Analiza și Prognoza seriilor de timp

Capitolul 7: Cointegrare și Modele VECM

Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Cuprins

Obiective de învățare

La finalul acestui capitol, veți fi capabili să:

1. Înțelegeți conceptul de **cointegrare** și relații de echilibru pe termen lung
2. Recunoașteți și evitați problema **regresiei false**
3. Aplicați metoda **Engle-Granger** în doi pași
4. Efectuați testul **Johansen** pentru cointegrare multiplă
5. Estimați și interpretați modele **VECM**
6. Analizați viteza de ajustare și vectori de cointegrare
7. Implementați analiza de cointegrare în **Python**

De ce contează cointegrarea?

Provocarea

- Multe serii de timp economice/financiare sunt **nestaționare** (I(1))
- PIB, prețuri acțiuni, cursuri valutare, rate ale dobânzii au rădăcini unitare
- Regresia standard cu variabile I(1) $\Rightarrow$ **rezultate false**
- Diferențierea elimină nestaționaritatea dar pierde **informația pe termen lung**

Soluția: Cointegrarea

Unele serii nestaționare au un **trend stochastic comun**—se mișcă împreună pe termen lung. Această relație pe termen lung poate fi modelată!

Premiul Nobel 2003

Clive Granger a primit Premiul Nobel în Economie (împreună cu Robert Engle) pentru dezvoltarea analizei de cointegrare—"metode pentru analiza seriilor de timp economice cu tendințe comune."

Aplicații practice

Finanțe

- **Pairs Trading**: Tranzacționarea spread-ului între acțiuni cointegrate
- **Structura pe Termene**: Rate dobânzi pe termen scurt și lung
- **Spot-Futures**: Relații de arbitraj

Macroeconomie

- **Consum și Venit**: Ipoteza venitului permanent
- **Bani și Prețuri**: Teoria cantitativă a banilor
- **PPP**: Cursuri valutare și niveluri de prețuri

Analiza Politicilor

- **Politica Fiscală**: Cheltuieli guvernamentale și venituri fiscale
- **Politica Monetară**: Transmiterea ratelor dobânzii
- **Piața Muncii**: Salarii și productivitate

Problema regresiei false

Granger & Newbold (1974)

Regresarea unui mers aleatoriu pe un alt mers aleatoriu **independent**:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

unde Y_t și X_t sunt procese I(1) independente.

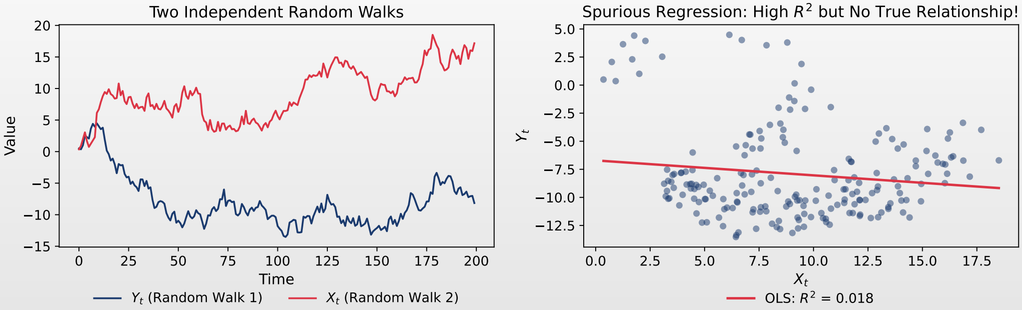
Simptomele regresiei false

- R^2 ridicat (adesea > 0.9) chiar dacă variabilele sunt **necorelate**!
- Statistici t foarte semnificative (respingem $H_0 : \beta = 0$)
- Statistica Durbin-Watson foarte mică ($DW \approx 0$)
- Reziduurile sunt nestaționare (au rădăcină unitară)

Regulă Practică (Granger)

Dacă $R^2 > DW$, suspectați regresie falsă!

Regresia falsă: exemplu vizual



Atenție: Două mersuri aleatorii complet independente prezintă corelație ridicată ($R^2 > 0.8$) doar din întâmplare! De aceea avem nevoie de analiza cointegrării.

TSA_charts/spurious_regression

Definiția cointegrării

Definiție 1 (Cointegrare (Engle & Granger, 1987))

Variabilele $Y_{1t}, Y_{2t}, \ldots, Y_{kt}$ sunt **cointegrate de ordinul** (d, b), notat $CI(d, b)$, dacă:

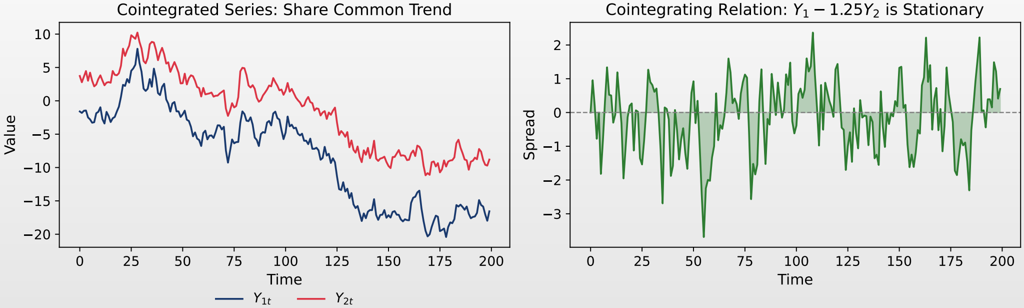
1. Toate variabilele sunt integrate de ordinul d: $Y_{it} \sim I(d)$
2. Există o combinație liniară $\boldsymbol{\beta}'\mathrm{Y}_t = \beta_1 Y_{1t} + \cdots + \beta_k Y_{kt}$ care este integrată de ordinul $(d - b)$, unde $b > 0$

Cazul Cel Mai Comun: $CI(1, 1)$

- Variabilele sunt $I(1)$ (au rădăcini unitare)
- Combinația liniară este $I(0)$ (staționară)
- Vectorul $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_k)'$ este **vectorul de cointegrare**

Vectorul de cointegrare este unic doar până la înmulțire scalară. De obicei se normalizează: $\beta_{\mathbf{1}} = 1$.

Cointegrarea: exemplu vizual



Ideea cheie: Ambele serii sunt I(1) și evoluează împreună, dar combinația lor liniară (spread-ul) este staționară—aceasta este cointegrarea!

TSA_charts/cointegrated_series

Intuiție: tendințe stocastice comune

De ce Apare Cointegrarea?

Variabilele cointegrate împart **tendințe stocastice comune**:

$$Y_{1t} = \gamma_1 \tau_t + S_{1t}, \qquad Y_{2t} = \gamma_2 \tau_t + S_{2t}$$

unde τ_t este un mers aleatoriu comun și S_{it} sunt componente staționare.

Combinația Liniară Elimină Tendința

$$\gamma_2 Y_{1t} - \gamma_1 Y_{2t} = \gamma_2 S_{1t} - \gamma_1 S_{2t} \sim I(0)$$

Interpretare Economică

- Cointegrarea reprezintă o **relație de echilibru pe termen lung**
- Variabilele pot devia pe termen scurt
- Dar sunt "trase înapoi" spre echilibru în timp
- Vectorul de cointegrare definește echilibrul

Rangul de cointegrare

Câte Relații de Cointegrare?

Pentru k variabile care sunt $I(1)$:

- Maximum relații de cointegrare posibile: $r = k - 1$
- Dacă $r = 0$: Nu există cointegrare (variabilele divergează)
- Dacă $r = k$: Toate variabilele sunt $I(0)$ (contradicție)

Exemplu: 3 Variabile

- $r = 0$: Nu există cointegrare
- $r = 1$: O relație de cointegrare
- $r = 2$: Două relații de cointegrare (doar 1 tendință comună)

Numărul de tendințe stocastice comune $= k - r$

Metoda în doi pași Engle-Granger

Pasul 1: Estimarea Regresiei de Cointegrare

Rulați regresia OLS (presupunând că Y_t este variabila dependentă):

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + e_t$$

Salvați reziduurile: $\hat{e}_t = Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_t$

Pasul 2: Testarea Staționarității Reziduurilor

Testați dacă $\hat{e}_t$ este $I(0)$ folosind testul ADF:

$$\Delta \hat{e}_t = \rho \hat{e}_{t-1} + \sum_{j=1}^{p} \gamma_j \Delta \hat{e}_{t-j} + v_t$$

- H_0: $\rho = 0$ (reziduurile au rădăcină unitară $\Rightarrow$ nu există cointegrare)
- H_1: $\rho < 0$ (reziduurile sunt staționare $\Rightarrow$ există cointegrare)

Important

Folosiți **valorile critice Engle-Granger**, nu valorile critice ADF standard! (Mai negative deoarece reziduurile sunt estimate)

Valorile critice Engle-Granger

Valori Critice pentru Testul de Cointegrare

Număr de Variabile	**1%**	**5%**	**10%**
2	-3.90	-3.34	-3.04
3	-4.29	-3.74	-3.45
4	-4.64	-4.10	-3.81
5	-4.96	-4.42	-4.13

Bazat pe estimările MacKinnon (1991), $T = 100$

Limitările Metodei Engle-Granger

- Testează doar pentru **o singură** relație de cointegrare
- Rezultatele depind de variabila aleasă ca dependentă
- Bias în eșantioane mici pentru vectorul de cointegrare estimat
- Nu se pot testa ipoteze asupra vectorului de cointegrare

Testul de cointegrare Johansen

Avantaje față de Engle-Granger

- Testează pentru **multiple** relații de cointegrare
- Estimare prin maxima verosimilitate (mai eficientă)
- Permite testarea restricțiilor asupra vectorilor de cointegrare
- Nu necesită alegerea unei variabile dependente

Punct de Plecare: VAR în Niveluri

$$Y_t = c + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \cdots + A_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Rescriem în forma **Vector Error Correction**...

Derivare: De la VAR la VECM

Punct de plecare: VAR(p) în niveluri

$$Y_t = A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \cdots + A_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Pasul 1: Scădem Y_{t-1} din ambii membri

$$Y_t - Y_{t-1} = A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \cdots + A_p Y_{t-p} - Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta Y_t = (A_1 - I) Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \cdots + A_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Obiectiv

Rescriem astfel încât toți termenii să fie fie în **niveluri** (Y_{t-1}), fie în **diferențe** (ΔY_{t-j}).

Derivare: De la VAR la VECM (cont.)

Pasul 2: Adunăm și scădem termeni strategic

Adunăm $A_2 Y_{t-1}$ și scădem $A_2 Y_{t-1}$:

$$\Delta Y_t = (A_1 + A_2 - I)Y_{t-1} - A_2(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + A_3 Y_{t-3} + \cdots + \varepsilon_t$$

Continuăm cu $A_3 Y_{t-1}$, etc., până colectăm toate **nivelurile** într-un singur termen.

Pasul 3: Forma generală

După manipulare algebrică, obținem:

$$\Delta Y_t = \Pi Y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t$$

Matricele cheie

$$\boxed{\Pi = \sum_{i=1}^{p} A_i - I = -(I - A_1 - A_2 - \cdots - A_p)}$$

Derivare: Verificare cu VAR(2)

Exemplu: VAR(2)

Pornind de la: $Y_t = A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$

Scădem Y_{t-1}:

$$\Delta Y_t = (A_1 - I) Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

Adunăm și scădem $A_2 Y_{t-1}$:

$$\Delta Y_t = (A_1 + A_2 - I) Y_{t-1} + A_2 (Y_{t-2} - Y_{t-1}) + \varepsilon_t$$

$$\Delta Y_t = \underbrace{(A_1 + A_2 - I)}_{\mathbf{\Pi}} Y_{t-1} \underbrace{-A_2}_{\mathbf{\Gamma}_1} \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Verificare

Pentru VAR(2): $\mathbf{\Pi} = A_1 + A_2 - I$ și $\mathbf{\Gamma}_1 = -A_2$

Folosind formula: $\mathbf{\Gamma}_1 = -\sum_{i=2}^{2} A_i = -A_2 \quad \checkmark$

Reprezentarea VECM

Modelul Vectorial de Corecție a Erorilor

$$\Delta Y_t = c + \mathbf{\Pi} Y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \mathbf{\Gamma}_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t$$

unde:

- $\mathbf{\Pi} = A_1 + A_2 + \cdots + A_p - I$ (matricea impactului pe termen lung)
- $\mathbf{\Gamma}_j = -(A_{j+1} + \cdots + A_p)$ (dinamica pe termen scurt)

Ideea Cheie: Rangul lui $\mathbf{\Pi}$

Rangul lui $\mathbf{\Pi}$ determină cointegrarea:

- $\text{rank}(\mathbf{\Pi}) = 0$: Nu există cointegrare (VAR în diferențe)
- $\text{rank}(\mathbf{\Pi}) = k$: Toate variabilele sunt $I(0)$ (VAR în niveluri)
- $0 < \text{rank}(\mathbf{\Pi}) = r < k$: Cointegrare cu r vectori de cointegrare

Descompunerea lui $\mathbf{\Pi}$

Când rank($\mathbf{\Pi}$) $= r < k$

Matricea $\mathbf{\Pi}$ poate fi descompusă astfel:

$$\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$$

unde:

- $\boldsymbol{\beta}$ este matricea $k \times r$ a **vectorilor de cointegrare**
- $\boldsymbol{\alpha}$ este matricea $k \times r$ a **coeficienților de ajustare**

Interpretare

- $\boldsymbol{\beta}'\mathbf{Y}_{t-1}$ = deviații de la echilibrul pe termen lung (termeni de corecție a erorilor)
- $\boldsymbol{\alpha}$ = viteza de ajustare la echilibru
- Fiecare rând al lui $\boldsymbol{\alpha}$ arată cum răspunde fiecare variabilă la dezechilibru

VECM: $\Delta\mathbf{Y}_t = \mathbf{c} + \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{Y}_{t-1}) + \sum_{j=1}^{p-1} \mathbf{\Gamma}_j \Delta\mathbf{Y}_{t-j} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$

Statisticile testului Johansen

Două Statistici de Test

Bazate pe valorile proprii $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \cdots > \hat{\lambda}_k$ ale unei anumite matrici:

Testul Trace:

$$\lambda_{\text{trace}}(r) = -T \sum_{i=r+1}^{k} \ln(1 - \hat{\lambda}_i)$$

Testează H_0: rang $\leq r$ vs H_1: rang $> r$

Testul Valorii Proprii Maxime:

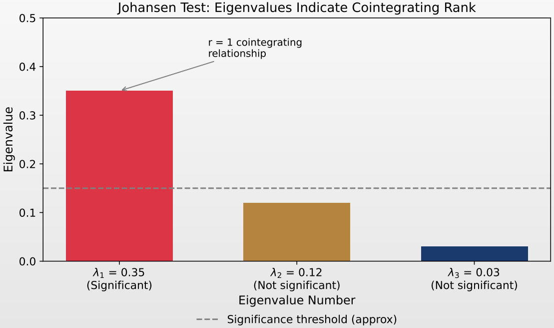
$$\lambda_{\max}(r, r+1) = -T \ln(1 - \hat{\lambda}_{r+1})$$

Testează H_0: rang $= r$ vs H_1: rang $= r + 1$

Valorile critice din Johansen & Juselius (1990), depind de:

- Numărul de variabile k
- Componentele deterministe (constantă, trend)

Testul Johansen: interpretare vizuală



Interpretarea valorilor proprii: Valorile proprii semnificative (peste pragul critic) indică relații de cointegrare. În acest exemplu, doar prima valoare proprie este semnificativă, sugerând $r = 1$ vector de cointegrare.

TSA_charts/johansen_eigenvalues

Procedura de testare

Testare Secvențială (Testul Trace)

1. Testați H_0: $r = 0$ vs H_1: $r > 0$
   - Dacă nu se respinge: Nu există cointegrare. Stop.
   - Dacă se respinge: Cel puțin un vector de cointegrare. Continuăm.
2. Testați H_0: $r \leq 1$ vs H_1: $r > 1$
   - Dacă nu se respinge: $r = 1$. Stop.
   - Dacă se respinge: Cel puțin doi vectori de cointegrare. Continuăm.
3. Continuăm până când H_0 nu se respinge...

Componentele Deterministe

Alegeți specificația cu atenție:

- Fără constantă, fără trend (rar utilizat)
- Constantă doar în relația de cointegrare
- Constantă în ambele (cel mai comun)
- Constantă + trend în relația de cointegrare
- Constantă + trend în ambele

Structura VECM

Specificația Completă VECM

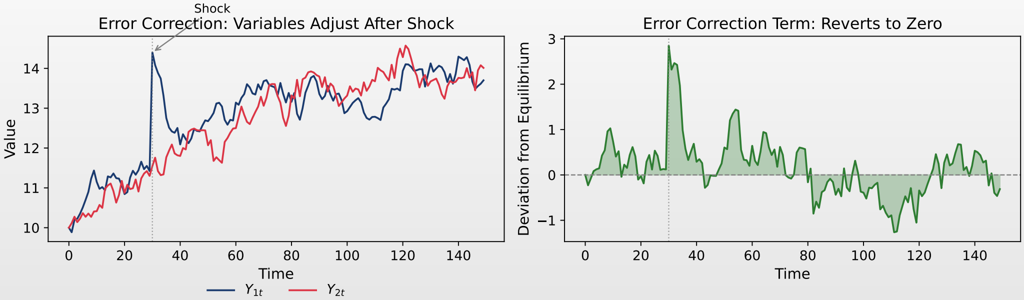
Pentru $k = 2$ variabile cu $r = 1$ relație de cointegrare:

$$\Delta Y_{1t} = c_1 + \alpha_1(Y_{1,t-1} - \beta Y_{2,t-1}) + \gamma_{11}\Delta Y_{1,t-1} + \gamma_{12}\Delta Y_{2,t-1} + \varepsilon_{1t}$$
$$\Delta Y_{2t} = c_2 + \alpha_2(Y_{1,t-1} - \beta Y_{2,t-1}) + \gamma_{21}\Delta Y_{1,t-1} + \gamma_{22}\Delta Y_{2,t-1} + \varepsilon_{2t}$$

Componente

- $(Y_{1,t-1} - \beta Y_{2,t-1})$ = termenul de corecție a erorilor (deviație de la echilibru)
- α_1, α_2 = viteze de ajustare (ar trebui să aibă semne opuse)
- γ_{ij} = dinamica pe termen scurt
- ε_{it} = inovații

Mecanismul de corecție a erorilor: vizualizare



Corecția erorilor în acțiune: Când seriile deviază de la echilibru (zonele umbrite), mecanismul de ajustare le trage înapoi. Deviațiile pozitive duc la ajustare în jos, deviațiile negative duc la ajustare în sus.

TSA_charts/error_correction

Interpretarea coeficienților de ajustare

Coeficienții α

Dacă relația de cointegrare este $Y_1 - \beta Y_2 = 0$ (echilibru):

- $\alpha_1 < 0$: Y_1 se ajustează în jos când este deasupra echilibrului
- $\alpha_2 > 0$: Y_2 se ajustează în sus când Y_1 este deasupra echilibrului

Exogenitate Slabă

Dacă $\alpha_i = 0$, variabila Y_i **nu** răspunde la dezechilibru.

- Y_i este **slab exogenă** pentru parametrii pe termen lung
- Cealaltă variabilă face toată ajustarea
- Poate simplifica estimarea (abordare cu o singură ecuație)

Testarea exogenității slabe: $H_0 : \alpha_i = 0$ folosind testul raportului de verosimilitate.

VECM vs VAR în diferențe

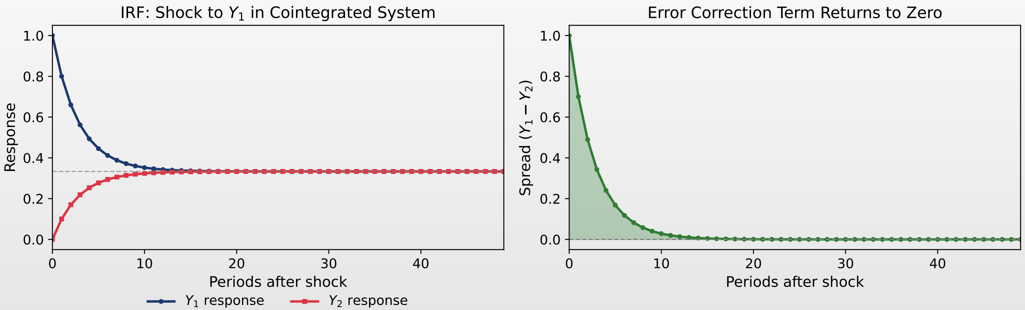
Când Variabilele sunt Cointegrate

	VAR în Diferențe	**VECM**
Info pe termen lung	Pierdută	Păstrată
Dinamică pe termen scurt	Da	Da
Corecție a erorilor	Nu	Da
Prognoză	Slabă (termen lung)	Mai bună
Interpretare IRF	Doar termen scurt	Ambele

Teorema Reprezentării Granger

Dacă variabilele sunt cointegrate, **trebuie** să existe o reprezentare de corecție a erorilor. Ignorarea cointegrării = specificare greșită a modelului!

Funcțiile de răspuns la impuls VECM



Interpretarea IRF: Într-un sistem cointegrat, șocurile au **efecte permanente** asupra nivelurilor, dar sistemul revine la echilibru. Spre deosebire de VAR staționar, efectele nu se atenuează la zero—convergesc către o nouă valoare pe termen lung.

TSA_charts/vecm_irf

Flux de lucru practic

Procedură Pas cu Pas

1. **Teste de Rădăcină Unitară**: Verificați că toate variabilele sunt $I(1)$
   - ADF, KPSS pe niveluri și prime diferențe
2. **Selectarea Numărului de Lag-uri**: Alegeți p pentru VAR în niveluri
   - Folosiți AIC, BIC sau teste LR secvențiale
3. **Testul de Cointegrare**: Teste trace/valoare proprie maximă Johansen
   - Determinați rangul de cointegrare r
4. **Estimați VECM**: Dacă $0 < r < k$
   - Estimați $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\Gamma}_j$
5. **Diagnostice**: Verificați reziduurile pentru autocorelație, normalitate
6. **Analiză**: IRF, FEVD, teste de ipoteze

Capcane frecvente

Lucruri de Care Trebuie să Fiți Atenți

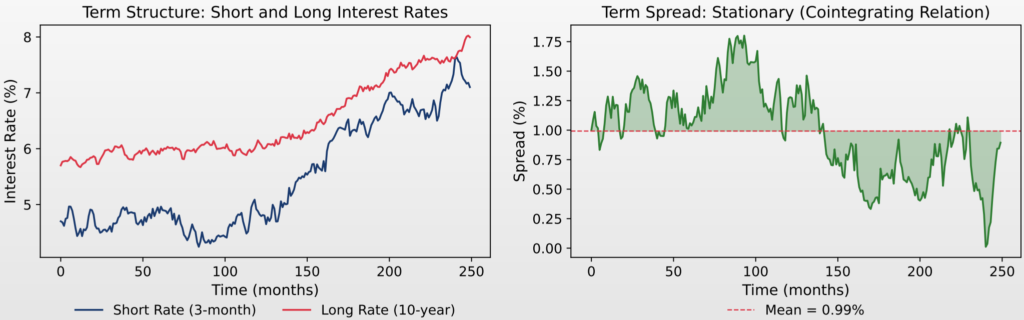
- **Rupturi structurale**: Pot cauza rădăcini unitare sau cointegrare false
- **Procese aproape de rădăcină unitară**: Testele au putere scăzută
- **Prea multe lag-uri**: Supraparametrizare, pierdere de eficiență
- **Prea puține lag-uri**: Autocorelație reziduală, estimări distorsionate
- **Specificație deterministă greșită**: Afectează valorile critice
- **Eșantioane mici**: Testul Johansen supradimensionat în eșantioane mici

Recomandare

Verificați întotdeauna:

- Diagnosticele reziduale (testul Portmanteau, normalitatea)
- Stabilitatea relației de cointegrare estimate în timp
- Sensibilitatea la lungimea lag-urilor și specificația deterministă

Exemplu 1: structura pe termen a ratelor dobânzii



Ipoteza Așteptărilor: Ratele pe termen scurt și lung împart o tendință comună. Spread-ul (prima de termen) este staționar—dovadă de cointegrare!

TSA_charts/interest_rates_coint

Ratele dobânzii: teoria economică

Ipoteza Așteptărilor în Structura pe Termen

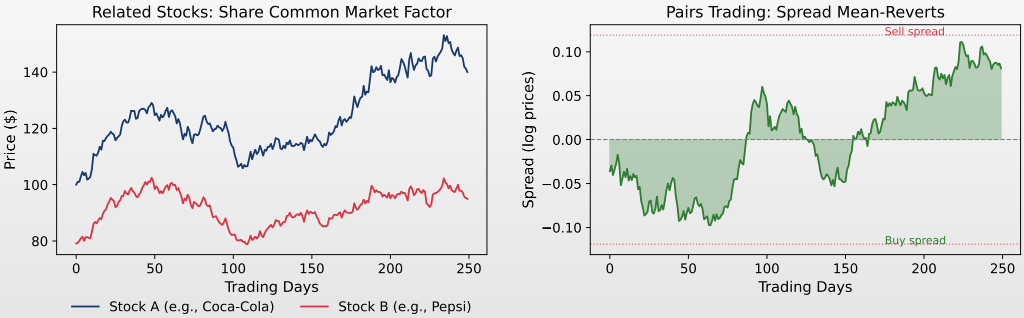
$$R_t^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E_t[r_{t+i}] + \text{prima de termen}$$

Dacă prima de termen este constantă, rata pe termen scurt r_t și rata pe termen lung R_t ar trebui să fie cointegrate cu vectorul $(1, -1)$.

Rezultate Empirice

1. Ambele rate sunt $I(1)$ (teste de rădăcină unitară)
2. O relație de cointegrare (testul Johansen)
3. Vectorul de cointegrare $\approx (1, -1)$: spread-ul este staționar
4. Rata pe termen scurt se ajustează la dezechilibru (rata pe termen lung este slab exogenă)

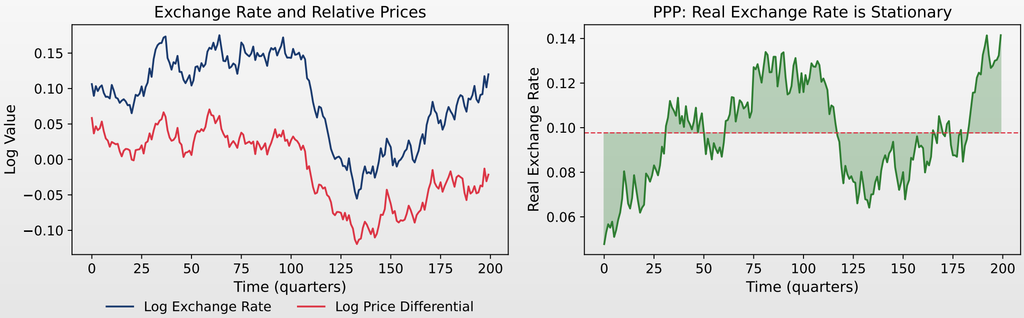
Exemplu 2: pairs trading în finanțe



Strategie: Găsiți perechi de acțiuni cointegrate (ex., Coca-Cola & Pepsi). Când spread-ul deviază de la medie, tranzacționați așteptând revenirea la medie. Vindeți spread când este mare, cumpărați când este mic.

TSA_charts/pairs_trading

Exemplu 3: paritatea puterii de cumpărare (PPP)



Teoria PPP: $e_t = p_t - p_t^*$ (cursul de schimb logaritmic este egal cu diferențialul de preț). Cursul de schimb real ar trebui să fie staționar pe termen lung.

TSA_charts/ppp_cointegration

Rezultate VECM pentru rate de dobândă

Rezultate Tipice

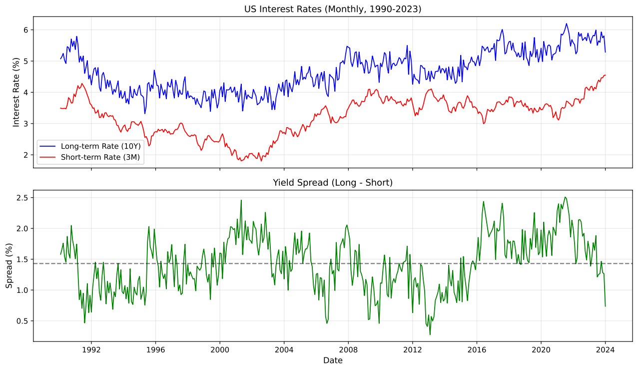
- Ambele rate sunt $I(1)$
- O relație de cointegrare identificată
- Vectorul de cointegrare apropiat de $(1, -1)$: spread-ul este staționar
- Rata pe termen scurt se ajustează la rata pe termen lung (nu invers)

Ecuații VECM (stilizate)

$$\Delta r_t = 0.02 - 0.15(r_{t-1} - R_{t-1}) + \text{lag-uri} + \varepsilon_{1t}$$
$$\Delta R_t = 0.01 - 0.02(r_{t-1} - R_{t-1}) + \text{lag-uri} + \varepsilon_{2t}$$

- Rata pe termen scurt se ajustează mai rapid ($\alpha_1 = -0.15$)
- Rata pe termen lung aproape slab exogenă ($\alpha_2 \approx 0$)

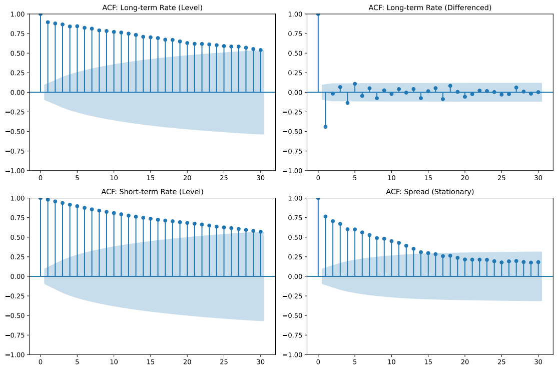
Studiu de caz: Cointegrarea ratelor dobânzii



- Rate dobândă SUA: pe termen lung (10 ani) și scurt (3 luni)
- Ambele serii sunt nestaționare (I(1)), dar spread-ul pare staționar
- Curba randamentelor inversată semnalează recesiuni

TSA_ch7_case_raw_data

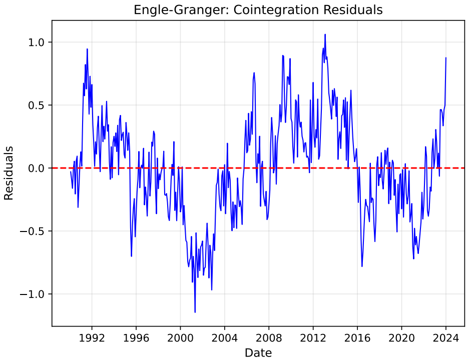
Pasul 1: Teste de rădăcină unitară



- ACF ratelor în nivel: descreștere lentă ⇒ nestaționaritate
- ACF după diferențiere: scădere rapidă ⇒ I(1)
- ACF spread: staționar — posibilă cointegrare!

TSA_ch7_case_unit_root

Pasul 2: Testul Engle-Granger de cointegrare



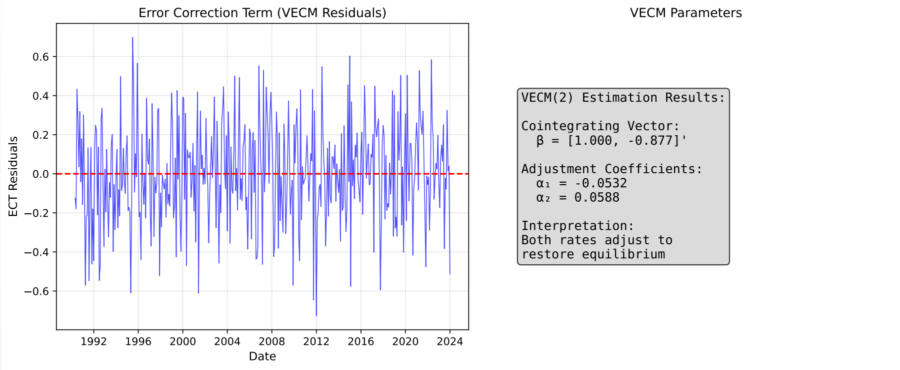
Engle-Granger Test Results

```
ADF Test on Residuals:

Test Statistic: -2.882
p-value: 0.0475

Critical Values:
  1%: -3.447
  5%: -2.869
  10%: -2.571

Conclusion:
Cointegrated
```

- Regresie: Rata scurtă $= \alpha + \beta \times$ Rata lungă $+ \varepsilon_t$
- Test ADF pe reziduuri: respingem ipoteza de rădăcină unitară
- Concluzie: Seriile sunt cointegrate — există relație de echilibru pe termen lung

TSA_ch7_case_cointegration

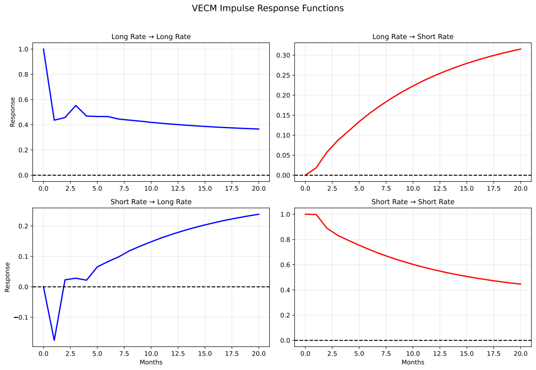
Pasul 3: Estimare VECM



- VECM(2) cu rang de cointegrare = 1
- Coeficienții de ajustare α indică viteza de revenire la echilibru
- Ambele rate se ajustează când spread-ul deviază de la medie

TSA_ch7_case_vecm

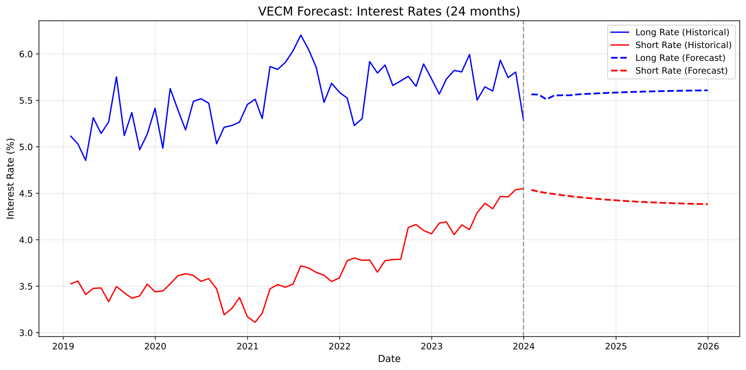
Pasul 4: Funcții de răspuns la impuls



- Șocuri în rata lungă afectează persistent ambele rate
- Efectele nu converg la zero — caracteristică a seriilor cointegrate
- VECM captează atât dinamica pe termen scurt cât și echilibrul pe termen lung

TSA_ch7_case_irf

Pasul 5: Prognoza VECM



- Prognoză pe 24 de luni pentru ambele rate simultan
- VECM menține relația de cointegrare în prognoză
- Spread-ul prognozat rămâne în jurul mediei istorice

TSA_ch7_case_forecast

Concluzii principale

Concepte Principale

- **Cointegrare**: Variabile $I(1)$ cu o combinație liniară staționară
- **Regresie falsă**: R^2 ridicat cu variabile $I(1)$ necorelate
- **Corecție a erorilor**: Ajustare către echilibrul pe termen lung
- **VECM**: VAR cu termeni de corecție a erorilor pentru sisteme cointegrate

Metode de Testare

- **Engle-Granger**: Simplu, dar doar un vector de cointegrare
- **Johansen**: Vectori multipli, mai puternic, bazat pe MLE

De Reținut

Testele de cointegrare au putere scăzută în eșantioane mici. Teoria economică ar trebui să ghideze specificația. Verificați întotdeauna validitatea modelului!

Ce urmează?

Extensii și Subiecte Conexe

- **VECM Structural**: Identificarea șocurilor structurale
- **Cointegrare cu prag**: Ajustare neliniară
- **Cointegrare de panel**: Secțiuni transversale multiple
- **Cointegrare fracționară**: Memorie lungă
- **Cointegrare variabilă în timp**: Schimbări de regim

Întrebări?

Formule cheie – Rezumat

Cointegrare

$Y_t \sim I(1)$, $X_t \sim I(1)$
$Y_t - \beta X_t = u_t \sim I(0)$

Relație de echilibru pe termen lung

Test Engle-Granger

Pas 1: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$
Pas 2: Test ADF pe $\hat{u}_t$

Valori critice speciale (nu standard ADF)

Rang de Cointegrare

$r =$ numărul de relații de cointegrare
$0 \leq r \leq K - 1$ pentru K variabile I(1)

Model VECM

$\Delta \mathbf{Y}_t = \boldsymbol{\Pi} \mathbf{Y}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \boldsymbol{\Gamma}_i \Delta \mathbf{Y}_{t-i} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$
$\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$ (factorizare)

Interpretare $\boldsymbol{\alpha}$ și $\boldsymbol{\beta}$

$\boldsymbol{\beta}$: vectori de cointegrare (echilibru)
$\boldsymbol{\alpha}$: viteza de ajustare

Corecția erorii: $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{Y}_{t-1})$

Test Johansen

Trace: $\lambda_{trace} = -T \sum_{i=r+1}^{K} \ln(1 - \hat{\lambda}_i)$
Max-Eigen: $\lambda_{max} = -T \ln(1 - \hat{\lambda}_{r+1})$

Quiz rapid

1. Ce înseamnă că două variabile $I(1)$ sunt cointegrate?
2. Care este problema "regresiei false"?
3. În VECM, ce reprezintă coeficienții α?
4. Care este avantajul principal al metodei Johansen față de Engle-Granger?
5. Dacă $\alpha_i = 0$ pentru variabila Y_i, ce implică aceasta?

Răspunsuri quiz

1. **Cointegrare**: O combinație liniară a variabilelor este $I(0)$ (staționară). Ele au un trend stochastic comun.
2. **Regresie falsă**: Regresarea unei variabile $I(1)$ pe alta $I(1)$ necorelată dă R^2 mare și coeficienți semnificativi deși nu există relație reală.
3. **Coeficienții α**: Viteza de ajustare—cât de repede răspunde fiecare variabilă la deviații de la echilibrul pe termen lung.
4. **Avantajul Johansen**: Poate testa relații multiple de cointegrare, folosește MLE (mai eficient), nu necesită alegerea variabilei dependente.
5. $\alpha_i = 0$: Variabila Y_i este slab exogenă—nu răspunde la dezechilibru. Alte variabile fac toată ajustarea.

Bibliografie I

Lucrări fundamentale cointegrare

- Engle, R.F., & Granger, C.W.J. (1987). Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing, *Econometrica*, 55(2), 251–276.
- Johansen, S. (1988). Statistical Analysis of Cointegration Vectors, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12(2-3), 231–254.
- Johansen, S. (1991). Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models, *Econometrica*, 59(6), 1551–1580.

Manuale VECM și cointegrare

- Juselius, K. (2006). *The Cointegrated VAR Model: Methodology and Applications*, Oxford University Press.
- Lütkepohl, H. (2005). *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer.

Bibliografie II

Teste și aplicații

- Phillips, P.C.B., & Ouliaris, S. (1990). Asymptotic Properties of Residual Based Tests for Cointegration, *Econometrica*, 58(1), 165–193.
- Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- Banerjee, A., Dolado, J.J., Galbraith, J.W., & Hendry, D.F. (1993). *Co-Integration, Error-Correction, and the Econometric Analysis of Non-Stationary Data*, Oxford University Press.

Resurse online și cod

- **Quantlet**: `https://quantlet.com` — Depozit de cod pentru statistică
- **Quantinar**: `https://quantinar.com` — Platformă de învățare metode cantitative
- **GitHub TSA**: `https://github.com/QuantLet/TSA` — Cod Python pentru acest curs