



Seminar: Modele de Volatilitate

# ARCH, GARCH, EGARCH, TGARCH

Test de Recapitulare și Exerciții Practice



# Cuprins Seminar

1 Test de Recapitulare

2 Întrebări Adevărat/Fals

3 Probleme Practice

4 Flux de Lucru Python

5 Rezumat

Ce reprezintă “volatility clustering”?

- A Volatilitatea este constantă în timp
- B Perioadele de volatilitate ridicată sunt urmate de perioade de volatilitate ridicată
- C Randamentele sunt corelate în timp
- D Distribuția randamentelor este normală

*Gândiți-vă la comportamentul piețelor financiare în perioadele de criză...*

## Răspuns Întrebarea 1

Răspuns Corect: (B)

Perioadele de volatilitate ridicată sunt urmate de perioade de volatilitate ridicată

### Explicație

- **Volatility clustering** este un fapt stilizat observat în seriile financiare
- Perioadele “agitare” (cu mișcări mari) tind să persiste
- Perioadele “calme” (cu mișcări mici) tind și ele să persiste
- Aceasta implică că varianța condiționată  $\sigma_t^2$  este **predictibilă**
- Modelele GARCH captează exact acest fenomen!

## Întrebarea 2

În modelul GARCH(1,1):  $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$

Ce reprezintă parametrul  $\alpha$ ?

- A Persistența volatilității
- B Nivelul de bază al volatilității
- C Reacția la şocuri recente (news coefficient)
- D Varianța necondiționată

Răspuns Corect: (C)

Reacția la șouri recente (news coefficient)

Interpretarea Parametrilor GARCH(1,1)

- $\omega$  = nivelul de bază (floor) al volatilității
- $\alpha$  = **reacția** la pătratele inovațiilor ("news")
- $\beta$  = **persistența** volatilității (memory)
- $\alpha + \beta$  = persistența totală

Un  $\alpha$  mare înseamnă că volatilitatea reacționează puternic la șouri recente.

## Întrebarea 3

Care este condiția de stationaritate pentru GARCH(1,1)?

- A  $\omega > 0$
- B  $\alpha + \beta = 1$
- C  $\alpha + \beta < 1$
- D  $\alpha > \beta$

## Răspuns Întrebarea 3

Răspuns Corect: (C)

$$\alpha + \beta < 1$$

### Condiții Complete

Pentru stationaritatea GARCH(1,1):

- $\omega > 0$  (asigură varianță pozitivă)
- $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$  (non-negativitate)
- $\alpha + \beta < 1$  (**stationaritate strictă**)

Dacă  $\alpha + \beta = 1 \Rightarrow$  IGARCH (șocurile au efect permanent)

## Întrebarea 4

Care este formula varianței necondiționate în GARCH(1,1)?

- A  $\bar{\sigma}^2 = \omega$
- B  $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha}$
- C  $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$
- D  $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{\alpha + \beta}$

## Răspuns Întrebarea 4

Răspuns Corect: (C)

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$$

### Demonstrație

Luând așteptarea necondiționată a GARCH(1,1):

$$\mathbb{E}[\sigma_t^2] = \omega + \alpha\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] + \beta\mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2]$$

$$\bar{\sigma}^2 = \omega + \alpha\bar{\sigma}^2 + \beta\bar{\sigma}^2$$

$$\bar{\sigma}^2(1 - \alpha - \beta) = \omega$$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$$

## Întrebarea 5

Ce este “leverage effect”?

- A řocurile pozitive cresc volatilitatea mai mult decât cele negative
- B řocurile negative cresc volatilitatea mai mult decât cele pozitive
- C Volatilitatea este independentă de semnul řocurilor
- D Randamentele sunt asimetrice

## Răspuns Întrebarea 5

Răspuns Corect: (B)

Socurile negative cresc volatilitatea mai mult decât cele pozitive

### Explicație

- Observat empiric pe piețele de acțiuni
- Când prețurile scad, leverage-ul firmei crește (datoria devine mai mare relativă la capitaluri)
- Aceasta face firma mai riscantă  $\Rightarrow$  volatilitate mai mare
- GARCH standard **nu poate** captura acest efect (depinde de  $\varepsilon^2$ )
- Soluții: **EGARCH, GJR-GARCH, TGARCH**

## Întrebarea 6

În modelul EGARCH, parametrul  $\gamma$  negativ indică:

- A Absența leverage effect
- B Prezența leverage effect
- C Volatilitate constantă
- D Model nestationar

Răspuns Corect: (B)

Prezența leverage effect

EGARCH(1,1)

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \alpha(|z_{t-1}| - \mathbb{E}[|z|]) + \gamma z_{t-1} + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2)$$

- $\gamma < 0$ : șoc negativ ( $z < 0$ )  $\Rightarrow$  crește  $\ln(\sigma_t^2)$
- $\gamma > 0$ : efect invers (mai rar întâlnit)
- $\gamma = 0$ : efect simetric (ca GARCH)

## Întrebarea 7

Care este principalul avantaj al EGARCH față de GARCH?

- A Este mai rapid de estimat
- B Nu necesită restricții de non-negativitate
- C Are mai puțini parametri
- D Este mai ușor de interpretat

Răspuns Corect: (B)

Nu necesită restricții de non-negativitate

### Avantajele EGARCH

- Modelează  $\ln(\sigma_t^2)$ , nu  $\sigma_t^2$
- $\sigma_t^2 = e^{\ln(\sigma_t^2)} > 0$  **automat**, indiferent de valorile parametrilor
- GARCH necesită  $\omega > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$
- La estimare, aceste restricții pot cauza probleme de convergență

## Întrebarea 8

Ce test folosim pentru a detecta efecte ARCH în reziduuri?

- A Testul Dickey-Fuller
- B Testul Ljung-Box pe reziduuri
- C Testul Engle (ARCH-LM)
- D Testul Breusch-Pagan

Răspuns Corect: (C)

Testul Engle (ARCH-LM)

### Procedura Testului ARCH-LM

- ① Estimează modelul pentru medie, obține reziduurile  $\hat{\varepsilon}_t$
- ② Calculează  $\hat{\varepsilon}_t^2$
- ③ Regresează:  $\hat{\varepsilon}_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + u_t$
- ④ Statistica:  $LM = T \cdot R^2 \sim \chi^2(q)$  sub  $H_0$

$H_0$ : Nu există efecte ARCH      $H_1$ : Există efecte ARCH

## Întrebarea 9

Pentru S&P 500, valorile tipice ale  $\alpha + \beta$  în GARCH(1,1) sunt:

- A 0.50 – 0.70
- B 0.70 – 0.85
- C 0.95 – 0.99
- D Mai mare decât 1

## Răspuns Întrebarea 9

Răspuns Corect: (C)

0.95 – 0.99

### Volatilitate Foarte Persistentă

- Seriile financiare au volatilitate foarte persistentă
- $\alpha + \beta \approx 0.98$  pentru S&P 500
- Half-life:  $HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha+\beta)} \approx 35 - 60$  zile
- Aceasta înseamnă că un soc de volatilitate se disipează în câteva luni

Serie	$\alpha + \beta$
S&P 500	0.97–0.99
Bitcoin	0.90–0.98
EUR/USD	0.96–0.99

## Întrebarea 10

Care distribuție este cel mai des folosită pentru inovațiile GARCH pentru a captura cozile groase?

- A Normală
- B Uniformă
- C Student-t
- D Exponențială

## Răspuns Întrebarea 10

Răspuns Corect: (C)

Student-t

### Distribuții pentru Inovații

- **Normală:** standard, dar subestimează riscul extrem
- **Student-t:** cozi groase, parametru  $\nu$  (grade de libertate)
- **GED:** Generalized Error Distribution, flexibilă
- **Skewed Student-t:** asimetrie + cozi groase

Pentru S&P 500:  $\nu \approx 5 - 8$  (cozi semnificativ mai groase decât normală)

## Adevărat sau Fals?

- ① Modelele ARIMA pot captura volatility clustering.
- ② În GARCH(1,1), dacă  $\alpha + \beta = 1$ , modelul se numește IGARCH.
- ③ GJR-GARCH folosește o variabilă indicator pentru șocuri negative.
- ④ Prognoza volatilității GARCH converge către zero pe termen lung.
- ⑤ EGARCH poate avea parametri negativi fără a genera varianță negativă.
- ⑥ Value at Risk (VaR) poate fi calculat folosind prognoza volatilității GARCH.

## Răspunsuri Adevărat/Fals

- ① **FALS** — ARIMA presupune varianță constantă; GARCH modelează volatilitatea.
- ② **ADEVĂRAT** — IGARCH = Integrated GARCH, volatilitatea are rădăcină unitară.
- ③ **ADEVĂRAT** —  $I_{t-1} = 1$  dacă  $\varepsilon_{t-1} < 0$ , altfel 0.
- ④ **FALS** — Converge către varianță necondiționată  $\bar{\sigma}^2$ , nu zero.
- ⑤ **ADEVĂRAT** — Modelează  $\ln(\sigma_t^2)$ , deci  $\sigma_t^2 = e^{\ln(\sigma_t^2)} > 0$  mereu.
- ⑥ **ADEVĂRAT** —  $\text{VaR}_\alpha = z_\alpha \cdot \sigma_{t+1}$  (pentru medie zero).

## Problema 1: Calculul Varianței Necondiționate

### Enunț

Un model GARCH(1,1) are parametrii estimați:

- $\omega = 0.000002$
- $\alpha = 0.08$
- $\beta = 0.90$

Calculați:

- a. Varianța necondiționată zilnică
- b. Volatilitatea necondiționată zilnică (ca procent)
- c. Volatilitatea anualizată (presupunând 252 zile de tranzacționare)
- d. Half-life-ul volatilității

## Soluție Problema 1

### Răspunsuri

a)  $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta} = \frac{0.000002}{1 - 0.08 - 0.90} = \frac{0.000002}{0.02} = 0.0001$

b)  $\bar{\sigma} = \sqrt{0.0001} = 0.01 = 1\% \text{ pe zi}$

c)  $\sigma_{\text{annual}} = \bar{\sigma} \times \sqrt{252} = 0.01 \times 15.87 = 15.87\% \text{ pe an}$

d)  $HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha + \beta)} = \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.98)} = \frac{-0.693}{-0.0202} \approx 34 \text{ zile}$

### Interpretare

Volatilitatea de 15.87% pe an este tipică pentru un indice bursier. Half-life de 34 zile înseamnă că un şoc de volatilitate se reduce la jumătate după aproximativ 7 săptămâni.

## Problema 2: Prognoză Volatilitate

### Enunț

Folosind modelul GARCH(1,1) de la Problema 1:

- $\omega = 0.000002$ ,  $\alpha = 0.08$ ,  $\beta = 0.90$
- La momentul  $T$ :  $\varepsilon_T = -0.03$  (scădere de 3%),  $\sigma_T^2 = 0.0004$

Calculați prognoza volatilității pentru:

- a  $\sigma_{T+1}^2$  (un pas înainte)
- b  $\sigma_{T+5}^2$  (cinci pași înainte)
- c  $\sigma_{T+100}^2$  (o sută de pași înainte)

## Soluție Problema 2

### Răspunsuri

a)  $\sigma_{T+1}^2 = \omega + \alpha \varepsilon_T^2 + \beta \sigma_T^2$

$$= 0.000002 + 0.08 \times (0.03)^2 + 0.90 \times 0.0004 = 0.000434$$

Volatilitate:  $\sqrt{0.000434} = 2.08\%$

b)  $\mathbb{E}_T[\sigma_{T+5}^2] = \bar{\sigma}^2 + (0.98)^4(\sigma_{T+1}^2 - \bar{\sigma}^2)$

$$= 0.0001 + 0.922 \times (0.000434 - 0.0001) = 0.000408$$

Volatilitate:  $\sqrt{0.000408} = 2.02\%$

c)  $\mathbb{E}_T[\sigma_{T+100}^2] = 0.0001 + (0.98)^{99} \times 0.000334 \approx 0.000145$

Volatilitate:  $\sqrt{0.000145} = 1.20\%$  (aproape de  $\bar{\sigma} = 1\%$ )

## Problema 3: Value at Risk

### Enunț

Un portofoliu de 1.000.000 EUR este investit în acțiuni cu randamente modelate GARCH(1,1).

Prognoza volatilității pentru mâine:  $\sigma_{T+1} = 2\%$  zilnic.

Presupunând randamente normal distribuite cu medie zero, calculați:

- a VaR la 95% (1 zi)
- b VaR la 99% (1 zi)
- c VaR la 99% (10 zile), folosind regula "square root of time"

Cuantile:  $z_{0.05} = 1.645$ ,  $z_{0.01} = 2.326$

## Soluție Problema 3

### Răspunsuri

a) VaR 95% (1 zi):

$$\text{VaR}_{95\%} = 1.645 \times 0.02 \times 1,000,000 = 32,900 \text{ EUR}$$

b) VaR 99% (1 zi):

$$\text{VaR}_{99\%} = 2.326 \times 0.02 \times 1,000,000 = 46,520 \text{ EUR}$$

c) VaR 99% (10 zile):

$$\text{VaR}_{99\%,10d} = \text{VaR}_{99\%,1d} \times \sqrt{10} = 46,520 \times 3.162 = 147,100 \text{ EUR}$$

### Atenție

În practică, pentru Student-t, cuantilele sunt mai mari (cozi mai groase)!

## Problema 4: Identificarea Modelului

### Enunț

Analizați următoarele rezultate ale estimării și identificați modelul:

Parametru	Estimat	Std. Error
$\omega$	0.0000015	0.0000005
$\alpha$	0.0550	0.0120
$\gamma$	0.0850	0.0180
$\beta$	0.9100	0.0150

- a) Ce model este acesta?
- b) Este prezent leverage effect?
- c) Care este impactul unui soc negativ vs pozitiv?
- d) Este modelul stationar?

### Răspunsuri

- a) GJR-GARCH(1,1,1) — prezența parametrului  $\gamma$  (threshold/asymmetry)
- b) Da, leverage effect prezent:  $\gamma = 0.085 > 0$  și semnificativ
- c) Impact:
  - řoc pozitiv: impact =  $\alpha = 0.055$
  - řoc negativ: impact =  $\alpha + \gamma = 0.055 + 0.085 = 0.140$
  - řocurile negative au impact de **2.5x mai mare!**
- d) Stationaritate:  $\alpha + \gamma/2 + \beta = 0.055 + 0.0425 + 0.91 = 1.0075$   
**La limită!** Aproape IGARCH. Model foarte persistent.

## Pasul 1: Încărcare și Pregătire Date

```
import pandas as pd
import numpy as np
import yfinance as yf
from arch import arch_model
from arch.unitroot import ADF

# Descărcare date S&P 500
data = yf.download('^GSPC', start='2010-01-01', end='2024-01-01')
returns = 100 * data['Adj Close'].pct_change().dropna()

# Verificare stationaritate
adf = ADF(returns)
print(f'ADF statistic: {adf.stat:.4f}')
print(f'p-value: {adf.pvalue:.4f}')
```

## Pasul 2: Test Efecte ARCH

```
from statsmodels.stats.diagnostic import het_arch

# Test ARCH-LM pe reziduuri
residuals = returns - returns.mean()
lm_stat, lm_pvalue, f_stat, f_pvalue = het_arch(residuals, nlags=10)

print(f'ARCH-LM statistic: {lm_stat:.4f}')
print(f'p-value: {lm_pvalue:.4f}')

if lm_pvalue < 0.05:
    print('=> Efecte ARCH prezente! Se justifica modelul GARCH.')
```

## Pasul 3: Estimare Modele

```
# GARCH(1,1) cu distributie Student-t
model_garch = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, q=1, dist='t')
res_garch = model_garch.fit(disp='off')
print(res_garch.summary())

# GJR-GARCH(1,1,1)
model_gjr = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, o=1, q=1, dist='t')
res_gjr = model_gjr.fit(disp='off')

# EGARCH(1,1)
model_egarch = arch_model(returns, vol='EGARCH', p=1, q=1, dist='t')
res_egarch = model_egarch.fit(disp='off')

# Comparatie AIC
print(f'GARCH AIC: {res_garch.aic:.2f}')
print(f'GJR AIC: {res_gjr.aic:.2f}')
print(f'EGARCH AIC: {res_egarch.aic:.2f}')
```

## Pasul 4: Diagnostic

```
# Reziduuri standardizate
std_resid = res_gjr.std_resid

# Test Ljung-Box pe reziduuri patrate
from statsmodels.stats.diagnostic import acorr_ljungbox
lb_test = acorr_ljungbox(std_resid**2, lags=10, return_df=True)
print(lb_test)

# Verificare efecte ARCH reziduale
lm_stat2, lm_pval2, _, _ = het_arch(std_resid, nlags=5)
print(f'ARCH-LM reziduuri: stat={lm_stat2:.2f}, p={lm_pval2:.4f}')

if lm_pval2 > 0.05:
    print('=> Nu mai sunt efecte ARCH reziduale. Model OK!')
```

## Pasul 5: Prognoză și VaR

```
# Prognoza 10 zile
forecasts = res_gjr.forecast(horizon=10)
vol_forecast = np.sqrt(forecasts.variance.values[-1, :])

print('Prognoza volatilitatii (%):', vol_forecast)

# Value at Risk 99%
portfolio_value = 1_000_000
VaR_99 = 2.326 * vol_forecast[0] / 100 * portfolio_value
print(f'VaR 99% (1 zi): {VaR_99:.0f} EUR')

# VaR 10 zile
VaR_99_10d = VaR_99 * np.sqrt(10)
print(f'VaR 99% (10 zile): {VaR_99_10d:.0f} EUR')
```

## Concepție Cheie

- **ARCH:** varianța condiționată depinde de șocuri trecute
- **GARCH:** adaugă persistență prin lag-uri ale varianței
- **EGARCH/GJR:** captează leverage effect (asimetrie)
- **Stationaritate:**  $\alpha + \beta < 1$

## Formule Importante

- Varianța necondiționată:  $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$
- Half-life:  $HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha+\beta)}$
- VaR:  $VaR_\alpha = z_\alpha \cdot \sigma \cdot V$

## Sfat Practic

Folosiți distribuția Student-t pentru a captura cozile groase. Verificați absența efectelor ARCH în reziduuri!

## Exercițiu 1

Descărcați randamentele zilnice pentru BET (indicele BVB) și estimați un model GARCH(1,1). Comparați persistența ( $\alpha + \beta$ ) cu S&P 500.

## Exercițiu 2

Pentru Bitcoin, estimați GARCH, EGARCH și GJR-GARCH. Este leverage effect prezent pentru criptomonede?

## Exercițiu 3

Calculați VaR zilnic pentru un portofoliu de 100.000 EUR investit în EUR/USD, folosind volatilitatea GARCH prognozată.

## Exercițiu 4

Compară prognoza volatilității GARCH(1,1) cu volatilitatea realizată (suma pătratelor randamentelor) pentru o perioadă de 20 de zile.