



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 7: Cointegrare & VECM

Seminar



Cuprins Seminar

- 1 Test de Recapitulare
- 2 Întrebări Adevărat/Fals
- 3 Probleme Practice
- 4 Exemple Rezolvate
- 5 Subiecte de Discuție
- 6 Exercițiu cu asistență AI
- 7 Exerciții pentru Studiu Individual

Test 1: Definiția Cointegrării

Întrebare

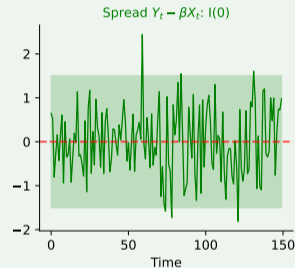
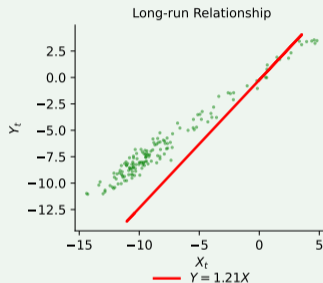
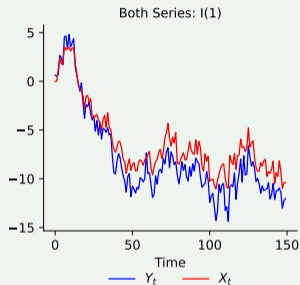
Două variabile $I(1)$, X_t și Y_t , sunt cointegrate dacă:

- ☐ A) Ambele sunt staționare
- ☐ B) Suma lor este $I(2)$
- ☐ C) O combinație liniară a lor este $I(0)$
- ☐ D) Au aceeași medie

Răspunsul pe slide-ul următor...

Test 1: Răspuns

Răspuns: C – O combinație liniară este $I(0)$



Cheie: $Y_t - \beta X_t \sim I(0)$ înseamnă că seriile au un trend stochastic comun. Combinația liniară (spread-ul) este staționară chiar dacă ambele serii sunt nestaționare.

Întrebare

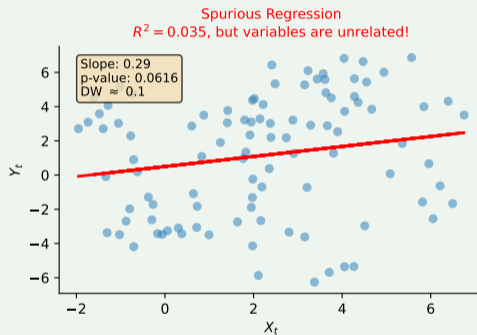
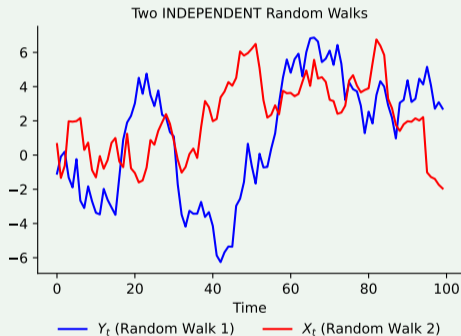
Când regresăm un mers aleator pe alt mers aleator independent, de obicei obținem:

- ☐ A) R^2 mic și coeficienți nesemnificativi
- ☐ B) R^2 mare și coeficienți semnificativi (fals!)
- ☐ C) Coeficienți zero
- ☐ D) Rezultate nedefinite

Răspunsul pe slide-ul următor...

Test 2: Răspuns

Răspuns: B – R^2 mare și coeficienți semnificativi (fals!)



Granger-Newbold (1974): Regresarea seriilor $I(1)$ nerelaționate dă rezultate înșelătoare. Regulă: Dacă $R^2 > DW$, suspectați regresie falsă!

Test 3: Testul Engle-Granger

Întrebare

În metoda Engle-Granger în doi pași, ce testăm în pasul 2?

- A) Dacă variabilele originale sunt staționare
- B) Dacă reziduurile regresiei au rădăcină unitară
- C) Dacă coeficienții sunt semnificativi
- D) Dacă R^2 este suficient de mare

Răspunsul pe slide-ul următor...

Test 3: Răspuns

Răspuns: B – Dacă reziduurile au rădăcină unitară

Pasul 1: Rulăm OLS: $Y_t = \alpha + \beta X_t + e_t$, salvăm reziduurile \hat{e}_t

Pasul 2: Test ADF pe reziduuri: $\Delta \hat{e}_t = \rho \hat{e}_{t-1} + \dots$

- $H_0: \rho = 0$ (rădăcină unitară \Rightarrow fără cointegrare)
- $H_1: \rho < 0$ (staționar \Rightarrow cointegrare!)

Important: Folosiți valorile critice Engle-Granger, nu ADF standard!

Test 4: Avantajul Testului Johansen

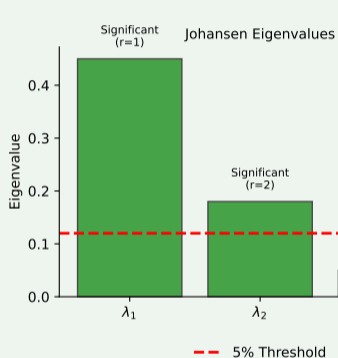
Întrebare

Principalul avantaj al testului Johansen față de Engle-Granger este:

- ☐ A) Este mai simplu de calculat
- ☐ B) Poate detecta relații de cointegrare multiple
- ☐ C) Nu necesită date
- ☐ D) Găsește întotdeauna cointegrare

Răspunsul pe slide-ul următor...

Răspuns: B – Poate detecta relații de cointegrare multiple



Johansen vs Engle-Granger

Method	Engle-Granger	Johansen
# of CI vectors	1 only	Multiple
Dep. variable	Required	Not needed
Estimation	Two-step	MLE
Efficiency	Lower	Higher

Avantaje Johansen:

- Testează pentru $r = 0, 1, 2, \dots, k - 1$ vectori de cointegrare
- Verosimilitate maximă (mai eficient)
- Nu necesită alegerea variabilei dependente

Întrebare

Într-un VECM cu $k = 3$ variabile, dacă $\text{rang}(\Pi) = 2$, aceasta înseamnă:

- A) Fără cointegrare
- B) O relație de cointegrare
- C) Două relații de cointegrare
- D) Toate variabilele sunt staționare

Răspunsul pe slide-ul următor...

Răspuns: C – Două relații de cointegrare

Interpretarea rangului pentru k variabile:

- $\text{rang}(\Pi) = 0$: Fără cointegrare (folosiți VAR în diferențe)
- $0 < \text{rang}(\Pi) = r < k$: r vectori de cointegrare (folosiți VECM)
- $\text{rang}(\Pi) = k$: Toate variabilele sunt $I(0)$ (folosiți VAR în niveluri)

Cu $k = 3$ și $r = 2$:

- Două relații de echilibru
- Doar $k - r = 1$ trend stochastic comun

Întrebare

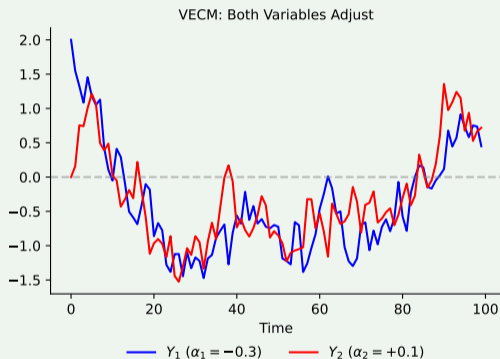
În ecuația VECM $\Delta Y_t = c + \alpha\beta'Y_{t-1} + \dots$, ce reprezintă α ?

- A) Vectorii de cointegrare
- B) Coeficienții de ajustare (încărcare)
- C) Dinamica pe termen scurt
- D) Varianța erorilor

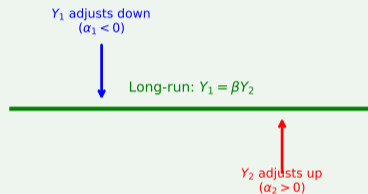
Răspunsul pe slide-ul următor...

Test 6: Răspuns

Răspuns: B – Coeficienții de ajustare (încărcare)



Error Correction Mechanism



$\Pi = \alpha\beta'$:

- β = vectorii de cointegrare (definesc echilibrul)
- α = vitezele de ajustare (cât de repede corectează fiecare variabilă)

Test 7: Termenul de Corecție a Erorilor

Întrebare

Dacă $Y_t - \beta X_t$ este relația de cointegrare și acest termen este pozitiv, ce se întâmplă?

- A) Y este deasupra echilibrului; Y ar trebui să scadă (dacă $\alpha < 0$)
- B) Y este sub echilibru; Y ar trebui să crească
- C) Nimic, corecția erorilor nu afectează nivelurile
- D) Ambele variabile cresc

Răspunsul pe slide-ul următor...

Răspuns: $A - Y$ deasupra echilibrului; scade dacă $\alpha < 0$

Mecanismul de corecție a erorilor:

$$\Delta Y_t = \alpha(Y_{t-1} - \beta X_{t-1}) + \dots$$

- Dacă $Y_{t-1} - \beta X_{t-1} > 0$: Y este “prea sus”
- Cu $\alpha < 0$: $\Delta Y_t < 0$ (Y scade spre echilibru)
- Aceasta este “corecția erorilor” care trage Y înapoi

Convenție de semn: α ar trebui să fie negativ pentru ca variabila dependentă să se miște înapoi spre echilibru.

Test 8: Exogenitate Slabă

Întrebare

Dacă $\alpha_2 = 0$ într-un VECM bivariat, aceasta înseamnă:

- ☐ A) Nu există cointegrare
- ☐ B) Variabila 2 nu se ajustează la dezechilibru (slab exogenă)
- ☐ C) Variabila 1 nu se ajustează
- ☐ D) Ambele variabile sunt staționare

Răspunsul pe slide-ul următor...

Test 8: Răspuns

Răspuns: B – Variabila 2 este slab exogenă

Exogenitate slabă: Variabila nu răspunde la dezechilibru.

Exemplu: Ratele dobânzii

- Rata pe termen lung (R_t) adesea slab exogenă ($\alpha_R \approx 0$)
- Rata pe termen scurt (r_t) se ajustează la spread ($\alpha_r < 0$)
- Interpretare: Banca centrală ajustează rata scurtă pentru a menține structura termenelor

Implicație: Putem estima o singură ecuație pentru variabila care se ajustează.

Întrebare

Testul trace Johansen cu $H_0 : r \leq 1$ vs $H_1 : r > 1$ testează dacă:

- A) Există exact un vector de cointegrare
- B) Există cel mult un vector de cointegrare
- C) Există mai mult de un vector de cointegrare
- D) Toate valorile proprii sunt zero

Răspunsul pe slide-ul următor...

Test 9: Răspuns

Răspuns: B/C – H_0 : cel mult 1; H_1 : mai mult de 1

Procedura de testare secvențială:

- 1 Testăm $H_0 : r = 0$ vs $H_1 : r > 0$
- 2 Dacă respingem, testăm $H_0 : r \leq 1$ vs $H_1 : r > 1$
- 3 Continuăm până nu mai respingem...

Statistica trace:

$$\lambda_{\text{trace}}(r) = -T \sum_{i=r+1}^k \ln(1 - \hat{\lambda}_i)$$

Respingem H_0 dacă statistica trace $>$ valoarea critică.

Întrebare

Dacă variabilele sunt cointegrate, folosirea VAR în diferențe prime în loc de VECM:

- ☐ A) Dă rezultate identice
- ☐ B) Este mai eficientă
- ☐ C) Pierde informația pe termen lung (model greșit specificat)
- ☐ D) Este abordarea preferată

Răspunsul pe slide-ul următor...

Test 10: Răspuns

Răspuns: C – Pierde informația pe termen lung

Teorema Reprezentării Granger: Dacă există cointegrare, reprezentarea VECM există și trebuie folosită.

	VAR(Δ)	VECM
Echilibru pe termen lung	Pierdut	Păstrat
Corecția erorilor	Nu	Da
Proгноze (termen lung)	Slabe	Mai bune

Concluzie: Diferențierea elimină relația pe termen lung pe care o reprezintă cointegrarea!

Determinați dacă fiecare afirmație este Adevărată sau Falsă:

- ❶ Cointegrarea necesită ca toate variabilele să fie $I(1)$.
- ❷ Vectorul de cointegrare este unic.
- ❸ Regresia falsă are statistică Durbin-Watson mică.
- ❹ În VECM, ambii coeficienți α trebuie să fie nenuli.
- ❺ Testul Johansen necesită alegerea unei variabile dependente.
- ❻ Numărul de trenduri comune $= k - r$.

Răspunsurile pe slide-ul următor...

Adevărat/Fals: Soluții

- ❶ Cointegrarea necesită ca toate variabilele să fie $I(1)$.

Cazul standard $CI(1,1)$: toate variabilele $I(1)$, combinația liniară $I(0)$.

ADEVĂRAT

- ❷ Vectorul de cointegrare este unic.

Unic doar până la înmulțirea cu un scalar. De obicei normalizat ($\beta_1 = 1$).

FALS

- ❸ Regresia falsă are statistică Durbin-Watson mică.

$DW \approx 0$ indică reziduuri puternic autocorelate (nestaționare).

ADEVĂRAT

- ❹ În VECM, ambii coeficienți α trebuie să fie nenuli.

Unul poate fi zero (exogenitate slabă). Cel puțin unul trebuie să fie nenul.

FALS

- ❺ Testul Johansen necesită alegerea unei variabile dependente.

Asta e pentru Engle-Granger. Johansen tratează toate variabilele simetric.

FALS

- ❻ Numărul de trenduri comune $= k - r$.

k variabile, r relații de cointegrare $\Rightarrow k - r$ trenduri stochastice comune.

ADEVĂRAT

Problema 1: Identificarea Cointegrării

Exercițiu

Aveți date trimestriale pentru consum (C_t) și venit (Y_t). Testele ADF arată că ambele sunt $I(1)$. Regresia $C_t = 0.85Y_t + e_t$ dă reziduuri cu statistica ADF = -3.92 . Valoarea critică Engle-Granger la 5% pentru 2 variabile este -3.34 .

Sunt C_t și Y_t cointegrate?

Răspunsul pe slide-ul următor...

Problema 1: Soluție

Soluție: Da, sunt cointegrate

Test: H_0 : Fără cointegrare (reziduurile au rădăcină unitară)

Statistica ADF: -3.92

Valoarea critică (5%): -3.34

Deoarece $-3.92 < -3.34$, **respingem** H_0 la nivelul de 5%.

Concluzie: Reziduurile sunt staționare \Rightarrow Există cointegrare!

Interpretare: Consumul și venitul au un trend comun. Vectorul de cointegrare este aproximativ $(1, -0.85)$, consistent cu ipoteză venitului permanent.

Problema 2: Interpretarea VECM

Exercițiu

Un VECM pentru rata pe termen scurt (r_t) și rata pe termen lung (R_t) dă:

$$\Delta r_t = 0.01 - 0.25(r_{t-1} - R_{t-1}) + \dots$$

$$\Delta R_t = 0.005 - 0.02(r_{t-1} - R_{t-1}) + \dots$$

Interpretați coeficienții de ajustare.

Răspunsul pe slide-ul următor...

Problema 2: Soluție

Soluție

Termenul de corecție a erorilor: $(r_{t-1} - R_{t-1}) = \text{spread-ul}$

Rata pe termen scurt ($\alpha_r = -0.25$):

- Când spread-ul este pozitiv (scurt > lung), rata scurtă scade
- 25% din dezechilibru este corectat per perioadă
- Rata scurtă se ajustează activ

Rata pe termen lung ($\alpha_R = -0.02$):

- Coeficient de ajustare foarte mic
- Rata lungă este aproape slab exogenă
- Condușă mai mult de așteptări, nu de corecția erorilor

Interpretare economică: Banca centrală (rata scurtă) se ajustează pentru a menține curba randamentelor.

Problema 3: Rezultatele Testului Johansen

Exercițiu

Testul trace Johansen pentru 3 variabile dă:

H_0	Stat. Trace	VC 5%
$r = 0$	45.2	29.8
$r \leq 1$	18.1	15.5
$r \leq 2$	3.2	3.8

Care este rangul de cointegrare?

Răspunsul pe slide-ul următor...

Problema 3: Soluție

Soluție: Rangul = 2

Testare secvențială:

- ❶ $H_0 : r = 0$: $45.2 > 29.8 \Rightarrow$ **Respingem** (cel puțin 1)
- ❷ $H_0 : r \leq 1$: $18.1 > 15.5 \Rightarrow$ **Respingem** (cel puțin 2)
- ❸ $H_0 : r \leq 2$: $3.2 < 3.8 \Rightarrow$ **Nu respingem**

Concluzie: $r = 2$ relații de cointegrare

Implicații:

- Două relații de echilibru între 3 variabile
- Doar $3 - 2 = 1$ trend stochastic comun
- Folosiți VECM cu 2 termeni de corecție a erorilor

Exemplu: Structura la Termen a Ratelor Dobânzii

Teoria Economică

Ipoteza aşteptărilor: $R_t^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E_t[r_{t+i}] + \text{primă}$

Dacă prima este constantă \Rightarrow spread-ul ($R_t - r_t$) ar trebui să fie staţionar.

Constatări Tipice

- Ambele rate sunt $I(1)$ (confirmat de ADF)
- Testul Johansen: $r = 1$ vector de cointegrare
- Vector de cointegrare $\approx (1, -1)$: spread-ul este staţionar
- Rata scurtă se ajustează ($\alpha_r < 0$), rata lungă slab exogenă

Implicaţie de Politică

Banca centrală controlează rata scurtă; rata lungă este condusă de aşteptări.

Exemplu: Paritatea Puterii de Cumpărare (PPP)

Teoria PPP

$e_t = p_t - p_t^*$ (log curs de schimb = diferențialul de prețuri)

Cursul real de schimb: $q_t = e_t - p_t + p_t^*$ ar trebui să fie staționar (PPP pe termen lung)

Provocări Empirice

- Teste rădăcină unitară: e_t , p_t , p_t^* toate $I(1)$
- Teste de cointegrare: Rezultate mixte în funcție de eșantion
- Timp de înjumătățire al deviațiilor PPP: 3-5 ani (ajustare lentă)
- Exogenitate slabă: Cursul de schimb adesea nu se ajustează

Puzzle-ul PPP

Cursul real de schimb este foarte persistent—revenirea lentă la medie este greu de explicat cu modelele standard.

Exemplu: Strategia Pairs Trading

Ideea

Găsiți acțiuni cointegrate \Rightarrow tranzacționați spread-ul staționar

Pași de Implementare

- ❶ **Identificați perechile:** Testați cointegrarea (ex., Coca-Cola & Pepsi)
- ❷ **Estimați spread-ul:** $z_t = P_A - \beta P_B$
- ❸ **Reguli de tranzacționare:**
 - $z_t > \mu + 2\sigma$: Vindeți A, Cumpărați B (spread prea larg)
 - $z_t < \mu - 2\sigma$: Cumpărați A, Vindeți B (spread prea îngust)
 - leșiți când $z_t \approx \mu$

Riscuri

Cointegrarea se poate rupe; spread-ul poate să nu revină; costuri de tranzacție.

Biblioteci Esențiale

```
from statsmodels.tsa.stattools import coint, adfuller  
from statsmodels.tsa.vector_ar.vecm import coint_johansen, VECM
```

Flux de Lucru

- 1 Teste rădăcină unitară: `adfuller(serie)`
- 2 Engle-Granger: `coint(y, x)` returnează stat. test & p-value
- 3 Johansen: `coint_johansen(data, det_order, k_ar_diff)`
- 4 Estimare VECM: `model = VECM(data, k_ar_diff=2, coint_rank=1)`
- 5 Rezultate: `results = model.fit()`

Notă

Exemple complete de lucru sunt furnizate în notebook-urile Jupyter.

Întrebare Cheie

Două serii sunt puternic corelate. Sunt ele cointegrate?

Răspuns: Nu neapărat!

- **Corelație:** Măsoară co-mișcarea (poate fi falsă pentru $I(1)$)
- **Cointegrare:** Necesită combinație liniară staționară

Exemplu

Două mersuri aleatoare independente pot avea corelație > 0.9 pur întâmplător (corelație falsă). Dar NU sunt cointegrate—spread-ul lor este tot $I(1)$.

Cointegrarea implică o relație de echilibru pe termen lung semnificativă.

Întrebare Cheie

Testul Johansen are 5 cazuri pentru componentele deterministe. Pe care să îl alegem?

Ghid

- ❶ **Fără constantă, fără trend:** Rar folosit (necesită date cu medie zero)
- ❷ **Constantă doar în EC:** Serii în nivel, fără drift
- ❸ **Constantă nerestricționată:** Cel mai comun pentru date economice
- ❹ **Trend în EC:** Seriile au trenduri deterministe
- ❺ **Trend nerestricționat:** Diferențe cu trend (necomun)

Sfat Practic

Începeți cu Cazul 3 (constantă nerestricționată). Verificați sensibilitatea la specificație. Folosiți raționament economic: au nivelurile trenduri?

Exercițiu AI: Gândire critică

Prompt de testat în ChatGPT / Claude / Copilot

“Folosind yfinance, descarcă prețurile zilnice de închidere Coca-Cola (KO) și PepsiCo (PEP) din 2015-01-01 până în 2024-12-31 (aprox. 2.500 observații). Testează dacă fiecare serie este $I(1)$ cu ADF și KPSS. Testează cointegrarea cu Engle-Granger și Johansen. Estimează un model VECM și interpretează vitezele de ajustare (α). Simulează o strategie simplă de pairs trading bazată pe spread-ul cointegrat. Vreau cod Python complet cu grafice.”

Exercițiu:

- 1 Rulați prompt-ul într-un LLM la alegere și analizați critic răspunsul.
- 2 Verifică ordinul de integrare al fiecărei serii *înainte* de cointegrare?
- 3 Folosește atât Engle-Granger cât și Johansen? Rezultatele coincid?
- 4 Coeficienții α au semnul corect? (ajustare spre echilibru pe termen lung)
- 5 Strategia de pairs trading ține cont de costurile de tranzacționare?

Atenție: Codul generat de AI poate rula fără erori și arăta profesional. *Asta nu înseamnă că e corect.*

Exerciții de Făcut Acasă

❶ **Teoretic:** Arătați că dacă Y_t și X_t sunt ambele mersuri aleatoare cu aceeași inovație, ele sunt cointegrate.

❷ **Calcul:** Având estimările VECM:

$$\Delta Y_t = 0.5 - 0.3(Y_{t-1} - 2X_{t-1}) + 0.2\Delta Y_{t-1}$$

$$\Delta X_t = 0.1 + 0.1(Y_{t-1} - 2X_{t-1}) + 0.4\Delta X_{t-1}$$

- Care este vectorul de cointegrare?
- Care variabilă se ajustează mai rapid?
- Care este relația de echilibru pe termen lung?

❸ **Aplicat:** Descărcați ratele trezoreriei la 10 ani și 3 luni:

- Testați pentru rădăcini unitare; Testați pentru cointegrare
- Estimați VECM; Interpretați coeficienții de ajustare

❹ **Gândire Critică:** De ce ar putea PPP să fie valabilă pe termen lung dar nu pe termen scurt?

Indicii

- ❶ Dacă $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$ și $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$ (același șoc), atunci $Y_t - X_t = Y_0 - X_0$ este constantă (staționară).
- ❷ Din VECM:
 - Vector de cointegrare: $(1, -2)$ (normalizat pe Y)
 - Y se ajustează mai rapid: $|\alpha_Y| = 0.3 > |\alpha_X| = 0.1$
 - Termen lung: $Y = 2X$ (când termenul EC = 0)
- ❸ Pentru ratele dobânzii:
 - Ambele sunt de obicei $I(1)$; spread-ul de obicei staționar
 - Așteptați un vector de cointegrare cu $(1, -1)$
 - Rata scurtă se ajustează de obicei; rata lungă adesea slab exogenă
- ❹ Deviații PPP: Costurile de transport, bunurile netranzactionate, prețurile rigide, tarifele, segmentarea pieței toate încetinesc ajustarea dar nu previn convergența pe termen lung.

Concluzii Cheie din Acest Seminar

Puncte Principale

- 1 Cointegrarea: Variabile $I(1)$ cu combinație liniară staționară
- 2 Regresia falsă: R^2 mare fără cointegrare este lipsit de sens
- 3 Engle-Granger: Simplu, dar doar un vector de cointegrare
- 4 Johansen: Vectori multipli, MLE, mai puternic

Perspective VECM

- β definește echilibrul; α determină viteza de ajustare
- Exogenitate slabă ($\alpha = 0$): Variabila nu răspunde la dezechilibru
- Folosiți întotdeauna VECM (nu VAR în diferențe) când există cointegrare

Amintiți-vă

Cointegrarea este despre **echilibrul pe termen lung**, nu doar corelație!