



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 2: Modele ARMA

Seminar



Cuprins Seminar

- 1 Test Grilă
- 2 Întrebări Adevărat/Fals
- 3 Exerciții de Calcul
- 4 Exerciții Python
- 5 Întrebări de Discuție
- 6 Exercițiu cu asistență AI
- 7 Formule Cheie

Test 1: Operatorul Lag

Întrebare

Care este rezultatul aplicării $(1 - L)^2$ lui X_t ?

- A. $X_t - X_{t-1}$
- B. $X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$
- C. $X_t + X_{t-1} + X_{t-2}$
- D. $X_t - X_{t-2}$

Test 1: Răspuns

Răspuns: B

$$X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$$

Explicație:

$$\begin{aligned}(1 - L)^2 X_t &= (1 - 2L + L^2) X_t \\ &= X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}\end{aligned}$$

Aceasta este diferența de ordinul doi a lui X_t .



Operatorul lag: $L^k X_t = X_{t-k}$

TSA_ch2_lag_operator

Test 2: Staționaritatea AR(1)

Întrebare

Pentru ce valoare a lui ϕ procesul AR(1) $X_t = 0.5 + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$ este staționar?

- ☐ A. $\phi = 1.2$
- ☐ B. $\phi = 1.0$
- ☐ C. $\phi = -0.8$
- ☐ D. $\phi = -1.5$

Test 2: Răspuns

Răspuns: C

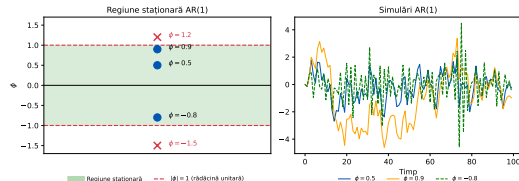
$\phi = -0.8$ (Staționar)

Condiția de staționaritate AR(1):

$$|\phi| < 1$$

Verificarea fiecărei opțiuni:

- A: $|1.2| = 1.2 > 1$ ✗
- B: $|1.0| = 1$ (rădăcină unitară) ✗
- C: $|-0.8| = 0.8 < 1$ ✓
- D: $|-1.5| = 1.5 > 1$ ✗



AR(1): regiunea staționară $|\phi| < 1$

Întrebare

Observați următorul model ACF: vârf semnificativ la lag 1, apoi toate lag-urile în benzile de încredere. PACF arată descreștere graduală. Ce model este sugerat?

- A. AR(1)
- B. MA(1)
- C. ARMA(1,1)
- D. Zgomot alb

Test 3: Răspuns

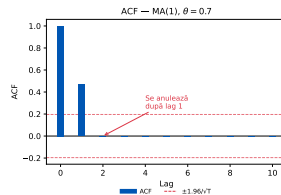
Răspuns: B

MA(1)

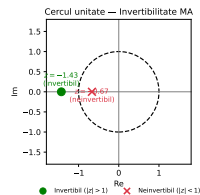
Regula cheie de identificare:

- ACF se anulează după lag $q \Rightarrow MA(q)$
- PACF se anulează după lag $p \Rightarrow AR(p)$

Aici: ACF se anulează la lag 1, PACF descrește
 \Rightarrow **MA(1)**



MA(1): ACF se anulează după lag 1



TSA_ch2_ma1

Test 4: Invertibilitatea MA

Întrebare

Pentru procesul MA(1) $X_t = \varepsilon_t + 1.5\varepsilon_{t-1}$, este procesul invertibil?

- ☐ A. Da, deoarece procesele MA sunt întotdeauna invertibile
- ☐ B. Da, deoarece $1.5 > 0$
- ☐ C. Nu, deoarece $|\theta| = 1.5 > 1$
- ☐ D. Nu, deoarece procesele MA nu sunt niciodată invertibile

Test 4: Răspuns

Răspuns: C

Nu este invertibil ($|\theta| = 1.5 > 1$)

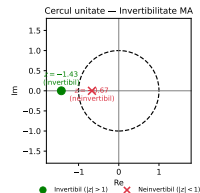
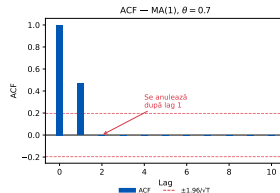
Invertibilitatea MA(1):

Necesită $|\theta| < 1$

Echivalent: rădăcina lui $\theta(z) = 1 + \theta z = 0$ trebuie să fie în afara cercului unitate.

Aici: $z = -1/1.5 = -0.67$ este în interior!

⇒ **Nu este invertibil**



Invertibilitate: rădăcina în afara cercului unitate

Întrebare

Forma compactă $\phi(L)X_t = \theta(L)\varepsilon_t$ reprezintă ce model?

- ☐ A. Model AR pur
- ☐ B. Model MA pur
- ☐ C. Model ARMA
- ☐ D. Niciunul dintre cele de mai sus

Răspuns: C

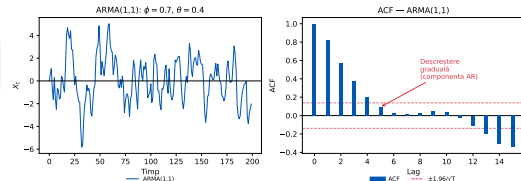
Model ARMA

Notăția cu polinoame lag:

- $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p$
- $\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q$

Cazuri speciale:

- $\theta(L) = 1$: AR pur
- $\phi(L) = 1$: MA pur



ARMA(1,1): combină AR și MA

Întrebare

Când comparăm $ARMA(1,1)$ și $ARMA(2,1)$ folosind BIC, care afirmație este corectă?

- ☐ A. BIC mai mic înseamnă întotdeauna prognoze mai bune
- ☐ B. BIC penalizează complexitatea mai puțin decât AIC
- ☐ C. Modelul cu BIC mai mic este preferat
- ☐ D. BIC poate compara doar modele cu același număr de parametri

Test 6: Răspuns

Răspuns: C

Modelul cu BIC mai mic este preferat

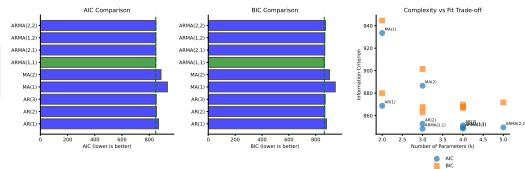
Criterii Informaționale:

$$AIC = -2 \ln(\hat{L}) + 2k$$

$$BIC = -2 \ln(\hat{L}) + k \ln(n)$$

BIC penalizează complexitatea **mai mult** decât AIC (pentru $n > 7$).

⇒ BIC favorizează modele mai simple.



Selecția modelului: AIC vs BIC

Test 7: Testul Ljung-Box

Întrebare

După ajustarea unui model ARMA(2,1), rulați testul Ljung-Box pe reziduuri și obțineți valoare- $p = 0.02$. Ce concluzie trageți?

- ☐ A. Modelul este adecvat
- ☐ B. Reziduurile sunt zgomot alb
- ☐ C. Există autocorelație semnificativă în reziduuri
- ☐ D. Modelul are prea mulți parametri

Test 7: Răspuns

Răspuns: C

Autocorelație semnificativă în reziduuri

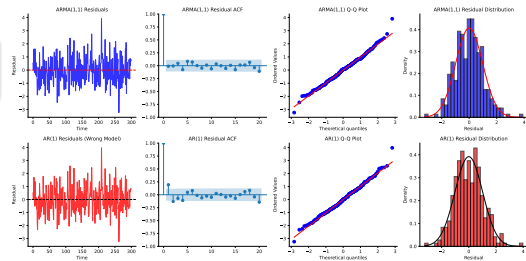
Testul Ljung-Box:

- H_0 : Reziduurile sunt zgomot alb
- H_1 : Autocorelație prezentă

valoare-p = 0.02 < 0.05

⇒ **Respingem H_0**

Modelul este **inadecvat** — încercați alte ordine.



Diagnostic: ACF trebuie să fie zgomot alb

Întrebare

Pentru un model AR(1) cu $\phi = 0.6$ și medie $\mu = 10$, ce se întâmplă cu prognozele când orizontul $h \rightarrow \infty$?

- ☐ A. Prognozele cresc fără limită
- ☐ B. Prognozele converg la 0
- ☐ C. Prognozele converg la $\mu = 10$
- ☐ D. Prognozele oscilează pentru totdeauna

Test 8: Răspuns

Răspuns: C

Proгноzele converg la $\mu = 10$

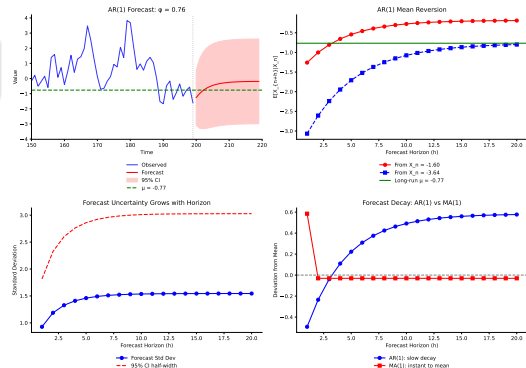
Formula de prognoză AR(1):

$$\hat{X}_{n+h|n} = \mu + \phi^h(X_n - \mu)$$

Deoarece $|\phi| = 0.6 < 1$:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \phi^h = 0$$

\Rightarrow Proгноzele converg la μ .
Revenire la medie!



Proгноze AR(1): revenire la medie

 TSA_ch2_forecasting

Test 9: Rădăcinile AR(2)

Întrebare

Un proces AR(2) are rădăcinile caracteristice $z_1 = 0.8$ și $z_2 = -0.5$. Este staționar?

- ☐ A. Da, deoarece ambele rădăcini sunt în interiorul cercului unitate
- ☐ B. Nu, deoarece o rădăcină este negativă
- ☐ C. Nu, deoarece rădăcinile trebuie să fie în afara cercului unitate
- ☐ D. Nu se poate determina fără mai multe informații

Test 9: Răspuns

Răspuns: C

Rădăcinile trebuie să fie în afara cercului unitate

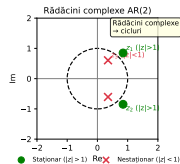
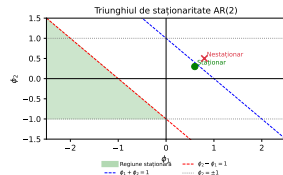
Condiția de staționaritate:

Rădăcinile lui $\phi(z) = 0$ trebuie să fie în afara cercului unitate ($|z| > 1$).

Aici:

- $|z_1| = 0.8 < 1$ ✗
- $|z_2| = 0.5 < 1$ ✗

Ambele în interior \Rightarrow **Nestaționar**



AR(2): rădăcini și triunghiul de staționaritate

Test 10: Proprietățile MA(q)

Întrebare

Pentru un proces MA(2), ACF-ul:

- ☐ A. Descrește exponențial
- ☐ B. Se anulează după lag 2
- ☐ C. Se anulează după lag 1
- ☐ D. Nu se anulează niciodată

Test 10: Răspuns

Răspuns: B

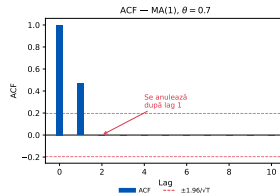
Se anulează după lag 2

Proprietatea ACF pentru $MA(q)$:

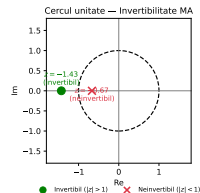
$$\rho(h) = 0 \text{ pentru } h > q$$

- $MA(1)$: ACF se anulează după lag 1
- $MA(2)$: ACF se anulează după lag 2
- $MA(q)$: ACF se anulează după lag q

Caracteristica cheie de identificare!



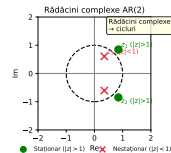
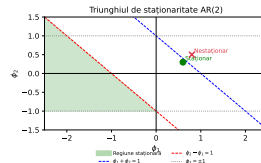
MA: anularea ACF este semnătura



Afirmație	A/F?
1. Un proces AR(2) poate prezenta comportament pseudo-ciclic.	?
2. Procesele MA necesită o condiție de staționaritate.	?
3. PACF-ul unui proces AR(p) se anulează după lag p .	?
4. Dacă AIC selectează ARMA(2,1) și BIC selectează ARMA(1,1), nu pot fi ambele corecte.	?
5. Intervalele de încredere se îngustează pe măsură ce orizontul crește.	?
6. Ecuațiile Yule-Walker pot fi folosite pentru a estima parametrii MA.	?

Adevărat sau Fals? — Răspunsuri

- 1 **ADEVĂRAT**: AR(2) cu rădăcini complexe \Rightarrow oscilații amortizate
- 2 **FALS**: Procesele MA sunt întotdeauna staționare; au nevoie de *invertibilitate*
- 3 **ADEVĂRAT**: Caracteristica cheie de identificare a AR(p)
- 4 **FALS**: Ambele sunt „corecte” pentru criteriile lor (AIC: estimare, BIC: parcimonie)
- 5 **FALS**: IC se *lărgesc* cu orizontul (mai multă incertitudine)
- 6 **FALS**: Yule-Walker este pentru AR; MA folosește MLE



AR(2): rădăcini complexe \Rightarrow cicluri

Exercițiul 1: Proprietățile AR(1)

Problemă: Considerați procesul AR(1):

$$X_t = 2 + 0.7X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, 9)$$

Calculați:

- ❶ Media μ
- ❷ Varianța $\gamma(0)$
- ❸ Autocovarianța $\gamma(1)$ și $\gamma(2)$
- ❹ Autocorelația $\rho(1)$ și $\rho(2)$

Exercițiul 1: Soluție

Dat: $c = 2$, $\phi = 0.7$, $\sigma^2 = 9$

1. Media:

$$\mu = \frac{c}{1-\phi} = \frac{2}{1-0.7} = \frac{2}{0.3} = \mathbf{6.67}$$

2. Varianța:

$$\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} = \frac{9}{1-0.49} = \mathbf{17.65}$$

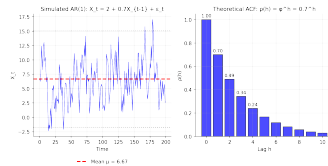
3. Autocovarianța:

$$\gamma(1) = \phi \cdot \gamma(0) = 0.7 \times 17.65 = \mathbf{12.35}$$

$$\gamma(2) = \phi^2 \cdot \gamma(0) = 0.49 \times 17.65 = \mathbf{8.65}$$

4. Autocorelația:

$$\rho(1) = \phi = \mathbf{0.7}, \quad \rho(2) = \phi^2 = \mathbf{0.49}$$



AR(1) Solution Summary	
Model: $X_t = 2 + 0.7X_{t-1} + \epsilon_t$ $\epsilon_t \sim \text{WN}(0, 9)$	
Results:	
1. Mean:	
$\mu = c/(1-\phi) = 2/(1-0.7) = 6.6667$	
2. Variance:	
$\gamma(0) = \sigma^2/(1-\phi^2) = 9/0.5100 = 17.6471$	
3. Autocovariance:	
$\gamma(1) = \phi \cdot \gamma(0) = 0.7 \times 17.65 = 12.3529$	
$\gamma(2) = \phi^2 \cdot \gamma(0) = 0.48999999999999994 \times 17.65 = 8.6471$	
4. Autocorrelation:	
$\rho(1) = \phi = 0.7$	
$\rho(2) = \phi^2 = 0.48999999999999994$	

Simulare AR(1) și ACF

Exercițiul 2: Proprietățile MA(1)

Problemă: Considerați procesul MA(1):

$$X_t = 5 + \varepsilon_t - 0.4\varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, 4)$$

Calculați:

- ❶ Media μ
- ❷ Varianța $\gamma(0)$
- ❸ Autocovarianța $\gamma(1)$
- ❹ Autocorelația $\rho(1)$
- ❺ Este acest proces invertibil?

Exercițiul 2: Soluție

Dat: $\mu = 5$, $\theta = -0.4$, $\sigma^2 = 4$

1. Media:

$$\mathbb{E}[X_t] = \mu = 5$$

2. Variația:

$$\gamma(0) = \sigma^2(1 + \theta^2) = 4(1.16) = 4.64$$

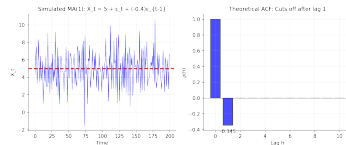
3. Autocovarianța:

$$\gamma(1) = \theta\sigma^2 = -0.4 \times 4 = -1.6$$

4. Autocorelația:

$$\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{-1.6}{4.64} = -0.345$$

5. Invertibilitate: $|\theta| = 0.4 < 1 \Rightarrow$ **Da**



MA(1) Solution Summary	
Model: $X_t = 5 + \epsilon_t + (-0.4)\epsilon_{t-1}$ $\epsilon_t \sim \text{WN}(0, 4)$	
Results:	
1. Mean:	$\mathbb{E}[X_t] = 5$
2. Variance:	$\gamma(0) = \sigma^2(1+\theta^2) = 4(1.16) = 4.64$
3. Autocovariance at lag 1:	$\gamma(1) = \theta\sigma^2 = -0.4 \times 4 = -1.6$
4. Autocorrelation:	$\rho(1) = \theta/(1+\theta^2) = -0.3448$ $\rho(h) = 0$ for $h \geq 2$
5. Invertibility:	$ \theta = 0.4 < 1$ - INVERTIBLE ✓

MA(1): ACF se anulează după lag 1

Exercițiul 3: Rădăcinile Caracteristice

Problemă: Considerați procesul AR(2):

$$X_t = 0.5X_{t-1} + 0.3X_{t-2} + \varepsilon_t$$

- 1 Scrieți ecuația caracteristică
- 2 Găsiți rădăcinile caracteristice
- 3 Este acest proces staționar?

Exercițiul 3: Soluție

1. Ecuația caracteristică:

$$\phi(z) = 1 - 0.5z - 0.3z^2 = 0$$

$$\text{Sau: } 0.3z^2 + 0.5z - 1 = 0$$

2. Rădăcinile (formula quadratică):

$$z = \frac{-0.5 \pm \sqrt{0.25 + 1.2}}{0.6}$$

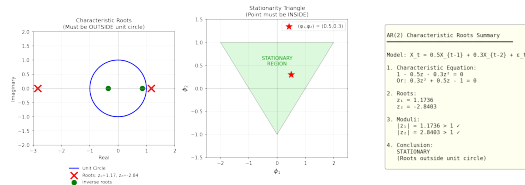
$$z_1 = 1.17, \quad z_2 = -2.84$$

3. Verificarea staționarității:

$$|z_1| = 1.17 > 1 \quad \checkmark$$

$$|z_2| = 2.84 > 1 \quad \checkmark$$

Ambele în afara cercului unitate \Rightarrow **Staționar**



Rădăcini în afara cercului \Rightarrow staționar

Exercițiul 4: Prognoză

Problemă: Ați ajustat un model AR(1):

$$X_t = 3 + 0.8X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \sigma^2 = 4$$

Dat $X_{100} = 20$, calculați:

- ❶ Prognoza la 1 pas înainte $\hat{X}_{101|100}$
- ❷ Prognoza la 2 pași înainte $\hat{X}_{102|100}$
- ❸ Prognoza pe termen lung când $h \rightarrow \infty$
- ❹ Intervalul de încredere de 95% pentru $\hat{X}_{101|100}$

Exercițiul 4: Soluție

Dat: $c = 3$, $\phi = 0.8$, $\sigma^2 = 4$, $X_{100} = 20$

Media: $\mu = \frac{3}{1-0.8} = 15$

1. Prognoza la un pas:

$$\hat{X}_{101|100} = 3 + 0.8 \times 20 = 19$$

2. Prognoza la doi pași:

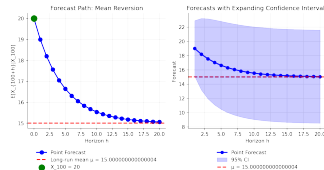
$$\hat{X}_{102|100} = 3 + 0.8 \times 19 = 18.2$$

3. Prognoza pe termen lung:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \hat{X}_{100+h|100} = \mu = 15$$

4. IC 95%:

$$19 \pm 1.96 \times 2 = [15.08, 22.92]$$



AR(1) Forecasting Summary	
Model: $X_t = 3 + 0.8X_{t-1} + \varepsilon_t$ $\sigma^2 = 4$, $X_{100} = 20$	
Unconditional Mean: $\mu = c/(1-\phi) = 3/0.19999999999999999 = 15.000000000000004$	
Forecasts:	
1. One-step ahead: $X'_{101 100} = c + \phi X_{100}$ $= 3 + 0.8 \times 20$ $= 19.0$	
2. Two-step ahead: $X'_{102 100} = c + \phi X'_{101 100}$ $= 3 + 0.8 \times 19.0$ $= 18.200000000000003$	
3. Long-run (lim): $\lim X'_{100+h 100} = \mu = 15.000000000000004$	
4. 95% CI for $X'_{101 100}$: $19.0 \pm 1.96\sigma$ $= [15.08, 22.92]$	

Prognoza converge la medie

Exercițiu Python 1: Simulare și Ajustare AR(1)

Sarcină:

- 1 Simulați 300 de observații dintr-un AR(1) cu $\phi = 0.6$
- 2 Reprezentați grafic seria și ACF/PACF
- 3 Ajustați un model AR(1) și comparați $\hat{\phi}$ vs ϕ real
- 4 Examinați diagnosticele reziduurilor

Cod cheie:

```
from statsmodels.tsa.arima.model import ARIMA
model = ARIMA(x, order=(1, 0, 0)).fit()
print(model.summary())
```

Exercițiu Python 2: Selecția Modelului

Sarcină:

- 1 Încărcați o serie de timp și verificați staționaritatea (testul ADF)
- 2 Comparați AIC/BIC pentru AR(1), MA(1), ARMA(1,1), ARMA(2,1)
- 3 Selectați cel mai bun model
- 4 Generați prognoze cu intervale de încredere

Funcții cheie:

- `adfuller(x)` pentru testul de staționaritate
- `model.aic`, `model.bic` pentru criterii
- `model.get_forecast(h)` pentru predicții

Exercițiu Python 3: Verificarea Diagnosticelor

Sarcină: După ajustarea unui model, efectuați diagnostice complete:

- 1 Reprezentați grafic reziduurile în timp
- 2 Reprezentați grafic ACF-ul reziduurilor
- 3 Creați graficul Q-Q pentru normalitate
- 4 Rulați testul Ljung-Box

Funcții cheie:

- `model.resid` pentru reziduuri
- `plot_acf(resid)` pentru graficul ACF
- `stats.probplot(resid)` pentru graficul Q-Q
- `acorr_ljungbox(resid, lags=[10])` pentru test

Discuție 1: Selecția Modelului

Scenariu: Modelați rate de inflație lunare. După verificarea staționarității:

- ACF: semnificativ la lag-urile 1, 2, 3, apoi descrește
- PACF: semnificativ la lag-urile 1, 2, apoi se anulează
- AIC selectează ARMA(2,3)
- BIC selectează AR(2)

Întrebări:

- 1 Ce sugerează modelul ACF/PACF?
- 2 De ce nu sunt de acord AIC și BIC?
- 3 Ce model ați alege și de ce?
- 4 Ce verificări suplimentare ați efectua?

Discuție 2: Evaluarea Prognozei

Scenariu: Ajustați un model ARMA(1,1) pe randamente zilnice de acțiuni. Ajustarea în eșantion arată bine (Ljung-Box $p = 0.45$), dar RMSE în afara eșantionului este mai rău decât mersul aleatoriu.

Întrebări:

- 1 Este aceasta surprinzător? De ce sau de ce nu?
- 2 Ce ne spune despre predictibilitatea randamentelor?
- 3 Ar trebui să concluzionați că modelul ARMA este inutil?
- 4 Ce alternative ați putea considera?

Indiciu: Gândiți-vă la Ipoteza Pieței Eficiente și la ce captează ARMA vs. gruparea volatilității.

Exercițiu AI: Gândire critică

Prompt de testat în ChatGPT / Claude / Copilot

“Descarcă de pe FRED numărul lunar de cereri inițiale de șomaj din SUA (seria ICNSA, neajustat sezonier) din 2010-01 până în 2024-12 (180 observații). Calculează diferențele logaritmice pentru a obține rata de creștere. Testează staționaritatea cu ADF și KPSS. Estimează modele ARMA cu ordine (p, q) între $(1, 0)$ și $(3, 3)$, selectează cel mai bun model după AIC/BIC. Verifică reziduurile (Ljung-Box, normalitate) și prognozează 6 luni. Vreau cod Python complet cu grafice.”

Exercițiu:

- 1 Rulați prompt-ul într-un LLM la alegere și analizați critic răspunsul.
- 2 Verifică staționaritatea *înainte* de a estima ARMA? Folosește ambele teste (ADF + KPSS)?
- 3 Cum gestionează vârful COVID-19 din date? Îl tratează ca outlier sau îl ignoră?
- 4 Selecția ordinelor (p, q) e justificată prin ACF/PACF sau doar prin AIC?
- 5 Reziduurile sunt testate complet? (Ljung-Box, Q-Q plot, heteroscedasticitate)

Atenție: Codul generat de AI poate rula fără erori și arăta profesional. *Asta nu înseamnă că e corect.*

Concept	Formula
Media AR(1)	$\mu = c/(1 - \phi)$
Varianța AR(1)	$\gamma(0) = \sigma^2/(1 - \phi^2)$
ACF AR(1)	$\rho(h) = \phi^h$
Staționaritate AR(1)	$ \phi < 1$
Varianța MA(1)	$\gamma(0) = \sigma^2(1 + \theta^2)$
ACF MA(1)	$\rho(1) = \theta/(1 + \theta^2), \rho(h) = 0$ pentru $h > 1$
Invertibilitate MA(1)	$ \theta < 1$
Prognoza AR(1)	$\hat{X}_{n+h n} = \mu + \phi^h(X_n - \mu)$
IC Prognoză	$\hat{X} \pm z_{\alpha/2} \times \sqrt{\text{MSFE}(h)}$
AIC	$-2 \ln(\hat{L}) + 2k$
BIC	$-2 \ln(\hat{L}) + k \ln(n)$

Întrebări?

Succes la exerciții!

Următorul Seminar: ARIMA și Modele Sezoniere