



## Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 3: Modele ARIMA pentru Date Nestaționare



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

## Obiective de învățare

La finalul acestui capitol, veți fi capabili să:

1. Înțelegeți conceptul de nestaționaritate și implicațiile sale
2. Aplicați diferențierea pentru a obține staționaritate
3. Folosiți testul Augmented Dickey-Fuller (ADF) pentru detectarea rădăcinii unitate
4. Construiți, estimați și prognozați cu modele ARIMA (AutoRegressive Integrated Moving Average) ( $p, d, q$ )
5. Evaluați programele prin metoda ferestrei mobile
6. Aplicați metodologia Box-Jenkins pe date reale (PIB SUA)



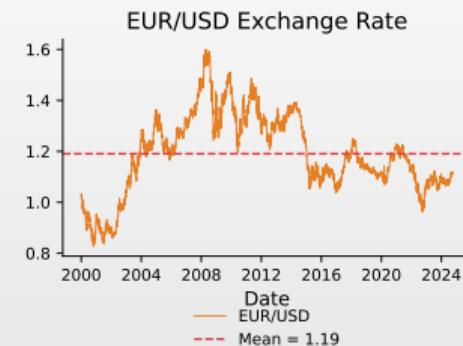
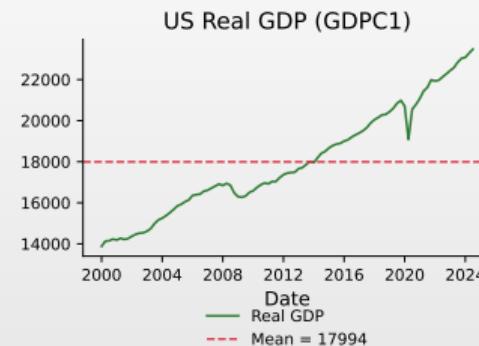
## Cuprins

- Motivație
- Nestaționaritatea în seriile de timp
- Diferențierea și Operatorul diferență
- Modele ARIMA(p,d,q)
- Teste de rădăcină unitate
- Identificarea modelului ARIMA
- Estimarea ARIMA
- Diagnosticul modelului
- Prognoza cu ARIMA
- Studiu de Caz: Prognoza PIB SUA
- Utilizare IA
- Rezumat
- Quiz
- Bibliografie



## De ce ARIMA? Datele nestaționare sunt pretutindeni

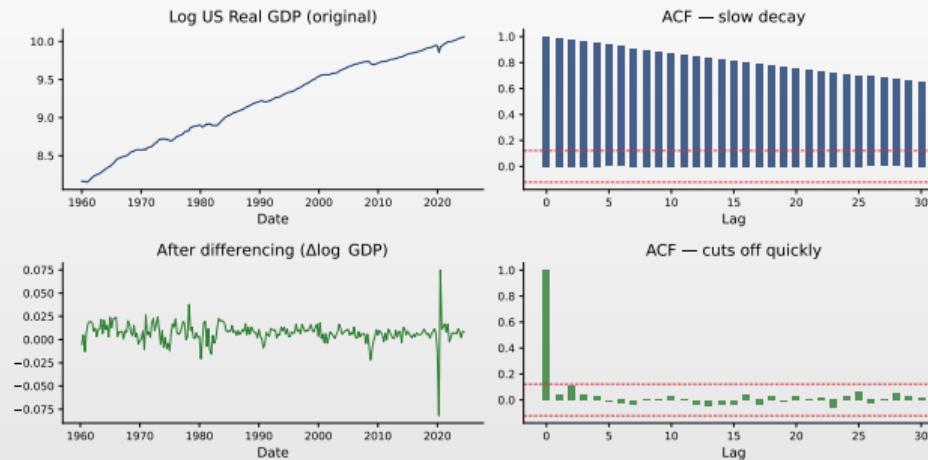
Non-stationary data: sample mean is meaningless



- Prețurile acțiunilor, PIB (Produsul Intern Brut), cursurile de schimb prezintă **trenduri sau mers aleatoriu**
- Media din eșantion (linia roșie) nu este un estimator consistent pentru un proces nestaționar
- Modelele ARMA (AutoRegressive Moving Average) standard **nu pot** gestiona aceste serii direct



## Soluția: diferențierea



### Observație

- Diferențierea transformă o serie nestaționară într-o staționară:  $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$
- ACF (Funcția de Autocorelație) se schimbă de la descreștere lentă la descreștere rapidă!



## De ce contează nestaționaritatea

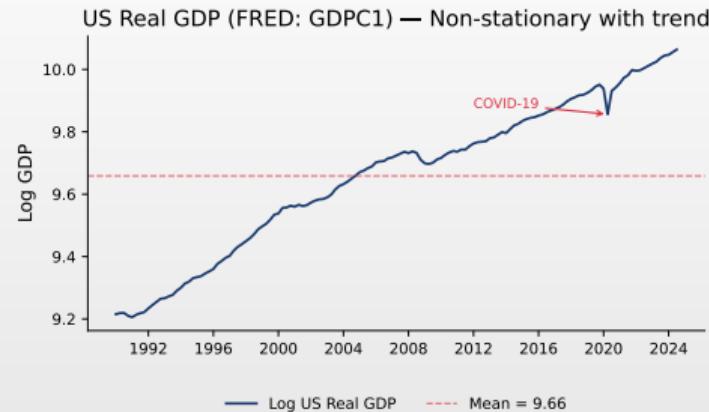
### Problema

- Multe serii de timp economice și financiare sunt **nestaționare**:
  - ▶ PIB, prețuri de acțiuni, cursuri de schimb, indici de inflație
  - ▶ Prezintă tenduri, medii în schimbare sau varianță în creștere

### Consecințele nestaționarității

- Modelele ARMA standard presupun staționaritate
- Regresia OLS (Ordinary Least Squares — Metoda Celor Mai Mici Pătrate) cu date nestaționare duce la **regresie falsă**
- Momentele din eșantion (medie, varianță, ACF) nu sunt estimatori consistenti
- Inferența statistică devine invalidă

## Exemplu: PIB real SUA



### Observații

- Trend ascendent clar  $\Rightarrow$  media nu este constantă
- Exemplu clasic de serie **nestaționară**
- Nu putem aplica modele ARMA direct



## Tipuri de nestaționaritate

### Trend determinist

- Model:**  $Y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$
- Trend:** funcție deterministă de timp
  - ▶ Poate fi eliminat prin regresie
- Socuri:** au efecte temporare

### Trend stochastic (rădăcină unitate)

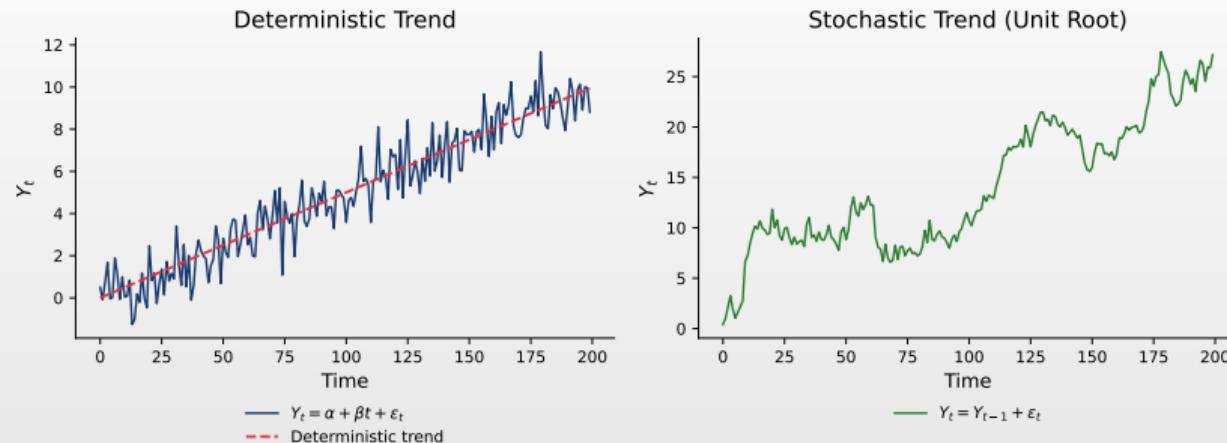
- Model:**  $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$
- Tip:** proces de mers aleator
  - ▶ Trebuie eliminat prin diferențiere
- Socuri:** au efecte permanente

### Distinctie importantă

- Identificarea corectă este crucială
- Eliminarea trendului prin regresie pentru un proces cu rădăcină unitară duce la specificare eronată
- Diferențierea unui proces staționar în trend duce, de asemenea, la specificare eronată



## Vizualizarea diferenței



### Observații

- **Stânga:** Trend determinist — abaterile de la trend sunt temporare
- **Dreapta:** Trend stochastic — șocurile se acumulează permanent
- Ambele arată similar, dar necesită tratamente **diferite!**



## Procesul de mers aleator

### Definiție 1 (Mers aleator)

- Definiție:**  $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$  (WN = White Noise, zgomot alb)
- Condiție inițială:**  $Y_0 = 0 \Rightarrow Y_t = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$

### Proprietățile mersului aleatoriu

- $\mathbb{E}[Y_t] = 0$  (medie constantă)
- $\text{Var}(Y_t) = t\sigma^2$  (varianța crește în timp!)
- $\text{Cov}(Y_t, Y_{t-k}) = (t - k)\sigma^2$  pentru  $k \leq t$
- ACF:  $\rho_k = \sqrt{\frac{t-k}{t}} \rightarrow 1$  când  $t \rightarrow \infty$



## Demonstrație: varianța mersului aleatoriu

### Afirmație

- Pentru  $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$  cu  $Y_0 = 0$ :  $\text{Var}(Y_t) = t\sigma^2$

### Demonstrație

- Prin substituție recursivă:  $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t = \dots = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$
- Luând varianță:  $\text{Var}(Y_t) = \sum_{i=1}^t \text{Var}(\varepsilon_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$
- Deoarece  $\varepsilon_t$  sunt independente, toate covarianțele sunt zero
- $\Rightarrow \text{Var}(Y_t) = \sum_{i=1}^t \sigma^2 = \boxed{t\sigma^2}$

### Nestăționaritate

- Varianța depinde de  $t \Rightarrow$  încalcă cerința staționarității ( $\text{Var}(Y_t) = \gamma(0)$  constant)



## Demonstrație: autocovarianța mersului aleatoriu

### Afirmație

- $\text{Cov}(Y_t, Y_{t-k}) = (t - k)\sigma^2$  pentru  $k \leq t$

### Demonstrație

- Folosind  $Y_t = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$  și  $Y_{t-k} = \sum_{i=1}^{t-k} \varepsilon_i$ :

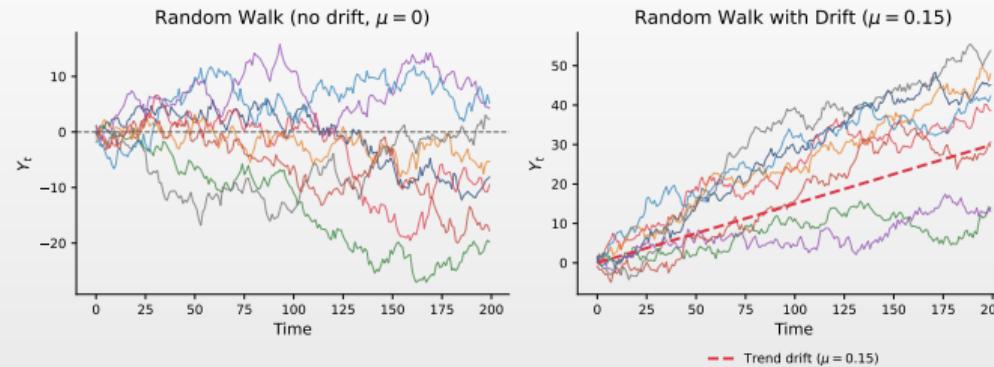
$$\text{Cov}(Y_t, Y_{t-k}) = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{t-k} \text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sum_{i=1}^{t-k} \text{Var}(\varepsilon_i) = \boxed{(t - k)\sigma^2}$$

- Doar termenii cu  $i = j$  supraviețuiesc (când  $i \leq t - k$ )

### ACF

- $\rho(k) = \frac{\text{Cov}(Y_t, Y_{t-k})}{\sqrt{\text{Var}(Y_t)\text{Var}(Y_{t-k})}} = \frac{(t-k)\sigma^2}{\sqrt{t\sigma^2 \cdot (t-k)\sigma^2}} = \sqrt{\frac{t-k}{t}}$

## Mers aleator cu drift



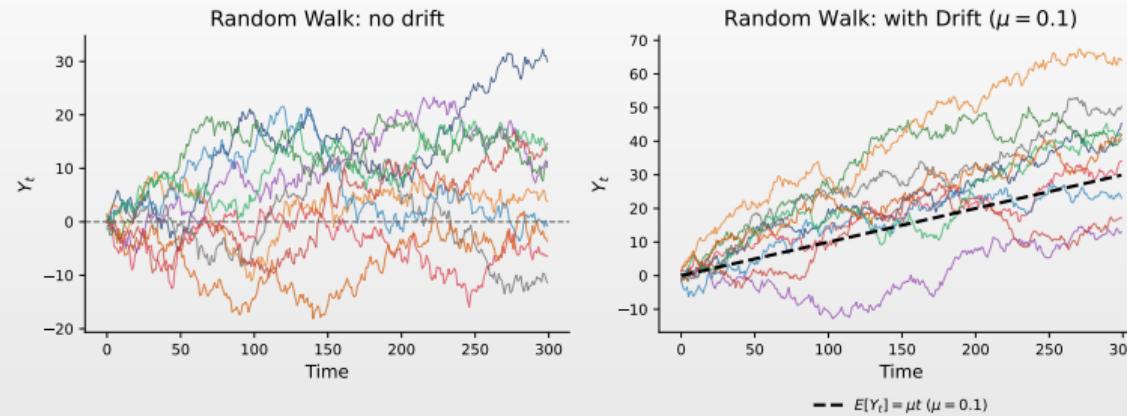
$$Y_t = \mu + Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \Leftrightarrow \quad Y_t = Y_0 + \mu t + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$$

- $\mathbb{E}[Y_t] = Y_0 + \mu t$  (media crește liniar);  $\text{Var}(Y_t) = t\sigma^2$  (varianța tot crește)
- Fără drift** (albastru): rătăcește în jurul lui zero; **Cu drift**  $\mu > 0$  (roșu): trend ascendent
- Ambele sunt nestăționare — drift-ul adaugă trend determinist la rătăcirea stochastică

Q [TSA\\_ch3\\_def\\_random\\_walk\\_drift](#)



## Simularea mersurilor aleatorii



### Observații

- **Stânga:** Mersuri aleatorii pure  $\Rightarrow$  fără drift, rătăcesc imprevizibil
- **Dreapta:** Cu drift  $\Rightarrow$  trend ascendent în medie
- Fiecare traекторie este unică — incertitudinea crește în timp



## Procese integrate

### Definiție 2 (Proces Integrat de Ordin $d$ )

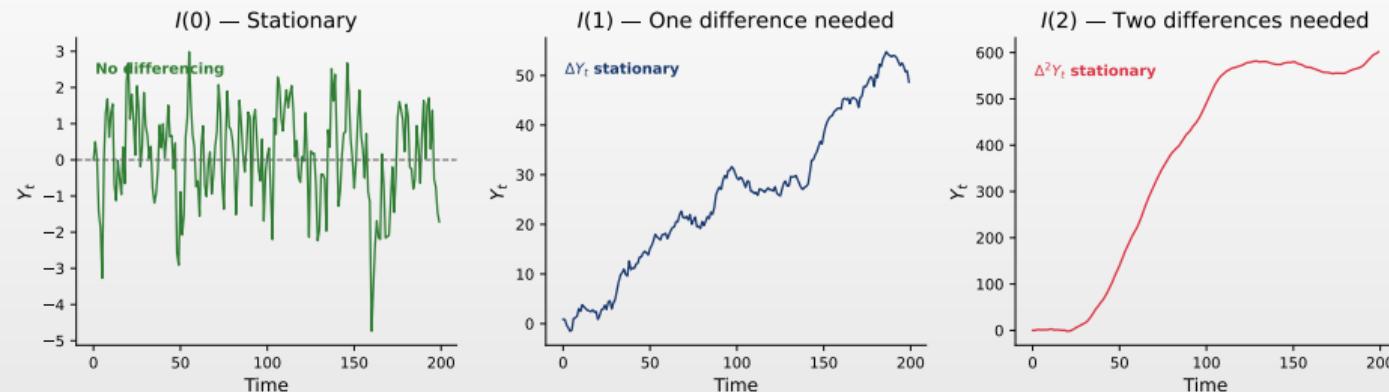
- **Notăție:**  $Y_t \sim I(d)$  dacă:
  - ▶  $Y_t$  este nestaționară
  - ▶  $(1 - L)^d Y_t = \Delta^d Y_t$  este staționară
  - ▶  $(1 - L)^{d-1} Y_t$  este încă nestaționară

### Cazuri comune

- $I(0)$ : Proces staționar (de ex., ARMA)
- $I(1)$ : Prima diferență este staționară (cel mai frecvent pentru date economice)
- $I(2)$ : A doua diferență este staționară (mai rar)



## Proces integrat



### Interpretare grafică

- Seriile  $I(1)$  și  $I(2)$  prezintă ACF cu descreștere foarte lentă
- Fiecare diferențiere elimină o rădăcină unitate
- Majoritatea seriilor economice sunt  $I(0)$  sau  $I(1)$



## Operatorul diferență

### Definiție 3 (Prima Diferență)

- Operator:**  $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (1 - L)Y_t$
- Notătie:**  $L$  este operatorul lag ( $LY_t = Y_{t-1}$ )

### Diferențe de ordin superior

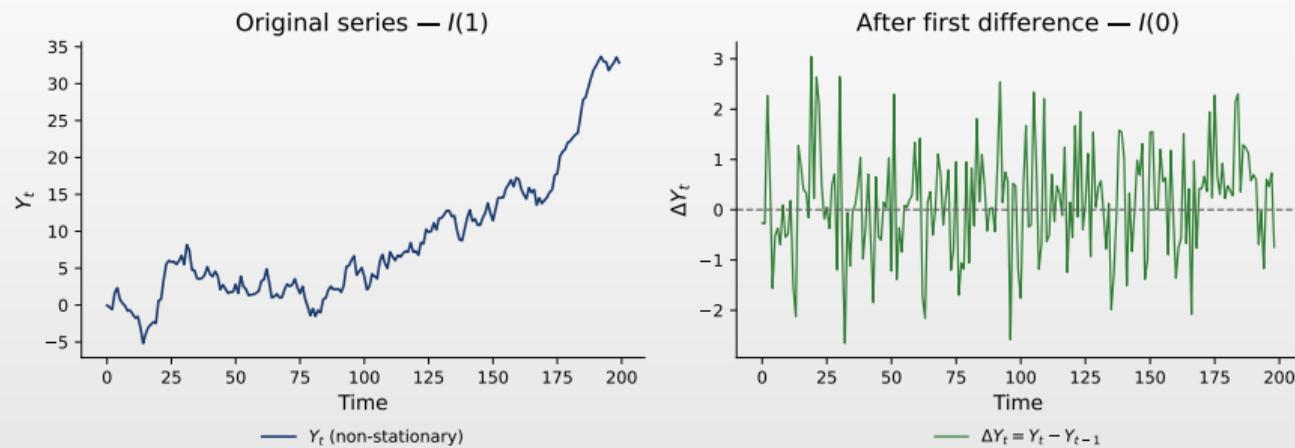
- A doua diferență:  $\Delta^2 Y_t = \Delta(\Delta Y_t) = (1 - L)^2 Y_t$
- $\Delta^2 Y_t = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$
- Diferență de ordin  $d$ :  $\Delta^d Y_t = (1 - L)^d Y_t$

### Rezultat

- Dacă  $Y_t \sim I(d)$ , atunci  $\Delta^d Y_t \sim I(0)$  (staționar)



## Prima diferență



### Observație

- Stânga:** serie nestaționară
- Dreapta:** după prima diferență, seria devine staționară



## Exemplu: diferențierea unui mers aleator

### Mers aleator la zgomot alb

- Fie  $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$  (mers aleator). Luând prima diferență:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = \varepsilon_t$$

- Prima diferență este zgomot alb  $\Rightarrow$  un proces staționar!

### Interpretare

- Un mers aleator este  $I(1)$
- O diferență îl transformă în  $I(0)$
- “Schimbările” într-un mers aleator sunt staționare



## Demonstrație: diferențierea induce staționaritatea

### Afirmație

- Dacă  $Y_t \sim I(1)$ , atunci  $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$  este staționar

### Demonstrație: Mers aleator cu drift $Y_t = \mu + Y_{t-1} + \varepsilon_t$

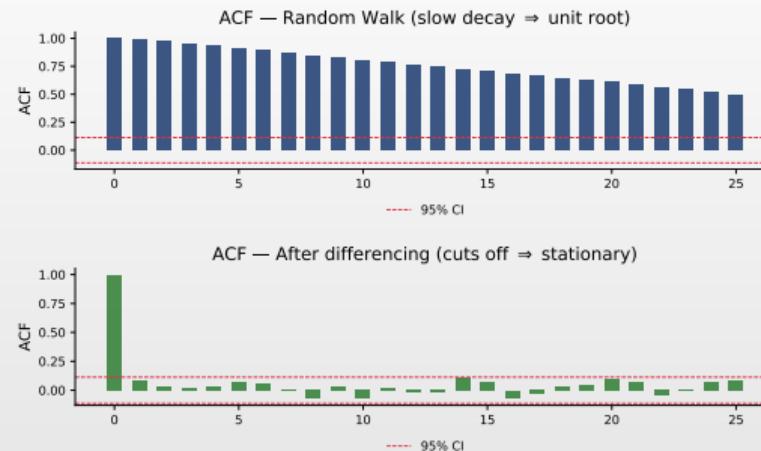
- Prima diferență:  $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = \mu + \varepsilon_t$
- Media:**  $\mathbb{E}[\Delta Y_t] = \mu$  (constantă) ✓
- Varianța:**  $\text{Var}(\Delta Y_t) = \sigma^2$  (constantă) ✓
- Autocovarianța:**  $\text{Cov}(\Delta Y_t, \Delta Y_{t-k}) = 0$  pentru  $k \neq 0$  ✓

### Principiu general

- Diferențierea elimină "memoria" care face varianța să se acumuleze
- Pentru procese  $I(d)$ , sunt necesare  $d$  diferențe



## ACF: detectarea nestaționarității

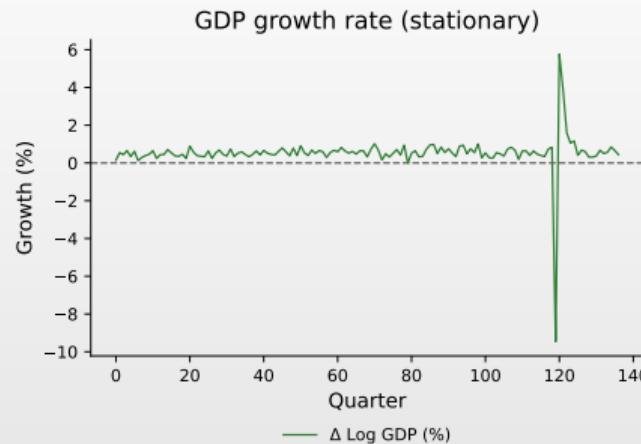
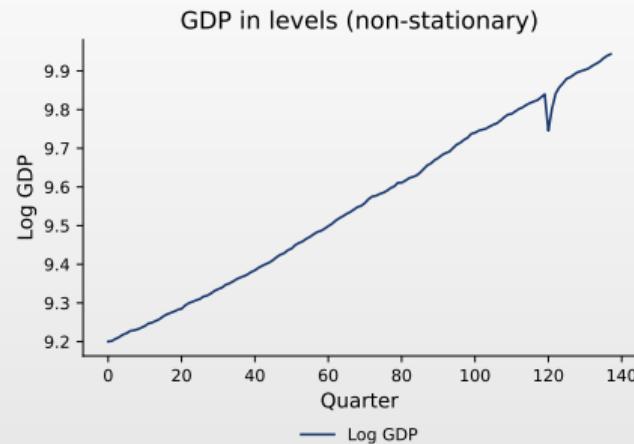


- Sus:** ACF mers aleator scade foarte lent  $\Rightarrow$  rădăcină unitate
- Jos:** După diferențiere, ACF se anulează  $\Rightarrow$  staționar

Q TSA\_ch3\_acf\_nonstationary



## Diferențierea în practică: exemplul PIB



- Stânga:** PIB în valori absolute  $\Rightarrow$  trend ascendent clar (nestaționar)
- Dreapta:** Rata de creștere PIB (diferență logaritmică)  $\Rightarrow$  fluctuează în jurul mediei
- Diferențierea elimină trendul și obține staționaritatea



## Supra-diferențierea

### Avertisment: Supra-diferențierea

- Diferențierea mai mult decât este necesar introduce probleme:
  - ▶ Creează autocorelație negativă artificială
  - ▶ Inflează varianța
  - ▶ Pierde informație

### Exemplu

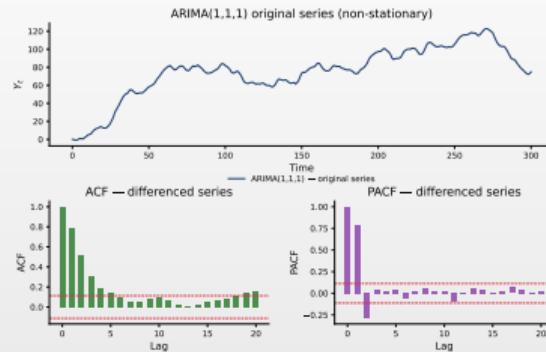
- Dacă  $Y_t \sim I(1)$ , atunci  $\Delta Y_t \sim I(0)$
- Dar dacă diferențiem din nou:

$$\Delta^2 Y_t = \Delta Y_t - \Delta Y_{t-1} = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

- Aceasta este un MA(1) cu  $\theta_1 = -1$  (la granița non-invertibilității)!



## Definiția ARIMA

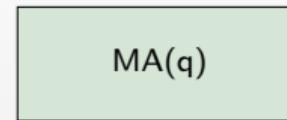


Definiție 4 (ARIMA(p,d,q)):  $\phi(L)(1 - L)^d Y_t = c + \theta(L)\varepsilon_t$

- AR:**  $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \cdots - \phi_p L^p$ ;    **MA:**  $\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \cdots + \theta_q L^q$ ;    **I:**  $d$  diferențe
- Sus:** seria ARIMA originală (nestaționară); **Jos:** după diferențiere — ACF/PACF (Funcția de Autocorelație Parțială) dezvăluie  $p, q$

Q TSA\_ch3\_def\_arima

## Componentele ARIMA



Autoregresiv  
Memorie

Integrare  
Diferențiere

Medie Mobilă  
Șocuri

### Cazuri speciale

- $\text{ARIMA}(p,0,q) = \text{ARMA}(p,q) \Rightarrow$  staționar
- $\text{ARIMA}(0,1,0) = \text{Mers aleator}$
- $\text{ARIMA}(0,1,1) = \text{IMA}(1,1) \Rightarrow$  netezire exponențială
- $\text{ARIMA}(1,1,0) = \text{ARI}(1,1) \Rightarrow \text{AR}(1)$  diferențiat



## Exemplu ARIMA(1,1,0)

### Model ARI(1,1)

- $\Delta Y_t = c + \phi_1 \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$
- Echivalent:  $(1 - \phi_1 L)(1 - L)Y_t = c + \varepsilon_t$

### Interpretare

- Schimbările în  $Y_t$  urmează un proces AR(1)
- Dacă  $|\phi_1| < 1$ , schimbările sunt staționare
- $Y_t$  în sine are un trend stochastic
- Model comun pentru multe serii de timp economice



## Exemplu ARIMA(0,1,1)

### Model IMA(1,1)

- $\Delta Y_t = c + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$
- Echivalent:  $(1 - L)Y_t = c + (1 + \theta_1 L)\varepsilon_t$

### Conexiunea cu netezirea exponențială

- Modelul IMA(1,1) este echivalent cu **netezirea exponențială simplă**:

$$\hat{Y}_{t+1} = \alpha Y_t + (1 - \alpha) \hat{Y}_t$$

- unde  $\alpha = 1 + \theta_1$  (pentru  $-1 < \theta_1 < 0$ )

## Rolul constantei în ARIMA

### Termenul constant în ARIMA(p,d,q)

- Când  $d > 0$ , constanta  $c$  are o interpretare diferită:
- $\phi(L)(1 - L)^d Y_t = c + \theta(L)\varepsilon_t$

### Implicații importante

- Pentru  $d = 1$ :  $c$  reprezintă **drift-ul** (schimbarea medie)
- Formula drift-ului:  $\mathbb{E}[\Delta Y_t] = \frac{c}{1 - \phi_1 - \dots - \phi_p}$
- Pentru  $d = 2$ :  $c$  afectează **curbura** trendului
- Adesea se presupune  $c = 0$  când  $d \geq 1$



## Portret de cercetător: Dickey & Fuller



David Dickey (\*1945)

 [Wikipedia \(en\)](#)



Wayne Fuller (1931–2022)

 [Wikipedia \(en\)](#)

### Biografie

- **David Dickey:** statistician american la NC State University. Doctorand al lui Wayne Fuller la Iowa State
- **Wayne Fuller:** statistician american, profesor la Iowa State University
- Împreună au dezvoltat testul fundamental pentru rădăcini unitate în serii de timp

### Contribuții principale

- **Testul Dickey-Fuller (1979)** — testul fundamental pentru rădăcini unitate
- **Testul ADF (Augmented Dickey-Fuller)** — extensie cu diferențe întârziante
- **Tabele de valori critice** — distribuții non-standard sub ipoteza nulă
- Testarea riguroasă a ordinului de integrare pentru modelarea ARIMA



## Testarea pentru rădăcini unitate

### De ce testăm?

- Scop:** înainte de a potrivi un model ARIMA, trebuie să determinăm:
  - ▶ Este seria staționară? (Este  $d = 0$ ?)
  - ▶ Dacă nu, câte diferențe sunt necesare? (Care este  $d$ ?)

### Teste comune de rădăcină unitate

- DF (Dickey-Fuller)** și **ADF (Augmented Dickey-Fuller)**
- PP (Phillips-Perron)**
- KPSS (Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin)** — test de staționaritate cu ipoteză nulă inversată

## Testul Dickey-Fuller

### Configurare

- Considerăm modelul AR(1):  $Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$ . Scădem  $Y_{t-1}$ :
- $\Delta Y_t = (\phi - 1)Y_{t-1} + \varepsilon_t = \gamma Y_{t-1} + \varepsilon_t$ , unde  $\gamma = \phi - 1$

### Ipoteze

- $H_0: \gamma = 0$  (rădăcină unitate,  $\phi = 1$ , nestaționar)
- $H_1: \gamma < 0$  (staționar,  $|\phi| < 1$ )

### Problemă

- Sub  $H_0$ , statistica  $t$  nu urmează o distribuție  $t$  standard!
- Trebuie folosite valorile critice Dickey-Fuller



## Testul Augmented Dickey-Fuller (ADF)

### Problema cu DF simplu

- Limitare:** dacă există dinamică AR dincolo de AR(1), reziduurile DF vor fi autocorelate

### Definiție 5 (Testul ADF)

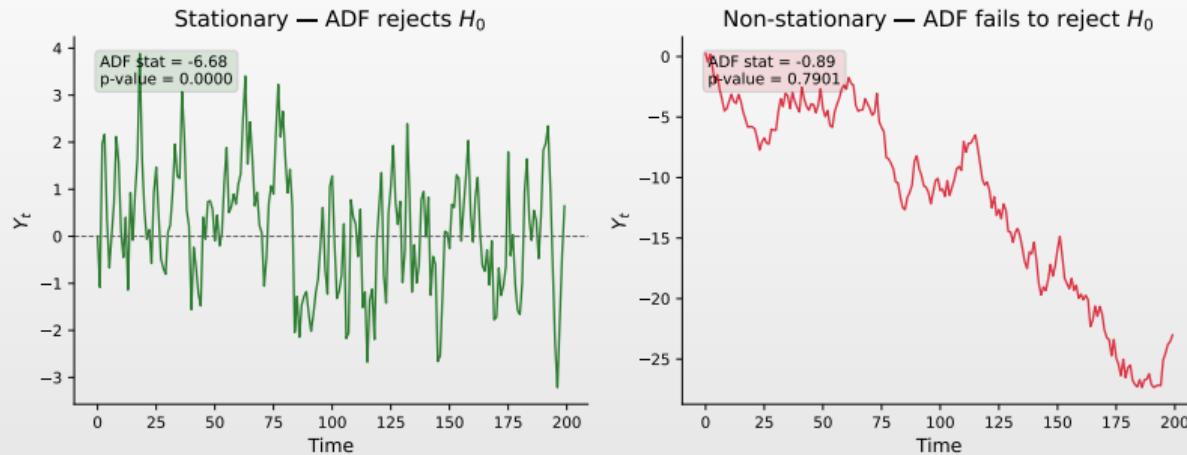
- Ecuatie:**  $\Delta Y_t = \alpha + \beta t + \gamma Y_{t-1} + \sum_{j=1}^k \delta_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t$
- Test:**  $H_0 : \gamma = 0$  folosind valorile critice ADF

### Alegerea lungimii lag-ului $k$

- Folosiți criterii informaționale: AIC (Criteriul Informațional Akaike), BIC (Criteriul Informațional Bayesian)
- Începeți cu  $k_{max}$ , reduceti până ultimul lag este semnificativ



## Testul ADF



### Observație

- Stânga:** serie staționară  $\Rightarrow$  ADF respinge rădăcina unitate
- Dreapta:** nestaționară  $\Rightarrow$  ADF nu respinge



## Valori critice ADF

Model	1%	5%	10%
Fără constantă, fără trend	–2.58	–1.95	–1.62
Cu constantă	–3.43	–2.86	–2.57
Cu constantă și trend	–3.96	–3.41	–3.13

### Regula de decizie

- Statistică de test < valoare critică  $\Rightarrow$  Respingem  $H_0$  (staționar)
- Statistică de test  $\geq$  valoare critică  $\Rightarrow$  Nu respingem (rădăcină unitate)



## Testul Phillips-Perron (PP)

### Motivație

- **Ipoteze:**  $H_0$ : Rădăcină unitate vs  $H_1$ : Staționar (ca ADF)
- **Diferență:** folosește o corecție non-parametrică pentru corelația serială
  - ▶ Nu adaugă diferențe întârziate ca ADF

### Statistică de Test

- **Formula:**  $Z_t = t_{\hat{\gamma}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\lambda}^2}} - \frac{T(\hat{\lambda}^2 - \hat{\sigma}^2)(se(\hat{\gamma}))}{2\hat{\lambda}^2 \cdot s}$
- **Notație:**  $\hat{\lambda}^2$  este estimarea consistentă a varianței pe termen lung (Newey-West)

### Avantaje față de ADF

- Robust la heteroscedasticitate și corelație serială
- Nu necesită selectarea lungimii lag-ului (folosește lățime de bandă)



## Testul KPSS

### Ipoteze inversate

- **Spre deosebire de ADF:**  $H_0$ : Staționar vs  $H_1$ : Rădăcină unitate
  - ▶ Ipoteza nulă este inversată față de ADF/PP

### Procedura KPSS

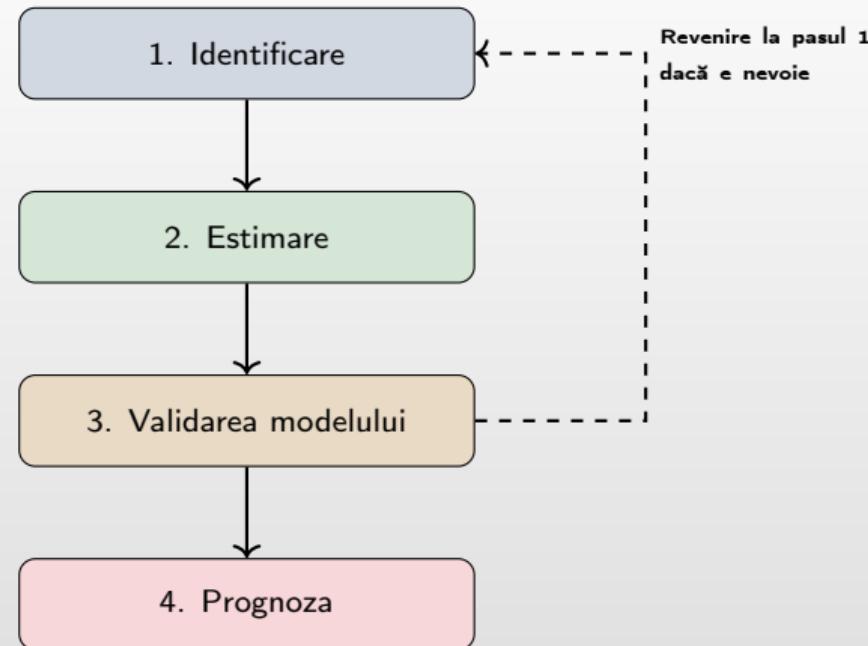
- **Descompunere:**  $Y_t = \xi t + r_t + \varepsilon_t$  unde  $r_t = r_{t-1} + u_t$
- **Test:** verificăm dacă  $\text{Var}(u_t) = 0$ 
  - ▶ Dacă da, componenta aleatoare  $r_t$  este constantă

### Utilizare complementară cu ADF

- ADF respinge, KPSS nu respinge  $\Rightarrow$  Staționar
- ADF nu respinge, KPSS respinge  $\Rightarrow$  Rădăcină unitate
- Ambele resping sau niciunul  $\Rightarrow$  Neconcludent



## Metodologia Box-Jenkins



## Pasul 1: Determinarea lui $d$

### Procedură

1. Reprezentați grafic seria de timp  $\Rightarrow$  căutați trenduri, varianță în schimbare
2. Examinați ACF  $\Rightarrow$  descreștere lentă sugerează nestaționaritate
3. Aplicați teste de rădăcină unitate (ADF, KPSS)
4. Dacă nestăționară, diferențiați și repetăți

### Ghiduri practice

- Majoritatea seriilor economice:  $d = 1$  este suficient
- Rar avem nevoie de  $d > 2$
- Dacă ACF al  $\Delta Y_t$  tot scade lent, încercați  $d = 2$
- Atenție la supra-diferențiere (ACF cu  $\rho_1 \approx -0.5$ )



## Pasul 2: Determinarea lui $p$ și $q$

### După diferențiere

- Principiu:** odată ce  $W_t = \Delta^d Y_t$  este staționar, folosiți ACF/PACF pentru a identifica ARMA( $p, q$ )

Model	ACF	PACF
AR( $p$ )	Scade exponențial	Se anulează după lag $p$
MA( $q$ )	Se anulează după lag $q$	Scade exponențial
ARMA( $p, q$ )	Scade	Scade

### Criterii informaționale

- Când:** tiparele ACF/PACF sunt neclare
- AIC:**  $-2 \ln(L) + 2k$ ;    **BIC:**  $-2 \ln(L) + k \ln(n)$
- Notație:  $L$  = verosimilitate,  $k$  = parametri,  $n$  = dimensiune eșantion
- Mai mic este mai bun; BIC penalizează complexitatea mai mult



## Algoritmi Auto-ARIMA

### Selectie automată a modelului

- Software-ul modern poate selecta automat  $(p, d, q)$ :
  - Python: `pmdarima.auto_arima()`   R: `forecast::auto.arima()`

### Cum funcționează Auto-ARIMA

1. Folosește teste de rădăcină unitate pentru a determina  $d$
2. Potrivește modele pentru diverse combinații  $(p, q)$
3. Selectează modelul cu cel mai mic AIC/BIC
4. Opțional folosește căutare pas cu pas pentru eficiență

### Atenție

- Selectia automată este utilă dar nu garantată
- Verificați întotdeauna validitatea modelului!



## Metode de estimare

### Estimarea prin MLE (Maximum Likelihood Estimation — Estimarea prin Verosimilitate Maximă)

- Abordarea standard pentru ARIMA:
  - ▶ Presupune  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$
  - ▶ Maximizează funcția de verosimilitate
  - ▶ Oferă estimatori consistenti, eficienți
  - ▶ Furnizează erori standard pentru inferență

### MLE condiționată vs exactă

- **MLE Condiționată:** Condiționează pe valorile inițiale
- **MLE Exactă:** Tratează valorile inițiale ca necunoscute
- Diferența diminuează pe măsură ce dimensiunea eșantionului crește



## Log-verosimilitatea condiționată

### Funcția de log-verosimilitate gaussiană

- $\ell(\theta, \sigma^2) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T e_t^2(\theta)$
- $e_t(\theta) = X_t - \hat{X}_{t|t-1}$  sunt erorile de predicție la un pas
- $\theta = (\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, c)$

### Exemplu: ARIMA(1,1,1)

- Erorile de predicție:  $e_t = \Delta X_t - \phi_1 \Delta X_{t-1} - \theta_1 e_{t-1} - c$
- MLE condiționată: fixează  $e_0 = 0$ , calculează  $e_1, \dots, e_T$ , maximizează  $\ell$

### Estimarea lui $\sigma^2$

- La parametrii optimi  $\hat{\theta}$ :  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T e_t^2(\hat{\theta})$



## Restricții asupra parametrilor

### Staționaritate și invertibilitate

- Modelul ARIMA estimat ar trebui să satisfacă:
  - ▶ **Staționaritate AR:** Rădăcinile lui  $\phi(z) = 0$  în afara cercului unitate
  - ▶ **Invertibilitate MA:** Rădăcinile lui  $\theta(z) = 0$  în afara cercului unitate

### Verificare în practică

- Majoritatea software-ului raportează:
  - ▶ Coeficienți estimați cu erori standard
  - ▶ Rădăcinile polinoamelor AR și MA
  - ▶ Avertisment dacă este detectată aproape-rădăcină-unitate



## Diagnosticul modelului ARIMA

### Verificări esențiale (aceleași ca pentru ARMA, cf. Cap. 2)

- Dacă modelul este corect, reziduurile  $\hat{\epsilon}_t$  trebuie să fie zgomot alb:
  1. **ACF/PACF rezidual:** fără vârfuri semnificative
  2. **Testul Ljung-Box:**  $p\text{-value} > 0.05 \Rightarrow$  fără autocorelare
  3. **Graficul Q-Q:** verificarea normalității
  4. **Heteroscedasticitate:** varianță constantă a reziduurilor

### Acțiuni dacă diagnosticul eșuează

- Adăugați termeni AR sau MA suplimentari
- Verificați rupturi structurale în serie
- Reconsiderați ordinul de diferențiere  $d$



## Testul Ljung-Box

### Definiție 6 (Statistica Q Ljung-Box)

$$Q(m) = n(n + 2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k}. \text{ Sub } H_0 \text{ (fără autocorelare): } Q(m) \sim \chi^2(m - p - q)$$

### Utilizare

- Alegeți  $m \approx \ln(n)$  sau  $m = 10$  trimestrial,  $m = 20$  lunar
- Gradele de libertate se ajustează pentru parametrii estimați
- Respingeți dacă  $Q(m)$  depășește valoarea critică

### Dacă testul eșuează

- Luați în considerare adăugarea de termeni AR sau MA
- Verificați rupturile structurale în serie



## Prognoze punctuale

### Prognoza cu MSE (Mean Squared Error — Eroarea Medie Pătratică) minim

- Prognoză optimă la  $h$  pași:  $\hat{Y}_{T+h|\tau} = \mathbb{E}[Y_{T+h} | Y_T, Y_{T-1}, \dots]$

### Prognoza ARIMA(1,1,1)

- **Model:**  $(1 - \phi_1 L)(1 - L)Y_t = c + (1 + \theta_1 L)\varepsilon_t$
- **Un pas:**  $\hat{Y}_{T+1|\tau} = c + Y_T + \phi_1(Y_T - Y_{T-1}) + \theta_1 \hat{\varepsilon}_T$
- **Multi-pas:** înlocuiți  $\varepsilon_{T+j}$  cu 0,  $Y_{T+j}$  cu  $\hat{Y}_{T+j|\tau}$

## Intervale de prognoză

### Incertitudinea prognozei

- Varianța erorii la  $h$  pași:  $\text{Var}(e_{T+h}) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2$
- $\psi_j$  sunt coeficienții reprezentării MA( $\infty$ )

### Intervale de încredere

- Sub normalitate, interval  $(1 - \alpha)\%$ :  $\hat{Y}_{T+h|T} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(e_{T+h})}$

### Proprietate a seriilor I(1)

- Pentru procese integrate, varianța prognozei crește nelimitat când  $h \rightarrow \infty$
- Intervalele se largesc în timp!



## Prognoze pe termen lung pentru ARIMA

### Comportament când $h \rightarrow \infty$

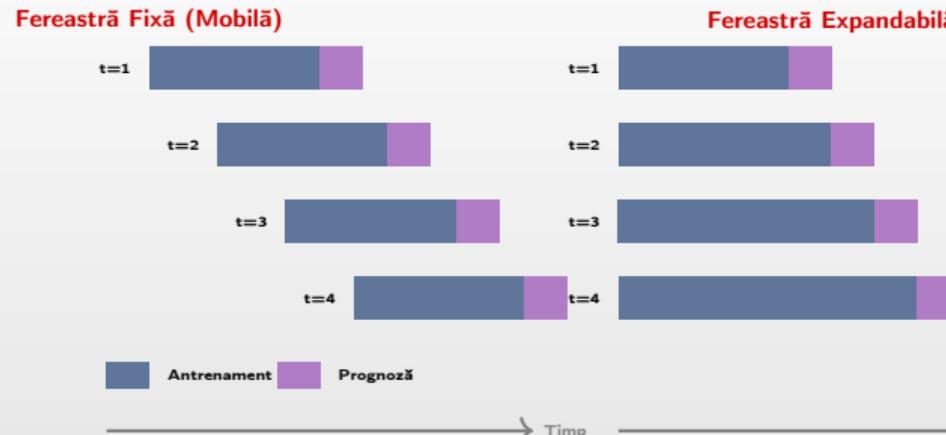
- Cu drift  $c$ :** Prognoze punctuale  $\Rightarrow$  trend liniar; IC (Interval de Încredere)  $\Rightarrow$  lățimea crește cu  $\sqrt{h}$
- Fără drift:** Prognoze punctuale  $\Rightarrow$  converg la ultima valoare observată; IC  $\Rightarrow$  tot cresc nelimitat

### Implicație practică

- Prognozele ARIMA sunt cele mai fiabile pentru orizonturi scurte
- Prognozele pe termen lung au benzi de incertitudine foarte largi



## Prognoză cu fereastră mobilă: fixă vs expandabilă



### Evaluarea acurateții progronei în afara eșantionului

- **Fixă:** fereastra alunecă, dimensiune constantă  $w$  — se adaptează la schimbări de regim
- **Expandabilă:** fereastra crește — folosește toate datele istorice
- Mînează scenariul de prognoză în timp real; oferă multiple erori pentru evaluare



## Prognoză 1-pas vs multi-pas

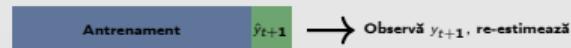
### 1-Pas înainte (recursiv)

- Prognozează doar perioada următoare
  - ▶ Re-estimează modelul după fiecare pas
  - ▶ Folosește valoarea reală odată observată
- Cea mai precisă pentru orizonturi scurte

### Multi-Pas (direct)

- Prognozează mai multe perioade înainte
  - ▶ Fără re-estimare între pași
  - ▶ Folosește valori proгnozate ca input
- Incertitudinea se acumulează cu orizontul

#### 1-Pas Înainte



#### Multi-Pas (h=3)



## Prognosă cu fereastră mobilă: exemplu pas cu pas

Configurare: ARIMA(1,1,0) cu  $\phi_1 = 0.6$

- Model:  $\Delta Y_t = \phi_1 \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$  unde  $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$

Date la momentul  $T$

- $Y_{T-2} = 100$ ,  $Y_{T-1} = 103$ ,  $Y_T = 108 \Rightarrow \Delta Y_{T-1} = 3$ ,  $\Delta Y_T = 5$

Prognosă punctuală la 1 pas

$$\begin{aligned}\hat{\Delta Y}_{T+1|T} &= \phi_1 \cdot \Delta Y_T = 0.6 \times 5 = 3 \\ \hat{Y}_{T+1|T} &= Y_T + \hat{\Delta Y}_{T+1|T} = 108 + 3 = 111\end{aligned}$$



## Prognoze punctuale multi-pas

### Prognoza la 2 pași

$$\begin{aligned}\hat{\Delta Y}_{T+2|T} &= \phi_1 \cdot \hat{\Delta Y}_{T+1|T} = 0.6 \times 3 = 1.8 \\ \hat{Y}_{T+2|T} &= \hat{Y}_{T+1|T} + \hat{\Delta Y}_{T+2|T} = 111 + 1.8 = \boxed{112.8}\end{aligned}$$

### Formula generală pentru prognoza la $h$ pași (ARIMA(1,1,0))

$$\begin{aligned}\hat{\Delta Y}_{T+h|T} &= \phi_1^h \cdot \Delta Y_T \\ \hat{Y}_{T+h|T} &= Y_T + \Delta Y_T \cdot \frac{\phi_1(1 - \phi_1^h)}{1 - \phi_1}\end{aligned}$$

### Numeric: Prognoza la 3 pași

$$\hat{Y}_{T+3|T} = 108 + 5 \times \frac{0.6(1 - 0.6^3)}{1 - 0.6} = 108 + 5 \times 1.176 = \boxed{113.88}$$



## Intervale de încredere: formule

### Varianța erorii de prognoză

- Pentru ARIMA(1,1,0) la  $h$  pași:
- $\text{Var}(e_{T+h|T}) = \sigma^2 \left(1 + \sum_{j=1}^{h-1} \psi_j^2\right)$
- $\psi_j = 1 + \phi_1 + \cdots + \phi_1^j = \frac{1 - \phi_1^{j+1}}{1 - \phi_1}$  pentru  $j \geq 0$

### Interval de încredere $(1 - \alpha)\%$

- $\hat{Y}_{T+h|T} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\text{Var}(e_{T+h|T})}$
- Pentru IC 95%:  $z_{0.025} = 1.96$



## Interval de încredere: exemplu numeric

Date:  $\sigma^2 = 4$ ,  $\phi_1 = 0.6$ ,  $\hat{Y}_{T+1|T} = 111$

IC la 1 pas

$$\text{Var}(e_{T+1|T}) = \sigma^2 = 4$$

$$\text{IC 95\%} = 111 \pm 1.96 \times \sqrt{4} = 111 \pm 3.92 = [107.08, 114.92]$$

IC la 2 pași (pentru  $\hat{Y}_{T+2|T} = 112.8$ )

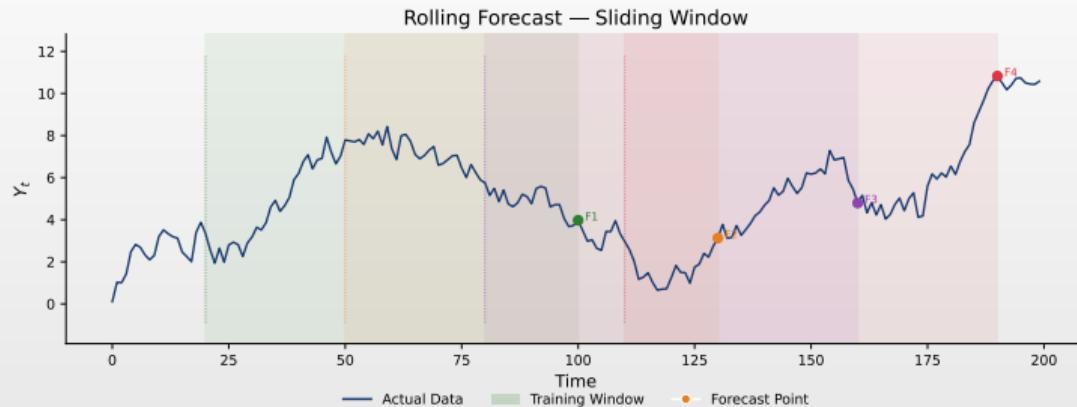
$$\psi_1 = 1 + \phi_1 = 1.6, \quad \text{Var}(e_{T+2|T}) = 4(1 + 1.6^2) = 14.24$$

$$\text{IC 95\%} = 112.8 \pm 1.96 \times \sqrt{14.24} = 112.8 \pm 7.40 = [105.40, 120.20]$$

Notă

- IC se lărgește pe măsură ce orizontul de predicție crește!

## Ilustrație: fereastră mobilă



- Fiecare fereastră produce o prognoză la 1 pas
- Comparăm prognozele cu valorile reale pentru a calcula RMSE (Root Mean Squared Error) și MAE (Mean Absolute Error)
- Fereastra mobilă menține estimarea modelului actualizată



## Studiu de caz: analiză ARIMA completă

### Obiectiv

- Prognoză PIB Real al SUA folosind metodologia Box-Jenkins

### Etape

- Pasul 1:** vizualizarea datelor și verificarea staționarității
- Pasul 2:** Aplicarea testelor de rădăcină unitate (ADF, KPSS)
- Pasul 3:** Diferențiere dacă e necesar, identificare  $p$  și  $q$
- Pasul 4:** Estimarea modelului ARIMA
- Pasul 5:** Diagnosticul modelului
- Pasul 6:** Generarea prognozelor cu intervale de încredere
- Pasul 7:** Evaluarea acurateții prognozei

### Date

- PIB Real SUA (FRED — Federal Reserve Economic Data: GDPC1), Trimestrial
- Perioadă: 1990T1–2024T2,  $n = 138$  observații



## Pasul 1: analiza inițială a datelor



### Observații

- Trend ascendent clar  $\Rightarrow$  medie neconstantă
- Scădere notabilă în 2020 (COVID-19)
- Concluzie:** nestaționar, necesită diferențiere



## Pasul 2: testarea rădăcinii unitate

### Test ADF pe log PIB (serie originală)

- Statistică test:  $-0.91$
- Valori critice:  $-3.48$  (1%),  $-2.88$  (5%),  $-2.58$  (10%)
- p-value: 0.79
- Rezultat:** Nu putem respinge  $H_0 \Rightarrow$  Rădăcină unitate prezentă

### Test ADF pe prima diferență (rata de creștere)

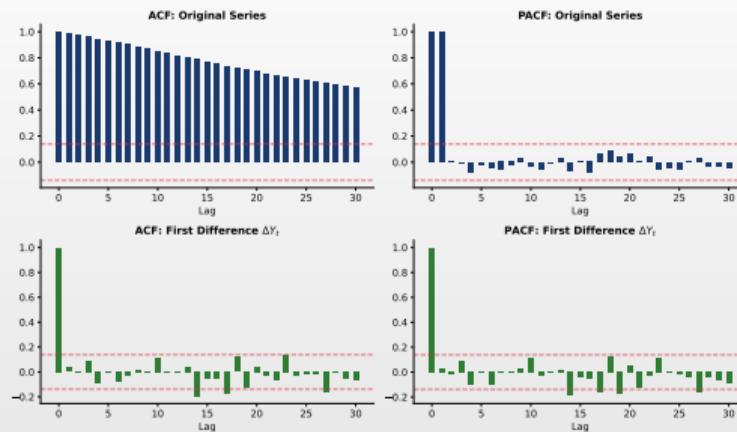
- Statistică test:  $-13.24$
- p-value:  $< 0.001$
- Rezultat:** Respingem  $H_0$  la 1%  $\Rightarrow$  Staționar după diferențiere

## Concluzie

- PIB este  $I(1) \Rightarrow$  Folosim  $d = 1$  în modelul ARIMA



## Pasul 3: Identificarea modelului prin ACF/PACF



### Analiza seriei diferențiate

- ACF:** Vârf la lag 1, apoi se anulează — sugerează MA(1)
- PACF:** Vârf la lag 1, scade — sugerează AR(1)
- Candidate:** ARIMA(1,1,0), ARIMA(0,1,1), ARIMA(1,1,1)



## Pasul 4: Estimarea modelului

### Compararea modelelor folosind criterii informationale

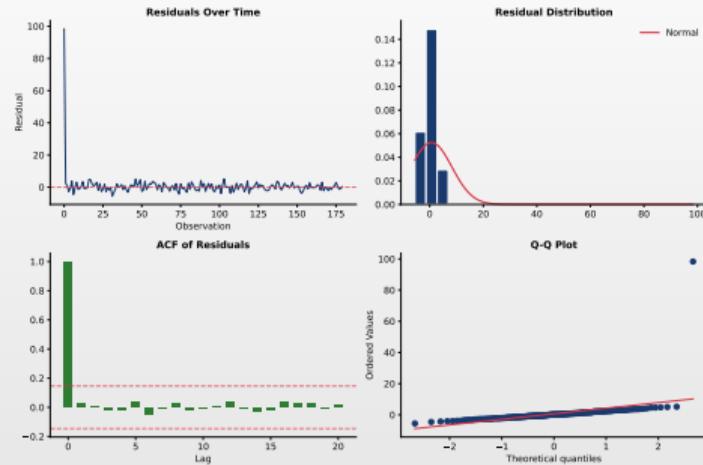
Model	AIC	BIC	Log-Lik
ARIMA(1,1,0)	-725.2	-719.5	364.6
ARIMA(0,1,1)	-724.8	-719.2	364.4
<b>ARIMA(1,1,1)</b>	<b>-747.0</b>	<b>-738.5</b>	<b>376.5</b>

Model selectat: ARIMA(1,1,1)

$$(1 - 0.35L)(1 - L)Y_t = (1 + 0.58L)\varepsilon_t, \quad \hat{\sigma}^2 = 0.000156$$

- $\hat{\phi}_1 = 0.35$  (SE — Standard Error = 0.09), semnificativ la 1%
- $\hat{\theta}_1 = 0.58$  (SE = 0.08), semnificativ la 1%

## Pasul 5: diagnosticul modelului



### Analiza reziduurilor

- Ljung-Box:  $Q(10) = 5.8$ , p-value = 0.83 — fără autocorelare
- JB (Jarque-Bera): 156.4,  $p < 0.001$  — non-normal (outlier COVID)
- Concluzie:** trece verificările de autocorelare



## Pasul 6: Prognoza cu intervale de încredere

### Ultimele valori observate (log PIB)

- $Y_T = 9.973$  (2024T2),  $Y_{T-1} = 9.956$  (2024T1)
- $\Delta Y_T = 0.017$ ,  $\hat{\varepsilon}_T = 0.004$

### Prognoza la 1 pas (2024T3)

$$\hat{\Delta Y}_{T+1} = \hat{\phi}_1 \Delta Y_T + \hat{\theta}_1 \hat{\varepsilon}_T = 0.35(0.017) + 0.58(0.004) = 0.0083$$

$$\hat{Y}_{T+1} = 9.973 + 0.0083 = \boxed{9.981}$$

### Interval de încredere 95%

- $IC = 9.981 \pm 1.96 \times \sqrt{0.000156} = [9.957, 10.006]$
- În valori absolute: Prognoză PIB = \$21,652 mld
- $IC = [\$21,142 \text{ mld}, \$22,175 \text{ mld}]$



## Pasul 7: Prognoză cu fereastră mobilă (Train/Val/Test)

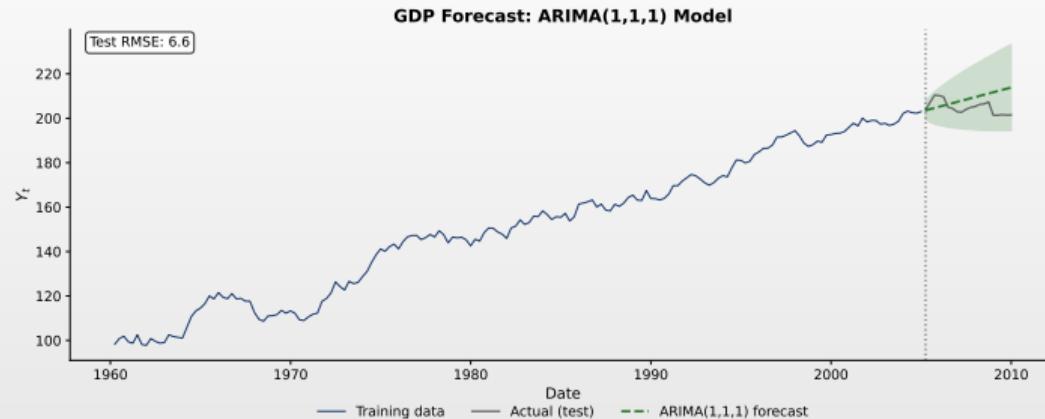


### Prognoză 1-pas înainte cu fereastră mobilă (expandabilă, IC 95%)

- ☐ Train 70% → Val 15% → Test 15%
- ☐ Fereastră expandabilă re-estimează modelul la fiecare pas



## Pasul 8: Evaluarea prognozei



### Performanță out-of-sample (ultimele 12 trimestre)

- RMSE = 0.0486 ≈ 4.86% eroare
- MAE = 0.0430 ≈ 4.30% eroare
- Acuratețe direcție = 91% — a prezis corect creștere/scădere



## Exercițiu AI: Gândire critică

Prompt de testat în ChatGPT / Claude / Copilot

"Descarcă de pe FRED PIB-ul trimestrial real al SUA (seria GDPC1) din 2000-Q1 până în 2024-Q4 (100 observații). Testează staționaritatea, diferențiază dacă e nevoie, estimează un model ARIMA și prognozează 8 trimestre. Vreau cod Python complet cu grafice."

Exercițiu

1. Rulați prompt-ul într-un LLM (Large Language Model) la alegere și analizați critic răspunsul.
2. Testează staționaritatea cu ADF *înainte* de a estima ARIMA? Folosește și KPSS?
3. Cum determină ordinul de diferențiere  $d$ ? Verifică supra-diferențierea?
4. Cum alege ordinele  $p$  și  $q$ ? Folosește ACF/PACF sau doar auto\_arima?
5. Intervalele de încredere se largesc cu orizontul? (proprietate fundamentală I(1))

**Atenție:** Codul generat de AI poate rula fără erori și arăta profesional. *Asta nu înseamnă că e corect.*



## Rezumat

### Ce am învățat în acest capitol

- Nestaționaritatea în seriile de timp
  - ▶ Trend determinist vs stochastic; consecințe asupra inferenței statistice
- Diferențierea și procesele integrate
  - ▶  $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ ; dacă  $Y_t \sim I(d)$ , atunci  $\Delta^d Y_t \sim I(0)$
- Modele ARIMA( $p, d, q$ ) și teste de rădăcină unitate
  - ▶ ADF, PP, KPSS; Box-Jenkins: identificare  $\Rightarrow$  estimare  $\Rightarrow$  validare
- Prognoze cu intervale de încredere
  - ▶ Pentru  $I(1)$ : IC se largesc nelimitat cu orizontul ( $\propto \sqrt{h}$ )

### De reținut

- Diferențiați cu atenție:** O diferență este de obicei suficientă ( $d = 1$ )
- Supra-diferențierea creează autocorelație artificială



## Ce urmează?

### Capitolul 4: Modele SARIMA (Seasonal ARIMA) pentru date sezoniere

- Sezonalitatea:** tipare repetitive la intervale regulate
- Diferențierea sezonieră:** operatorul  $(1 - L^s)$
- SARIMA( $p, d, q$ ) $(P, D, Q)_s$ :** extensia sezonieră a ARIMA
- Identificarea modelului:** ACF/PACF sezoniere
- Studiu de caz:** Prognoza pasagerilor aerieni

Întrebări?



## Întrebarea 1

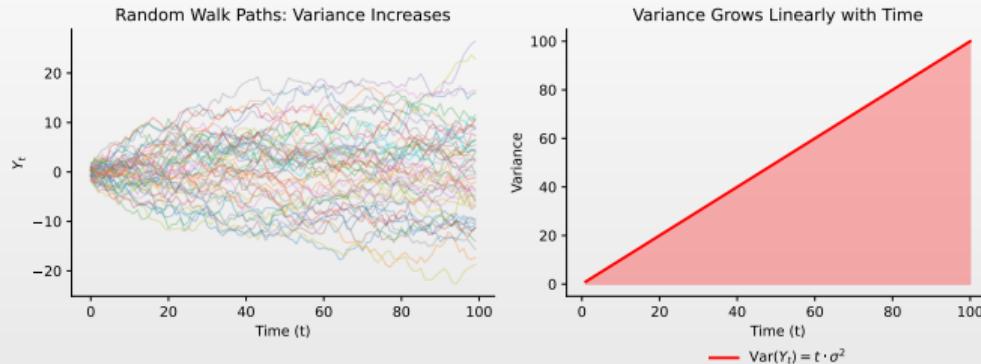
### Întrebare

- O serie de timp  $Y_t$  urmează un mers aleator:  $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$ . Care este  $\text{Var}(Y_t)$ ?

### Variante de răspuns

- (A)  $\sigma^2$  (constantă)
- (B)  $t \cdot \sigma^2$  (crește liniar în timp)
- (C)  $\sigma^2/t$  (scade în timp)
- (D)  $\sigma^{2t}$  (crește exponențial)

## Întrebarea 1: Răspuns



Răspuns corect: (B)  $\text{Var}(Y_t) = t \cdot \sigma^2$

- Varianța mersului aleatoriu crește liniar în timp  $\Rightarrow$  de aceea mersurile aleatorii sunt nestaționare

Q TSA\_ch3\_quiz1\_rw\_variance

## Întrebarea 2

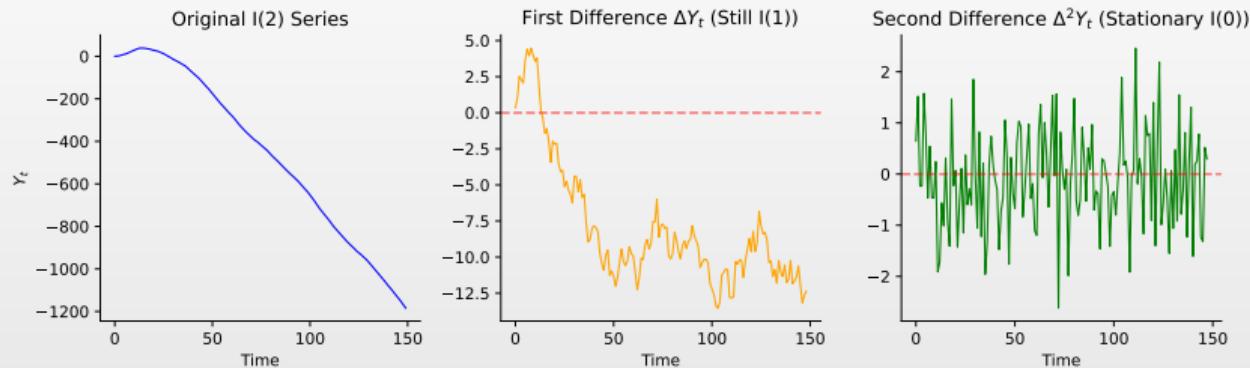
### Întrebare

Dacă o serie  $Y_t$  este I(2), de câte ori trebuie diferențiată pentru a atinge staționaritatea?

### Variante de răspuns

- (A) 0 ori (deja staționară)
- (B) 1 dată
- (C) 2 ori
- (D) Nu poate fi făcută staționară prin diferențiere

## Întrebarea 2: Răspuns



Răspuns corect: (C) 2 ori

- I( $d$ ) înseamnă "integrată de ordin  $d$ "  $\Rightarrow$  necesită  $d$  diferențe pentru staționaritate

 TSA\_ch3\_quiz2\_differencing



## Întrebarea 3

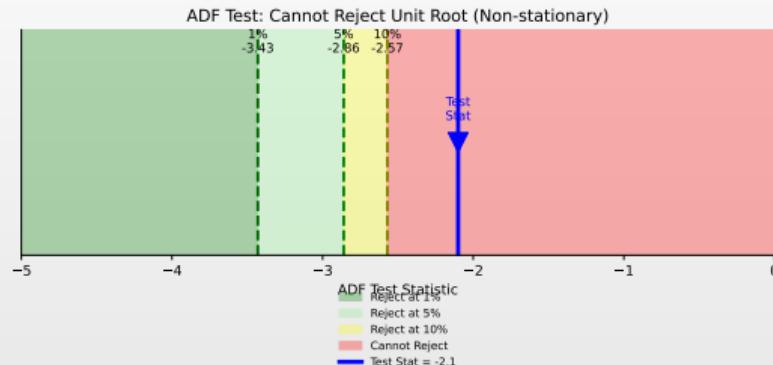
### Întrebare

- Rulați un test ADF și obțineți o statistică de test de  $-2.1$  cu valori critice:  $-3.43$  (1%),  $-2.86$  (5%),  $-2.57$  (10%)
- Ce concluzie trageți?

### Variante de răspuns

- (A)** Respingem  $H_0$ : seria este staționară la toate pragurile de semnificație
- (B)** Respingem  $H_0$ : seria este staționară doar la pragul de 10%
- (C)** Nu respingem  $H_0$ : seria probabil are rădăcină unitate
- (D)** Testul este neconcludent

## Întrebarea 3: Răspuns



Răspuns corect: (C) Nu respingem  $H_0$

- Statistică de test  $-2.1 > -2.57$  (Valoare Critică 10%)
- Nu putem respinge  $H_0$  la niciun prag de semnificație
- Luați în considerare diferențierea



## Întrebarea 4

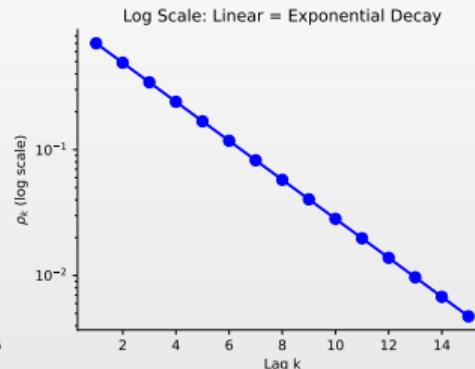
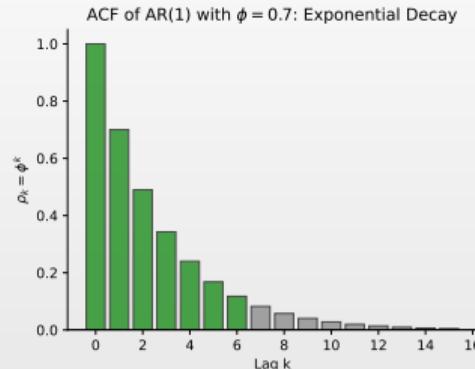
### Întrebare

Pentru un model ARIMA(1,1,0), care este tiparul ACF al seriei **diferențiate**  $\Delta Y_t$ ?

### Variante de răspuns

- (A) Se anulează după lag 1      (B) Scade exponențial      (C) Alternează în semn      (D) Este zero la toate lag-urile

## Întrebarea 4: Răspuns



Răspuns corect: (B) Scade exponențial

- ARIMA(1,1,0)  $\Rightarrow \Delta Y_t$  urmează AR(1) cu ACF  $\rho_k = \phi_1^k$  (descreștere geometrică)

 TSA\_ch3\_quiz4\_acf\_decay

## Întrebarea 5

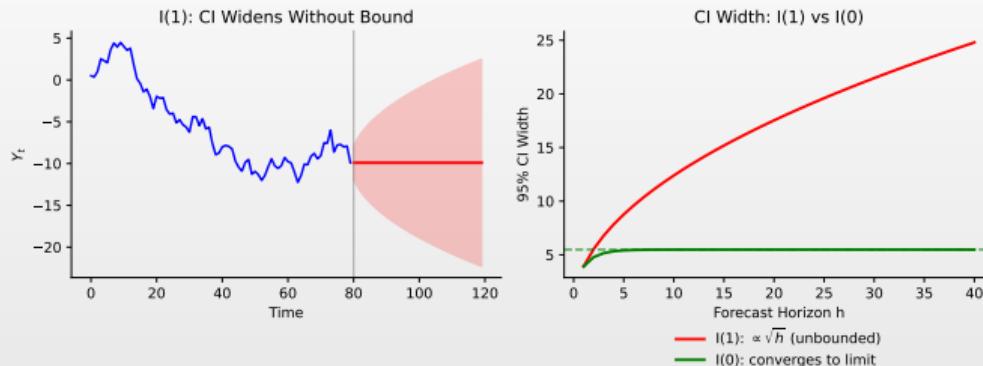
### Întrebare

- Ce se întâmplă cu intervalele de încredere ale prognozei ARIMA pe măsură ce orizontul  $h$  crește?
- Considerăm o serie I(1)

### Variante de răspuns

- (A)** Rămân constante
- (B)** Se îngustează (mai multă precizie)
- (C)** Se largesc nelimitat
- (D)** Se largesc dar converg la o limită

## Întrebarea 5: Răspuns



Răspuns corect: (C) Se largesc nelimitat

- Pentru  $I(1)$ : lățimea  $IC \propto \sqrt{h}$  (nelimitată)
- Pentru  $I(0)$ : IC converg la o limită



## Bibliografie I

### Teste de rădăcină unitate

- Dickey, D.A., & Fuller, W.A. (1979). Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root, *JASA*, 74(366), 427–431.
- Phillips, P.C.B., & Perron, P. (1988). Testing for a Unit Root in Time Series Regression, *Biometrika*, 75(2), 335–346.
- Kwiatkowski, D., Phillips, P.C.B., Schmidt, P., & Shin, Y. (1992). Testing the Null Hypothesis of Stationarity, *Journal of Econometrics*, 54(1-3), 159–178.

### Modele ARIMA și selecție automată

- Box, G.E.P., & Jenkins, G.M. (1970). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden-Day.
- Hyndman, R.J., & Khandakar, Y. (2008). Automatic Time Series Forecasting: The forecast Package for R, *Journal of Statistical Software*, 27(3), 1–22.



## Bibliografie II

### Manuale și referințe suplimentare

- Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- Shumway, R.H., & Stoffer, D.S. (2017). *Time Series Analysis and Its Applications*, 4th ed., Springer.
- Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*, 3rd ed., OTexts.

### Resurse online și cod

- **Quantlet:** <https://quantlet.com> – Platformă de cod pentru metode cantitative
- **Quantinar:** <https://quantinar.com> – Platformă de învățare pentru metode cantitative
- **GitHub TSA:** [https://github.com/QuantLet/TSA/tree/main/TSA\\_ch3](https://github.com/QuantLet/TSA/tree/main/TSA_ch3) – Cod Python pentru acest capitol



# Vă Mulțumim!

## Întrebări?

Materialele cursului sunt disponibile la: <https://danpele.github.io/Time-Series-Analysis/>

