



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Modele de Volatilitate

ARCH, GARCH, EGARCH, TGARCH



Cuprins

- 1 Introducere în Modelarea Volatilității
- 2 Modelul ARCH
- 3 Modelul GARCH
- 4 Modele GARCH Asimetrice
- 5 Selectarea și Diagnosticarea Modelelor
- 6 Prognoza Volatilității
- 7 Implementare în Python
- 8 Studiu de Caz: S&P 500
- 9 Rezumat

De ce Modelăm Volatilitatea?

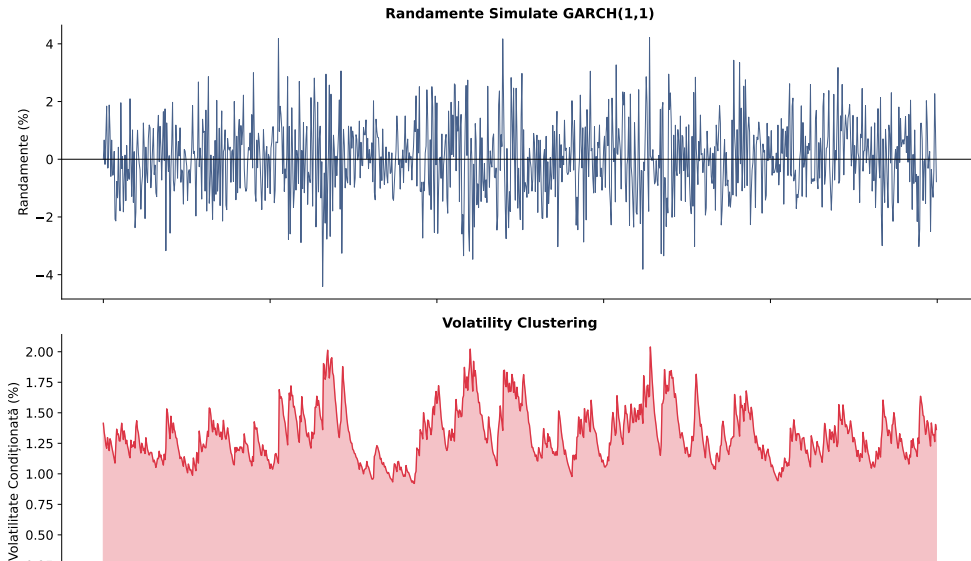
Observații Empirice în Seriile Financiare

- Randamentele financiare prezintă **volatility clustering** — perioadele de volatilitate ridicată tind să fie urmate de perioade de volatilitate ridicată
- Distribuția randamentelor are **cozi groase** (leptokurtosis)
- Corelația randamentelor este aproape zero, dar corelația pătratelor este semnificativă
- Volatilitatea răspunde **asimetric** la șocuri (leverage effect)

Limitarea Modelelor ARIMA

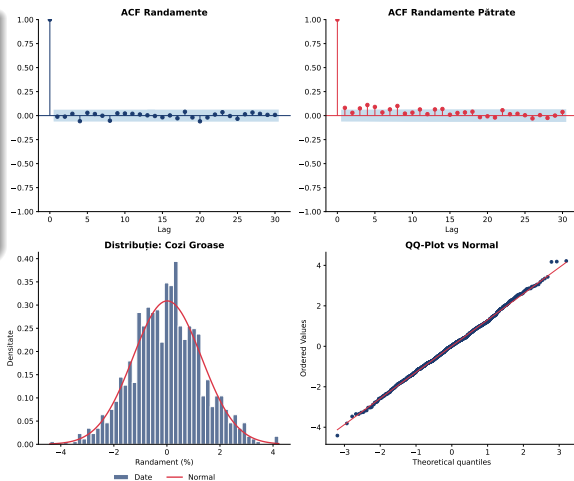
Modelele ARIMA presupun **varianță constantă** (homoscedasticitate), ceea ce nu este realist pentru seriile financiare!

Volatility Clustering



Proprietăți Observate

- 1 Absența autocorrelației în randamente
- 2 Autocorrelație semnificativă în r_t^2 și $|r_t|$
- 3 Cozi groase (kurtosis > 3)
- 4 Leverage effect — corelație negativă între randamente și volatilitate
- 5 Volatility clustering



Definiție 1 (Varianță Condiționată)

Fie $\{r_t\}$ o serie de randamente. **Varianța condiționată** la momentul t este:

$$\sigma_t^2 = \text{Var}(r_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}[(r_t - \mu_t)^2 | \mathcal{F}_{t-1}]$$

unde \mathcal{F}_{t-1} reprezintă informația disponibilă până la momentul $t - 1$.

Modelul General

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \text{i.i.d.}(0, 1)$$

unde:

- μ_t = media condiționată (poate fi modelată ARMA)
- σ_t^2 = varianța condiționată (modelată ARCH/GARCH)
- z_t = inovații standardizate (Normal, Student-t, GED)

Modelul ARCH(q) — Engle (1982)

Definitie 2 (ARCH(q))

Modelul **Autoregressive Conditional Heteroskedasticity** de ordin q :

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \text{i.i.d.}(0, 1)$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2$$

Restricții pentru Stationaritate

- $\omega > 0$ (varianța de bază pozitivă)
- $\alpha_i \geq 0$ pentru $i = 1, \dots, q$ (non-negativitate)
- $\sum_{i=1}^q \alpha_i < 1$ (stationaritate)

Observatie 1

Robert Engle a primit **Premiul Nobel pentru Economie** în 2003 pentru dezvoltarea modelului ARCH!

Proprietăți ale Modelului ARCH(1)

$$\text{ARCH}(1): \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

- **Varianța necondiționată:** $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \frac{\omega}{1 - \alpha_1}$ (dacă $\alpha_1 < 1$)
- **Kurtosis:** $\kappa = 3 \cdot \frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2}$ (dacă $\alpha_1^2 < 1/3$)
- Kurtosis > 3 pentru $\alpha_1 > 0 \Rightarrow$ **cozi groase!**

Exemplu Numeric

Dacă $\omega = 0.0001$ și $\alpha_1 = 0.3$:

- **Varianța necondiționată:** $\sigma^2 = \frac{0.0001}{1-0.3} = 0.000143$
- **Kurtosis:** $\kappa = 3 \cdot \frac{1-0.09}{1-0.27} = 3.74 > 3$

Testul Engle pentru Efecte ARCH

Procedură:

- 1 Estimează modelul pentru medie și obține reziduurile $\hat{\varepsilon}_t$
- 2 Calculează $\hat{\varepsilon}_t^2$
- 3 Regresează $\hat{\varepsilon}_t^2$ pe lag-urile sale:

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \cdots + \beta_q \hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + u_t$$

- 4 Calculează statistica $LM = T \cdot R^2 \sim \chi^2(q)$

Ipoteze

- H_0 : Nu există efecte ARCH ($\alpha_1 = \cdots = \alpha_q = 0$)
- H_1 : Există efecte ARCH (cel puțin un $\alpha_i \neq 0$)

Probleme Practice

- ❶ **Ordine mare** — de obicei sunt necesare multe lag-uri (q mare)
- ❷ **Mulți parametri** — dificultăți de estimare
- ❸ **Restricții de non-negativitate** — greu de impus pentru q mare
- ❹ **Nu capturează persistența** — volatilitatea observată este foarte persistentă

Soluția

Modelul GARCH — introduce lag-uri ale varianței condiționate pentru a captura persistența cu mai puțini parametri!

Modelul GARCH(p,q) — Bollerslev (1986)

Definitie 3 (GARCH(p,q))

Modelul **Generalized ARCH**:

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \text{i.i.d.}(0, 1)$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Interpretare

- ω = nivel de bază al volatilității
- α_i = reacția la șocuri recente (news coefficients)
- β_j = persistența volatilității (memory)
- $\alpha + \beta$ = persistența totală

Modelul GARCH(1,1)

Cel Mai Popular Model de Volatilitate

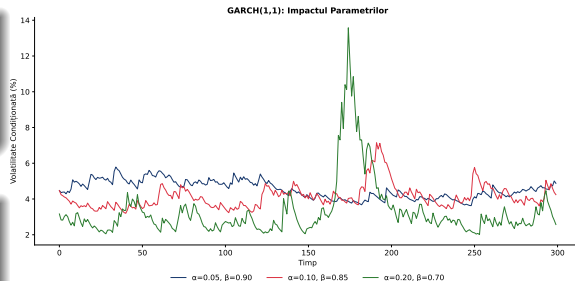
$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

Restricții

- $\omega > 0$
- $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$
- $\alpha + \beta < 1$ (stationaritate)

Proprietăți

- Varianța necondiționată: $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$
- Half-life: $HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha + \beta)}$



GARCH(1,1) ca ARMA pentru ε_t^2

Reprezentare ARMA(1,1)

Definim $\nu_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ (șocul varianței). Atunci:

$$\varepsilon_t^2 = \omega + (\alpha + \beta)\varepsilon_{t-1}^2 + \nu_t - \beta\nu_{t-1}$$

Aceasta este un **ARMA(1,1)** pentru ε_t^2 !

Implicații

- ACF al ε_t^2 decade exponențial (ca ARMA)
- Persistența este dată de $\alpha + \beta$
- PACF poate ajuta la identificarea ordinului

Metoda Verosimilității Maxime (MLE)

Funcția de log-verosimilitate (distribuție normală):

$$\ell(\theta) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[\ln(\sigma_t^2) + \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} \right]$$

Distribuții Alternative pentru z_t

- **Student-t**: capturează cozile groase

$$f(z; \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{(\nu-2)\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{z^2}{\nu-2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

- **GED (Generalized Error Distribution)**: flexibilitate pentru kurtosis
- **Skewed Student-t**: asimetrie și cozi groase

Valori Tipice pentru GARCH(1,1)

Serie	α	β	$\alpha + \beta$
S&P 500 zilnic	0.05–0.10	0.85–0.95	0.95–0.99
EUR/USD zilnic	0.03–0.08	0.90–0.95	0.95–0.99
Bitcoin zilnic	0.10–0.20	0.75–0.85	0.90–0.98
Obligațiuni	0.02–0.05	0.90–0.97	0.95–0.99

Observații

- $\alpha + \beta$ aproape de 1 \Rightarrow **volatilitate foarte persistentă**
- α mic, β mare \Rightarrow reacție lentă la șocuri, memorie lungă
- Bitcoin: α mai mare \Rightarrow reacție mai rapidă la news

Definitie 4 (IGARCH(1,1))

Când $\alpha + \beta = 1$:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + (1 - \alpha) \sigma_{t-1}^2$$

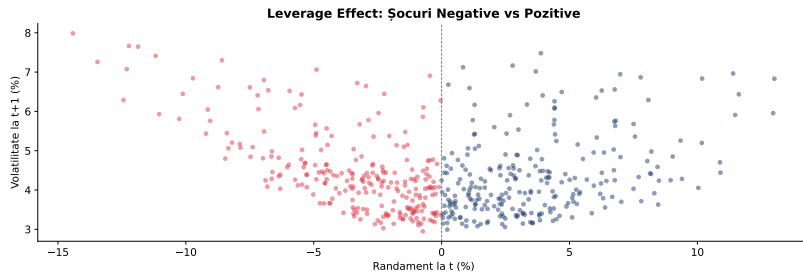
Proprietăți

- Varianța necondiționată nu există (infinită)
- Șocurile au efect **permanent** asupra volatilității
- Folosit pentru serii cu persistență extremă
- Util pentru **RiskMetrics** (J.P. Morgan): $\alpha = 0.06$, $\beta = 0.94$

Observatie 2

IGARCH este analog cu o rădăcină unitară în varianță!

Leverage Effect



Definitie 5 (EGARCH(1,1))

Exponential GARCH:

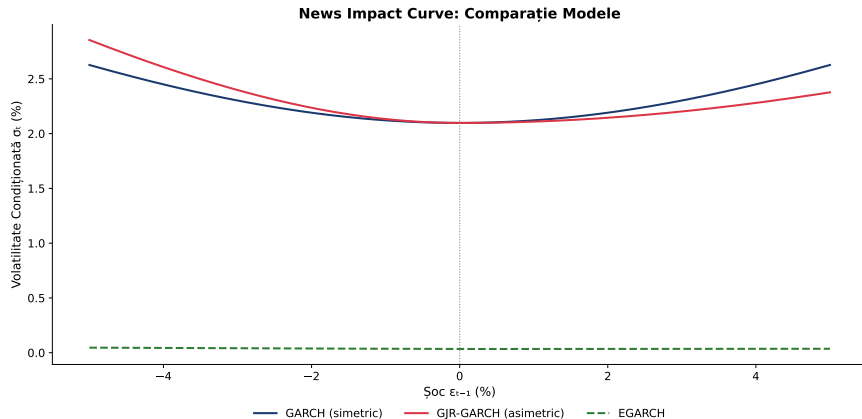
$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \alpha (|z_{t-1}| - \mathbb{E}[|z_{t-1}|]) + \gamma z_{t-1} + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2)$$

unde $z_t = \varepsilon_t / \sigma_t$.

Avantaje EGARCH

- Nu necesită restricții de non-negativitate — modelează $\ln(\sigma_t^2)$
- Captură leverage effect prin parametrul γ
 - $\gamma < 0$: șocuri negative \Rightarrow volatilitate mai mare
 - $\gamma = 0$: efect simetric (ca GARCH)
- Persistența este dată de β

News Impact Curve — EGARCH



Interpretare

News Impact Curve: arată cum volatilitatea viitoare σ_{t+1}^2 depinde de șocul curent ε_t , menținând σ_t^2 constant.

Modelul GJR-GARCH (TGARCH)

Definitie 6 (GJR-GARCH(1,1))

Glosten, Jagannathan & Runkle (1993):

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 \cdot I_{t-1} + \beta \sigma_{t-1}^2$$

$$\text{unde } I_{t-1} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \varepsilon_{t-1} < 0 \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

Interpretare

- Șocuri pozitive ($\varepsilon_{t-1} > 0$): impact = α
- Șocuri negative ($\varepsilon_{t-1} < 0$): impact = $\alpha + \gamma$
- Leverage effect prezent dacă $\gamma > 0$

Stationaritate

$$\alpha + \gamma/2 + \beta < 1$$

Definitie 7 (TGARCH(1,1))

Zakoian (1994) — modelează deviația standard:

$$\sigma_t = \omega + \alpha^+ \varepsilon_{t-1}^+ + \alpha^- \varepsilon_{t-1}^- + \beta \sigma_{t-1}$$

unde $\varepsilon_t^+ = \max(\varepsilon_t, 0)$ și $\varepsilon_t^- = \max(-\varepsilon_t, 0)$.

Comparație Modele Asimetrice

Model	Specificație	Leverage
GARCH	σ_t^2	Nu
EGARCH	$\ln(\sigma_t^2)$	Da ($\gamma < 0$)
GJR-GARCH	σ_t^2 cu indicator	Da ($\gamma > 0$)
TGARCH	σ_t	Da ($\alpha^- > \alpha^+$)

Criterii Informaționale

- **AIC** = $-2\ell + 2k$
- **BIC** = $-2\ell + k \ln(T)$
- **HQIC** = $-2\ell + 2k \ln(\ln(T))$

unde ℓ = log-verosimilitate maximizată, k = nr. parametri.

Recomandări Practice

- GARCH(1,1) este suficient în **90% din cazuri**
- Verifică dacă modelul asimetric îmbunătățește semnificativ fit-ul
- Alege distribuția inovațiilor care minimizează AIC/BIC

Reziduuri Standardizate

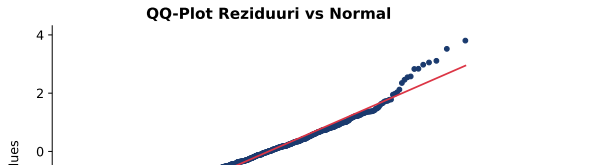
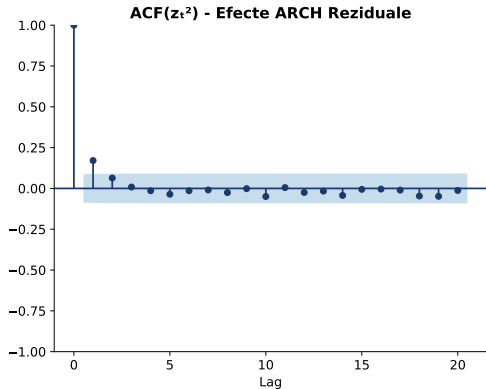
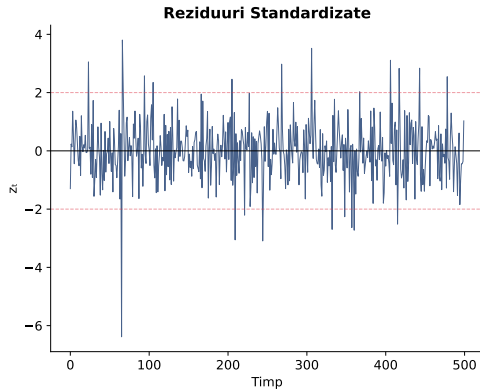
$$\hat{z}_t = \frac{\hat{\varepsilon}_t}{\hat{\sigma}_t}$$

Dacă modelul este corect specificat, \hat{z}_t ar trebui să fie i.i.d.(0,1).

Verificări Diagnostic

- ❶ **Ljung-Box pe \hat{z}_t** : verifică absența autocorelației în medie
- ❷ **Ljung-Box pe \hat{z}_t^2** : verifică absența efectelor ARCH reziduale
- ❸ **Test ARCH-LM pe \hat{z}_t** : confirmare absență heteroscedasticitate
- ❹ **Histogramă + QQ-plot**: verifică distribuția asumată

Exemplu Diagnostic



Prognoza cu GARCH(1,1)

Prognoză Un Pas Înainte

$$\hat{\sigma}_{T+1}^2 = \omega + \alpha \varepsilon_T^2 + \beta \sigma_T^2$$

Prognoză Multi-Pas

Pentru $h > 1$:

$$\mathbb{E}_T[\sigma_{T+h}^2] = \bar{\sigma}^2 + (\alpha + \beta)^{h-1}(\sigma_{T+1}^2 - \bar{\sigma}^2)$$

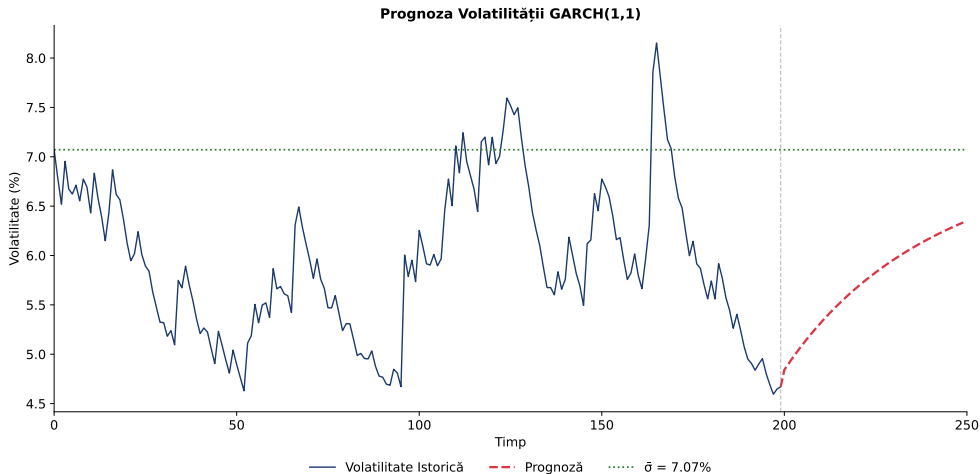
unde $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$ = varianța necondiționată.

Convergență

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{E}_T[\sigma_{T+h}^2] = \bar{\sigma}^2$$

Prognoza converge către varianța necondiționată!

Proгноза Volatilității — Vizualizare



- Proгноза converge exponențial către $\bar{\sigma}^2$
- Viteza de convergență depinde de $\alpha + \beta$

Value at Risk (VaR)

$$\text{VaR}_\alpha = -\mu_{T+1} + z_\alpha \cdot \sigma_{T+1}$$

Probabilitatea de a pierde mai mult decât VaR este α (ex: 1%, 5%).

Expected Shortfall

$$\text{ES}_\alpha = \mathbb{E}[-r_{T+1} | r_{T+1} < -\text{VaR}_\alpha]$$

Alte Aplicații

- Prețul opțiunilor
- Hedging dinamic
- Alocarea portofoliului
- Stress testing
- Analiza scenariilor

Instalare și Import

```
pip install arch
```

```
import numpy as np
import pandas as pd
from arch import arch_model
from arch.univariate import GARCH, EGARCH, ConstantMean
```

Estimare GARCH(1,1)

```
# Presupunem returns = seria de randamente (%)
model = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, q=1,
                   dist='normal')
results = model.fit(dispatch='off')
print(results.summary())
```

EGARCH

```
model_egarch = arch_model(returns, vol='EGARCH', p=1, q=1)
res_egarch = model_egarch.fit(dispatch='off')
```

GJR-GARCH

```
model_gjr = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, o=1, q=1)
res_gjr = model_gjr.fit(dispatch='off')
```

Distribuții Alternative

```
# Student-t
```

```
model_t = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, q=1,
                     dist='t')
```

```
# Skewed Student-t
```

```
model_skewt = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, q=1,
                        dist='skewt')
```

Proгноză Volatilitate

```
# Proгноză 10 pași înainte
forecasts = results.forecast(horizon=10)
volatility_forecast = np.sqrt(forecasts.variance.values[-1, :])
```

Reziduuri Standardizate

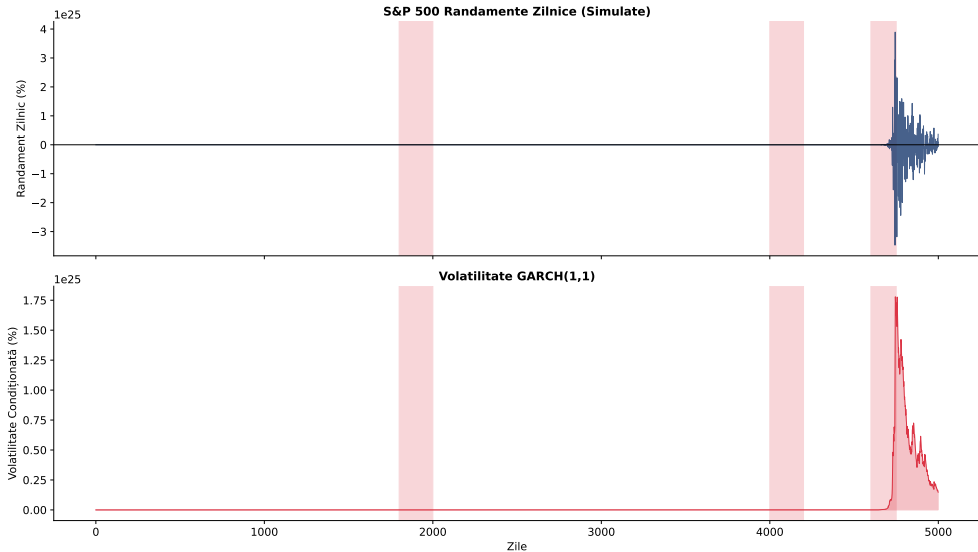
```
std_resid = results.std_resid

# Test Ljung-Box
from statsmodels.stats.diagnostic import acorr_ljungbox
lb_test = acorr_ljungbox(std_resid**2, lags=10)
```

VaR Calculat

```
sigma_forecast = np.sqrt(forecasts.variance.values[-1, 0])
VaR_95 = 1.645 * sigma_forecast # pentru alpha = 5%
```

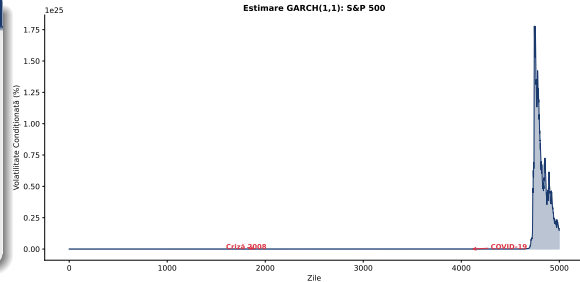
Analiza Volatilității S&P 500



Estimare GARCH(1,1) — S&P 500

Rezultate Estimare

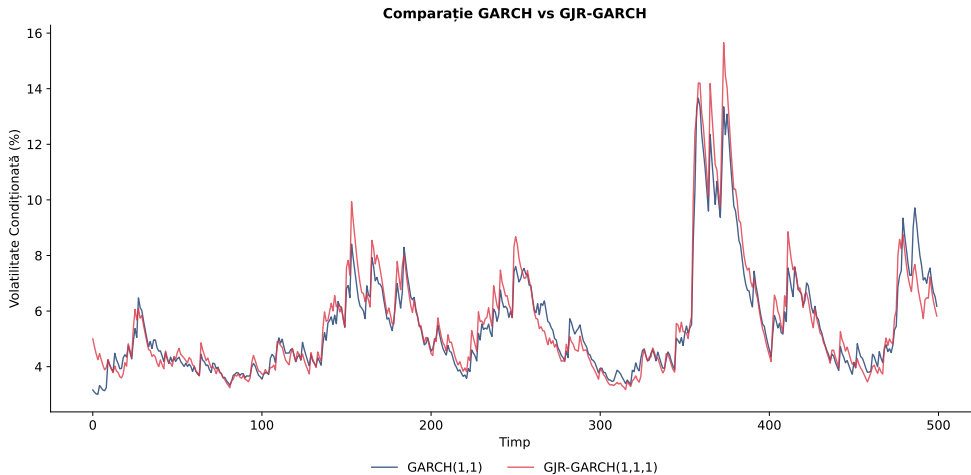
Parametru	Valoare
ω	0.0108
α	0.0883
β	0.9002
$\alpha + \beta$	0.9885
ν (Student-t df)	6.42



Interpretare

- Volatilitate foarte persistentă
- Half-life ≈ 60 zile
- Cozi groase (Student-t)

Comparație GARCH vs EGARCH — S&P 500



Leverage Effect Confirmat

Concepte Cheie

- **ARCH(q)**: varianța condiționată depinde de pătratele erorilor trecute
- **GARCH(p, q)**: adaugă lag-uri ale varianței pentru persistență
- **EGARCH**: permite leverage effect, fără restricții de pozitivitate
- **GJR-GARCH/TGARCH**: captură asimetria cu variabile indicator






Aplicații

- Măsurarea și prognoza riscului (VaR, ES)
- Prețul derivatelor
- Managementul portofoliului

Sfat Practic

Începe cu GARCH(1,1), verifică leverage effect, alege distribuția inovațiilor care minimizează AIC/BIC!

Referințe

-  Engle, R.F. (1982). *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*. *Econometrica*, 50(4), 987-1007.
-  Bollerslev, T. (1986). *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307-327.
-  Nelson, D.B. (1991). *Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach*. *Econometrica*, 59(2), 347-370.
-  Glosten, L.R., Jagannathan, R., & Runkle, D.E. (1993). *On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks*. *The Journal of Finance*, 48(5), 1779-1801.
-  Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*. 3rd Edition, Wiley.