Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 8: Extensii Moderne

ARFIMA, Machine Learning, Deep Learning

Cuprins

Obiective de Învățare

La finalul acestui capitol, veți fi capabili să:

1. Înțelegeți conceptul de **memorie lungă** în seriile de timp
2. Estimați și interpretați modele **ARFIMA**
3. Aplicați **Random Forest** pentru prognoza seriilor de timp
4. Construiți rețele **LSTM** pentru serii temporale
5. Comparați performanța modelelor clasice vs ML
6. Alegeți metoda potrivită în funcție de context
7. Implementați aceste metode în **Python**

De la Modele Clasice la Machine Learning

Limitările Modelelor ARIMA

- Presupun **memorie scurtă**: autocorelațiile scad exponențial
- Relații **liniare** între variabile
- Dificultăți cu **pattern-uri complexe** și neliniare
- Necesită **staționaritate** (prin diferențiere)

Soluții Moderne

- **ARFIMA**: Captează memoria lungă (autocorelații care scad lent)
- **Random Forest**: Relații neliniare, robustețe la outlieri
- **LSTM**: Pattern-uri secvențiale complexe, dependențe pe termen lung

Când să Folosim Fiecare Metodă?

Caracteristică	**ARIMA**	**ARFIMA**	**RF**	**LSTM**
Memorie lungă	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
Relații neliniare	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$
Interpretabilitate	$\checkmark$	$\checkmark$	$\sim$	$\times$
Date puține	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$
Variabile exogene	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
Incertitudine	$\checkmark$	$\checkmark$	$\sim$	$\times$

Regula de Aur

Începe **simplu** (ARIMA), apoi crește complexitatea doar dacă este justificat de date și performanță.

Ce este Memoria Lungă?

Memorie Scurtă (ARMA)

- Autocorelațiile ρ_k scad **exponențial**: $|\rho_k| \leq C \cdot r^k$, $r < 1$
- Efectele șocurilor dispar **rapid**
- Sumă finită: $\sum_{k=0}^{\infty} |\rho_k| < \infty$

Memorie Lungă (ARFIMA)

- Autocorelațiile scad **hiperbolic**: $\rho_k \sim C \cdot k^{2d-1}$
- Efectele șocurilor persistă **mult timp**
- Sumă infinită: $\sum_{k=0}^{\infty} |\rho_k| = \infty$ (pentru $d > 0$)

Exemple cu Memorie Lungă

Volatilitatea piețelor financiare, debite râuri, trafic rețea, inflație

Modelul ARFIMA(p,d,q)

Definiție 1 (ARFIMA)

Un proces $\{Y_t\}$ urmează un model **ARFIMA(p,d,q)** dacă:

$$\phi(L)(1-L)^d Y_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

unde $d \in (-0.5, 0.5)$ este parametrul de **diferențiere fracționară**.

Operatorul de Diferențiere Fracționară

$$(1-L)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k} (-L)^k = 1 - dL - \frac{d(1-d)}{2!}L^2 - \frac{d(1-d)(2-d)}{3!}L^3 - \cdots$$

- $d = 0$: ARMA standard (memorie scurtă)
- $0 < d < 0.5$: Memorie lungă, staționaritate
- $d = 0.5$: Limita staționarității
- $0.5 \leq d < 1$: Nestaționaritate, dar mean-reverting
- $d = 1$: Random walk (ARIMA standard)

Interpretarea Parametrului d

Valoare d	**Comportament ACF**	**Interpretare**
$d = 0$	Scădere exponențială	Memorie scurtă
$0 < d < 0.5$	Scădere hiperbolică	Memorie lungă, staționară
$d = 0.5$	ACF nesumabilă	La limită
$0.5 < d < 1$	Scădere foarte lentă	Memorie lungă, nestaționară
$d = 1$	ACF $= 1$ (constant)	Random walk

Parametrul Hurst H

Relația cu exponentul Hurst: $d = H - 0.5$

- $H = 0.5$: Mers aleator (fără memorie)
- $H > 0.5$: Persistență (trend-following)
- $H < 0.5$: Anti-persistență (mean-reverting)

Estimarea Parametrului d

Metode de Estimare

1. **GPH (Geweke-Porter-Hudak)**: Regresie în domeniul frecvență

$$\ln I(\omega_j) = c - d \cdot \ln\left(4\sin^2\frac{\omega_j}{2}\right) + \varepsilon_j$$

2. **R/S (Rescaled Range)**: Metoda lui Hurst

$$\frac{R}{S}(n) \sim c \cdot n^H$$

3. **MLE (Maximum Likelihood)**: Estimare completă ARFIMA
4. **Whittle**: Aproximare eficientă în domeniul frecvență

În Python: `arch` package, `statsmodels.tsa.arima.model.ARIMA` cu `order=(p,d,q)` unde d poate fi fracționar.

Exemplu ARFIMA în Python

Cod Python

```
from statsmodels.tsa.arima.model import ARIMA
model = ARIMA(y, order=(1, 0.3, 1))

results = model.fit()
```

Notă

Estimarea ARFIMA necesită pachete specializate. În practică, se folosește adesea `arch` sau `fracdiff` în Python.

Random Forest: Concepte de Bază

Ce este Random Forest?

- **Ansamblu** de arbori de decizie
- Fiecare arbore antrenat pe un **subset bootstrap** al datelor
- La fiecare nod, se selectează **aleator** un subset de features
- Predicția finală = **media** predicțiilor tuturor arborilor

Avantaje pentru Serii de Timp

- Captează **relații neliniare**
- **Robust** la outlieri și zgomot
- Nu necesită **staționaritate**
- Oferă **importanța features** (interpretabilitate)
- Funcționează bine cu **multe variabile**

Pregătirea Datelor pentru Random Forest

Feature Engineering pentru Serii de Timp

1. **Lag features**: $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots, Y_{t-p}$
2. **Rolling statistics**: medie mobilă, deviație standard
3. **Calendar features**: ziua săptămânii, luna, sezon
4. **Trend features**: timp, trend pătratic
5. **Variabile exogene**: indicatori economici, evenimente

Atenție: Data Leakage!

- Nu folosi informații din viitor în features
- Train/test split: **temporal**, nu aleator!
- Rolling statistics: calculează doar pe date **anterioare**

Random Forest: Implementare Python

Cod Python

```
from sklearn.ensemble import RandomForestRegressor
rf = RandomForestRegressor(n_estimators=100, max_depth=10)
rf.fit(X_train, y_train)
predictions = rf.predict(X_test)
```

Importanța Features și Interpretare

Feature Importance

Random Forest oferă măsuri de importanță:

- **Mean Decrease Impurity (MDI)**: Reducerea impurității la fiecare split
- **Permutation Importance**: Cât scade performanța când feature-ul e permutat aleator

Interpretare Tipică pentru Serii de Timp

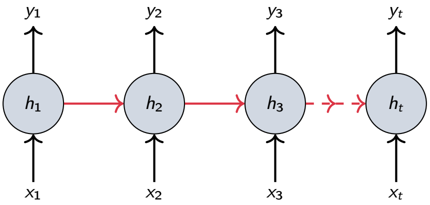
- `lag_1` foarte important $\Rightarrow$ Autocorelare puternică
- `rolling_mean` important $\Rightarrow$ Trend local contează
- `month` important $\Rightarrow$ Sezonalitate prezentă

`rf.feature_importances_` sau `permutation_importance(rf, X_test, y_test)`

Rețele Neuronale Recurente (RNN)

Ideea de Bază

- Rețele care procesează **secvențe** de date
- Au **memorie internă** (hidden state)
- Starea curentă depinde de input + starea anterioară



Problema: Vanishing Gradient

RNN simple "uită" informația din trecut îndepărtat.

LSTM: Long Short-Term Memory

Soluția LSTM

Celule speciale cu **3 porți** care controlează fluxul informației:

- **Forget Gate** (f_t): Ce să uităm din memoria anterioară
- **Input Gate** (i_t): Ce informație nouă să adăugăm
- **Output Gate** (o_t): Ce să trimitem la ieșire

Ecuațiile LSTM

$$
\begin{aligned}
f_t &= \sigma(W_f \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_f) && \text{(Forget)} \\
i_t &= \sigma(W_i \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_i) && \text{(Input)} \\
\tilde{C}_t &= \tanh(W_C \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_C) && \text{(Candidate)} \\
C_t &= f_t \odot C_{t-1} + i_t \odot \tilde{C}_t && \text{(Cell state)} \\
o_t &= \sigma(W_o \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_o) && \text{(Output)} \\
h_t &= o_t \odot \tanh(C_t) && \text{(Hidden state)}
\end{aligned}
$$

Avantajele LSTM pentru Serii de Timp

De ce LSTM?

- Captează **dependențe pe termen lung** (spre deosebire de RNN simplu)
- Învață **pattern-uri complexe** și neliniare
- Gestionează **secvențe de lungimi variabile**
- Funcționează bine cu **date multivariate**

Dezavantaje

- Necesită **multe date** pentru antrenare
- **Computațional intensiv**
- "**Black box**" - greu de interpretat
- Sensibil la **hiperparametri**
- Poate face **overfitting** ușor

LSTM: Implementare în Python cu Keras

Cod Python

```
from tensorflow.keras.models import Sequential
from tensorflow.keras.layers import LSTM, Dense, Dropout

model = Sequential([
    LSTM(50, return_sequences=True, input_shape=(n, 1)),
    Dropout(0.2),
    LSTM(50),
    Dense(1)
])
model.compile(optimizer='adam', loss='mse')
```

Pregătirea Datelor pentru LSTM

Pași Esențiali

1. **Normalizare/Scalare**: MinMaxScaler sau StandardScaler
2. **Creare secvențe**: Sliding window pentru input
3. **Reshape**: Format 3D (samples, timesteps, features)
4. **Train/Test split**: Temporal, nu aleator!

Exemplu Creare Secvențe

```
def create_sequences(data, n_steps):
    X, y = [], []
    for i in range(len(data) - n_steps):
        X.append(data[i:(i + n_steps)])
    return np.array(X), np.array(y)

X, y = create_sequences(scaled_data, 10)
```

Metrici de Evaluare

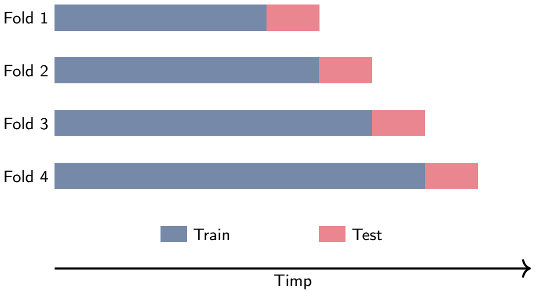
Metrici Comune

- **RMSE**: $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}$ — Eroare în unități originale
- **MAE**: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|y_i - \hat{y}_i|$ — Robust la outlieri
- **MAPE**: $\frac{100}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i}\right|$ — Eroare procentuală
- **MASE**: Comparat cu benchmark naiv

Validare pentru Serii de Timp

- **Nu** folosiți cross-validation standard!
- Folosiți **Time Series Cross-Validation** (walk-forward)
- Sau **train/validation/test** split temporal

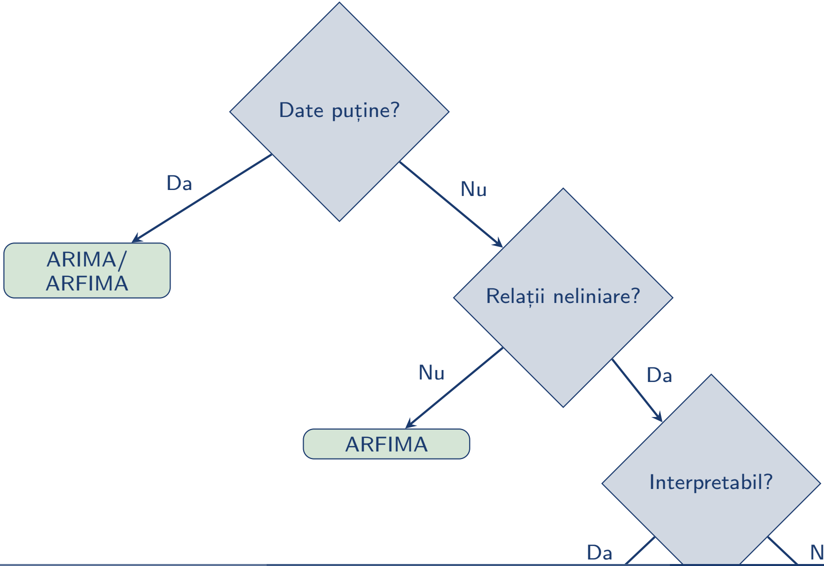
Time Series Cross-Validation



Implementare Python

```
from sklearn.model_selection import TimeSeriesSplit
tscv = TimeSeriesSplit(n_splits=5)
```

Ghid de Selecție a Modelului



Studiu de Caz: Prognoza Prețului Bitcoin

De ce Bitcoin?

- Volatilitate **extremă** și pattern-uri complexe
- Potențială **memorie lungă** în volatilitate
- Relații **neliniare** cu variabile exogene
- Date disponibile la **frecvență înaltă**

Abordare Comparativă

1. ARIMA pe randamente
2. ARFIMA pentru memorie lungă
3. Random Forest cu features tehnice
4. LSTM pe secvențe de prețuri

Studiu de Caz: Prognoza Consumului de Energie

Caracteristici

- **Sezonalitate multiplă**: zilnică, săptămânală, anuală
- **Tendință** de creștere pe termen lung
- **Variabile exogene**: temperatură, zi liberă, preț
- **Anomalii**: evenimente speciale, defecțiuni

Provocări

- Pattern-uri la scale temporale diferite
- Interacțiuni complexe între variabile
- Necesitatea prognozelor pe orizonturi diferite

Formule Cheie – Rezumat

ARFIMA(p,d,q)

$\phi(L)(1-L)^d Y_t = \theta(L)\varepsilon_t$

$d \in (-0.5, 0.5)$: memorie lungă

Memorie Lungă

ACF: $\rho_k \sim C \cdot k^{2d-1}$
Hurst: $d = H - 0.5$

$H > 0.5$: persistență

Random Forest

$\hat{y} = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} T_b(x)$

B arbori, features aleatorii

LSTM Cell

$f_t = \sigma(W_f[h_{t-1}, x_t] + b_f)$
$C_t = f_t \odot C_{t-1} + i_t \odot \tilde{C}_t$

Forget, Input, Output gates

Metrici Evaluare

$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum(y_i - \hat{y}_i)^2}$

$\text{MAPE} = \frac{100}{n}\sum\left|\frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i}\right|$

Time Series CV

Walk-forward validation
Train $\rightarrow$ Test (temporal split)

Rezumat

Ce am învățat

- **ARFIMA**: Extinde ARIMA pentru memorie lungă (d fracționar)
- **Random Forest**: Ansamblu de arbori, relații neliniare, interpretabil
- **LSTM**: Deep learning pentru secvențe, dependențe complexe
- **Trade-offs**: Complexitate vs interpretabilitate vs date necesare

Recomandări Practice

- Începe cu modele **simple** (ARIMA) ca baseline
- Folosește **Time Series CV** pentru evaluare corectă
- ML necesită **feature engineering** atent
- LSTM: doar cu **multe date** și resurse computaționale

Quiz Rapid

1. Ce semnifică $d = 0.3$ într-un model ARFIMA?
2. De ce folosim Time Series CV în loc de k-fold standard?
3. Care este avantajul principal al LSTM față de RNN simplu?
4. Ce tip de model ai alege pentru date puține și relații liniare?
5. Ce înseamnă “data leakage” în contextul ML pentru serii de timp?

Răspunsuri Quiz

1. $d = 0.3$: Memorie lungă, seria este staționară dar autocorelațiile scad lent (hiperbolic). Persistență moderată.
2. **Time Series CV**: Pentru a respecta ordinea temporală. K-fold standard ar folosi date viitoare pentru a prezice trecutul (data leakage).
3. **LSTM vs RNN**: LSTM rezolvă problema "vanishing gradient" prin mecanismul de porți, permițând învățarea dependențelor pe termen lung.
4. **Date puține, relații liniare**: ARIMA sau ARFIMA. ML necesită multe date pentru a generaliza bine.
5. **Data leakage**: Folosirea informației din viitor în features sau în antrenare. Ex: calcularea mediei mobile folosind și date viitoare, sau k-fold standard care amestecă ordinea temporală.

Ce urmează?

Extensii și Subiecte Avansate

- **Transformer** pentru serii de timp (Temporal Fusion Transformer)
- **Prophet** (Facebook/Meta) pentru sezonalitate
- **Neural Prophet**: Prophet + rețele neuronale
- **Ensemble methods**: Combinarea mai multor modele
- **Anomaly detection** cu ML

Întrebări?