Analiza și Prognoza seriilor de timp

Capitolul 5: Modele ARCH/GARCH pentru Volatilitate

Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Structura cursului

Obiective de învățare

La finalul acestui capitol, veți fi capabili să:

1. Înțelegeți **volatility clustering** și faptele stilizate ale randamentelor financiare
2. Estimați și interpretați modele **ARCH** și **GARCH**
3. Aplicați modele asimetrice (**EGARCH**, **GJR-GARCH**) pentru efectul de levier
4. Efectuați validarea și selectarea modelelor
5. Prognozați volatilitatea și calculați **Value at Risk (VaR)**

Competențe Practice

- Implementare Python cu pachetul `arch`
  - Estimare, prognoză și diagnostic automat
- Interpretarea parametrilor și a persistenței volatilității
- Calculul VaR pentru managementul riscului
  - Backtesting și validarea prognozelor

De ce modelăm volatilitatea?

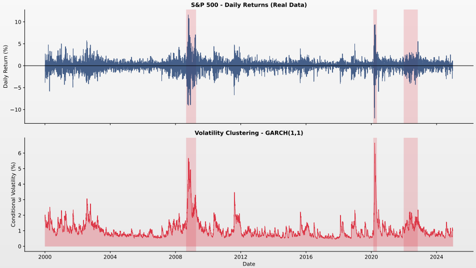
Observații Empirice în Seriile Financiare

- Randamentele prezintă **volatility clustering**
  - Perioadele de volatilitate ridicată sunt urmate de perioade similare
- Distribuția randamentelor are **cozi groase** (leptokurtosis)
  - Kurtosis > 3, mai multe valori extreme decât normala
- Corelația randamentelor ≈ 0, dar corelația r_t^2 este semnificativă
- Volatilitatea răspunde **asimetric** la șocuri (leverage effect)

Limitarea modelelor ARIMA

- Modelele ARIMA presupun **varianță constantă** (homoscedasticitate)
  - Nu pot modela schimbările dinamice ale volatilității
- Soluția: modele ARCH/GARCH pentru varianța condiționată

Clustering-ul volatilității

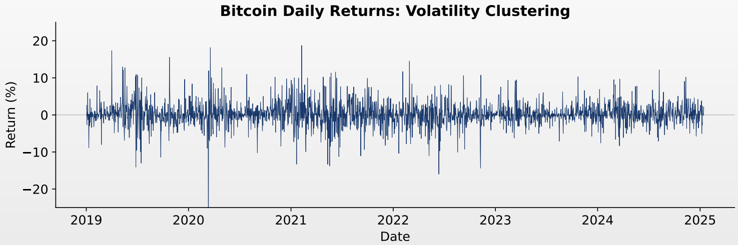


Observații

- Perioadele de volatilitate mare sunt urmate de perioade similare
- Perioadele de calm sunt urmate de perioade de calm
- Varianța condiționată este **predictibilă**

TSA_ch5_clustering

Exemplu: Bitcoin — volatility clustering

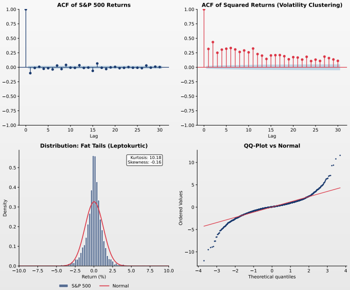


Observații

- Randamente zilnice Bitcoin (2019–2025): volatility clustering extrem de pronunțat
  - Randamente de $\pm 20\%$ în perioadele de criză (COVID, Terra/Luna)
- Volatilitatea Bitcoin este semnificativ mai mare decât a activelor tradiționale
  - α tipic $\approx$ 0.10–0.20 (reacție rapidă la news)

TSA_ch5_btc_returns

Fapte stilizate ale randamentelor financiare

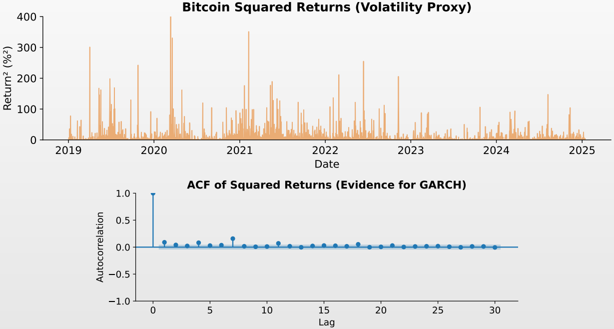


Proprietăți Observate

- **Absența autocorelației** în randamente, dar **autocorelație semnificativă** în r_t^2
- **Cozi groase** (kurtosis > 3), **leverage effect**, **volatility clustering**

TSA_ch5_stylized

Exemplu: Bitcoin — evidență pentru efecte ARCH



Interpretare

- **Sus**: r_t^2 (proxy pentru volatilitate) — vârfurile coincid cu crizele de piață
- **Jos**: ACF(r_t^2) semnificativ $\Rightarrow$ efecte ARCH prezente, varianță predictibilă

TSA_ch5_btc_arch

Heteroscedasticitate condiționată

Definiție 1 (Varianță Condiționată)

Fie $\{r_t\}$ o serie de randamente. **Varianța condiționată** la momentul t este:

$$\sigma_t^2 = \mathrm{Var}(r_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}[(r_t - \mu_t)^2|\mathcal{F}_{t-1}]$$

unde $\mathcal{F}_{t-1}$ reprezintă informația disponibilă până la momentul $t-1$.

Modelul General

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \text{i.i.d.}(0,1)$$

- μ_t = media condiționată (modelată prin ARMA)
- σ_t^2 = varianța condiționată (modelată prin GARCH)
- z_t = inovații standardizate

Modelul ARCH(q) — Engle (1982)

Definiție 2 (ARCH(q))

Modelul **Autoregressive Conditional Heteroskedasticity** de ordin q:

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \text{i.i.d.}(0,1), \quad \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

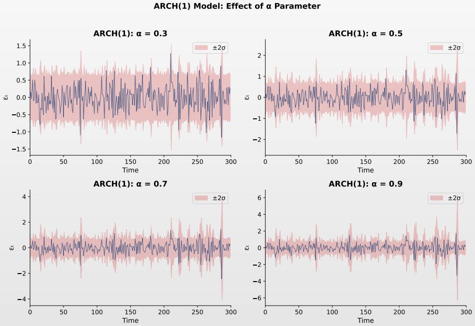
Restricții pentru Staționaritate

- $\omega > 0$ — nivel de bază pozitiv
- $\alpha_i \geq 0$ pentru $i = 1, \ldots, q$ — non-negativitate
- $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i < 1$ — staționaritate
  - Asigură existența varianței necondiționate finite

Observație 1

Robert Engle a primit **Premiul Nobel pentru Economie** în 2003 pentru dezvoltarea modelului ARCH!

Simulare ARCH(1): Efectul parametrului α



Interpretare

- Cu cât α este mai mare, cu atât volatilitatea reacționează mai puternic la șocuri recente

TSA_ch5_arch_sim

Proprietăți ale modelului ARCH(1)

ARCH(1): $\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$

- **Varianța necondiționată**: $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \dfrac{\omega}{1-\alpha_1}$ (dacă $\alpha_1 < 1$)
- **Kurtosis**: $\kappa = 3 \cdot \dfrac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2}$ (dacă $\alpha_1^2 < 1/3$)
- Kurtosis > 3 pentru $\alpha_1 > 0 \Rightarrow$ **cozi groase**!

Exemplu Numeric

Dacă $\omega = 0.0001$ și $\alpha_1 = 0.3$:

- Varianța necondiționată: $\sigma^2 = \frac{0.0001}{1-0.3} = 0.000143$
- Kurtosis: $\kappa = 3 \cdot \frac{1-0.09}{1-0.27} = 3.74 > 3$

Demonstrație: varianța necondiționată ARCH(1)

Obiectiv

Demonstrăm că pentru ARCH(1): $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2$, varianța necondiționată este $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \frac{\omega}{1-\alpha}$.

Demonstrație

Pas 1: Aplicăm legea speranțelor iterate: $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varepsilon_t^2|\mathcal{F}_{t-1}]] = \mathbb{E}[\sigma_t^2]$
Pas 2: Înlocuim ecuația ARCH(1): $\mathbb{E}[\sigma_t^2] = \mathbb{E}[\omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2] = \omega + \alpha\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2]$
Pas 3: La staționaritate $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] = \bar{\sigma}^2$:

$$\bar{\sigma}^2 = \omega + \alpha\bar{\sigma}^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{\sigma}^2(1-\alpha) = \omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha}}$$

Condiție de Staționaritate

- Soluția există și este pozitivă doar dacă $\alpha < 1$

Demonstrație: kurtosis ARCH(1)

Obiectiv

Arătăm că procesul ARCH(1) generează cozi groase: $\kappa = 3 \cdot \frac{1-\alpha^2}{1-3\alpha^2} > 3$.

Demonstrație

Pas 1: Avem $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ cu $z_t \sim N(0,1)$ independent de σ_t. $\mathbb{E}[\varepsilon_t^4] = \mathbb{E}[\sigma_t^4 z_t^4] = \mathbb{E}[\sigma_t^4] \cdot \mathbb{E}[z_t^4] = 3\mathbb{E}[\sigma_t^4]$
Pas 2: Pentru ARCH(1), $\sigma_t^4 = (\omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2)^2$. La staționaritate: $\mathbb{E}[\sigma_t^4] = \omega^2 + 2\omega\alpha\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] + \alpha^2\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^4]$
Pas 3: Rezolvând sistemul: $\kappa = \frac{\mathbb{E}[\varepsilon_t^4]}{(\mathbb{E}[\varepsilon_t^2])^2} = 3 \cdot \frac{1-\alpha^2}{1-3\alpha^2}$

Implicație

Pentru $\alpha = 0.3$: $\kappa = 3 \cdot \frac{0.91}{0.73} = 3.74 > 3$ (cozi mai groase decât normala!)

Demonstrație: varianța necondiționată GARCH(1,1)

Obiectiv

Demonstrăm că pentru GARCH(1,1): $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$, varianța necondiționată este $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$.

Demonstrație

Pas 1: Aplicăm operatorul de speranță: $\mathbb{E}[\sigma_t^2] = \omega + \alpha\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] + \beta\mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2]$
Pas 2: Folosim $\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] = \mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2]$ (legea speranțelor iterate): $\mathbb{E}[\sigma_t^2] = \omega + (\alpha+\beta)\mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2]$
Pas 3: La staționaritate $\mathbb{E}[\sigma_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2] = \bar{\sigma}^2$:

$$\bar{\sigma}^2 = \omega + (\alpha+\beta)\bar{\sigma}^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}}$$

Condiție de Staționaritate

- Soluția există doar dacă $\alpha + \beta < 1$
- Când $\alpha + \beta = 1$ (IGARCH), varianța este infinită

Demonstrație: Reprezentarea ARMA pentru ε_t^2

Obiectiv

Arătăm că un proces GARCH(1,1) implică un proces ARMA(1,1) pentru ε_t^2.

Demonstrație

Pas 1: Definim "șocul varianței": $\nu_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$
Pas 2: ν_t este diferența de martingal: $\mathbb{E}[\nu_t|\mathcal{F}_{t-1}] = 0$
Pas 3: Din ecuația GARCH, înlocuind $\sigma_{t-1}^2 = \varepsilon_{t-1}^2 - \nu_{t-1}$:

$$\varepsilon_t^2 = \omega + (\alpha + \beta)\varepsilon_{t-1}^2 + \nu_t - \beta\nu_{t-1}$$

Rezultat

Aceasta este o ecuație **ARMA(1,1)** cu coeficient AR $= \alpha + \beta$ și coeficient MA $= -\beta$!

Demonstrație: persistența volatilității și half-life

Prognoză multi-pas GARCH(1,1)

$\mathbb{E}_t[\sigma^2_{t+h}] = \bar{\sigma}^2 + (\alpha + \beta)^{h-1}(\sigma^2_{t+1} - \bar{\sigma}^2)$

Demonstrație

Pas 1: Notăm $\phi = \alpha + \beta$ și $q_t = \sigma^2_t - \bar{\sigma}^2$ (deviația de la medie).
Pas 2: Din ecuația GARCH: $\mathbb{E}_t[q_{t+1}] = \phi \cdot q_t$, deci $\mathbb{E}_t[q_{t+h}] = \phi^h \cdot q_t$.
Pas 3: **Half-life** = timpul până când deviația se înjumătățește: $\phi^{HL} = 0.5 \Rightarrow HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\phi)} = \frac{-0.693}{\ln(\alpha+\beta)}$

Exemplu: S&P 500

Cu $\alpha + \beta = 0.988$: $HL = \frac{-0.693}{-0.012} \approx$ **58 zile** (șocurile persistă 3 luni!)

Testarea efectelor ARCH

Testul Engle pentru Efecte ARCH

1. Estimează modelul pentru medie și obține reziduurile $\hat{\varepsilon}_t$
2. Calculează $\hat{\varepsilon}_t^2$
3. Regresează: $\hat{\varepsilon}_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \cdots + \beta_q \hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + u_t$
4. Calculează statistica $LM = T \cdot R^2 \sim \chi^2(q)$

Ipoteze

- H_0: Nu există efecte ARCH ($\alpha_1 = \cdots = \alpha_q = 0$)
- H_1: Există efecte ARCH (cel puțin un $\alpha_i \neq 0$)

Limitări ale modelului ARCH

Probleme Practice

1. **Ordine mare** — de obicei sunt necesare multe lag-uri (q mare)
   - Exemplu: ARCH(20) pentru date zilnice
2. **Mulți parametri** — dificultăți de estimare
3. **Restricții de non-negativitate** — greu de impus pentru q mare
   - Toți $\alpha_i \geq 0$ trebuie verificați simultan
4. **Nu capturează persistența** — volatilitatea observată este foarte persistentă

Soluția

- **Modelul GARCH** — introduce lag-uri ale varianței condiționate pentru a captura persistența cu mai puțini parametri!

Modelul GARCH(p,q) — Bollerslev (1986)

Definiție 3 (GARCH(p,q))

Modelul **Generalized ARCH**:

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \text{i.i.d.}(0,1), \quad \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

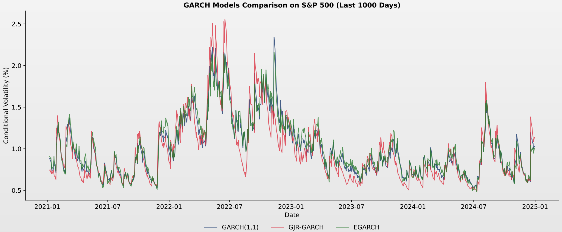
Interpretare

- ω = nivel de bază al volatilității
  - Componentă constantă, independentă de șocuri
- α_i = reacția la șocuri recente (news coefficients)
  - α mare $\Rightarrow$ reacție rapidă la informații noi
- β_j = persistența volatilității (memory)
  - β mare $\Rightarrow$ volatilitatea se disipează lent
- $\alpha + \beta$ = persistența totală (aproape de 1 în practică)

Modelul GARCH(1,1)

Cel Mai Popular Model de Volatilitate

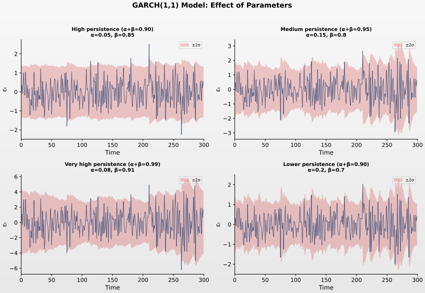
$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$



Restricții și proprietăți

- **Restricții:** $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta < 1$
- **Varianța necondiționată:** $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$
- **Half-life:** $HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha+\beta)}$

Simulare GARCH(1,1): efectul persistenței



Interpretare

- α controlează reacția la șocuri
- β controlează persistența
- Suma $\alpha + \beta$ determină viteza de revenire la medie

TSA_ch5_garch_sim

GARCH(1,1) ca ARMA pentru ε_t^2

Reprezentare ARMA(1,1)

Definim $\nu_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ (șocul varianței). Atunci:

$$\varepsilon_t^2 = \omega + (\alpha + \beta)\varepsilon_{t-1}^2 + \nu_t - \beta\nu_{t-1}$$

- Aceasta este un **ARMA(1,1)** pentru ε_t^2!

Implicații

- ACF al ε_t^2 decade exponențial (ca ARMA)
  - Pătratele randamentelor au memorie lungă
- Persistența este dată de $\alpha + \beta$
- PACF poate ajuta la identificarea ordinului

Estimarea modelelor GARCH

Metoda Verosimilității Maxime (MLE)

Funcția de log-verosimilitate (distribuție normală):

$$\ell(\theta) = -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\ln(\sigma_t^2) + \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2}\right]$$

Distribuții Alternative pentru z_t

- **Student-t**: capturează cozile groase
  - Parametru: grade de libertate ν (tipic 4–8 pentru acțiuni)
- **GED**: flexibilitate pentru kurtosis
  - Generalizare a normalei cu parametru de formă
- **Skewed Student-t**: asimetrie și cozi groase
  - Captează atât asimetria distribuției, cât și cozile groase

Valori tipice pentru GARCH(1,1)

Serie	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{\alpha+\beta}$
S&P 500 zilnic	0.05–0.10	0.85–0.95	0.95–0.99
EUR/USD zilnic	0.03–0.08	0.90–0.95	0.95–0.99
Bitcoin zilnic	0.10–0.20	0.75–0.85	0.90–0.98
Obligațiuni	0.02–0.05	0.90–0.97	0.95–0.99

Observații

- $\alpha + \beta$ aproape de 1 $\Rightarrow$ **volatilitate foarte persistentă**
  - Half-life de ordinul lunilor pentru majoritatea activelor
- α mic, β mare $\Rightarrow$ reacție lentă la șocuri, memorie lungă
- Bitcoin: α mai mare $\Rightarrow$ reacție mai rapidă la news
  - Piață mai tânără, mai sensibilă la informații noi

IGARCH — integrated GARCH

Definiție 4 (IGARCH(1,1))

Când $\alpha + \beta = 1$:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + (1-\alpha)\sigma_{t-1}^2$$

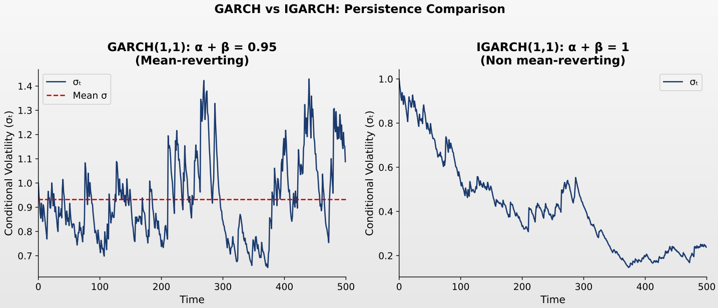
Proprietăți

- Varianța necondiționată nu există (infinită)
- Șocurile au efect **permanent** asupra volatilității
  - Nu există mean reversion în volatilitate
- Folosit pentru serii cu persistență extremă
- Util pentru **RiskMetrics** (J.P. Morgan)
  - Parametri fixați: $\alpha = 0.06$, $\beta = 0.94$

Observație 2

IGARCH este analog cu o rădăcină unitară în varianță!

GARCH vs IGARCH: comparație persistență



Interpretare

- GARCH standard revine la media necondiționată
- IGARCH nu are medie finită — șocurile persistă indefinit

TSA_ch5_igarch

GARCH-in-Mean (GARCH-M) — Engle, Lilien & Robins (1987)

Definiție 5 (GARCH-M)

Volatilitatea intră **direct în ecuația mediei**:

$$r_t = \mu + \delta \cdot g(\sigma_t^2) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

unde $g(\sigma_t^2)$ poate fi σ_t^2, σ_t, sau $\ln(\sigma_t^2)$.

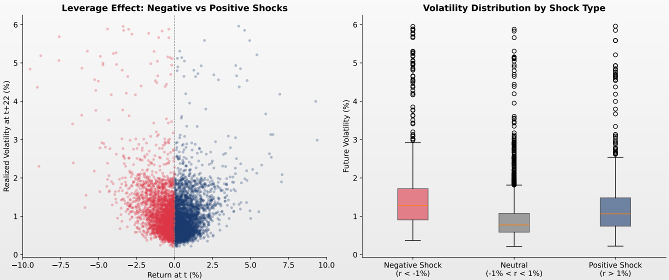
Interpretare economică

- $\delta > 0$: **prima de risc** — randamente mai mari când volatilitatea este ridicată
- Formalizează relația risc-randament din teoria financiară (CAPM, Merton ICAPM)
- Testul $H_0 : \delta = 0$ verifică dacă riscul este compensat

Exemplu tipic: acțiuni

$r_t = 0.02 + \underbrace{0.15}_{\delta} \cdot \sigma_t + \varepsilon_t \quad \Rightarrow$ La $\sigma_t = 2\%$: $\mathbb{E}[r_t] = 0.02 + 0.15 \times 0.02 = 0.023$ (0.3% primă)

Leverage effect



Definiție

- **Leverage effect**: Șocurile negative cresc volatilitatea **mai mult** decât cele pozitive de aceeași magnitudine

Problema GARCH standard

- $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$ — doar ε_{t-1}^2 contează, semnul se pierde!

Modelul EGARCH — Nelson (1991)

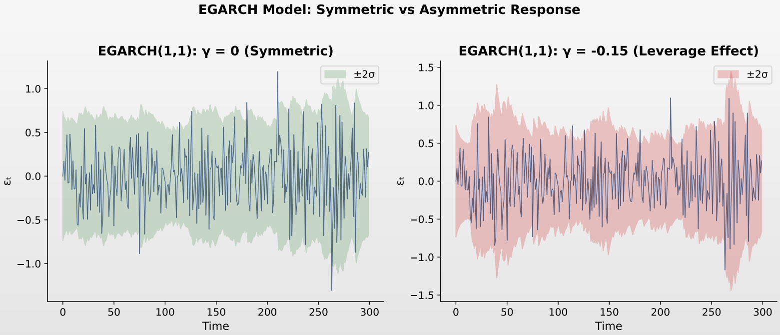
Definiție 6 (EGARCH(1,1))

Exponential GARCH: $\ln(\sigma_t^2) = \omega + \alpha\left(|z_{t-1}| - \mathbb{E}[|z|]\right) + \gamma z_{t-1} + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2)$ unde $z_t = \varepsilon_t/\sigma_t$.

Avantaje EGARCH

- **Nu necesită restricții de non-negativitate**
  - Modelează $\ln(\sigma_t^2)$ care poate fi orice valoare reală
- **Captează leverage effect** prin parametrul γ
  - $\gamma < 0$: șocuri negative $\Rightarrow$ volatilitate mai mare
- **Persistența** este dată de β

Simulare EGARCH: Efect Simetric vs Asimetric

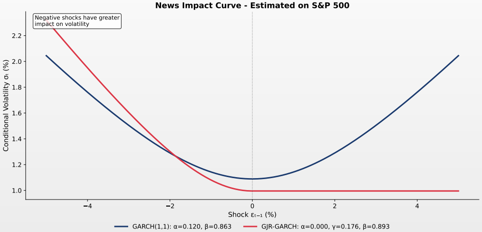


Interpretare

- Când $\gamma < 0$, șocurile negative cresc volatilitatea mai mult decât cele pozitive

TSA_ch5_egarch_sim

News impact curve — EGARCH



Interpretare

- **News Impact Curve**: relația între ε_t și σ^2_{t+1}
- **GARCH**: curba simetrică (parabolă)
  - Șocuri pozitive și negative au același impact
- **EGARCH**: curba asimetrică
  - Șocuri negative au impact mai mare asupra volatilității

TSA_ch5_nic

Modelul GJR-GARCH (TGARCH)

Definiție 7 (GJR-GARCH(1,1))

Glosten, Jagannathan & Runkle (1993): $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma\varepsilon_{t-1}^2 \cdot I_{t-1} + \beta\sigma_{t-1}^2$ unde $I_{t-1} = 1$ dacă $\varepsilon_{t-1} < 0$, altfel 0.

Interpretare

- Șocuri pozitive: impact $= \alpha$; Șocuri negative: impact $= \alpha + \gamma$
- Leverage effect prezent dacă $\gamma > 0$
- **Staționaritate:** $\alpha + \gamma/2 + \beta < 1$

TGARCH — threshold GARCH

Definiție 8 (TGARCH(1,1))

Zakoian (1994) — modelează deviația standard:

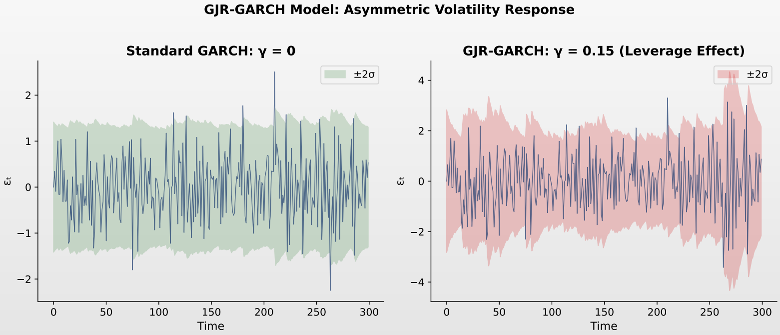
$$\sigma_t = \omega + \alpha^+ \varepsilon_{t-1}^+ + \alpha^- \varepsilon_{t-1}^- + \beta \sigma_{t-1}$$

unde $\varepsilon_t^+ = \max(\varepsilon_t, 0)$ și $\varepsilon_t^- = \max(-\varepsilon_t, 0)$.

Comparație Modele Asimetrice

Model	**Specificație**	**Leverage**
GARCH	σ_t^2	Nu
EGARCH	$\ln(\sigma_t^2)$	Da ($\gamma < 0$)
GJR-GARCH	σ_t^2 cu indicător	Da ($\gamma > 0$)
TGARCH	σ_t	Da ($\alpha^- > \alpha^+$)

Simulare GJR-GARCH/TGARCH

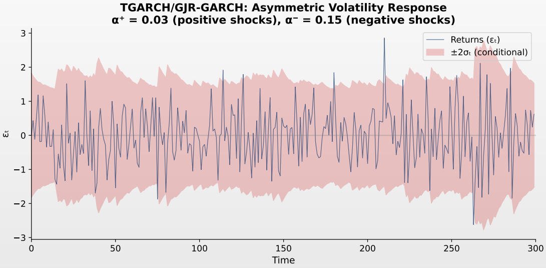


Interpretare

- GJR-GARCH adaugă un termen indicator pentru a captura răspunsul asimetric la șocuri negative

TSA_ch5_gjr_sim

Simulare TGARCH: răspuns asimetric la volatilitate

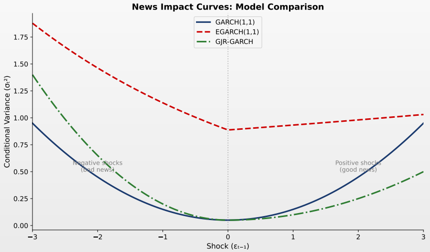


Interpretare

- TGARCH cu $\alpha^+ = 0.03$ (șocuri pozitive) și $\alpha^- = 0.15$ (șocuri negative)
  - Șocurile negative amplifică volatilitatea de $5\times$ mai mult
- Benzile de volatilitate $\pm 2\sigma$ se lărgesc asimetric în perioadele de criză

TSA_ch5_tgarch_sim

Comparație news impact curves

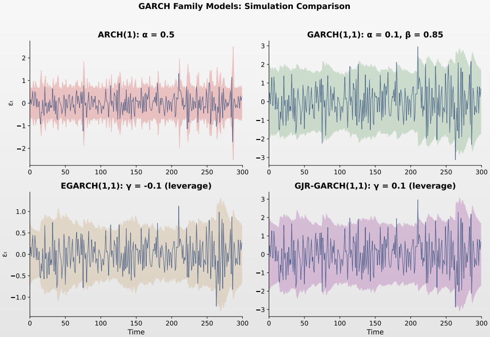


Interpretare

- **GARCH standard**: simetric
  - Tratează șocuri pozitive și negative identic
- **EGARCH** și **GJR-GARCH**: captează asimetria
  - Leverage effect: șocuri negative $\Rightarrow$ impact mai mare

TSA_ch5_nic_comp

Comparație familie GARCH



Interpretare

- Toate modelele capturează volatility clustering, dar diferă în modul de modelare a asimetriei

TSA_ch5_family

Selectarea ordinului

Criterii informaționale

- **AIC** $= -2\ell + 2k$ — penalizare moderată; preferă modele flexibile
- **BIC** $= -2\ell + k\ln(T)$ — penalizare mai mare; modele parsimonioase
- **HQIC** $= -2\ell + 2k\ln(\ln(T))$ — intermediar între AIC și BIC

unde ℓ = log-verosimilitate maximizată, k = nr. parametri.

Recomandări Practice

- GARCH(1,1) este suficient în **90% din cazuri**
  - Modele de ordin mai mare rareori aduc îmbunătățiri semnificative
- Verifică dacă modelul asimetric îmbunătățește fit-ul
  - Compară GARCH vs EGARCH vs GJR-GARCH prin AIC/BIC
- Alege distribuția inovațiilor care minimizează AIC/BIC

Diagnosticarea modelelor GARCH

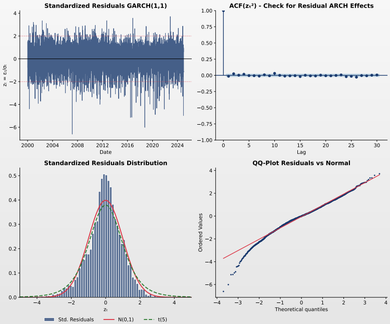
Reziduuri Standardizate

- $\hat{z}_t = \frac{\hat{\varepsilon}_t}{\hat{\sigma}_t}$ — dacă modelul este corect, $\hat{z}_t$ ar trebui să fie i.i.d.(0,1)

Verificări Diagnostic

- **Teste pentru medie**
  - Ljung-Box pe $\hat{z}_t$: verifică absența autocorelației
- **Teste pentru varianță**
  - Ljung-Box pe $\hat{z}_t^2$: verifică absența efectelor ARCH reziduale
  - Test ARCH-LM: confirmă absența heteroscedasticității
- **Verificare distribuție**
  - Histogramă + QQ-plot: verifică distribuția asumată

Exemplu diagnostic

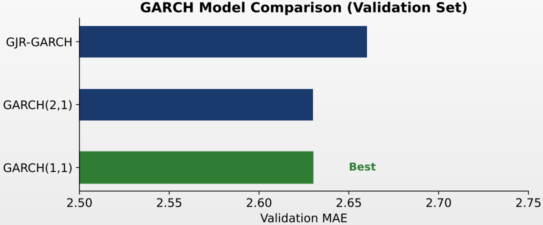


Verificare

- Reziduurile standardizate trebuie să fie i.i.d. fără efecte ARCH reziduale

TSA_ch5_diagnostic

Comparație modele GARCH — validare



Interpretare

- GARCH(1,1) obține cel mai mic MAE pe setul de validare
  - Mai parsimonios și mai stabil decât modelele de ordin mai mare
- GARCH(2,1) și GJR-GARCH: performanță similară, dar mai mulți parametri
- **Concluzie**: simplitatea câștigă — GARCH(1,1) este greu de bătut

TSA_ch5_comparison

Prognoza cu GARCH(1,1)

Prognoză Un Pas Înainte

$\hat{\sigma}^2_{T+1} = \omega + \alpha\varepsilon^2_T + \beta\sigma^2_T$

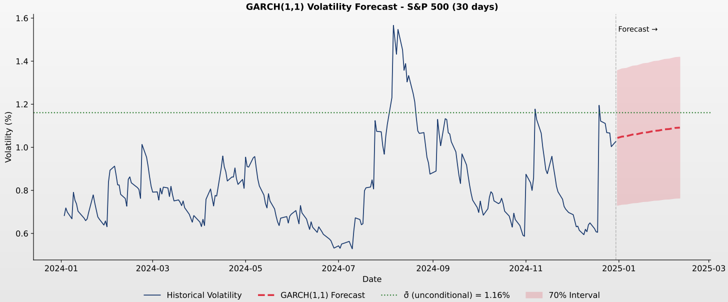
Prognoză multi-pas ($h > 1$)

$\mathbb{E}_T[\sigma^2_{T+h}] = \bar{\sigma}^2 + (\alpha + \beta)^{h-1}(\sigma^2_{T+1} - \bar{\sigma}^2)$ unde $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$

Convergență

- $\lim_{h\to\infty} \mathbb{E}_T[\sigma^2_{T+h}] = \bar{\sigma}^2$ — Prognoza converge către varianța necondiționată!

Prognoza volatilității — Vizualizare

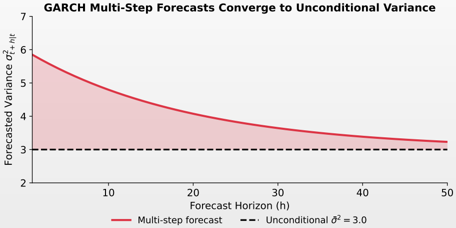


Proprietăți

- Prognoză converge exponențial către $\bar{\sigma}^2$
- Viteza de convergență depinde de $\alpha + \beta$

TSA_ch5_vol_forecast

Convergența prognozei GARCH către varianța necondiționată



Interpretare

- Prognoza multi-pas converge exponențial către $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$
- Cu cât $\alpha + \beta$ este mai aproape de 1, cu atât convergența este mai lentă
  - S&P 500: $\alpha + \beta \approx 0.99 \Rightarrow$ convergență în $\sim$50 zile
  - Bitcoin: $\alpha + \beta \approx 0.95 \Rightarrow$ convergență mai rapidă

TSA_ch5_convergence

Aplicații ale prognozei volatilității

Value at Risk (VaR)

- $\text{VaR}_\alpha = z_\alpha \cdot \sigma_{T+1}$
- Pierderea maximă cu probabilitate $1 - \alpha$

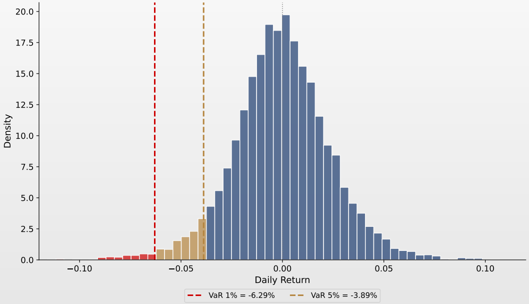
Expected Shortfall (ES)

- $\text{ES}_\alpha = \mathbb{E}[-r | r < -\text{VaR}_\alpha]$
- Pierderea medie când VaR este depășit

Alte Aplicații

- Prețul opțiunilor
- Hedging dinamic
- Alocarea portofoliului
- Stress testing

VaR și ES: ilustrație grafică

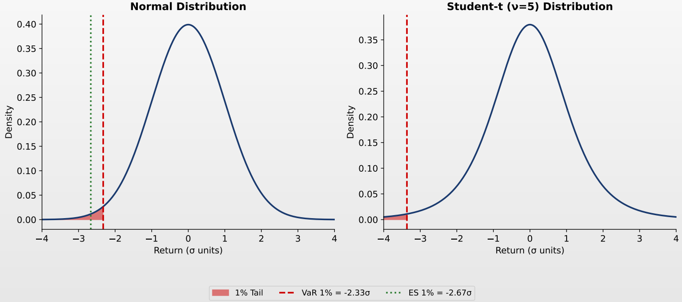


Interpretare

- VaR 1% = pierderea depășită doar în 1% din cazuri
- Zona roșie = pierderi extreme (dincolo de VaR)

TSA_ch5_var_plot

VaR vs expected shortfall: normal vs Student-t



Interpretare

- ES măsoară pierderea medie când VaR este depășit
- Student-t: VaR și ES mai mari decât sub distribuția normală

TSA_ch5_var_es

Value at risk — exemplu numeric

Calculul VaR: Portofoliu 1M EUR, $\hat{\sigma}_{T+1} = 1.5\%$

Nivel	z_α	VaR (%)	VaR (EUR)
5% (1 zi)	1.645	2.47%	24.675
1% (1 zi)	2.326	3.49%	34.890
1% (10 zile)	$2.326 \cdot \sqrt{10}$	11.03%	110.314

Scalare pentru Perioade Mai Lungi

- $\text{VaR}_{h \text{ zile}} = \text{VaR}_{1 \text{ zi}} \cdot \sqrt{h}$ (presupune randamente i.i.d.)

Value at risk — distribuție Student-t

De ce Student-t?

- Normala **subestimează** riscul de coadă; randamentele au **cozi groase** (kurtosis > 3)
- Student-t capturează mai bine extremele

Comparație VaR 1% (1 zi) pentru $\sigma = 1.5\%$, Portofoliu = 1M EUR

Distribuție	**Cuantilă**	**VaR (EUR)**
Normal	2.326	34.890
Student-t ($\nu = 10$)	2.764	41.460
Student-t ($\nu = 6$)	3.143	47.145
Student-t ($\nu = 4$)	3.747	56.205

Cu $\nu = 6$ (tipic pentru acțiuni), VaR este cu **35% mai mare** decât cel normal!

VaR — exemplu complet cu GARCH

Procedura de Calcul VaR

1. Estimează modelul GARCH(1,1) cu distribuție Student-t
2. Obține prognoză volatilității: $\hat{\sigma}_{T+1}$
3. Calculează VaR: $\text{VaR}_\alpha = t_\alpha(\nu) \cdot \hat{\sigma}_{T+1} \cdot \sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}}$

Exemplu: S&P 500

- Parametri estimați: $\alpha = 0.088$, $\beta = 0.900$, $\nu = 6.4$
- Volatilitate prognozată: $\hat{\sigma}_{T+1} = 1.2\%$, Portofoliu: 10.000.000 EUR
- **VaR 1% (1 zi):** $\text{VaR} = 3.05 \times 0.012 \times 10.000.000 =$ **366.000 EUR**

Ce este VaR backtesting?

Definiție

- **Backtesting** = verificarea ex-post a calității modelului VaR
- Compară pierderile realizate cu pragul VaR prognozat
  - O **încălcare** (violation) apare când $r_t < -\text{VaR}_t$

Principiul Backtesting-ului

- Indicatorul de încălcare: $I_t = 1(r_t < -\text{VaR}_{\alpha,t})$
- Pentru un model corect la nivel α:
  - Frecvența: $\hat{p} = \frac{1}{T}\sum I_t \approx \alpha$; încălcări **independente**
- VaR 1% pe 250 zile $\Rightarrow$ așteptăm $\sim$2.5 încălcări/an

Importanță

- Cerință regulamentară **Basel III/IV** pentru bănci: backtesting obligatoriu

Testul Kupiec (1995) — acoperire necondiționată

Ipoteze

- H_0: Rata de încălcare este egală cu nivelul VaR ($p = \alpha$)
- H_1: Rata de încălcare diferă de nivelul VaR ($p \neq \alpha$)

Statistica de test (Likelihood Ratio)

$$LR_{uc} = -2 \ln \left[\frac{\alpha^x (1-\alpha)^{T-x}}{\hat{p}^x (1-\hat{p})^{T-x}} \right] \sim \chi^2(1)$$

unde x = numărul de încălcări, T = numărul de observații, $\hat{p} = x/T$.

Exemplu

- VaR 1%, $T = 250$ zile, $x = 5$ încălcări: $\hat{p} = 2\%$
  - Prea multe încălcări $\Rightarrow$ modelul **subestimează** riscul
- VaR 1%, $T = 250$ zile, $x = 1$ încălcare: $\hat{p} = 0.4\%$ — acceptabil

Testul Christoffersen (1998) — acoperire condiționată

Motivație

- Kupiec testează doar **frecvența** încălcărilor
- Nu detectează **clustering-ul** încălcărilor (încălcări consecutive)
  - Dacă încălcările apar în clustere ⇒ modelul nu captează dinamica volatilității

Testul de independență + acoperire condiționată

$$LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind} \sim \chi^2(2)$$

- LR_{ind} testează dacă $P(I_t = 1 | I_{t-1} = 1) = P(I_t = 1 | I_{t-1} = 0)$
- Un model bun: încălcări rare **și** distribuite uniform în timp

Recomandare

- Folosește **ambele** teste: Kupiec (frecvență) + Christoffersen (independență)

Backtesting VaR: semaforul Basel

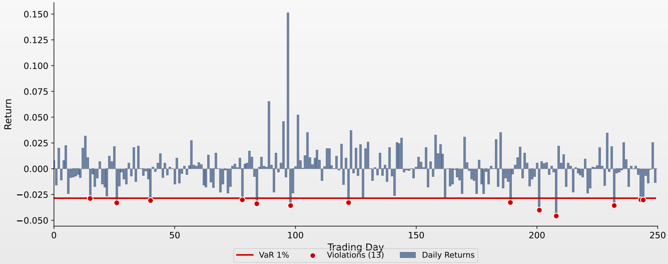
Zonele de semaforizare Basel III/IV

Zonă	Încălcări/250 zile	Interpretare	Penalizare
Verde	0–4	Model acceptabil	Fără penalizare
Galben	5–9	Necesită investigare	Factor k crește
Roșu	≥ 10	Model inadecvat	Penalizare maximă

Exemplu practic

- Portofoliu cu VaR 1%: 250 zile de backtesting
- 3 încălcări $\Rightarrow$ **Zonă verde** — model acceptabil
- 7 încălcări $\Rightarrow$ **Zonă galbenă** — revizuire necesară
- 13 încălcări $\Rightarrow$ **Zonă roșie** — model respins

VaR backtesting: vizualizare



Interpretare

- Linia roșie: pragul VaR 1% estimat cu GARCH(1,1)
- Punctele roșii: 13 încălcări din 250 zile ($\hat{p} = 5.2\%$)
  - **Zonă roșie Basel** — modelul subestimează semnificativ riscul
  - Soluții: distribuție Student-t, model EGARCH, sau nivel VaR mai conservator

TSA_ch5_backtest

Metodologia Rolling Window pentru VaR

Conceptul Rolling Window

- O **fereastră mobilă** de dimensiune fixă W (ex. 500 zile) se deplasează zi cu zi
- La fiecare pas t: re-estimare GARCH pe $[t-W,\ t-1]$, prognoză $\hat{\sigma}_{t|t-1}$, calcul VaR_t

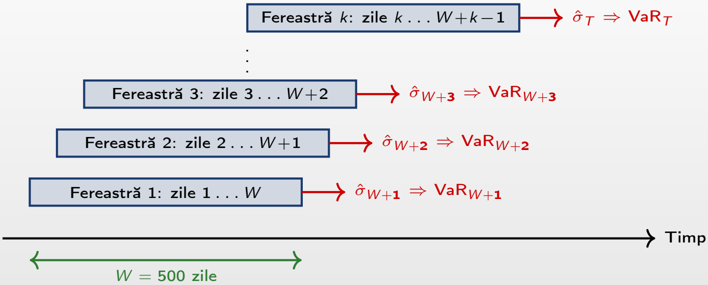
Procedura pas cu pas (pentru fiecare zi $t = W+1, \ldots, T$)

1. Estimează GARCH pe $\{r_{t-W}, \ldots, r_{t-1}\} \Rightarrow$ parametri $\hat{\omega}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\nu}$
2. Prognozează: $\hat{\sigma}^2_{t|t-1} = \hat{\omega} + \hat{\alpha} r^2_{t-1} + \hat{\beta}\hat{\sigma}^2_{t-1}$
3. Calculează: $\text{VaR}_{\alpha,t} = -t_\alpha(\hat{\nu}) \cdot \sqrt{\frac{\hat{\nu}-2}{\hat{\nu}}} \cdot \hat{\sigma}_{t|t-1}$
4. Verifică încălcarea: $I_t = 1(r_t < -\text{VaR}_{\alpha,t})$

De ce Rolling și nu Expanding?

- Fereastra fixă: parametrii reflectă **regimul curent** al volatilității
- Datele vechi ($> W$ zile) pot fi irelevante (schimbări structurale, crize)

Rolling Window VaR: schema procedurii



Rezultat

- Obținem seria $\{\text{VaR}_{\alpha,t}\}_{t=W+1}^{T}$ — un prag **diferit** în fiecare zi
- VaR-ul se adaptează la regimul curent: crește în perioadele volatile, scade în cele calme
- Comparăm r_t cu $-\text{VaR}_{\alpha,t}$ pentru a identifica încălcările

VaR backtesting în Python — rolling window

Estimare VaR rolling cu GARCH(1,1)-t

```
from arch import arch_model
import numpy as np
from scipy import stats

returns = ...  # pd.Series cu randamente zilnice
window = 500; alpha = 0.01
VaR_series = pd.Series(index=returns.index[window:], dtype=float)

for t in range(window, len(returns)):
    train = returns.iloc[t-window:t]
    model = arch_model(train, vol='Garch', p=1, q=1, dist='t')
    res = model.fit(disp='off', show_warning=False)
    fcast = res.forecast(horizon=1, reindex=False)
    sigma = np.sqrt(fcast.variance.values[-1, 0])
    nu = res.params['nu']   # grade de libertate Student-t
    q = stats.t.ppf(alpha, nu) * np.sqrt((nu-2)/nu)
    VaR_series.iloc[t - window] = -q * sigma
```

TSA_ch5_backtest_py

Testul Kupiec — implementare Python

Funcția kupiec_test()

```
def kupiec_test(violations, T, alpha=0.01):
    """Kupiec (1995) unconditional coverage LR test."""
    x = violations.sum()          # nr. încălcări observate
    p_hat = x / T                 # rata empirică
    if x == 0 or x == T:
        return np.nan, np.nan
    LR_uc = -2 * (x*np.log(alpha) + (T-x)*np.log(1-alpha)
                 - x*np.log(p_hat) - (T-x)*np.log(1-p_hat))
    p_value = 1 - stats.chi2.cdf(LR_uc, df=1)
    return LR_uc, p_value
```

Utilizare

```
violations = returns[window:] < -VaR_series
LR, pval = kupiec_test(violations, len(violations))
print(f"Kupiec LR = {LR:.3f}, p-value = {pval:.4f}")
# p-value < 0.05 => respingem H0 => model inadecvat
```

Testul Christoffersen — implementare Python

Funcția christoffersen_test()

```
def christoffersen_test(violations):
    """Christoffersen (1998) conditional coverage test."""
    V = violations.astype(int).values
    # Matricea de tranziție: n_ij
    n00 = ((V[:-1]==0) & (V[1:]==0)).sum()
    n01 = ((V[:-1]==0) & (V[1:]==1)).sum()
    n10 = ((V[:-1]==1) & (V[1:]==0)).sum()
    n11 = ((V[:-1]==1) & (V[1:]==1)).sum()
    # Probabilități condiționate
    p01 = n01/(n00+n01) if (n00+n01)>0 else 0
    p11 = n11/(n10+n11) if (n10+n11)>0 else 0
    p = (n01+n11) / (n00+n01+n10+n11)  # rata globală
    if p01==0 or p11==0 or p==0 or p==1: return np.nan, np.nan
    LR_ind = -2*(np.log(1-p)*(n00+n10) + np.log(p)*(n01+n11)
        - np.log(1-p01)*n00 - np.log(p01)*n01
        - np.log(1-p11)*n10 - np.log(p11)*n11)
    p_value = 1 - stats.chi2.cdf(LR_ind, df=1)
    return LR_ind, p_value
```

Backtesting complet — rezultate și decizie

Aplicare S&P 500 (T=500, VaR 1%)

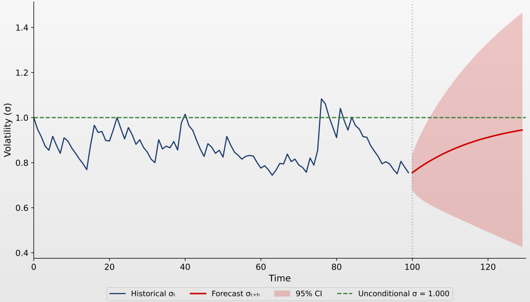
```
violations = returns[window:] < -VaR_series
n_viol = violations.sum()
T = len(violations)
rate = n_viol / T
print(f"Încălcări: {n_viol}/{T} (rata = {rate:.2%})")
LR_uc, p_uc = kupiec_test(violations, T, alpha=0.01)
LR_ind, p_ind = christoffersen_test(violations)
LR_cc = LR_uc + LR_ind   # test combinat ~ chi2(2)
p_cc = 1 - stats.chi2.cdf(LR_cc, df=2)
```

Output tipic

```
Încălcări: 13/500 (rata = 2.60%)
Kupiec    LR = 5.83,  p-value = 0.0157  => Respins (p<0.05)
Independ. LR = 0.42,  p-value = 0.5171  => Acceptat
Combinat  LR = 6.25,  p-value = 0.0439  => Respins
Zona Basel: ROȘU (>=10 încălcări) => Model inadecvat
```

TSA_ch5_backtest_full

Prognoza volatilității cu intervale de încredere



Interpretare

- Prognoza converge către $\bar{\sigma}$
- Incertitudinea crește cu orizontul de prognoză

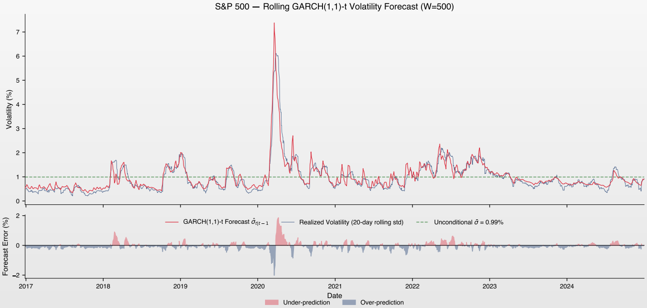
TSA_ch5_vol_ci

Rolling forecast — prognoza pas cu pas

Procedura

S&P 500, W=500, GARCH(1,1)-t

- Re-estimare GARCH pe $[t-W,\ t-1]$
- Prognoză $\hat{\sigma}_{t|t-1}$
- Comparație cu vol. realizată (std. rulantă 20 zile)



Rezultate (2015 zile OOS)

- $\rho = 0.938$ — urmărire excelentă
- MAE $= 0.15\%$, RMSE $= 0.24\%$
- COVID-19: sub-predicție temporară, adaptare rapidă

TSA_ch5_rolling_forecast

Estimare GARCH în Python — arch

Cod Python

```
pip install arch
from arch import arch_model

model = arch_model(returns,
    vol='Garch', p=1, q=1,
    dist='normal')
results = model.fit(disp='off')
print(results.summary())
```

Parametri cheie

- **vol**: tip model
  - 'Garch', 'EGARCH'
- **p, q**: ordine GARCH
  - p=1, q=1 standard
- **dist**: distribuție
  - 'normal', 't'

TSA_ch5_garch

Modele Asimetrice în Python

EGARCH și GJR-GARCH

```
# EGARCH
model_egarch = arch_model(returns, vol='EGARCH', p=1, q=1)
# GJR-GARCH (o=1 adaugă termenul asimetric)
model_gjr = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, o=1, q=1)
```

Distribuții Alternative

```
# Student-t pentru cozi groase
model_t = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, q=1, dist='t')
# Skewed Student-t pentru asimetrie și cozi groase
model_skewt = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, q=1,
                         dist='skewt')
```

TSA_ch5_egarch

Prognoza și Diagnosticul

Prognoza volatilității

```
forecasts = results.forecast(horizon=10)
vol_forecast = np.sqrt(forecasts.variance.values[-1,:])
```

Diagnostic și VaR

```
std_resid = results.std_resid
lb_test = acorr_ljungbox(std_resid**2, lags=10)
sigma = np.sqrt(forecasts.variance.values[-1, 0])
VaR_5pct = 1.645 * sigma
```

TSA_ch5_forecast

ARMA-GARCH: modelarea combinată a mediei și varianței

De ce Modelare Combinată?

- **Corelație serială** $\Rightarrow$ ARMA pentru medie
  - Captează dependența liniară în randamente
- **Clustering volatilității** $\Rightarrow$ GARCH pentru varianță
  - Captează dependența neliniară (heteroscedasticitate)

Definiție 9 (ARMA(p,q)-GARCH(r,s))

Ecuația mediei: $r_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \phi_i (r_{t-i} - \mu) + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$

Ecuația varianței: $\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \sigma_{t-j}^2$

ARMA-GARCH: strategie de selecție a modelului

Abordare Pas cu Pas

1. **Identifică modelul pentru medie**: Verifică ACF/PACF al randamentelor
2. **Testează efectele ARCH**: Aplică testul ARCH-LM pe reziduuri
3. **Specifică modelul pentru varianță**: De obicei GARCH(1,1) este suficient
4. **Estimare combinată**: Estimează ambele ecuații prin MLE
5. **Diagnostic**: Reziduurile standardizate trebuie să fie i.i.d.

Specificații Comune

- **Randamente acțiuni**: AR(1)-GARCH(1,1) sau ARMA(1,1)-GARCH(1,1)
  - Leverage effect frecvent $\Rightarrow$ EGARCH poate fi preferat
- **Cursuri de schimb**: Adesea doar GARCH(1,1)
  - Fără dinamică semnificativă în medie
- **Rate de dobândă**: AR(1)-EGARCH(1,1) pentru efecte de levier

ARMA-GARCH: implementare Python

Utilizând Pachetul arch

```
from arch import arch_model
model = arch_model(returns,
                   mean='ARX',
                   lags=1,
                   vol='Garch',
                   p=1, q=1,
                   dist='t')
result = model.fit(disp='off')
print(result.summary())
```

Parametri

- `mean='ARX'`: medie ARMA; `lags=1`: AR(1); `dist='t'`: Student-t

TSA_ch5_armagarch

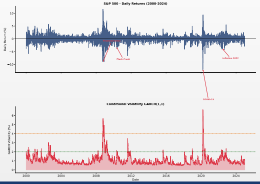
ARMA-GARCH: Exemplu Complet

```
from arch import arch_model
model = arch_model(returns,
                   mean='ARX', lags=[1],
                   vol='EGARCH', p=1, q=1,
                   dist='skewt')
result = model.fit(update_freq=0)
cond_mean = result.conditional_mean
cond_vol = result.conditional_volatility
forecasts = result.forecast(horizon=5)
```

Notă

- Pentru termeni MA, folosiți `mean='HARX'` sau pre-filtrați cu statsmodels ARIMA

Pasul 1: Datele — randamente zilnice S&P 500



Descrierea datelor

- **Sursă**: Yahoo Finance, S&P 500, date zilnice 2000–2024 ($T > 6000$)
- **Randamente**: $r_t = \ln(P_t/P_{t-1}) \times 100$

Statistici descriptive

Medie	Std. Dev.	Skewness	Kurtosis	Min	Max
0.034%	1.21%	-0.29	13.8	-12.8%	$+11.0\%$

- Cozi groase (kurtosis $\gg 3$) și asimetrie negativă $\Rightarrow$ efecte ARCH

TSA_ch5_sp500

Pasul 2: Testarea efectelor ARCH

Cod Python — ARCH-LM și Ljung-Box pe r_t^2

```
import yfinance as yf
from statsmodels.stats.diagnostic import het_arch, acorr_ljungbox
sp = yf.download('^GSPC', start='2000-01-01', end='2024-12-31')
returns = np.log(sp['Close']).diff().dropna() * 100
# Testul ARCH-LM (Engle, 1982)
lm_stat, lm_pval, _, _ = het_arch(returns, nlags=10)
# Ljung-Box pe randamente pătrate
lb = acorr_ljungbox(returns**2, lags=20)
```

Rezultate

Test	Statistică	p-value
ARCH-LM (10 lags)	892.4	< 0.0001
Ljung-Box r_t^2 (lag 20)	4217.6	< 0.0001

Concluzie: Efecte ARCH puternice — heteroscedasticitate semnificativă.

Pasul 3: Estimarea mai multor modele GARCH

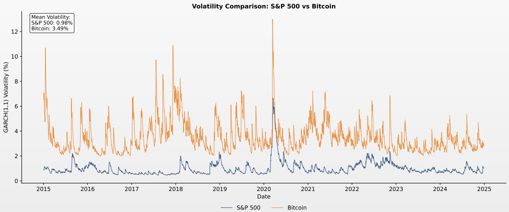
Cod Python — estimare 4 modele candidate

```
from arch import arch_model
models = {}
# Model 1: GARCH(1,1) cu Normal
m1 = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, q=1, dist='normal')
models['GARCH-N'] = m1.fit(disp='off')
# Model 2: GARCH(1,1) cu Student-t
m2 = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, q=1, dist='t')
models['GARCH-t'] = m2.fit(disp='off')
# Model 3: EGARCH(1,1) cu Student-t
m3 = arch_model(returns, vol='EGARCH', p=1, q=1, dist='t')
models['EGARCH-t'] = m3.fit(disp='off')
# Model 4: GJR-GARCH(1,1) cu Student-t
m4 = arch_model(returns, vol='GARCH', p=1, o=1, q=1, dist='t')
models['GJR-t'] = m4.fit(disp='off')
```

Strategie

Estimăm modele simetrice și asimetrice, cu diferite distribuții. Alegerea finală: **AIC/BIC** + **diagnostice** + **interpretare economică**.

Pasul 3: Parametri estimați — comparație



Tabel parametri estimați

Model	ω	α	β	γ	$\alpha+\beta$	ν	HL
GARCH-N	0.011	0.088	0.901	—	0.989	—	60 zile
GARCH-t	0.011	0.088	0.900	—	0.989	6.42	60 zile
EGARCH-t	0.003	0.103	0.987	−0.120	—	6.38	—
GJR-t	0.010	0.022	0.906	0.126	0.991	6.51	78 zile

- EGARCH $\gamma = -0.12$ **semnificativ** $\Rightarrow$ **leverage effect confirmat**
- GJR: $\alpha_{\text{neg}} = \alpha + \gamma = 0.148$ vs $\alpha_{\text{poz}} = 0.022$ — asimetrie puternică

TSA_ch5_sp500_garch

Pasul 4: Selecția modelului — AIC/BIC

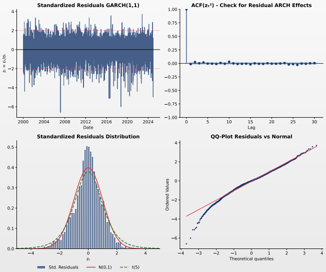
Criterii informaționale

Model	Log-Lik	AIC	BIC	Rang
GARCH(1,1)-N	−8042.3	16090.6	16111.0	4
GARCH(1,1)-t	−7981.5	15971.0	15997.8	3
EGARCH(1,1)-t	−7964.2	**15938.4**	**15971.6**	**1**
GJR-GARCH(1,1)-t	−7968.1	15946.2	15979.4	2

Decizia

- **EGARCH(1,1)-t câștigă**: cel mai mic AIC și BIC
- Student-t superior normalei (ΔAIC $\approx$ 120) — cozi groase contează!
- Leverage effect justifică modele asimetrice (ΔAIC $\approx$ 33 față de GARCH-t)

Pasul 5: Diagnostice — EGARCH(1,1)-t

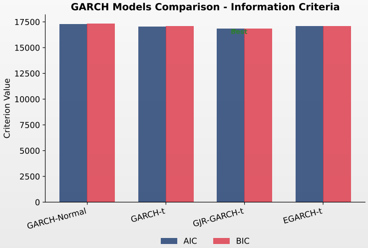


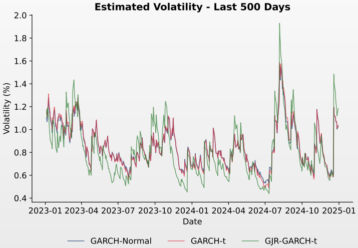
Verificări pe reziduuri standardizate $z_t = \varepsilon_t / \hat{\sigma}_t$

- **Ljung-Box** pe z_t: p-value $= 0.38 \Rightarrow$ fără autocorelație reziduală
- **Ljung-Box** pe z_t^2: p-value $= 0.52 \Rightarrow$ **efecte ARCH eliminate**
- **Q-Q plot**: punctele urmează dreapta teoretică Student-t
- **Concluzie**: modelul EGARCH(1,1)-t captează adecvat dinamica volatilității

TSA_ch5_sp500_diag

Pasul 5: Leverage effect — vizualizare





GARCH vs EGARCH — diferențe de volatilitate

- EGARCH produce volatilitate **mai mare** după șocuri negative (2008, 2020)
- GARCH simetric **subestimează** riscul în perioadele de criză
- Diferența: până la 2–3 puncte procentuale în volatilitate zilnică

TSA_ch5_sp500_comp

Pasul 6: VaR rolling window — S&P 500

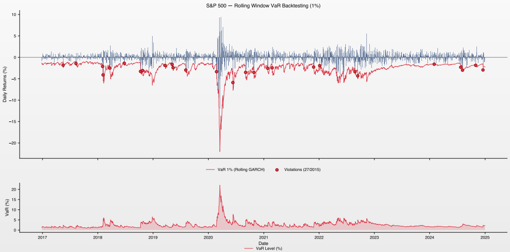
Procedura rolling window (W=500 zile, VaR 1%)

```
from scipy import stats
W = 500; alpha = 0.01
VaR_roll = pd.Series(index=returns.index[W:], dtype=float)
for t in range(W, len(returns)):
    train = returns.iloc[t-W:t]
    m = arch_model(train, vol='Garch', p=1, q=1, dist='t')
    res = m.fit(disp='off', show_warning=False)
    fcast = res.forecast(horizon=1, reindex=False)
    sigma = np.sqrt(fcast.variance.values[-1, 0])
    nu = res.params['nu']
    VaR_roll.iloc[t-W] = -stats.t.ppf(alpha,nu)*np.sqrt((nu-2)/nu)*sigma
```

Caracteristici VaR rolling S&P 500 (2017–2024)

- VaR mediu: 2.53% ($\approx$ EUR 253.000 / 10M EUR)
- VaR maxim: 22.02% — criză COVID-19 ($\approx$ EUR 2.202.000)
- VaR minim: 0.91% — perioadă calmă ($\approx$ EUR 91.000)
- **VaR-ul se adaptează**: crește automat în perioadele de criză

Pasul 6: Backtesting rolling VaR — S&P 500



Rezultate Kupiec + Christoffersen (2015 zile out-of-sample)

Test	Statistică	p-value	Decizia
Încălcări	27/2015 ($\hat{p} = 1.34\%$)	—	Zona **verde**
Kupiec (uc)	2.13	0.145	Acceptat
Christoffersen (ind)	0.79	0.375	Acceptat
Combinat (cc)	2.91	0.233	Acceptat

TSA_ch5_sp500_var

Pasul 7: Concluzii — Studiu S&P 500

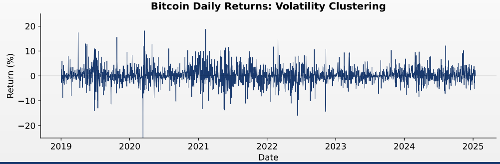
Rezumatul metodologiei pas cu pas

1. **Date**: randamente log, statistici descriptive $\Rightarrow$ cozi groase, asimetrie
2. **Test ARCH**: ARCH-LM + Ljung-Box pe r_t^2 $\Rightarrow$ efecte ARCH semnificative
3. **Estimare**: 4 modele candidate (simetric/asimetric $\times$ Normal/Student-t)
4. **Selecție**: AIC/BIC $\Rightarrow$ **EGARCH(1,1)-t** câștigător
5. **Diagnostice**: reziduuri standardizate $\Rightarrow$ model adecvat
6. **VaR**: rolling window + backtesting Kupiec/Christoffersen $\Rightarrow$ model **validat**

Lecții cheie

- Distribuția Student-t este **esențială** pentru date financiare
- Leverage effect: modelele asimetrice **obligatorii** pentru acțiuni
- Backtesting sistematic: nu doar „arată bine”, ci **testat statistic**

Pasul 1: Datele — randamente zilnice Bitcoin



Descrierea datelor

- **Sursă**: Yahoo Finance (BTC-USD), date zilnice 2018–2024
- Randamente log: media $\approx 0.05\%$, volatilitate $\approx 3.5\%$

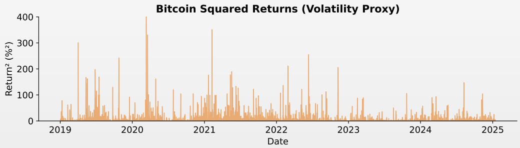
Statistici descriptive

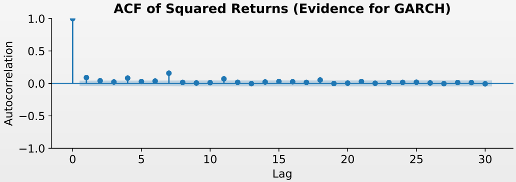
Medie	Std. Dev.	Skewness	Kurtosis	Min	Max
0.05%	3.48%	−0.72	12.1	−46.5%	+22.5%

- Volatilitate $\sim 3\times$ mai mare decât S&P 500
- Kurtosis extremă $\Rightarrow$ riscul de pierderi mari

TSA_ch5_btc

Pasul 2: Testarea efectelor ARCH — Bitcoin





Rezultate teste

Test	Statistică	p-value
ARCH-LM (10 lags)	324.7	< 0.0001
Ljung-Box r_t^2 (lag 20)	1842.3	< 0.0001

- ACF al r_t^2: scădere **lentă** $\Rightarrow$ volatility clustering puternic

TSA_ch5_btc_arch

Pasul 3–4: Estimare și selecție modele — Bitcoin

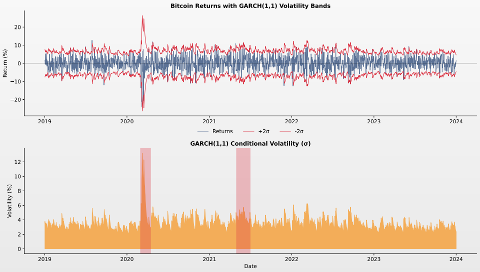
Parametri estimați

Model	ω	α	β	γ	$\alpha+\beta$	ν	**AIC**
GARCH-t	0.42	0.131	0.848	—	0.979	4.82	9284
EGARCH-t	0.08	0.184	0.976	-0.061	—	4.79	9276
GJR-t	0.40	0.088	0.854	0.078	0.976	4.85	**9271**

Interpretare

- **GJR-GARCH-t câștigă** (cel mai mic AIC)
- $\nu \approx 4.8$: cozi **mult mai groase** decât S&P 500 ($\nu = 6.4$)
- $\alpha = 0.131$ (BTC) vs 0.088 (S&P) $\Rightarrow$ Bitcoin reacționează mai rapid la news
- Leverage effect mai slab decât la acțiuni ($\gamma_{\text{BTC}} = 0.078$ vs 0.126)

Pasul 5: Volatilitatea condiționată — Bitcoin



Diagnostice GJR-GARCH(1,1)-t

- Ljung-Box pe z_t^2: p-value $= 0.41 \Rightarrow$ **efecte ARCH eliminate**
- Vârfuri volatilitate: martie 2020 (COVID), mai 2022 (Terra/Luna)
- Volatilitate zilnică: de la 1% (perioadele calme) la >15% (crize)

TSA_ch5_btc_garch

Pasul 6: VaR rolling window — Bitcoin

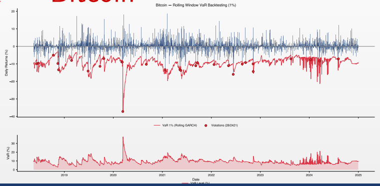
Rolling window GJR-GARCH-t (W=500 zile, VaR 1%)

```
W = 500; alpha = 0.01
VaR_btc = pd.Series(index=btc_returns.index[W:], dtype=float)
for t in range(W, len(btc_returns)):
    train = btc_returns.iloc[t-W:t]
    m = arch_model(train, vol='GARCH', p=1, o=1, q=1, dist='t')
    res = m.fit(disp='off', show_warning=False)
    fcast = res.forecast(horizon=1, reindex=False)
    sigma = np.sqrt(fcast.variance.values[-1, 0])
    nu = res.params['nu']
    VaR_btc.iloc[t-W] = -stats.t.ppf(alpha,nu)*np.sqrt((nu-2)/nu)*sigma
```

Caracteristici VaR rolling Bitcoin (2018–2024)

- VaR mediu: 9.34% ($\approx$ EUR 93.400 / 1M EUR)
- VaR maxim: 37.54% — crash COVID martie 2020
- VaR minim: 2.90% — perioadă calmă
- Bitcoin: VaR rolling $\sim 4\times$ mai mare decât S&P 500 la aceeași expunere

Pasul 6: Backtesting rolling VaR — Bitcoin



Teste statistice (2421 zile out-of-sample)

Test	Statistică	p-value	Decizia
Încălcări	28/2421 ($\hat{p} = 1.16\%$)	—	Zona verde
Kupiec (uc)	0.57	0.450	Acceptat
Christoffersen (ind)	0.94	0.333	Acceptat
Combinat (cc)	1.51	0.471	Acceptat

Interpretare

- Volatilitatea variază de la 3% la 38% ⇒ rolling window **esențial**
- Toate testele **acceptate**: model valid pentru managementul riscului

TSA_ch5_btc_var

Comparație finală: S&P 500 vs Bitcoin

Rezumat comparativ

	S&P 500	**Bitcoin**
Volatilitate medie	1.2%	3.5%
Kurtosis	13.8	12.1
Student-t ν	6.42	4.82
Cel mai bun model	EGARCH(1,1)-t	GJR-GARCH(1,1)-t
Leverage effect	Puternic ($\gamma = -0.12$)	Moderat ($\gamma = 0.078$)
Half-life	~60 zile	~42 zile
Rolling VaR 1% mediu	2.53%	9.34%
Rolling VaR 1% maxim	22.02% (COVID)	37.54% (COVID)
Kupiec	Acceptat (p=0.145)	Acceptat (p=0.450)
Christoffersen (ind)	Acceptat (p=0.375)	Acceptat (p=0.333)

Concluzie generală

- Re-estimare GARCH la fiecare pas: Kupiec + Christoffersen **acceptate**
- Rolling window VaR: **obligatoriu** — VaR static complet inadecvat
- Student-t + model asimetric: **esențiale** pentru ambele piețe

Formule cheie

Modele de Volatilitate

- **ARCH(q):** $\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$
- **GARCH(1,1):** $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$
- **EGARCH:** $\ln(\sigma_t^2) = \omega + \alpha(|z_{t-1}| - \mathbb{E}[|z|]) + \gamma z_{t-1} + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2)$
- **GJR-GARCH:** $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma\varepsilon_{t-1}^2 I_{t-1} + \beta\sigma_{t-1}^2$

Proprietăți și Măsuri

- **Var. necond.:** $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$ | **Half-life:** $HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha+\beta)}$ | **VaR:** $\text{VaR}_\alpha = z_\alpha \cdot \sigma_{T+1}$

Test ARCH-LM

$LM = T \cdot R^2 \sim \chi^2(q)$ unde R^2 provine din regresia $\hat{\varepsilon}_t^2$ pe lag-urile sale. Staționaritate: $\alpha + \beta < 1$.

Rezumat — Capitolul 5: Modele de Volatilitate

Concepte Cheie

- **ARCH(q)**: varianța condiționată depinde de pătratele erorilor trecute (Nobel 2003)
- **GARCH(p,q)**: adaugă lag-uri ale varianței pentru persistență (GARCH(1,1) în 90% din cazuri)
- **EGARCH**: permite leverage effect, fără restricții de pozitivitate
- **GJR-GARCH/TGARCH**: captură asimetria cu variabile indicador

Aplicații

- Măsurarea și prognoza riscului (VaR, ES)
- Prețul derivatelor, hedging dinamic, managementul portofoliului

Sfat Practic

- Începe cu GARCH(1,1), verifică leverage effect, alege distribuția care minimizează AIC/BIC!
  - Student-t adesea superior distribuției normale

Întrebarea 1

Întrebare

Ce descrie cel mai bine fenomenul de *volatility clustering* în seriile financiare?

(A) Randamentele financiare sunt distribuite normal și independente

(B) Perioadele de volatilitate ridicată sunt urmate de perioade de volatilitate ridicată, și invers

(C) Volatilitatea este constantă în timp (homoscedasticitate)

(D) Corelația dintre randamente este întotdeauna pozitivă

Întrebarea 1: Răspuns

Răspuns Corect: (B) Perioadele de volatilitate ridicată sunt urmate de perioade similare

- **Volatility clustering** este un fapt stilizat fundamental al seriilor financiare
- Implică faptul că varianța condiționată este **predictibilă**
  - Perioadele de calm $\Rightarrow$ urmate de calm
  - Perioadele de criză $\Rightarrow$ urmate de volatilitate ridicată
- Motivează utilizarea modelelor ARCH/GARCH pentru captarea dinamicii varianței

Întrebarea 2

Întrebare

Care este diferența principală dintre un model ARCH(q) și un model GARCH(p,q)?

(A) GARCH modelează media condiționată, ARCH modelează varianța

(B) ARCH include lag-uri ale varianței condiționate, GARCH nu

(C) GARCH adaugă lag-uri ale varianței condiționate (σ^2_{t-j}) pe lângă pătratele erorilor

(D) ARCH este mai parsimonios decât GARCH

Întrebarea 2: Răspuns

Răspuns Corect: (C) GARCH adaugă lag-uri ale varianței condiționate

- **ARCH(q)**: $\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$
  - Depinde **doar** de pătratele erorilor trecute
  - Necesită adesea un ordin q mare pentru persistență
- **GARCH(p,q)**: $\sigma_t^2 = \omega + \sum \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum \beta_j \sigma_{t-j}^2$
  - Adaugă lag-uri ale varianței $\Rightarrow$ captează persistența cu mai puțini parametri
  - GARCH(1,1) este suficient în 90% din cazuri

Întrebarea 3

Întrebare

Ce este *leverage effect* și ce modele GARCH îl captează?

(A) Șocurile pozitive cresc volatilitatea mai mult; captat de GARCH standard

(B) Șocurile negative cresc volatilitatea mai mult; captat de EGARCH și GJR-GARCH

(C) Volatilitatea este simetrică; captat de toate modelele GARCH

(D) Efectul de levier financiar asupra prețului acțiunilor; captat de IGARCH

Întrebarea 3: Răspuns

Răspuns Corect: (B) Șocurile negative cresc volatilitatea mai mult; EGARCH și GJR-GARCH

- Scăderile de preț cresc volatilitatea **mai mult** decât creșterile de aceeași magnitudine
- GARCH standard nu captează asimetria (folosește ε_{t-1}^2, semnul se pierde)
- Modele asimetrice:
  - **EGARCH**: $\gamma < 0$ indică leverage effect
  - **GJR-GARCH**: $\gamma > 0$ amplifică impactul șocurilor negative

Întrebarea 4

Întrebare

Care este condiția de staționaritate pentru un model GARCH(1,1)?

(A) $\alpha + \beta = 1$

(B) $\alpha > 0$ și $\beta > 0$

(C) $\alpha + \beta < 1$, cu $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$

(D) $\alpha \cdot \beta < 1$

Întrebarea 4: Răspuns

Răspuns Corect: (C) $\alpha + \beta < 1$, cu $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$

- Condiția $\alpha + \beta < 1$ asigură existența varianței necondiționate finite
  - $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$
- Când $\alpha + \beta = 1 \Rightarrow$ IGARCH (varianța este infinită)
- $\omega > 0$ asigură un nivel de bază pozitiv al volatilității
- Valori tipice: $\alpha \approx 0.05$–0.10, $\beta \approx 0.85$–0.95

Întrebarea 5

Întrebare

Ce reprezintă *half-life* al volatilității într-un model GARCH(1,1)?

(A) Timpul necesar ca prețul să revină la media sa

(B) Numărul de perioade până când volatilitatea devine zero

(C) Numărul de perioade necesare ca un șoc de volatilitate să se reducă la jumătate

(D) Durata medie a unui episod de volatilitate ridicată

Întrebarea 5: Răspuns

Răspuns Corect: (C) Numărul de perioade necesare ca un șoc să se reducă la jumătate

- Formula: $HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha+\beta)}$
- Exemplu: S&P 500 cu $\alpha + \beta = 0.988$
  - $HL = \frac{-0.693}{\ln(0.988)} \approx$ **58 zile**
  - Șocurile de volatilitate persistă aproximativ 3 luni
- Cu cât $\alpha + \beta$ este mai aproape de 1, cu atât half-life este mai mare

Bibliografie I

Lucrări fundamentale ARCH/GARCH

- Engle, R.F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation, *Econometrica*, 50(4), 987–1007.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 31(3), 307–327.
- Nelson, D.B. (1991). Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach, *Econometrica*, 59(2), 347–370.

Modele asimetrice și extensii

- Glosten, L.R., Jagannathan, R., & Runkle, D.E. (1993). On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks, *Journal of Finance*, 48(5), 1779–1801.
- Francq, C., & Zakoïan, J.-M. (2019). *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*, 2nd ed., Wiley.

Bibliografie II

Manuale și aplicații financiare

- Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*, 3rd ed., Wiley.
- Franke, J., Härdle, W.K., & Hafner, C.M. (2019). *Statistics of Financial Markets*, 4th ed., Springer.
- McNeil, A.J., Frey, R., & Embrechts, P. (2015). *Quantitative Risk Management*, 2nd ed., Princeton University Press.

Resurse online și cod

- **Quantlet**: `https://quantlet.com` — Depozit de cod pentru statistică
- **Quantinar**: `https://quantinar.com` — Platformă de învățare metode cantitative
- **GitHub TSA**: `https://github.com/QuantLet/TSA` — Cod Python pentru acest curs