsoară impactul șocului trecut
- Depinde de ε_t și ε_{t-1}

Notăție cu operatorul lag

- $X_t = \mu + \theta(L)\varepsilon_t$
- $\theta(L) = 1 + \theta L$

Proprietate cheie

- **Staționaritate garantată:** Procesele MA sunt întotdeauna staționare
 - Nu depinde de valoarea lui θ

Proprietățile MA(1)

$$\text{MA}(1): X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

- ▣ **Media:** $\mathbb{E}[X_t] = \mu$; **Varianța:** $\gamma(0) = \sigma^2(1 + \theta^2)$
- ▣ **Autocovarianța:** $\gamma(1) = \theta\sigma^2$, $\gamma(h) = 0$ ($h > 1$)
- ▣ **ACF:** $\rho(1) = \frac{\theta}{1+\theta^2}$, $\rho(h) = 0$ ($h > 1$)

Observație cheie

- ▣ **Semnătura MA(1):** ACF se anulează după lag 1
 - ▶ $\rho(1) \neq 0$, dar $\rho(h) = 0$ pentru $h > 1$; tipar opus față de AR(1)

Demonstrație: varianța și autocovarianța MA(1)

Punct de plecare: $X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$ (presupunând $\mu = 0$)

▣ **Varianța:**

$$\gamma(0) = \text{Var}(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}) = \sigma^2 + \theta^2\sigma^2 + 0 = \boxed{\sigma^2(1 + \theta^2)}$$

Autocovarianța la lag 1

$$\square \gamma(1) = \text{Cov}(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2})$$

$$\square = \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) + \theta\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-2}) + \theta\text{Cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) + \theta^2\text{Cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2})$$

$$\square = 0 + 0 + \theta\sigma^2 + 0 = \boxed{\theta\sigma^2}$$

Autocovarianța la lag $h \geq 2$

$$\square \text{ Niciun termen } \varepsilon \text{ comun } \succ \gamma(h) = 0$$

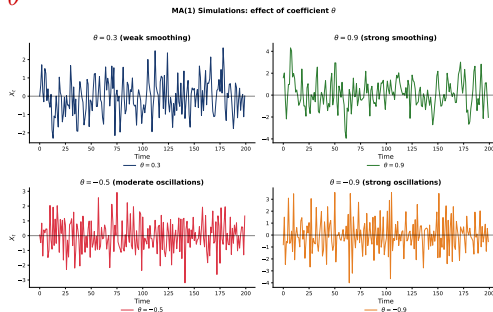
Demonstrație: maximul ACF pentru MA(1)

Afirmație: $|\rho(1)| \leq 0.5$ pentru orice valoare a lui θ

- ▣ ACF la lag 1: $\rho(1) = \frac{\theta}{1+\theta^2}$
- ▣ Derivăm: $\frac{d\rho(1)}{d\theta} = \frac{1-\theta^2}{(1+\theta^2)^2} = 0 \succ \theta = \pm 1$
- ▣ La aceste valori: $\rho(1)|_{\theta=1} = \frac{1}{2}, \rho(1)|_{\theta=-1} = -\frac{1}{2}$

Implicație

- ▣ **Test practic:** Dacă $|\hat{\rho}(1)| > 0.5$ din date, procesul **nu** este MA(1)
 - ▶ Maximul $|\rho(1)| = 0.5$ se atinge la $\theta = \pm 1$
 - ▶ Considerați modele AR sau ARMA ca alternative

Simulări MA(1): efectul lui θ 

Interpretare

- MA(1) este întotdeauna staționar indiferent de θ \succ memorie finită de doar un lag
- θ pozitiv netezește seria; θ negativ creează fluctuații mai rapide
- Spre deosebire de AR(1), șocurile MA(1) afectează procesul doar pentru o perioadă

Demonstrație: ACF pentru MA(1)

Afirmație: $\rho(1) = \frac{\theta}{1+\theta^2}$ și $\rho(h) = 0$ pentru $h > 1$

- MA(1) are autocorelație nenulă **doar** la lag 1

Demonstrație

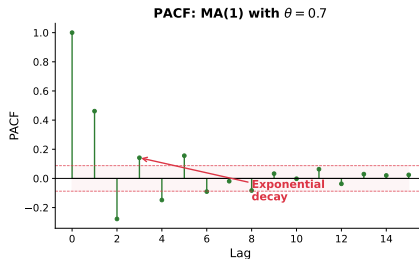
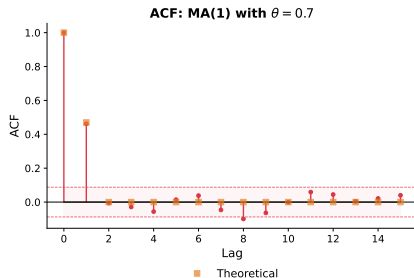
- Fie $X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$.
- Autocorelația la lag 1: $\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{\theta\sigma^2}{\sigma^2(1+\theta^2)} = \boxed{\frac{\theta}{1+\theta^2}}$
- Pentru $h > 1$: $\gamma(h) = \text{Cov}(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-h} + \theta\varepsilon_{t-h-1})$
- Termenii $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}$ nu se suprapun cu $\varepsilon_{t-h}, \varepsilon_{t-h-1}$ când $h > 1$, deci $\boxed{\gamma(h) = 0}$

Consecință practică

- ACF se anulează brusc după lag 1 \Rightarrow semn distinctiv al proceselor MA(1)

ACF și PACF MA(1): comparație vizuală

ACF and PACF for MA(1): opposite pattern to AR(1)



Interpretare

- **ACF:** Un singur vârf la lag 1, apoi se anulează \succ semnătura cheie MA(1)
- **PACF:** Descreștere exponențială \succ tipar opus față de AR(1)
- Această inversare diferențiază procesele MA de cele AR

Tipare ACF și PACF MA(1)

ACF al MA(1)

- ▣ Se anulează după lag 1
 - ▶ $\rho(1) = \frac{\theta}{1+\theta^2}$
 - ▶ $\rho(h) = 0$ pentru $h > 1$
 - ▶ $|\rho(1)| \leq 0.5$ întotdeauna

PACF al MA(1)

- ▣ Scade exponențial
 - ▶ Sau cu semne alternante
 - ▶ Nu se anulează

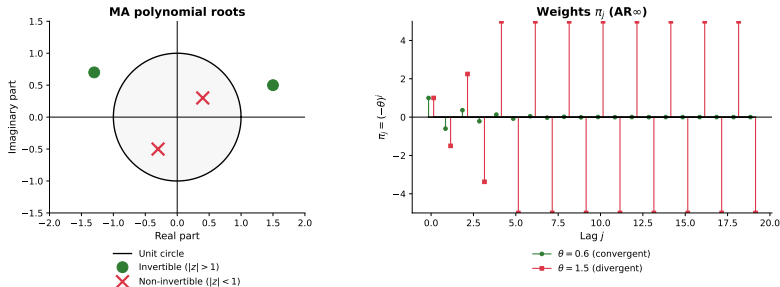
	ACF	PACF
MA(1)	Se anulează la lag 1	Descreștere exponențială

Observație

- ▣ Tiparul opus față de AR(1)!

Invertibilitate: ilustrație vizuală

Invertibility of MA models



Interpretare

- **Stânga:** invertibilitatea necesită rădăcini în afara cercului unitate
- **Dreapta:** ponderile $AR(\infty)$ scad doar când $|\theta| < 1$

Invertibilitatea modelelor MA

Definiție 8 (Invertibilitate)

- Un proces MA este **invertibil** dacă poate fi scris ca un proces AR infinit:
- $X_t = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j (X_{t-j} - \mu) + \varepsilon_t$

Condiții de invertibilitate

- **MA(1)**: Invertibil dacă $|\theta| < 1$
- **MA(q)**: Rădăcinile lui $\theta(z) = 0$ în afara cercului unitate

De ce contează invertibilitatea

- Asigură reprezentare unică (fără invertibilitate, mai multe modele MA descriu aceleași date)
- Necesară pentru prognoză și estimare
- **Staționaritate** \succ AR; **Invertibilitate** \succ MA

Demonstrație: invertibilitatea MA(1)

Afirmație

- MA(1) este invertibil dacă și numai dacă $|\theta| < 1$

Demonstrație

- Din $X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$, izolăm: $\varepsilon_t = X_t - \theta\varepsilon_{t-1}$
- Substituție recursivă: $\varepsilon_t = X_t - \theta(X_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-2}) = X_t - \theta X_{t-1} + \theta^2\varepsilon_{t-2}$
- Continuând: $\varepsilon_t = \sum_{j=0}^n (-\theta)^j X_{t-j} + (-\theta)^{n+1}\varepsilon_{t-n-1}$
- Dacă $|\theta| < 1$: $(-\theta)^{n+1} \rightarrow 0$, deci

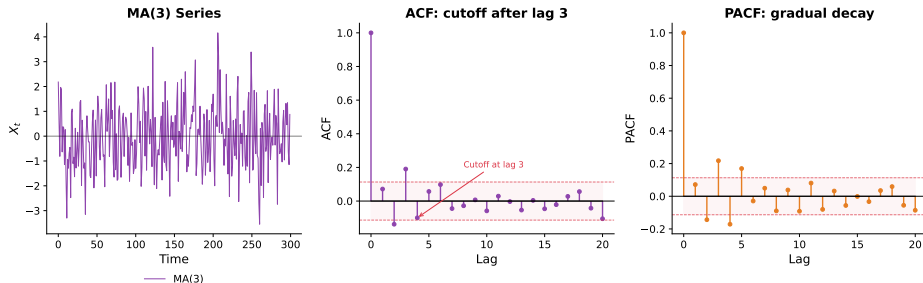
$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} (-\theta)^j X_{t-j}$$

Concluzie

- Seria geometrică converge $\iff |\theta| < 1 \Rightarrow$ MA(1) se scrie ca AR(∞)

MA(q): ilustrație vizuală

MA(q) Process: ACF signature cuts off after lag q



Observație

- Proces MA(3): semnătura cheie \succ ACF se anulează după lag q ($\rho(h) = 0$ pentru $h > 3$)

Modelul MA(q): forma generală

Definiție 9 (Proces MA(q))

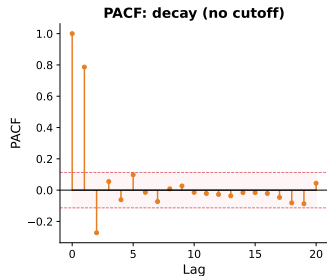
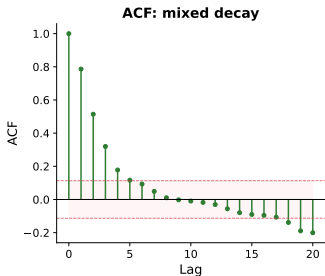
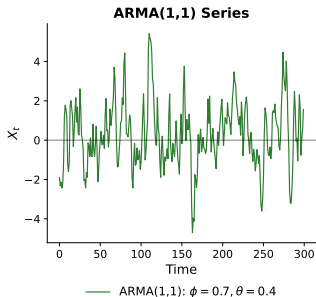
- Un **proces de medie mobilă de ordin q**: $X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$
- **Operator lag**: $X_t = \mu + \theta(L)\varepsilon_t$, unde $\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q$

Proprietăți

- Întotdeauna staționar (varianță finită)
- ACF se anulează după lag q : $\rho(h) = 0$ pentru $h > q$; PACF scade gradual
- Invertibil dacă toate rădăcinile lui $\theta(z) = 0$ se află în afara cercului unitate

ARMA: ilustrație vizuală

ARMA(1,1): neither ACF nor PACF cut off



Interpretare ARMA(1,1)

- Combină persistența AR cu răspunsul la șocuri MA; ACF/PACF ambele descresc
- Nici ACF nici PACF nu se întrerup > identificator cheie pentru modele mixte

Modelul ARMA(p,q): definiție

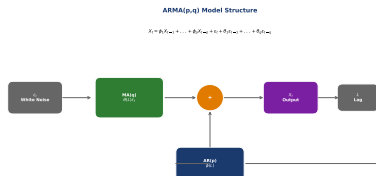
Definiție 10 (Proces ARMA(p,q))

- ▣ $X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$
- ▣ **Formă compactă:** $\phi(L)X_t = c + \theta(L)\varepsilon_t$, unde $\mu = \frac{c}{1-\phi_1-\dots-\phi_p}$

Idee cheie

- ▣ **Flexibilitate:** Combină componentele AR și MA
 - ▶ AR captează persistența; MA captează răspunsul la șocuri
- ▣ **Parcimonie:** ARMA(1,1) poate fi mai bun decât AR(5) sau MA(5)
 - ▶ Mai puțini parametri, mai puțin risc de supraajustare

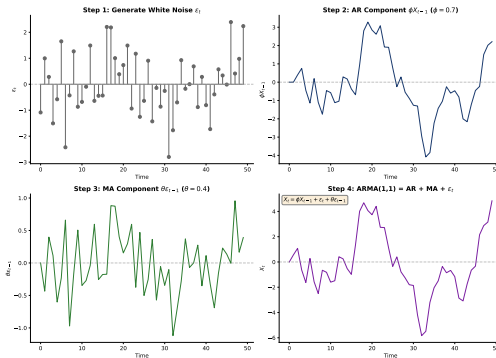
Structura modelului ARMA



Componente

- ▣ **AR**: valorile trecute → persistență, memorie
- ▣ **MA**: șocuri trecute → răspuns la inovații
- ▣ **Forma compactă**: $\phi(L)X_t = \theta(L)\varepsilon_t$

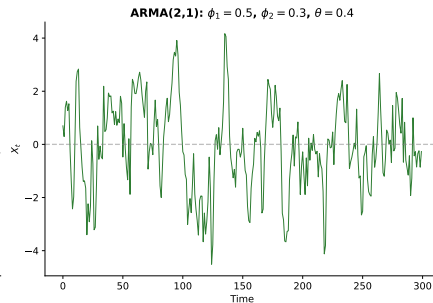
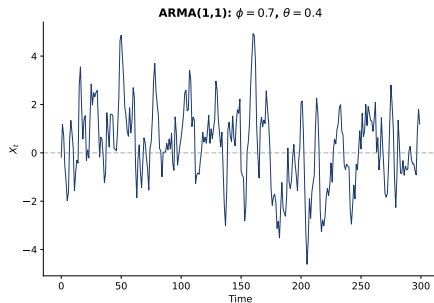
Cum funcționează simularea ARMA



Pași

- Generare zgomot alb, aplicare ecuația ARMA recursiv, obținere serie simulată

Exemple ARMA



Observație

- Diferite combinații de ordine (p, q) produc comportamente distincte

Modelul ARMA(1,1)

Definiție 11 (Proces ARMA(1,1))

$$\square X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

Proprietăți (staționaritate și invertibilitate)

$$\square \text{Media: } \mu = \frac{c}{1-\phi}; \text{ Varianța: } \gamma(0) = \frac{(1+2\phi\theta+\theta^2)\sigma^2}{1-\phi^2}$$

ACF

$$\square \rho(1) = \frac{(1+\phi\theta)(\phi+\theta)}{1+2\phi\theta+\theta^2}; \quad \rho(h) = \phi \cdot \rho(h-1) \text{ pentru } h \geq 2$$

\square ACF scade exponențial după lag 1 (punctul de pornire depinde de ϕ și θ)

Demonstrație: varianța ARMA(1,1)

Afirmație

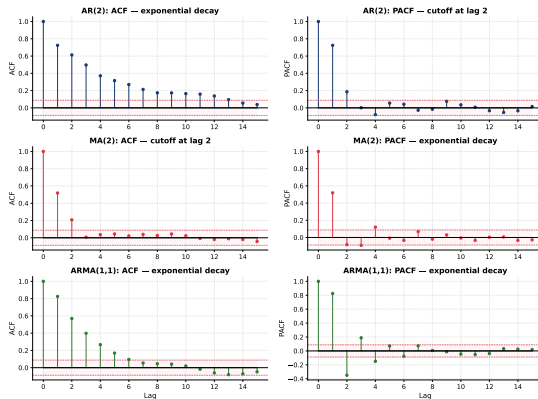
$$\square \gamma(0) = \frac{(1+2\phi\theta+\theta^2)\sigma^2}{1-\phi^2}$$

Demonstrație

- Fie $Y_t = X_t - \mu$: $Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$
- Ridicăm la pătrat: $Y_t^2 = \phi^2 Y_{t-1}^2 + \varepsilon_t^2 + \theta^2 \varepsilon_{t-1}^2 + 2\phi Y_{t-1} \varepsilon_t + 2\phi\theta Y_{t-1} \varepsilon_{t-1} + 2\theta \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}$
- Luăm media; $\mathbb{E}[\varepsilon_t Y_{t-1}] = 0$, $\mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}] = 0$:
- $\gamma(0) = \phi^2 \gamma(0) + \sigma^2 + \theta^2 \sigma^2 + 2\phi\theta \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1} Y_{t-1}]$
- Din $Y_{t-1} = \phi Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \theta \varepsilon_{t-2}$: doar ε_{t-1}^2 contribuie $\Rightarrow \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1} Y_{t-1}] = \sigma^2$
- $\gamma(0)(1 - \phi^2) = (1 + 2\phi\theta + \theta^2)\sigma^2 \Rightarrow \boxed{\gamma(0) = \frac{(1 + 2\phi\theta + \theta^2)\sigma^2}{1 - \phi^2}}$

Tipare ACF/PACF: AR vs MA vs ARMA

ACF/PACF Patterns: AR vs MA vs ARMA



TSA_ch2_acf_pacf_patterns

Demonstrație: ACF la lag 1 pentru ARMA(1,1)

Afirmație

$$\square \rho(1) = \frac{(1+\phi\theta)(\phi+\theta)}{1+2\phi\theta+\theta^2}; \quad \rho(h) = \phi \rho(h-1) \text{ pentru } h \geq 2$$

Demonstrație

$$\square \text{Înmulțim } Y_t \text{ cu } Y_{t-1} \text{ și luăm media: } \gamma(1) = \phi\gamma(0) + \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t Y_{t-1}]}_{=0} + \theta \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1} Y_{t-1}]}_{=\sigma^2} = \phi\gamma(0) + \theta\sigma^2$$

$$\square \text{Împărțim la } \gamma(0): \rho(1) = \phi + \frac{\theta\sigma^2}{\gamma(0)}. \text{ Substituim } \gamma(0):$$

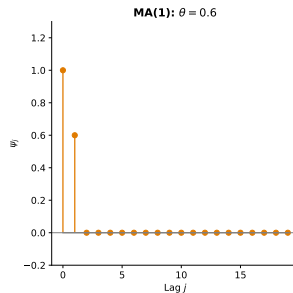
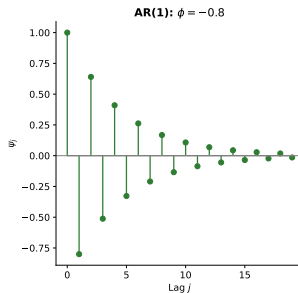
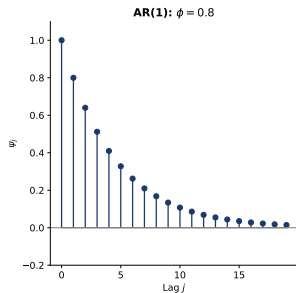
$$\square \rho(1) = \phi + \frac{\theta(1-\phi^2)}{1+2\phi\theta+\theta^2} = \frac{\phi(1+2\phi\theta+\theta^2)+\theta(1-\phi^2)}{1+2\phi\theta+\theta^2}$$

$$\square \text{Numărătorul: } \phi + \theta + \phi^2\theta + \phi\theta^2 = (\phi + \theta)(1 + \phi\theta), \text{ deci } \boxed{\rho(1) = \frac{(1 + \phi\theta)(\phi + \theta)}{1 + 2\phi\theta + \theta^2}}$$

Recursivitate

$$\square \text{Pentru } h \geq 2: \gamma(h) = \phi\gamma(h-1), \text{ deci } \rho(h) = \phi \rho(h-1) \Rightarrow \text{descreștere exponențială de la lag 1}$$

Funcții de răspuns la impuls



Propagarea șocurilor

- Arată cum se propagă un șoc unitar prin sistem în timp
- **AR**: descreștere exponențială sau oscilantă; **MA**: efect limitat la q perioade

Rezumat staționaritate și invertibilitate

Condiții pentru un model ARMA(p,q) valid

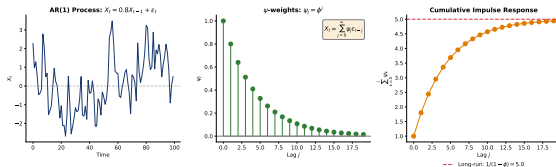
Rezumat cerințe:

Condiție	Cerință
Staționaritate	Rădăcinile lui $\phi(z) = 0$ în afara cercului unitate
Invertibilitate	Rădăcinile lui $\theta(z) = 0$ în afara cercului unitate

Implicații

- **Staționaritate:** Se poate scrie ca $MA(\infty)$: $X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$
- **Invertibilitate:** Se poate scrie ca $AR(\infty)$: $X_t = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j (X_{t-j} - \mu) + \varepsilon_t$
- **Reprezentare cauzală:** X_t depinde doar de șocurile *trecute* \succ necesară pentru prognoză

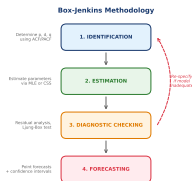
Teorema de descompunere a lui Wold



Teorema Wold (1938)

- Orice proces staționar $\{X_t\}$ poate fi descompus unic:
$$X_t = \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}}_{\text{componentă stocastică}} + \underbrace{D_t}_{\text{deterministă}} \quad \text{unde}$$
- $\psi_0 = 1, \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty, \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$
- Implicație:** orice proces staționar = $MA(\infty) \Rightarrow$ ARMA este o aproximare **parcimonioasă** cu un număr finit de parametri

Metodologia Box-Jenkins



Abordare iterativă

- ▣ **Pas 1:** Identificare (ACF/PACF, AIC/BIC)
- ▣ **Pas 2:** Estimare (MLE, Yule-Walker)
- ▣ **Pas 3:** Validare (reziduuri = zgomot alb?)
- ▣ **Pas 4:** Prognoză

Tabel rezumat pentru identificarea modelului

Model Identification: ACF/PACF Patterns

Model	ACF Pattern	PACF Pattern
AR(p)	Exponential decay or damped oscillation	Cuts off after lag p
MA(q)	Cuts off after lag q	Exponential decay or damped oscillation
ARMA(p,q)	Exponential decay after lag q-p	Exponential decay after lag p-q

Principiul parcimoniei

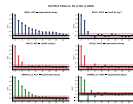
- **Începeți simplu:** p, q mici; creșteți dacă este necesar
- **Validare:** testul Ljung-Box, AIC/BIC mai mic

Reguli de identificare ACF/PACF

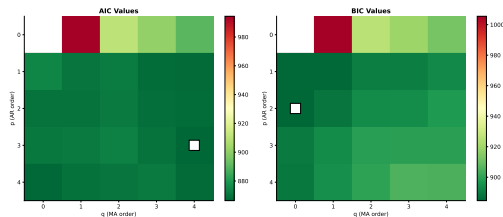
Tipare teoretice pentru procese staționare

□ Tabelul rezumă tiparele ACF/PACF pentru identificarea modelului:

Model	Tipar ACF	Tipar PACF
AR(1)	Descreștere exponențială	Vârf la lag 1, apoi 0
AR(2)	Exp./sinusoidă amortizată	Vârfuri la lag-uri 1-2, apoi 0
AR(p)	Scade gradual	Se anulează după lag p
MA(1)	Vârf la lag 1, apoi 0	Descreștere exponențială
MA(2)	Vârfuri la lag-uri 1-2, apoi 0	Exp./sinusoidă amortizată
MA(q)	Se anulează după lag q	Scade gradual
ARMA(p,q)	Scade	Scade



AIC vs BIC: selecția modelului



Interpretare

- Heatmap: verde = AIC/BIC mic, □ = cel mai bun model
- Practică: AIC → prognoză, BIC → identificare

Criterii informaționale

AIC (Akaike)

- ▣ $AIC = -2 \ln(\hat{L}) + 2k$
- ▣ Penalizare moderată
 - ▶ Tinde să aleagă modele mai mari
 - ▶ Optim pentru prognoză

BIC (Bayesian)

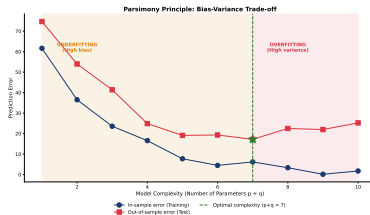
- ▣ $BIC = -2 \ln(\hat{L}) + k \ln(n)$
- ▣ Penalizare mai puternică
 - ▶ Preferă modele parcimonioase
 - ▶ Consistent pentru identificare

unde: \hat{L} = maximul funcției de verosimilitate, k = numărul de parametri estimați, n = dimensiunea eșantionului

Reguli

- ▣ Valori mai mici = model mai bun. Comparați modele pe *aceleași date*

Principiul parcimoniei: echilibrul bias-varianță



Echilibrul bias-varianță

- **Prea simplu:** bias mare (subajustare)
- **Prea complex:** varianță mare (supraajustare)
- **Optim:** intersecția curbelor; AIC/BIC ajută

Selecția automată a modelului

Abordarea grid search

- ▣ Estimați ARMA(p, q) pentru $p = 0, \dots, p_{max}$ și $q = 0, \dots, q_{max}$
- ▣ Selectați modelul cu cel mai mic AIC sau BIC; verificați cu teste de validare

În Python

- ▣ `pm.auto_arima()` din pachetul `pmdarima`
- ▣ Testează automat staționaritatea, parcurge ordine (p, q) , returnează cel mai bun model

Atenție

- ▣ Selecția automată nu este răspunsul final \succ verificați validitatea modelului
- ▣ Auto-ARIMA complet (inclusiv selecția lui d) \succ Capitolul 3

Comparația metodelor de estimare

ARMA Parameter Estimation Methods

Yule-Walker	Maximum Likelihood	Conditional LS
Pros: <ul style="list-style-type: none"> Simple computation Closed form solution Cons: <ul style="list-style-type: none"> Not only Less efficient 	Pros: <ul style="list-style-type: none"> Most efficient Works for ARMA Cons: <ul style="list-style-type: none"> Nonlinear Local optima risk 	Pros: <ul style="list-style-type: none"> Simple to implement Fast computation Cons: <ul style="list-style-type: none"> Biased for small n Ignores initial values

Recommendation: Use MLE for final estimation, Yule-Walker for initial values

Comparație

- **MLE:** cea mai eficientă; necesită ipoteză privind distribuția
- **Yule-Walker:** formă închisă; doar pentru modele AR
- **CMP:** compromis între cele două

Prezentare generală a metodelor de estimare

1. Metoda momentelor / Yule-Walker (doar AR)

- Egalează autocorelațiile din eșantion cu valorile teoretice
- Simplă, formă închisă pentru modele AR; nu este eficientă pentru MA

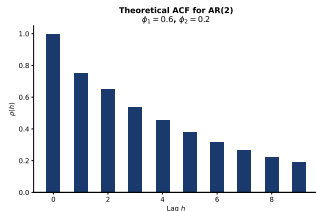
2. Estimarea prin maximum de verosimilitate (MLE)

- Cea mai comună abordare; necesită ipoteză privind distribuția (Gaussiană)
- Eficientă și consistentă

3. Cele mai mici pătrate condiționate

- Minimiza suma pătratelor reziduurilor
- Condiționare pe observațiile inițiale; mai simplă algoritmic decât MLE exact

Ecuatiile Yule-Walker pentru AR(p)



Yule-Walker Equations

$$\rho(1) = \phi_1 + \phi_2 \rho(1)$$

$$\rho(2) = \phi_1 \rho(1) + \phi_2$$

$$\text{Matrix form: } R \cdot \hat{\phi} = \rho$$

R = autocorrelation matrix

$$\text{Solution: } \hat{\phi} = R^{-1} \rho$$

Ideea principală

- **Relație liniară:** autocorelații \leftrightarrow parametri AR
- **Formă închisă:** fără optimizare numerică, matrice Toeplitz

Ecuțiile Yule-Walker: forma matriceală

Ecuțiile Yule-Walker pentru AR(p)

$$\square \quad \rho(k) = \phi_1 \rho(k-1) + \phi_2 \rho(k-2) + \cdots + \phi_p \rho(k-p), \quad k = 1, 2, \dots, p$$

Forma matriceală

$$\square \quad \begin{pmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \cdots & \rho(p-1) \\ \rho(1) & \rho(0) & \cdots & \rho(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(p-1) & \rho(p-2) & \cdots & \rho(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(p) \end{pmatrix}$$

\square **Estimare:** Înlocuiți $\rho(k)$ cu $\hat{\rho}(k)$; matricea Toeplitz este simetrică și pozitiv definită

Exemplu numeric: Yule-Walker pentru AR(2)

Date din eșantion ($T = 100$)

▣ Autocorelații estimate: $\hat{\rho}(1) = 0.75$, $\hat{\rho}(2) = 0.65$, varianța estimată: $\hat{\gamma}(0) = 4.0$

Pas 1: Sistemul matriceal

▣ Yule-Walker: $R\hat{\phi} = \rho \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0.75 \\ 0.75 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.65 \end{pmatrix}$

Pas 2: Rezolvare (regula lui Cramer)

▣ $\det(R) = 1 - 0.75^2 = 0.4375$

▣ $\hat{\phi}_1 = \frac{0.75 \times 1 - 0.75 \times 0.65}{0.4375} = \frac{0.2625}{0.4375} = \boxed{0.600}$ $\hat{\phi}_2 = \frac{0.65 \times 1 - 0.75 \times 0.75}{0.4375} = \frac{0.0875}{0.4375} = \boxed{0.200}$

Pas 3: Varianța zgomotului

▣ $\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}(0)(1 - \hat{\phi}_1\hat{\rho}(1) - \hat{\phi}_2\hat{\rho}(2)) = 4.0(1 - 0.45 - 0.13) = \boxed{1.68}$

Verificare staționaritate: $\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2 = 0.8 < 1 \checkmark$ $|\hat{\phi}_2| = 0.2 < 1 \checkmark$ $\hat{\phi}_2 - \hat{\phi}_1 = -0.4 < 1 \checkmark$

Demonstrație: ecuațiile Yule-Walker

Scop: Derivarea $\rho(k) = \phi_1\rho(k-1) + \dots + \phi_p\rho(k-p)$

- ▣ Pornim de la AR(p): $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$
- ▣ Înmulțim cu X_{t-k} și luăm media:
- ▣ $\mathbb{E}[X_t X_{t-k}] = \phi_1 \mathbb{E}[X_{t-1} X_{t-k}] + \dots + \phi_p \mathbb{E}[X_{t-p} X_{t-k}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-k}]$
- ▣ Pentru $k \geq 1$: $\mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-k}] = 0 \succ \gamma(k) = \phi_1 \gamma(k-1) + \dots + \phi_p \gamma(k-p)$
- ▣ Împărțind la $\gamma(0)$: $\rho(k) = \phi_1 \rho(k-1) + \phi_2 \rho(k-2) + \dots + \phi_p \rho(k-p)$

Cazul special AR(1)

- ▣ $\rho(k) = \phi_1 \rho(k-1) = \phi_1^k$ (folosind $\rho(0) = 1$)

Estimarea prin metoda verosimilității maxime

Logaritmul funcției de verosimilitate ARMA(p,q) (erori gaussiene: $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$)

- ▣ $\ell(\phi, \theta, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2$
- ▣ ε_t sunt inovațiile calculate recursiv

Procedura de estimare

- ▣ Inițializare: folosiți metoda momentelor sau OLS pentru valori inițiale
- ▣ Optimizare: metode numerice (BFGS, Newton-Raphson)
- ▣ Iterare până la convergență

În practică

- ▣ `statsmodels.tsa.arima.model.ARIMA` > implementează MLE exact cu inițializare automată

Erori standard și inferență

Distribuția asimptotică a MLE

- ▣ $\hat{\theta} \xrightarrow{d} N(\theta_0, \frac{1}{n}I(\theta_0)^{-1})$, unde $I(\theta)$ este **matricea informațională Fisher**
- ▣ $I(\theta) = -E \left[\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right] \succ$ curbura medie a funcției de verosimilitate
- ▣ Matricea de varianță-covarianță estimată: $\hat{V} = \frac{1}{n} \hat{I}^{-1}$

Ce este eroarea standard (SE)?

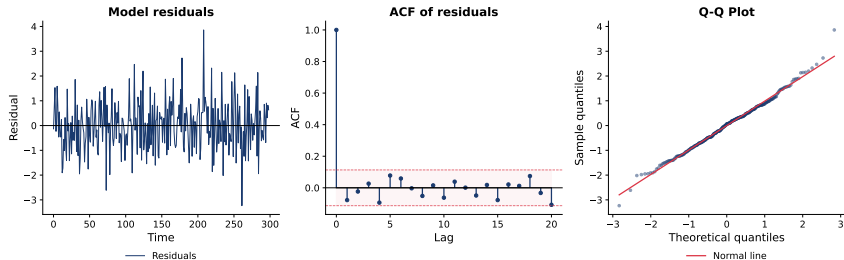
- ▣ $SE(\hat{\theta}_j) = \sqrt{\hat{V}_{jj}} = \sqrt{\text{diag}_j \left(\frac{1}{n} \hat{I}^{-1} \right)}$ \succ măsoară incertitudinea estimării
- ▣ **Exemplu AR(1):** $SE(\hat{\phi}) \approx \sqrt{(1 - \hat{\phi}^2)/n}$; pentru $\hat{\phi} = 0.8$, $n = 100$: $SE \approx 0.06$
- ▣ **Interpretare:** un SE mic \Rightarrow parametrul este estimat cu precizie ridicată

Testarea semnificației parametrilor

- ▣ $H_0 : \theta_j = 0$ Statistică: $z = \frac{\hat{\theta}_j}{SE(\hat{\theta}_j)} \sim N(0, 1)$ asimptotic
- ▣ Respingeți dacă $|z| > 1.96$ la 5% \Rightarrow **IC:** $\hat{\theta}_j \pm 1.96 \cdot SE(\hat{\theta}_j)$

Diagnosticarea reziduurilor: exemplu

AR(1) Model Diagnostics: white noise residuals



Interpretare

- ▣ **Graficul reziduurilor:** fluctuații aleatorii în jurul lui zero, varianță constantă
- ▣ **ACF reziduurilor:** fără vârfuri semnificative \succ zgomot alb
- ▣ **Graficul Q-Q:** punctele pe diagonală \succ reziduuri distribuite normal

Analiza reziduurilor

Dacă modelul este corect specificat, reziduurile trebuie să fie zgomot alb

- ▣ **Graficul reziduurilor în timp**
 - ▶ Fluctuează în jurul lui zero, fără tipare evidente; varianță constantă
- ▣ **ACF al reziduurilor**
 - ▶ Toate corelațiile în limitele de semnificație; fără vârfuri semnificative \succ zgomot alb
- ▣ **Histogramă / graficul Q-Q**
 - ▶ Distribuție aproximativ normală; cozi groase \succ erori non-normale

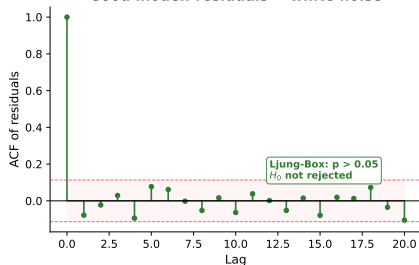
Decizie

- ▣ ✓ **Toate verificările OK** \succ model adecvat
- ▣ × **Nesatisfăcut** \succ reveniți la identificare

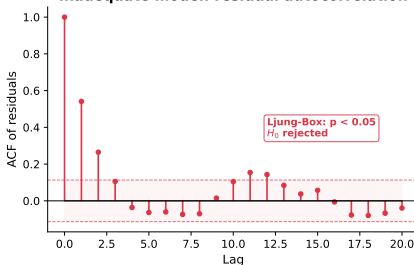
Testul Ljung-Box: ilustrație vizuală

Ljung-Box Test: good model vs inadequate model

Good model: residuals = white noise



Inadequate model: residual autocorrelation



Interpretare

- **Stânga:** model bun \succ reziduuri zgomot alb
- **Dreapta:** model inadecvat \succ autocorelație reziduală \succ re-specificare necesară

Testul Ljung-Box

Definiție 12 (Testul Ljung-Box)

- ▣ Testează dacă reziduurile sunt distribuite independent (fără autocorelație)
- ▣ **Statistică:** $Q(m) = n(n+2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k}$

Ipoteze și distribuție

- ▣ H_0 : Reziduurile sunt zgomot alb; H_1 : Reziduurile sunt autocorelate
- ▣ Sub H_0 , $Q(m) \sim \chi^2(m-p-q)$ aproximativ

Decizie

- ▣ **p-value** > 0.05 \succ nu respingem H_0 \succ reziduurile sunt zgomot alb
- ▣ **p-value** < 0.05 \succ autocorelație reziduală \succ model inadecvat

Lista de verificare a modelului

Un model ARMA bun ar trebui să îndeplinească

- ▣ **Staționaritate:** Rădăcinile AR în afara cercului unitate (arroots)
- ▣ **Invertibilitate:** Rădăcinile MA în afara cercului unitate (maroots)
- ▣ **Reziduuri zgomot alb:** Fără ACF semnificativ (testul Ljung-Box)
- ▣ **Reziduuri normale:** Grafic Q-Q, testul Jarque-Bera
- ▣ **Fără heteroscedasticitate:** Varianță constantă (testul ARCH)
- ▣ **Simplu:** Cel mai mic AIC/BIC dintre modelele adecvate

Dacă verificările nu sunt satisfăcute

- ▣ Reveniți la identificare, încercați ordine diferite

Proгноze punctuale

Proгноză optimă: $\hat{X}_{n+h|n} = \mathbb{E}[X_{n+h}|X_n, X_{n-1}, \dots]$

- ▣ Speranța condiționată minimizează MSE

AR(1): $X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$

- ▣ $\hat{X}_{n+1|n} = c + \phi X_n$; $\hat{X}_{n+h|n} = \mu + \phi^h(X_n - \mu)$
- ▣ Proгноzele converg la media μ când $h \rightarrow \infty$ (revenire la medie)

MA(1): $X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$

- ▣ $\hat{X}_{n+1|n} = \mu + \theta \varepsilon_n$; $\hat{X}_{n+h|n} = \mu$ pentru $h > 1$

Incertitudinea prognozei

Eroarea medie pătratică de prognoză (MSFE)

- ▣ **Eroarea:** $e_{n+h|n} = X_{n+h} - \hat{X}_{n+h|n}$
- ▣ **MSFE:** $MSFE(h) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2$, unde ψ_j sunt coeficienții $MA(\infty)$

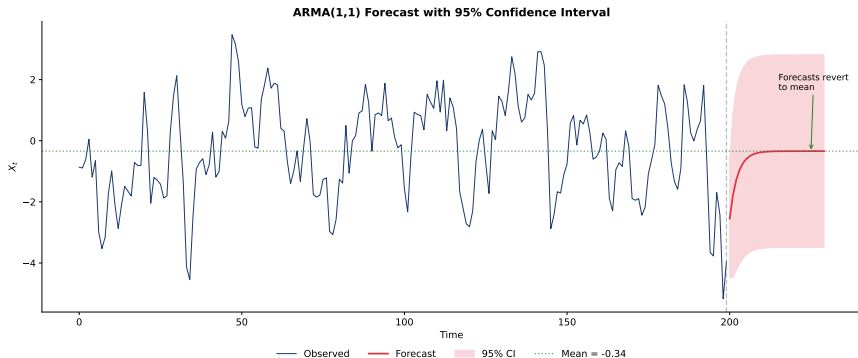
Pentru $AR(1)$: $\psi_j = \phi^j$

- ▣ $MSFE(h) = \sigma^2 \frac{1-\phi^{2h}}{1-\phi^2} \rightarrow \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} = \text{Var}(X_t)$

Observație cheie

- ▣ Incertitudinea prognozei crește cu orizontul
- ▣ Converge la varianța necondiționată $\text{Var}(X_t)$

Proгноза ARMA cu intervale de încredere



Observație

- Banda de încredere se lărgeste cu orizontul γ convergență la intervalul necondiționat

Demonstrație: MSFE pentru AR(1)

Afirmație

$$\square \text{ MSFE}(h) = \sigma^2 \frac{1 - \phi^{2h}}{1 - \phi^2} \quad \text{și} \quad \text{MSFE}(\infty) = \gamma(0)$$

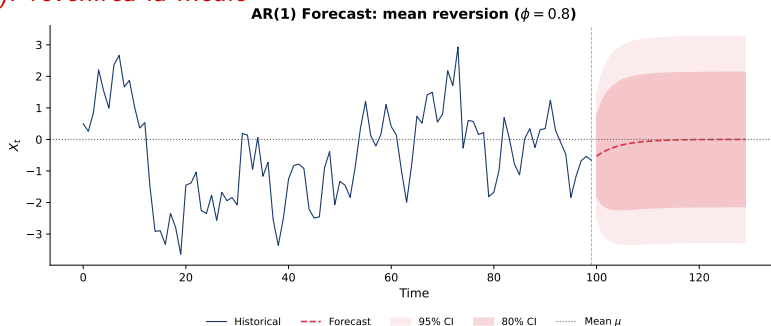
Demonstrație

- Eroarea de prognoză la orizontul h : $e_{n+h|n} = X_{n+h} - \hat{X}_{n+h|n}$
- Prin substituție recursivă: $e_{n+h|n} = \sum_{j=0}^{h-1} \phi^j \varepsilon_{n+h-j}$
- $\text{MSFE}(h) = \mathbb{E}[e_{n+h|n}^2] = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \phi^{2j} = \boxed{\sigma^2 \frac{1 - \phi^{2h}}{1 - \phi^2}}$
- Limita: $\text{MSFE}(\infty) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2} = \gamma(0) \Rightarrow \text{prognoza converge la media necondiționată}$

Interpretare

- La orizonturi lungi, nu facem mai bine decât media necondiționată: $\text{IC} \rightarrow 2 \times 1.96 \sqrt{\gamma(0)}$

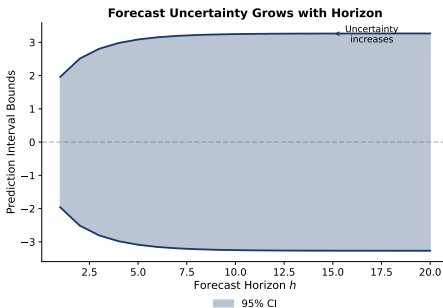
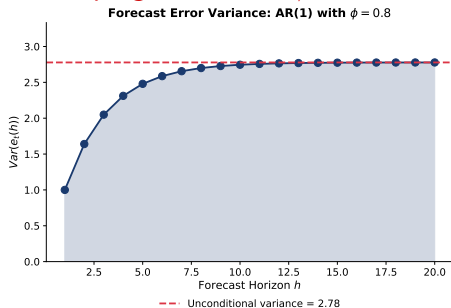
Proгноза AR(1): revenirea la medie



Proprietăți

- Prognozele converg la media necondiționată μ pe măsură ce orizontul crește
- $|\phi|$ mai mare \curvearrowright revenire mai lentă; IC se lărgesc cu orizontul

Varianța erorii de prognoză în funcție de orizont



Observație

- MSFE crește monoton cu orizontul h \rightarrow convergență la $Var(X_t)$ (limita predictibilității)

Intervale de încredere pentru prognoze

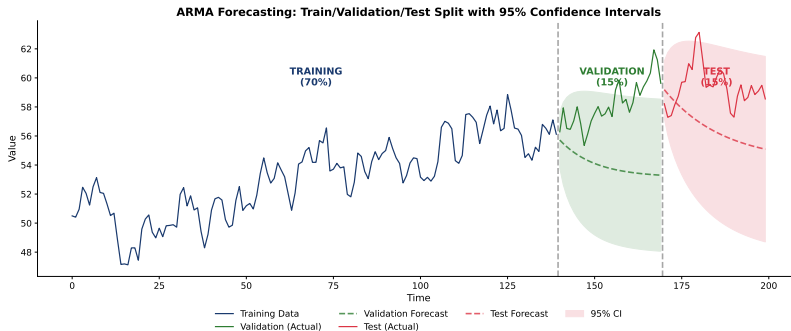
Formule

- ▣ $X_{n+h}|X_n, \dots \sim N(\hat{X}_{n+h|n}, \text{MSFE}(h))$
- ▣ **IC** $(1 - \alpha)$: $\hat{X}_{n+h|n} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\text{MSFE}(h)}$, unde $z_{\alpha/2} = 1.96$ pentru 95%

Proprietăți

- ▣ Intervalele se largesc pe măsură ce orizontul crește
 - ▶ Converge la intervalul necondiționat: $\mu \pm z_{\alpha/2}\sigma_X$
- ▣ Lățimea depinde de parametrii modelului
 - ▶ Coeficienți AR mai mari \succ intervale mai largi
- ▣ **Python**: `model.get_forecast(h).conf_int()`

Exemplu de prognoză train/validare/test



Bună practică

- Evaluați întotdeauna prognozele pe date neutilizate la estimare (împărțire antrenare/validare/test)

Evaluarea prognozei

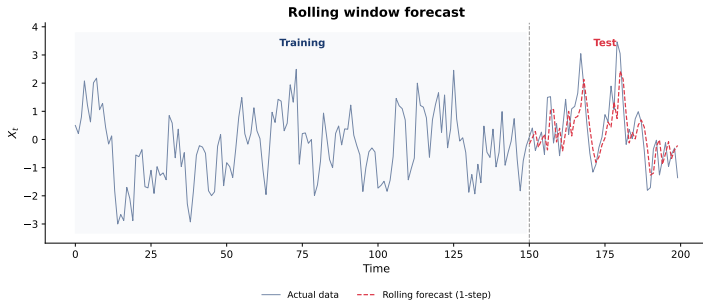
Testare în afara eșantionului

- ▣ Împărțiți datele: antrenare + test
- ▣ Generați prognoze pe test
- ▣ Comparați cu valorile reale
- ▣ **Fereastră mobilă**: re-estimați pe măsură ce sosesc date noi

Metriци de eroare

- ▣ **MAE** = $\frac{1}{n} \sum |e_t|$
 - ▶ Robust la valori extreme
- ▣ **RMSE** = $\sqrt{\frac{1}{n} \sum e_t^2}$
 - ▶ Penalizează erorile mari
- ▣ **MAPE** = $\frac{100}{n} \sum \left| \frac{e_t}{X_t} \right|$
 - ▶ Procentual, interpretabil

Proгноза cu fereastră mobilă (rolling forecast)

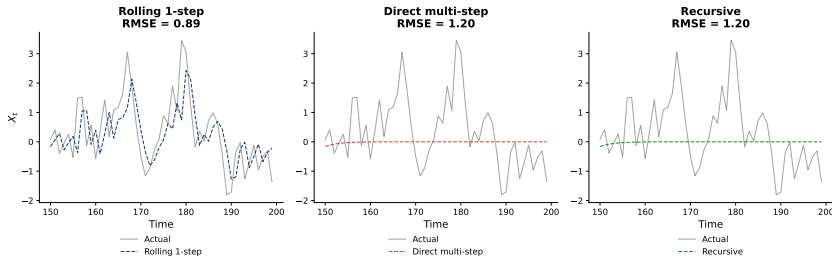


Metodologia rolling forecast

- **Fereastră fixă** (ultimele w obs.) vs **expansivă** (toate datele); generează prognoza 1-pas, repetă

Rolling vs prognoza multi-pas

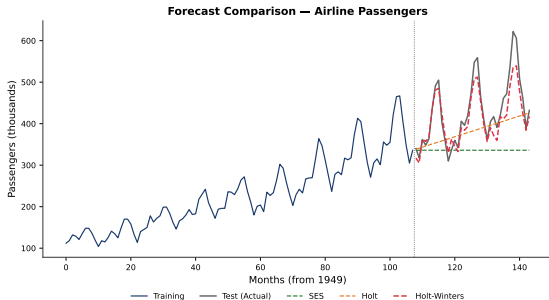
Comparison: Rolling vs Multi-step vs Recursive



Diferențe cheie

- Rolling 1-pas (precis); Multi-pas direct (model separat/orizont); Recursiv (acumulare erori)

Aplicație cu date reale: comparație prognoze



Considerații practice

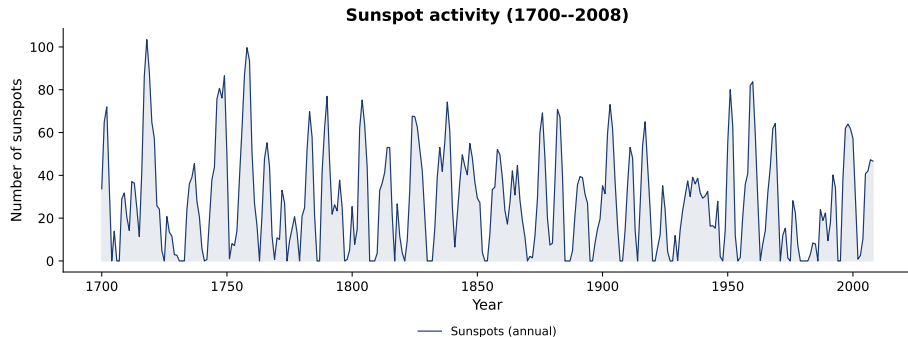
- Date reale: nestaționaritate, rupturi structurale; comparați modele; folosiți validare pe fereastră mobilă

Rezumat flux de lucru

Pași metodologiei Box-Jenkins

- ▣ **1. Pregătirea datelor:** Verificați valori lipsă, valori aberante; transformați dacă este necesar
- ▣ **2. Verificarea staționarității:** Inspecție vizuală, teste formale (ADF, KPSS); diferențiați dacă este nestaționar
- ▣ **3. Identificarea modelului:** Tipare ACF/PACF; grid search cu criterii informaționale
- ▣ **4. Estimare și validare:** Estimați modelul, verificați semnificația; analiză reziduală, testul Ljung-Box
- ▣ **5. Prognoză:** Prognoze punctuale cu intervale de încredere; validare în afara eșantionului

Studiu de caz: petele solare (sunspots)

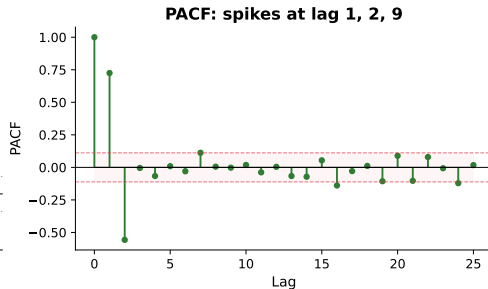
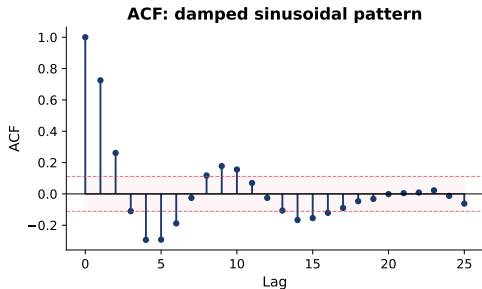


Descrierea datelor

- Pete solare anuale (1700–2008): serie staționară cu cicluri de ~ 11 ani; metodologie Box-Jenkins

Pasul 1: analiza ACF/PACF

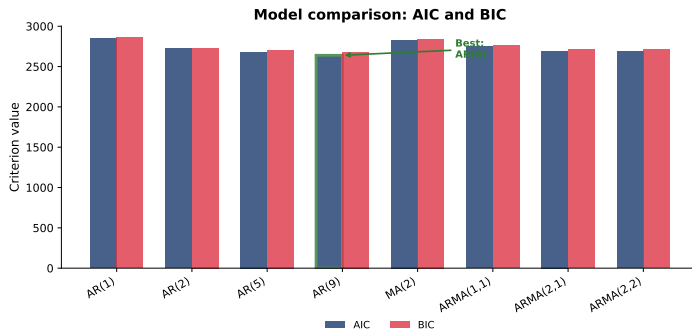
ACF/PACF analysis for sunspots



Identificare

- ☐ ACF sinusoidală (AR); PACF cu vârfuri la lag 1, 2, 9 \succ AR(2) sau AR(9); serie staționară ($d = 0$)

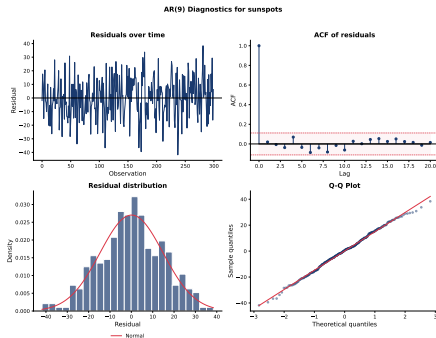
Pasul 2: compararea modelelor



Selecția modelului

- Comparăm mai multe modele candidate folosind criteriul AIC
- Modelul **AR(9)** are cel mai mic AIC, capturând ciclul solar de 11 ani

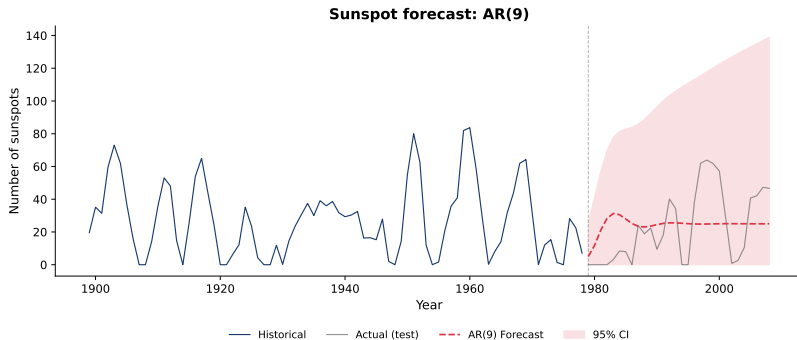
Pasul 3: diagnosticul modelului



Diagnosticul AR(9)

- Reziduuri: zgomot alb, medie zero, varianță constantă, ACF fără structură, \approx normal

Pasul 4: prognoza



Rezultate

- AR(9) captează ciclicitatea; IC 95% acoperă valorile reale; RMSE ≈ 30

Exercițiu AI: Gândire critică

Prompt de testat în ChatGPT / Claude / Copilot

"Am o serie de timp cu datele lunare ale vânzărilor (120 observații). Estimează un model ARMA, fă diagnosticul reziduurilor și prognozează pe 12 luni. Vreau cod Python complet cu grafice."

Exercițiu:

1. Rulați prompt-ul într-un LLM la alegere și analizați critic răspunsul.
2. Verifică staționaritatea datelor *înainte* de a estima ARMA? Justificați.
3. Cum alege ordinele p și q ? Folosește ACF/PACF sau AIC/BIC?
4. Reziduurile sunt testate corect? (Ljung-Box, Q-Q, heteroscedasticitate)
5. Intervalele de încredere ale prognozei converg la media necondiționată?

Atenție: Codul generat de AI poate rula fără erori și arăta profesional. *Asta nu înseamnă că e corect.*

Rezumat

Ce am învățat în acest capitol

- Modele autoregresive $AR(p)$
 - ▶ Depind de p valori trecute; staționaritate: rădăcini în afara cercului unitate; PACF se anulează la lag p
- Modele de medie mobilă $MA(q)$
 - ▶ Depind de q șocuri trecute; întotdeauna staționare; ACF se anulează la lag q
- Modele $ARMA(p, q)$ și metodologia Box-Jenkins
 - ▶ Combină AR și MA; identificare → estimare → validare → prognoză
- Prognoze cu intervale de încredere
 - ▶ Converg la media necondiționată; incertitudinea crește cu orizontul

Idee cheie

- **Parcimonie:** Începeți cu modele simple (ordine mici), validați cu testul Ljung-Box și criterii informaționale (AIC, BIC)

Quiz rapid

Verificați-vă cunoștințele

1. Care este condiția de staționaritate pentru $AR(1)$? Dar pentru $AR(p)$?
2. Cum identificați un model $MA(1)$ din tiparele ACF/PACF?
3. Ce este invertibilitatea și de ce contează?
4. Ce garantează teorema descompunerii Wold?
5. De ce prognozele ARMA converg la medie?

Răspunsuri quiz

Răspunsuri

1. **Staționaritate:** AR(1): $|\phi| < 1$; AR(p): toate rădăcinile lui $\phi(z) = 0$ în afara cercului unitate
2. **MA(1):** ACF se anulează după lag 1 ($\rho(1) \neq 0$, $\rho(h) = 0$ pt $h > 1$); PACF scade exponențial
3. **Invertibilitate:** MA se poate scrie ca AR(∞); necesară pentru unicitate și estimare
4. **Wold:** orice proces staționar = MA(∞); justifică modelarea ARMA
5. **Convergență:** $\hat{X}_{n+h|n} = \mu + \phi^h(X_n - \mu) \rightarrow \mu$ deoarece $|\phi| < 1$

Ce urmează?

Capitolul 3: Modele ARIMA pentru date nestaționare

- ▣ **Nestaționaritate:** tipuri, teste de rădăcină unitate (ADF, PP, KPSS)
- ▣ **Diferențierea:** operatorul diferență și ordinul de integrare d
- ▣ **ARIMA(p, d, q):** modele integrate pentru date nestaționare
- ▣ **Auto-ARIMA:** selecție automată a modelului complet
- ▣ **Studiu de caz:** Prognoza PIB SUA

Întrebări?

Întrebarea 1

Întrebare

□ Pentru ce valoare a lui ϕ este procesul AR(1) $X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$ staționar?

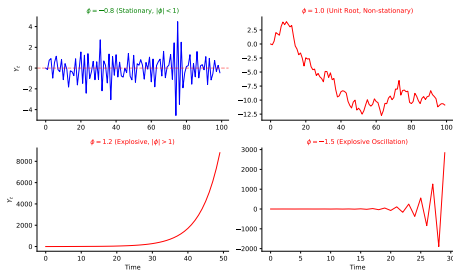
Variante de răspuns

(A) $\phi = 1.2$ (B) $\phi = 1.0$ (C) $\phi = -0.8$ (D) $\phi = -1.5$

Întrebarea 1: Răspuns

Răspuns corect: (C) $\phi = -0.8$

- AR(1) este staționar dacă și numai dacă $|\phi| < 1$
- Doar $|-0.8| = 0.8 < 1$



Întrebarea 2

Întrebare

□ Observați: ACF are vârf la lag 1, apoi se anulează. PACF scade gradual. Ce model?

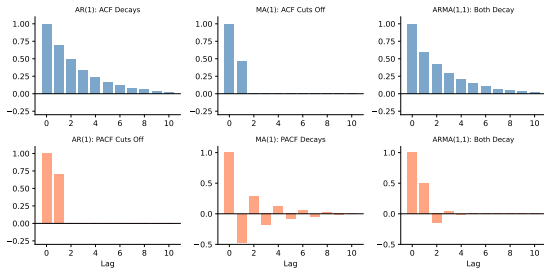
Variante de răspuns

(A) AR(1) (B) MA(1) (C) ARMA(1,1) (D) Zgomot alb

Întrebarea 2: Răspuns

Răspuns corect: (B) MA(1)

- ACF se anulează \succ proces MA
- PACF scade \succ confirmă MA(1)



Întrebarea 3

Întrebare

☐ Este MA(1) $X_t = \varepsilon_t + 1.5\varepsilon_{t-1}$ invertibil?

Variante de răspuns

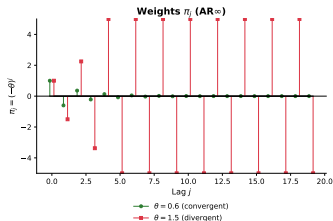
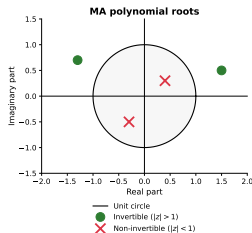
- (A) Da, procesele MA sunt întotdeauna invertibile
- (B) Da, deoarece $1.5 > 0$
- (C) Nu, deoarece $|\theta| = 1.5 > 1$
- (D) Nu, procesele MA nu sunt niciodată invertibile

Întrebarea 3: Răspuns

Răspuns corect: (C) Nu, deoarece $|\theta| = 1.5 > 1$

- Invertibilitatea necesită $|\theta| < 1$
- Aici $|\theta| = 1.5 > 1$, deci nu este invertibil

Invertibility of MA models



Întrebarea 4

Întrebare

□ Forma compactă $\phi(L)X_t = \theta(L)\varepsilon_t$ reprezintă ce model?

Variante de răspuns

(A) Model AR pur

(B) Model MA pur

(C) Model ARMA

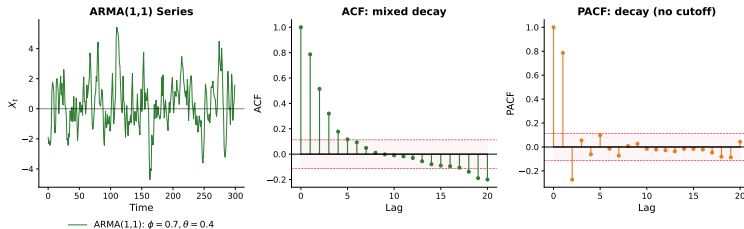
(D) Niciunul de mai sus

Întrebarea 4: Răspuns

Răspuns corect: (C) Model ARMA

□ $\phi(L)$ este polinomul AR, $\theta(L)$ este polinomul MA \succ ARMA(p,q)

ARMA(1,1): neither ACF nor PACF cut off



Întrebarea 5

Întrebare

□ Ce este $(1 - L)^2 X_t$?

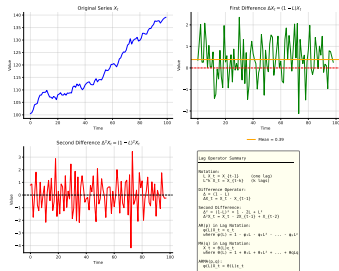
Variante de răspuns

- (A) $X_t - X_{t-1}$ (B) $X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$ (C) $X_t + X_{t-1} + X_{t-2}$ (D) $X_t - X_{t-2}$

Întrebarea 5: Răspuns

Răspuns corect: (B) $X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$

- ▣ $(1 - L)^2 = 1 - 2L + L^2$
- ▣ $(1 - L)^2 X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$



Întrebarea 6

Întrebare

☐ Comparând $\text{ARMA}(1,1)$ vs $\text{ARMA}(2,1)$ folosind BIC, care este corect?

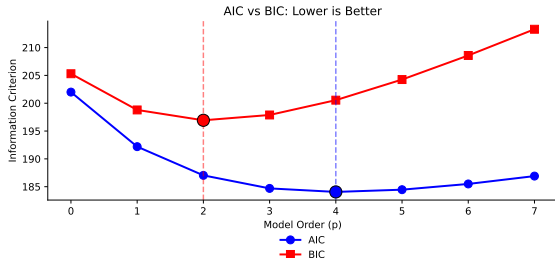
Variante de răspuns

- (A) BIC mai mic înseamnă întotdeauna prognoze mai bune
- (B) BIC penalizează complexitatea mai puțin decât AIC
- (C) Modelul cu BIC mai mic este preferat
- (D) BIC poate compara doar modele cu același număr de parametri

Întrebarea 6: Răspuns

Răspuns corect: (C) Modelul cu BIC mai mic este preferat

- BIC mai mic indică un echilibru mai bun între calitatea estimării și complexitate
- BIC penalizează complexitatea *mai mult* decât AIC



Întrebarea 7

Întrebare

- ☐ După estimarea unui model ARMA, rulați testul Ljung-Box pe reziduuri și obțineți $p\text{-value} = 0.03$. Ce înseamnă asta?

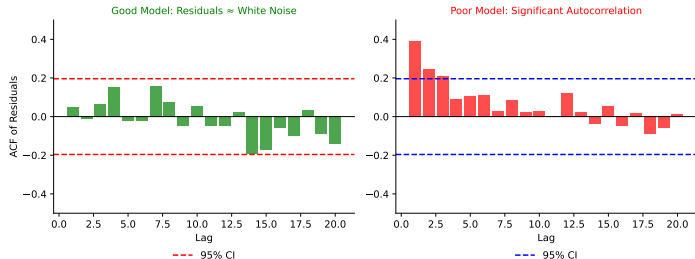
Variante de răspuns

- (A) Modelul este adecvat, reziduurile sunt zgomot alb
- (B) Modelul este inadecvat, reziduurile au autocorelație
- (C) Trebuie să creșteți dimensiunea eșantionului
- (D) Testul este neconcludent

Întrebarea 7: Răspuns

Răspuns corect: (B) Modelul este inadecvat

- ☐ p-value < 0.05 respinge H_0 (zgomot alb)
- ☐ Indică autocorelație reziduală rămasă



Întrebarea 8

Întrebare

□ Pentru un model AR(1) staționar, ce se întâmplă cu prognozele când orizontul $h \rightarrow \infty$?

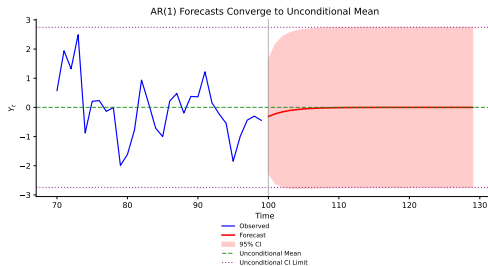
Variante de răspuns

- (A) Prognozele cresc nelimitat
- (B) Prognozele oscilează la nesfârșit
- (C) Prognozele converg la media necondiționată μ
- (D) Prognozele devin mai precise

Întrebarea 8: Răspuns

Răspuns corect: (C) Prognozele converg la μ

$$\square \hat{X}_{n+h|n} = \mu + \phi^h(X_n - \mu) \rightarrow \mu \text{ când } h \rightarrow \infty \text{ (deoarece } |\phi| < 1)$$



Întrebarea 9

Întrebare

▣ Fie un proces AR(1) cu $\phi = 0.6$ și $\sigma^2 = 4$. Cât este $\text{Var}(X_t)$?

Variante de răspuns

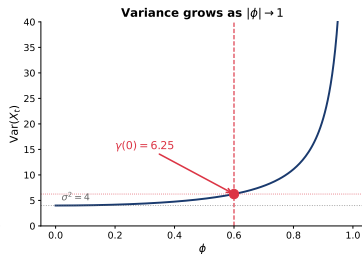
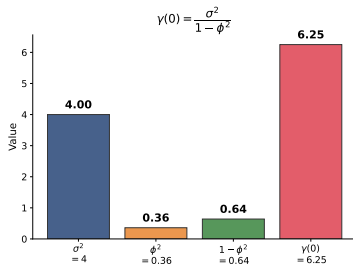
(A) 4.0 (B) 5.56 (C) 6.25 (D) 10.0

Întrebarea 9: Răspuns

Răspuns corect: (C) 6.25

$$\text{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} = \frac{4}{1-0.36} = \frac{4}{0.64} = 6.25$$

Varianța procesului este mai mare decât σ^2 din cauza persistenței



Întrebarea 10

Întrebare

□ Fie un proces MA(1) cu $\theta = 0.5$. Cât este $\rho(1)$?

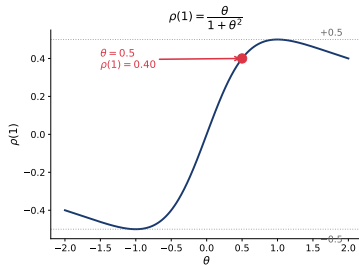
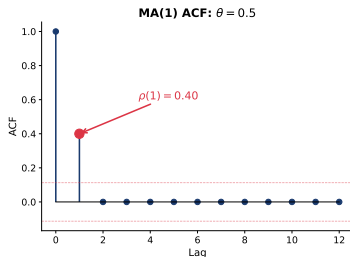
Variante de răspuns

(A) 0.50 (B) 0.40 (C) 0.25 (D) 0.33

Întrebarea 10: Răspuns

Răspuns corect: (B) 0.40

- $\rho(1) = \frac{\theta}{1+\theta^2} = \frac{0.5}{1+0.25} = \frac{0.5}{1.25} = 0.40$
- Observați că $\rho(1) < \theta$ — autocorelația este **întotdeauna** atenuată



Întrebarea 11

Întrebare

☐ Care afirmație despre ACF-ul unui ARMA(1,1) este **adevărată**?

Variante de răspuns

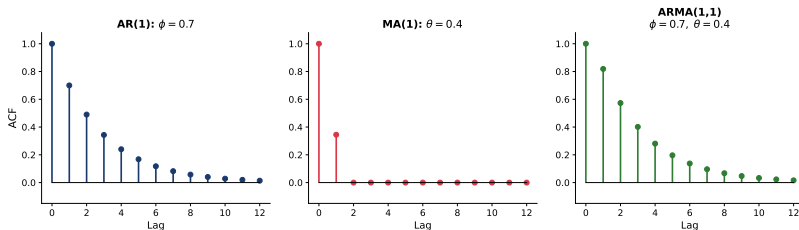
- (A) Se anulează după lag 1
- (B) Descreștere exponențială începând de la lag 1, cu $\rho(1) \neq \phi$
- (C) Este zero pentru toate lag-urile
- (D) Urmează exact tiparul ϕ^h pentru orice $h \geq 0$

Întrebarea 11: Răspuns

Răspuns corect: (B) Descreștere exponențială de la lag 1, cu $\rho(1) \neq \phi$

- $\rho(1) = \frac{(1+\phi\theta)(\phi+\theta)}{1+2\phi\theta+\theta^2} \neq \phi$ (componenta MA modifică lag-ul 1)
- Pentru $h \geq 2$: $\rho(h) = \phi \rho(h-1)$ — descreștere exponențială ca la AR(1)

ACF Comparison: AR(1) vs MA(1) vs ARMA(1,1)



Întrebarea 12

Întrebare

□ Un proces AR(2) are $\phi_1 = 0.8$ și $\phi_2 = 0.3$. Este staționar?

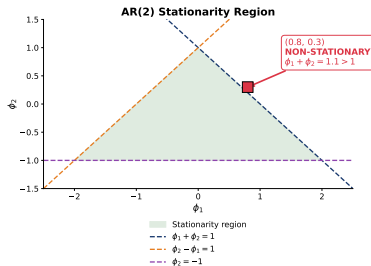
Variante de răspuns

- (A) Da, este staționar
- (B) Nu, deoarece $\phi_1 + \phi_2 = 1.1 > 1$
- (C) Nu se poate determina fără date
- (D) Depinde de valoarea lui σ^2

Întrebarea 12: Răspuns

Răspuns corect: (B) Nu, deoarece $\phi_1 + \phi_2 = 1.1 > 1$

- Condițiile necesare pentru staționaritate AR(2):
- $\phi_1 + \phi_2 < 1$, $\phi_2 - \phi_1 < 1$, $|\phi_2| < 1$
- Aici $0.8 + 0.3 = 1.1 > 1 \Rightarrow$ prima condiție este încălcată



Întrebarea 13

Întrebare

- ☐ Ce garantează teorema descompunerii Wold?

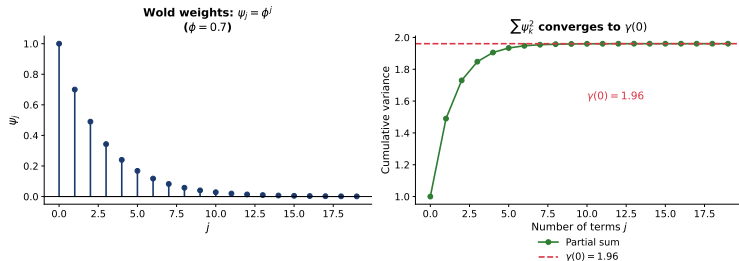
Variante de răspuns

- (A) Orice serie de timp este un proces AR
- (B) Orice proces staționar se poate scrie ca $MA(\infty)$: $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$
- (C) Orice proces are varianță finită
- (D) Modelele ARMA sunt întotdeauna invertibile

Întrebarea 13: Răspuns

Răspuns corect: (B) Orice proces staționar = $MA(\infty)$

- Teorema Wold: $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + D_t$, unde D_t este componenta deterministă
- Aceasta justifică modelele ARMA: sunt aproximări parcimonioase ale lui $MA(\infty)$



Întrebarea 14

Întrebare

▣ AR(1) cu $\phi = 0.9$, $\sigma^2 = 1$. Ce se întâmplă cu lăţimea IC pe măsură ce $h \rightarrow \infty$?

Variante de răspuns

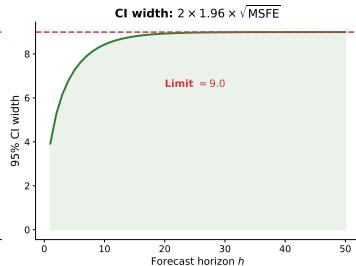
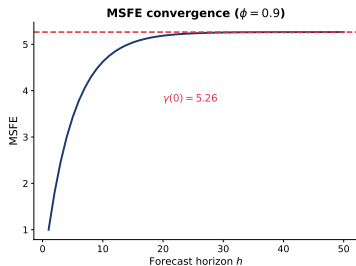
- (A) Rămâne constantă
- (B) Scade la zero
- (C) Creşte spre $2 \times 1.96 \times \sqrt{1/(1 - 0.81)} \approx 9.0$
- (D) Creşte la infinit

Întrebarea 14: Răspuns

Răspuns corect: (C) Crește spre ≈ 9.0

□ $MSFE(\infty) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} = \frac{1}{1-0.81} = \frac{1}{0.19} \approx 5.26$

□ Lățimea IC = $2 \times 1.96 \sqrt{5.26} \approx 2 \times 1.96 \times 2.29 \approx 9.0$



Bibliografie I

Lucrări fundamentale ARMA

- Box, G.E.P., & Jenkins, G.M. (1970). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden-Day.
- Akaike, H. (1974). A New Look at the Statistical Model Identification, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6), 716–723.
- Schwarz, G. (1978). Estimating the Dimension of a Model, *The Annals of Statistics*, 6(2), 461–464.
- Ljung, G.M., & Box, G.E.P. (1978). On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models, *Biometrika*, 65(2), 297–303.

Manuale clasice

- Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- Brockwell, P.J., & Davis, R.A. (2016). *Introduction to Time Series and Forecasting*, 3rd ed., Springer.
- Shumway, R.H., & Stoffer, D.S. (2017). *Time Series Analysis and Its Applications*, 4th ed., Springer.

Bibliografie II

Referințe moderne

- ▣ Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*, 3rd ed., OTexts.
- ▣ Box, G.E.P., Jenkins, G.M., Reinsel, G.C., & Ljung, G.M. (2015). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, 5th ed., Wiley.
- ▣ Lütkepohl, H. (2005). *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer.

Resurse online și cod

- ▣ **Quantlet**: <https://quantlet.com> → Depozit de cod pentru statistică
- ▣ **Quantinar**: <https://quantinar.com> → Platformă de învățare metode cantitative
- ▣ **GitHub TSA**: https://github.com/QuantLet/TSA/tree/main/TSA_ch2 ➤ Cod Python pentru acest capitol

Vă Mulțumim!

Întrebări?

Materialele cursului sunt disponibile la: <https://danpele.github.io/Time-Series-Analysis/>



Quantlet



Quantinar