



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 4: Modele SARIMA

Seminar



Cuprins Seminar

- 1 Test de Recapitulare
- 2 Probleme Practice
- 3 Exemple Rezolvate
- 4 Analiză pe Date Reale
- 5 Subiecte de Discuție
- 6 Exerciții pentru Studiu Individual

Întrebare

Pentru date lunare cu sezonalitate anuală, ce face operatorul $(1 - L^{12})$?

- A) Ia 12 diferențe consecutive
- B) Calculează $Y_t - Y_{t-12}$
- C) Face media pe 12 luni
- D) Elimină primele 12 observații

Test 1: Diferențierea Sezonieră

Întrebare

Pentru date lunare cu sezonalitate anuală, ce face operatorul $(1 - L^{12})$?

- A) Ia 12 diferențe consecutive
- B) Calculează $Y_t - Y_{t-12}$
- C) Face media pe 12 luni
- D) Elimină primele 12 observații

Răspuns: B – Calculează $Y_t - Y_{t-12}$

Operatorul de diferență sezonieră:

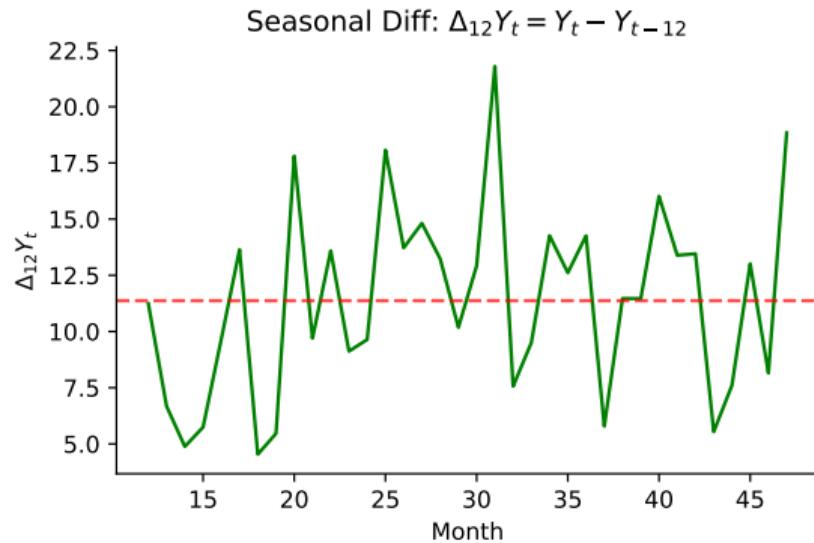
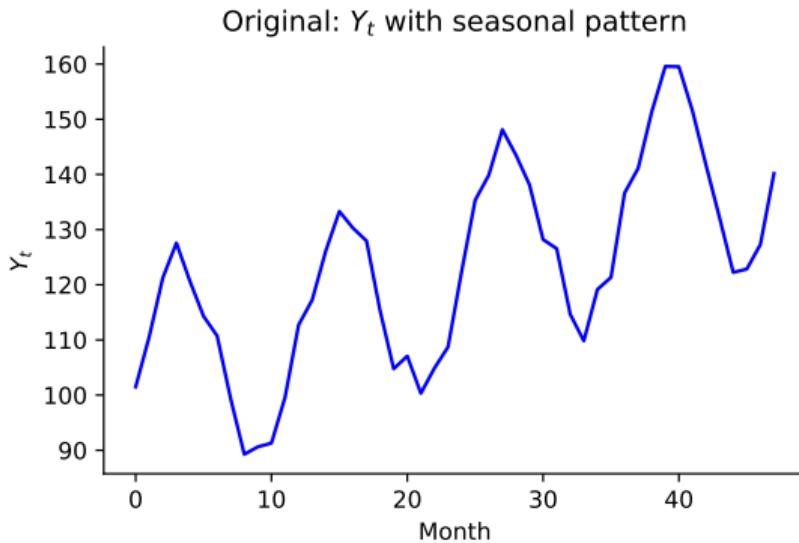
$$(1 - L^{12})Y_t = Y_t - L^{12}Y_t = Y_t - Y_{t-12}$$

Exemplu (vânzări ianuarie): $Y_{Jan2025} - Y_{Jan2024}$

Efect: Elimină modelul sezonier anual stabil

Notă: $(1 - L^s)$ pentru orice perioadă sezonieră s (trimestrial: $s = 4$, săptămânal: $s = 52$)

Vizual: Diferența Sezonieră



Diferențierea sezonieră elimină modelele anuale comparând aceleași perioade între ani.

Întrebare

Ce reprezintă SARIMA(1, 1, 1) × (1, 1, 1)₁₂?

- A) 12 modele ARIMA diferite
- B) ARIMA cu 12 termeni AR și 12 termeni MA
- C) ARIMA(1,1,1) cu ARIMA(1,1,1) sezonier la perioada 12
- D) Un model care necesită 12 ani de date

Test 2: Răspuns

Răspuns: C – ARIMA(1,1,1) cu ARIMA(1,1,1) sezonier la perioada 12

SARIMA($p, d, q \times (P, D, Q)_s$) Notation

$$\phi(L)\Phi(L^s)(1 - L)^d(1 - L^s)^D Y_t = \theta(L)\Theta(L^s)\varepsilon_t$$

Regular (Non-Seasonal)

p	= AR order	(Number of AR lags)
d	= Differencing	(Regular differences)
q	= MA order	(Number of MA lags)

Seasonal

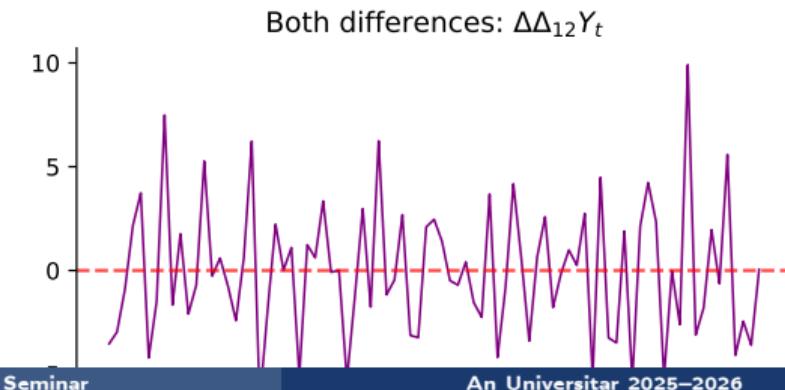
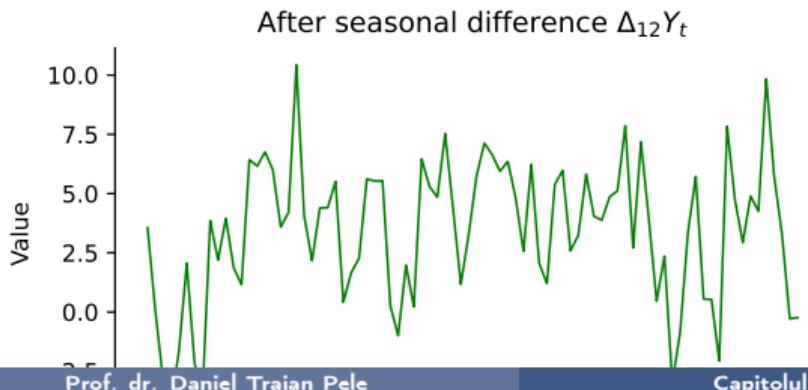
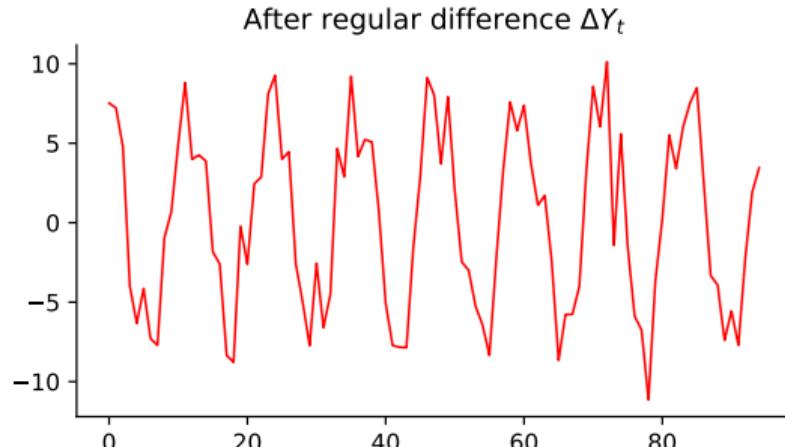
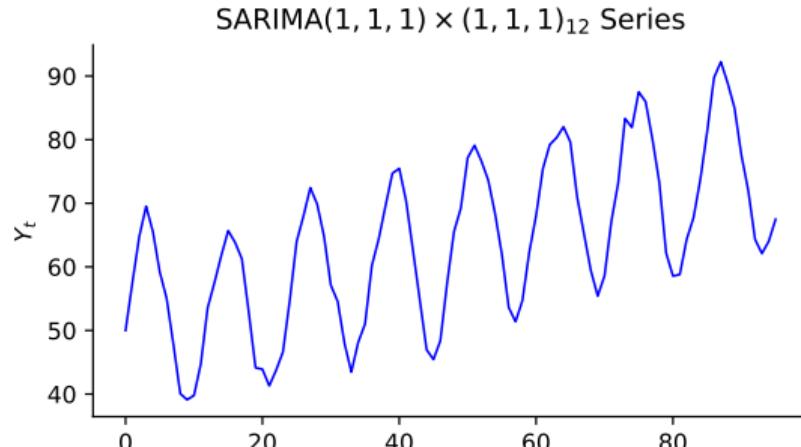
P	= Seasonal AR	(SAR lags at $s, 2s, \dots$)
D	= Seasonal Diff	(($1 - L^s$) D)
Q	= Seasonal MA	(SMA lags at $s, 2s, \dots$)
s	= Period	(Seasonal period)

Example: SARIMA(1, 1, 1) $\times (0, 1, 1)_{12}$

Monthly data with: AR(1), MA(1), one regular diff,
one seasonal diff at lag 12, seasonal MA(1)

$$(1 - \phi_1 L)(1 - \Phi_1 L^{12})(1 - L)(1 - L^{12}) Y_t = (1 + \theta_1 L)(1 + \Theta_1 L^{12}) \varepsilon_t$$

Vizual: Structura Modelului SARIMA



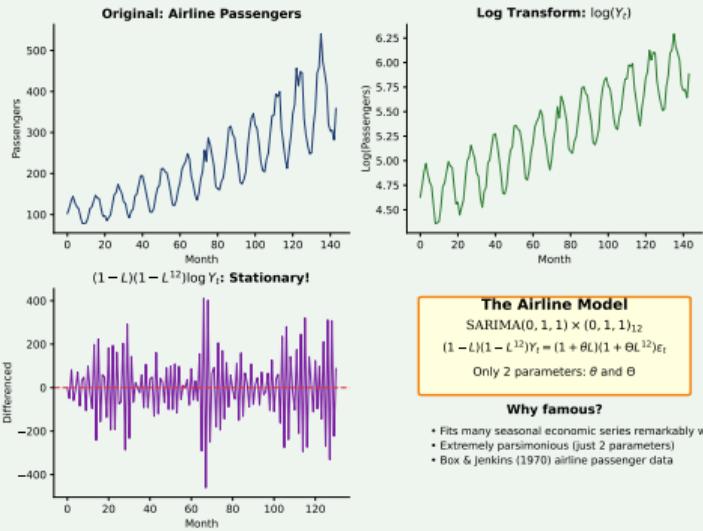
Întrebare

“Modelul airline” se referă la SARIMA(0, 1, 1) \times (0, 1, 1)₁₂. Câți parametri are (excluzând varianța)?

- A) 2 parametri
- B) 4 parametri
- C) 6 parametri
- D) 12 parametri

Test 3: Răspuns

Răspuns: A – 2 parametri (θ_1 și Θ_1)



Modelul airline: $(1 - L)(1 - L^{12})Y_t = (1 + \theta_1 L)(1 + \Theta_1 L^{12})\varepsilon_t$

Se potrivește remarcabil de bine pe multe serii economice sezoniere (Box & Jenkins, 1970)

Întrebare

Pentru date lunare cu sezonalitate puternică, unde vă așteptați să vedeți vârfuri ACF semnificative?

- A) Doar la lag 1
- B) Doar la lag 12
- C) La lag-urile 12, 24, 36, ...
- D) Distribuite aleatoriu

Test 4: ACF-ul Datelor Sezoniere

Întrebare

Pentru date lunare cu sezonalitate puternică, unde vă așteptați să vedeți vârfuri ACF semnificative?

- A) Doar la lag 1
- B) Doar la lag 12
- C) La lag-urile 12, 24, 36, ...
- D) Distribuite aleatoriu

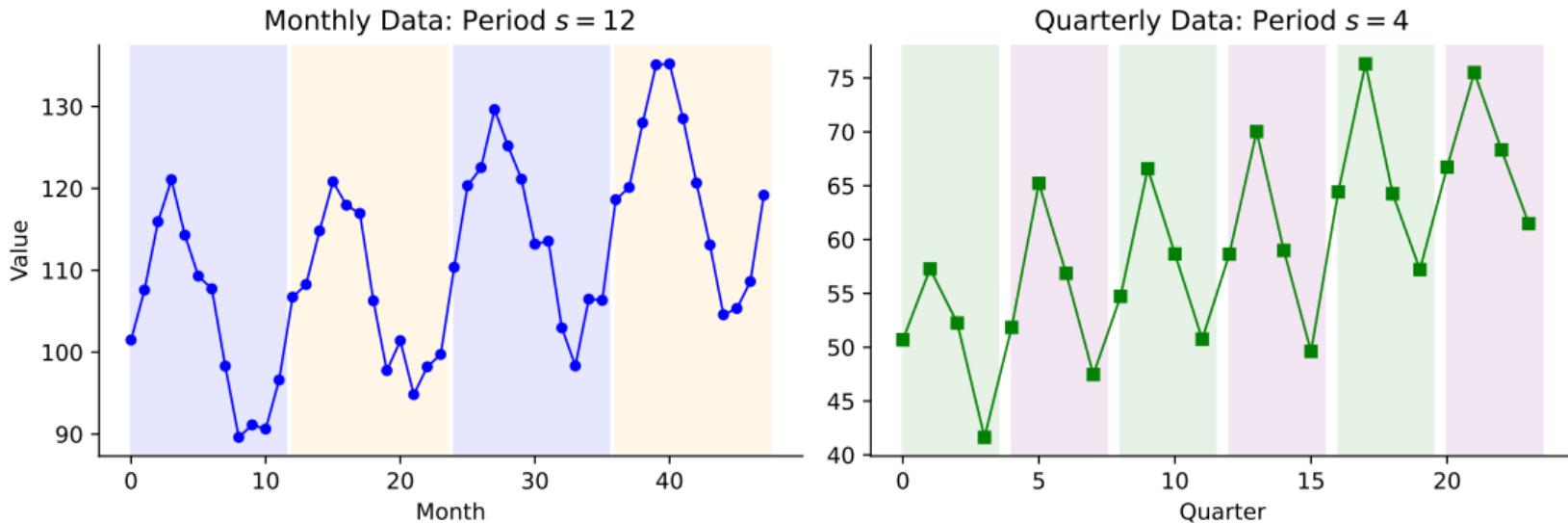
Răspuns: C – La lag-urile 12, 24, 36, ...

Intuiție: Ianuarie 2024 este similar cu ianuarie 2023, 2022, etc.

Model ACF: Vârfuri la lag-urile $s, 2s, 3s, \dots$ ($\rho_{12}, \rho_{24}, \rho_{36} \neq 0$)

Diagnostic: Descreștere lentă la lag-urile sezoniere $\Rightarrow D = 1$; Întrerupere după lag $s \Rightarrow Q = 1$

Vizual: Modele de Sezonalitate



Modelele sezoniere se repetă la intervale regulate (lunar, trimestrial, etc.) și pot fi aditive sau multiplicative.

Întrebare

În SARIMA, ce înseamnă "structură multiplicativă"?

- A) Amplitudinea sezonieră crește proporțional
- B) Polinoamele obișnuite și sezoniere sunt înmulțite
- C) Înmulțim datele cu factori sezonieri
- D) Modelul este estimat folosind înmulțirea

Test 5: Structura Multiplicativă

Întrebare

În SARIMA, ce înseamnă "structură multiplicativă"?

- A) Amplitudinea sezonieră crește proporțional
- B) Polinoamele obișnuite și sezoniere sunt înmulțite
- C) Înmulțim datele cu factori sezonieri
- D) Modelul este estimat folosind înmulțirea

Răspuns: B – Polinoamele obișnuite și sezoniere sunt înmulțite

SARIMA multiplicativ: $\phi(L)\Phi(L^s)(1 - L)^d(1 - L^s)^D Y_t = \theta(L)\Theta(L^s)\varepsilon_t$

Exemplu: $(1 - \phi_1 L)(1 - \Phi_1 L^{12}) = 1 - \phi_1 L - \Phi_1 L^{12} + \phi_1 \Phi_1 L^{13}$

Termenul încrucișat $\phi_1 \Phi_1 L^{13}$: Captează interacțiunea între dinamica pe termen scurt și lung

Întrebare

Când ați aplica atât diferențierea obișnuită ($d = 1$) cât și sezonieră ($D = 1$)?

- A) Când datele au doar un trend
- B) Când datele au doar sezonalitate
- C) Când datele au atât trend cât și nestaționaritate sezonieră
- D) Niciodată – se anulează reciproc

Test 6: Diferențierea Sezonieră vs Obișnuită

Întrebare

Când ați aplica atât diferențierea obișnuită ($d = 1$) cât și sezonieră ($D = 1$)?

- A) Când datele au doar un trend
- B) Când datele au doar sezonalitate
- C) Când datele au atât trend cât și nestaționaritate sezonieră
- D) Niciodată – se anulează reciproc

Răspuns: C – Atât trend cât și nestaționaritate sezonieră

Combinat: $W_t = (1 - L)(1 - L^{12})Y_t = Y_t - Y_{t-1} - Y_{t-12} + Y_{t-13}$

Când este necesar: ACF cu descreștere lentă la lag-urile 1,2,3... $\Rightarrow d = 1$; la lag-urile 12,24,36... $\Rightarrow D = 1$

Exemple: Pasageri aerieni, vânzări retail, cerere de energie

Test 7: Detectarea Sezonalității din ACF

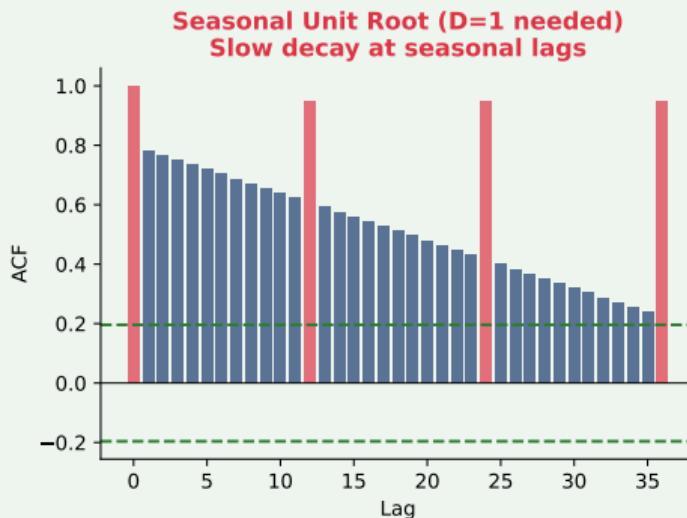
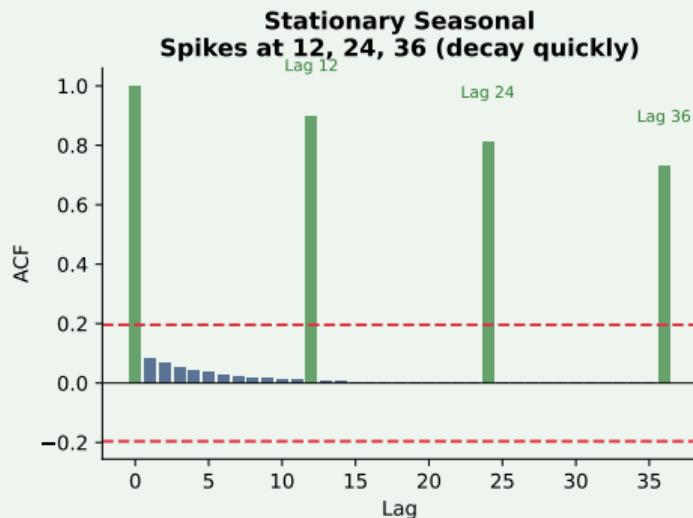
Întrebare

ACF-ul unei serii de timp lunare arată descreștere lentă la lag-urile 12, 24 și 36. Ce sugerează aceasta?

- A) Seria este staționară
- B) Seria necesită doar diferențierea obișnuită
- C) Seria are o rădăcină unitară sezonieră necesitând $D = 1$
- D) Seria este zgomot alb

Test 7: Răspuns

Răspuns: C – Rădăcină unitară sezonieră necesitând $D = 1$



Stânga: Sezonieră staționară (descreștere rapidă la lag-urile sezoniere)

Dreapta: Rădăcină unitară sezonieră (descreștere lentă \Rightarrow necesită $D = 1$)

Test 8: Sezonalitate Multiplicativă vs Aditivă

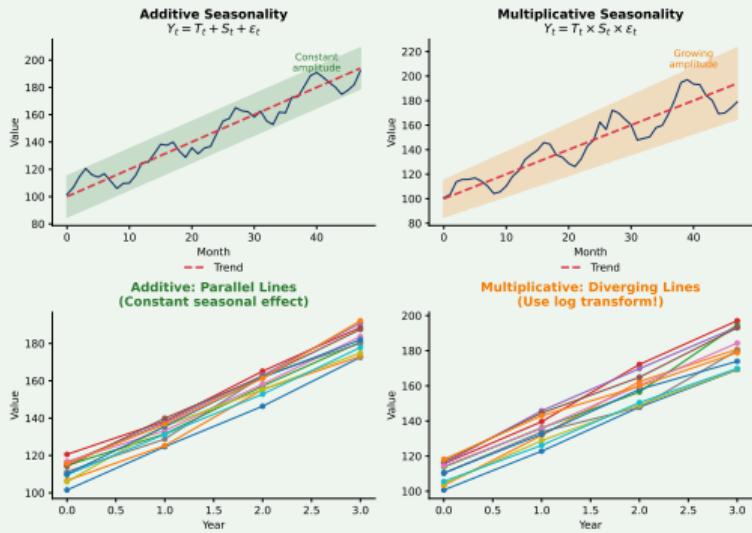
Întrebare

Dacă amplitudinea sezonieră a unei serii de timp crește proporțional cu nivelul, aceasta indică:

- A) Sezonalitate aditivă – folosiți $(1 - L^s)$
- B) Sezonalitate multiplicativă – folosiți transformarea log
- C) Fără sezonalitate prezentă
- D) Nevoie doar de diferențiere obișnuită

Test 8: Răspuns

Răspuns: B – Sezonalitate multiplicativă, folosiți transformarea log



Multiplicativă: Amplitudinea sezonieră crește cu nivelul (linii divergente)

Soluție: Aplicați transformarea log înainte de a ajusta SARIMA

Întrebare

Într-un grafic de subserii sezoniere, ce indică sezonalitatea multiplicativă?

- A) Liniile pentru fiecare lună sunt paralele
- B) Liniile pentru fiecare lună divergează (dispersia crește în timp)
- C) Toate lunile au aceeași medie
- D) Liniile sunt orizontale

Întrebare

Într-un grafic de subserii sezoniere, ce indică sezonalitatea multiplicativă?

- A) Liniile pentru fiecare lună sunt paralele
- B) Liniile pentru fiecare lună divergează (dispersia crește în timp)
- C) Toate lunile au aceeași medie
- D) Liniile sunt orizontale

Răspuns: B – Liniile divergează (dispersia crește în timp)

Graficul subseriilor: Grupează datele pe luni, reprezintă valorile fiecărei luni de-a lungul anilor

Paralele ⇒ Aditivă; **Divergente** ⇒ Multiplicativă; **Orizontale** ⇒ Fără trend

Acțiune: Dacă multiplicativă, aplicați log înainte de a ajusta SARIMA

Întrebare

Pentru ca SARIMA(0, 1, 1) \times (0, 1, 1)₁₂ să fie invertibil, care condiție trebuie îndeplinită?

- A) $|\theta_1| < 1$ doar
- B) $|\Theta_1| < 1$ doar
- C) Atât $|\theta_1| < 1$ cât și $|\Theta_1| < 1$
- D) Nu există condiție de invertibilitate pentru modelele MA

Test 10: Invertibilitatea în SARIMA

Întrebare

Pentru ca SARIMA(0, 1, 1) \times (0, 1, 1)₁₂ să fie invertibil, care condiție trebuie îndeplinită?

- A) $|\theta_1| < 1$ doar
- B) $|\Theta_1| < 1$ doar
- C) Atât $|\theta_1| < 1$ cât și $|\Theta_1| < 1$
- D) Nu există condiție de invertibilitate pentru modelele MA

Răspuns: C – Atât $|\theta_1| < 1$ cât și $|\Theta_1| < 1$

Invertibilitate: Toate rădăcinile MA în afara cercului unitate

MA multiplicativ: $(1 + \theta_1 L)(1 + \Theta_1 L^{12})$

Rădăcini: Obișnuită $|z| = |-1/\theta_1| > 1 \Leftrightarrow |\theta_1| < 1$; Sezonieră $|\Theta_1| < 1$

Ambele condiții necesare pentru invertibilitate generală!

Întrebare

Testul HEGY este folosit pentru:

- A) Estimarea parametrilor SARIMA
- B) Testarea rădăcinilor unitare la diferite frecvențe (trend și sezoniere)
- C) Verificarea normalității reziduurilor
- D) Compararea modelelor SARIMA folosind criterii informaționale

Test 11: Testul HEGY

Întrebare

Testul HEGY este folosit pentru:

- A) Estimarea parametrilor SARIMA
- B) Testarea rădăcinilor unitare la diferite frecvențe (trend și sezoniere)
- C) Verificarea normalității reziduurilor
- D) Compararea modelelor SARIMA folosind criterii informaționale

Răspuns: B – Testarea rădăcinilor unitare la diferite frecvențe

Testul HEGY (Hylleberg-Engle-Granger-Yoo, 1990):

Testează la: Frecvență zero ($\omega = 0$) $\Rightarrow d = 1$; Nyquist ($\omega = \pi$); Sezonieră $\Rightarrow D = 1$

Decizie: Respingeți toate \Rightarrow variabile dummy sezoniere; Nu respingeți sezoniera \Rightarrow diferențiere sezonieră

Întrebare

După aplicarea $(1 - L)(1 - L^{12})$, ACF arată un singur vârf semnificativ doar la lag 12 (fără vârf la lag 1). PACF descrește la lag-urile sezoniere. Aceasta sugerează:

- A) SARIMA(0, 1, 0) \times (0, 1, 1)₁₂
- B) SARIMA(0, 1, 1) \times (0, 1, 0)₁₂
- C) SARIMA(1, 1, 0) \times (1, 1, 0)₁₂
- D) SARIMA(0, 1, 1) \times (0, 1, 1)₁₂

Întrebare

După aplicarea $(1 - L)(1 - L^{12})$, ACF arată un singur vârf semnificativ doar la lag 12 (fără vârf la lag 1). PACF descrește la lag-urile sezoniere. Aceasta sugerează:

- A) SARIMA(0, 1, 0) \times (0, 1, 1)₁₂
- B) SARIMA(0, 1, 1) \times (0, 1, 0)₁₂
- C) SARIMA(1, 1, 0) \times (1, 1, 0)₁₂
- D) SARIMA(0, 1, 1) \times (0, 1, 1)₁₂

Răspuns: A – SARIMA(0, 1, 0) \times (0, 1, 1)₁₂

Model: Lag-uri obișnuite – fără vârfuri în ACF/PACF; Lag-uri sezoniere – ACF se întrerupe la s , PACF descrește

Interpretare: Fără MA obișnuit ($q = 0$); MA(1) sezonier indicat ($Q = 1$)

Model: $(1 - L)(1 - L^{12})Y_t = (1 + \Theta_1 L^{12})\varepsilon_t$

Întrebare

După diferențiere, ACF arată un vârf negativ mare la lag 1 sau lag s . Aceasta indică de obicei:

- A) Modelul necesită mai mulți termeni AR
- B) Seria a fost supradiferențiată
- C) Seria este perfect staționară
- D) Prezența heteroscedasticității

Întrebare

După diferențiere, ACF arată un vârf negativ mare la lag 1 sau lag s . Aceasta indică de obicei:

- A) Modelul necesită mai mulți termeni AR
- B) Seria a fost supradiferențiată
- C) Seria este perfect staționară
- D) Prezența heteroscedasticității

Răspuns: B – Seria a fost supradiferențiată

Semnătură: ACF la lag 1 $\approx -0.5 \Rightarrow$ supradif la d ; ACF la lag $s \approx -0.5 \Rightarrow$ supradif la D

De ce? $\Delta^2 Y_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$ este MA(1) cu $\theta = -1$, dând $\rho_1 = -0.5$

Corecție: Reduceți d sau D cu unu și re-examinați ACF/PACF

Întrebare

Pentru un model SARIMA cu $D = 1$, ce se întâmplă cu intervalele de încredere ale prognozei când orizontul $h \rightarrow \infty$?

- A) Converg la o lățime fixă
- B) Cresc fără limită
- C) Se micșorează la zero
- D) Oscilează sezonier

Test 14: Orizontul de Prognoză

Întrebare

Pentru un model SARIMA cu $D = 1$, ce se întâmplă cu intervalele de încredere ale prognozei când orizontul $h \rightarrow \infty$?

- A) Converg la o lățime fixă
- B) Cresc fără limită
- C) Se micșorează la zero
- D) Oscilează sezonier

Răspuns: B – Cresc fără limită

Proprietatea rădăcinii unitare: Orice rădăcină unitară cauzează varianță de prognoză nemărginită

Pentru SARIMA cu $D = 1$: $\text{Var}(\hat{Y}_{T+h} - Y_{T+h}) \rightarrow \infty$ când $h \rightarrow \infty$

Intuiție: řocurile sezoniere se acumulează; prognozele pe termen lung au IC-uri largi

Întrebare

Aveți date zilnice care arată modele săptămânale clare. Ce perioadă sezonieră s ar trebui să folosiți într-un model SARIMA?

- A) $s = 12$ (lunar)
- B) $s = 7$ (săptămânal)
- C) $s = 365$ (anual)
- D) $s = 24$ (orar)

Test 15: Selectarea Perioadei Sezoniere

Întrebare

Aveți date zilnice care arată modele săptămânale clare. Ce perioadă sezonieră s ar trebui să folosiți într-un model SARIMA?

- A) $s = 12$ (lunar)
- B) $s = 7$ (săptămânal)
- C) $s = 365$ (anual)
- D) $s = 24$ (orar)

Răspuns: B – $s = 7$ (săptămânal)

Date	Model	Perioada s
Zilnice	Săptămânal	7
Lunare	Anual	12
Trimestriale	Anual	4

Regulă: $s =$ observații per ciclu al modelului dominant

Întrebare

În componenta sezonieră $\Phi(L^s) = 1 - \Phi_1 L^s$, ce ne spune coeficientul $\Phi_1 = 0.8$?

- A) 80% din valoarea perioadei curente vine din perioada anterioară
- B) Există 80% corelație între observațiile consecutive
- C) 80% din valoarea perioadei curente este explicată de aceeași perioadă din anul trecut
- D) Modelul sezonier explică 80% din varianță

Test 16: Componenta AR Sezonieră

Întrebare

În componenta sezonieră $\Phi(L^s) = 1 - \Phi_1 L^s$, ce ne spune coeficientul $\Phi_1 = 0.8$?

- A) 80% din valoarea perioadei curente vine din perioada anterioară
- B) Există 80% corelație între observațiile consecutive
- C) 80% din valoarea perioadei curente este explicată de aceeași perioadă din anul trecut
- D) Modelul sezonier explică 80% din varianță

Răspuns: C – 80% explicat de aceeași perioadă din anul trecut

SAR(1): $Y_t = \Phi_1 Y_{t-12} + \varepsilon_t$

Cu $\Phi_1 = 0.8$: $Y_{Jan2024} = 0.8 \cdot Y_{Jan2023} + \varepsilon_t$

Interpretare: Persistență sezonieră puternică – 80% explicat de aceeași lună din anul trecut

Staționaritate: Necesită $|\Phi_1| < 1$ (satisfăcută aici)

Întrebare

Un proces sezonier cu $\Phi_1 = 1$ în SARIMA($0, 0, 0$) \times ($1, 0, 0$)₁₂ este:

- A) Staționar
- B) Are o rădăcină unitară sezonieră (integrat sezonier)
- C) Explosiv
- D) Nedefinit

Test 17: Staționaritatea Sezonieră

Întrebare

Un proces sezonier cu $\Phi_1 = 1$ în SARIMA($0, 0, 0$) \times ($1, 0, 0$)₁₂ este:

- A) Staționar
- B) Are o rădăcină unitară sezonieră (integrat sezonier)
- C) Explosiv
- D) Nedefinit

Răspuns: B – Are o rădăcină unitară sezonieră

Model: $Y_t = Y_{t-12} + \varepsilon_t$ (mers aleatoriu sezonier)

Proprietăți: Varianța crește cu timpul; fiecare lună urmează propriul său mers aleatoriu; necesită $D = 1$

Analogie: Ca mersul aleatoriu obișnuit dar la frecvența sezonieră

Întrebare

Modelul A: SARIMA(1, 1, 1) \times (1, 1, 1)₁₂ are AIC = 520. Modelul B: SARIMA(0, 1, 1) \times (0, 1, 1)₁₂ are AIC = 525. Care afirmație este cea mai corectă?

- A Modelul A este întotdeauna mai bun deoarece are AIC mai mic
- B Modelul B ar trebui preferat datorită parsimoniei în ciuda AIC mai mare
- C Diferența AIC de 5 sugerează că Modelul A este substanțial mai bun
- D Nu putem compara modele cu ordine diferite

Test 18: Compararea Modelelor

Întrebare

Modelul A: SARIMA(1, 1, 1) \times (1, 1, 1)₁₂ are AIC = 520. Modelul B: SARIMA(0, 1, 1) \times (0, 1, 1)₁₂ are AIC = 525. Care afirmație este cea mai corectă?

- (A) Modelul A este întotdeauna mai bun deoarece are AIC mai mic
- (B) Modelul B ar trebui preferat datorită parsimoniei în ciuda AIC mai mare
- (C) Diferența AIC de 5 sugerează că Modelul A este substanțial mai bun
- (D) Nu putem compara modele cu ordine diferite

Răspuns: C – Diferența AIC de 5 sugerează că Modelul A este substanțial mai bun

Regulă empirică: $\Delta\text{AIC} < 2$: echivalente; 2–10: anumite dovezi; > 10 : dovezi puternice

Aici: $\Delta\text{AIC} = 5$ sugerează Modelul A semnificativ mai bun

Întotdeauna: Verificați și diagnosticele reziduurilor și performanța prognozei!

Întrebare

După ajustarea unui model SARIMA, observați vârfuri ACF semnificative la lagurile 12 și 24 în reziduuri. Ce indică aceasta?

- A Modelul este corect specificat
- B Componenta sezonieră este inadecvată
- C Datele nu sunt sezoniere
- D A apărut supraajustarea

Întrebare

După ajustarea unui model SARIMA, observați vârfuri ACF semnificative la lagurile 12 și 24 în reziduuri. Ce indică aceasta?

- A) Modelul este corect specificat
- B) Componenta sezonieră este inadecvată
- C) Datele nu sunt sezoniere
- D) A apărut supraajustarea

Răspuns: B – Componenta sezonieră este inadecvată

Diagnostic: Reziduurile bune ar trebui să fie zgomot alb (fără ACF semnificativ)

ACF sezonier în reziduuri: Modelul nu a capturat structura sezonieră; încercați să creșteți P sau Q ; verificați că D este corect

Acțiune: Încercați SARIMA cu ordin sezonier mai mare, verificați Ljung-Box la lagurile sezoniere

Întrebare

Prognozați vânzări retail lunare cu SARIMA($0, 1, 1$) \times ($0, 1, 1$)₁₂. Pentru prognoza la 13 luni înainte, care observații istorice sunt cele mai influente?

- A Doar cea mai recentă observație
- B Observația de aceeași lună din anul trecut
- C Toate observațiile în mod egal
- D Doar observațiile din aceeași lună din toți anii anteriori

Test 20: Prognoză Practică

Întrebare

Prognozați vânzări retail lunare cu SARIMA($0, 1, 1$) \times ($0, 1, 1$)₁₂. Pentru prognoza la 13 luni înainte, care observații istorice sunt cele mai influente?

- A) Doar cea mai recentă observație
- B) Observația de aceeași lună din anul trecut
- C) Toate observațiile în mod egal
- D) Doar observațiile din aceeași lună din toți anii anteriori

Răspuns: B – Observația de aceeași lună din anul trecut

Pentru 13 luni înainte: Cea mai influentă este Y_{T-11} (aceeași lună anul trecut), de asemenea Y_T și Y_{T-12}

Intuiție: "ianuarie viitor arată ca ianuarie trecut, ajustat pentru trendul recent"

Întrebări Adevărat/Fals (1-6)

Întrebare

Determinați dacă fiecare afirmație este Adevărată sau Falsă:

- ① Perioada sezonieră s pentru date trimestriale cu modele anuale este $s = 4$.
- ② Modelele SARIMA pot gestiona doar o singură frecvență sezonieră.
- ③ Dacă AIC selectează SARIMA(1, 1, 1) \times (1, 1, 1)₁₂ și BIC selectează modelul airline, BIC greșește întotdeauna.
- ④ Testul Kruskal-Wallis poate detecta sezonalitatea fără a presupune normalitate.
- ⑤ După ajustarea unui model SARIMA, reziduurile nu ar trebui să arate ACF semnificativ la lagurile sezoniere.
- ⑥ Transformarea logaritmică convertește sezonalitatea multiplicativă în aditivă.

Răspunsul pe slide-ul următor...

Răspunsuri

- ① **ADEVĂRAT:** Datele trimestriale cu ciclu anual au $s = 4$ trimestre pe an.
- ② **ADEVĂRAT:** SARIMA standard gestionează un s ; sezonalități multiple necesită TBATS sau termeni Fourier.
- ③ **FALS:** BIC penalizează complexitatea mai mult; modelul mai simplu poate fi mai bun pentru interpretare/prognoză.
- ④ **ADEVĂRAT:** Kruskal-Wallis este neparametric, comparând distribuțiile între sezoane.
- ⑤ **ADEVĂRAT:** ACF-ul reziduurilor ar trebui să fie în limitele de încredere la TOATE lag-urile inclusiv cele sezoniere.
- ⑥ **ADEVĂRAT:** $\log(T \times S \times \varepsilon) = \log T + \log S + \log \varepsilon$ (formă aditivă).

Problema 1: Expandarea Diferenței Sezoniere

Exercițiu

Expandați complet $(1 - L)(1 - L^{12})Y_t$. Ce observații sunt implicate?

Problema 1: Expandarea Diferenței Sezoniere

Exercițiu

Expandați complet $(1 - L)(1 - L^{12})Y_t$. Ce observații sunt implicate?

Soluție

$$(1 - L)(1 - L^{12}) = 1 - L - L^{12} + L^{13}$$

Prin urmare: $(1 - L)(1 - L^{12})Y_t = Y_t - Y_{t-1} - Y_{t-12} + Y_{t-13}$

Interpretare: Aceasta este diferența diferențelor:

- Mai întâi diferența sezonieră: $Y_t - Y_{t-12}$ (anul acesta vs anul trecut)
- Apoi diferența obișnuită: $(Y_t - Y_{t-12}) - (Y_{t-1} - Y_{t-13})$

Problema 2: Expandarea Modelului Airline

Exercițiu

Scrieti ecuația completă pentru modelul airline SARIMA(0, 1, 1) × (0, 1, 1)₁₂:

$$(1 - L)(1 - L^{12})Y_t = (1 + \theta_1 L)(1 + \Theta_1 L^{12})\varepsilon_t$$

Problema 2: Expandarea Modelului Airline

Exercițiu

Scrieti ecuația completă pentru modelul airline SARIMA(0, 1, 1) × (0, 1, 1)₁₂:

$$(1 - L)(1 - L^{12})Y_t = (1 + \theta_1L)(1 + \Theta_1L^{12})\varepsilon_t$$

Soluție

Expandați partea MA: $(1 + \theta_1L)(1 + \Theta_1L^{12}) = 1 + \theta_1L + \Theta_1L^{12} + \theta_1\Theta_1L^{13}$

Modelul complet: $Y_t - Y_{t-1} - Y_{t-12} + Y_{t-13} = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \Theta_1\varepsilon_{t-12} + \theta_1\Theta_1\varepsilon_{t-13}$

Notă: Termenul încrucișat $\theta_1\Theta_1L^{13}$ este interacțiunea multiplicativă între componente MA obișnuite și sezoniere.

Problema 3: Numărarea Parametrilor

Exercițiu

Câtă parametri (excluzând σ^2) sunt în SARIMA(2, 1, 1) \times (1, 0, 1)₄?

Problema 3: Numărarea Parametrilor

Exercițiu

Câtă parametri (excluzând σ^2) sunt în SARIMA(2, 1, 1) \times (1, 0, 1)₄?

Soluție

- AR obișnuit($p = 2$): $\phi_1, \phi_2 \Rightarrow 2$ parametri
- MA obișnuit($q = 1$): $\theta_1 \Rightarrow 1$ parametru
- AR sezonier($P = 1$): $\Phi_1 \Rightarrow 1$ parametru
- MA sezonier($Q = 1$): $\Theta_1 \Rightarrow 1$ parametru

Total: 5 parametri

Notă: Ordinile de diferențiere ($d = 1, D = 0$) nu adaugă parametri – sunt transformări aplicate datelor.

Problema 4: Prognoza SARIMA

Exercițiu

Dat modelul airline cu $\theta_1 = -0.4$ și $\Theta_1 = -0.6$, și:

- $Y_T = 500$, $Y_{T-1} = 495$, $Y_{T-11} = 480$, $Y_{T-12} = 470$
- $\varepsilon_T = 5$, $\varepsilon_{T-11} = -3$, $\varepsilon_{T-12} = 2$

Prognozați Y_{T+1} .

Problema 4: Prognoza SARIMA

Exercițiu

Dat modelul airline cu $\theta_1 = -0.4$ și $\Theta_1 = -0.6$, și:

- $Y_T = 500$, $Y_{T-1} = 495$, $Y_{T-11} = 480$, $Y_{T-12} = 470$
- $\varepsilon_T = 5$, $\varepsilon_{T-11} = -3$, $\varepsilon_{T-12} = 2$

Prognozați Y_{T+1} .

Soluție

Din model: $Y_{T+1} = Y_T + Y_{T-11} - Y_{T-12} + \varepsilon_{T+1} + \theta_1\varepsilon_T + \Theta_1\varepsilon_{T-11} + \theta_1\Theta_1\varepsilon_{T-12}$

Setând $\mathbb{E}[\varepsilon_{T+1}] = 0$:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{T+1} &= 500 + 480 - 470 + 0 + (-0.4)(5) + (-0.6)(-3) + (-0.4)(-0.6)(2) \\ &= 510 - 2 + 1.8 + 0.48 = 510.28\end{aligned}$$

Problema 5: Identificarea Perioadei Sezoniere

Exercițiu

Potriviți fiecare tip de date cu perioada sezonieră tipică s:

- ① Date trimestriale de PIB
- ② Vânzări retail lunare
- ③ Rezervări săptămânaile la restaurante
- ④ Cerere zilnică de electricitate

Problema 5: Identificarea Perioadei Sezoniere

Exercițiu

Potriviți fiecare tip de date cu perioada sezonieră tipică s :

- ① Date trimestriale de PIB
- ② Vânzări retail lunare
- ③ Rezervări săptămânaile la restaurante
- ④ Cerere zilnică de electricitate

Soluție

- ① PIB trimestrial: $s = 4$ (ciclul anual pe 4 trimestre)
- ② Vânzări retail lunare: $s = 12$ (ciclul anual pe 12 luni)
- ③ Rezervări săptămânaile la restaurante: $s = 7$ (ciclul săptămânal) sau $s = 52$ (anual)
- ④ Cerere zilnică de electricitate: $s = 7$ (model săptămânal) sau $s = 365$ (anual)

Notă: Unele serii au modele sezoniere multiple (de ex., datele zilnice pot avea cicluri săptămânaile și anuale).

Scenariu

Aveți 5 ani de date de vânzări retail lunare cu vârfuri clare în decembrie și scăderi în ianuarie. Construiți un model SARIMA potrivit.

Abordare Pas cu Pas

- 1 Inspecție vizuală:** Graficul arată trend ascendent + vârfuri puternice în decembrie
- 2 Perioada sezonieră:** Date lunare cu model anual $\Rightarrow s = 12$
- 3 Transformare:** Considerați $\log(Y_t)$ dacă amplitudinea sezonieră crește cu nivelul
- 4 Diferențiere:** Încercați $(1 - L)(1 - L^{12})Y_t$ – verificați ACF/PACF
- 5 Selectarea modelului:** Începeți cu modelul airline, comparați prin AIC

Exemplu: Interpretarea ACF/PACF pentru Date Sezoniere

Modele Observate (după diferențiere)

- ACF: Semnificativ la lagurile 1, 12; se întrerupe după lag 1 și lag 12
- PACF: Semnificativ la lagurile 1, 12, 13; descrește la multiplii de 12

Interpretare

Componenta obișnuită: ACF se întrerupe la 1 \Rightarrow MA(1)

Componenta sezonieră: ACF semnificativ doar la lag 12 \Rightarrow MA(1) sezonier

Model sugerat: SARIMA(0, d, 1) \times (0, D, 1)₁₂ – modelul airline!

Verificare alternativă: Dacă PACF ar fi arătat întrerupere la lagurile sezoniere în loc de ACF, considerați termeni AR sezonieri.

Exemplu: Implementare Python

Ajustarea SARIMA în Python

```
from statsmodels.tsa.statespace.sarimax import SARIMAX
import pmdarima as pm

# Ajustare manuală
model = SARIMAX(y, order=(0,1,1), seasonal_order=(0,1,1,12))
results = model.fit()
print(results.summary())

# Selectie automata
auto_model = pm.auto_arima(y, seasonal=True, m=12,
                            start_p=0, max_p=2,
                            start_q=0, max_q=2,
                            d=1, D=1,
                            trace=True)
```

Exemplu: Interpretarea Rezultatelor SARIMA

Rezultate Exemplu statsmodels

```
SARIMAX Results
=====
Model:      SARIMAX(0,1,1)x(0,1,1,12)   AIC:     1348.52
                           BIC:     1358.21
=====
              coef    std err      z      P>|z|
-----
ma.L1        -0.4018    0.072    -5.58    0.000
ma.S.L12     -0.5521    0.081    -6.82    0.000
sigma2       1254.3201  142.856     8.78    0.000
```

Interpretare

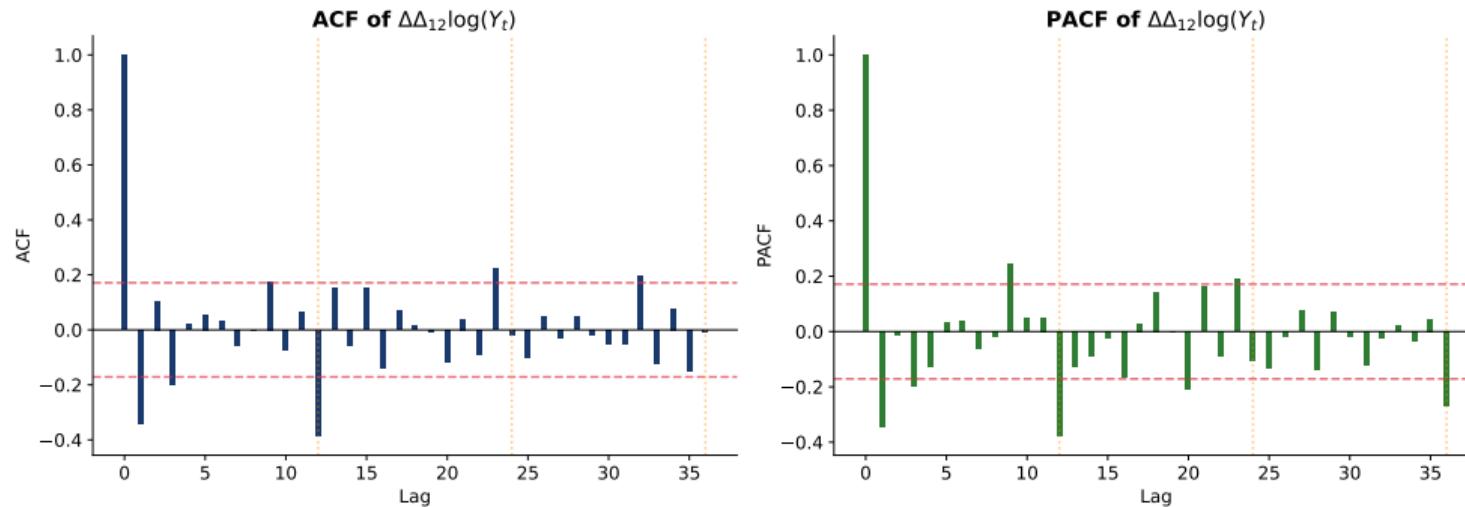
- $\hat{\theta}_1 = -0.40$: MA negativ înseamnă că şocurile pozitive reduc valoarea perioadei următoare
- $\hat{\Theta}_1 = -0.55$: Corelația pentru aceeași sezon este captată
- Ambii coeficienți semnificativi ($p < 0.001$); $|\theta|, |\Theta| < 1$ – invertibil

Studiu de Caz: Pasageri Aerieni (1949–1960)



- Set de date clasic Box-Jenkins: 144 observații lunare
- Trend ascendent clar și **model sezonier** (vârfuri vara)
- Amplitudinea sezonieră **creste cu nivelul** ⇒ sezonalitate multiplicativă
- Sugerează: transformare logaritmică + modelare SARIMA

Analiza ACF/PACF După Diferențiere



- După $(1 - L)(1 - L^{12}) \log(Y_t)$: seria pare staționară
- Vârf semnificativ la lag 1 în ACF \Rightarrow componentă MA(1)
- Vârf semnificativ la lag 12 în ACF \Rightarrow componentă MA(1) sezonieră
- Modelul sugerează: **SARIMA(0, 1, 1)(0, 1, 1)₁₂** (modelul airline)

Rezultate Estimare SARIMA: Date Pasageri Aerieni

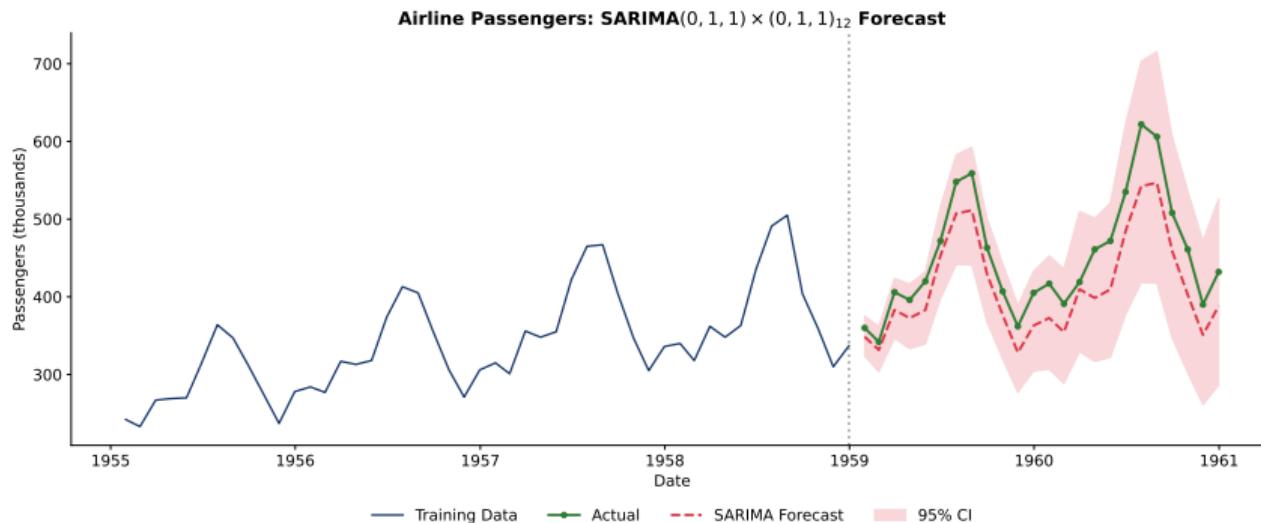
Model: SARIMA(0, 1, 1)(0, 1, 1)₁₂ pe log(Pasageri)

Parametru	Estimat	Eroare Std.	z-stat	valoare-p
θ_1 (MA.L1)	-0.4018	0.0896	-4.48	< 0.001
Θ_1 (MA.S.L12)	-0.5569	0.0731	-7.62	< 0.001
σ^2	0.00135	-	-	-

Statistică de Ajustare a Modelului

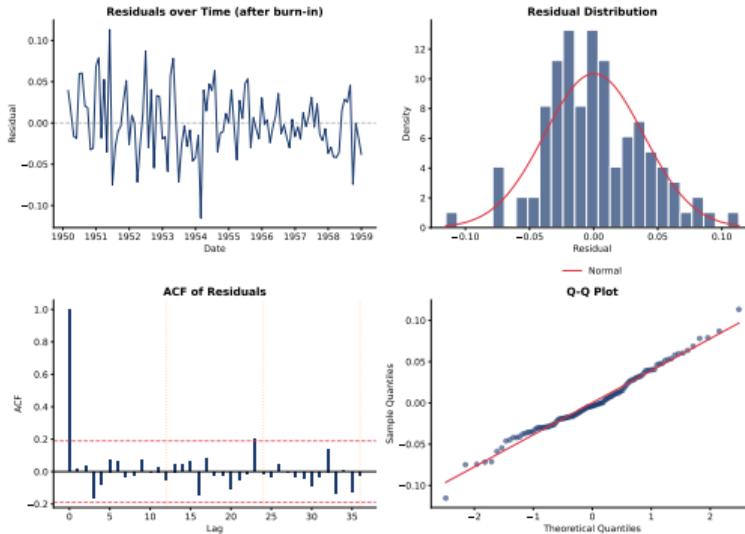
- Log-Verosimilitate: 244.70
- AIC: -483.40, BIC: -474.53
- Ambii coeficienți MA semnificativi și în limitele de invertibilitate

Prognosă: 24 Luni Înainte



- Prognozele captează atât trendul cât și modelul sezonier
- Intervalele de încredere de 95% se largesc pe orizontul de prognoză
- Vârfurile sezoniere (iulie-august) și scăderile (februarie) clar vizibile
- Modelul extrapolează cu succes modelul sezonier multiplicativ

Diagnostic Model



- Reziduurile par aleatoare fără modele sistematice
- Distribuție aproximativ normală (graficul Q-Q aproape de diagonală)
- ACF-ul reziduurilor în limitele de încredere – fără autocorelație semnificativă
- Testul Ljung-Box: $p > 0.05$ la toate lag-urile testate \Rightarrow model adecvat

Întrebare Cheie

Când ar trebui să folosiți variabile dummy sezoniere vs SARIMA pentru date sezoniere?

Considerații

Variabile dummy sezoniere (deterministe):

- Model fix, care se repetă în fiecare an
- Același efect decembrie în fiecare an
- Potrivite când sezonialitatea este stabilă

SARIMA (stochastic):

- Model sezonier în evoluție
- Decembrie anul acesta depinde de decembrie anul trecut
- Mai bun când amplitudinea sezonieră variază

Întrebare Cheie

Când ar trebui să luați logaritmi înainte de a ajusta SARIMA?

Îndrumări

Folosiți transformarea log când:

- Fluctuațiile sezoniere cresc cu nivelul (sezonalitate multiplicativă)
- Varianța crește în timp
- Datele sunt strict pozitive (prețuri, vânzări, numărători)

Evitați log când:

- Modelul sezonier este aditiv (amplitudine constantă)
- Datele conțin zerouri sau negative
- Deja pe o scală de rate/proportii

Sfat: Comparați AIC-ul modelelor cu și fără transformare log.

Provocare

Datele zilnice de vânzări pot avea atât modele săptămânaile (7 zile) cât și anuale (365 zile). Cum gestionați aceasta?

Abordări

- ① **SARIMA imbricat:** Modelați la frecvența mai scurtă, includeți mai lungă ca exogenă
- ② **Modele TBATS/BATS:** Gestionează explicit sezonalități multiple
- ③ **Termeni Fourier:** Adăugați termeni sin/cos pentru fiecare frecvență sezonieră
- ④ **Prophet/similare:** Instrumente moderne proiectate pentru sezonalități multiple

Notă: SARIMA standard gestionează doar o perioadă sezonieră. Pentru sezonialitate complexă, considerați metode specialize.

Întrebare Cheie

Care sunt provocările unice ale prognozării seriilor de timp sezoniere?

Provocări și Soluții

- **Orizontul contează:** Prognoza pe 12 luni înseamnă prezicerea unui ciclu complet
- **Incertitudinea crește:** Prognozele sezoniere compun incertitudinea obișnuită
- **Punțe de cotitură:** Captarea când sezoanele ating vârf/minim
- **Rupturi structurale:** COVID-19 a perturbat multe modele sezoniere

Bune practici:

- Folosiți validare încruciată cu origine mobilă
- Comparați cu benchmark-ul naiv sezonier
- Raportați intervale de prognoză, mai ales la orizonturi sezoniere

Exerciții pentru Acasă

- ❶ **Teoretic:** Arătați că $(1 - L)(1 - L^4)$ poate fi scris ca $(1 - L - L^4 + L^5)$ și explicați ce face această transformare datelor trimestriale cu sezonalitate anuală.
- ❷ **Calcul:** Pentru SARIMA(1, 0, 0) \times (1, 0, 0)₄ cu $\phi_1 = 0.5$ și $\Phi_1 = 0.8$, scrieți polinomul AR complet și identificați toți coeficienții nenuli.
- ❸ **Aplicat:** Descărcați datele lunare despre pasagerii aerieni și:
 - Reprezentați grafic seria și identificați trend/sezonalitate
 - Aplicați transformările potrivite
 - Ajustați modelul airline și interpretați coeficienții
 - Generați prognoze pe 24 de luni cu intervale de încredere
- ❹ **Comparatie:** Ajustați atât SARIMA(0, 1, 1) \times (0, 1, 1)₁₂ cât și SARIMA(1, 1, 0) \times (1, 1, 0)₁₂ pe datele despre pasagerii aerieni. Comparați folosind AIC, BIC și diagnosticile reziduurilor. Care este preferat?

Indicii

- ❶ Expandați $(1 - L)(1 - L^4) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot L^4 - L \cdot 1 + L \cdot L^4 = 1 - L - L^4 + L^5$
- ❷ Polinomul AR: $(1 - \phi_1 L)(1 - \Phi_1 L^4) = 1 - 0.5L - 0.8L^4 + 0.4L^5$
- ❸ Pentru datele pasagerilor aerieni:
 - Folosiți transformarea log (sezonalitate multiplicativă)
 - Atât $d = 1$ cât și $D = 1$ sunt necesare
 - Estimări tipice: $\theta_1 \approx -0.4$, $\Theta_1 \approx -0.6$
- ❹ Modelul airline bazat pe MA se potrivește de obicei mai bine decât modelul AR sezonier pur pentru aceste date (AIC mai mic).

Puncte Principale

- ❶ Diferențierea sezonieră $(1 - L^s)$ elimină sezonalitatea stochastică
- ❷ Notația SARIMA: $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ separă obișnuitul de sezonier
- ❸ Modelul airline este surprinzător de eficient pentru multe seturi de date
- ❹ Structura multiplicativă creează termeni de interacțiune
- ❺ ACF/PACF arată modele atât la lag-urile obișnuite cât și la cele sezoniere
- ❻ Transformarea log adesea necesară pentru sezonalitatea multiplicativă

Pașii Următori

Capitolul 5 va acoperi seriile de timp multivariate: modele VAR, cauzalitatea Granger și cointegrarea.