



# Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 0: Fundamente



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

## Obiective de învățare

La sfârșitul acestui capitol, veți putea să:

1. Definiți seriile de timp și să le distingeți de datele transversale și de panel
2. Descompuneți seriile de timp în componente de trend-ciclu, sezonalitate și reziduuri
3. Aplicați metodele de netezire exponențială (SES, Holt, Holt-Winters, ETS)
4. Evaluați prognozele folosind MAE, RMSE, MAPE, sMAPE
5. Implementați separarea train/validare/test și validarea încrucișată
6. Modelați sezonalitatea folosind variabile dummy sau termeni Fourier
7. Eliminați trendul și sezonalitatea prin metode adecvate
8. Distingeți între trendurile deterministe și stochastice

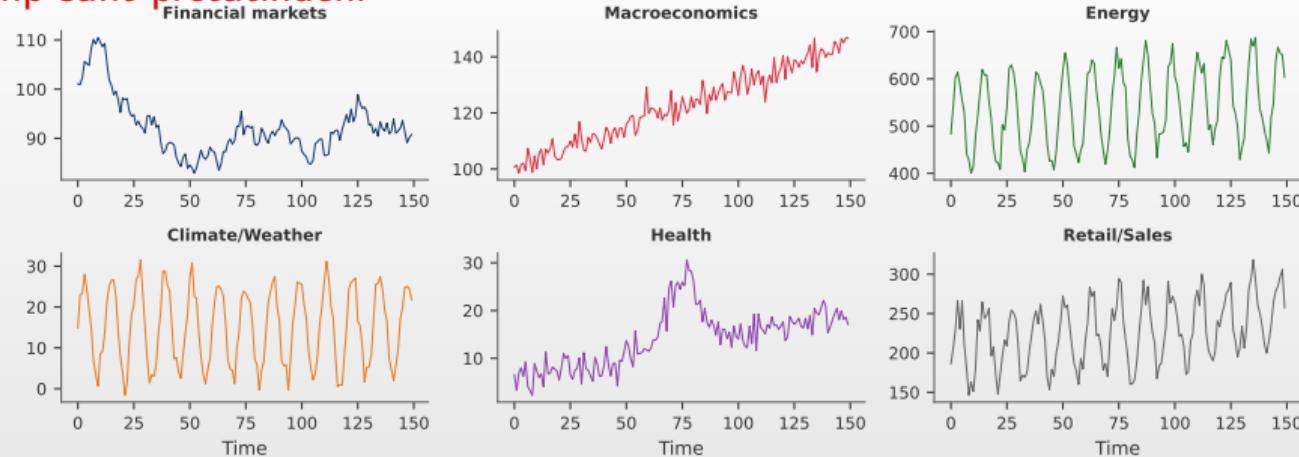


## Cuprins

- Motivație
- Ce Este o Serie de timp?
- Descompunerea seriilor de timp
- Metode de Netezire Exponențială
- Evaluarea prognozei
- Modelarea sezonalității
- Gestionarea Trendului și Sezonalității
- Utilizare IA
- Rezumat



## Seriile de timp sunt prețutindeni

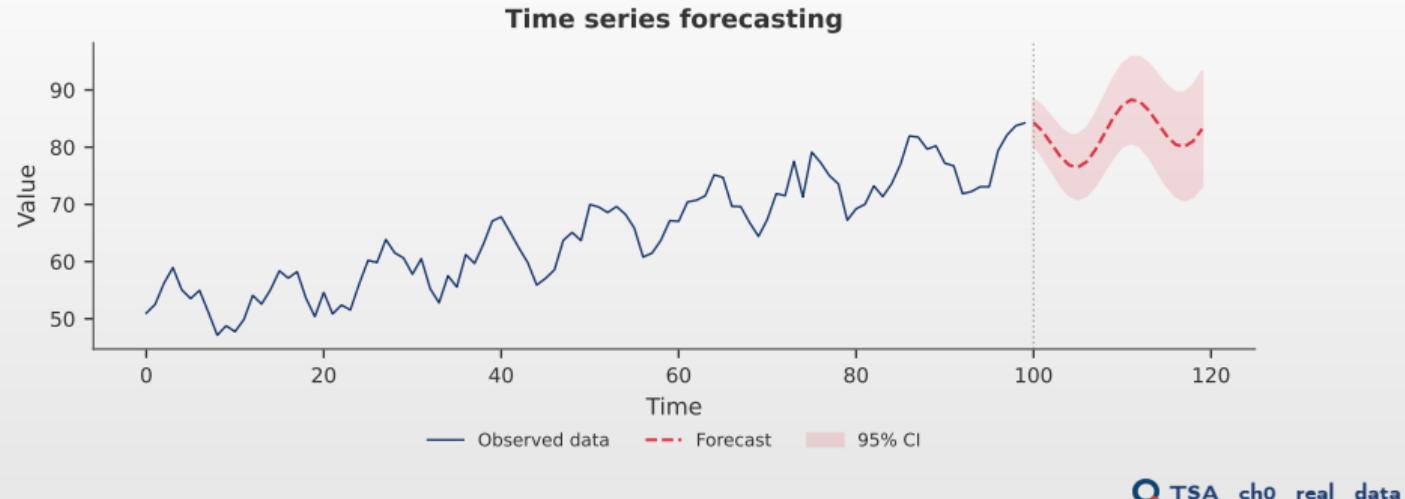


○ TSA cho real data

- Finanțe:** Prețuri acțiuni, cursuri valutare, volume
- Economie:** PIB, șomaj, rate ale inflației
- Business:** Vânzări, trafic website, cerere
- Știință:** Temperatură, poluare, semne vitale



## De ce studiem seriile de timp?



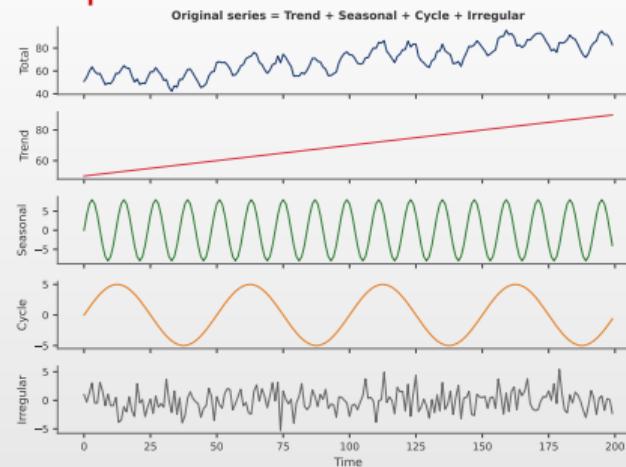
○ TSA ch0 real data

### Obiectiv principal: prognoza

- Folosim tiparele istorice pentru a prezice valori viitoare ➔ esențial pentru planificarea afacerilor, managementul riscului și deciziile de politică



## Înțelegerea structurii seriilor de timp



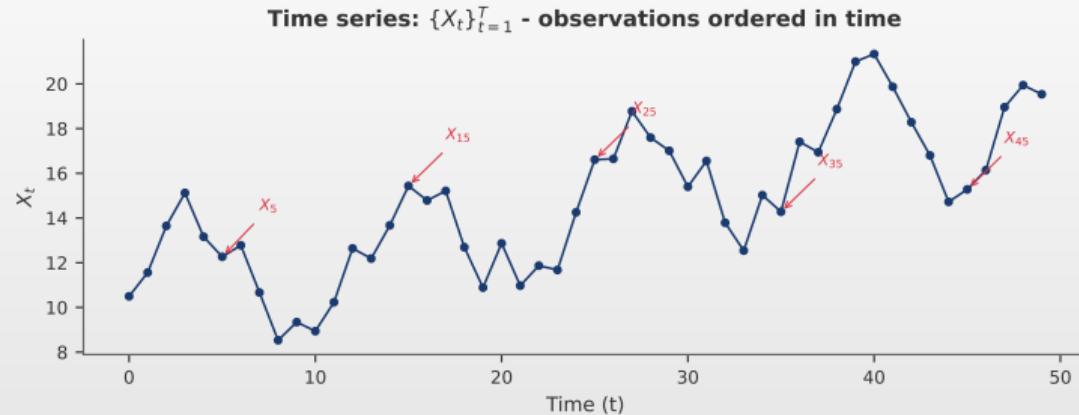
Q TSA ch0 real data

### Descompunere

- Orice serie de timp poate fi descompusă în: **trend-ciclu + sezonalitate + zgomot**



## Serie de timp: ilustrație conceptuală



Q TSA\_ch0\_definition

### Elemente fundamentale

- ☐ Notație formală:  $X_t$  = valoarea la momentul  $t$ ,  $t \in \{1, 2, \dots, T\}$
- ☐ Autocorelație:  $\rho_k = \text{Corr}(X_t, X_{t-k})$  — măsoară dependența temporală



## Definiția unei serii de timp

### Definiție 1 (Serie de timp)

- **Serie de timp:** secvență de observații  $\{X_t\}$  indexate după timp:  $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$  unde  $\mathcal{T}$  este o mulțime de indici reprezentând momente de timp

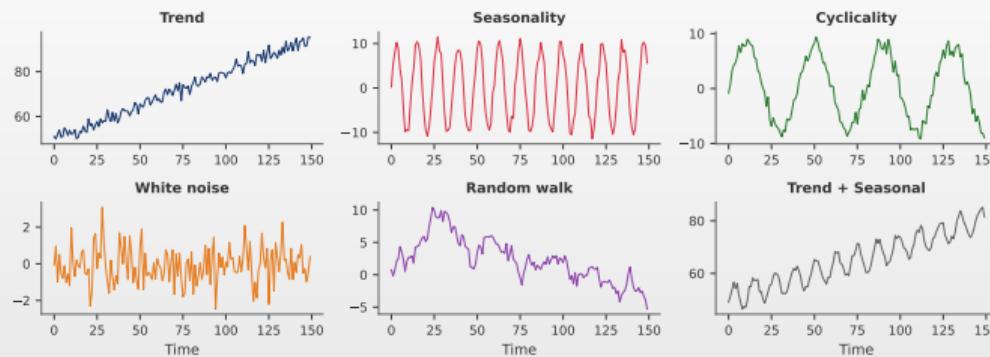
### Caracteristici cheie

- **Ordonate:** ordine temporală naturală
- **Dependente:** observațiile consecutive sunt corelate
- **Discrete/Continue:**  $t = 1, 2, 3, \dots$

### Notație

- $X_t$ : observația la momentul  $t$
- $\{X_t\}_{t=1}^T$ : serie cu  $T$  observații

## Tipare comune în seriile de timp



Q TSA\_ch0\_definition

### Tipuri de tipare

- Trend:** creștere sau scădere pe termen lung
- Sezonier:** tipare periodice regulate
- Ciclic:** fluctuații pe termen mediu (2–10 ani)
- Aleatoriu:** fluctuații imprevizibile



## Exemplu practic: date financiare reale



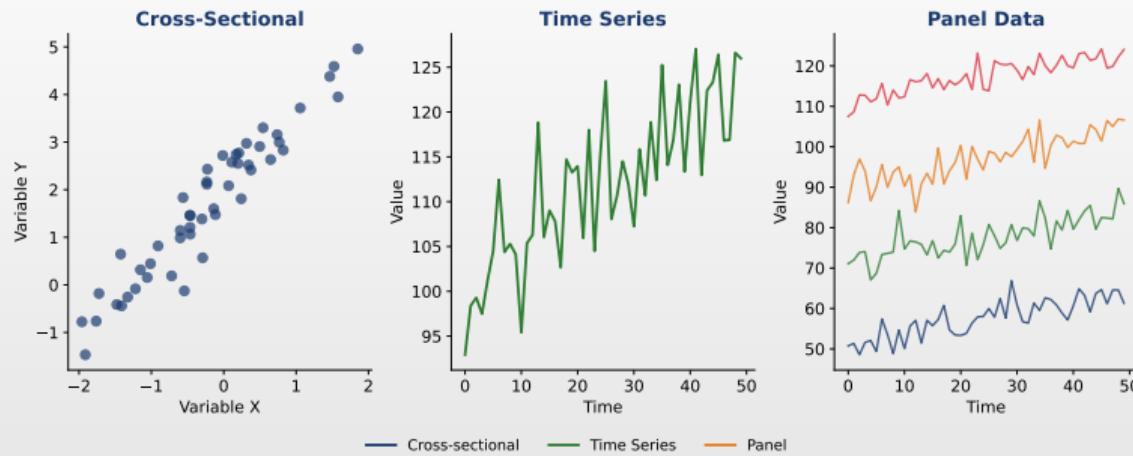
Q TSA\_cho\_definition

### S&P 500 (2024)

- Frecvență zilnică:**  $\approx 252$  zile de tranzacționare/an
- Caracteristici observate:** trend ascendent, volatilitate în clustere, persistență (momentum)



## Tipuri de date: comparație



Tip de Date	Unități ( $N$ )	Timp ( $T$ )	Exemplu
Transversale	Multe	1	Sondaj pe 1000 gospodării
Serie de timp	1	Multe	Preturi zilnice S&P 500
Panel	Multe	Multe	PIB-ul a 50 țări, 20 ani



## Exemple de date de tip serie de timp



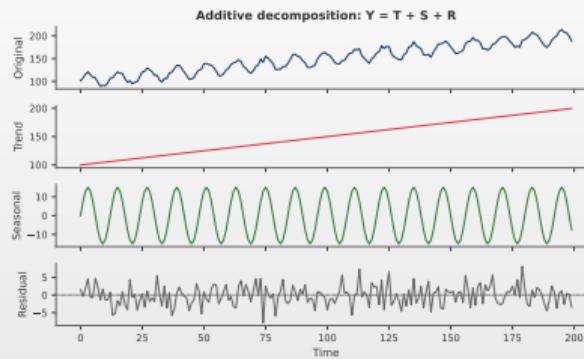
Q TSA\_ch0\_real\_data

### Date financiare reale

- Sursă:** Yahoo Finance (2019–2025), normalizează la baza 100
- Bitcoin:** cel mai volatil
- Aur:** cel mai stabil



## Descompunerea seriilor de timp: exemplu vizual



**TSA\_ch0\_decomposition**

### Componente explicate

- Original:** seria observată
- Trend-Ciclu:** mișcare pe termen lung
- Sezonier:** tipar periodic
- Reziduu:** zgomot aleatoriu



## De ce descompunem o serie de timp?

### Obiective

- Înțelegerea tiparelor subiacente
- Eliminarea sezonalității pentru modelare
- Identificarea direcției trendului
- Izolare fluctuațiilor neregulate
- Îmbunătățirea acurateții prognozei

### Componente

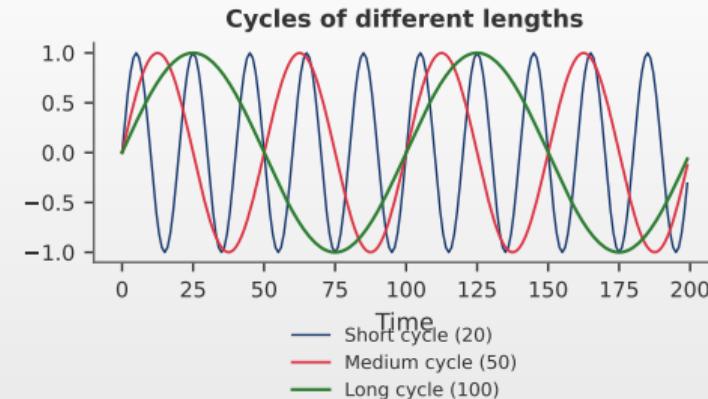
- $T_t$ : Trend-Ciclu
  - ▶ Mișcare pe termen lung
- $S_t$ : Sezonier
  - ▶ Tipar periodic regulat
- $\varepsilon_t$ : Reziduu
  - ▶ Zgomot aleatoriu

### Modele clasice de descompunere

- Aditiv:**  $X_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$ 
  - ▶ Amplitudine sezonieră constantă
- Multiplicativ:**  $X_t = T_t \times S_t \times \varepsilon_t$ 
  - ▶ Amplitudine sezonieră crește cu nivelul



## Componenta ciclică



### Caracteristici

- **Durată:** fluctuații pe termen mediu (2–10 ani)
- **Aperiodic:** fără perioadă fixă (vs sezonalitate)
- **Origine:** reflectă ciclurile economice

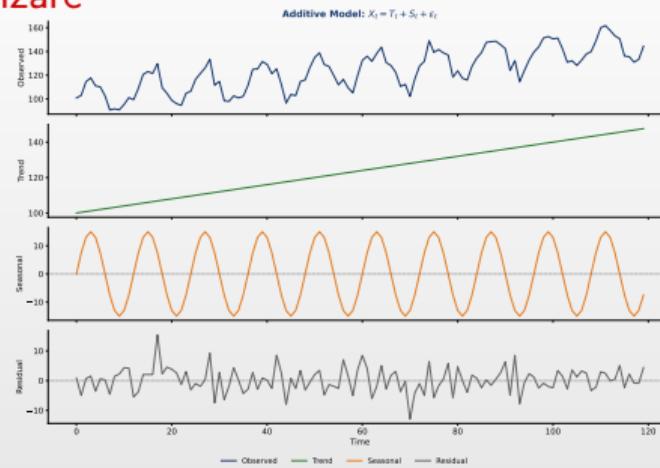
Q TSA\_ch0\_decomposition

### În practică

- **Combinare:** ciclul combinat cu trendul
- **Dificultate:** greu de identificat în serii scurte
- **Soluție:** de obicei absorbit în trend-ciclu



## Descompunere aditivă: vizualizare



Q TSA\_ch0\_decomposition

## Interpretare

- **Descompunere:** Original = Trend + Sezonier + Reziduu
- **Proprietate:** amplitudine sezonieră constantă, nu depinde de nivel



## Modelul de descompunere aditivă

### Model

- Ecuatie:**  $X_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$ 
  - ▶ Componentele se adună pentru a forma seria observată

### Când să folosim

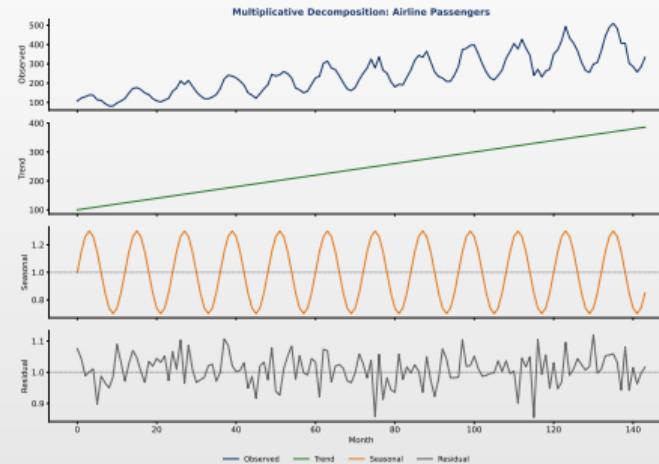
- Fluctuații sezoniere constante**
  - ▶ Amplitudinea nu depinde de nivel
- Varianța seriei stabilă**
  - ▶ Măsoară dispersia în jurul mediei
  - ▶ Estimator:  $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

### Proprietăți

- Eroare:**  $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$  (medie zero)
- Sezonier:**  $\sum_{j=1}^s S_j = 0$  (suma sezonala e zero)
- Unități:**  $S_t$  sunt aceleasi ca  $X_t$



## Descompunere multiplicativă: date reale



### Exemplu

- Date Box-Jenkins: pasageri lunari (1949–1960). Amplitudinea sezonieră crește cu nivelul

 TSA\_ch0\_decomposition



## Modelul de descompunere multiplicativă

### Model

- **Ecuatie:**  $X_t = T_t \times S_t \times \varepsilon_t$   $\succ$  componente se înmulțesc

### Când să folosim

- **Fluctuații crescătoare:** sezonalitatea crește cu nivelul
- **Heteroscedasticitate:** varianța crește în timp
- **Exemple:** date economice/financiare

### Proprietăți

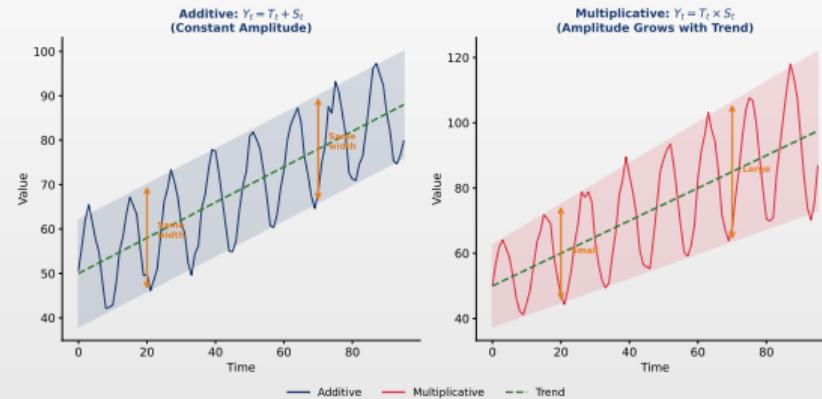
- **Eroare:**  $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 1$  (centrat la 1)
- **Sezonier:**  $\frac{1}{s} \sum_{j=1}^s S_j = 1$  (media e 1)
- **Unități:**  $S_t$  este raport adimensional

### Sfat

- **Transformare logaritmică:** multiplicativ  $\succ$  aditiv:  $\log X_t = \log T_t + \log S_t + \log \varepsilon_t$



## Aditivă vs multiplicativă: comparație



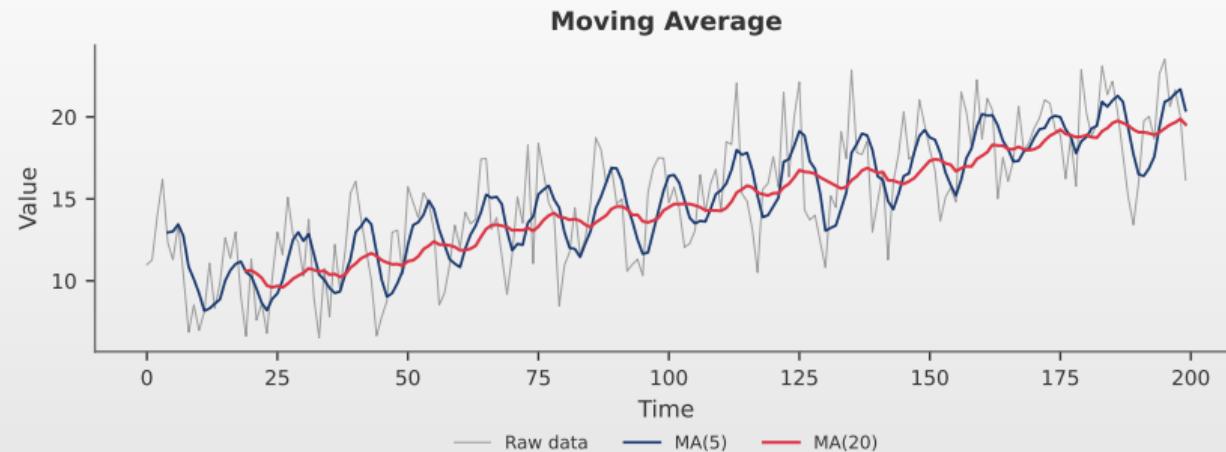
TSA\_ch0\_decomposition

### Diferența cheie

- Multiplicativ:** componenta sezonieră este un *raport*, centrată la valoarea 1
- Aditiv:** componenta sezonieră în *unități absolute*, centrată la valoarea 0



## Media mobilă centrată: ilustrație vizuală



### Interpretare

- Netezire:** elimină fluctuațiile pe termen scurt
- Rezultat:** dezvăluie trendul subiacent



## Estimarea trendului: media mobilă

### Definiție 2 (media mobilă centrată)

- **Media mobilă centrată** de ordin  $2q + 1$ :

$$\hat{T}_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^q X_{t+j} \quad (1)$$

#### Pentru date sezoniere

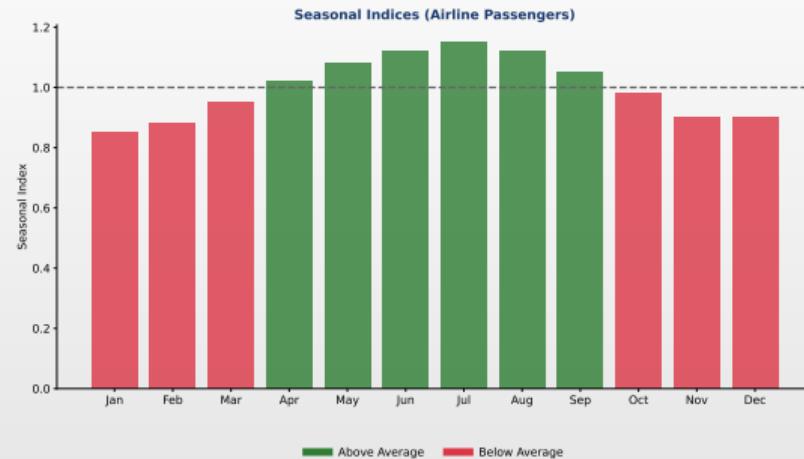
- **Perioada s impară**
  - ▶ Se folosește medie simplă
- **Perioada s pară**
  - ▶  $2 \times s$  MA cu ponderi jumătate

#### Proprietăți

- **Netezire:** elimină sezonierul & aleatoriu
- **Fereastră mare**  $\succ$  estimare mai netedă
- **Dezavantaj:** pierdere de date la extremități



## Indici sezonieri: interpretare



### Interpretare

- $S_t > 1$ : activitate peste medie;  $S_t < 1$ : sub medie. Vârf de călătorii în iulie–august

Q TSA\_cho\_seasonal



## Algoritmul descompunerii clasice

### Pași pentru descompunerea multiplicativă

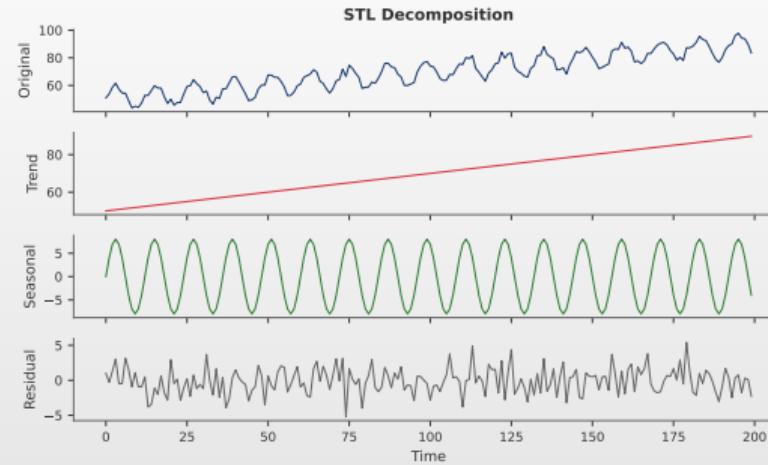
- **Pasul 1** > **Estimare Trend:**  $\hat{T}_t = MA_s(X_t)$ 
  - ▶ Medie mobilă centrată de ordinul perioadei sezoniere
- **Pasul 2** > **Eliminarea trendului:**  $D_t = X_t / \hat{T}_t$
- **Pasul 3** > **Estimare Sezonier:**  $\hat{S}_j = \text{media}(D_t \text{ pentru sezonul } j)$
- **Pasul 4** > **Normalizare:** scalare astfel încât  $\frac{1}{s} \sum_{j=1}^s \hat{S}_j = 1$
- **Pasul 5** > **Calcul Reziduuri:**  $\hat{\varepsilon}_t = X_t / (\hat{T}_t \times \hat{S}_t)$

### Notă

- **Pentru descompunere aditivă:** operațiile se modifică
  - ▶ Împărțire > scădere
  - ▶ Înmulțire > adunare



## Descompunerea STL: ilustrație vizuală



### Idee cheie

- ☐ STL (Seasonal-Trend-Loess): separă trend + sezonier + rest folosind regresie LOESS

Q TSA\_ch0\_decomposition



## Descompunerea STL: o abordare modernă

### Definiție 3 (STL - Descompunere Sezonier-Trend folosind LOESS)

- **STL:** folosește regresie locală ponderată (LOESS):  $X_t = T_t + S_t + R_t$

#### Avantaje

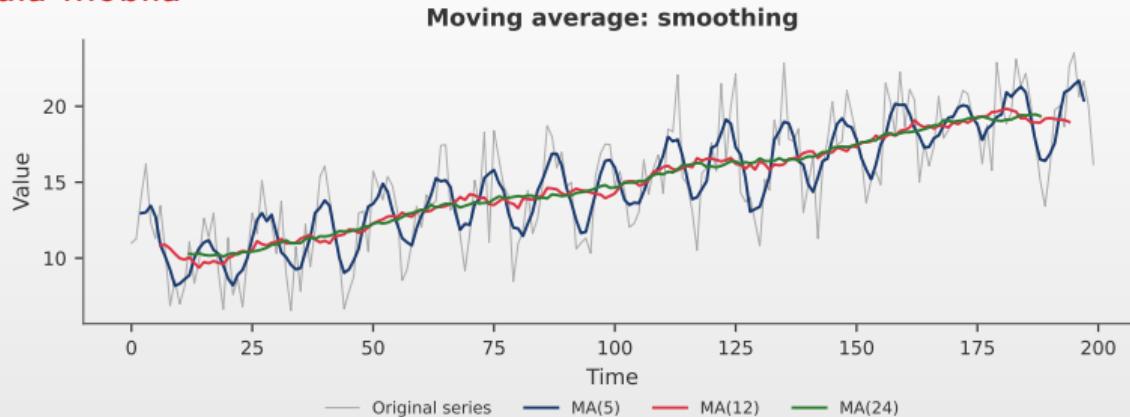
- **Flexibilitate:** orice perioadă sezonieră
- **Variabilitate:** sezonalitatea poate evoluă în timp
- **Robustete:** rezistentă la valori extreme
- **Netezire:** estimări netede ale trendului

#### Parametri cheie

- **period:** perioada sezonieră
  - ▶ Ex: 12 pentru date lunare, 4 pentru trimestriale
- **seasonal:** fereastra de netezire
- **robust:** ponderare redusă pentru outlieri



## Netezirea cu media mobilă



### Compromisul dimensiunii ferestrei

- Fereastră mică:** reactivă dar zgomotoasă
  - ▶ Captează schimbări rapide, dar amplifică zgomotul
- Fereastră mare:** netedă dar cu întârziere
  - ▶ Elimină zgomotul, dar reacționează lent



## Netezirea exponențială: prezentare generală

### Definiție

- **Netezirea exponențială:** medii ponderate ale observațiilor trecute
  - ▶ Ponderile scad exponențial în timp
  - ▶ Observațiile recente primesc ponderi mai mari

### De ce netezire exponențială?

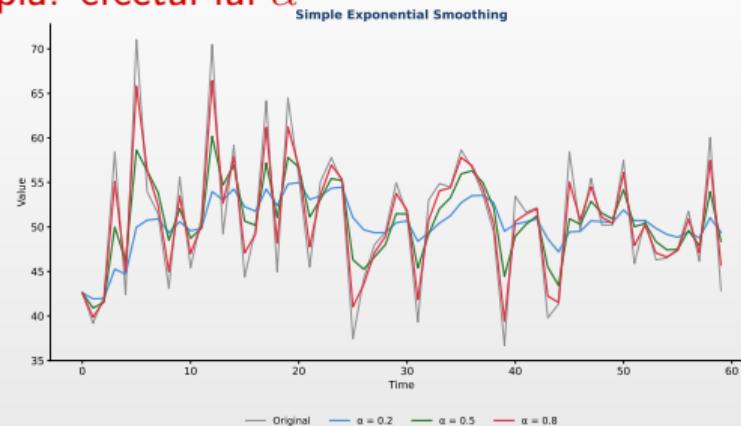
- **Simplă:** ușor de implementat și înțeles
  - ▶ Un singur parametru de netezire
- **Adaptivă:** ponderi mai mari pentru date recente
- **Versatilă:** gestionează trend și sezonalitate

### Trei metode principale

- **SES (Simple Exponential Smoothing):** doar nivel
  - ▶ Cea mai simplă metodă exponențială
- **Holt:** nivel + trend
  - ▶ Captează direcția de evoluție
- **Holt-Winters:** + sezonalitate
  - ▶ Model complet cu toate componente



## Netezirea exponențială simplă: efectul lui $\alpha$



### Compromis

- $\alpha$  mic  $\succ$  prognoze netede
  - ▶ Mai multă pondere pe istoria îndepărtată
- $\alpha$  mare  $\succ$  urmărește datele
  - ▶ Reacție rapidă la schimbări recente



## Netezirea exponențială simplă (SES)

### Model

- **Ecuatie:**  $\hat{X}_{t+1|t} = \alpha X_t + (1 - \alpha)\hat{X}_{t|t-1}$ 
  - ▶  $\alpha \in (0, 1)$  este parametrul de netezire

### Cum funcționează

- **Principiu:** ponderile scad exponențial
- $\alpha$  mare
  - ▶ Prognoză reactivă la schimbări
- $\alpha$  mic
  - ▶ Prognoză mai netedă, stabilă

### Forma cu nivel

- **Ecuatie:**  $\ell_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)\ell_{t-1}$ 
  - ▶  $\ell_t$  = nivelul estimat la momentul  $t$
  - ▶ Prognoză:  $\hat{X}_{t+h|t} = \ell_t$  (constantă)



## SES: exemplu numeric pas cu pas

Date: Vânzări lunare (mii EUR)

Date:  $X_1 = 100, X_2 = 110, X_3 = 105, X_4 = 115, X_5 = 120 \quad (\alpha = 0.3, \hat{X}_{1|0} = 100)$

Calcul iterativ:  $\hat{X}_{t+1|t} = \alpha X_t + (1 - \alpha) \hat{X}_{t|t-1}$

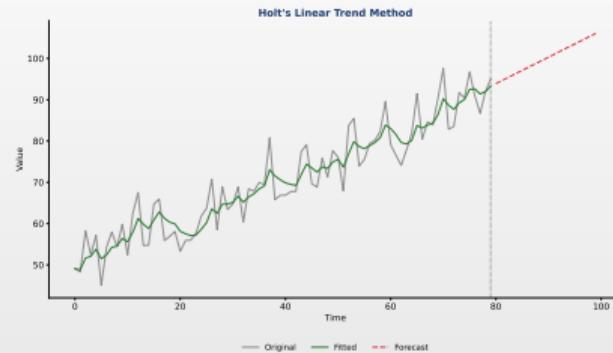
$t$	$X_t$	$\hat{X}_{t t-1}$	$e_t$	Calcul $\hat{X}_{t+1 t}$
1	100	100.00	0.00	$0.3 \times 100 + 0.7 \times 100 = 100.00$
2	110	100.00	10.00	$0.3 \times 110 + 0.7 \times 100 = 103.00$
3	105	103.00	2.00	$0.3 \times 105 + 0.7 \times 103 = 103.60$
4	115	103.60	11.40	$0.3 \times 115 + 0.7 \times 103.6 = 107.02$
5	120	107.02	12.98	$0.3 \times 120 + 0.7 \times 107.02 = 110.91$

Prognoză și evaluare

$$\hat{X}_{6|5} = 110.91 \quad \text{MAE} = 7.28 \quad \text{RMSE} = 8.97$$



## Metoda Holt: vizualizare



Q TSA\_ch0\_smoothing

### Interpretare

- Metoda Holt:** captează nivelul și trendul, le proiectează în orizontul de prognoză
- $\alpha$ : controlează schimbări de nivel
- $\beta^*$ : controlează schimbări de trend



## Metoda Holt cu trend liniar

### Ecuări

- Nivel:**  $\ell_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1})$
- Trend:**  $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1}$
- Prognoză:**  $\hat{X}_{t+h|t} = \ell_t + h \cdot b_t$ 
  - Extrapolează trendul liniar pe  $h$  pași

### Parametri

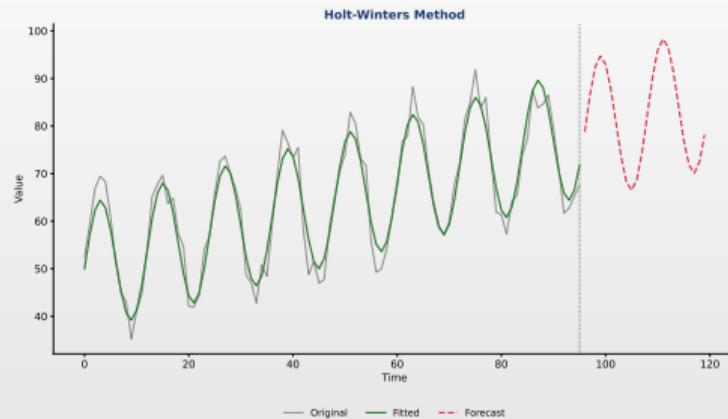
- $\alpha$ : netezire nivel
  - Controlează reactivitatea la schimbări de nivel
- $\beta^*$ : netezire trend
  - Controlează reactivitatea la schimbări de pantă

### Componente

- $\ell_t$ : nivel estimat
  - Media locală a seriei
- $b_t$ : trend estimat (pantă)
  - Rata de creștere/descrescere



## Holt-Winters: captarea sezonalității



 **TSA\_ch0\_smoothing**

### Caracteristică cheie

- Descompunere completă:** separă nivel, trend și sezonier
- Prognoze sezoniere:** include atât trend cât și tipar periodic



## Metoda sezonieră Holt-Winters

### Ecuări (sezonalitate aditivă)

- Nivel:**  $\ell_t = \alpha(X_t - S_{t-s}) + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1})$
- Trend:**  $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1}$
- Sezonier:**  $S_t = \gamma(X_t - \ell_t) + (1 - \gamma)S_{t-s}$
- Prognoză:**  $\hat{X}_{t+h|t} = \ell_t + h \cdot b_t + S_{t+h-s(k+1)}$ 
  - Unde  $k = \lfloor (h-1)/s \rfloor$

### Parametri

- $\alpha$  — nivel
- $\beta^*$  — trend
- $\gamma$  — sezonier
- $s$  — perioadă sezonieră
  - Toți în  $(0, 1)$ ; estimați prin minimizarea erorii



## Cadrul ETS: eroare-trend-sezonalitate

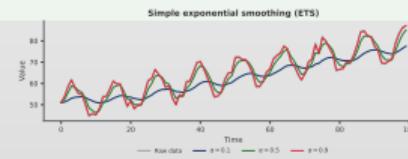
### Definiție 4 (Modele ETS)

- **Cadrul ETS:** generalizează netezirea exponențială:  $ETS(E, T, S)$

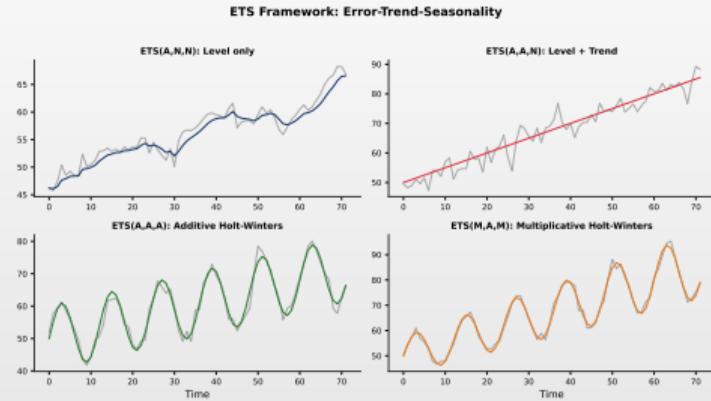
Componentă	N	A	M
Eroare (E)	–	aditivă	multiplicativă
Trend (T)	Niciunul	Aditiv	Multiplicativ
Sezonier (S)	Niciunul	Aditiv	Multiplicativ

### Exemple

- **ETS(A,N,N):** Netezire exponențială simplă  $\succ$  doar nivel, fără trend sau sezonalitate
- **ETS(A,A,N):** Metoda Liniară Holt  $\succ$  nivel + trend aditiv
- **ETS(A,A,A):** Holt-Winters aditivă  $\succ$  nivel + trend + sezonalitate aditivă



## Selectia modelului ETS



TSA\_ch0\_smoothing

### Selectie automată

- Criterii informaționale:** AIC (Akaike Information Criterion), BIC (Bayesian Information Criterion)
- Selectie optimală:** balanță între ajustare și complexitate



## Metode cu trend amortizat

### Parametrul de amortizare

- **Parametru:**  $\phi \in (0, 1)$ 
  - ▶ Previne supra-proiecția trendului
  - ▶ Trendul converge către o constantă

### Ecuării

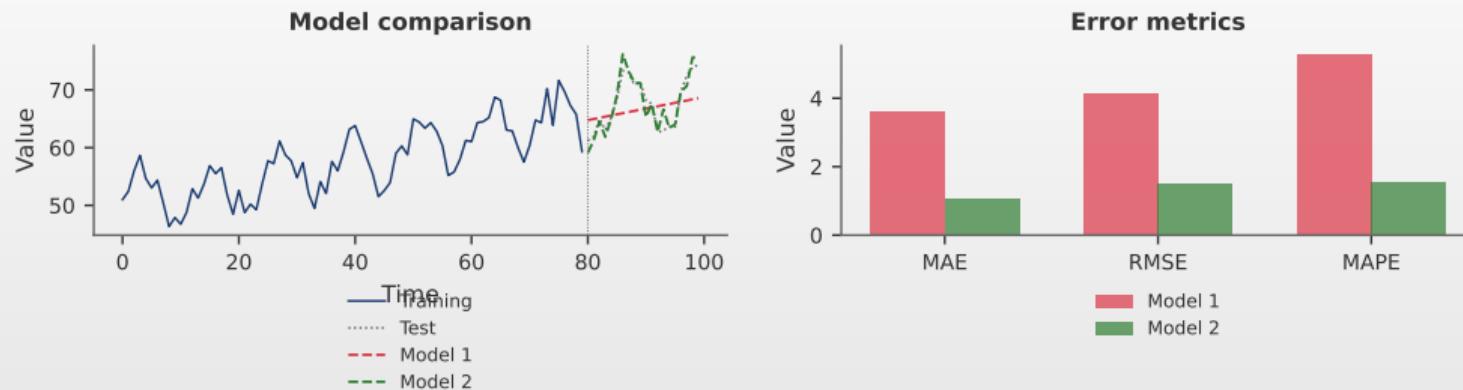
- **Nivel:**  $\ell_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})$
- **Trend:**  $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)\phi b_{t-1}$
- **Prognoză:**  $\hat{X}_{t+h|t} = \ell_t + \phi \frac{1 - \phi^h}{1 - \phi} b_t$

### Idee cheie

- **Asimptotic:** când  $h \rightarrow \infty$ , prognoza  $\rightarrow$  constantă
  - ▶ Previne extrapolare nerealistă pe termen lung
- **Avantaj:** adesea mai bună pentru orizonturi lungi



## Evaluarea prognozei: exemplu vizual



### Observații

- Sus:** actual vs. prognoză — evaluare vizuală a calității prognozei
- Jos:** reziduuri — medie zero, varianță constantă, fără tipar

TSA\_ch0\_forecast\_eval



## Metrici de acuratețe a prognozei

### Eroarea de prognoză

- Definiție:**  $e_t = X_t - \hat{X}_t$  (actual minus prezis)
  - Pozitivă  $\Rightarrow$  subestimează; Negativă  $\Rightarrow$  supraestimează

### Dependente de scală

- MAE:**  $\frac{1}{n} \sum |e_t|$
- MSE:**  $\frac{1}{n} \sum e_t^2$
- RMSE:**  $\sqrt{\text{MSE}}$

### Independente de scală

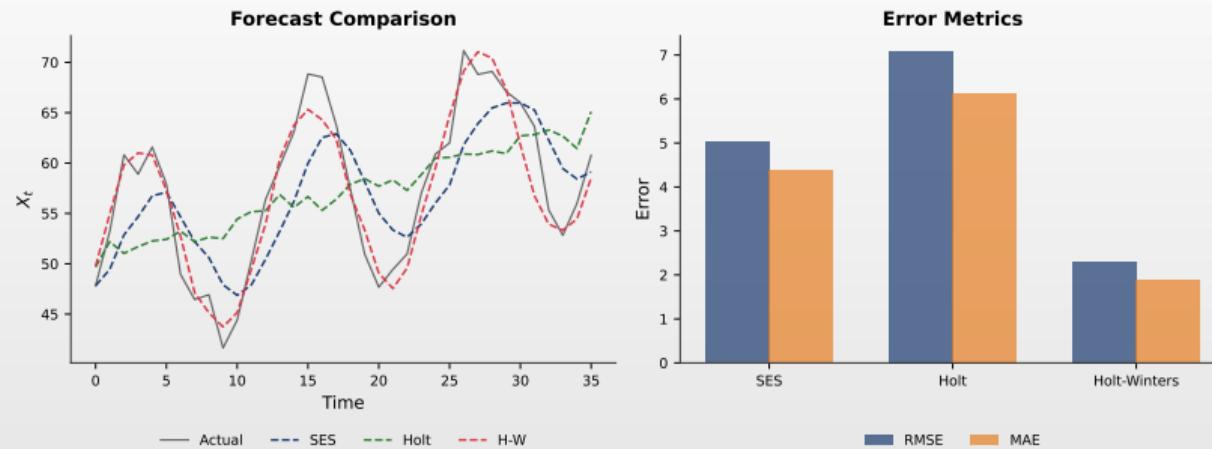
- MAPE:**  $\frac{100}{n} \sum \left| \frac{e_t}{X_t} \right|$
- sMAPE:**  $\frac{100}{n} \sum \frac{|e_t|}{(|X_t| + |\hat{X}_t|)/2}$

### Ce să folosim?

- Aceeași serie:** RMSE, MAE  $\succcurlyeq$  comparare modele pe aceleasi date
- Între serii diferite:** MAPE, sMAPE  $\succcurlyeq$  metrici procentuale, independente de scală



## Compararea metodelor de prognoză



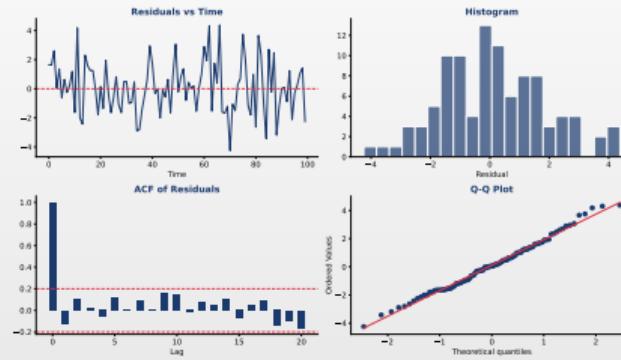
### Interpretare

- Stânga: Prognoze SES, Holt, Holt-Winters. Dreapta: Metrici de eroare. Comparație vizuală și cantitativă

Q TSA\_ch0\_forecast\_eval



## Diagnosticarea reziduurilor: vizualizare



TSA\_ch0\_forecast\_eval

### Ce să verificăm

- Grafic temporal:** fără tipare sistematice
- Histogramă:** verificare normalitate
- ACF:** fără autocorelație semnificativă
- Grafic Q-Q:** confirmare normalitate



## Diagnosticarea reziduurilor

### Proprietăți ale reziduurilor

- **Medie zero:**  $\mathbb{E}[e_t] = 0$ 
  - ▶ Prognoza nu are bias sistematic
- **Necorelate:**  $\text{Cov}(e_t, e_{t-k}) = 0$ 
  - ▶ Nu rămâne informație neexploatață
- **Varianță constantă:**  $\text{Var}(e_t) = \sigma^2$
- **Normal distribuite:** pentru intervale de încredere

### Teste de diagnostic

- **Testul Ljung-Box (autocorelație):**
  - ▶  $Q = T(T+2) \sum_{k=1}^h \frac{\hat{\rho}_k^2}{T-k} \sim \chi_h^2$
- **Testul Jarque-Bera (normalitate):**
  - ▶  $JB = \frac{T}{6} \left( S^2 + \frac{(K-3)^2}{4} \right) \sim \chi_2^2$
  - ▶  $S$  = asimetrie,  $K$  = kurtosis

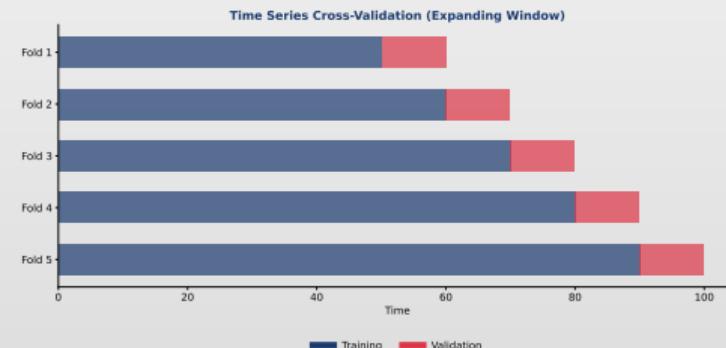
## Validarea încrucișată pentru serii de timp

### De ce nu CV standard?

- Dependență temporală**: observațiile sunt corelate
- Ordinea contează**: trebuie respectată cronologia
- K-fold standard**  $\succsim$  data leakage

### CV (cross-validation) cu origine mobilă

- Pasul 1**: antrenare pe  $\{X_1, \dots, X_t\}$
- Pasul 2**: prognoză  $\hat{X}_{t+h}$
- Pasul 3**: incrementare  $t$ , repetare



## Separarea train / validare / test

### Set de antrenare

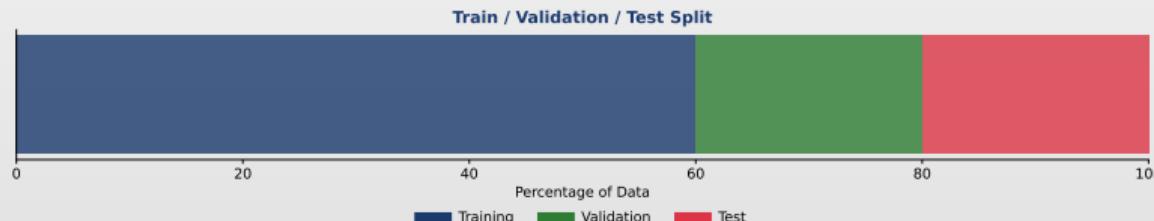
- Potrivirea parametrilor modelului
- Cea mai mare porțiune (60–80%)
- Folosit pentru estimare

### Set de validare

- Ajustarea hiperparametrilor
- Compararea modelelor
- Selectarea celei mai bune abordări

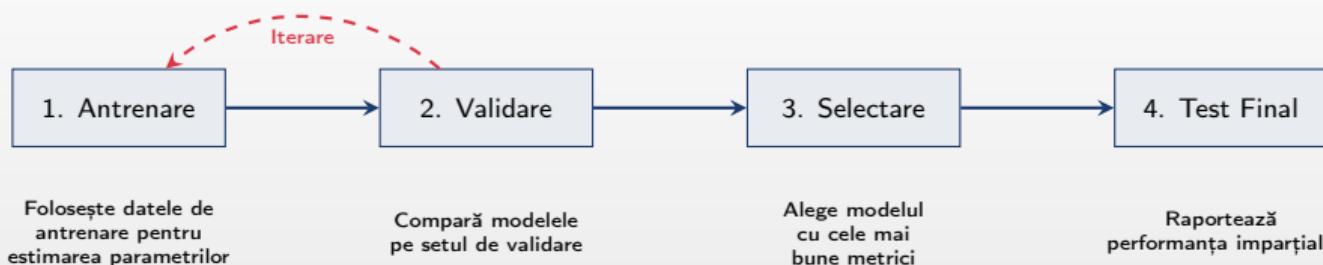
### Set de Test

- Doar evaluare finală
- Nu se folosește pentru ajustare
- Performanță imparțială



Q TSA\_ch0\_forecast\_eval

## Fluxul de lucru pentru dezvoltarea modelului

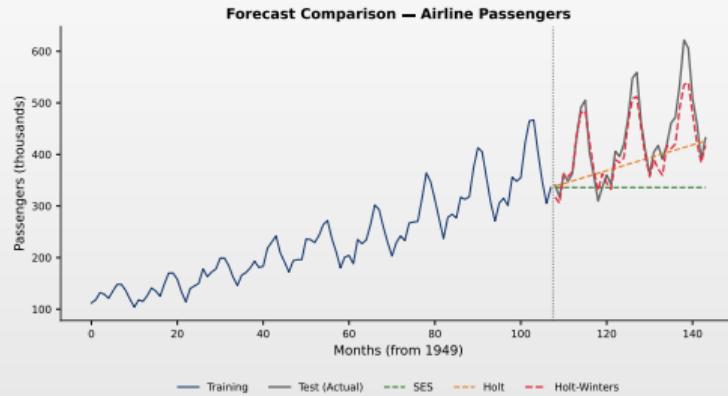


### Regulă critică

- Niciodată testul pentru selecție!**
  - ▶ Folosiți doar pentru evaluare finală
- Evitați surgereala de date**
  - ▶ Estimări prea optimiste ale performanței



## Date reale: compararea prognozelor



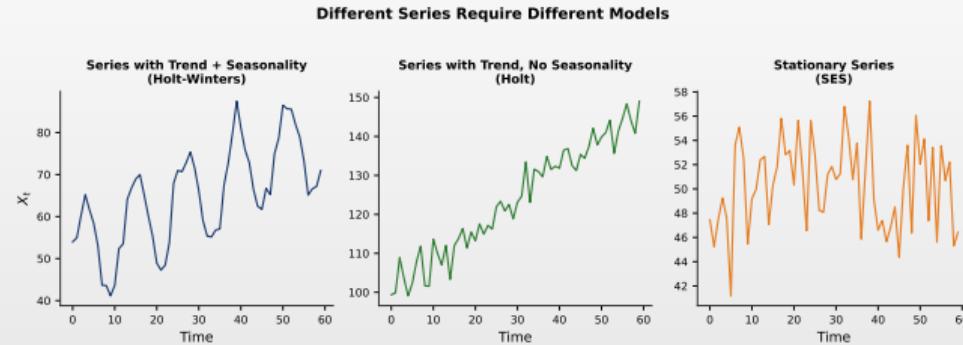
 TSA\_ch0\_forecast\_eval

### Interpretare

- Date:** pasageri companii aeriene
- Cel mai bun:** Holt-Winters multiplicativă — ideal pentru date cu sezonalitate crescătoare



## Performanța prognozei pe diferite seturi de date

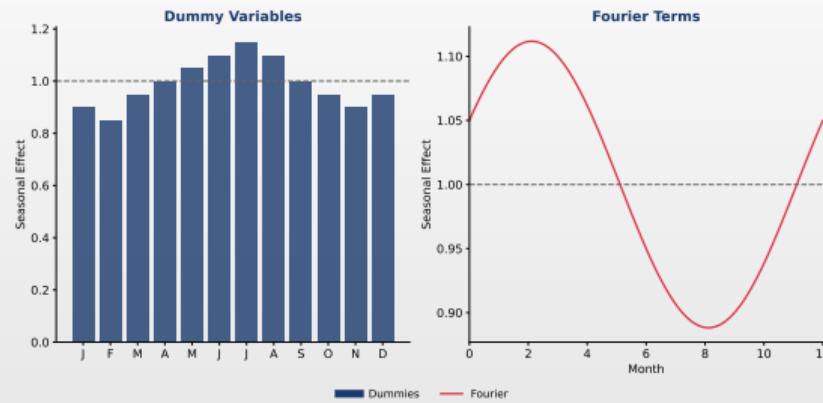


**TSA\_ch0\_forecast\_eval**

### Interpretare

- Serii diferite:** necesită modele diferite
- Date sezoniere:** preferați metode sezoniere
- Nu există model universal:** testați mai multe abordări

## Variabile dummy vs termeni Fourier



TSA\_ch0\_seasonal

### Comparație

- **Variabile dummy:** captează orice formă, necesită  $s - 1$  parametri
- **Termeni Fourier:** doar  $2K$  parametri, tipare netede, sinusoidale



## Modelarea sezonalității: două abordări

### 1. Variabile dummy

- Model:**  $X_t = \mu + \sum_{j=1}^{s-1} \gamma_j D_{jt} + \varepsilon_t$
- $D_{jt} = 1$  dacă  $t$  în sezonul  $j$
- $s - 1$  parametri
- Orice tipar sezonier

### 2. Termeni Fourier

- Model:**  $X_t = \mu + \sum_{k=1}^K \left[ \alpha_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{s}\right) + \beta_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{s}\right) \right]$
- Funcții sinusoidale
- $2K$  parametri
- Tipare netede

### Compromis

- Variabile dummy**
  - Orice tipar sezonier, dar mai mulți parametri
- Termeni Fourier**
  - Tipare netede, mai puțini parametri



## Alegerea între dummy și Fourier

Criteriu	Dummy	Fourier
Parametri (lunar)	11	$2K$ (adesea 4–6)
Tipar sezonier	Orice formă	Neted/sinusoidal
Interpretare	Directă (efekte lunare)	Componente de frecvență
Sezoane de înaltă frecvență	Mulți parametri	Eficient
Sezonalitate multiplă	Complex	Ușor (adăugați termeni)

### Recomandări

- Folosiți Dummy**
  - ▶ Tipare neregulate, coeficienți interpretabili
- Folosiți Fourier**
  - ▶ Tipare netede, sezonalitate de înaltă frecvență
  - ▶ Utilizat în TBATS și Prophet



## De ce eliminăm trendul și sezonalitatea?

### Motive pentru eliminarea trendului

- Cerința de staționaritate
- Focus pe fluctuații
- Evitarea regresiei false
- Permiterea inferenței valide

### Motive pentru desezonalizare

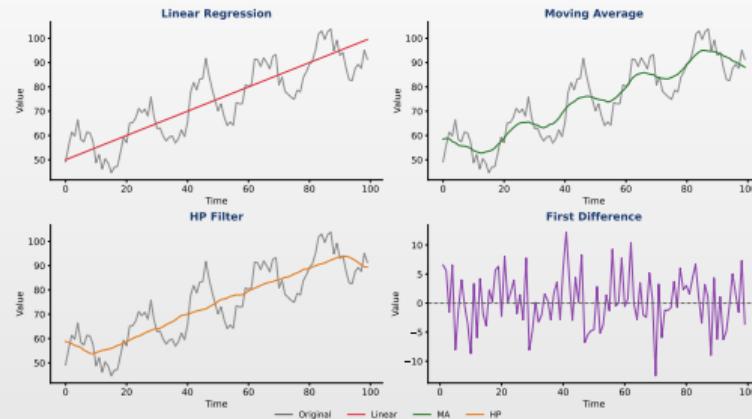
- Dezvăluirea trendului subiacent
- Comparații între sezoane
- Simplificarea modelării
- Focus pe componenta neregulată

### Important

- Modelăm seria transformată**
  - ▶ Cu trendul și sezonalitatea eliminate
- Inversăm transformarea**
  - ▶ Readucem prognoza la scala originală



## Metode de eliminare a trendului: comparație



Q TSA\_cho\_detrending

### Idee cheie

- **Metode diferite:** produc reziduuri diferite
- **Alegere după tipul de trend:** considerați obiectivele analizei



## Metode de eliminare a trendului

### Șase abordări comune de eliminare a trendului

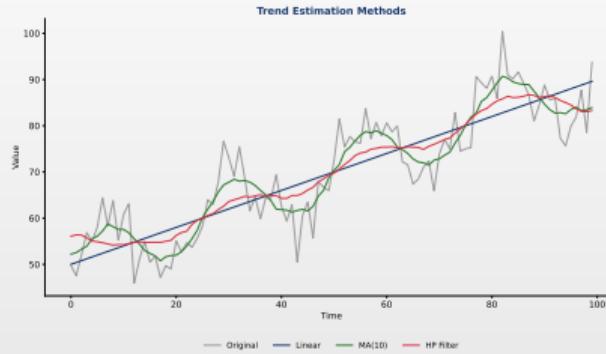
- Diferențiere:**  $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ 
  - ▶ Cea mai utilizată, elimină trend stochastic
- Regresie liniară:**  $\hat{T}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t$
- Polinomială:** polinom de ordin superior
- Filtru HP:** echilibru estimare vs netezime
- Media mobilă:**  $\hat{T}_t = MA_q(X_t)$
- LOESS:** regresie polinomială locală

### Alegerea depinde de

- Natura trendului**
  - ▶ Determinist vs stochastic
- Scopul analizei**
  - ▶ Prognoză vs analiză descriptivă



## Estimarea trendului: abordări multiple



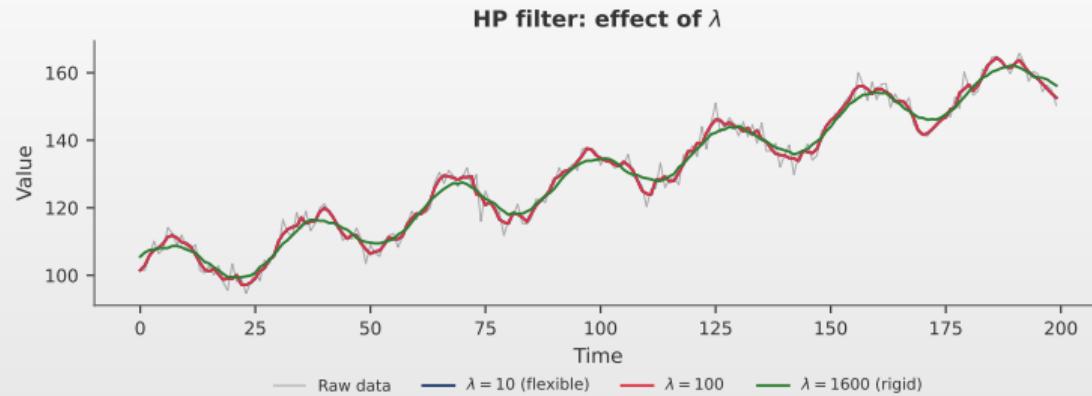
Q TSA\_ch0\_detrending

### Comparație metode

- Media mobilă:** simplă dar cu lag
- Regresie polinomială:** flexibilă, parametrică
- HP filter:** standard macroeconomic



## Filtrul HP: efectul lui $\lambda$



 TSA\_cho\_detrending

### Compromis

- $\lambda$  mic:** trend flexibil — urmează datele îndeaproape
- $\lambda$  mare:** trend neted — se apropie de trend liniar



## Filtrul Hodrick-Prescott (HP)

### Definiție 5 (Filtrul HP)

- Filtrul HP:** descompune  $X_t$  în trend  $\tau_t$  și ciclu  $c_t$ :  $X_t = \tau_t + c_t$

$$\min_{\{\tau_t\}} \left\{ \sum_{t=1}^T (\tau_t - \tau_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} [(\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1})]^2 \right\}$$

### Interpretare

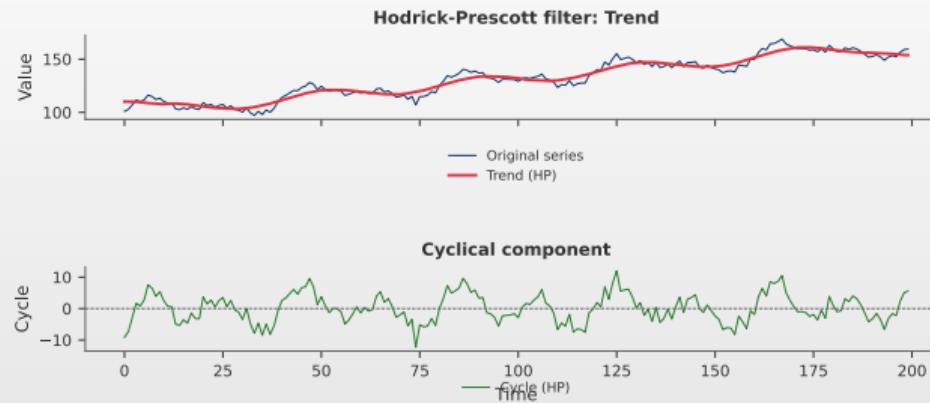
- Primul termen**
  - Ajustare la date
- Al doilea termen**
  - Penalizare netezime
- $\lambda$ 
  - Controlează echilibrul între fidelitate și netezime

### Valori standard $\lambda$ (Ravn-Uhlig)

- Anual**
  - $\lambda = 6.25$
- Trimestrial**
  - $\lambda = 1600$  (standard macroeconomic)
- Lunar**
  - $\lambda = 129600$



## Filtrul HP: extragerea ciclului de afaceri



 TSA\_ch0\_detrending

### Aplicație

- Macroeconomie:** extragerea ciclurilor de afaceri
- Serii comune:** PIB, șomaj, inflație



## Filtrul HP: limitări

### Probleme cunoscute

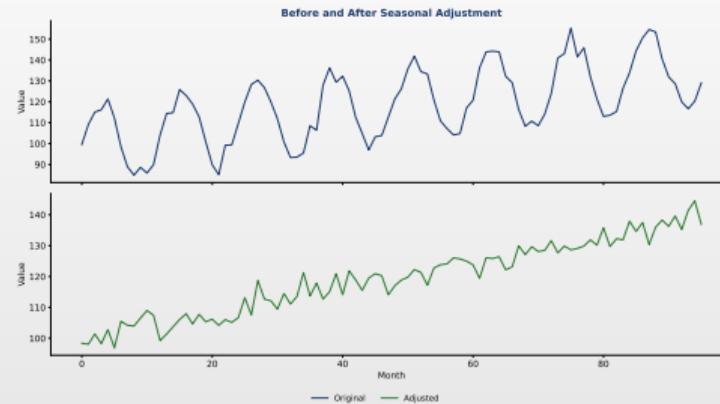
- Instabilitate la extremități**
  - ▶ Estimările trendului nesigure la început și sfârșit
- Cicluri false**
  - ▶ Poate crea dinamici artificiale
- Alegerea  $\lambda$** 
  - ▶ Rezultatele sensibile la parametru

### Alternative

- Filtre bandă:** Baxter-King, Christiano-Fitzgerald
  - ▶ Izolează frecvențe specifice
- Filtrul Hamilton:** bazat pe regresie
- Componente neobservate:** modele state-space



## Ajustare sezonieră: vizualizare



 TSA\_ch0\_seasonal

### Rezultat

- Seria ajustată sezonieră: dezvăluie trendul subiacent, elimină fluctuațiile periodice



## Metode de eliminare a sezonalității

### Patru abordări pentru eliminarea sezonalității

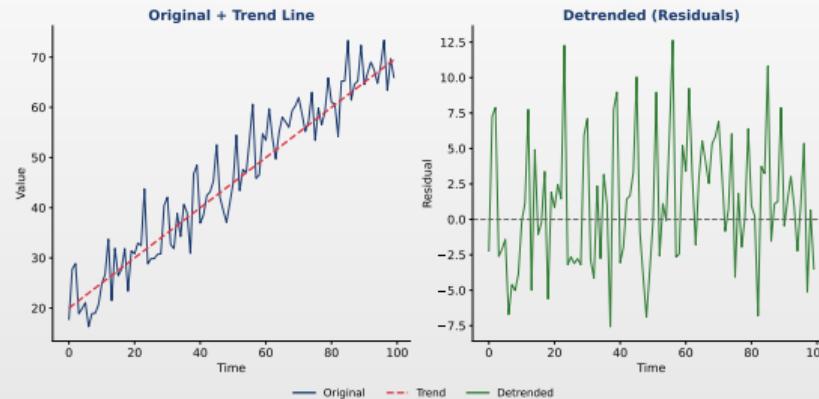
- Diferențiere sezonieră:**  $\Delta_s X_t = X_t - X_{t-s}$ 
  - ▶ Elimină tipar periodic, simplu de aplicat
- Împărțire (multiplicativ):**  $X_t^{adj} = X_t / \hat{S}_t$
- Scădere (aditiv):**  $X_t^{adj} = X_t - \hat{S}_t$
- X-13ARIMA-SEATS:** standard oficial US Census Bureau
  - ▶ Metodă sofisticată, utilizată de institutele de statistică

### Perioada sezonieră $s$

- Lunar:  $s = 12$  | Trimestrial:  $s = 4$



## Exemplu: trend determinist



Q TSA\_ch0\_detrending

### Cheie

- Metodă:** regresie
- Rezultat:** reziduuri staționare, ACF scade rapid



## Trend determinant vs stochastic

### Trend determinant

- Model:**  $X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$
- Caracteristici:**
  - ▶ Trendul este o funcție de timp
  - ▶  $\varepsilon_t$  este staționar
- Metodă:** eliminarea trendului prin regresie

### Trend stochastic

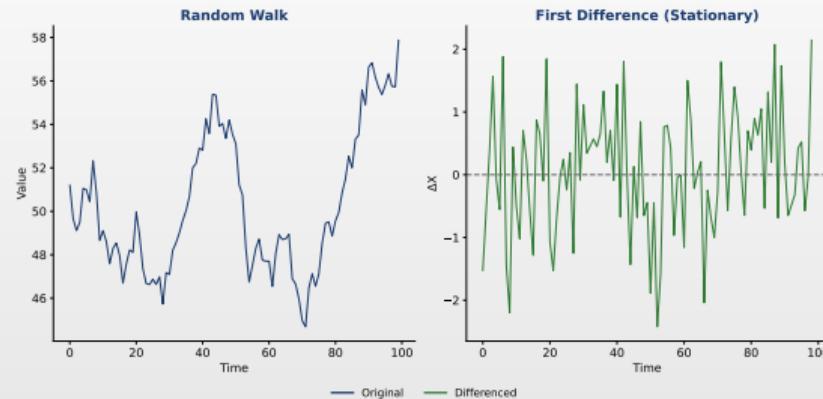
- Model:**  $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$
- Caracteristici:**
  - ▶ Componentă de mers aleatoriu
  - ▶  $\Delta X_t$  este staționar
- Metodă:** eliminarea trendului prin diferențiere

### Metodă greșită = probleme

- Diferențiere pe trend determinant**  $\succ$  supra-diferențiere
  - ▶ Introduce dependență artificială în serie
- Regresie pe trend stochastic**  $\succ$  regresie falsă
  - ▶ Rezultate statistice invalide



## Exemplu: trend stochastic (mers aleatoriu)



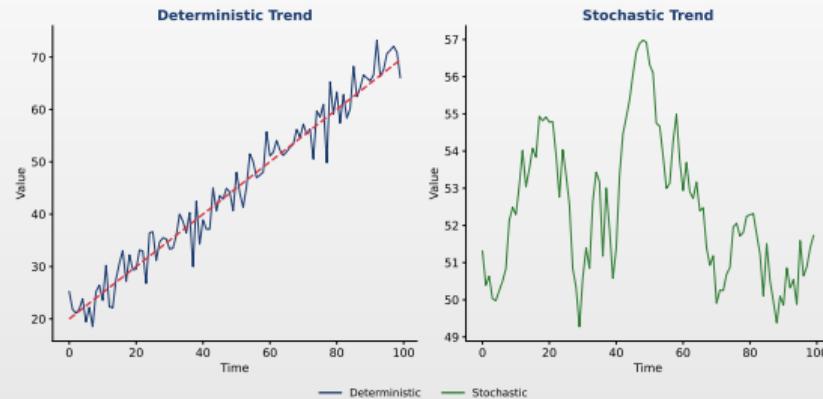
**TSA\_ch0\_detrending**

### Cheie

- Metodă:** diferențiere
- Rezultat:** diferențele sunt staționare (zgomot alb)



## Comparație alăturată



TSA\_cho\_detrending

### Rețineți

- Trend determinist:** folosiți regresie — trendul este o funcție predictibilă de timp
- Trend stochastic:** folosiți diferențiere — trendul conține o componentă aleatoare



## Exercițiu AI: Gândire critică

Prompt de testat în ChatGPT / Claude / Copilot

"Folosind yfinance, descarcă prețurile lunare de închidere ale acțiunii Apple (AAPL) din 2015-01 până în 2024-12 (120 observații). Descompune seria în trend, sezonalitate și reziduuri. Determină dacă e mai potrivită descompunerea aditivă sau multiplicativă și progozează prețul pentru următoarele 12 luni. Vreau cod Python complet cu grafice profesionale."

**Exercițiu:**

1. Rulați prompt-ul într-un LLM la alegere și analizați critic răspunsul.
2. Ce tip de descompunere alege modelul? E corect? Justificați.
3. Cum evaluează calitatea progozei? Metrica e calculată corect?
4. Verifică reziduurile — prezintă structură neexplicată?
5. Rescrieți analiza corect și comparați cu un benchmark sezonier naiv.

**Atenție:** Codul generat de AI poate rula fără erori și arăta profesional. *Asta nu înseamnă că e corect.*



## Rezumat

### Ce am învățat în acest capitol

- Definiția și Caracteristicile Seriei de Timp
  - ▶ Secvență de observații ordonate temporal cu dependență
- Descompunere (Aditivă vs multiplicativă)
  - ▶ Componente: Trend-Ciclu + Sezonier + Reziduu
- Metode de Netezire Exponențială
  - ▶ SES (nivel), Holt (+ trend), Holt-Winters (+ sezonalitate), ETS
- Evaluarea și Validarea Prognozei
  - ▶ Metrici: MAE, RMSE, MAPE; Cross-Validation cu origine mobilă

### Idee cheie

- Înțelegeți înainte de a modela:
  - ▶ Vizualizați și descompuneți datele mai întâi
  - ▶ Alegeți aditiv vs multiplicativ în funcție de comportamentul varianței



## Ce urmează?

### Capitolul 1: Procese stochastice și staționaritate

- Procese Stochastice:** fundament matematic, variabile aleatoare indexate după timp
- Staționaritate:** strictă (distribuție invariantă) vs slabă (momente invariante)
- Procese Fundamentale:** zgomot alb și mers aleatoriu  $\succ$  blocuri pentru ARIMA
- ACF și PACF:** instrumente pentru identificarea modelului

Întrebări?



## Bibliografie I

### Fundamente ale seriilor de timp

- Wold, H. (1938). *A Study in the Analysis of Stationary Time Series*, Almqvist & Wiksell.
- Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- Brockwell, P.J., & Davis, R.A. (2016). *Introduction to Time Series and Forecasting*, 3rd ed., Springer.

### Descompunere și analiză exploratorie

- Cleveland, R.B., Cleveland, W.S., McRae, J.E., & Terpenning, I. (1990). STL: A Seasonal-Trend Decomposition Procedure Based on Loess, *Journal of Official Statistics*, 6(1), 3–33.
- Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*, 3rd ed., OTexts.



## Bibliografie II

### Netezire exponențială și fundamente ETS

- Holt, C.C. (1957/2004). Forecasting Seasonals and Trends by Exponentially Weighted Moving Averages, *International Journal of Forecasting*, 20(1), 5–10.
- Winters, P.R. (1960). Forecasting Sales by Exponentially Weighted Moving Averages, *Management Science*, 6(3), 324–342.
- Hyndman, R.J., Koehler, A.B., Ord, J.K., & Snyder, R.D. (2008). *Forecasting with Exponential Smoothing: The State Space Approach*, Springer.

### Resurse online și cod

- **Quantlet:** <https://quantlet.com> ➔ Platformă de cod pentru metode cantitative
- **Quantinar:** <https://quantinar.com> ➔ Platformă de învățare pentru metode cantitative
- **GitHub TSA:** [https://github.com/QuantLet/TSA/tree/main/TSA\\_ch0](https://github.com/QuantLet/TSA/tree/main/TSA_ch0) ➔ Cod Python pentru acest capitol



# Vă Mulțumim!

## Întrebări?

Materialele cursului sunt disponibile la: <https://danpele.github.io/Time-Series-Analysis/>

**Quantlet** ↘ Platformă de cod pentru metode cantitative

**Quantinar** ↘ Platformă de învățare pentru metode cantitative

