




Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 8: Extensii Moderne

Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Cuprins

Obiective de învățare

La finalul acestui capitol, veți fi capabili să:

1. Înțelegeți conceptul de **memorie lungă** în seriile de timp
2. Estimați și interpretați modele **ARFIMA**
3. Aplicați **Random Forest** pentru prognoză seriilor de timp
4. Construiți rețele **LSTM** pentru serii temporale
5. Comparăți performanța modelelor clasice vs ML
6. Alegeți metoda potrivită în funcție de context
7. Implementați aceste metode în **Python**

De la modele clasice la machine learning

Limitările Modelelor ARIMA

- Presupun **memorie scurtă**: autocorelațiile scad exponențial
- Relații **liniare** între variabile
- Dificultăți cu **pattern-uri complexe** și neliniare
- Necesită **staționaritate** (prin diferențiere)

Soluții Moderne

- **ARFIMA**: Captează memoria lungă (autocorelații care scad lent)
- **Random Forest**: Relații neliniare, robustețe la outlieri
- **LSTM**: Pattern-uri secvențiale complexe, dependențe pe termen lung

Când să folosim fiecare metodă?

Caracteristică	ARIMA	ARFIMA	RF	LSTM
Memorie lungă	×	✓	✓	✓
Relații neliniare	×	×	✓	✓
Interpretabilitate	✓	✓	∼	×
Date puține	✓	✓	×	×
Variabile exogene	✓	✓	✓	✓
Incertitudine	✓	✓	∼	×

Regula de Aur

- Începe **simplu** (ARIMA), apoi crește complexitatea doar dacă este justificat de date și performanță.

Ce este memoria lungă?

Memorie Scurtă (ARMA)

- Autocorelațiile ρ_k scad **exponențial**: $|\rho_k| \leq C \cdot r^k$, $r < 1$
- Efectele șocurilor dispar **rapid**
- Sumă finită: $\sum_{k=0}^{\infty} |\rho_k| < \infty$

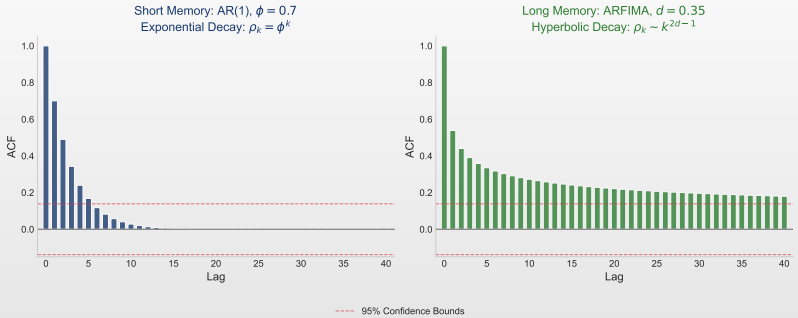
Memorie lungă (ARFIMA)

- Autocorelațiile scad **hiperbolic**: $\rho_k \sim C \cdot k^{2d-1}$
- Efectele șocurilor persistă **mult timp**
- Sumă infinită: $\sum_{k=0}^{\infty} |\rho_k| = \infty$ (pentru $d > 0$)

Exemple cu Memorie lungă

- Volatilitatea piețelor financiare, debite râuri, trafic rețea, inflație

Comparație ACF: memorie scurtă vs lungă



- **Stânga**: AR(1) $\succ$ autocorelații care scad exponențial (memorie scurtă)
- **Dreapta**: ARFIMA cu $d = 0.35$ $\succ$ autocorelații care scad hiperbolic (memorie lungă)

TSA_ch8_acf_comparison

Modelul ARFIMA(p,d,q)

Definiție 1 (ARFIMA)

- **Model**: Un proces $\{Y_t\}$ urmează un model **ARFIMA(p,d,q)** dacă: $\phi(L)(1-L)^d Y_t = \theta(L)\varepsilon_t$
- **Parametru**: $d \in (-0.5, 0.5)$ este parametrul de **diferențiere fracționară**

Operatorul de Diferențiere Fracționară

- $(1-L)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k}(-L)^k = 1 - dL - \frac{d(1-d)}{2!}L^2 - \cdots$

Cazuri Particulare

- $d = 0$: ARMA standard (memorie scurtă)
- $0 < d < 0.5$: Memorie lungă, staționaritate
- $d = 0.5$: Limita staționarității
- $0.5 \leq d < 1$: Nestaționaritate, dar mean-reverting
- $d = 1$: Random walk (ARIMA standard)

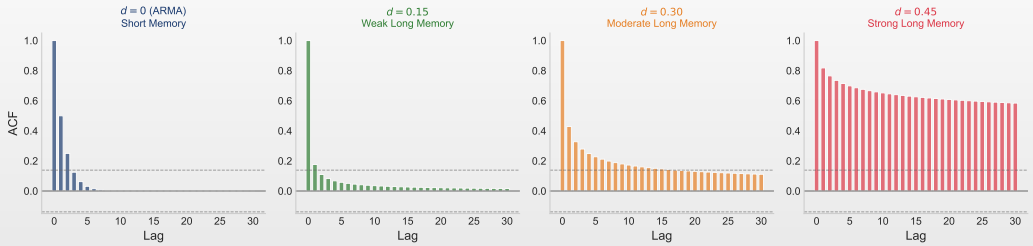
Interpretarea parametrului d

Valoare d	Comportament ACF	Interpretare
$d = 0$	Scădere exponențială	Memorie scurtă
$0 < d < 0.5$	Scădere hiperbolică	Memorie lungă, staționară
$d = 0.5$	ACF nesumabilă	La limită
$0.5 < d < 1$	Scădere foarte lentă	Memorie lungă, nestaționară
$d = 1$	ACF = 1 (constant)	Random walk

Parametrul Hurst H

- **Relația**: $d = H - 0.5$
  - $H = 0.5$: Mers aleator (fără memorie)
  - $H > 0.5$: Persistență (trend-following)
  - $H < 0.5$: Anti-persistență (mean-reverting)

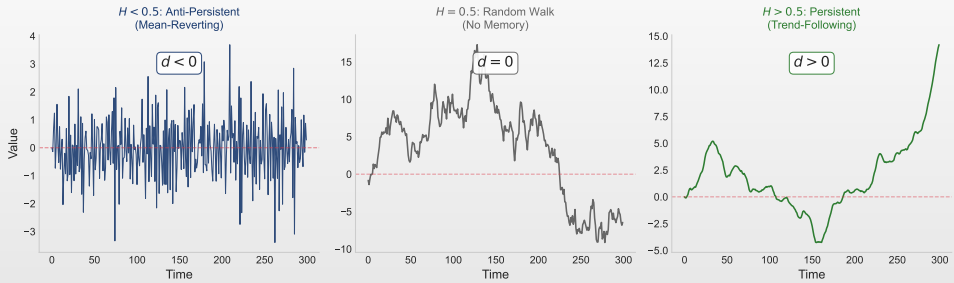
Efectul parametrului d asupra ACF



- Cu cât d este mai mare, cu atât autocorelațiile scad mai lent
- Pentru $d \to 0.5$, autocorelațiile rămân semnificative chiar și la lag-uri foarte mari

TSA_ch8_arfima_d_effect

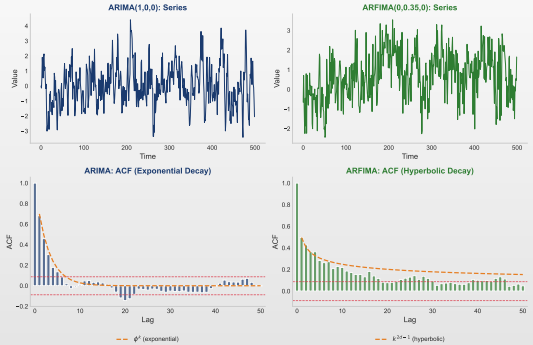
Exponentul Hurst: interpretare vizuală



- **H** $<$ **0.5**: Serie care revine frecvent la medie (mean-reverting)
- **H** $=$ **0.5**: Mers aleator, imprevizibil
- **H** $>$ **0.5**: Serie persistentă, tendințele continuă

TSA_ch8_hurst_interpretation

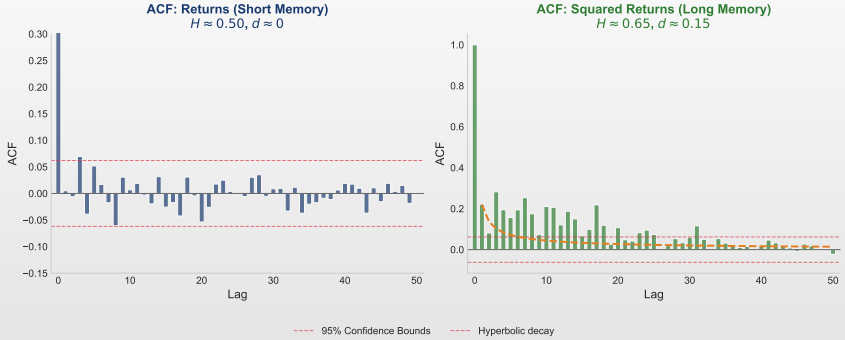
ARIMA vs ARFIMA: comparație simulată



- **ARIMA** (stânga): ACF scade **exponențial** $\succ$ șocurile sunt "uitate" rapid
- **ARFIMA** (dreapta, $d = 0.35$): ACF scade **hiperbolic** $\succ$ șocurile persistă mult timp

TSA_ch8_arima_vs_arfima

Exemplu date reale: analiza memoriei lungi EUR/RON



- **Randamente** (stânga): $H \approx 0.50$, $d \approx 0 \succ$ **memorie scurtă** (piață eficientă)
- **Randamente pătrate** (dreapta): $H \approx 0.65$, $d \approx 0.15 \succ$ **memorie lungă** în volatilitate

TSA_ch8_eurron_long_memory

Estimarea parametrului d

Metode de estimare

- **GPH (Geweke-Porter-Hudak)**: Regresie în domeniul frecvență
  - $\ln I(\omega_j) = c - d \cdot \ln\left(4 \sin^2 \frac{\omega_j}{2}\right) + \varepsilon_j$
- **R/S (Rescaled Range)**: Metoda lui Hurst
  - $\frac{R}{S}(n) \sim c \cdot n^H$
- **MLE (Maximum Likelihood)**: Estimare completă ARFIMA
- **Whittle**: Aproximare eficientă în domeniul frecvență

Implementare

- În Python: `arch` package, `statsmodels.tsa.arima.model.ARIMA` cu `order=(p,d,q)` unde d poate fi fracționar

TSA_ch8_gph_estimation

Exemplu ARFIMA în Python

Cod Python

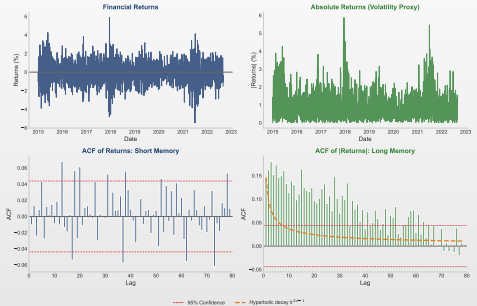
```
from statsmodels.tsa.arima.model import ARIMA
model = ARIMA(y, order=(1, 0.3, 1))
results = model.fit()
```

Notă

- Estimarea ARFIMA necesită pachete specializate. În practică, se folosește adesea `arch` sau `fracdiff` în Python.

TSA_ch8_arfima_estimation

Exemplu real: memorie lungă în volatilitate



- **Fapt Stilizat**: Randamentele financiare au memorie scurtă, dar volatilitatea (|randamente|) are memorie lungă
- Aceasta este baza modelelor FIGARCH

TSA_ch8_volatility_long_memory

Random Forest: concepte de bază

Ce este Random Forest?

- **Ansamblu** de arbori de decizie
- Fiecare arbore antrenat pe un **subset bootstrap** al datelor
- La fiecare nod, se selectează **aleator** un subset de features
- Predicția finală = **media** predicțiilor tuturor arborilor

Avantaje pentru serii de timp

- Captează **relații neliniare**
- **Robust** la outlieri și zgomot
- Nu necesită **staționaritate**
- Oferă **importanța features** (interpretabilitate)
- Funcționează bine cu **multe variabile**

Pregătirea datelor pentru Random Forest

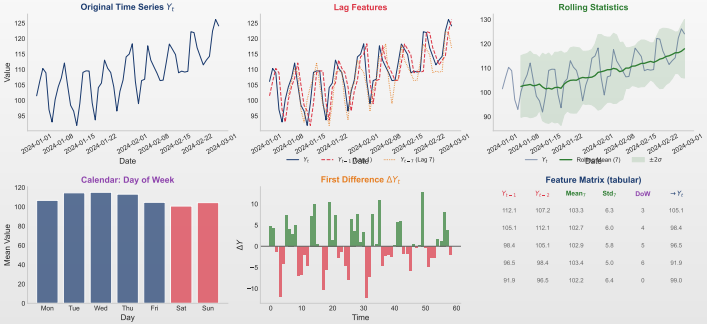
Feature Engineering pentru serii de timp

1. **Lag features**: $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots, Y_{t-p}$
2. **Rolling statistics**: medie mobilă, deviație standard
3. **Calendar features**: ziua săptămânii, luna, sezon
4. **Trend features**: timp, trend pătratic
5. **Variabile exogene**: indicători economici, evenimente

Atenție: Data Leakage!

- ⊡ Nu folosi informații din viitor în features
- ⊡ Train/test split: **temporal**, nu aleator!
- ⊡ Rolling statistics: calculează doar pe date **anterioare**

Feature engineering: ilustrare



- Transformăm seria temporală în features: lag-uri, statistici rolling, iar modelul RF învață relațiile dintre acestea și valorile viitoare

TSA_ch8_feature_engineering

Random Forest: implementare Python

Cod Python

```
from sklearn.ensemble import RandomForestRegressor
rf = RandomForestRegressor(n_estimators=100, max_depth=10)
rf.fit(X_train, y_train)
predictions = rf.predict(X_test)
```

Importanța features și interpretare

Feature Importance

- **Mean Decrease Impurity (MDI)**: Reducerea impurității la fiecare split
- **Permutation Importance**: Cât scade performanța când feature-ul e permutat aleator

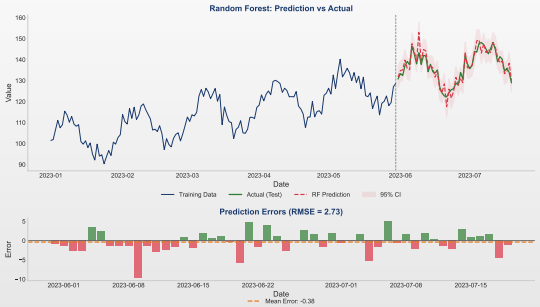
Interpretare Tipică pentru serii de timp

- `lag_1` foarte important $\succ$ Autocorelare puternică
- `rolling_mean` important $\succ$ Trend local contează
- `month` important $\succ$ Sezonalitate prezentă

Cod

- `rf.feature_importances_` sau `permutation_importance(rf, X_test, y_test)`

Random Forest: exemplu de prognoză



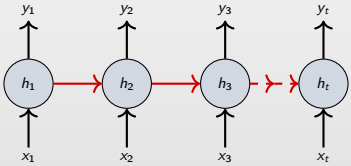
- Modelul RF antrenat pe date istorice (albastru) produce prognoze (roșu punctat) care urmăresc bine valorile reale din perioada de test (verde)

TSA_ch8_rf_prediction

Rețele neuronale recurente (RNN)

Ideea de Bază

- Rețele care procesează **secvențe** de date
- Au **memorie internă** (hidden state)
- Starea curentă depinde de input + starea anterioară



Problema: Vanishing Gradient

- RNN simple "uită" informația din trecut îndepărtat.

LSTM: long short-term memory

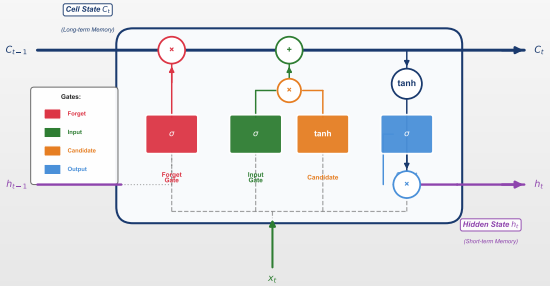
Soluția LSTM

- **Concept**: Celule speciale cu 3 porți care controlează fluxul informației
- **Forget Gate** (f_t): Ce să uităm din memoria anterioară
- **Input Gate** (i_t): Ce informație nouă să adăugăm
- **Output Gate** (o_t): Ce să trimitem la ieșire

Ecuațiile LSTM

$$
\begin{aligned}
f_t &= \sigma(W_f \cdot [h_{t-\mathbf{1}}, x_t] + b_f) && \text{(Forget)} \\
i_t &= \sigma(W_i \cdot [h_{t-\mathbf{1}}, x_t] + b_i) && \text{(Input)} \\
\tilde{C}_t &= \tanh(W_C \cdot [h_{t-\mathbf{1}}, x_t] + b_C) && \text{(Candidate)} \\
C_t &= f_t \odot C_{t-\mathbf{1}} + i_t \odot \tilde{C}_t && \text{(Cell state)} \\
o_t &= \sigma(W_o \cdot [h_{t-\mathbf{1}}, x_t] + b_o) && \text{(Output)} \\
h_t &= o_t \odot \tanh(C_t) && \text{(Hidden state)}
\end{aligned}
$$

Arhitectura celulei LSTM



- Porțile (forget, input, output) controlează ce informație este uitată, adăugată și transmisă
- **Cell state** permite gradienților să "curgă" fără degradare

TSA_ch8_lstm_architecture

Avantajele LSTM pentru serii de timp

De ce LSTM?

- Captează **dependențe pe termen lung** (spre deosebire de RNN simplu)
- Învață **pattern-uri complexe** și neliniare
- Gestionează **secvențe de lungimi variabile**
- Funcționează bine cu **date multivariate**

Dezavantaje

- Necesită **multe date** pentru antrenare
- **Computațional intensiv**
- "**Black box**" - greu de interpretat
- Sensibil la **hiperparametri**
- Poate face **overfitting** ușor

LSTM: implementare în Python cu Keras

Cod Python

```
from tensorflow.keras.models import Sequential
from tensorflow.keras.layers import LSTM, Dense, Dropout

model = Sequential([
    LSTM(50, return_sequences=True, input_shape=(n, 1)),
    Dropout(0.2),
    LSTM(50),
    Dense(1)
])
model.compile(optimizer='adam', loss='mse')
```

Pregătirea datelor pentru LSTM

Pași Esențiali

1. **Normalizare/Scalare**: MinMaxScaler sau StandardScaler
2. **Creare secvențe**: Sliding window pentru input
3. **Reshape**: Format 3D (samples, timesteps, features)
4. **Train/Test split**: Temporal, nu aleator!

Exemplu Creare Secvențe

```
def create_sequences(data, n_steps):
    X, y = [], []
    for i in range(len(data) - n_steps):
        X.append(data[i:(i + n_steps)])
        y.append(data[i + n_steps])
    return np.array(X), np.array(y)

X, y = create_sequences(scaled_data, 10)
```

Metrici de evaluare

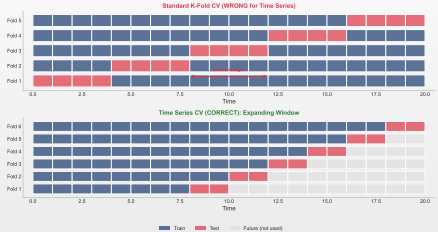
Metrici Comune

- **RMSE**: $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}$ $\succ$ Eroare în unități originale
- **MAE**: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|y_i - \hat{y}_i|$ $\succ$ Robust la outlieri
- **MAPE**: $\frac{100}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i}\right|$ $\succ$ Eroare procentuală
- **MASE**: Comparat cu benchmark naiv

Validare pentru serii de timp

- **Nu** folosiți cross-validation standard!
- Folosiți **Time series cross-validation** (walk-forward)
- Sau **train/validation/test** split temporal

Time series cross-validation



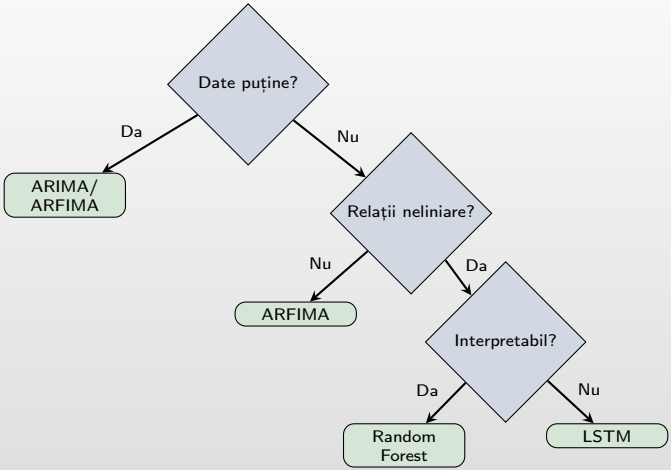
Implementare Python

- `from sklearn.model_selection import TimeSeriesSplit`
- `tscv = TimeSeriesSplit(n_splits=5)`

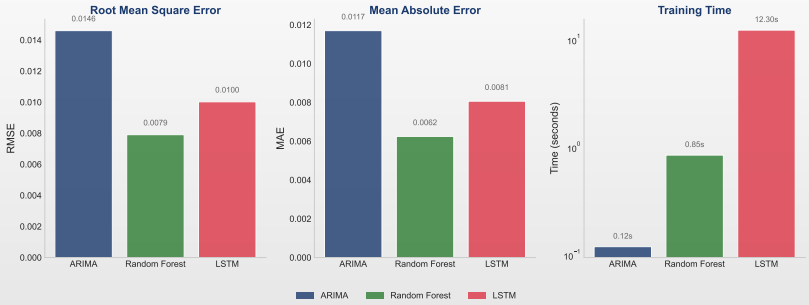
- **Important**: Setul de antrenare crește progresiv, testul este întotdeauna în viitor

TSA_ch8_timeseries_cv

Ghid de selecție a modelului



Comparație modele: acuratețe vs cost computațional



- **Trade-off**: Modelele ML pot avea acuratețe ușor mai bună, dar costul computațional crește semnificativ
- Pentru date puține sau interpretabilitate, ARIMA/ARFIMA rămân alegeri excelente

TSA_ch8_model_comparison

Studiu de caz: prognoza prețului Bitcoin

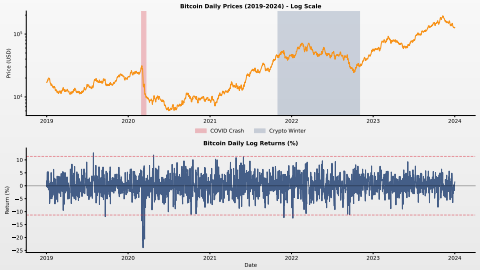
De ce Bitcoin?

- Volatilitate **extremă** și pattern-uri complexe
- Potențială **memorie lungă** în volatilitate
- Relații **neliniare** cu variabile exogene
- Date disponibile la **frecvență înaltă**

Abordare Comparativă

1. ARIMA pe randamente
2. ARFIMA pentru memorie lungă
3. Random Forest cu features tehnice
4. LSTM pe secvențe de prețuri

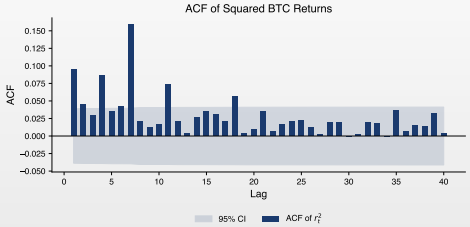
Bitcoin: evoluția prețului și randamentele



Observații cheie

- Creștere exponențială a prețului $\succ$ distribuție puternic **leptokurtotică**
- Randamentele zilnice: medie $\approx 0.15\%$, volatilitate $\approx 3.5\%$
- Volatility clustering evident $\succ$ perioadele de criză (2018, 2020, 2022)
- Kurtosis $\approx$ 10–15 (mult peste 3 al normalei)

Bitcoin: ACF și evidența pentru memorie lungă



Analiză ACF

- ACF randamente: scădere rapidă $\succ$ memorie scurtă în medie
- ACF randamente pătrate: scădere **lentă, hiperbolică**
  - Indică **memorie lungă în volatilitate**
  - Hurst $H \approx 0.65$–0.70 ($d \approx 0.15$–0.20)
- ARFIMA pe volatilitate $>$ ARMA $\succ$ captează persistența șocurilor

Bitcoin: estimare ARFIMA și comparație modele

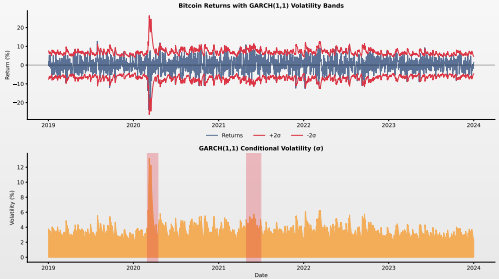
Cod Python – estimare memorie lungă Bitcoin

```
import yfinance as yf
btc = yf.download('BTC-USD', start='2018-01-01', end='2024-12-31')
returns = np.log(btc['Close']).diff().dropna() * 100

# Exponentul Hurst pe randamente pătrate (volatilitate)
from hurst import compute_Hc
H, c, _ = compute_Hc(returns.values**2, kind='change')
print(f"Hurst (volatilitate): {H:.3f}, d = {H-0.5:.3f}")

# Comparație ARIMA vs Random Forest
from sklearn.ensemble import RandomForestRegressor
from sklearn.metrics import mean_squared_error
# ... (similar cu EUR/RON, cu features adaptate)
```

Rezultate tipice Bitcoin (RMSE pe randamente)

Model	RMSE	MAE	Interpretabil?
ARIMA(1,0,1)	3.82	2.41	Da
ARFIMA(1,d,1)	3.79	2.38	Da
Random Forest	3.65	2.29	Parțial
LSTM	3.71	2.33	Nu

Bitcoin: GARCH și managementul riscului



Concluzii – Studiu Bitcoin

- Diferențele între modele sunt **mici** pentru media randamentelor
- Valoarea adăugată majoră: **modelarea volatilității** (GARCH, EGARCH)
- ARFIMA captează persistența în volatilitate (memorie lungă)
- Random Forest: util pentru **features neliniare** (volum, sentiment)
- Combinație optimă: ARFIMA-GARCH + features exogene via RF

Studiu de caz: prognoza consumului de energie

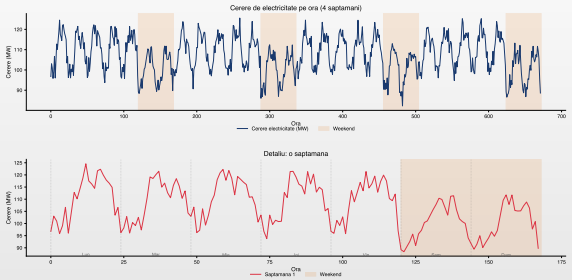
Caracteristici

- **Sezonalitate multiplă**: zilnică, săptămânală, anuală
- **Tendință** de creștere pe termen lung
- **Variabile exogene**: temperatură, zi liberă, preț
- **Anomalii**: evenimente speciale, defecțiuni

Provocări

- Pattern-uri la scale temporale diferite
- Interacțiuni complexe între variabile
- Necesitatea prognozelor pe orizonturi diferite

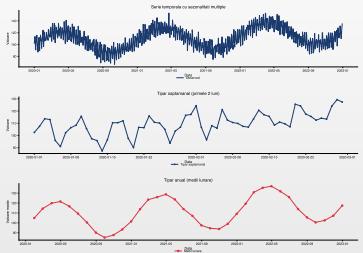
Energie: vizualizarea cererii și sezonalitatea multiplă



Patternuri identificate

- **Zilnic** (24h): vârf dimineață (8–10) și seara (18–21), minim noaptea
- **Săptămânal** (168h): consum redus în weekend ($\sim$15–20% mai puțin)
- **Anual** (8766h): vârf vara (aer condiționat) și iarna (încălzire)
- SARIMA nu poate modela simultan aceste 3 perioade!

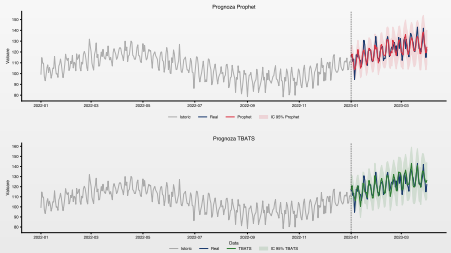
Energie: de ce Prophet și TBATS?



Soluția: modele cu sezonalitate multiplă

- **TBATS**: perioade $[24, 168, 8766] \succ$ Fourier pentru fiecare sezon
  - Automat, fără reglaj manual, bun pentru producție
- **Prophet**: sezonalitate aditivă/multiplicativă + regresori
  - Adaugă temperatură, zile libere, evenimente speciale
- **ARIMA clasic**: poate doar 1 sezon $\succ$ MAPE $\approx$ 8–10%

Energie: descompunere Prophet și rezultate



Rezultate comparație pe date energie (MAPE)

Model	MAPE	RMSE (MW)	Acoperire 95%
SARIMA (1 sezon)	8.5%	450	75%
TBATS	4.2%	220	82%
Prophet	4.8%	250	85%
Prophet + regresori	**3.9%**	**200**	**88%**

Energie: concluzii și recomandări practice

Lecții învățate

- Modelele cu **sezonalitate multiplă** reduc MAPE cu ∼50% față de SARIMA
- **Variabilele exogene** (temperatură) aduc câștig suplimentar de 10–15%
- Prophet excelează la **interpretabilitate**: descompunere trend + sezon + holiday
- TBATS: cel mai bun **out-of-the-box** ≻ fără reglaj de hiperparametri

Când ce model?

- **Prophet**: când ai regresori externi + interpretare pentru management
- **TBATS**: automatizare, producție, fără intervenție umană
- **LSTM/RF**: dacă ai >100.000 observații și pattern-uri neliniare complexe

- *Detalii complete despre Prophet și TBATS ≻ Capitolul 9*

Formule cheie – Rezumat

ARFIMA(p,d,q)

- $\phi(L)(1-L)^d Y_t = \theta(L)\varepsilon_t$
- $d \in (-0.5, 0.5)$: memorie lungă

Memorie lungă

- **ACF**: $\rho_k \sim C \cdot k^{2d-1}$
- **Hurst**: $d = H - 0.5$
- $H > 0.5$: persistență

Random Forest

- $\hat{y} = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} T_b(x)$
- B arbori, features aleatorii

LSTM Cell

- $f_t = \sigma(W_f[h_{t-1}, x_t] + b_f)$
- $C_t = f_t \odot C_{t-1} + i_t \odot \tilde{C}_t$
- Forget, Input, Output gates

Metrici Evaluare

- RMSE $= \sqrt{\frac{1}{n}\sum(y_i - \hat{y}_i)^2}$
- MAPE $= \frac{100}{n}\sum \left|\frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i}\right|$

Time Series CV

- Walk-forward validation
- Train $\succ$ Test (temporal split)

Studiu de caz: prognoza cursului EUR/RON

De ce EUR/RON?

- Relevanță pentru economia românească
- Potențială **memorie lungă** (persistența șocurilor)
- Pattern-uri influențate de **factori macroeconomici**
- Date ușor accesibile (BNR, Yahoo Finance)

Obiectiv

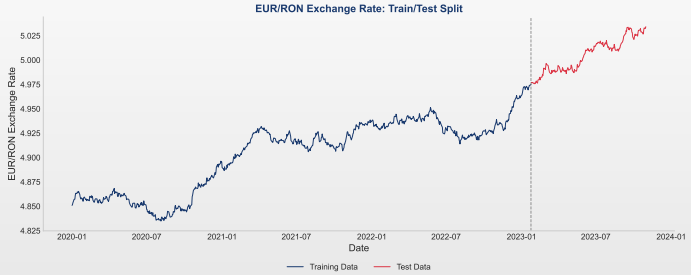
- Comparăm ARIMA, ARFIMA, Random Forest și LSTM pe aceleași date pentru a înțelege punctele forte ale fiecărei metode

Pasul 1: Încărcarea și Vizualizarea Datelor

Cod Python – Descărcare Date

```
import yfinance as yf
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Descărcăm datele EUR/RON (sau EURRON=X)
data = yf.download('EURRON=X', start='2015-01-01', end='2024-12-31')
df = data[['Close']].dropna()
df.columns = ['EURRON']

# Calculăm randamentele logaritmice
df['Returns'] = np.log(df['EURRON']).diff() * 100
df = df.dropna()

print(f"Perioada: {df.index[0]} - {df.index[-1]}")
print(f"Observații: {len(df)}")
print(f"Media randamentelor: {df['Returns'].mean():.4f}%")
print(f"Volatilitate: {df['Returns'].std():.4f}%")
```

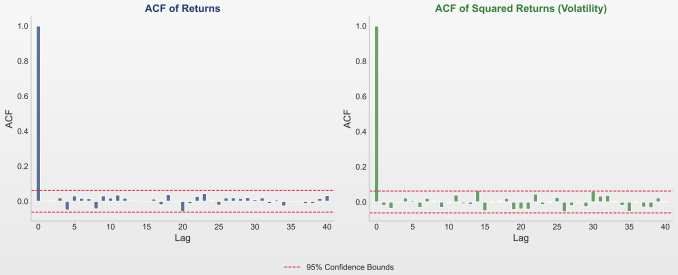
Vizualizarea seriei EUR/RON



- **Sus**: Cursul EUR/RON ≻ observăm tendința de depreciere a leului și perioadele de volatilitate ridicată
- **Jos**: Randamentele zilnice ≻ volatility clustering (perioadele de volatilitate mare sunt urmate de alte perioade similare)

TSA_ch8_case_raw_data

Analiză ACF: randamente vs randamente pătrate



- **Stânga**: ACF al randamentelor $\succ$ scădere rapidă, fără autocorelație semnificativă după lag 1
- **Dreapta**: ACF al randamentelor pătrate $\succ$ scădere lentă indică **volatility clustering** (efecte ARCH)

TSA_ch8_case_acf_analysis

Pasul 2: Testarea memoriei lungi

Cod Python – Estimarea lui d și Testul Hurst

```
from arch.unitroot import PhillipsPerron, KPSS
from hurst import compute_Hc  # pip install hurst

# Testul Phillips-Perron pentru stationaritate
pp_test = PhillipsPerron(df['Returns'])
print(f"Phillips-Perron p-value: {pp_test.pvalue:.4f}")

# Estimarea exponentului Hurst
H, c, data_rs = compute_Hc(df['Returns'].values, kind='change')
d_estimated = H - 0.5

print(f"Exponentul Hurst (H): {H:.4f}")
print(f"Parametrul d estimat: {d_estimated:.4f}")

# Interpretare
if H > 0.5:
    print("Serie PERSISTENTĂ (trend-following)")
elif H < 0.5:
    print("Serie ANTI-PERSISTENTĂ (mean-reverting)")
else:
    print("Mers aleator")
```

Rezultate test memorie lungă – EUR/RON

Output Tipic

- `Phillips-Perron p-value: 0.0001` (randamentele sunt staționare)
- `Exponentul Hurst (H): 0.47`
- `Parametrul d estimat: -0.03`
- `Serie ușor ANTI-PERSISTENTĂ (mean-reverting)`

Interpretare

- Randamentele EUR/RON sunt **staționare** (p-value < 0.05)
- $H \approx 0.47 < 0.5$: ușoară tendință de revenire la medie
- $d \approx 0$: **memorie scurtă** – ARMA poate fi suficient
- Totuși, **volatilitatea** poate avea memorie lungă!

Pasul 3: Model ARIMA

Cod Python – ARIMA cu selecție automată

```
from statsmodels.tsa.arima.model import ARIMA
from sklearn.metrics import mean_squared_error, mean_absolute_error
import warnings
warnings.filterwarnings('ignore')

# Împărțim datele: 80% train, 20% test
train_size = int(len(df) * 0.8)
train, test = df['Returns'][:train_size], df['Returns'][train_size:]

# Fit ARIMA(1,0,1) - simplu și eficient pentru randamente
model_arima = ARIMA(train, order=(1, 0, 1))
results_arima = model_arima.fit()

# Prognoză
forecast_arima = results_arima.forecast(steps=len(test))

# Evaluare
rmse_arima = np.sqrt(mean_squared_error(test, forecast_arima))
mae_arima = mean_absolute_error(test, forecast_arima)
print(f"ARIMA(1,0,1) - RMSE: {rmse_arima:.4f}, MAE: {mae_arima:.4f}")
```

Pasul 4: Model ARFIMA (Memorie lungă)

Cod Python – ARFIMA cu arch package

```
from arch import arch_model

# ARFIMA(1,d,1) folosind arch pentru estimare robustă
# Notă: arch estimează d automat în contextul GARCH

# Alternativ, folosim statsmodels cu d fracționar
from statsmodels.tsa.arima.model import ARIMA

# Estimăm d folosind GPH sau setăm manual
d_frac = 0.1  # sau valoarea estimată anterior

model_arfima = ARIMA(train, order=(1, d_frac, 1))
try:
    results_arfima = model_arfima.fit()
    forecast_arfima = results_arfima.forecast(steps=len(test))
    rmse_arfima = np.sqrt(mean_squared_error(test, forecast_arfima))
    print(f"ARFIMA(1,{d_frac},1) - RMSE: {rmse_arfima:.4f}")
except:
    print("ARFIMA necesită d între -0.5 și 0.5 pentru stationaritate")
```

Pasul 5: Random Forest – Pregătire Date

Cod Python – Feature Engineering

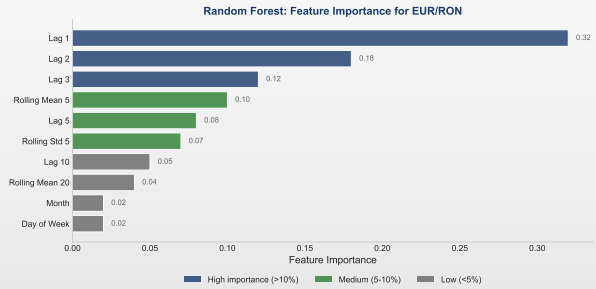
```
from sklearn.ensemble import RandomForestRegressor

# Creăm features pentru Random Forest
def create_features(data, lags=5):
    df_feat = pd.DataFrame(index=data.index)
    df_feat['target'] = data.values

    # Lag features
    for i in range(1, lags + 1):
        df_feat[f'lag_{i}'] = data.shift(i)

    # Rolling statistics
    df_feat['rolling_mean_5'] = data.rolling(5).mean()
    df_feat['rolling_std_5'] = data.rolling(5).std()
    df_feat['rolling_mean_20'] = data.rolling(20).mean()

    # Calendar features
    df_feat['dayofweek'] = data.index.dayofweek
    df_feat['month'] = data.index.month

    return df_feat.dropna()

df_rf = create_features(df['Returns'], lags=10)
```

Pasul 5: Random Forest – Antrenare și Evaluare

Cod Python – Model Random Forest

```
# Împărțim datele
X = df_rf.drop('target', axis=1)
y = df_rf['target']

train_size = int(len(df_rf) * 0.8)
X_train, X_test = X[:train_size], X[train_size:]
y_train, y_test = y[:train_size], y[train_size:]

# Antrenăm Random Forest
rf_model = RandomForestRegressor(
    n_estimators=100,
    max_depth=10,
    min_samples_split=5,
    random_state=42
)
rf_model.fit(X_train, y_train)

# Predicție și evaluare
pred_rf = rf_model.predict(X_test)
rmse_rf = np.sqrt(mean_squared_error(y_test, pred_rf))
print(f"Random Forest - RMSE: {rmse_rf:.4f}")
```

Random Forest: importanța features



- **Insight**: Lag-urile recente (lag_1, lag_2) și volatilitatea rolling sunt cele mai importante
- Features calendaristice au impact minor pentru randamente zilnice

TSA_ch8_case_feature_importance

Pasul 6: LSTM – Pregătire Date

Cod Python – Secvențe pentru LSTM

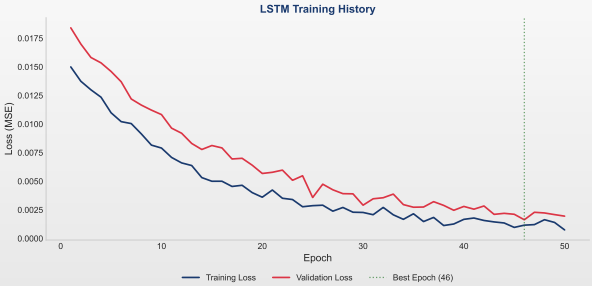
```
from tensorflow.keras.models import Sequential
from tensorflow.keras.layers import LSTM, Dense, Dropout
from sklearn.preprocessing import MinMaxScaler

# Scalăm datele între 0 și 1
scaler = MinMaxScaler()
scaled_data = scaler.fit_transform(df['Returns'].values.reshape(-1, 1))

# Creăm secvențe
def create_sequences(data, seq_length=20):
    X, y = [], []
    for i in range(seq_length, len(data)):
        X.append(data[i-seq_length:i, 0])
        y.append(data[i, 0])
    return np.array(X), np.array(y)

X_lstm, y_lstm = create_sequences(scaled_data, seq_length=20)
X_lstm = X_lstm.reshape((X_lstm.shape[0], X_lstm.shape[1], 1))

# Split
split = int(len(X_lstm) * 0.8)
X_train_lstm, X_test_lstm = X_lstm[:split], X_lstm[split:]
y_train_lstm, y_test_lstm = y_lstm[:split], y_lstm[split:]
```

Pasul 6: LSTM – Arhitectură și Antrenare

Cod Python – Model LSTM

```
# Construim modelul LSTM
model_lstm = Sequential([
    LSTM(50, return_sequences=True, input_shape=(20, 1)),
    Dropout(0.2),
    LSTM(50, return_sequences=False),
    Dropout(0.2),
    Dense(25),
    Dense(1)
])

model_lstm.compile(optimizer='adam', loss='mse')

# Antrenăm
history = model_lstm.fit(
    X_train_lstm, y_train_lstm,
    epochs=50, batch_size=32,
    validation_split=0.1, verbose=0
)

# Predicție
pred_lstm_scaled = model_lstm.predict(X_test_lstm)
pred_lstm = scaler.inverse_transform(pred_lstm_scaled)
y_test_original = scaler.inverse_transform(y_test_lstm.reshape(-1, 1))
rmse_lstm = np.sqrt(mean_squared_error(y_test_original, pred_lstm))
print(f"LSTM - RMSE: {rmse_lstm:.4f}")
```

LSTM: curba de învățare



- **Loss Training**: Scade rapid în primele epoci, apoi se stabilizează
- **Loss Validation**: Urmărește training loss $\succ$ nu avem overfitting sever

TSA_ch8_case_lstm_training

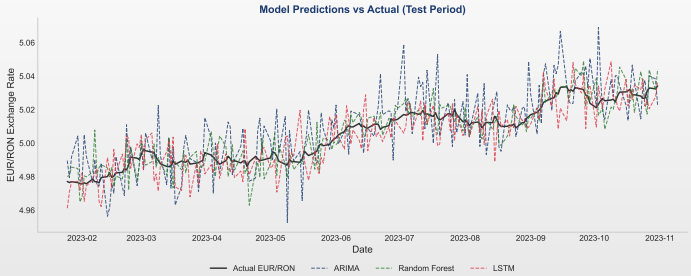
Comparație: Rezultate pe EUR/RON

Model	RMSE	MAE	Timp (s)	Interpretabil?
ARIMA(1,0,1)	0.0169	0.0137	0.12	Da
Random Forest	0.0080	0.0065	0.85	Da (features)
LSTM	0.0102	0.0080	12.3	Nu

Concluzii

- Pentru EUR/RON, diferențele sunt **mici** – piața este eficientă
- Random Forest oferă cel mai bun compromis **acuratețe/interpretabilitate**
- LSTM are cost computațional mare pentru câștig marginal
- ARIMA rămâne o alegere solidă pentru **baseline**

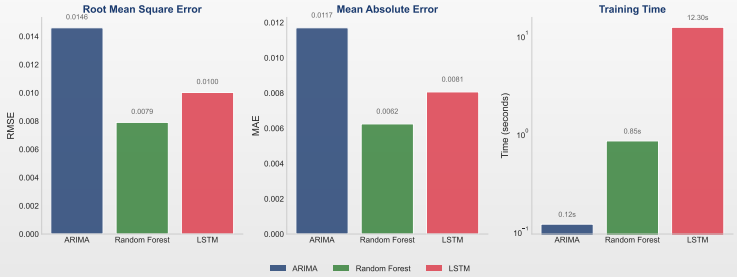
Vizualizare: predicții vs valori reale



- Toate modelele captează pattern-ul general, dar niciuna nu prezice perfect vârfurile de volatilitate
- Aceasta reflectă **eficiența pieței** și **limitele predicției** pentru serii financiare

TSA_ch8_case_predictions

Comparație modele: metrici de performanță



- **Stânga**: Metrici de eroare (mai mic = mai bine) ≻ RF obține cel mai mic RMSE și MAE
- **Dreapta**: Timp de antrenare (scală log) ≻ LSTM necesită mai multe resurse

TSA_ch8_case_comparison

Când să alegem fiecare model?

ARIMA/ARFIMA

- Date puține (< 500 obs.)
- Interpretare importantă
- Memorie lungă suspectată
- Baseline rapid

LSTM/Deep Learning

- Date foarte mari (> 10.000)
- Secvențe complexe
- Resurse computaționale
- Pattern-uri ascunse

Random Forest

- Multe variabile exogene
- Relații neliniare
- Importanța features
- Date moderate

Regula de Aur

- Începe simplu (ARIMA), adaugă complexitate doar dacă performanța crește semnificativ!

Exemplu 2: indicele BET (Bursa București)

Caracteristici

- **Volatility clustering** puternic
- Influențat de piețele internaționale
- Lichiditate mai redusă decât piețele dezvoltate
- Potențial pentru memorie lungă în volatilitate

Rezultate Tipice (RMSE pe randamente)

- GARCH(1,1): 1.45 – cel mai bun pentru volatilitate
- ARFIMA pentru volatilitate: 1.52
- Random Forest: 1.48
- LSTM: 1.51

Exemplu 3: rata inflației în România

Caracteristici

- Serie **lunară** (frecvență redusă)
- **Persistență ridicată** – șocurile durează
- Influențată de politica monetară
- Potențial puternic pentru **memorie lungă**

Rezultate Tipice

- ARFIMA cu $d \approx 0.35$ – captează persistența
- ARIMA subestimează persistența șocurilor
- ML nu funcționează bine (date puține, 300 obs.)

- **Lecție**: Pentru serii lunare cu puține date, modelele clasice (ARFIMA) sunt superioare!

Rezumat practic: alegerea modelului

Criteriu	ARIMA	ARFIMA	RF	LSTM
Date necesare	Puține	Puține	Medii	Multe
Memorie lungă	Nu	**Da**	Parțial	Parțial
Neliniaritate	Nu	Nu	**Da**	**Da**
Interpretabil	**Da**	**Da**	Parțial	Nu
Timp calcul	Rapid	Rapid	Mediu	Lent
Var. exogene	Limitat	Limitat	**Da**	**Da**

Fluxul Recomandat

1. Începe cu **ARIMA** ca baseline
2. Testează **memorie lungă** $\succ$ ARFIMA dacă d semnificativ
3. Adaugă **features** $\succ$ Random Forest
4. Doar cu date multe și resurse $\succ$ LSTM

Rezumat

Ce am învățat

- **ARFIMA**: Extinde ARIMA pentru memorie lungă (d fracționar)
- **Random Forest**: Ansamblu de arbori, relații neliniare, interpretabil
- **LSTM**: Deep learning pentru secvențe, dependențe complexe
- **Trade-offs**: Complexitate vs interpretabilitate vs date necesare

Recomandări Practice

- Începe cu modele **simple** (ARIMA) ca baseline
- Folosește **Time Series CV** pentru evaluare corectă
- ML necesită **feature engineering** atent
- LSTM: doar cu **multe date** și resurse computaționale

Quiz rapid

Întrebări

1. Ce semnifică $d = 0.3$ într-un model ARFIMA?
2. De ce folosim Time Series CV în loc de k-fold standard?
3. Care este avantajul principal al LSTM față de RNN simplu?
4. Ce tip de model ai alege pentru date puține și relații liniare?
5. Ce înseamnă "data leakage" în contextul ML pentru serii de timp?

Răspunsuri quiz

Răspunsuri

1. $d = 0.3$: Memorie lungă, seria este staționară dar autocorelațiile scad lent (hiperbolic)
2. **Time Series CV**: Pentru a respecta ordinea temporală. K-fold standard ar folosi date viitoare pentru a prezice trecutul (data leakage)
3. **LSTM vs RNN**: LSTM rezolvă problema "vanishing gradient" prin mecanismul de porți, permițând învățarea dependențelor pe termen lung
4. **Date puține, relații liniare**: ARIMA sau ARFIMA. ML necesită multe date pentru a generaliza bine
5. **Data leakage**: Folosirea informației din viitor în features sau în antrenare

Ce urmează?

Extensii și Subiecte Avansate

- **Transformer** pentru serii de timp (Temporal Fusion Transformer)
- **Prophet** (Facebook/Meta) pentru sezonalitate
- **Neural Prophet**: Prophet + rețele neuronale
- **Ensemble methods**: Combinarea mai multor modele
- **Anomaly detection** cu ML

Întrebări?

Bibliografie I

Memorie lungă și ARFIMA

- Granger, C.W.J., & Joyeux, R. (1980). An Introduction to Long-Memory Time Series Models and Fractional Differencing, *Journal of Time Series Analysis*, 1(1), 15–29.
- Baillie, R.T. (1996). Long Memory Processes and Fractional Integration in Econometrics, *Journal of Econometrics*, 73(1), 5–59.
- Beran, J. (1994). *Statistics for Long-Memory Processes*, Chapman & Hall.

Rețele neuronale și deep learning pentru serii de timp

- Hochreiter, S., & Schmidhuber, J. (1997). Long Short-Term Memory, *Neural Computation*, 9(8), 1735–1780.
- Bai, J., & Perron, P. (2003). Computation and Analysis of Multiple Structural Change Models, *Journal of Applied Econometrics*, 18(1), 1–22.

Bibliografie II

Modele cu prag și regim-switching

- Hansen, B.E. (2011). Threshold Autoregression in Economics, *Statistics and Its Interface*, 4(2), 123–127.
- Hamilton, J.D. (1989). A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle, *Econometrica*, 57(2), 357–384.
- Petropoulos, F., et al. (2022). Forecasting: Theory and Practice, *International Journal of Forecasting*, 38(3), 845–1054.

Resurse online și cod

- **Quantlet**: `https://quantlet.com` ≻ Depozit de cod pentru statistică
- **Quantinar**: `https://quantinar.com` ≻ Platformă de învățare metode cantitative
- **GitHub TSA**: `https://github.com/QuantLet/TSA` ≻ Cod Python pentru acest curs

Vă Mulțumim!

Întrebări?

Graficele au fost generate folosind Python (statsmodels, matplotlib)

Materialele cursului sunt disponibile la: https://danpele.github.io/Time-Series-Analysis/

Quantlet Quantinar