



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Seminar 5: Modele GARCH



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

Cuprins Seminar

Test de Recapitulare

Întrebări Adevărat/Fals

Probleme Practice

Flux de Lucru Python

Exercițiu cu asistență AI

Rezumat



Întrebarea 1

Ce reprezintă “gruparea volatilității (*volatility clustering*)”?

- (A) Volatilitatea este constantă în timp
- (B) Perioadele de volatilitate ridicată sunt urmate de perioade de volatilitate ridicată
- (C) Randamentele sunt corelate în timp
- (D) Distribuția randamentelor este normală

Gândiți-vă la comportamentul piețelor financiare în perioadele de criză...



Răspuns Întrebarea 1

Răspuns Corect: (B)

Perioadele de volatilitate ridicată sunt urmate de perioade de volatilitate ridicată



Răspuns Întrebarea 1

Răspuns Corect: (B)

Perioadele de volatilitate ridicată sunt urmate de perioade de volatilitate ridicată

Explicație

- Volatility clustering** este un fapt stilizat observat în seriile financiare
- Perioadele de volatilitate ridicată (cu mișcări mari) tind să persiste
- Perioadele de stabilitate relativă (cu mișcări mici) tind și ele să persiste
- Aceasta implică că varianța condiționată σ_t^2 este **predictibilă**
- Modelele GARCH captează exact acest fenomen!

Întrebarea 2

În modelul GARCH(1,1): $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$

Ce reprezintă parametrul α ?

- (A) Persistența volatilității
- (B) Nivelul de bază al volatilității
- (C) Reacția la șocuri recente (news coefficient)
- (D) Varianța necondiționată



Răspuns Întrebarea 2

Răspuns Corect: (C)

Reacția la șocuri recente (news coefficient)



Răspuns Întrebarea 2

Răspuns Corect: (C)

Reacția la șouri recente (news coefficient)

Interpretarea Parametrilor GARCH(1,1)

- ω = nivelul de bază (floor) al volatilității
- α = **reacția** la pătratele inovațiilor ("news")
- β = **persistența** volatilității (memory)
- $\alpha + \beta$ = persistența totală

Un α mare înseamnă că volatilitatea reacționează puternic la șouri recente.

 TSA_ch5_garch_sim

Întrebarea 3

Care este condiția de stationaritate pentru GARCH(1,1)?

- (A) $\omega > 0$
- (B) $\alpha + \beta = 1$
- (C) $\alpha + \beta < 1$
- (D) $\alpha > \beta$



Răspuns Întrebarea 3

Răspuns Corect: (C)

$$\alpha + \beta < 1$$



Răspuns Întrebarea 3

Răspuns Corect: (C)

$$\alpha + \beta < 1$$

Condiții Complete

Pentru stationaritatea GARCH(1,1):

- $\omega > 0$ (asigură varianță pozitivă)
- $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ (non-negativitate)
- $\alpha + \beta < 1$ (**stationaritate în covarianță**)

Dacă $\alpha + \beta = 1 \Rightarrow$ IGARCH (șocurile au efect permanent)

 TSA_ch5_garch_sim

Întrebarea 4

Care este formula varianței necondiționate în GARCH(1,1)?

- (A) $\bar{\sigma}^2 = \omega$
- (B) $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha}$
- (C) $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$
- (D) $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{\alpha + \beta}$



Răspuns Întrebarea 4

Răspuns Corect: (C)

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$$



Răspuns Întrebarea 4

Răspuns Corect: (C)

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$$

Demonstrație

Luând așteptarea necondiționată a GARCH(1,1):

$$\mathbb{E}[\sigma_t^2] = \omega + \alpha\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] + \beta\mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2]$$

$$\bar{\sigma}^2 = \omega + \alpha\bar{\sigma}^2 + \beta\bar{\sigma}^2$$

$$\bar{\sigma}^2(1 - \alpha - \beta) = \omega$$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$$



Întrebarea 5

Ce este "leverage effect"?

- (A) řocurile pozitive cresc volatilitatea mai mult decât cele negative
- (B) řocurile negative cresc volatilitatea mai mult decât cele pozitive
- (C) Volatilitatea este independentă de semnul řocurilor
- (D) Randamentele sunt asimetrice



Răspuns Întrebarea 5

Răspuns Corect: (B)

Socurile negative cresc volatilitatea mai mult decât cele pozitive



Răspuns Întrebarea 5

Răspuns Corect: (B)

Şocurile negative cresc volatilitatea mai mult decât cele pozitive

Explicație

- Observat empiric pe piețele de acțiuni
- Când prețurile scad, gradul de îndatorare al firmei crește (datoria devine mai mare relativă la capitaluri)
- Aceasta face firma mai riscantă \Rightarrow volatilitate mai mare
- GARCH standard **nu poate** captura acest efect (depinde de ε^2)
- Soluții: **EGARCH, GJR-GARCH, TGARCH**

Întrebarea 6

În modelul EGARCH, parametrul γ negativ indică:

- (A) Absența leverage effect
- (B) Prezența leverage effect
- (C) Volatilitate constantă
- (D) Model nestacionar



Răspuns Întrebarea 6

Răspuns Corect: (B)

Prezența leverage effect



Răspuns Întrebarea 6

Răspuns Corect: (B)

Prezența leverage effect

EGARCH(1,1)

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \alpha(|z_{t-1}| - \mathbb{E}[|z|]) + \gamma z_{t-1} + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2)$$

- $\gamma < 0$: şoc negativ ($z < 0$) \Rightarrow creşte $\ln(\sigma_t^2)$
- $\gamma > 0$: efect invers (mai rar întâlnit)
- $\gamma = 0$: efect simetric (ca GARCH)

 TSA_ch5_egarch_sim

Întrebarea 7

Care este principalul avantaj al EGARCH față de GARCH?

- (A) Este mai rapid de estimat
- (B) Nu necesită restricții de non-negativitate
- (C) Are mai puțini parametri
- (D) Este mai ușor de interpretat



Răspuns Întrebarea 7

Răspuns Corect: (B)

Nu necesită restricții de non-negativitate



Răspuns Întrebarea 7

Răspuns Corect: (B)

Nu necesită restricții de non-negativitate

Avantajele EGARCH

- Modelează $\ln(\sigma_t^2)$, nu σ_t^2
- $\sigma_t^2 = e^{\ln(\sigma_t^2)} > 0$ **automat**, indiferent de valorile parametrilor
- GARCH necesită $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$
- La estimare, aceste restricții pot cauza probleme de convergență

 TSA_ch5_egarch_sim

Întrebarea 8

Ce test folosim pentru a detecta efecte ARCH în reziduuri?

- (A) Testul Dickey-Fuller
- (B) Testul Ljung-Box pe reziduuri
- (C) Testul Engle (ARCH-LM)
- (D) Testul Breusch-Pagan



Răspuns Întrebarea 8

Răspuns Corect: (C)

Testul Engle (ARCH-LM)



Răspuns Întrebarea 8

Răspuns Corect: (C)

Testul Engle (ARCH-LM)

Procedura Testului ARCH-LM

1. Estimează modelul pentru medie, obține reziduurile $\hat{\varepsilon}_t$
2. Calculează $\hat{\varepsilon}_t^2$
3. Regresează: $\hat{\varepsilon}_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + u_t$
4. Statistica: $LM = T \cdot R^2 \sim \chi^2(q)$ sub H_0

H_0 : Nu există efecte ARCH H_1 : Există efecte ARCH



Întrebarea 9

Pentru S&P 500, valorile tipice ale $\alpha + \beta$ în GARCH(1,1) sunt:

- (A) 0.50 – 0.70
- (B) 0.70 – 0.85
- (C) 0.95 – 0.99
- (D) Mai mare decât 1



Răspuns Întrebarea 9

Răspuns Corect: (C)

0.95 – 0.99



Răspuns Întrebarea 9

Răspuns Corect: (C)

0.95 – 0.99

Volatilitate Foarte Persistentă

- Seriile financiare au volatilitate foarte persistentă
- $\alpha + \beta \approx 0.98$ pentru S&P 500
- Half-life: $HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha+\beta)} \approx 35 - 60$ zile
- Aceasta înseamnă că un soc de volatilitate se disipează în câteva luni

Serie	$\alpha + \beta$
S&P 500	0.97–0.99
Bitcoin	0.90–0.98
EUR/USD	0.96–0.99

Întrebarea 10

Care distribuție este cel mai des folosită pentru inovațiile GARCH pentru a captura cozile groase?

- (A) Normală
- (B) Uniformă
- (C) Student-t
- (D) Exponențială



Răspuns Întrebarea 10

Răspuns Corect: (C)

Student-t



Răspuns Întrebarea 10

Răspuns Corect: (C)

Student-t

Distribuții pentru Inovații

- Normală**: standard, dar subestimează riscul extrem
- Student-t**: cozi groase, parametru ν (grade de libertate)
- GED**: Generalized Error Distribution, flexibilă
- Skewed Student-t**: asimetrie + cozi groase

Pentru S&P 500: $\nu \approx 5 - 8$ (cozi semnificativ mai groase decât normală)



Adevărat sau Fals?

1. Modelele ARIMA pot captura volatility clustering.
2. În GARCH(1,1), dacă $\alpha + \beta = 1$, modelul se numește IGARCH.
3. GJR-GARCH folosește o variabilă indicator pentru șocuri negative.
4. Prognoza volatilității GARCH converge către zero pe termen lung.
5. EGARCH poate avea parametri negativi fără a genera varianță negativă.
6. Value at Risk (VaR) poate fi calculat folosind prognoza volatilității GARCH.



Răspunsuri Adevărat/Fals

1. **FALS** — ARIMA presupune varianță constantă; GARCH modelează volatilitatea.
2. **ADEVĂRAT** — IGARCH = Integrated GARCH, volatilitatea are rădăcină unitară.
3. **ADEVĂRAT** — $I_{t-1} = 1$ dacă $\varepsilon_{t-1} < 0$, altfel 0.
4. **FALS** — Converge către varianță necondiționată $\bar{\sigma}^2$, nu zero.
5. **ADEVĂRAT** — Modeleză $\ln(\sigma_t^2)$, deci $\sigma_t^2 = e^{\ln(\sigma_t^2)} > 0$ mereu.
6. **ADEVĂRAT** — $\text{VaR}_\alpha = z_\alpha \cdot \sigma_{t+1}$ (pentru medie zero).



Problema 1: Calculul Varianței Necondiționate

Enunț

Un model GARCH(1,1) are parametrii estimați:

- $\omega = 0.000002$
- $\alpha = 0.08$
- $\beta = 0.90$

Calculați:

- (a) Varianța necondiționată zilnică
- (b) Volatilitatea necondiționată zilnică (ca procent)
- (c) Volatilitatea anualizată (presupunând 252 zile de tranzacționare)
- (d) Half-life-ul volatilității



Soluție Problema 1

Răspunsuri

$$(a) \bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta} = \frac{0.000002}{1 - 0.08 - 0.90} = \frac{0.000002}{0.02} = 0.0001$$

$$(b) \bar{\sigma} = \sqrt{0.0001} = 0.01 = 1\% \text{ pe zi}$$

$$(c) \sigma_{\text{annual}} = \bar{\sigma} \times \sqrt{252} = 0.01 \times 15.87 = 15.87\% \text{ pe an}$$

$$(d) HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha + \beta)} = \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.98)} = \frac{-0.693}{-0.0202} \approx 34 \text{ zile}$$

Interpretare

Volatilitatea de 15.87% pe an este tipică pentru un indice bursier. Half-life de 34 zile înseamnă că un şoc de volatilitate se reduce la jumătate după aproximativ 7 săptămâni.



Problema 2: Prognoză Volatilitate

Enunț

Folosind modelul GARCH(1,1) de la Problema 1:

- $\omega = 0.000002$, $\alpha = 0.08$, $\beta = 0.90$
- La momentul T : $\varepsilon_T = -0.03$ (scădere de 3%), $\sigma_T^2 = 0.0004$

Calculați prognoza volatilității pentru:

- (a) σ_{T+1}^2 (un pas înainte)
- (b) σ_{T+5}^2 (cinci pași înainte)
- (c) σ_{T+100}^2 (o sută de pași înainte)



Soluție Problema 2

Răspunsuri

(a) $\sigma_{T+1}^2 = \omega + \alpha \varepsilon_T^2 + \beta \sigma_T^2$
 $= 0.000002 + 0.08 \times (0.03)^2 + 0.90 \times 0.0004 = 0.000434$

Volatilitate: $\sqrt{0.000434} = 2.08\%$

(b) $\mathbb{E}_T[\sigma_{T+5}^2] = \bar{\sigma}^2 + (0.98)^4(\sigma_{T+1}^2 - \bar{\sigma}^2)$
 $= 0.0001 + 0.922 \times (0.000434 - 0.0001) = 0.000408$

Volatilitate: $\sqrt{0.000408} = 2.02\%$

(c) $\mathbb{E}_T[\sigma_{T+100}^2] = 0.0001 + (0.98)^{99} \times 0.000334 \approx 0.000145$
Volatilitate: $\sqrt{0.000145} = 1.20\%$ (aproape de $\bar{\sigma} = 1\%$)



Problema 3: Value at Risk

Enunț

Un portofoliu de 1.000.000 EUR este investit în acțiuni ale căror randamente sunt modelate prin GARCH(1,1).

Prognoza volatilității pentru mâine: $\sigma_{T+1} = 2\%$ zilnic.

Presupunând randamente normal distribuite cu medie zero, calculați:

- (a) VaR la 95% (1 zi)
- (b) VaR la 99% (1 zi)
- (c) VaR la 99% (10 zile), folosind regula “square root of time”

Cuantile: $z_{0.05} = 1.645$, $z_{0.01} = 2.326$



Soluție Problema 3

Răspunsuri

(a) VaR 95% (1 zi):

$$\text{VaR}_{95\%} = 1.645 \times 0.02 \times 1,000,000 = 32,900 \text{ EUR}$$

(b) VaR 99% (1 zi):

$$\text{VaR}_{99\%} = 2.326 \times 0.02 \times 1,000,000 = 46,520 \text{ EUR}$$

(c) VaR 99% (10 zile):

$$\text{VaR}_{99\%,10d} = \text{VaR}_{99\%,1d} \times \sqrt{10} = 46,520 \times 3.162 = 147,100 \text{ EUR}$$

Notă: regula de scalare \sqrt{T} presupune randamente i.i.d., ceea ce contrazice structura de dependență GARCH.

Atenție

În practică, pentru Student-t, cuantilele sunt mai mari (cozi mai groase)!

Problema 4: Identificarea Modelului

Enunț

Analizați următoarele rezultate ale estimării și identificați modelul:

Parametru	Estimat	Std. Error
ω	0.0000015	0.0000005
α	0.0550	0.0120
γ	0.0850	0.0180
β	0.9100	0.0150

- (a) Ce model este acesta?
- (b) Este prezent leverage effect?
- (c) Care este impactul unui soc negativ vs pozitiv?
- (d) Este modelul stationar?



Soluție Problema 4

Răspunsuri

- (a) GJR-GARCH(1,1,1) — prezența parametrului γ (threshold/asymmetry)
- (b) Da, leverage effect prezent: $\gamma = 0.085 > 0$ și semnificativ
- (c) Impact:
- ▶ řoc pozitiv: $\text{impact} = \alpha = 0.055$
 - ▶ řoc negativ: $\text{impact} = \alpha + \gamma = 0.055 + 0.085 = 0.140$
 - ▶ řocurile negative au impact de **2.5x mai mare!**
- (d) Stationaritate: $\alpha + \gamma/2 + \beta = 0.055 + 0.0425 + 0.91 = 1.0075$
Valoarea depășește ușor pragul de 1 — tehnic nestaționar (în covariantă), foarte aproape de IGARCH.

Pasul 1: Încărcare și Pregătire Date

```
import pandas as pd
import numpy as np
import yfinance as yf
from arch import arch_model
from arch.unitroot import ADF

# Descarcare date S&P 500
data = yf.download('^GSPC', start='2010-01-01', end='2024-01-01')
returns = 100 * data['Adj Close'].pct_change().dropna()

# Verificare stationaritate (ADF test)
adf = ADF(returns)
print(f'ADF statistic: {adf.stat:.4f}')
print(f'p-value: {adf.pvalue:.4f}')
```

 TSA_ch5_sp500

Pasul 2: Test Efecte ARCH

```
from statsmodels.stats.diagnostic import het_arch

# Test ARCH-LM pe reziduuri
residuals = returns - returns.mean()
lm_stat, lm_pvalue, f_stat, f_pvalue = het_arch(residuals, nlags=10)

print(f'ARCH-LM statistic: {lm_stat:.4f}')
print(f'p-value: {lm_pvalue:.4f}')

if lm_pvalue < 0.05:
    print('=> Efecte ARCH prezente! Se justifica GARCH.')
```

 TSA_ch5_btc_arch

Pasul 3: Estimare Modele

```
# GARCH(1,1) cu distributie Student-t
model_garch = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, q=1, dist='t')
res_garch = model_garch.fit(disp='off')
print(res_garch.summary())

# GJR-GARCH(1,1,1)
model_gjr = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, o=1, q=1, dist='t')
res_gjr = model_gjr.fit(disp='off')

# EGARCH(1,1)
model_egarch = arch_model(returns, vol='EGARCH', p=1, q=1, dist='t')
res_egarch = model_egarch.fit(disp='off')

# Comparare AIC
print(f'GARCH AIC: {res_garch.aic:.2f}')
print(f'GJR AIC: {res_gjr.aic:.2f}')
print(f'EGARCH AIC: {res_egarch.aic:.2f}')
```



Pasul 4: Diagnostic

```
# Reziduuri standardizate
std_resid = res_gjr.std_resid

# Test Ljung-Box pe reziduuri^2
from statsmodels.stats.diagnostic import acorr_ljungbox
lb_test = acorr_ljungbox(std_resid**2, lags=10, return_df=True)
print(lb_test)

# Verificare efecte ARCH reziduale
lm_stat2, lm_pval2, _, _ = het_arch(std_resid, nlags=5)
print(f'ARCH-LM reziduuri: stat={lm_stat2:.2f}, p={lm_pval2:.4f}')

if lm_pval2 > 0.05:
    print('=> Nu mai sunt efecte ARCH reziduale. Model OK!')
```

 TSA_ch5_diagnostic



Pasul 5: Prognoză și VaR

```
# Forecast 10 zile
forecasts = res_gjr.forecast(horizon=10)
vol_forecast = np.sqrt(forecasts.variance.values[-1, :])

print('Volatility forecast (%):', vol_forecast)

# Value at Risk 99%
portfolio_value = 1_000_000
VaR_99 = 2.326 * vol_forecast[0] / 100 * portfolio_value
print(f'VaR 99% (1 zi): {VaR_99:.0f} EUR')

# VaR 10 zile
VaR_99_10d = VaR_99 * np.sqrt(10)
print(f'VaR 99% (10 zile): {VaR_99_10d:.0f} EUR')
```



Exercițiu AI: Gândire critică

Prompt de testat în ChatGPT / Claude / Copilot

"Folosind yfinance, descarcă prețurile zilnice de închidere NASDAQ Composite (^IXIC) din 2019-01-01 până în 2024-12-31 (aprox. 1.500 observații). Calculează randamentele logaritmice zilnice. Testează efectele ARCH cu testul Engle LM. Estimează un GARCH(1,1) și un GJR-GARCH(1,1) și compară-le cu AIC. Prognozează volatilitatea pe 20 de zile. Calculează VaR la 1% din distribuția condițională. Vreau cod Python complet cu grafice."

Exercițiu:

1. Rulați prompt-ul într-un LLM la alegere și analizați critic răspunsul.
2. Separă ecuația mediei de ecuația varianței? Specifică distribuția inovațiilor?
3. Detectează efectul de levier (asimetrie)? GJR-GARCH arată $\gamma > 0$?
4. Verifică constrângerea de staționaritate $\alpha + \beta < 1$? Discută persistența?
5. VaR-ul e calculat din distribuția condițională (nu necondiționată)?

Atenție: Codul generat de AI poate rula fără erori și arăta profesional. Asta nu înseamnă că e corect.



Rezumat Seminar

Concepție Cheie

- **ARCH**: varianța condiționată depinde de șocuri trecute
- **GARCH**: adaugă persistență prin lag-uri ale varianței
- **EGARCH/GJR**: captează leverage effect (asimetrie)
- **Stationaritate**: $\alpha + \beta < 1$

Formule Importante

- Varianța necondiționată: $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$
- Half-life: $HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha+\beta)}$
- VaR: $VaR_\alpha = z_\alpha \cdot \sigma \cdot V$

Sfat Practic

Folosiți distribuția Student-t pentru a captura cozile groase. Verificați absența efectelor ARCH în reziduurii!

Exerciții pentru Acasă

Exercițiu 1

Descărcați randamentele zilnice pentru BET (indicele BVB) și estimați un model GARCH(1,1). Comparați persistența ($\alpha + \beta$) cu S&P 500.

Exercițiu 2

Pentru Bitcoin, estimați GARCH, EGARCH și GJR-GARCH. Este leverage effect prezent pentru criptomonede?

Exercițiu 3

Calculați VaR zilnic pentru un portofoliu de 100.000 EUR investit în EUR/USD, folosind volatilitatea GARCH prognozată.

Exercițiu 4

Compară prognoza volatilității GARCH(1,1) cu volatilitatea realizată (suma pătratelor randamentelor) pentru o perioadă de 20 de zile.

Exercițiu de Replicare: Engle (1982)

Obiectiv

Replicați Tabelul 3 din Engle (1982) — testul ARCH pe inflația din Marea Britanie.

1. Descărcați inflația trimestrială din România (IPC, INS, 1997–2024)
2. Estimați un model AR(4) pentru inflație: $\pi_t = c + \phi_1\pi_{t-1} + \cdots + \phi_4\pi_{t-4} + \varepsilon_t$
3. Calculați reziduurile $\hat{\varepsilon}_t$ și testați efecte ARCH: regresați $\hat{\varepsilon}_t^2$ pe $\hat{\varepsilon}_{t-1}^2, \dots, \hat{\varepsilon}_{t-4}^2$
4. Raportați statistică $LM = T \cdot R^2$ și comparați cu $\chi^2(4)$
5. Estimați un model ARCH(4) și comparați cu rezultatele originale ale lui Engle
6. Întrebare: Inflația românească prezintă efecte ARCH mai puternice decât cea britanică? De ce?

Ref: Engle, R.F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica*, 50(4), 987–1007.

 TSA_ch5_arch_sim

Vă mulțumesc!

Întrebări?

danpele@ase.ro