



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 7: Cointegrare și Modele VECM



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

Cuprins

Fundamente

- ▣ Motivație
- ▣ Regresia Falsă
- ▣ Conceptul de Cointegrare
- ▣ Metoda Engle-Granger
- ▣ Metoda Johansen

Aplicații

- ▣ Estimarea VECM
- ▣ Considerații Practice
- ▣ Exemple Practice
- ▣ Studiu de caz: Rate ale dobânzii
- ▣ Rezumat și Quiz

Obiective de învățare

La finalul acestui capitol, veți fi capabili să:

- ▣ **Cointegrare:** Înțelegeți conceptul și relațiile de echilibru pe termen lung
- ▣ **Regresia falsă:** Recunoașteți și evitați problema regresiei false (spurious regression)
- ▣ **Engle-Granger:** Aplicați metoda în doi pași pentru testarea cointegrării
- ▣ **Johansen:** Efectuați testul pentru cointegrare multiplă
- ▣ **VECM** (Vector Error Correction Model — Model Vectorial de Corecție a Erorilor): Estimați și interpretați aceste modele
- ▣ **Viteza de ajustare:** Analizați coeficienții α și vectorii de cointegrare β
- ▣ **Python:** Implementați analiza de cointegrare cu aplicații practice

De ce contează cointegrarea?

Provocarea

- ▣ **Nestaționaritate:** Multe serii economice/financiare sunt $I(1)$ — PIB, prețuri acțiuni, cursuri valutare au rădăcini unitare
- ▣ **Regresia standard:** Cu variabile $I(1) \Rightarrow$ rezultate false; diferențierea pierde informația pe termen lung

Soluția: Cointegrarea

- ▣ **Trend stochastic comun:** Unele serii nestaționare se mișcă împreună pe termen lung — această relație poate fi modelată!

Premiul Nobel 2003

- ▣ Clive Granger a primit Premiul Nobel în Economie (împreună cu Robert Engle)
- ▣ Contribuția: “metode pentru analiza seriilor de timp economice cu tendințe comune”

Aplicații practice

Finanțe

- ▣ **Pairs Trading:** Tranzacționarea spread-ului între acțiuni cointegrate
- ▣ **Structura la termen:** rate ale dobânzii pe termen scurt și lung
- ▣ **Spot-Futures:** Prețurile spot și futures converg la maturitate

Macroeconomie

- ▣ **Consum și Venit:** Ipoteza venitului permanent
- ▣ **Bani și Prețuri:** Teoria cantitativă a banilor
- ▣ **PPP** (Purchasing Power Parity — Paritatea Puterii de Cumpărare): Cursuri valutare și niveluri de prețuri

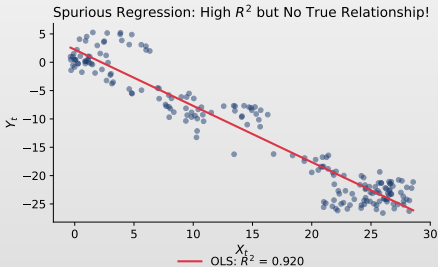
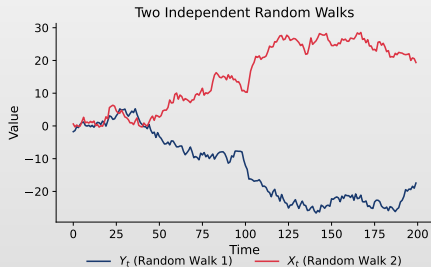
Analiza politicilor

- ▣ **Politica Fiscală:** Cheltuieli guvernamentale și venituri fiscale
- ▣ **Politica Monetară:** Transmiterea ratelor dobânzii
- ▣ **Piața Muncii:** Salarii și productivitate

Regresia falsă: exemplu vizual

Atenție

- ▣ **Rezultat:** Două mersuri aleatorii complet independente prezintă corelație ridicată ($R^2 > 0.8$) doar din întâmplare
- ▣ De aceea avem nevoie de analiza cointegrării



Problema regresiei false

Granger & Newbold (1974)

- ▣ **Configurare:** Regresarea unui mers aleatoriu pe un alt mers aleatoriu independent
 - ▶ $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$, unde Y_t și X_t sunt procese $I(1)$ independente

Simptomele regresiei false

- ▣ **Coeficienți:** R^2 ridicat (adesea > 0.9) și statistici t semnificative
 - ▶ Chiar dacă variabilele sunt complet necorelate!
- ▣ **Diagnostic:** Statistica Durbin-Watson foarte mică ($DW \approx 0$)
 - ▶ Reziduurile sunt nestaționare (au rădăcină unitară)

Regulă practică (Granger)

- ▣ Dacă $R^2 > DW$, suspectați regresie falsă!

Corelații false în lumea reală

Explorarea datelor poate produce corelații fără sens

- ▣ Cu suficiente variabile și serii lungi de timp, apar tipare pur întâmplătoare
- ▣ Distanța dintre Neptun și Uranus ↔ Prețul acțiunilor SAP SE (2002–2023)
- ▣ Utilizarea porumbului OMG în South Dakota ↔ Căutări Google “i cant even” (2004–2023)
- ▣ Ratingurile serialului *Two and a Half Men* ↔ Combustibil pentru avioane în Serbia (2006–2015)
- ▣ Popularitatea meme-ului “Its Wednesday my dudes” ↔ Prețul acțiunilor Boeing (2006–2023)

Lecție

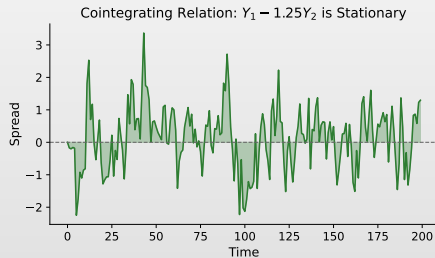
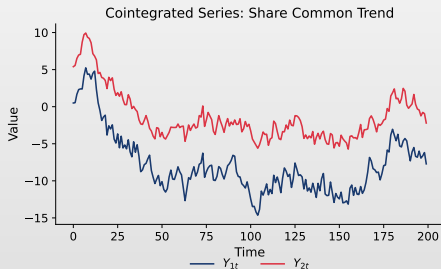
- ▣ Corelație ridicată \neq cauzalitate
- ▣ Seriile nestaționare cu tendințe comune produc R^2 ridicat prin construcție
- ▣ Testați întotdeauna staționaritatea și cointegrarea înainte de a interpreta rezultatele regresiei

🌐 Explorați mai multe exemple: tylervigen.com/spurious-correlations

Cointegrarea: exemplu vizual

De reținut

- **Cointegrare:** Ambele serii sunt $I(1)$ și evoluează împreună
- Combinația lor liniară (spread-ul) este staționară \Rightarrow aceasta este cointegrarea!



Definiția cointegrării

Definiție 1 (Cointegrare (Engle & Granger, 1987))

- ▣ **Definiție:** Variabilele Y_{1t}, \dots, Y_{kt} sunt **cointegrate de ordinul** (d, b) , notat $CI(d, b)$, dacă:
1. Toate variabilele sunt integrate de ordinul d : $Y_{it} \sim I(d)$
 2. Există o combinație liniară $\beta'Y_t$ care este integrată de ordinul $(d - b)$, unde $b > 0$

Cazul cel mai comun: $CI(1, 1)$

- ▣ **Variabile:** Sunt $I(1)$ (au rădăcini unitare) \Rightarrow combinația liniară este $I(0)$
- ▣ **Vectorul de cointegrare:** $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)'$ \Rightarrow definește echilibrul pe termen lung

Observație

- ▣ **Unicitate:** Vectorul de cointegrare este unic doar până la înmulțire scalară. Se normalizează:
 $\beta_1 = 1$

Intuiție: tendințe stochastice comune

De ce apare cointegrarea?

- ▣ **Tendințe stochastice comune:** Variabilele cointegrate împart un trend comun
 - ▶ $Y_{1t} = \gamma_1 \tau_t + S_{1t}, \quad Y_{2t} = \gamma_2 \tau_t + S_{2t}$
 - ▶ τ_t este un mers aleatoriu comun și S_{it} sunt componente staționare

Combinăția liniară elimină tendința

- ▣ $\gamma_2 Y_{1t} - \gamma_1 Y_{2t} = \gamma_2 S_{1t} - \gamma_1 S_{2t} \sim I(0)$

Interpretare economică

- ▣ Cointegrarea reprezintă o **relație de echilibru pe termen lung**
 - ▶ Variabilele pot devia pe termen scurt
 - ▶ Dar sunt “trase înapoi” spre echilibru în timp
- ▣ Vectorul de cointegrare definește echilibrul

Rangul de cointegrare

Câte relații de cointegrare?

- **Condiție:** Pentru k variabile $I(1) \Rightarrow$ maximum $r = k - 1$ relații de cointegrare
- **Cazuri posibile:**
 - ▶ $r = 0$: Nu există cointegrare (variabilele divergează)
 - ▶ $r = k$: Toate variabilele sunt $I(0)$ (contradicție)

Exemplu: 3 variabile

- **Rangul de cointegrare:**
 - ▶ $r = 0$: Nu există cointegrare
 - ▶ $r = 1$: O relație de cointegrare
 - ▶ $r = 2$: Două relații de cointegrare (doar 1 tendință comună)

Observație

- **Relația:** Numărul de tendințe stochastice comune $= k - r$

Metoda în doi pași Engle-Granger

Pasul 1: Estimarea regresiei de cointegrare

- ▣ **Regresia OLS** (Ordinary Least Squares — Metoda Celor Mai Mici Pătrate): $Y_t = \alpha + \beta X_t + e_t$
- ▣ **Reziduuri:** $\hat{e}_t = Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_t$

Pasul 2: Testarea staționarității reziduurilor

- ▣ **Testul ADF** (Augmented Dickey-Fuller): $\Delta \hat{e}_t = \rho \hat{e}_{t-1} + \sum_{j=1}^p \gamma_j \Delta \hat{e}_{t-j} + v_t$
- ▣ **Ipoteze:**
 - ▶ $H_0: \rho = 0$ (rădăcină unitară \Rightarrow nu există cointegrare)
 - ▶ $H_1: \rho < 0$ (staționare \Rightarrow există cointegrare)

Important

- ▣ Folosiți **valorile critice Engle-Granger**, nu cele ADF standard! (mai negative deoarece reziduurile sunt estimate)

Valorile critice Engle-Granger

Valori critice pentru testul de cointegrare

Număr de Variabile	1%	5%	10%
2	-3.90	-3.34	-3.04
3	-4.29	-3.74	-3.45
4	-4.64	-4.10	-3.81
5	-4.96	-4.42	-4.13

- ▣ **Sursa:** Bazat pe estimările MacKinnon (1991), $T = 100$

Limitările metodei Engle-Granger

- ▣ **Un singur vector:** Testează doar pentru o singură relație de cointegrare
 - ▶ Rezultatele depind de variabila aleasă ca dependentă
- ▣ **Eșantioane mici:** Bias pentru vectorul de cointegrare estimat
 - ▶ Nu se pot testa ipoteze asupra vectorului de cointegrare

Portret de cercetător: Søren Johansen



*1939

 Wikipedia

Biografie

- Statistician și econometrist danez, Profesor Emerit la Universitatea din Copenhaga
- Cunoscut pentru abordarea matematică riguroasă a econometriei
- Membru al Econometric Society; numeroase distincții în știința statistică

Contribuții principale

- **Testul de cointegrare Johansen** (1988, 1991) — maxima verosimilitate pentru vectori multipli de cointegrare
- **Statisticile trace și eigenvalue maxim** pentru rangul de cointegrare
- **Estimarea VECM** — legătura între cointegrare și modele cu corecție a erorilor
- Cadrul standard pentru analiza multivariată a cointegrării

Testul de cointegrare Johansen

Avantaje față de Engle-Granger

- ▣ **Vectori multipli:** Testează pentru multiple relații de cointegrare
 - ▶ Permite testarea restricțiilor asupra vectorilor de cointegrare
- ▣ **Estimare MLE** (Maximum Likelihood Estimation — Estimare prin Maxima Verosimilitate): Mai eficientă
 - ▶ Nu necesită alegerea unei variabile dependente

Punct de plecare: VAR (Vector Autoregression) în niveluri

$$\square Y_t = c + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \cdots + A_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Următorul pas

- ▣ **Transformare:** Rescriem în forma VECM

Derivare: De la VAR la VECM

Punct de plecare: VAR(p) în niveluri

$$\square Y_t = A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \cdots + A_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Pasul 1: Scădem Y_{t-1} din ambii membri

\square Transformare:

$$\blacktriangleright Y_t - Y_{t-1} = A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \cdots + A_p Y_{t-p} - Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\blacktriangleright \Delta Y_t = (A_1 - I) Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \cdots + A_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Obiectiv

\square Rescriem astfel încât toți termenii să fie fie în **niveluri** (Y_{t-1}), fie în **diferențe** (ΔY_{t-j})

Derivare: De la VAR la VECM (cont.)

Pasul 2: Adunăm și scădem termeni strategici

- ▣ **Manipulare:** Adunăm și scădem $A_2 Y_{t-1}$
- ▣ **Rezultat:** $\Delta Y_t = (A_1 + A_2 - I)Y_{t-1} - A_2 \Delta Y_{t-1} + A_3 Y_{t-3} + \dots + \epsilon_t$
- ▣ **Procedură:** Continuăm cu $A_3 Y_{t-1}$, etc.

Pasul 3: Forma generală VECM

- ▣ **Rezultat:** $\Delta Y_t = \Pi Y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta Y_{t-j} + \epsilon_t$

Matricele principale

- ▣ **Impact termen lung:**

$$\Pi = \sum_{i=1}^p A_i - I$$

- ▣ **Dinamică termen scurt:**

$$\Gamma_j = - \sum_{i=j+1}^p A_i, \quad j = 1, \dots, p-1$$

Derivare: Verificare cu VAR(2)

Exemplu: VAR(2)

- ▣ **Punct de plecare:** $Y_t = A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$
 - ▶ Scădem Y_{t-1} : $\Delta Y_t = (A_1 - I)Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$
 - ▶ Adunăm și scădem $A_2 Y_{t-1}$: $\Delta Y_t = (A_1 + A_2 - I)Y_{t-1} + A_2(Y_{t-2} - Y_{t-1}) + \varepsilon_t$
- ▣ **Rezultat VECM:**
 - ▶ $\Delta Y_t = \underbrace{(A_1 + A_2 - I)}_{\Pi} Y_{t-1} - \underbrace{A_2}_{\Gamma_1} \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$

Verificare

- ▣ **VAR(2):** $\Pi = A_1 + A_2 - I$ și $\Gamma_1 = -A_2$
 - ▶ Folosind formula: $\Gamma_1 = -\sum_{i=2}^2 A_i = -A_2$ ✓

Reprezentarea VECM

Modelul vectorial de corecție a erorilor

▣ Ecuația VECM:

$$\blacktriangleright \Delta Y_t = c + \Pi Y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t$$

▣ Componente:

- $\blacktriangleright \Pi = A_1 + A_2 + \dots + A_p - I$ (matricea impactului pe termen lung)
- $\blacktriangleright \Gamma_j = -(A_{j+1} + \dots + A_p)$ (dinamica pe termen scurt)

Observație: Rangul lui Π

▣ Rangul lui Π determină cointegrarea:

- $\blacktriangleright \text{rank}(\Pi) = 0$: Nu există cointegrare (VAR în diferențe)
- $\blacktriangleright \text{rank}(\Pi) = k$: Toate variabilele sunt $I(0)$ (VAR în niveluri)
- $\blacktriangleright 0 < \text{rank}(\Pi) = r < k$: Cointegrare cu r vectori de cointegrare

Descompunerea lui Π

Când $\text{rank}(\Pi) = r < k$

- ▣ **Descompunere:** $\Pi = \alpha\beta'$
 - ▶ β : matricea $k \times r$ a vectorilor de cointegrare
 - ▶ α : matricea $k \times r$ a coeficienților de ajustare

Interpretare

- ▣ **Termenul de corecție:** $\beta'Y_{t-1}$ = deviații de la echilibrul pe termen lung
- ▣ **Viteza de ajustare:** α = cât de repede se revine la echilibru

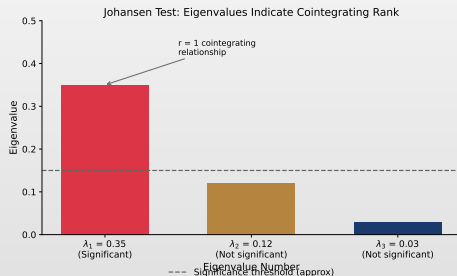
Formula VECM

- ▣ **Ecuția:** $\Delta Y_t = c + \alpha(\beta'Y_{t-1}) + \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t$

Testul Johansen: interpretare vizuală

Interpretare

- ▣ **Valorile proprii:** Cele semnificative (peste pragul critic) indică relații de cointegrare
- ▣ În acest exemplu, doar prima valoare proprie este semnificativă, sugerând $r = 1$



Statisticile testului Johansen

Două statistici de Test

- ▣ **Bază:** Valorile proprii $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \dots > \hat{\lambda}_k$ ale unei anumite matrici
- ▣ **Testul Trace:** Testează $H_0: \text{rang} \leq r$ vs $H_1: \text{rang} > r$
 - ▶ $\lambda_{\text{trace}}(r) = -T \sum_{i=r+1}^k \ln(1 - \hat{\lambda}_i)$
- ▣ **Testul Valorii Proprii Maxime:** Testează $H_0: \text{rang} = r$ vs $H_1: \text{rang} = r + 1$
 - ▶ $\lambda_{\text{max}}(r, r + 1) = -T \ln(1 - \hat{\lambda}_{r+1})$

Observație

- ▣ **Valori critice:** Din Johansen & Juselius (1990)
- ▣ Depind de numărul de variabile k și componentele deterministe (constante, trend)

Procedura de testare

Testare secvențială (testul Trace)

1. Testați $H_0: r = 0$ vs $H_1: r > 0$
 - ▶ Dacă nu se respinge: Nu există cointegrare. Stop.
 - ▶ Dacă se respinge: Cel puțin un vector de cointegrare. Continuăm.
2. Testați $H_0: r \leq 1$ vs $H_1: r > 1$
 - ▶ Dacă nu se respinge: $r = 1$. Stop.
 - ▶ Dacă se respinge: Cel puțin doi vectori de cointegrare. Continuăm.
3. Continuăm până când H_0 nu se respinge...

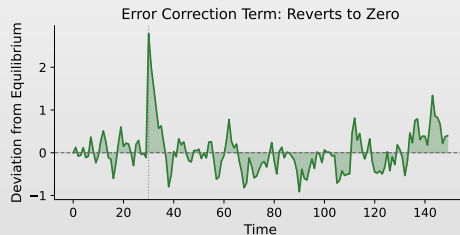
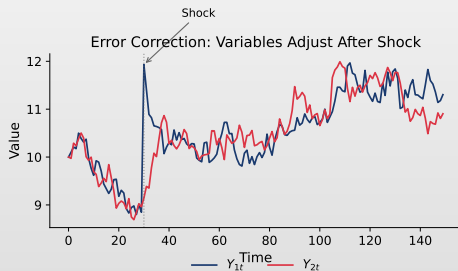
Componentele deterministe

- ☐ **Alegere:** Specificația trebuie aleasă cu atenție
 - ▶ Fără constantă, fără trend (rar utilizat)
 - ▶ Constantă doar în relația de cointegrare
 - ▶ Constantă în ambele (cel mai comun)
 - ▶ Constantă + trend în relația de cointegrare
 - ▶ Constantă + trend în ambele

Mecanismul de corecție a erorilor: vizualizare

Interpretare

- ▣ **Corecția erorilor:** Când seriile deviază de la echilibru (zonele umbrite), mecanismul de ajustare le trage înapoi
- ▣ Deviațiile pozitive duc la ajustare în jos, deviațiile negative duc la ajustare în sus



Structura VECM

Specificația completă VECM

- Pentru $k = 2$ variabile cu $r = 1$ relație de cointegrare:

$$\Delta Y_{1t} = c_1 + \alpha_1(Y_{1,t-1} - \beta Y_{2,t-1}) + \gamma_{11}\Delta Y_{1,t-1} + \gamma_{12}\Delta Y_{2,t-1} + \varepsilon_{1t}$$

$$\Delta Y_{2t} = c_2 + \alpha_2(Y_{1,t-1} - \beta Y_{2,t-1}) + \gamma_{21}\Delta Y_{1,t-1} + \gamma_{22}\Delta Y_{2,t-1} + \varepsilon_{2t}$$

Componente

- **Corecția erorilor:** $(Y_{1,t-1} - \beta Y_{2,t-1}) =$ deviație de la echilibru
 - ▶ $\alpha_1, \alpha_2 =$ viteze de ajustare (ar trebui să aibă semne opuse)
- **Dinamica pe termen scurt:** $\gamma_{ij} =$ coeficienți lag-uri diferențiate
 - ▶ $\varepsilon_{it} =$ inovații

Interpretarea coeficienților de ajustare

Coeficienții α

- ▣ **Relația de echilibru:** $Y_1 - \beta Y_2 = 0$
 - ▶ $\alpha_1 < 0$: Y_1 se ajustează în jos când este deasupra echilibrului
 - ▶ $\alpha_2 > 0$: Y_2 se ajustează în sus când Y_1 este deasupra echilibrului

Exogenitate slabă

- ▣ Dacă $\alpha_i = 0$, variabila Y_i **nu** răspunde la dezechilibru
 - ▶ Y_i este **slab exogenă** pentru parametrii pe termen lung
 - ▶ Cealaltă variabilă face toată ajustarea
- ▣ Poate simplifica estimarea (abordare cu o singură ecuație)

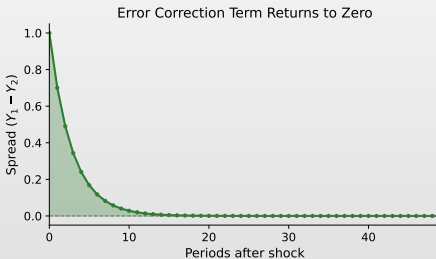
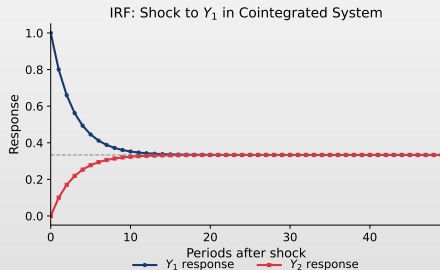
Testare

- ▣ **Exogenitate slabă:** $H_0 : \alpha_i = 0$ folosind testul raportului de verosimilitate

Funcțiile IRF (Impulse Response Functions) ale VECM

Interpretare

- ▣ **Efecte permanente:** Într-un sistem cointegrat, șocurile au efecte permanente asupra nivelurilor
- ▣ Sistemul revine la echilibru \Rightarrow converg către o nouă valoare pe termen lung



VECM vs VAR în diferențe

Când variabilele sunt cointegrate

	VAR în Diferențe	VECM
Info pe termen lung	Pierdută	Păstrată
Dinamică pe termen scurt	Da	Da
Corecție a erorilor	Nu	Da
Proгноză	Slabă (termen lung)	Mai bună
Interpretare IRF	Doar termen scurt	Ambele

Teorema reprezentării Granger

- ▣ **Implicație:** Dacă variabilele sunt cointegrate, trebuie să existe o reprezentare de corecție a erorilor
- ▣ Ignorarea cointegrării = specificare greșită a modelului!

Flux de lucru practic

Procedură pas cu pas

1. **Teste de Rădăcină Unitară:** Verificați că toate variabilele sunt $I(1)$
 - ▶ ADF, KPSS (Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin) pe niveluri și prime diferențe
2. **Selectarea numărului de lag-uri:** alegeți p pentru VAR în niveluri
 - ▶ Folosiți AIC (Akaike), BIC (Bayesian Information Criterion) sau teste LR (Likelihood Ratio) secvențiale
3. **Testul de Cointegrare:** Teste trace/valoare proprie maximă Johansen
 - ▶ Determinați rangul de cointegrare r
4. **Estimați VECM:** Dacă $0 < r < k$
 - ▶ Estimați α , β , Γ_j
5. **Diagnostic:** Verificați reziduurile pentru autocorelație, normalitate
6. **Analiză:** IRF, FEVD (Forecast Error Variance Decomposition), teste de ipoteze

Capcane frecvente

Lucruri de care trebuie să fiți atenți

- ▣ **Rupturi structurale:** Pot cauza rădăcini unitare sau cointegrare false
- ▣ **Procese aproape de rădăcină unitară:** Testele au putere scăzută
- ▣ **Selectarea lag-urilor:**
 - ▶ **Prea multe lag-uri:** Supraparametrizare, pierdere de eficiență
 - ▶ **Prea puține lag-uri:** Autocorelație reziduală, estimări distorsionate
- ▣ **Specificație deterministă greșită:** Afectează valorile critice
- ▣ **Eșantioane mici:** Testul Johansen supradimensionat în eşantioane mici

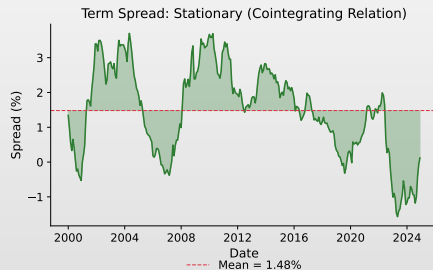
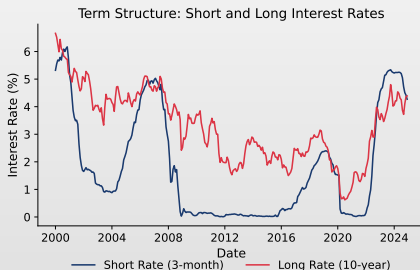
Recomandare

- ▣ **Verificați întotdeauna:**
 - ▶ Diagnosticale reziduale (testul Portmanteau, normalitatea)
 - ▶ Stabilitatea relației de cointegrare estimate în timp
 - ▶ Sensibilitatea la lungimea lag-urilor și specificația deterministă

Exemplu 1: structura la termen a ratelor dobânzii

Ipoteza aşteptărilor

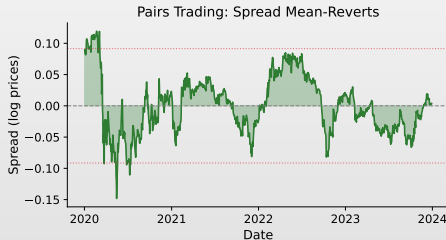
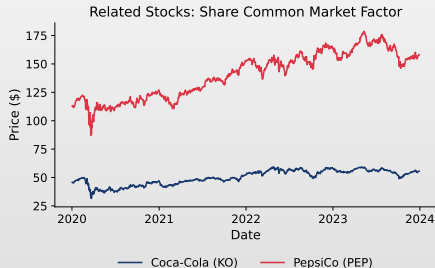
- **Concluzie:** Ratele pe termen scurt şi lung împart o tendinţă comună
- Spread-ul (prima de termen) este staţionar \Rightarrow dovadă de cointegrare!



Exemplu 2: pairs trading în finanțe

Strategie

- ▣ **Pairs trading:** Găsiți perechi de acțiuni cointegrate (ex., Coca-Cola & Pepsi)
- ▣ Când spread-ul deviază de la medie, tranzacționați așteptând revenirea la medie



Ratele dobânzii: teoria economică

Ipoteza așteptărilor în structura la termen

- **Formula:** Rata pe termen lung ca medie a ratelor viitoare așteptate
 - ▶ $R_t^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E_t[r_{t+i}] + \text{prima de termen}$
- **Implicație:** Dacă prima de termen este constantă, r_t și R_t sunt cointegrate
 - ▶ Vectorul de cointegrare: $(1, -1)$

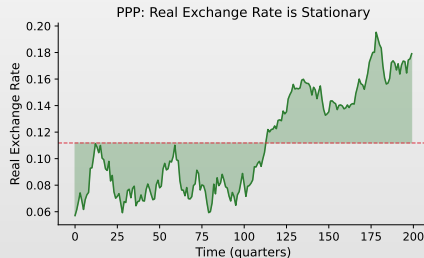
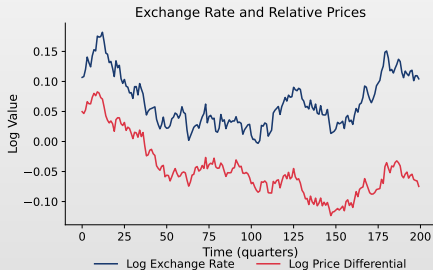
Rezultate empirice

- **Teste de rădăcină unitară:** Ambele rate sunt $I(1)$
 - ▶ O relație de cointegrare (testul Johansen)
- **Vectorul de cointegrare:** $\approx (1, -1)$, spread-ul este staționar
 - ▶ Rata pe termen scurt se ajustează la dezechilibru (rata pe termen lung este slab exogenă)

Exemplu 3: paritatea puterii de cumpărare (PPP)

Teoria PPP

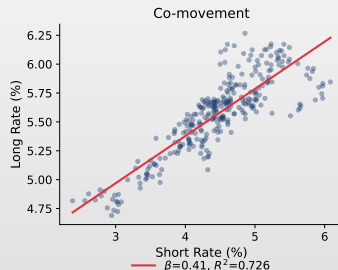
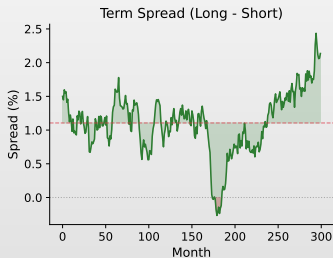
- ▣ **Formula:** $e_t = p_t - p_t^*$ (cursul de schimb logaritmic = diferențialul de preț)
- ▣ Cursul de schimb real ar trebui să fie staționar pe termen lung



Studiu de caz: Cointegrarea ratelor dobânzii

Date

- **Rate dobândă SUA:** Pe termen lung (10 ani) și scurt (3 luni)
- **Observație:** Ambele serii sunt $I(1)$, dar spread-ul pare staționar

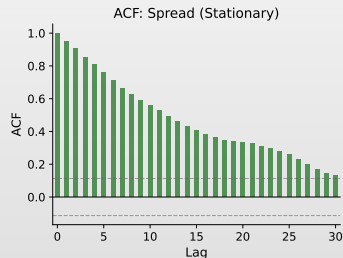
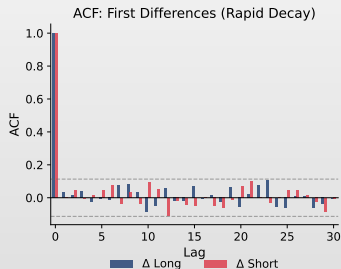
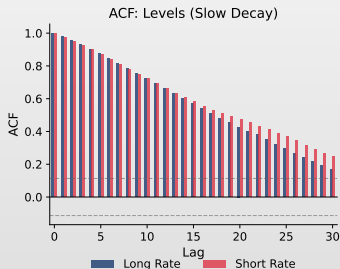


TSA_ch7_case_raw_data

Pasul 1: Teste de rădăcină unitară

Rezultate

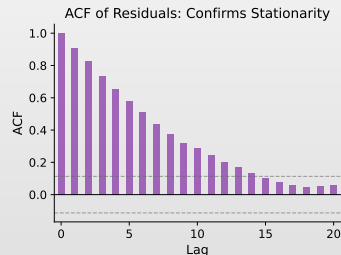
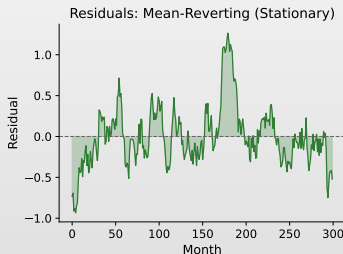
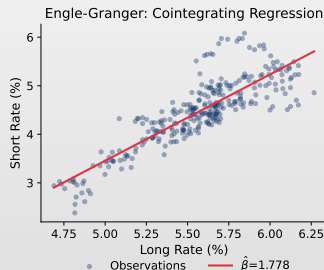
- ACF (Autocorrelation Function) **niveluri**: Descreștere lentă \Rightarrow nestaționaritate; după diferențiere: scădere rapidă $\Rightarrow I(1)$
- ACF **spread**: Staționar \Rightarrow posibilă cointegrare!



Pasul 2: Testul Engle-Granger de cointegrare

Rezultate

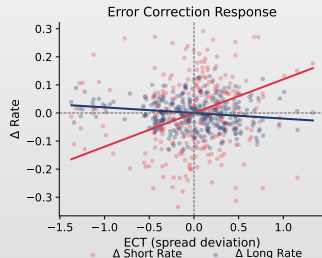
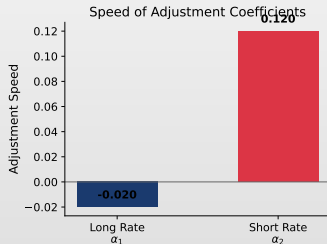
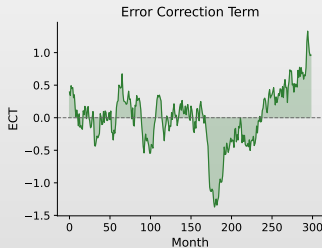
- ▣ **Regresie:** Rata pe termen scurt = $\alpha + \beta \times \text{Rata pe termen lung} + \varepsilon_t$
- ▣ **Concluzie:** Seriile sunt cointegrate
- ▣ Există relație de echilibru pe termen lung



Pasul 3: Estimare VECM

Model și ecuații stilizate

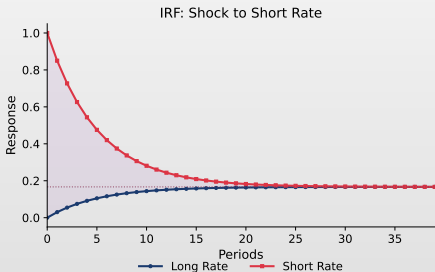
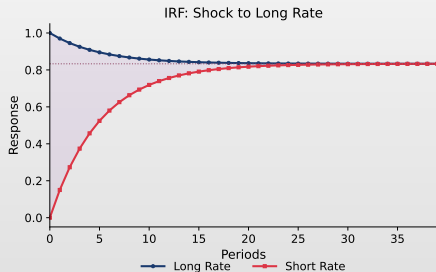
- ▣ **VECM(2)**: Rang de cointegrare = 1, vector $\approx (1, -1)$
- ▣ $\Delta r_t = 0.02 - 0.15(r_{t-1} - R_{t-1}) + \text{lag-uri} + \varepsilon_{1t}$; $\Delta R_t = 0.01 - 0.02(r_{t-1} - R_{t-1}) + \text{lag-uri} + \varepsilon_{2t}$
- ▣ **Interpretare**: Rata pe termen scurt se ajustează rapid ($\alpha_1 = -0.15$); rata pe termen lung aproape slab exogenă ($\alpha_2 \approx 0$)



Pasul 4: Funcții de răspuns la impuls

Interpretare

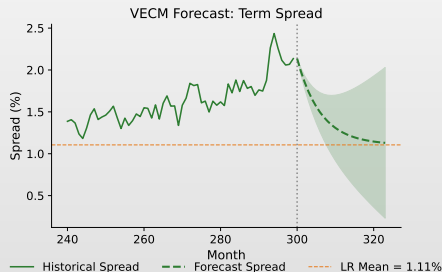
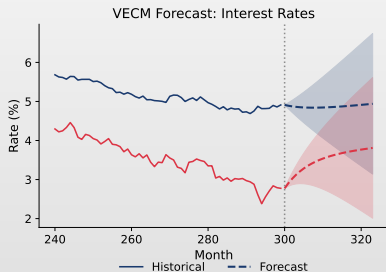
- ▣ **Efecte permanente:** Șocuri în rata pe termen lung afectează persistent ambele rate
- ▣ **Cointegrare:** Efectele nu converg la zero \Rightarrow caracteristică a seriilor cointegrate



Pasul 5: Prognoza VECM

Prognoză

- Orizont: 24 de luni pentru ambele rate simultan
- Avantaj: VECM menține relația de cointegrare în prognoză



Exercițiu AI: Gândire critică

Prompt de testat în ChatGPT / Claude / Copilot

"Folosind yfinance, descarcă prețurile zilnice de închidere ale aurului ($GC=F$) și argintului ($SI=F$) din 2019-01-01 până în 2024-12-31 (aprox. 1.500 observații). Testează dacă fiecare serie este $I(1)$, testează cointegrarea cu Engle-Granger și Johansen, și estimează un model VECM. Analizează parametrii de viteză de ajustare. Vreau cod Python complet."

Exercițiu:

1. Rulați prompt-ul într-un LLM (Large Language Model) la alegere și analizați critic răspunsul.
2. Verifică dacă fiecare serie este $I(1)$ înainte de a testa cointegrarea?
3. Folosește atât Engle-Granger cât și Johansen? Care sunt avantajele fiecăruia?
4. Cum determină rangul de cointegrare? Statistica Trace vs max-eigenvalue?
5. Interpretează corect coeficienții α (de ajustare)?

- ☐ **Atenție:** Codul generat de AI poate rula fără erori și arăta profesional
- ☐ *Asta nu înseamnă că e corect*

Concluzii principale

Concepte principale

- ▣ **Cointegrare:** Variabile $I(1)$ cu combinație liniară staționară (trend stochastic comun)
- ▣ **Regresie falsă:** R^2 ridicat cu variabile $I(1)$ necorelate
- ▣ **Corecție a erorilor:** VECM \Rightarrow VAR cu termeni de corecție pentru sisteme cointegrate

Metode de testare

- ▣ **Engle-Granger:** Simplu, doi pași, un singur vector de cointegrare
- ▣ **Johansen:** Vectori multipli, bazat pe MLE (teste trace + max-eigen)

De reținut

- ▣ **Putere scăzută:** Testele au putere scăzută în eșantioane mici
- ▣ **Teorie:** Teoria economică ar trebui să ghideze specificația
- ▣ **Validare:** Verificați întotdeauna validitatea modelului!

Ce urmează?

Extensii și subiecte conexe

- ▣ **VECM Structural:** Identificarea șocurilor structurale
- ▣ **Cointegrare cu prag:** Ajustare neliniară
- ▣ **Cointegrare de panel:** Secțiuni transversale multiple
- ▣ **Cointegrare fracționară:** Memorie lungă
- ▣ **Cointegrare variabilă în timp:** Schimbări de regim

- ▣ **Întrebări?**

Formule principale – Rezumat

Cointegrare

- ▣ **Definiție:** $Y_t - \beta X_t = u_t \sim I(0)$
- ▣ **Interpretare:** Echilibru pe termen lung

Test Engle-Granger

- ▣ **Pas 1:** $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$
- ▣ **Pas 2:** Test ADF pe \hat{u}_t
- ▣ **Notă:** Valori critice speciale

Rang de cointegrare

- ▣ **Rangul r :** $0 \leq r \leq K - 1$ relații

Model VECM

- ▣ **Ecuatie:** $\Delta Y_t = \Pi Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t$
- ▣ **Factorizare:** $\Pi = \alpha \beta'$

Interpretare α și β

- ▣ β : Vectori de cointegrare
- ▣ α : Viteza de ajustare

Test Johansen

- ▣ **Trace:** $\lambda_{trace} = -T \sum_{i=r+1}^K \ln(1 - \hat{\lambda}_i)$
- ▣ **Max-Eigen:** $\lambda_{max} = -T \ln(1 - \hat{\lambda}_{r+1})$

Întrebarea 1

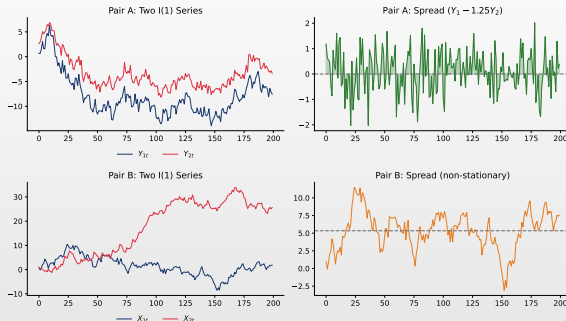
Întrebare

▣ Analizați cele două perechi de serii $I(1)$ de mai jos. Care pereche este cointegrată?

Variante de răspuns

- (A) Perechea A, deoarece seriile au aceeași tendință
- (B) Perechea B, deoarece seriile sunt necorelate
- (C) Perechea A, deoarece spread-ul lor este staționar
- (D) Ambele perechi sunt cointegrate

Întrebarea 1: Răspuns



Răspuns: (C)

- Cointegrare = combinație liniară staționară, nu doar corelație
- Spread-ul perechii B nu este staționar \Rightarrow nu sunt cointegrate

Întrebarea 2

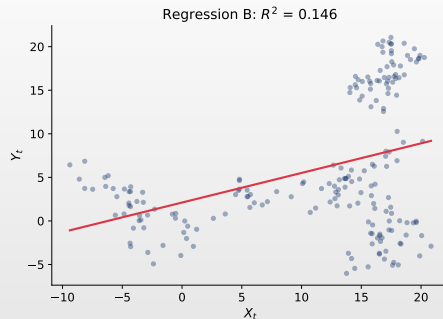
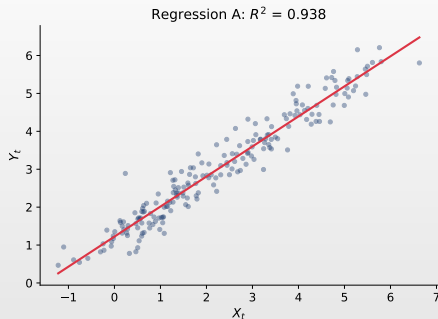
Întrebare

▣ Ambele regresii de mai jos au R^2 ridicat. Cum puteți distinge o regresie falsă de una genuină?

Variante de răspuns

- (A) Nu se poate distinge – ambele au R^2 ridicat
- (B) Testând staționaritatea reziduurilor: reziduuri staționare = cointegrare genuină
- (C) Verificând semnificația coeficientului β
- (D) Comparând valorile lui R^2 : mai mare = relație mai reală

Întrebarea 2: Răspuns



Răspuns: (B)

- ▣ Testul Engle-Granger: dacă reziduurile OLS sunt staționare (ADF), relația este genuină
- ▣ R^2 ridicat NU implică relație reală între variabile $I(1)$!

Întrebarea 3

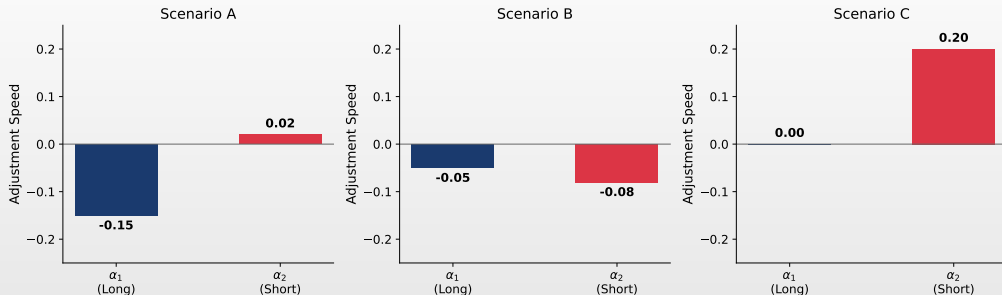
Întrebare

□ În care scenariu rata pe termen lung este slab exogenă (nu se ajustează la dezechilibru)?

Variante de răspuns

- (A) Scenariul A: $\alpha_1 = -0.15$, $\alpha_2 = 0.02$
- (B) Scenariul B: $\alpha_1 = -0.05$, $\alpha_2 = -0.08$
- (C) Scenariul C: $\alpha_1 = 0.00$, $\alpha_2 = 0.20$
- (D) Niciun scenariu – ambele variabile trebuie să se ajusteze

Întrebarea 3: Răspuns



Răspuns: (C)

- ☐ $\alpha_1 = 0$: rata pe termen lung nu răspunde la dezechilibru (slab exogenă)
- ☐ Toată ajustarea este făcută de rata pe termen scurt ($\alpha_2 = 0.20$)

Întrebarea 4

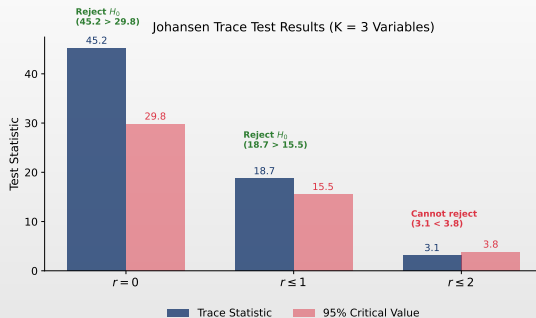
Întrebare

□ Având rezultatele testului Johansen Trace pentru $K = 3$ variabile, care este rangul de cointegrare?

Variante de răspuns

- (A) $r = 0$ (nicio relație de cointegrare)
- (B) $r = 1$ (o relație de cointegrare)
- (C) $r = 2$ (două relații de cointegrare)
- (D) $r = 3$ (sistem complet staționar)

Întrebarea 4: Răspuns



Răspuns: (C)

- ☐ Respingem $H_0 : r = 0$ ($45.2 > 29.8$) și $H_0 : r \leq 1$ ($18.7 > 15.5$)
- ☐ Nu respingem $H_0 : r \leq 2$ ($3.1 < 3.8$) \Rightarrow rangul este $r = 2$

Întrebarea 5

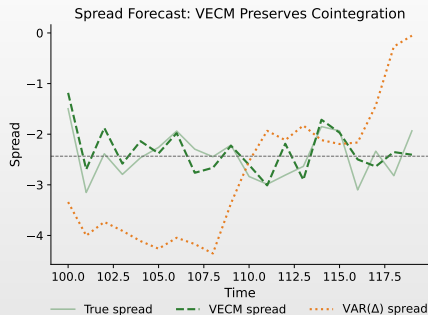
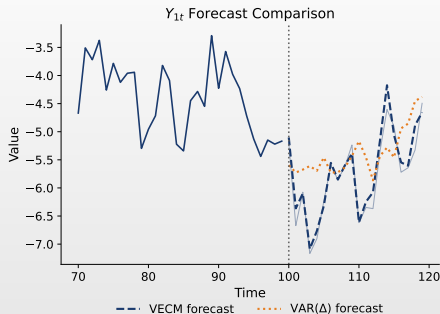
Întrebare

- ☐ Care este avantajul principal al VECM față de VAR în diferențe pentru prognoză?

Variante de răspuns

- (A) VECM are mai puțini parametri de estimat
- (B) VECM menține relația de cointegrare în prognoze pe termen lung
- (C) VAR în diferențe nu poate produce prognoze
- (D) Nu există avantaj – ambele sunt echivalente

Întrebarea 5: Răspuns



Răspuns: (B)

- ☐ VAR(Δ) pierde relația de nivel \Rightarrow spread-ul diverge
- ☐ VECM încorporează echilibrul pe termen lung \Rightarrow prognoza rămâne coerentă

Bibliografie I

Lucrări fundamentale cointegrare

- Engle, R.F., & Granger, C.W.J. (1987). Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing, *Econometrica*, 55(2), 251–276.
- Johansen, S. (1988). Statistical Analysis of Cointegration Vectors, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12(2-3), 231–254.
- Johansen, S. (1991). Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models, *Econometrica*, 59(6), 1551–1580.

Manuale VECM și cointegrare

- Juselius, K. (2006). *The Cointegrated VAR Model: Methodology and Applications*, Oxford University Press.
- Lütkepohl, H. (2005). *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer.

Bibliografie II

Teste și aplicații

- ▣ Phillips, P.C.B., & Ouliaris, S. (1990). Asymptotic Properties of Residual Based Tests for Cointegration, *Econometrica*, 58(1), 165–193.
- ▣ Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- ▣ Banerjee, A., Dolado, J.J., Galbraith, J.W., & Hendry, D.F. (1993). *Co-Integration, Error-Correction, and the Econometric Analysis of Non-Stationary Data*, Oxford University Press.

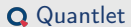
Resurse online și cod

- ▣ **Quantlet:** <https://quantlet.com> – Platformă de cod pentru metode cantitative
- ▣ **Quantinar:** <https://quantinar.com> – Platformă de învățare pentru metode cantitative
- ▣ **GitHub TSA:** https://github.com/QuantLet/TSA/tree/main/TSA_ch7 – Cod Python pentru acest capitol

Vă Mulțumim!

Întrebări?

Materialele cursului sunt disponibile la: <https://danpele.github.io/Time-Series-Analysis/>



Quantlet



Quantinar