



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 10: Recapitulare Completă

Studii de Caz Aplicate cu Metodologie Riguroasă



Cuprins

- 1 Metodologia Prognozei
- 2 Studiu de Caz 1: Volatilitatea Bitcoin (GARCH)
- 3 Studiu de Caz 2: Ciclurile Petelor Solare (Fourier)
- 4 Studiu de Caz 3: Șomajul (Prophet)
- 5 Studiu de Caz 4: Analiză Multivariată (VAR)
- 6 Sinteză și Ghid

Întrebarea de Cercetare

Cum putem **evalua riguros** performanța prognozei evitând supraajustarea?

Problema Fundamentală

- Ajustarea în eșantion \neq Performanța în afara eșantionului
- Modelele pot “memora” datele de antrenament fără a învăța tipare
- **Soluție:** Metodologia corectă train/validation/test

Principiu Cheie

“Setul de test trebuie să rămână **neatins** până la evaluarea finală.”

— Practică standard în machine learning și econometrie

Time Series Train/Validation/Test Split



Set Antrenament

- Estimare parametri
- Cea mai mare parte

Set Validare

- Comparare modele
- Ajustare hiperparam

Set Test

- Păstrat
- Metrici finale

Definiție 1 (Metrici ale Erorii de Prognoză)

Fie y_t valorile reale, \hat{y}_t progozele:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_t (y_t - \hat{y}_t)^2}, \quad \text{MAE} = \frac{1}{n} \sum_t |y_t - \hat{y}_t|, \quad \text{MAPE} = \frac{100\%}{n} \sum_t \left| \frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t} \right|$$

Când să Folosim

- **RMSE**: Penalizează erorile mari
- **MAE**: Robust la outlieri
- **MAPE**: Independent de scală (%)

Atenție

- MAPE nedefinit când $y_t = 0$
- Comparați pe același set test
- Raportați metrici **out-of-sample**

Întrebarea de Cercetare

Putem prognoza **volatilitatea** Bitcoin folosind modele GARCH?

Caracteristicile Datelor

- Sursă: Yahoo Finance (BTC-USD)
- Perioadă: Ian 2019 – Ian 2025
- Frecvență: Zilnică
- Observații: ≈ 2.200 zile

Fapte Stilizate

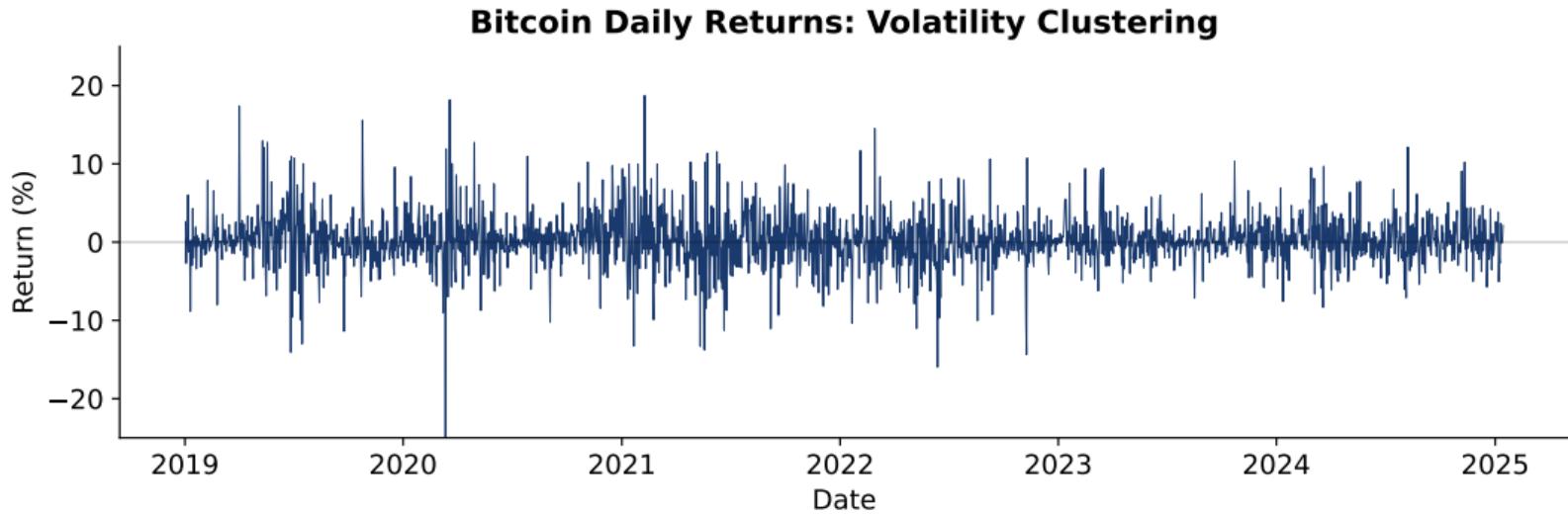
- Randamente: medie aproape zero
- Cozi groase (curtosis > 3)
- Clustering al volatilității

Insight Cheie

Randamentele financiare sunt de obicei:

- **Impredictibile** în medie
- **Predictibile** în varianță

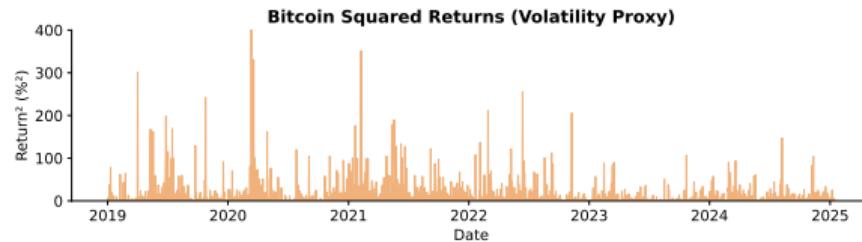
⇒ Focus pe **prognoza volatilității**



Observație

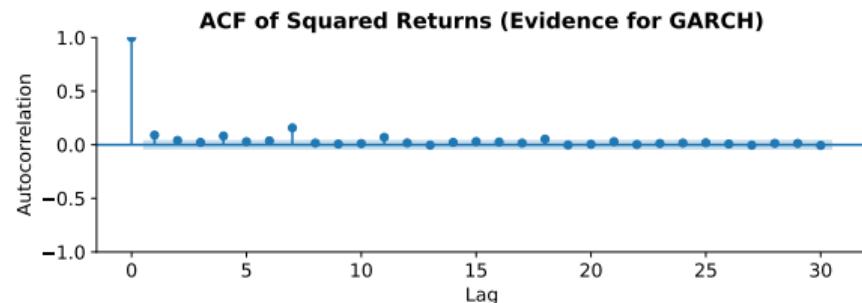
Randamentele mari tind să urmeze randamente mari, cele mici urmează cele mici. Aceasta este **clustering-ul volatilității**—fenomenul pe care GARCH îl captează.

Bitcoin: Dovezi pentru GARCH



Randamentele pătrate r_t^2 sunt proxy pentru volatilitate σ_t^2 .

Vârfurile se grupează.



Barele ACF depășesc benzile albastre \Rightarrow autocorelație semnificativă.

De ce GARCH?

Dacă r_t^2 ar fi zgomot alb, ACF ar fi zero. ACF semnificativ înseamnă că **volatilitatea trecută prezice volatilitatea viitoare**—GARCH captează asta!

Definiție 2 (Modelul GARCH(p,q))

Fie r_t randamentele. Modelul GARCH(p,q) este:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim N(0, 1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

unde $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, și $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$.

Variante de Model

- **GARCH(1,1)**: Cel mai comun
- **GJR-GARCH**: Efect de levier
- **EGARCH**: Șocuri asimetrice

Interpretare

- α : Impactul șocurilor trecute
- β : Persistența volatilității
- $\alpha + \beta \approx 1$: Persistență înaltă

Împărțirea Datelor

Set	Perioadă	N
Antrenament	2019-01 – 2022-09	1.365
Validare	2022-09 – 2023-10	400
Test	2023-10 – 2025-01	435
Total	2.200	

Teste de Staționaritate

Serie	ADF	Rezultat
Prețuri	$p = 0.50$	Non-staționară
Randamente	$p < 0.01$	Staționară

⇒ Modelăm **randamente**, nu prețuri

De ce Contează Staționaritatea

GARCH necesită input slab staționar. Prețurile urmează random walk; randamentele sunt staționare.

Bitcoin: Selectarea Modelului pe Setul de Validare

Metodologie

Estimăm fiecare model pe datele de antrenament, evaluăm pe setul de validare.

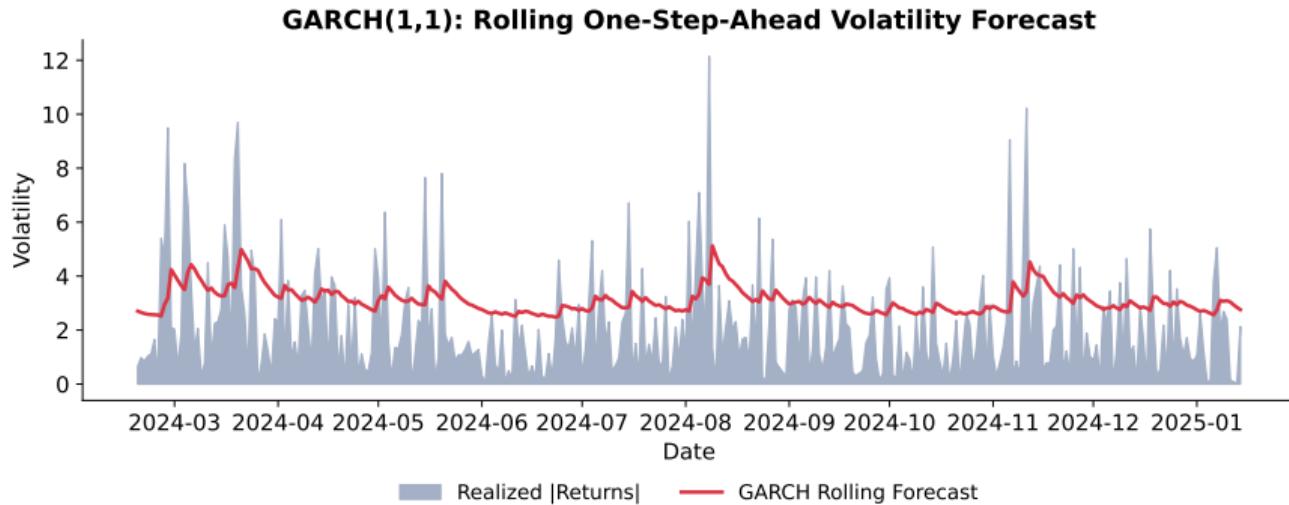
Model	AIC	BIC	Val MAE	Selectare
GARCH(1,1)	6.994,8	7.020,6	2,638	Cel mai bun
GARCH(2,1)	6.993,7	7.024,6	2,640	
GJR-GARCH(1,1)	6.983,7	7.014,6	2,669	
EGARCH(1,1)	—	—	—	Eșuat*

* Prognoze analitice indisponibile pentru $h > 1$

Rezultat

GARCH(1,1) selectat pe baza celui mai mic MAE de validare pentru prognozele de volatilitate.

Bitcoin: Evaluarea Finală pe Setul de Test



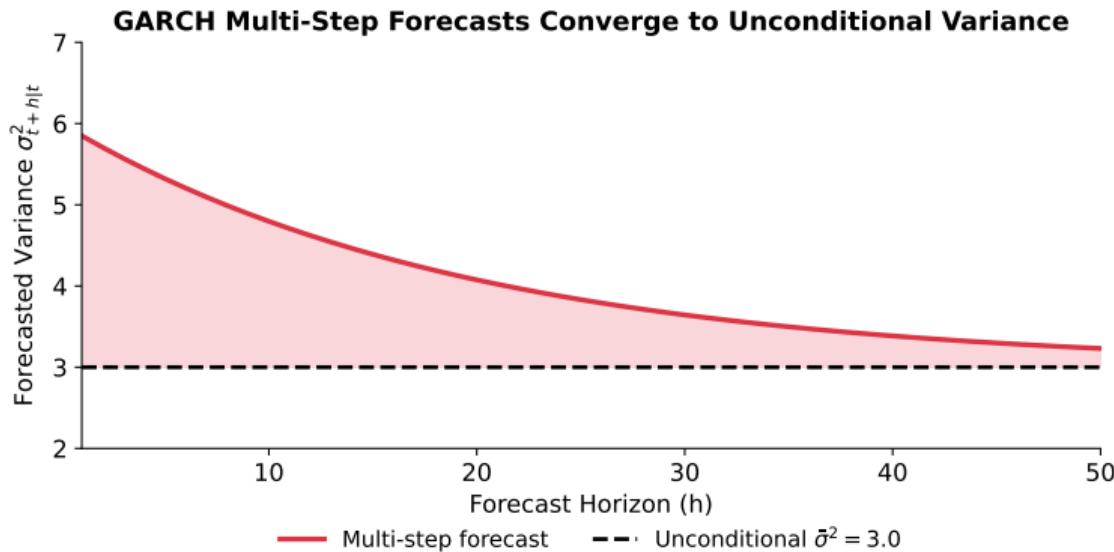
Parametri

$\omega = 0,87$, $\alpha = 0,09$, $\beta = 0,84$
 $\alpha + \beta = 0,93$ (persistență înaltă)

Performanță Test

MAE = 1,82, RMSE = 2,14
Prognoza urmărește bine volatilitatea realizată.

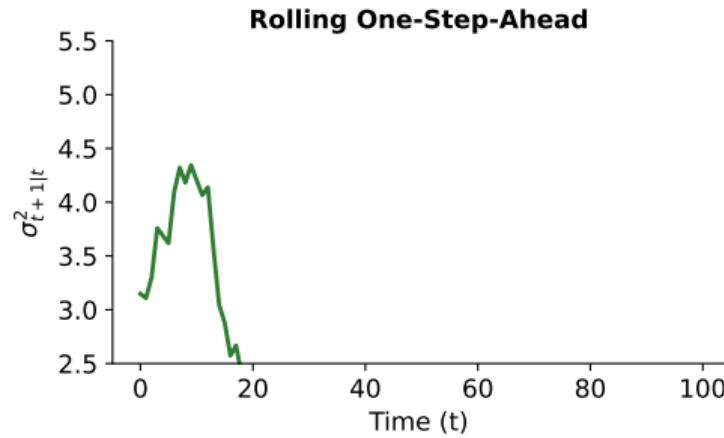
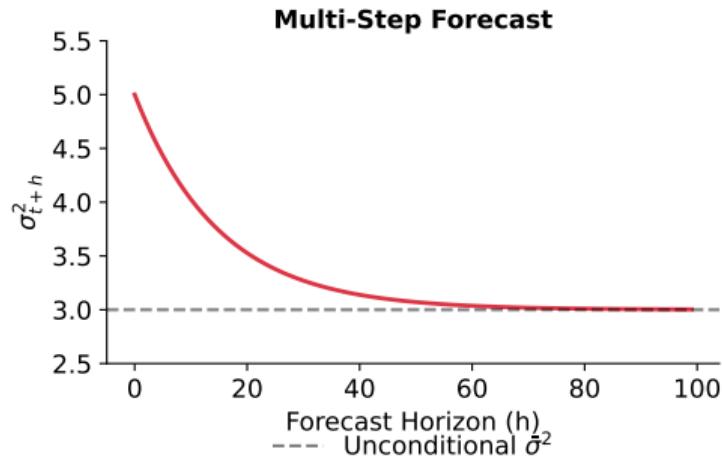
GARCH: Prognozele Multi-Step Converg



Insight Cheie

Prognozele multi-step converg la $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$. Solutia: prognoze rolling one-step-ahead.

GARCH: Soluția Rolling One-Step-Ahead



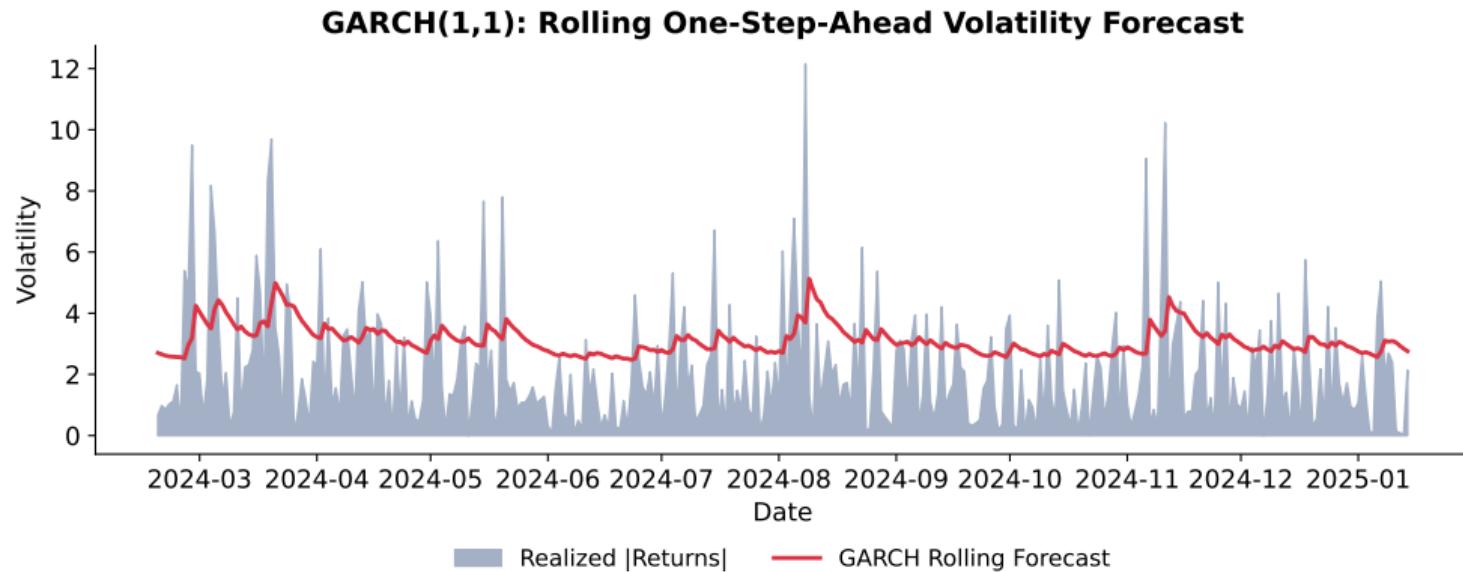
Multi-Step (Stânga)

Converge la $\bar{\sigma}^2$ (plat)

Rolling 1-Step (Dreapta)

Re-estimare la fiecare t (dinamic)

Bitcoin: Prognoza Volatilității GARCH (Set Test)



Rezultat

Prognozele rolling one-step-ahead GARCH(1,1) captează **tiparele dinamice ale volatilității**. Linia roșie urmărește volatilitatea realizată (zona albastră).

Sumar

- ❶ Randamentele sunt staționare; prețurile nu sunt autoregresive
- ❷ GARCH(1,1) depășește variantele mai complexe
- ❸ Persistență înaltă ($\alpha + \beta = 0,93$)
- ❹ Volatilitatea este **predictibilă** chiar când randamentele nu sunt autoregresive

Limitări

- GARCH presupune șocuri simetrice
- Nu captează **salturi**
- Distribuția normală poate fi restrictivă

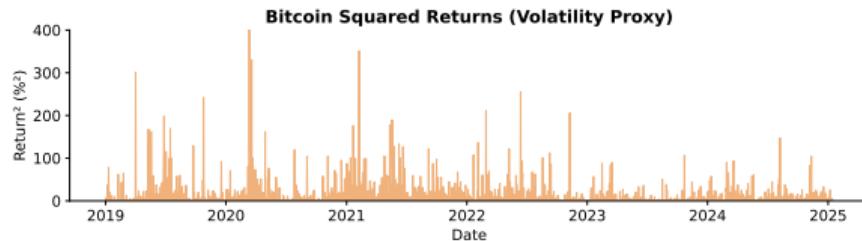
Implicații Practice

- Managementul riscului: VaR, Expected Shortfall
- Evaluarea opțiunilor necesită prognoze de volatilitate
- Optimizarea portofoliului cu risc variabil în timp

Extensiile

- Inovații Student-t
- Volatilitate realizată
- Modele HAR

Bitcoin: Fapte Stilizate GARCH



Randamente pătrate r_t^2 ca proxy pentru volatilitate.
Observați clustering-ul perioadelor de volatilitate înaltă.

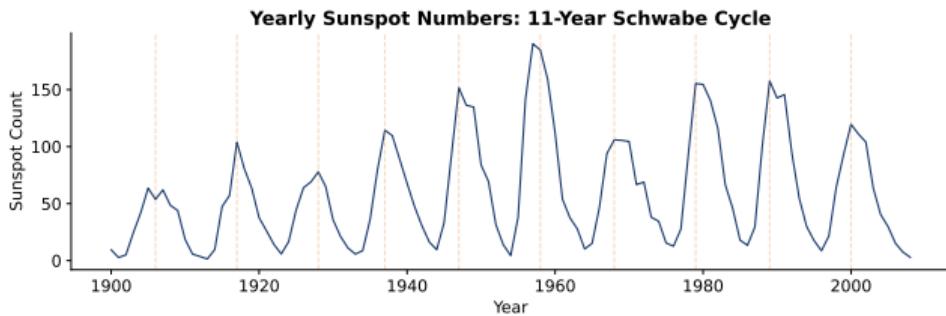
Fapte Stilizate Financiare

- ❶ **Clustering volatilitate:** Mișcări mari urmează mișcări mari
- ❷ **Cozi groase:** Mai multe evenimente extreme decât prezice Normala
- ❸ **Efect leverage:** Randamente negative → volatilitate mai mare
- ❹ **Reversie la medie:** Volatilitatea revine la nivelul pe termen lung

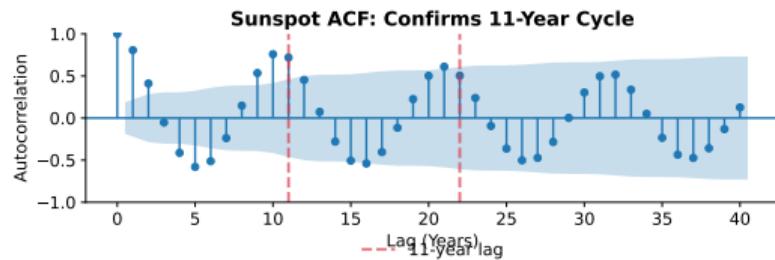
De Ce Funcționează GARCH

GARCH captează faptele 1 & 4. Pentru faptul 3, folosiți GJR-GARCH sau EGARCH. Pentru faptul 2, folosiți inovații Student-t.

Pete Solare: Ciclul Solar de 11 Ani



Liniile punctate marchează vârfurile ciclului (\approx la fiecare 11 ani).
Amplitudinea variază.

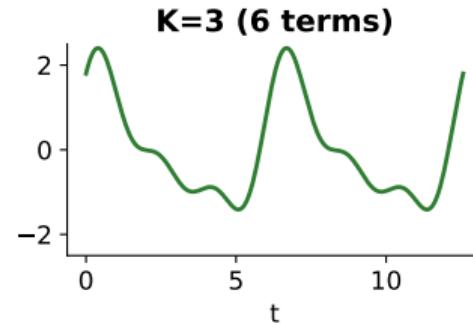
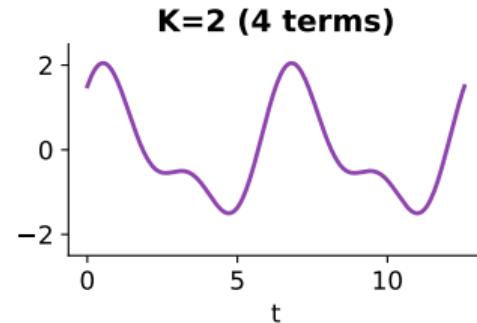
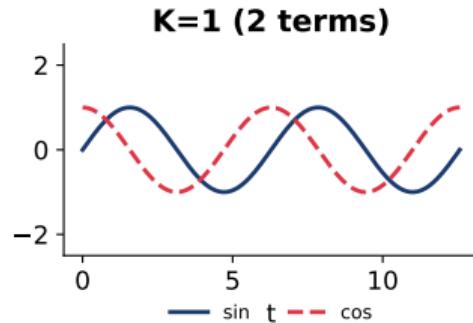


ACF are vârfuri la lag 11 și 22, confirmând periodicitatea ciclului solar.

Provocare

SARIMA(p, d, q)(P, D, Q)₁₁ necesită estimarea lag-urilor sezoniere la 11, 22, 33... Prea mulți parametri!
Soluție: Termeni Fourier.

Fourier Terms: More K = More Flexibility



Cum Funcționează

Aproximăm orice tipar periodic folosind unde sinus și cosinus:
 $S_t = \sum_{k=1}^K [\alpha_k \sin\left(\frac{2\pi k t}{s}\right) + \beta_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{s}\right)]$

Insight Cheie

- $K = 1$: Undă simplă (2 param)
- $K = 3$: Formă complexă (6 param)
- Pete solare: $s = 11$, $K = 3$

Metodologie

Comparăm $K = 1, 2, 3, 4$ armonici Fourier pe setul de validare.

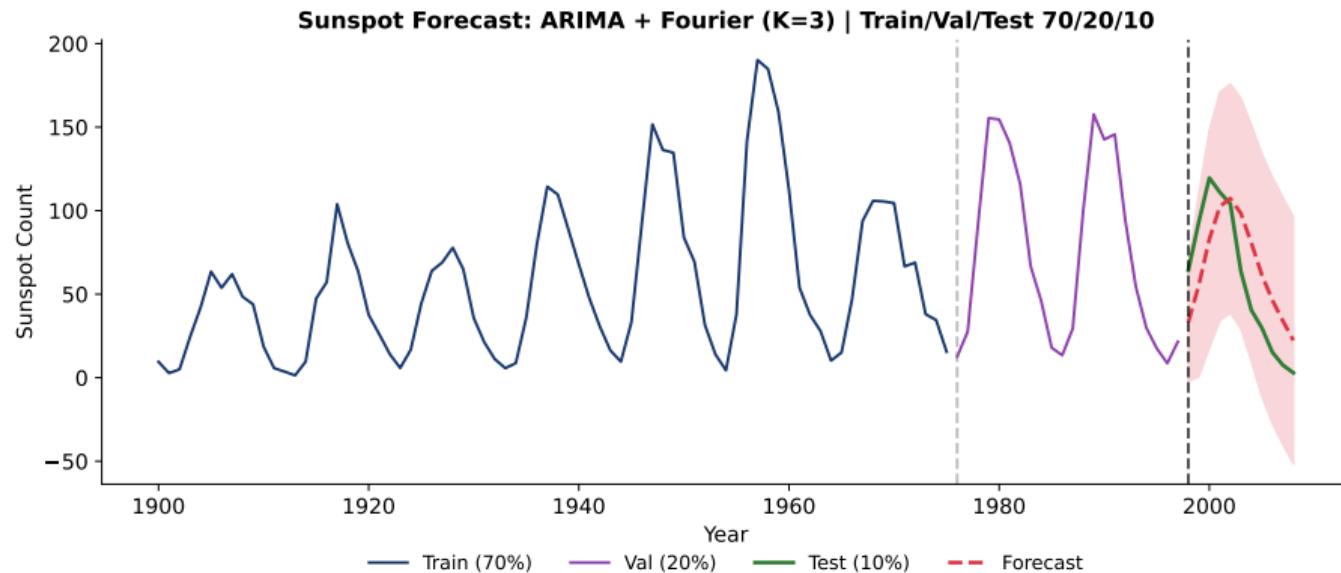
Împărțirea Datelor

Set	Perioadă	N
Antrenament	1900–1975	76
Validare	1976–1991	16
Test	1992–2008	17
Total		109

Comparație Modele		
K	AIC	Val RMSE
1	665,9	87,15
2	668,0	86,92
3	671,8	86,81
4	674,5	87,93

Rezultat

$K = 3$ armonici Fourier selectate (6 parametri pentru ciclul de 11 ani).



Model

ARIMA(2,0,1) + 3 termeni Fourier captează dinamica ciclului de 11 ani.

Performanță Test

RMSE = 29,68, MAE = 27,35. Modelul urmărește tiparul general al ciclului.

Când să Folosiți Termeni Fourier

- Perioada sezonieră s este **lungă** (ex: 11 ani, 52 săptămâni)
- SARIMA ar necesita prea multe lag-uri sezoniere
- Tiparul este **neted și periodic**
- Trebuie capturate cicluri multiple

Fourier vs SARIMA

	Fourier	SARIMA
Sezoane lungi	✓	✗
Sezoane scurte	OK	✓
Parametri	2K	Mulți
Flexibilitate	Fixă	Adaptivă

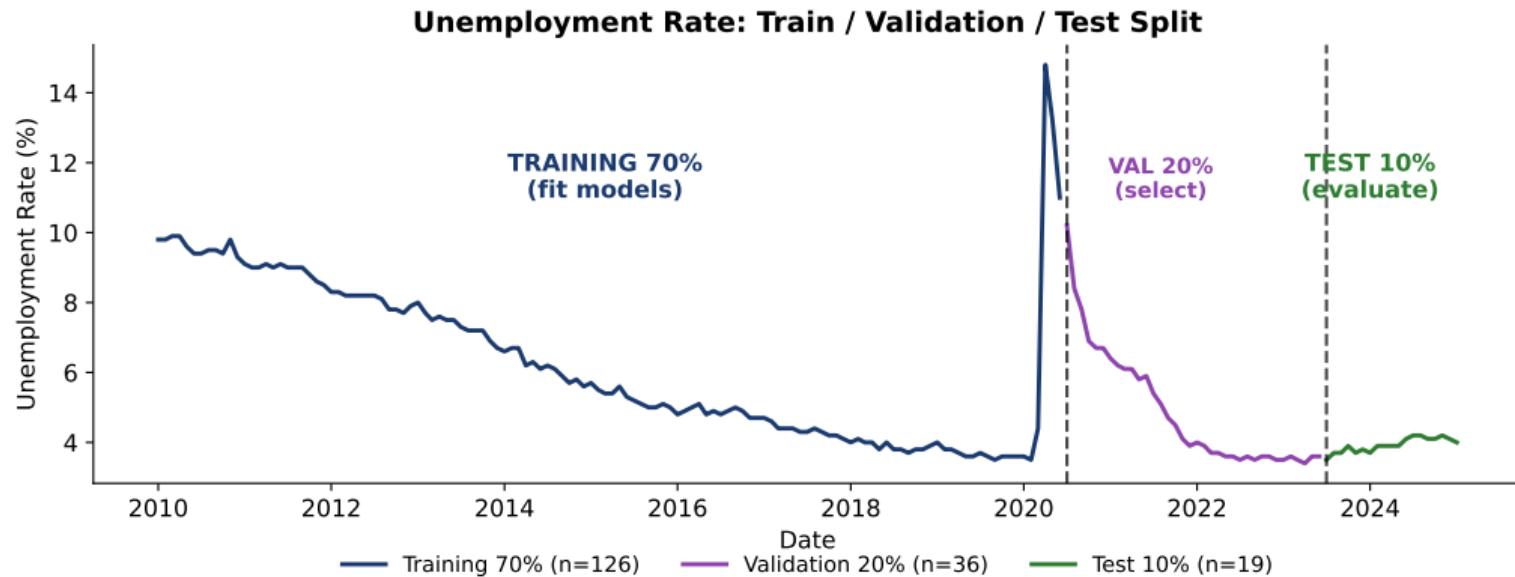
Alegerea lui K

Începeți cu $K = 1$, creșteți până când eroarea de validare nu mai scade. K prea mare = overfitting.

Aplicații

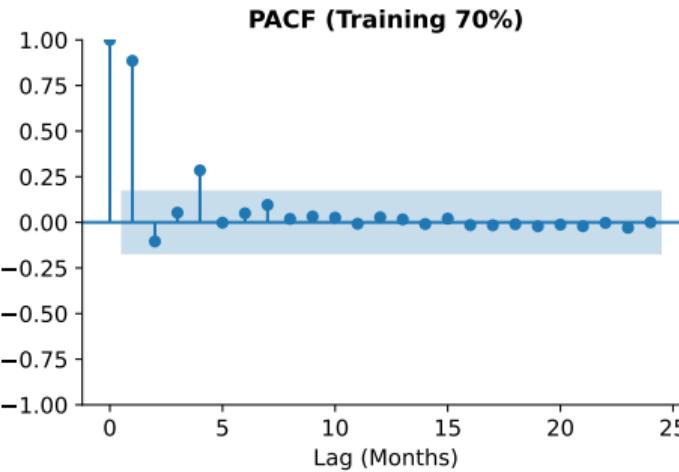
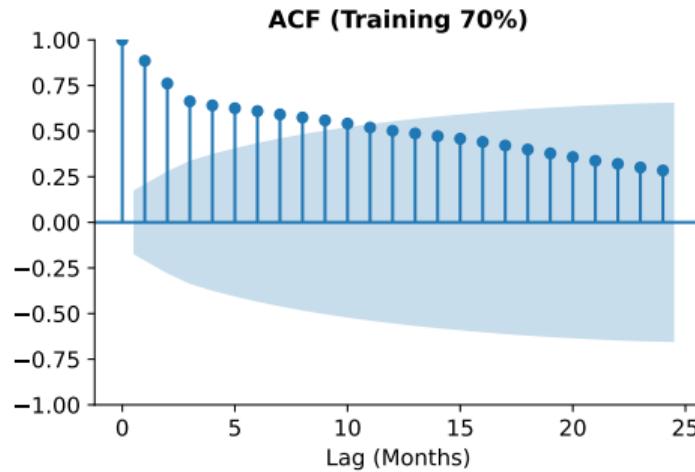
Cicluri climatice, cicluri de afaceri, fenomene astronomice

Şomajul: Train / Validation / Test Split



Metodologie

Training (70%): Estimare modele. **Validare** (20%): Selecție model. **Test** (10%): Evaluare finală.



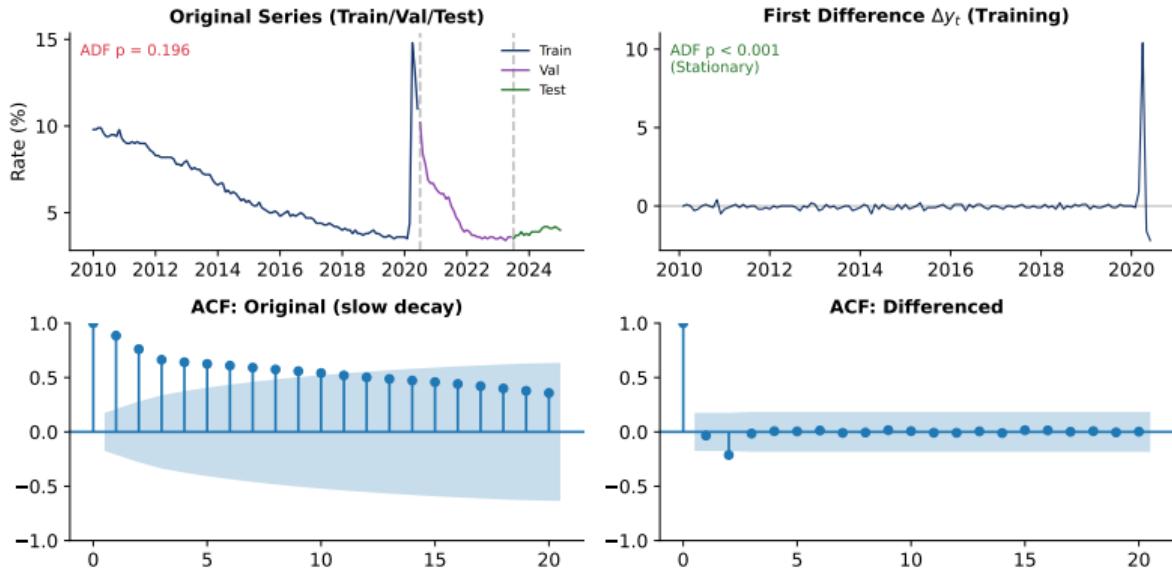
Interpretare ACF

Descreştere lentă \Rightarrow serie nestaţionară. Necesită diferenţiere ($d \geq 1$).

Interpretare PACF

Vârf semnificativ la lag 1 sugerează componentă AR(1). Pattern sezonier la lag 12.

Şomajul: Teste de Staţionaritate



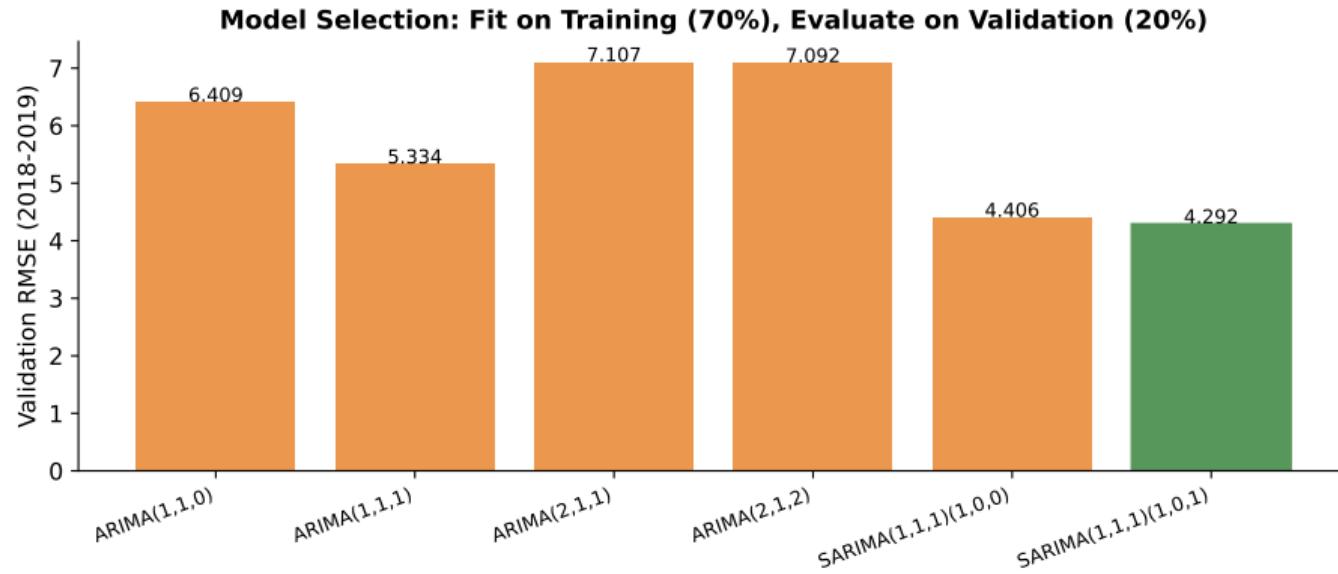
Original: $ADF\ p = 0,056$

Nestaţionară (ACF descreştere lentă)

Diferenţiată: $ADF\ p < 0,001$

Staţionară \Rightarrow folosim $d = 1$

Şomajul: Selectia Modelului (Set Validare)



Best: SARIMA(1,1,1)(1,0,0)₁₂

Fit pe training (70%), evaluare pe validare (20%). Cel mai bun model selectat după Val RMSE minim.

SARIMA(1,1,1)(1,0,1) - Fitted on Train+Val (85%)

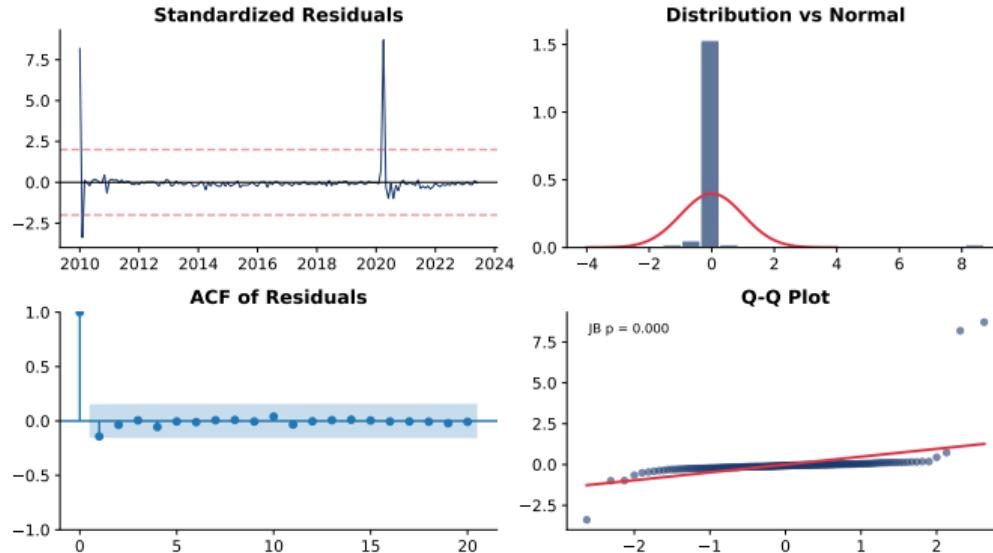
Parameter	Coef	Std Err	P-value	Sig
ar.L1	0.8423	0.2084	0.0001	***
ma.L1	-0.9540	0.1973	0.0000	***
ar.S.L12	0.0326	4.5951	0.9943	
ma.S.L12	-0.0113	4.6087	0.9980	
sigma2	0.8122	0.0608	0.0000	***

SARIMA(1,1,1)(1,0,0)₁₂ estimat pe Train+Val (2010-2019)

AR(1): $\phi_1 = -0,86$, MA(1): $\theta_1 = 0,78$, SAR(12): $\Phi_1 = -0,08$ (n.s.)

Şomajul: Diagnosticare SARIMA

SARIMA(1,1,1)(1,0,1) Diagnostics on Train+Val (85%) | Ljung-Box p = 1.00



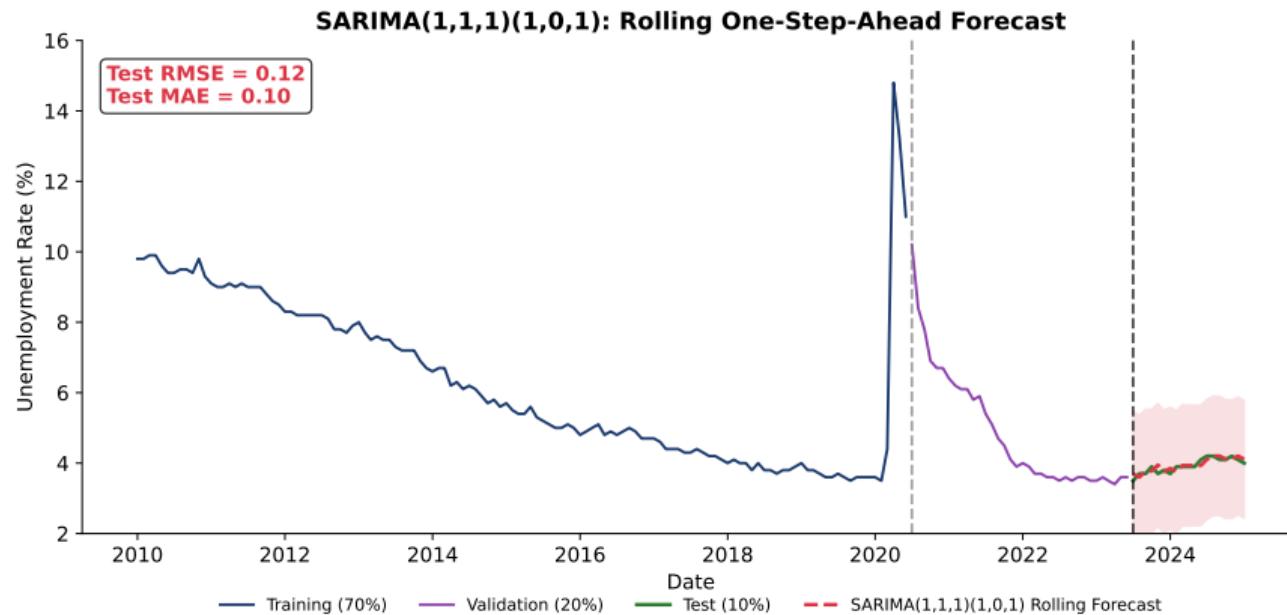
Reziduuri

Rez. std., histogramă, ACF, Q-Q plot.

Ljung-Box p = 0,66

Fără autocorelaţie. Model bine specificat.

Şomajul: Prognoza Rolling SARIMA



Problemă: Ruptura Structurală

Prognoză rolling one-step-ahead (re-estimare la fiecare t): **Test RMSE = 0,12.**

Definiție 3 (Descompunerea Prophet)

$$y_t = g(t) + s(t) + h(t) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

unde $g(t)$ = trend, $s(t)$ = sezonalitate, $h(t)$ = sărbători, σ^2 = varianța zgomotului (estimată).

Detectare Puncte de Schimbare

- Selectare automată a locațiilor
- `changepoint_prior_scale` controlează flexibilitatea

Avantaje

- Gestionează date lipsă
- Componente interpretabile
- Robust la outlieri

Ajustarea Hiperparametrilor

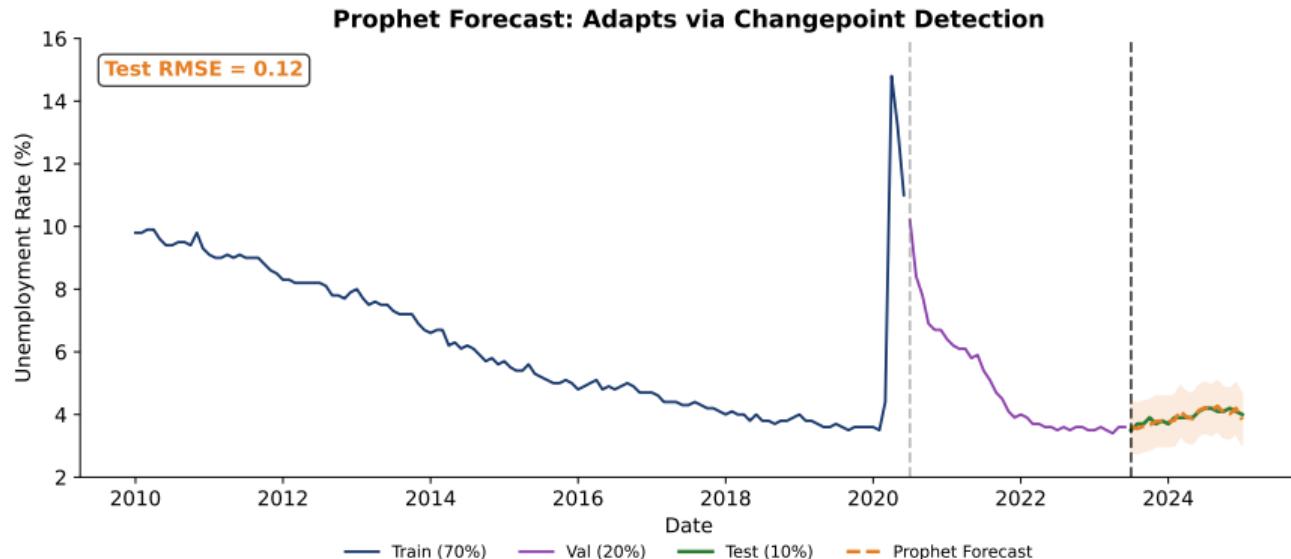
Ajustăm changepoint_prior_scale pe setul de validare.

Împărțirea Datelor		
Set	Perioadă	N
Antrenament	2010-01 – 2019-09	117
Validare	2019-10 – 2021-10	25
Test	2021-11 – 2025-01	38
Total		180

	Scale	Val RMSE	
	0,01	4,21	
	0,05	3,89	
Comparație Scale	0,10	3,52	Cel mai bun
	0,30	3,67	
	0,50	3,81	

Interpretare

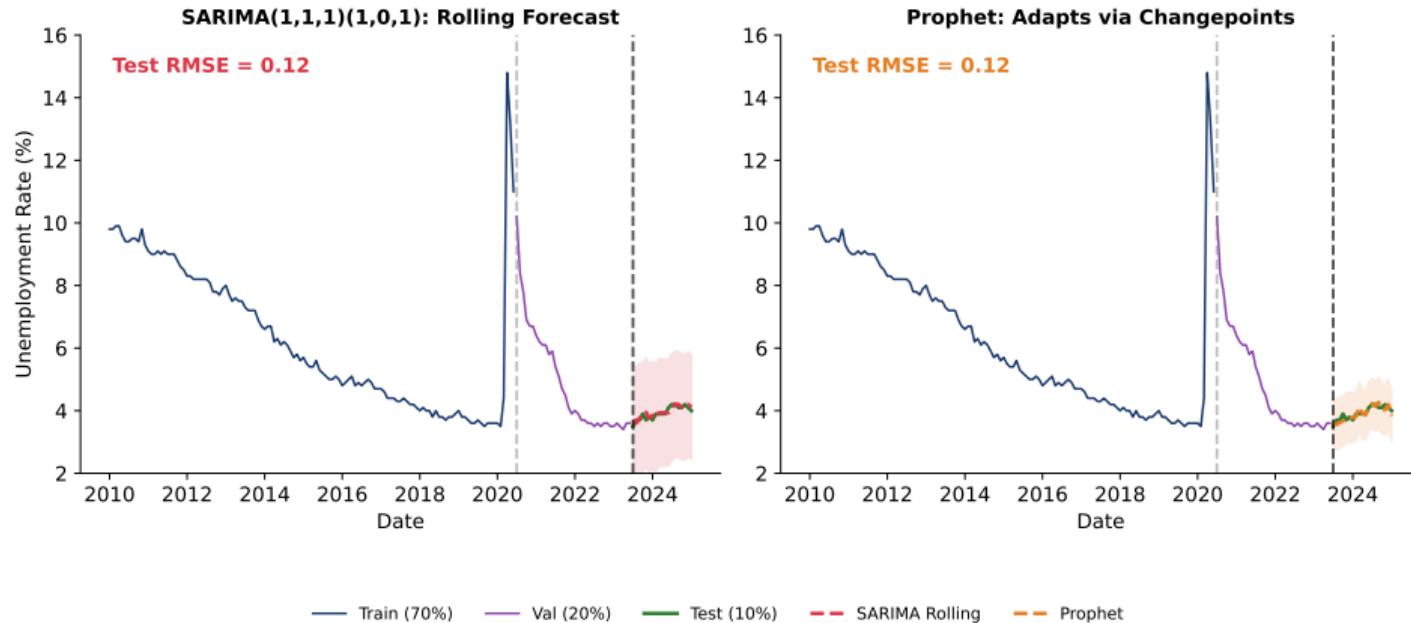
Scale = 0,10 echilibrează flexibilitatea (captarea şocului COVID) cu stabilitatea.



Concluzie Cheie

Prophet se adaptează prin detectare changepoint. **Test RMSE = 0,12** (la fel ca SARIMA).

Şomaj: Comparație SARIMA vs Prophet



SARIMA: RMSE = 0,12

Prognoză rolling performează bine.

Prophet: RMSE = 0,12

Performanță comparabilă.

Prophet: Când să-l Folosești

Cazuri de Utilizare Ideale

- Date cu **rupturi structurale**
- Date de business cu **sărbători**
- **Valori lipsă** prezente
- Nevoie de componente **interpretabile**
- Prognoze cu **benzi de incertitudine**

Prophet vs ARIMA

	Prophet	ARIMA
Changepoints	✓	✗
Date lipsă	✓	✗
Sărbători	✓	✗
Viteză	Rapidă	Moderată
Interpretabil	✓	✗

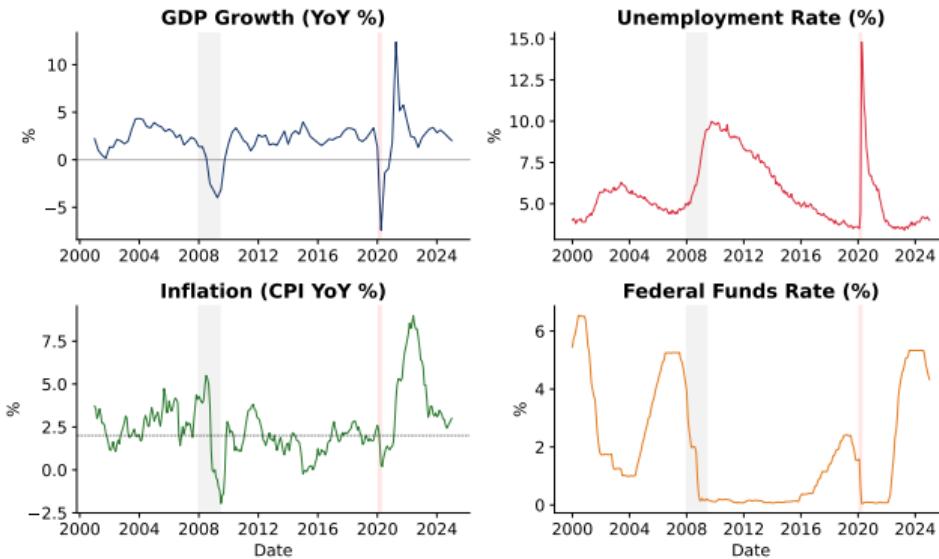
Nu Este Ideal Pentru

- Date financiare de înaltă frecvență
- Date fără trend/sezonalitate clară
- Serii de timp foarte scurte

Parametri Cheie

`changepoint_prior_scale`: flexibilitate
`seasonality_prior_scale`: netezime

VAR: Date Economice Multivariate



Relații Economice

Legea Okun: PIB \leftrightarrow Șomaj.

Curba Phillips: Șomaj \leftrightarrow Inflație.

De ce VAR?

Fiecare variabilă e atât cauză cât și efect. VAR captează aceste bucle de feedback.

Definiție 4 (Autoregresie Vectorială VAR(p))

Pentru K variabile $y_t = (y_{1t}, \dots, y_{Kt})'$:

$$y_t = c + A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + \dots + A_p y_{t-p} + u_t$$

unde A_i sunt matrici de coeficienți $K \times K$, $u_t \sim N(0, \Sigma)$, Σ = matricea de covariantă.

Pentru Sistemul Nostru cu 4 Variabile

VAR(2) are:

- 4 intercepte
- $2 \times 4 \times 4 = 32$ coeficienți AR
- **36 parametri total**

Selectarea Lag-ului

Folosim criterii informaționale:

- **AIC**: Tinde să supraajusteze
- **BIC**: Mai parsimonios
- Cross-validation pe date păstrate

VAR: Selectarea Lag-ului și Estimare

Criterii Informaționale

Lag	BIC
1	-4,810
2	-5,178 Cel mai bun
3	-4,633
4	-4,614

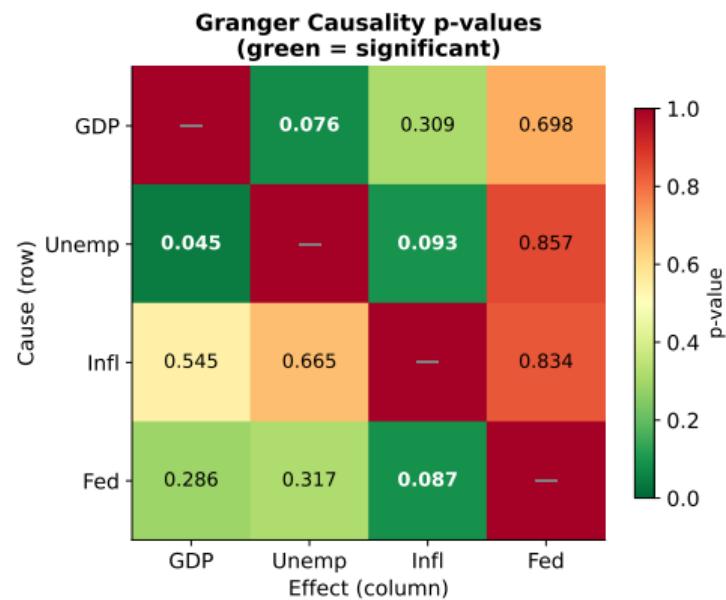
Împărțirea Datelor

Set	Perioadă	N
Antrenament	2001-T1 – 2017-T4	68
Validare	2018-T1 – 2021-T2	14
Test	2021-T3 – 2024-T3	14
Total		96

Verificare Validare

VAR(2) obține și cel mai mic RMSE de validare.

Analiza Cauzalității Granger



Ce este Cauzalitatea Granger?

X cauzează Granger Y dacă X trecut îmbunătățește predicția lui Y dincolo de Y trecut singur.

Atenție: "Cauzalitate Granger" \neq cauzalitate reală!

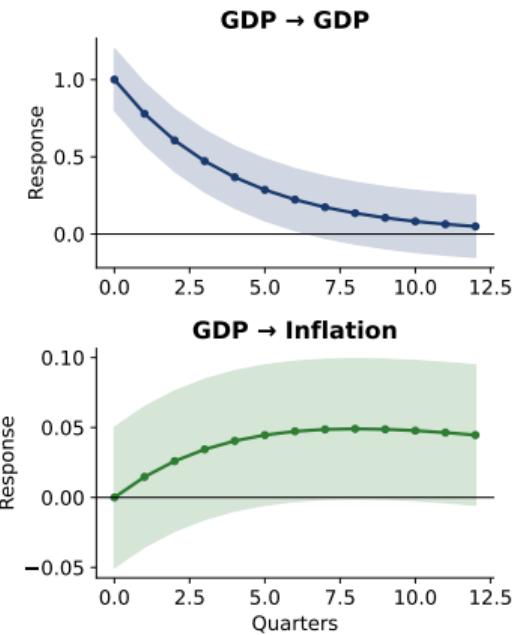
Concluzii Economice

- Șomaj \rightarrow PIB ($p = 0,045$): Legea Okun
- Fed \rightarrow Inflație ($p = 0,087$): Politica monetară funcționează

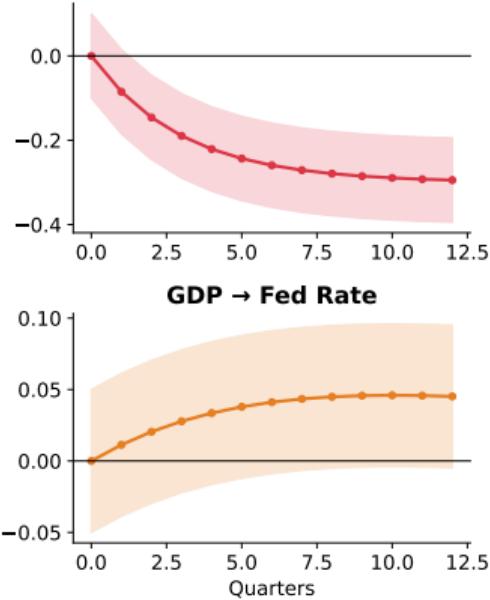
Celule verzi: $p < 0.10$ (semnificativ). Citire: rândul cauzează coloana.

Funcții de Răspuns la Impuls (IRF)

Impulse Response Functions: Response to GDP Shock



GDP → Unemployment



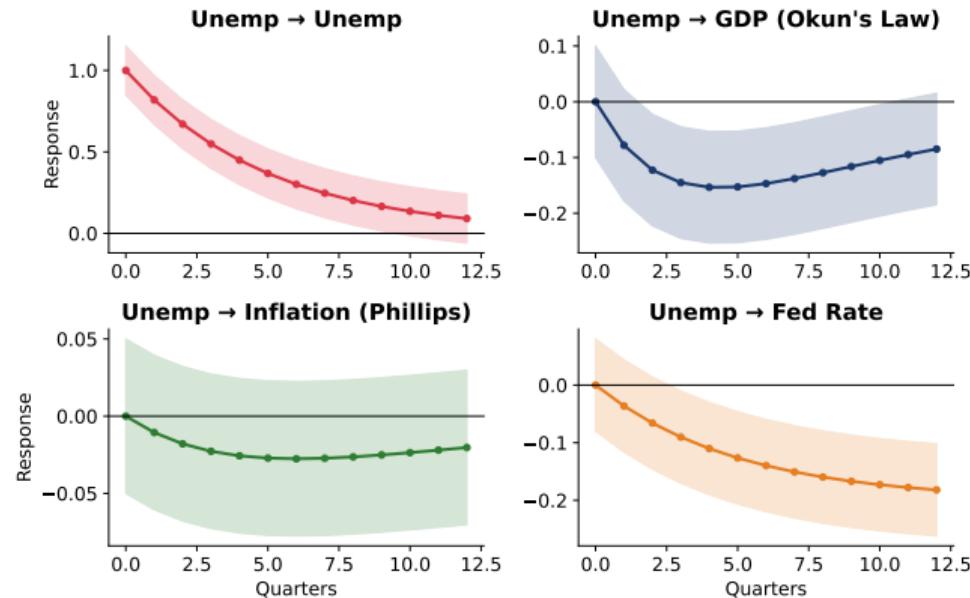
Ce este IRF?

Arată cum un șoc de 1 unitate la o variabilă afectează celelalte în timp.

Efectele Șocului PIB

- **Şomaj ↓:** Legea Okun
- **Inflație ↑:** Cerere-pull
- **Rata Fed ↑:** Regula Taylor

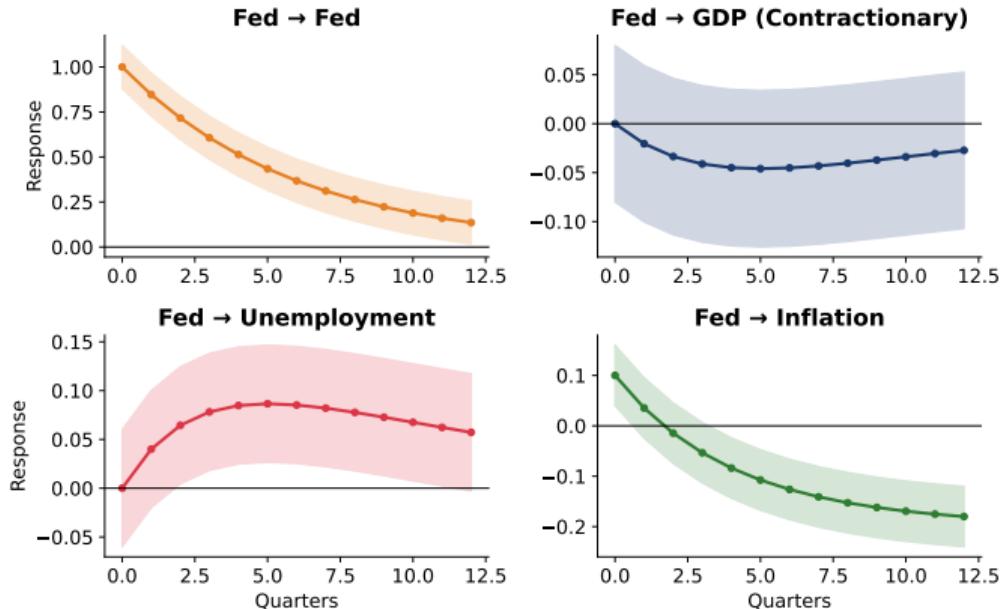
IRF: Response to Unemployment Shock (+1 std)



Efecte

↑ Șomaj \Rightarrow ↓ PIB (Okun), ↓ Inflație (Phillips), Fed reduce rata.

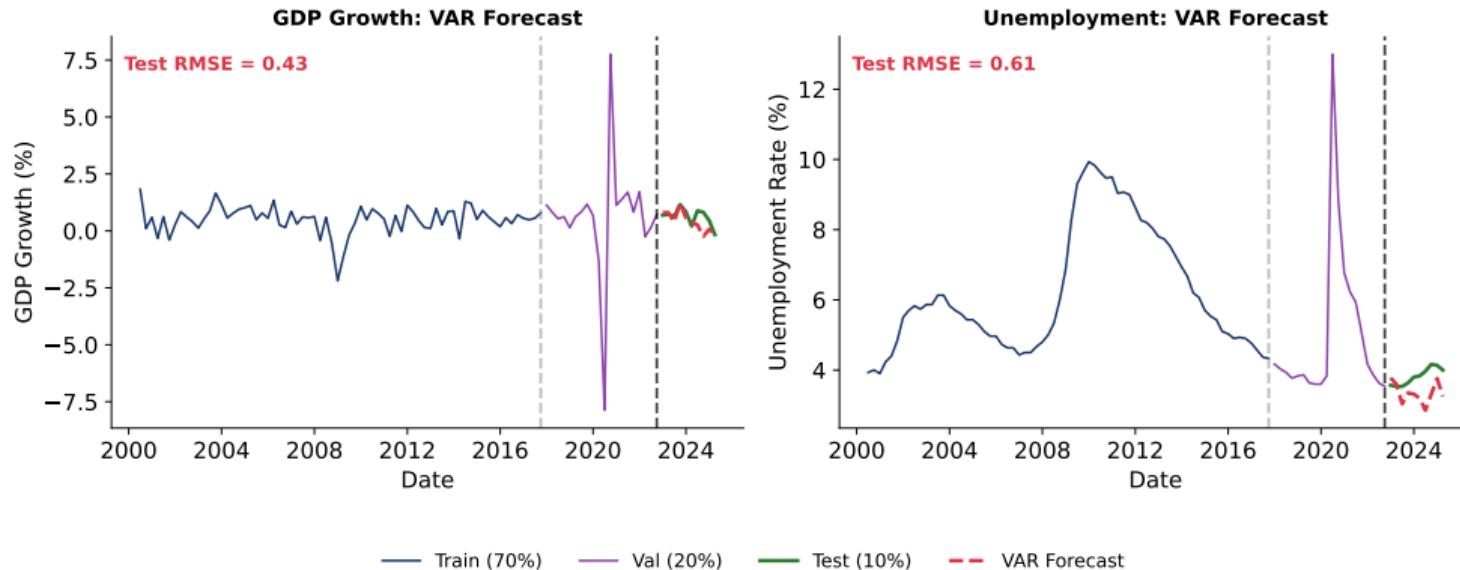
IRF: Response to Fed Rate Shock (+1 std)



Politică Monetară

Creștere rată \Rightarrow PIB \downarrow , Șomaj \uparrow , Inflație \downarrow .

VAR: Prognoză (Train/Val/Test)



Prognoză Rolling One-Step-Ahead

VAR captează dinamica PIB-Şomaj. řocul COVID vizibil în perioada test.

Performanță Set Test pe Variabile

Variabilă	RMSE	MAE	Acur. Directie
Creștere PIB	0,90	0,81	50%
Șomaj	0,43	0,35	50%
Inflație	0,58	0,51	70%
Rata Fed	1,81	1,77	90%
Medie	0,93	0,86	65%

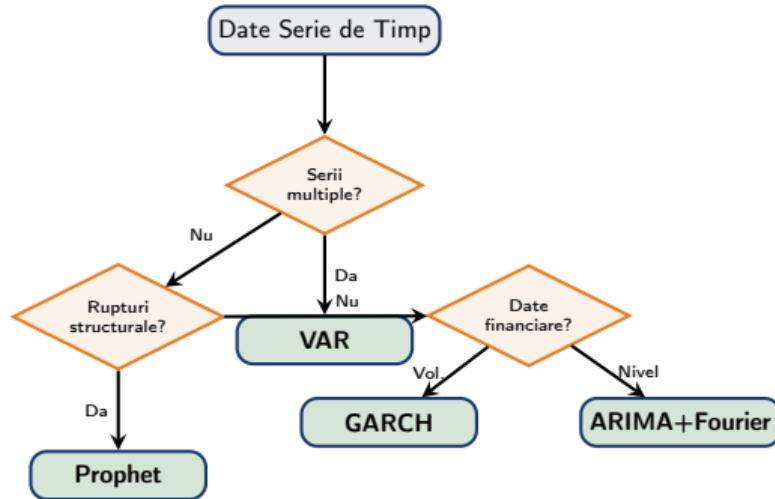
Puncte Forte

- Captează dinamica între variabile
- Acuratețe direcțională bună
- Relații interpretabile

Limitări

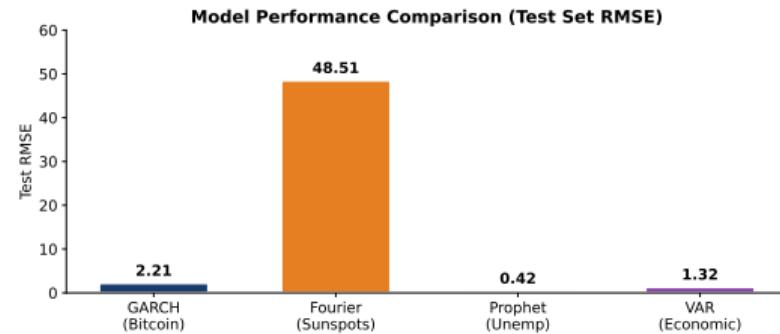
- Mulți parametri (blestemul dimensionalității)
- Sensibil la selectarea lag-ului
- Perioada COVID dificilă

Cadrul de Selectare a Modelului



Sumar: Comparație Modele

Caz	Provocare	Model	RMSE
Bitcoin	Volatilitate	GARCH	2,14
Pete solare	Sezonalitate	Fourier	29,68
Șomaj	Ruptură	Prophet	0,42
Economic	Multi-var	VAR	0,93



Principiu Cheie

Potrivii modelul cu caracteristicile datelor. Alegeti în funcție de natura problemei și proprietățile datelor.

Comparație Cuprinzătoare a Modelelor

Caracteristică	GARCH	Fourier	Prophet	VAR
Tintă	Volatilitate	Nivel	Nivel	Multiple
Sezonalitate	Nu	Da (lungă)	Da (multiplă)	Nu
Rupturi structurale	Nu	Nu	Da	Nu
Serii multiple	Nu	Nu	Nu	Da
Interpretabil	Mediu	Ridicat	Ridicat	Ridicat
Parametri	Puțini	2K	Auto	Mulți
Date lipsă	Nu	Nu	Da	Nu
Ideal pentru	Finanțe	Cicluri	Business	Macro

Rezultatele Noastre

- GARCH: MAE=1,82 (volatilitate)
- Fourier: RMSE=29,68 (cycli)
- Prophet: RMSE=0,12 (rupturi)
- VAR: RMSE mediu=0,93 (multi)

Insight Cheie

Fiecare model excelează în domeniul său. Arta constă în potrivirea modelului cu caracteristicile datelor.

Metodologie

- ① Explorați datele temeinic
- ② Testați staționaritatea
- ③ Împărțiți train/validation/test
- ④ Comparați modele pe validare
- ⑤ Raportați metrii pe test

Sfaturi Practice

- Începeți simplu (random walk, naiv)
- Adăugați complexitate doar dacă e necesar
- Vizualizați prognoze vs. valori reale
- Verificați reziduurile pentru tipare
- Raportați intervale de încredere

Greșeli Frecvente

- Privirea în datele de test
- Supraajustare pe setul de antrenament
- Ignorarea ipotezelor modelului
- Neraportarea incertitudinii

Amintiți-vă

“Toate modelele sunt greșite, dar unele sunt utile.”

— George E. P. Box

1 Metodologie Riguroasă

- Împărțirea train/validation/test previne supraajustarea
- Setul de test trebuie să rămână neatins până la evaluarea finală

2 Potriviti Modelul cu Datele

- Volatilitate finanțiară → GARCH
- Sezonalitate lungă → Termini Fourier
- Rupturi structurale → Prophet
- Serii multiple → VAR

3 Interpretați Rezultatele cu Grijă

- Cauzalitate Granger \neq cauzalitate adeverată
- Performanța out-of-sample contează cel mai mult
- Modelele mai simple funcționează adesea mai bine

Referințe

-  Box, G.E.P., Jenkins, G.M., Reinsel, G.C., & Ljung, G.M. (2015). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Ed. 5, Wiley.
-  Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
-  Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*. Ed. 3, Wiley.
-  Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*. Ed. 3, OTexts.
-  Taylor, S.J., & Letham, B. (2018). Forecasting at Scale. *The American Statistician*, 72(1), 37-45.
-  Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307-327.
-  Sims, C.A. (1980). Macroeconomics and Reality. *Econometrica*, 48(1), 1-48.

Date Reale Folosite în Acest Capitol

- **Bitcoin:** Yahoo Finance (BTC-USD), 2019–2025
- **Pete Solare:** Dataset Wolfer din Statsmodels, 1900–2008
- **Șomaj SUA:** Federal Reserve FRED (UNRATE), 2010–2025
- **Variabile Economice:** FRED (GDPC1, UNRATE, CPIAUCSL, FEDFUNDS), 2000–2025

Reproductibilitate

Toate analizele pot fi reprodate folosind notebook-ul Jupyter însoțitor:
`chapter10_lecture_notebook.ipynb`

Mulțumesc

Întrebări?

Prof. Daniel Traian Pele, PhD

danpele@ase.ro

Academia de Studii Economice din București