



Analiza și Prognoza seriilor de timp

Capitolul 2: Modele ARMA



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

Structura cursului

Motivație

Introducere și Operatorul lag

Modele Autoregresive (AR)

Modele de Medie Mobilă (MA)

Modele ARMA

Identificarea modelului

Estimarea Parametrilor

Diagnosticarea modelului

Proгноza cu ARMA

Implementare Practică

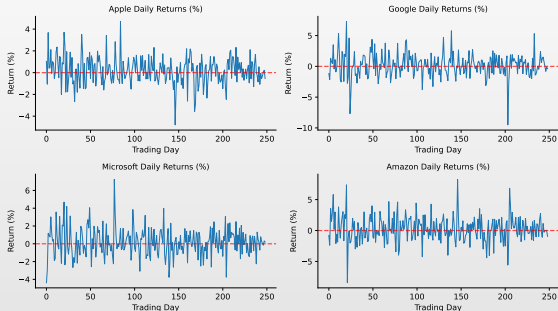
Studiu de Caz: date reale

Rezumat

Quiz

Exemplu motivațional: procese staționare

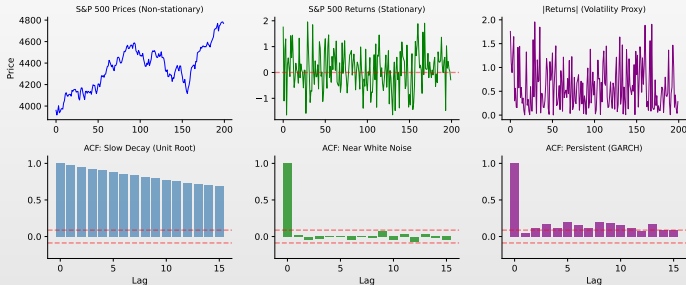
Stock Returns: Approximately Stationary Series



- **Procese AR**: Valoarea curentă depinde de valorile trecute — comportament de revenire la medie
- **Procese MA**: Valoarea curentă depinde de șocurile trecute — memorie scurtă
- **ARMA**: Combină ambele mecanisme pentru modelare flexibilă

Identificarea modelului prin Tipare ACF

Real Data: Different ACF Patterns Suggest Different Models



ACF Dezvăluie Structura modelului

- Diferite modele ARMA produc tipare ACF distincte
- Putem identifica modelul examinând datele!

Recapitulare: Staționaritatea

Din Capitolul 1: Un proces $\{X_t\}$ este **slab staționar** dacă:

1. $\mathbb{E}[X_t] = \mu$ (medie constantă)
2. $\text{Var}(X_t) = \sigma^2 < \infty$ (varianță constantă, finită)
3. $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$ (covarianța depinde doar de lag-ul h)

De ce contează staționaritatea pentru ARMA:

▣ Modelele ARMA presupun staționaritate

- ▶ Parametrii rămân stabili în timp
- ▶ Structura de autocorelație se menține

▣ Date nestaționare → diferențiați mai întâi (ARIMA, Cap. 3)

Obiectivul capitolului: Modele parametrice pentru serii staționare — combinând dependența de observațiile anterioare (AR) cu influența șocurilor aleatoare (MA).

Operatorul lag (Operatorul de Întârziere)

Definiție 1 (Operatorul lag)

Operatorul lag L (sau operatorul de întârziere B) deplasează o serie de timp înapoi cu o perioadă:

$$LX_t = X_{t-1}$$

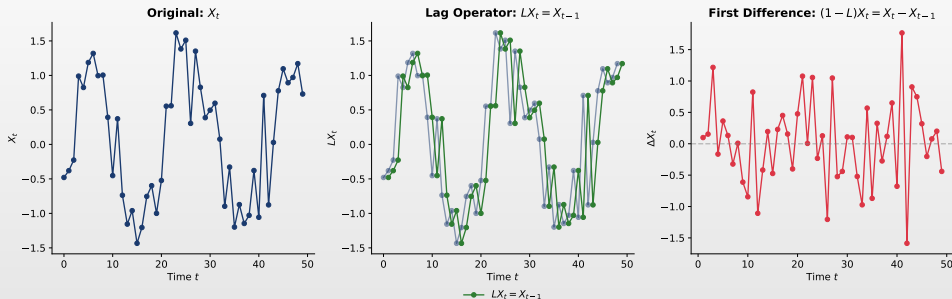
Proprietăți:

- $L^k X_t = X_{t-k}$ (deplasare înapoi cu k perioade)
- $L^0 X_t = X_t$ (identitate)
- $(1 - L)X_t = X_t - X_{t-1} = \Delta X_t$ (prima diferență)
- $(1 - L)^d X_t = \Delta^d X_t$ (diferența de ordin d)

Polinoame Lag:

$$\begin{aligned}\phi(L) &= 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p \\ \theta(L) &= 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q\end{aligned}$$

Operatorul lag: ilustrație vizuală



Observație cheie: Operatorul lag este fundamentul notației modelelor ARMA

 TSA_ch2_lag_operator

Procesul de Zgomot Alb

Definiție 2 (Zgomot Alb)

Un proces $\{\varepsilon_t\}$ este **zgomot alb**, notat $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, dacă:

1. $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$ pentru toți t
2. $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$ pentru toți t
3. $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ pentru toți $t \neq s$

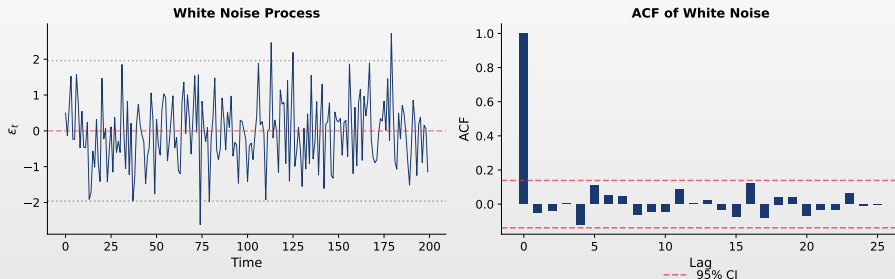
Proprietăți

- Zgomotul alb este blocul fundamental al modelelor ARMA
- ACF: $\rho(0) = 1$, $\rho(h) = 0$ pentru $h \neq 0$
 - ▶ PACF: același tipar — fără structură de dependență
- **Zgomot alb Gaussian:** $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ i.i.d.

Observație

Analiza și Prognoza seriilor de timp
Zgomotul alb **nu** este predictibil — este pur aleatoriu.

Zgomot alb: ilustrare vizuală



Caracteristici cheie

- ▣ **Stânga:** Seria fluctuează aleatoriu în jurul mediei zero, fără tipare
- ▣ **Dreapta:** ACF arată doar un vârf la lag 0; toate celelalte în limitele de semnificație

Modelul AR(1): definiție

Definiție 3 (Proces AR(1))

Un proces autoregresiv de ordin 1 este:

$$X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

unde $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ și $|\phi| < 1$ pentru staționaritate.

Interpretare:

- c : constantă (interceptul)
- ϕ : coeficient autoregresiv
 - Măsoară persistența seriei
- ε_t : inovație (șoc)

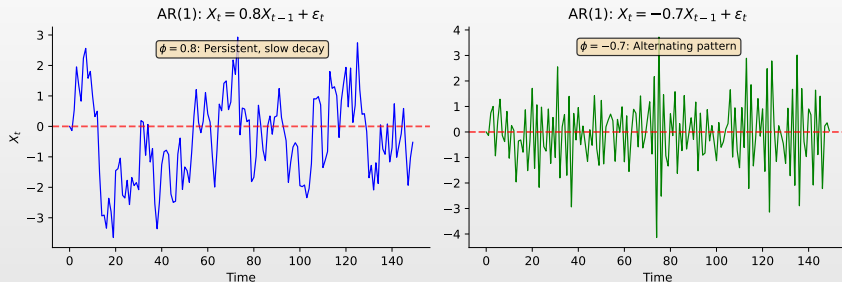
Notăție cu operatorul lag:

$$(1 - \phi L)X_t = c + \varepsilon_t$$

$$\phi(L)X_t = c + \varepsilon_t$$

unde $\phi(L) = 1 - \phi L$

AR(1): ilustrație vizuală



- ϕ **pozitiv**: Fluctuații persistente, revenire graduală la medie
- ϕ **negativ**: Comportament oscilant, alternând în jurul mediei
- $|\phi|$ mai mare \Rightarrow persistență mai mare, revenire mai lentă

Condiția de Staționaritate AR(1)

Condiție necesară și suficientă: $|\phi| < 1$

Staționar ($|\phi| < 1$):

- Șocurile se diminuează în timp
 - ▶ Procesul revine la medie
 - ▶ Varianță finită, stabilă

Ecuția caracteristică: $\phi(z) = 1 - \phi z = 0 \implies z = 1/\phi$. Staționaritate \Leftrightarrow rădăcina în afara cercului unitate ($|z| > 1$).

Nestaționar ($|\phi| \geq 1$):

- $|\phi| = 1$: mers aleatoriu
 - ▶ Rădăcină unitate, varianță $\rightarrow \infty$
- $|\phi| > 1$: proces exploziv

Proprietățile AR(1)

Pentru un AR(1) staționar cu $|\phi| < 1$:

Media:

$$\mu = \mathbb{E}[X_t] = \frac{c}{1 - \phi}$$

Varianța:

$$\gamma(0) = \text{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}$$

Autocovarianța:

$$\gamma(h) = \frac{\phi^h \sigma^2}{1 - \phi^2}$$

Autocorelația (ACF):

$$\rho(h) = \phi^h$$

Observație cheie

ACF scade exponențial la rata ϕ — semnătura AR(1)

Demonstrație: Media AR(1)

Afirmație: Pentru AR(1): $X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$, media este $\mu = \frac{c}{1-\phi}$

Demonstrație: Luăm speranța ambelor părți:

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t] = c + \phi \mathbb{E}[X_{t-1}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t]$$

Prin staționaritate, $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_{t-1}] = \mu$, și $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$:

$$\mu = c + \phi \mu$$

Rezolvând pentru μ :

$$\mu - \phi \mu = c \implies \mu(1 - \phi) = c \implies \boxed{\mu = \frac{c}{1 - \phi}}$$

Cerință

- Aceasta necesită $\phi \neq 1$
- Dacă $\phi = 1$ (rădăcină unitară), media este nedefinită

Demonstrație: Varianța AR(1)

Afirmație: $\text{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$

Demonstrație: Pentru simplitate, presupunem $c = 0$ (proces centrat). Luăm varianța din $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$:

$$\text{Var}(X_t) = \text{Var}(\phi X_{t-1} + \varepsilon_t) = \phi^2 \text{Var}(X_{t-1}) + \text{Var}(\varepsilon_t) + 2\phi \text{Cov}(X_{t-1}, \varepsilon_t)$$

Deoarece ε_t este independent de X_{t-1} , $\text{Cov}(X_{t-1}, \varepsilon_t) = 0$:

$$\gamma(0) = \phi^2 \gamma(0) + \sigma^2$$

Prin staționaritate, $\text{Var}(X_t) = \text{Var}(X_{t-1}) = \gamma(0)$:

$$\gamma(0) - \phi^2 \gamma(0) = \sigma^2 \implies \gamma(0)(1 - \phi^2) = \sigma^2 \implies \gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}$$

Notă

- ▣ Necesită $|\phi| < 1$ pentru varianță pozitivă
- ▣ Când $|\phi| \rightarrow 1$, varianța $\rightarrow \infty$

Demonstrație: Funcția de Autocorelație AR(1)

Afirmație: $\rho(h) = \phi^h$ pentru $h \geq 0$

Demonstrație: Mai întâi, găsim autocovarianța $\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t-h})$.

Înmulțim $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$ cu X_{t-h} și luăm speranța:

$$\mathbb{E}[X_t X_{t-h}] = \phi \mathbb{E}[X_{t-1} X_{t-h}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-h}]$$

Pentru $h \geq 1$: $\mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-h}] = 0$ (șocul viitor necorelat cu valorile trecute)

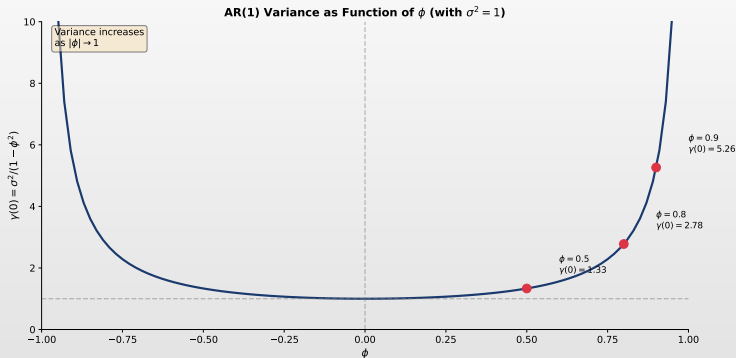
$$\gamma(h) = \phi \gamma(h-1)$$

Aceasta este o relație recursivă! Pornind de la $\gamma(0)$:

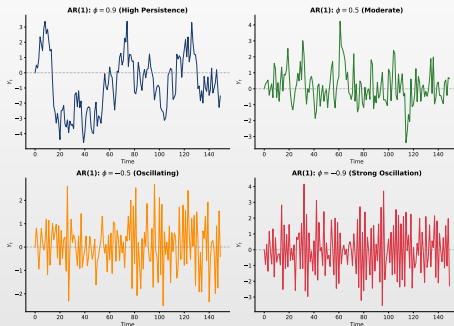
$$\gamma(1) = \phi \gamma(0), \quad \gamma(2) = \phi \gamma(1) = \phi^2 \gamma(0), \quad \dots \quad \boxed{\gamma(h) = \phi^h \gamma(0)}$$

ACF este:

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \frac{\phi^h \gamma(0)}{\gamma(0)} = \boxed{\phi^h}$$

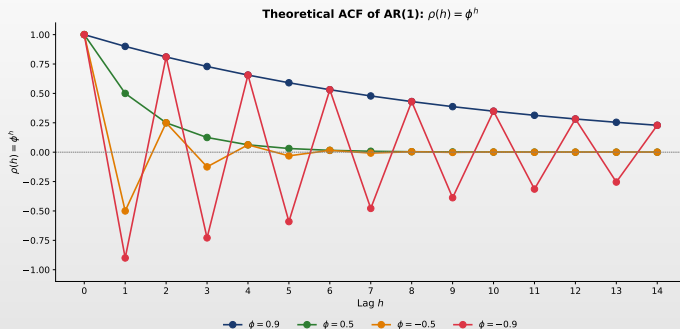
Varianța AR(1) ca funcție de ϕ 

Observație cheie: Pe măsură ce $|\phi| \rightarrow 1$, varianța explodează \rightarrow nestăționaritate

Simulări AR(1): efectul lui ϕ 

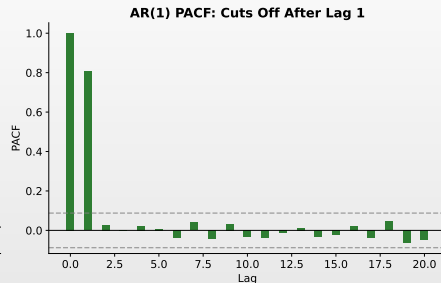
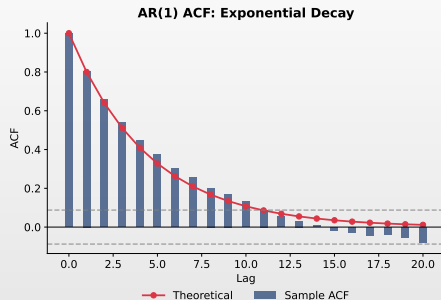
- ▣ Valori diferite ale lui ϕ produc comportamente distincte: $|\phi|$ mai mare înseamnă mai multă persistență
- ▣ ϕ pozitiv creează tipare netede, de trend; ϕ negativ creează oscilații
- ▣ Pe măsură ce $|\phi| \rightarrow 1$, procesul devine mai persistent și se apropie de nestăționaritate

ACF teoretic AR(1)



Tipar: $\rho(h) = \phi^h$ — descreștere exponențială (sau alternantă pentru $\phi < 0$)

ACF și PACF AR(1): Teorie vs Eșantion



- **ACF:** Descreștere exponențială la rata ϕ – formula teoretică: $\rho(h) = \phi^h$
- **PACF:** Un singur vârf la lag 1, apoi se întrerupe – aceasta identifică AR(1)
- Estimările din eșantion (bare) fluctuează în jurul valorilor teoretice; folosiți limitele de semnificație

Tipare ACF și PACF AR(1)

ACF al AR(1):

- ▣ Scade exponențial: $\rho(h) = \phi^h$
 - ▶ $\phi > 0$: toate pozitive, descreștere graduală
 - ▶ $\phi < 0$: semne alternante

PACF al AR(1):

- ▣ Se întrerupe după lag 1
 - ▶ $\pi_1 = \phi$, $\pi_k = 0$ pentru $k > 1$

ACF		PACF
AR(1)	Descreștere exponențială	Se întrerupe la lag 1

Acesta este tiparul cheie de identificare pentru AR(1)!

Modelul AR(p): forma generală

Definiție 4 (Proces AR(p))

Un proces autoregresiv de ordin p este:

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

Folosind operatorul lag:

$$\phi(L)X_t = c + \varepsilon_t$$

unde $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p$

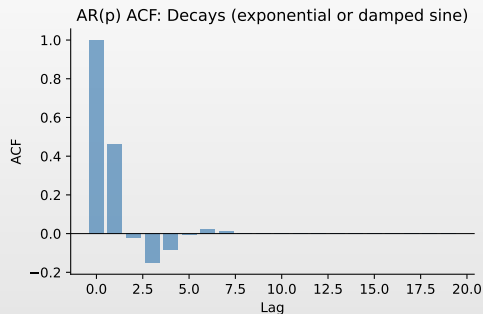
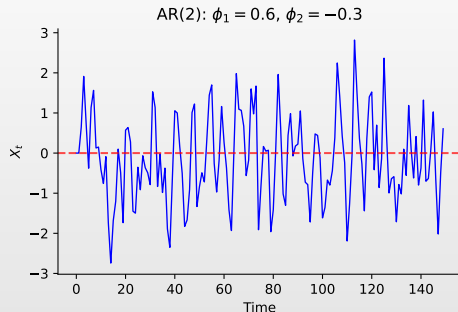
Condiție de staționaritate:

- ▣ Toate rădăcinile lui $\phi(z) = 0$ trebuie să se afle **în afara** cercului unitate
- ▣ Echivalent: toate rădăcinile au modul > 1

Tiparul PACF:

- ▣ PACF se întrerupe după lag p
- ▣ ACF scade (exponențial sau cu oscilații amortizate)

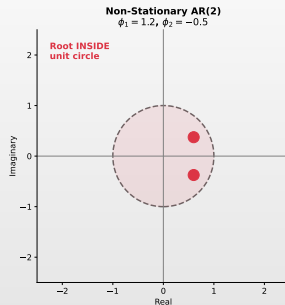
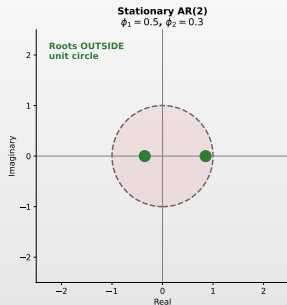
AR(p): ilustrație vizuală



Caracteristici AR(2)

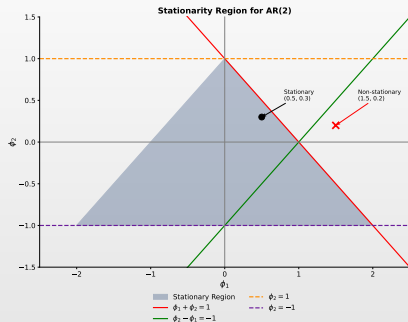
- AR(2) poate prezenta comportament pseudo-ciclic (rădăcini complexe); ACF sinusoidală amortizată
- PACF se întrerupe după lag 2 — tiparul cheie de identificare

Staționaritatea AR(2): vizualizarea cercului unitate



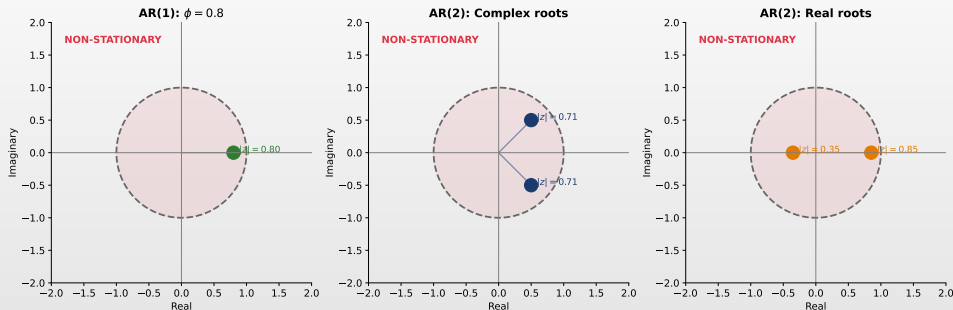
Regulă: Toate rădăcinile lui $\phi(z) = 0$ trebuie să se afle **în afara** cercului unitate umbrit  [TSA_ch2_stationarity](#)

Triunghiul de Staționaritate AR(2)



- Regiunea triunghiulară definește toate combinațiile de parametri AR(2) staționari
- Granițe: $\phi_1 + \phi_2 < 1$, $\phi_2 - \phi_1 < 1$ și $|\phi_2| < 1$
- Punctele din afara acestei regiuni duc la procese nestaționare sau explozive

Rădăcinile polinomului caracteristic



 TSA_ch2_stationarity

Modelul AR(2)

Definiție 5 (Proces AR(2))

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

Condiții de staționaritate pentru AR(2):

1. $\phi_1 + \phi_2 < 1$
2. $\phi_2 - \phi_1 < 1$
3. $|\phi_2| < 1$

Comportamentul ACF depinde de rădăcini:

- ▣ **Rădăcini reale:** amestec de două descreșteri exponențiale
- ▣ **Rădăcini complexe:** tipar sinusoidal amortizat (pseudo-cicluri)

PACF: Se întrerupe după lag 2 ($\pi_k = 0$ pentru $k > 2$)

Modelul MA(1): definiție

Definiție 6 (Proces MA(1))

Un proces de medie mobilă de ordin 1 este:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

unde $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$.

Interpretare:

- μ : media procesului
- θ : coeficient MA
 - Măsoară impactul șocului trecut
- Depinde de ε_t și ε_{t-1}

Notăție cu operatorul lag:

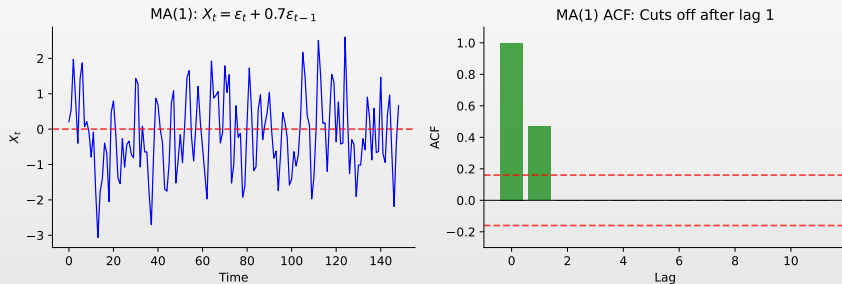
$$X_t = \mu + \theta(L)\varepsilon_t$$

unde $\theta(L) = 1 + \theta L$

Proprietate cheie

Procesele MA sunt întotdeauna staționare

MA(1): ilustrație vizuală



- **Panoul stâng:** Serie MA(1) — mai puțin persistentă decât AR(1), revenire rapidă la medie
- **Panoul drept:** ACF arată **întrerupere caracteristică după lag 1**
 - ▶ Doar $\rho(1) \neq 0$; toate lagurile superioare sunt zero
 - ▶ Această întrerupere bruscă este identificatorul cheie pentru modele MA
- PACF descreștere exponențială (tipar opus față de AR)

Proprietățile MA(1)

Pentru MA(1): $X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$

Media:

$$\mathbb{E}[X_t] = \mu$$

Varianța:

$$\gamma(0) = \sigma^2(1 + \theta^2)$$

Autocovarianța:

$$\gamma(1) = \theta\sigma^2, \quad \gamma(h) = 0 \quad (h > 1)$$

ACF:

$$\rho(1) = \frac{\theta}{1 + \theta^2}, \quad \rho(h) = 0 \quad (h > 1)$$

Observație cheie

ACF se întrerupe după lag 1 — semnătura MA(1)

Demonstrație: Varianța și Autocovarianța MA(1)

Punct de plecare: $X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$ (presupunând $\mu = 0$)

Varianța:

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= \text{Var}(X_t) = \text{Var}(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}) \\ &= \text{Var}(\varepsilon_t) + \theta^2\text{Var}(\varepsilon_{t-1}) + 2\theta\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) \\ &= \sigma^2 + \theta^2\sigma^2 + 0 = \boxed{\sigma^2(1 + \theta^2)}\end{aligned}$$

Autocovarianța la lag 1:

$$\begin{aligned}\gamma(1) &= \text{Cov}(X_t, X_{t-1}) = \text{Cov}(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2}) \\ &= \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) + \theta\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-2}) + \theta\text{Cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) + \theta^2\text{Cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}) \\ &= 0 + 0 + \theta\sigma^2 + 0 = \boxed{\theta\sigma^2}\end{aligned}$$

Autocovarianța la lag $h \geq 2$: Niciun termen ε comun $\Rightarrow \gamma(h) = 0$

Demonstrație: Maximul ACF pentru MA(1)

Afirmație: $|\rho(1)| \leq 0.5$ pentru orice valoare a lui θ

Demonstrație: ACF la lag 1 este:

$$\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{\theta\sigma^2}{\sigma^2(1 + \theta^2)} = \frac{\theta}{1 + \theta^2}$$

Pentru a găsi maximum, derivăm în raport cu θ și egalăm cu zero:

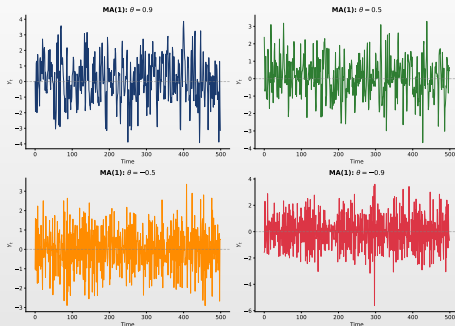
$$\frac{d\rho(1)}{d\theta} = \frac{(1 + \theta^2) - \theta(2\theta)}{(1 + \theta^2)^2} = \frac{1 - \theta^2}{(1 + \theta^2)^2} = 0$$

Soluție: $\theta = \pm 1$. La aceste valori:

$$\rho(1)|_{\theta=1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad \rho(1)|_{\theta=-1} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

Implicație

□ Dacă estimați $|\hat{\rho}(1)| > 0.5$ din date, procesul **nu** este MA(1)

Simulări MA(1): efectul lui θ 

- MA(1) este întotdeauna staționar indiferent de θ – memorie finită de doar un lag
- θ pozitiv netezește seria; θ negativ creează fluctuații mai rapide
- Spre deosebire de AR(1), șocurile MA(1) afectează procesul doar pentru o perioadă

Tipare ACF și PACF MA(1)

ACF al MA(1):

□ Se întrerupe după lag 1

- ▶ $\rho(1) = \frac{\theta}{1+\theta^2}$
- ▶ $\rho(h) = 0$ pentru $h > 1$
- ▶ $|\rho(1)| \leq 0.5$ întotdeauna

PACF al MA(1):

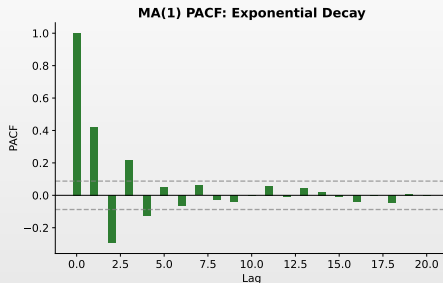
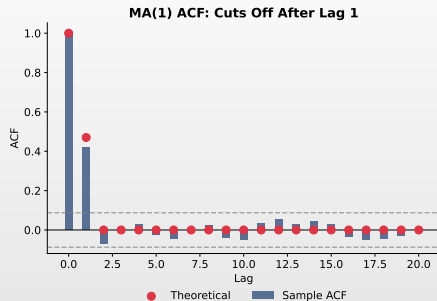
□ Scade exponențial

- ▶ Sau cu semne alternante
- ▶ Nu se întrerupe

	ACF	PACF
MA(1)	Se întrerupe la lag 1	Descresștere exponențială

Tiparul opus față de AR(1)!

ACF și PACF MA(1): comparație Vizuală



- **ACF:** Un singur vârf la lag 1, apoi se întrerupe imediat – semnătura cheie MA(1)
- **PACF:** Descreștere exponențială – tipar opus față de AR(1)
- Această inversare a tiparelor ACF/PACF distinge procesele MA de cele AR

Invertibilitatea modelelor MA

Definiție 7 (Invertibilitate)

Un proces MA este **invertibil** dacă poate fi scris ca un proces AR infinit:

$$X_t = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j (X_{t-j} - \mu) + \varepsilon_t$$

Pentru MA(1): Invertibil dacă $|\theta| < 1$

Pentru MA(q): Toate rădăcinile lui $\theta(z) = 0$ trebuie să se afle în afara cercului unitate

De ce contează invertibilitatea:

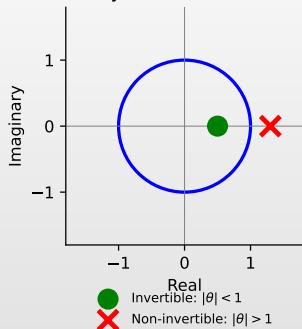
- ▣ Asigură reprezentare unică a procesului
 - ▶ Fără invertibilitate, mai multe modele MA descriu aceleași date
- ▣ Necesară pentru prognoză și estimare
- ▣ Creează corespondență: $AR(\infty) \leftrightarrow MA(q)$

Staționaritate → AR

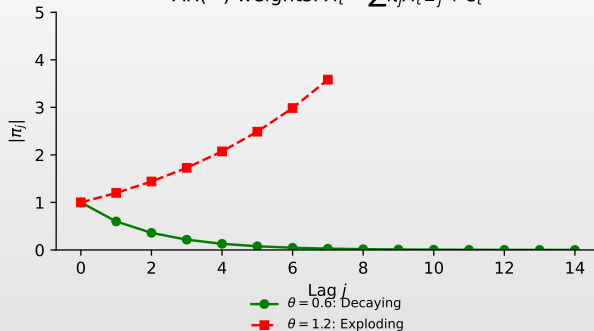
Invertibilitate → MA

Invertibilitate: ilustrație vizuală

Invertibility: Root outside unit circle



AR(∞) weights: $X_t = \sum \pi_j X_{t-j} + \varepsilon_t$



Stânga: invertibilitatea necesită rădăcini în afara cercului unitate. Dreapta: ponderile AR(∞) scad doar când $|\theta| < 1$.

Modelul MA(q): forma generală

Definiție 8 (Proces MA(q))

Un proces de medie mobilă de ordin q este:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Folosind operatorul lag:

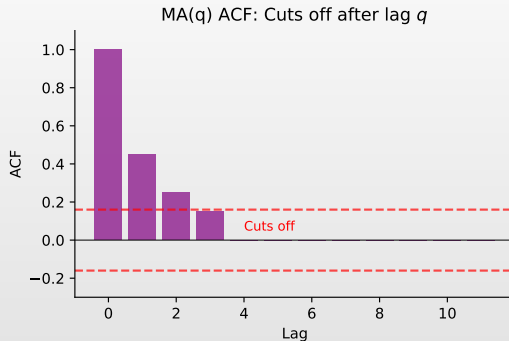
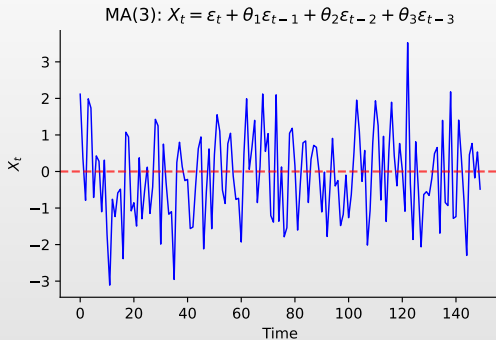
$$X_t = \mu + \theta(L)\varepsilon_t$$

unde $\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q$

Proprietăți:

- ▣ Întotdeauna staționar (varianță finită)
- ▣ ACF se întrerupe după lag q : $\rho(h) = 0$ pentru $h > q$
- ▣ PACF scade gradual
- ▣ Invertibil dacă toate rădăcinile lui $\theta(z) = 0$ se află în afara cercului unitate

MA(q): ilustrație vizuală



Proces MA(3). Semnătura cheie: ACF se întrerupe după lag q (aici, lag 3).

 TSA_ch2_acf_pacf_patterns

Modelul ARMA(p,q): Definiție

Definiție 9 (Proces ARMA(p,q))

Un **proces autoregresiv de medie mobilă** de ordin (p,q) este:

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Formă compactă folosind operatorii lag:

$$\phi(L)(X_t - \mu) = \theta(L)\varepsilon_t$$

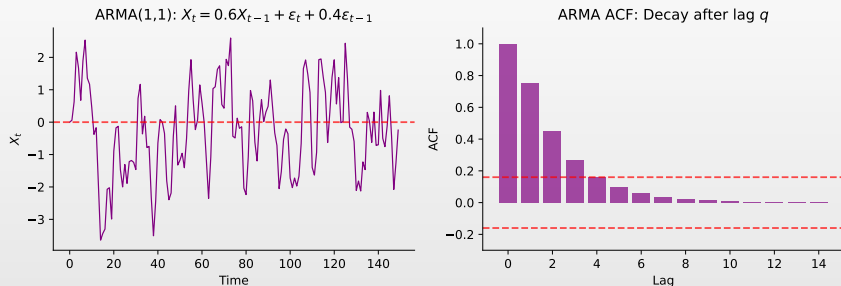
sau echivalent:

$$\phi(L)X_t = c + \theta(L)\varepsilon_t$$

$$\text{unde } \mu = \frac{c}{1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p}$$

Idee cheie: Combină componentele AR și MA pentru modelare mai flexibilă

ARMA: ilustrație vizuală

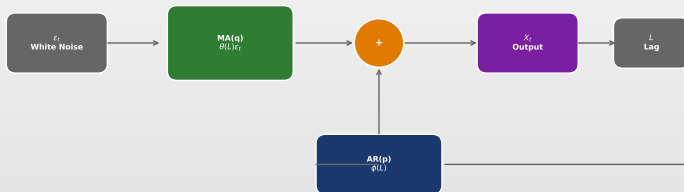


- ▣ **ARMA(1,1) combină** persistența AR cu răspunsul la șocuri MA
- ▣ **Tipar ACF:** Descreștere după primul lag (nu întrerupere bruscă ca MA pur)
 - ▶ Primul lag influențat atât de ϕ cât și de θ
 - ▶ Lagurile următoare descresc geometric ca AR
- ▣ **Tipar PACF:** De asemenea descreștere (nu întrerupere bruscă ca AR pur)
- ▣ Nici ACF nici PACF nu se întrerup — identificator cheie pentru modele mixte

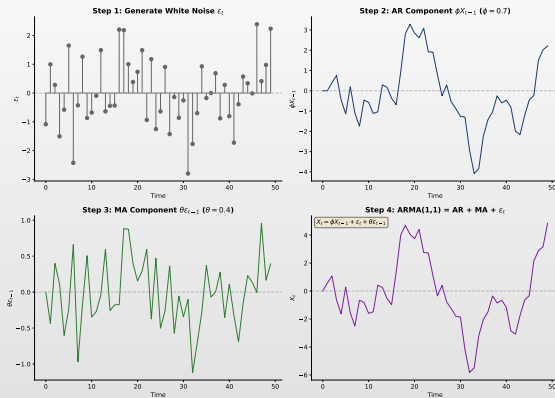
Structura modelului ARMA

ARMA(p,q) Model Structure

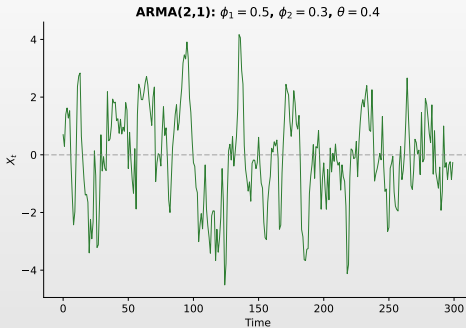
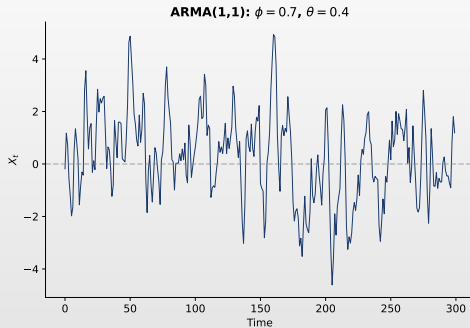
$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$



Cum funcționează Simularea ARMA



Exemple ARMA



Modelul ARMA(1,1)

Definiție 10 (Proces ARMA(1,1))


$$X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

Proprietăți (presupunând staționaritate și invertibilitate):

- Media: $\mu = \frac{c}{1-\phi}$
- Variația: $\gamma(0) = \frac{(1+2\phi\theta+\theta^2)\sigma^2}{1-\phi^2}$

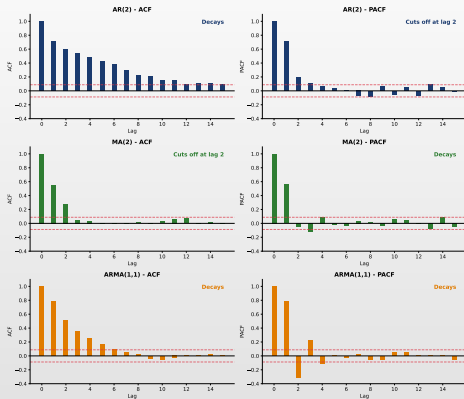
ACF:

$$\rho(1) = \frac{(1 + \phi\theta)(\phi + \theta)}{1 + 2\phi\theta + \theta^2}$$
$$\rho(h) = \phi \cdot \rho(h-1) \quad \text{pentru } h \geq 2$$

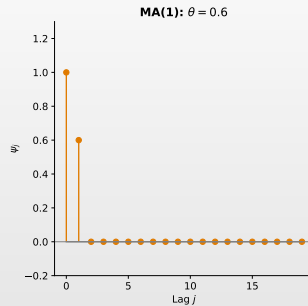
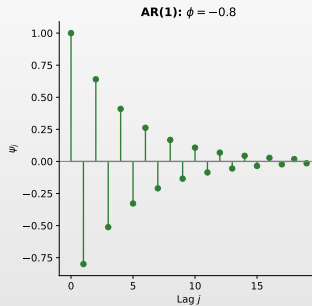
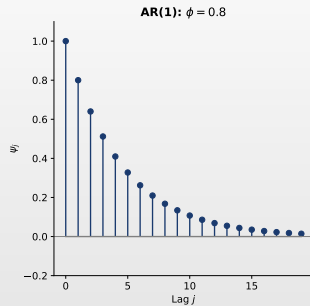
Tipar: ACF scade exponențial după lag 1 (ca AR), dar punctul de pornire depinde atât de ϕ cât și de θ 

TSA_ch2_arma

Tipare ACF/PACF: AR vs MA vs ARMA



Funcții de Răspuns la Impuls



Interpretare: Arată cum se propagă un șoc unitar prin sistem în timp

Rezumat staționaritate și invertibilitate

Pentru ca ARMA(p,q) să fie bine comportat:

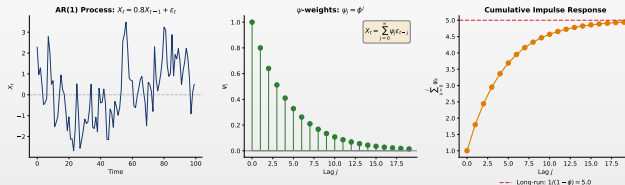
Condiție	Cerință
Staționaritate	Rădăcinile lui $\phi(z) = 0$ în afara cercului unitate
Invertibilitate	Rădăcinile lui $\theta(z) = 0$ în afara cercului unitate

Implicații:

- **Staționaritate:** Se poate scrie ca MA(∞): $X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$
- **Invertibilitate:** Se poate scrie ca AR(∞): $X_t = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j (X_{t-j} - \mu) + \varepsilon_t$

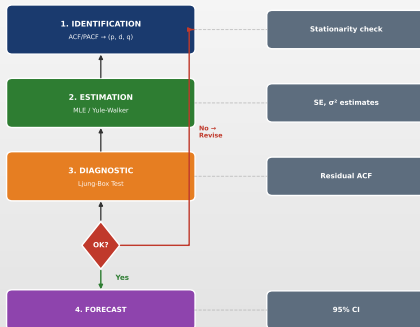
Reprezentare cauzală: X_t depinde doar de șocurile *trecute* (nu viitoare)

Teorema de Descompunere a lui Wold



Orice proces staționar poate fi scris ca $MA(\infty)$: $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$

Metodologia Box-Jenkins



Tabel rezumat pentru identificarea modelului

Model Identification: ACF/PACF Patterns

Model	ACF Pattern	PACF Pattern
AR(p)	Exponential decay or damped oscillation	Cuts off after lag p
MA(q)	Cuts off after lag q	Exponential decay or damped oscillation
ARMA(p,q)	Exponential decay after lag q-p	Exponential decay after lag p-q

Sfat practic: Începeți simplu (p , q mici), creșteți dacă diagnosticele eșuează

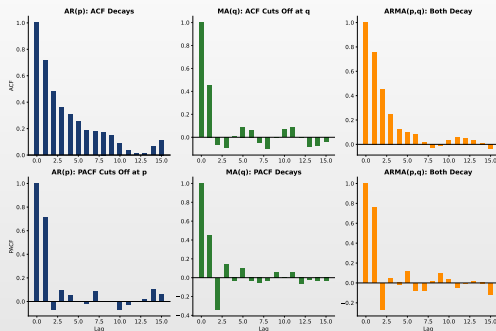
 TSA_ch2_acf_pacf_patterns

Reguli de Identificare ACF/PACF

Tipare teoretice pentru procese staționare:

Model	Tipar ACF	Tipar PACF
AR(1)	Descreștere exponențială	Vârf la lag 1, apoi 0
AR(2)	Exponențială/sinusoidă amortizată	Vârfuri la lag-uri 1-2, apoi 0
AR(p)	Scade gradual	Se întrerupe după lag p
MA(1)	Vârf la lag 1, apoi 0	Descreștere exponențială
MA(2)	Vârfuri la lag-uri 1-2, apoi 0	Exponențială/sinusoidă amortizată
MA(q)	Se întrerupe după lag q	Scade gradual
ARMA(p,q)	Scade	Scade

Tipare ACF/PACF: Ghid Vizual



- ▣ **AR**: ACF scade, PACF se întrerupe – folosiți PACF pentru a identifica ordinul p
- ▣ **MA**: ACF se întrerupe, PACF scade – folosiți ACF pentru a identifica ordinul q
- ▣ **ARMA**: Ambele scad – necesită criterii informaționale pentru selecția modelului

Criterii informaționale

Scop: Echilibrează calitatea potrivirii față de complexitatea modelului

AIC (Akaike):

$$AIC = -2 \ln(\hat{L}) + 2k$$

BIC (Bayesian):

$$BIC = -2 \ln(\hat{L}) + k \ln(n)$$

□ Penalizare moderată

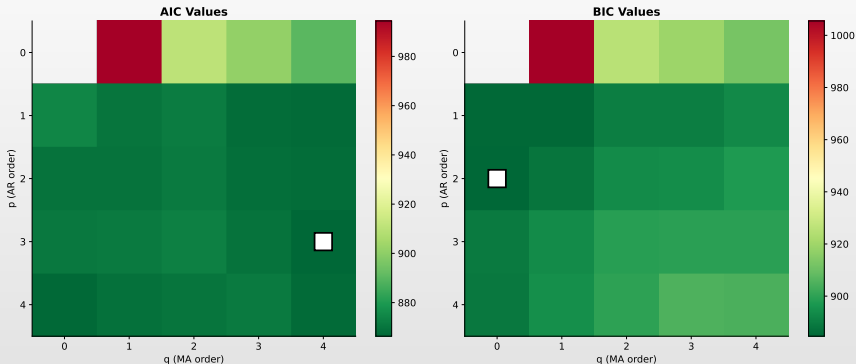
- ▶ Tinde să aleagă modele mai mari
- ▶ Optim pentru prognoză

□ Penalizare mai puternică

- ▶ Preferă modele mai parcimonioase
- ▶ Consistent pentru identificare

Reguli: Valori mai mici = model mai bun. Comparați modele pe *aceleași date*.

AIC vs BIC: Selecția modelului

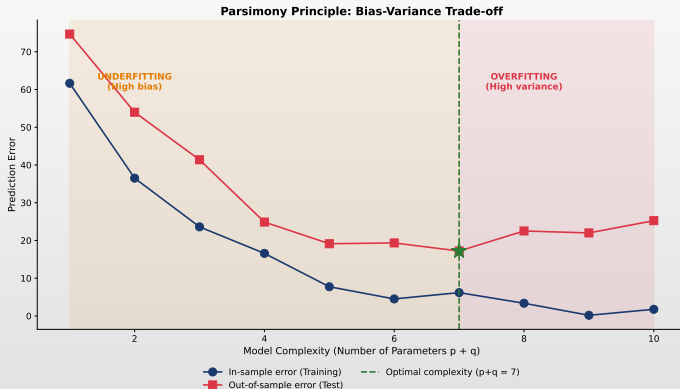


Notă: Pătratul alb marchează cel mai bun model; valorile mai mici (verde) sunt mai bune

TSA_ch2_model_selection



Principiul parcimoniei: Compromisul bias-varianță



Selecția automată a modelului

Abordarea căutării pe grilă:

1. Potriviți ARMA(p, q) pentru $p = 0, 1, \dots, p_{max}$ și $q = 0, 1, \dots, q_{max}$
2. Selectați modelul cu cel mai mic AIC sau BIC
3. Verificați cu teste de diagnostic

În Python (statsmodels):

- ▣ `pm.auto_arima()` din pachetul `pmdarima`
- ▣ Testează automat staționaritatea, caută peste ordine
- ▣ Returnează cel mai bun model după AIC/BIC

Atenție:

- ▣ Selecția automată este un punct de pornire, nu răspunsul final
- ▣ Verificați întotdeauna diagnosticele
- ▣ Considerați cunoștințele de domeniu

Prezentare generală a metodelor de estimare

Trei abordări principale:

1. Metoda Momentelor / Yule-Walker (doar AR)

- Potrivește autocorelațiile din eșantion la valorile teoretice
- Simplă, formă închisă pentru modele AR
- Nu este eficientă pentru componentele MA

2. Estimarea prin Maximum de Verosimilitate (MLE)

- Cea mai comună abordare
- Necesită ipoteză distribuțională (de obicei Gaussiană)
- Eficientă și consistentă

3. Cele Mai Mici Pătrate Condiționate

- Minimizaază suma pătratelor reziduurilor
- Condiționare pe observațiile inițiale
- Computațional mai simplă decât MLE exact

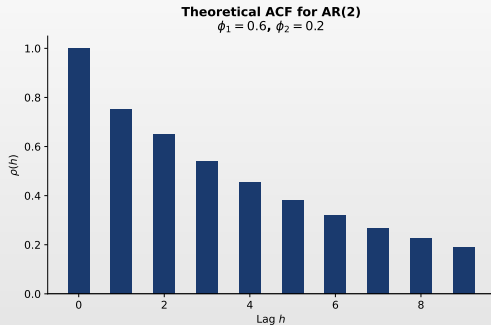
Comparația metodelor de estimare

ARMA Parameter Estimation Methods

Yule-Walker	Maximum Likelihood	Conditional LS
Pros: <ul style="list-style-type: none">+ Simple computation+ Closed-form solution Cons: <ul style="list-style-type: none">- AR only- Less efficient	Pros: <ul style="list-style-type: none">+ Most efficient+ Works for ARMA Cons: <ul style="list-style-type: none">- Iterative- Local optima risk	Pros: <ul style="list-style-type: none">+ Simple to implement+ Fast computation Cons: <ul style="list-style-type: none">- Biased for small n- Ignores initial values

Recommendation: Use MLE for final estimation,
Yule-Walker for initial values

Ecuțiile Yule-Walker pentru AR(p)



Yule-Walker Equations

$$\rho(1) = \phi_1 + \phi_2 \rho(1)$$

$$\rho(2) = \phi_1 \rho(1) + \phi_2$$

Matrix form: $R \cdot \phi = \rho$

R = autocorrelation matrix

$$\text{Solution: } \hat{\phi} = R^{-1} \rho$$

Ecuțiile Yule-Walker: forma matriceală

Pentru AR(p): $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$

Ecuțiile Yule-Walker:

$$\rho(k) = \phi_1 \rho(k-1) + \phi_2 \rho(k-2) + \cdots + \phi_p \rho(k-p)$$

pentru $k = 1, 2, \dots, p$

Forma matriceală:

$$\begin{pmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \cdots & \rho(p-1) \\ \rho(1) & \rho(0) & \cdots & \rho(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(p-1) & \rho(p-2) & \cdots & \rho(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(p) \end{pmatrix}$$

Estimare: Înlocuiți $\rho(k)$ cu autocorelațiile din eșantion $\hat{\rho}(k)$

Demonstrație: Ecuațiile Yule-Walker

Scop: Derivarea relației $\rho(k) = \phi_1\rho(k-1) + \dots + \phi_p\rho(k-p)$

Demonstrație: Pornim de la AR(p): $X_t = \phi_1X_{t-1} + \dots + \phi_pX_{t-p} + \varepsilon_t$

Înmulțim ambele părți cu X_{t-k} și luăm speranța:

$$\mathbb{E}[X_t X_{t-k}] = \phi_1 \mathbb{E}[X_{t-1} X_{t-k}] + \dots + \phi_p \mathbb{E}[X_{t-p} X_{t-k}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-k}]$$

Pentru $k \geq 1$: $\mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-k}] = 0$ (șocul viitor necorelat cu trecutul)

Folosind $\gamma(k) = \mathbb{E}[X_t X_{t-k}]$ (presupunând medie zero):

$$\gamma(k) = \phi_1\gamma(k-1) + \phi_2\gamma(k-2) + \dots + \phi_p\gamma(k-p)$$

Împărțind la $\gamma(0)$:

$$\rho(k) = \phi_1\rho(k-1) + \phi_2\rho(k-2) + \dots + \phi_p\rho(k-p)$$

Cazul Special AR(1)

$$\square \quad \rho(k) = \phi_1\rho(k-1) = \phi_1^k \text{ (folosind } \rho(0) = 1)$$

Estimarea prin Maximum de Verosimilitate

Presupunând erori Gaussiene: $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

Log-verosimilitatea pentru ARMA(p,q):

$$\ell(\phi, \theta, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2$$

unde ε_t sunt inovațiile calculate recursiv.

Procedura de estimare:

1. Inițializare: folosiți metoda momentelor sau OLS pentru valori de pornire
2. Optimizare: metode numerice (de ex., BFGS, Newton-Raphson)
3. Iterare până la convergență

În practică: Folosiți `statsmodels.tsa.arima.model.ARIMA`

Erori standard și inferență

Distribuția asimptotică a MLE:

$$\hat{\theta} \xrightarrow{d} N\left(\theta_0, \frac{1}{n}I(\theta_0)^{-1}\right)$$

unde $I(\theta)$ este matricea informației Fisher.

Erori standard: Rădăcina pătrată a diagonalei lui $\frac{1}{n}\hat{I}^{-1}$

Testarea ipotezelor:

- $H_0 : \phi_j = 0$ (sau $\theta_j = 0$)
- Statistică de test: $z = \frac{\hat{\phi}_j}{SE(\hat{\phi}_j)} \sim N(0, 1)$ asimptotic
- Respingeți dacă $|z| > 1.96$ la nivel de 5%

Interval de încredere: $\hat{\phi}_j \pm 1.96 \cdot SE(\hat{\phi}_j)$

Analiza reziduurilor

Dacă modelul este corect specificat, reziduurile trebuie să fie zgomot alb:

▣ Graficul reziduurilor în timp

- ▶ Fluctuează în jurul lui zero, fără tipare evidente
- ▶ Varianță constantă (fără heteroscedasticitate)

▣ ACF al reziduurilor

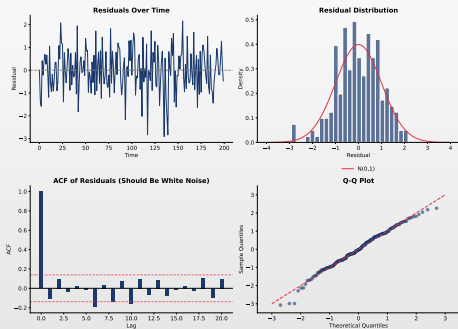
- ▶ Toate corelațiile în limitele de semnificație
- ▶ Fără vârfuri semnificative → zgomot alb

▣ Histogramă / graficul Q-Q

- ▶ Distribuție aproximativ normală
- ▶ Cozi groase → erori non-normale

✓ **Toate verificările OK** → model adecvat × **Eșec** → reveniți la identificare

Diagnosticarea reziduurilor: Exemplu



- ▣ **Graficul reziduurilor:** Ar trebui să arate dispersie aleatorie în jurul lui zero cu varianță constantă
- ▣ **ACF reziduurilor:** Fără vârfuri semnificative indică zgomot alb (ajustare bună)
- ▣ **Graficul Q-Q:** Punctele pe linia diagonală indică reziduuri distribuite normal

Testul Ljung-Box

Definiție 11 (Testul Ljung-Box)

Testează dacă reziduurile sunt distribuite independent (fără autocorelație).

Statistică de test:

$$Q(m) = n(n+2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k}$$

Ipoteze:

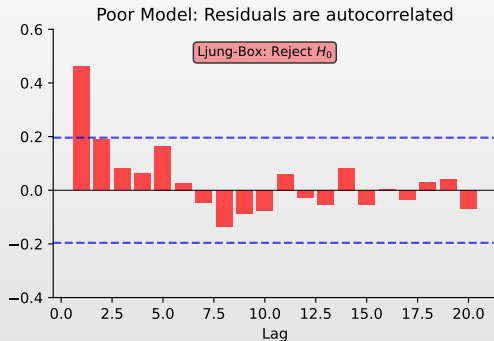
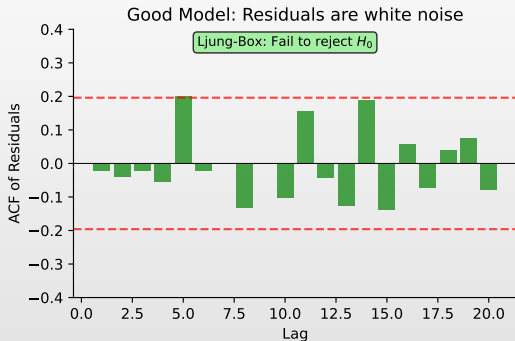
- H_0 : Reziduurile sunt zgomot alb (fără autocorelație până la lag m)
- H_1 : Reziduurile sunt autocorelate

Distribuție: Sub H_0 , $Q(m) \sim \chi^2(m - p - q)$ aproximativ

Decizie:

- $p\text{-value} > 0.05 \rightarrow$ nu respingem $H_0 \rightarrow$ reziduurile sunt zgomot alb
- $p\text{-value} < 0.05 \rightarrow$ autocorelație reziduală \rightarrow model inadecvat

Testul Ljung-Box: ilustrație vizuală



Stânga: Model bun – reziduurile sunt zgomot alb (fără ACF semnificativ). Dreapta: Model slab – reziduurile arată autocorelație.

Lista de Verificare Diagnostic

Un model ARMA bun ar trebui să satisfacă:

1. **Staționaritate:** Rădăcinile AR în afara cercului unitate
✓ Verificați cu `arroots`
2. **Invertibilitate:** Rădăcinile MA în afara cercului unitate
✓ Verificați cu `maroots`
3. **Reziduuri zgomot alb:** Fără ACF semnificativ
✓ Grafic ACF, testul Ljung-Box
4. **Reziduuri normale:** (dacă presupunem)
✓ Grafic Q-Q, testul Jarque-Bera
5. **Fără heteroscedasticitate:** Varianță constantă
✓ Reprezentați reziduurile, testul ARCH
6. **Simplu:** Cel mai mic AIC/BIC dintre modelele adecvate

Dacă diagnosticele eșuează: Reveniți la identificare, încercați ordine diferite

Proгноze punctuale

Proгноză optimă: Speranța condiționată minimizează MSE

$$\hat{X}_{n+h|n} = \mathbb{E}[X_{n+h}|X_n, X_{n-1}, \dots]$$

Pentru AR(1): $X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$

$$\hat{X}_{n+1|n} = c + \phi X_n$$

$$\hat{X}_{n+2|n} = c + \phi \hat{X}_{n+1|n} = c(1 + \phi) + \phi^2 X_n$$

$$\hat{X}_{n+h|n} = \mu + \phi^h (X_n - \mu)$$

Proprietate cheie

Proгноzele converg la media μ când $h \rightarrow \infty$ (revenire la medie)

Pentru MA(1): $X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$

$$\hat{X}_{n+1|n} = \mu + \theta \varepsilon_n$$

$$\hat{X}_{n+h|n} = \mu \quad \text{pentru } h > 1$$

Incertitudinea prognozei

Eroarea de prognoză:

$$e_{n+h|n} = X_{n+h} - \hat{X}_{n+h|n}$$

Eroarea medie pătratică de prognoză (MSFE):

$$\text{MSFE}(h) = \mathbb{E}[e_{n+h|n}^2] = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2$$

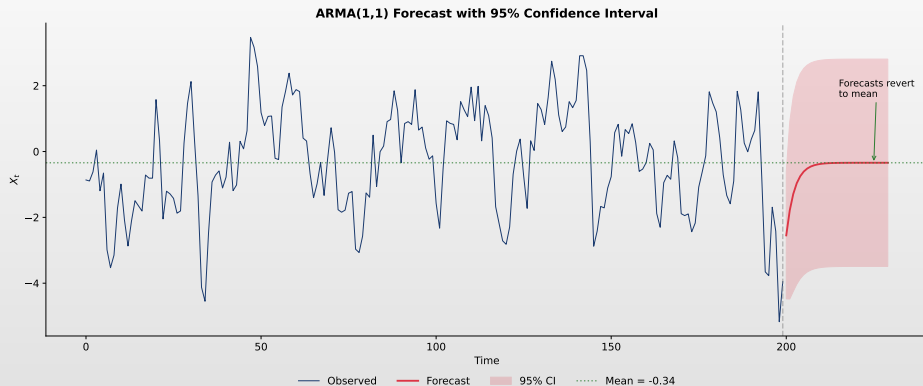
unde ψ_j sunt coeficienții $\text{MA}(\infty)$.

Pentru AR(1): $\psi_j = \phi^j$

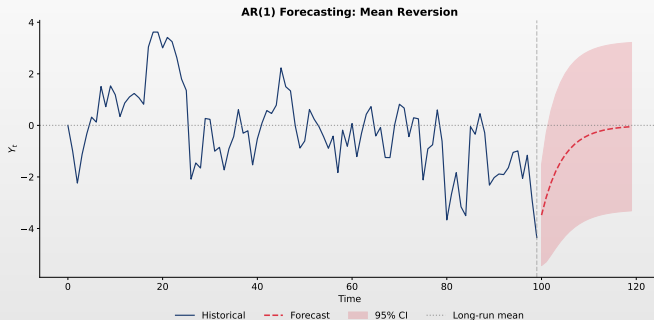
$$\text{MSFE}(h) = \sigma^2 \frac{1 - \phi^{2h}}{1 - \phi^2} \rightarrow \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2} = \text{Var}(X_t)$$

Observație cheie: Incertitudinea prognozei crește cu orizontul, ajungând eventual la varianța necondiționată

Proгноза ARMA cu intervale de încredere

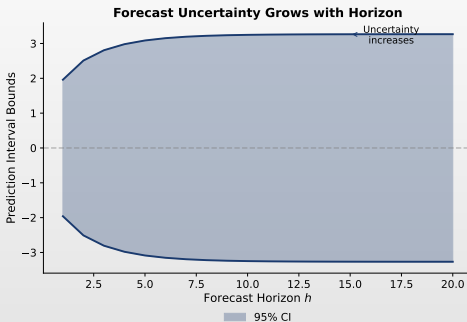
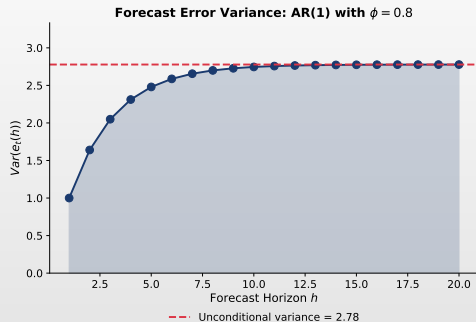


Proгноза AR(1): Revenirea la Medie



- Prognozele converg la media necondiționată μ pe măsură ce orizontul crește
- Rata de convergență depinde de $|\phi|$: valori mai mari înseamnă revenire mai lentă
- Intervalele de încredere se lărgesc cu orizontul, ajungând eventual la varianța necondiționată

Varianța erorii de prognoză în funcție de orizont



Intervale de încredere pentru prognoze

Presupunând erori Gaussiene:

$$X_{n+h}|X_n, \dots \sim N\left(\hat{X}_{n+h|n}, \text{MSFE}(h)\right)$$

Interval de încredere $(1 - \alpha)$:

$$\hat{X}_{n+h|n} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\text{MSFE}(h)}$$

unde $z_{\alpha/2} = 1.96$ pentru IC 95%.

Proprietăți:

- Intervalele se largesc pe măsură ce orizontul crește
 - Converg la intervalul necondiționat: $\mu \pm z_{\alpha/2}\sigma_X$
- Lățimea depinde de parametrii modelului
 - Coeficienți AR mai mari \rightarrow intervale mai largi

În Python: `model.get_forecast(h).conf_int()`

Evaluarea prognozei

Testare în afara eșantionului:

1. Împărțiți datele: antrenare + test
2. Generați prognoze pe test
3. Comparați cu valorile reale

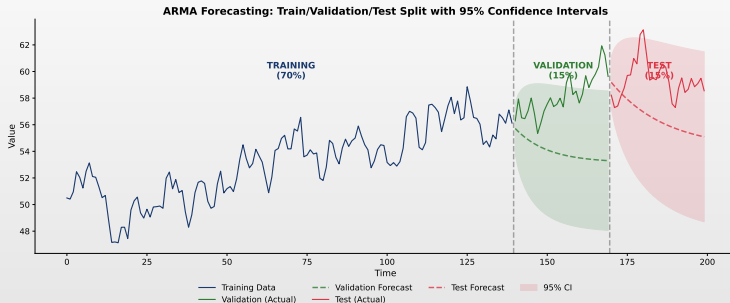
Fereastră mobilă:

- Re-estimați pe măsură ce sosesc date noi
 - ▶ Evaluare mai realistă

Metriци de eroare:

- **MAE** = $\frac{1}{n} \sum |e_t|$
 - ▶ Robuust la valori extreme
- **RMSE** = $\sqrt{\frac{1}{n} \sum e_t^2}$
 - ▶ Penalizează erorile mari
- **MAPE** = $\frac{100}{n} \sum \left| \frac{e_t}{\hat{x}_t} \right|$
 - ▶ Procentual, ușor de interpretat

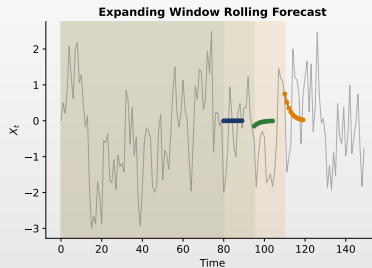
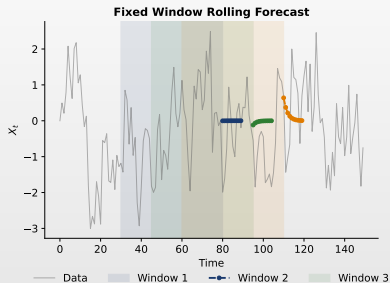
Exemplu de Proгноза Train/Validare/Test



Bună Practică

- Evaluați întotdeauna prognozele pe date nevăzute (train/validation/test split)

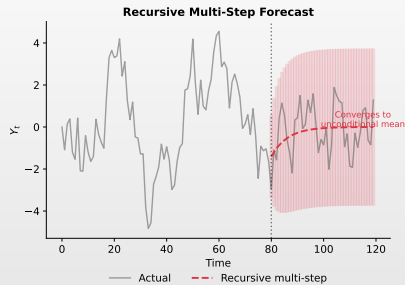
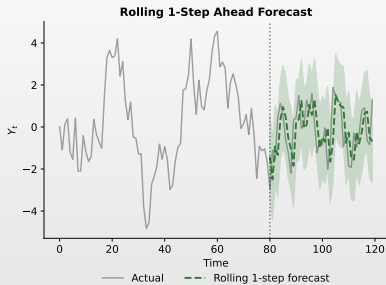
Proгноза cu Fereastră Mobilă (Rolling Forecast)



Metodologia Rolling Forecast

- ▣ **Fereastră fixă** (ultimele w obs.) vs **expansivă** (toate datele); generează prognoza 1-pas, repetă

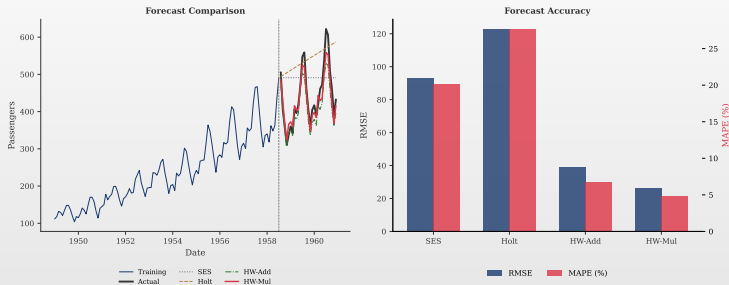
Rolling vs Prognoza multi-pas



Diferențe Cheie

- Rolling 1-pas (precis); Multi-pas direct (model separat/orizont); Recursiv (acumulare erori)

Aplicație cu Date reale: comparație Proгноze



Considerații Practice

- Date reale: nestaționaritate, rupturi; comparați modele; folosiți validare rolling

Implementare Python: Potrivirea ARMA

Folosind statsmodels:

```
from statsmodels.tsa.arima.model import ARIMA

# Potrivire ARMA(2,1) -- notă: ARIMA(p,d,q) cu d=0
model = ARIMA(data, order=(2, 0, 1))
results = model.fit()

# Rezumat
print(results.summary())

# Prognoză
forecast = results.get_forecast(steps=10)
print(forecast.predicted_mean)
print(forecast.conf_int())
```

Notă: ARIMA cu $d = 0$ este echivalent cu ARMA

Python: Selecția modelului cu pmdarima

Selecție automată ARIMA:

```
import pmdarima as pm

# Auto ARIMA cu criteriul AIC
model = pm.auto_arima(data,
                      start_p=0, max_p=5,
                      start_q=0, max_q=5,
                      d=0, # Fără diferențiere pentru date staționare
                      seasonal=False,
                      information_criterion='aic',
                      trace=True)

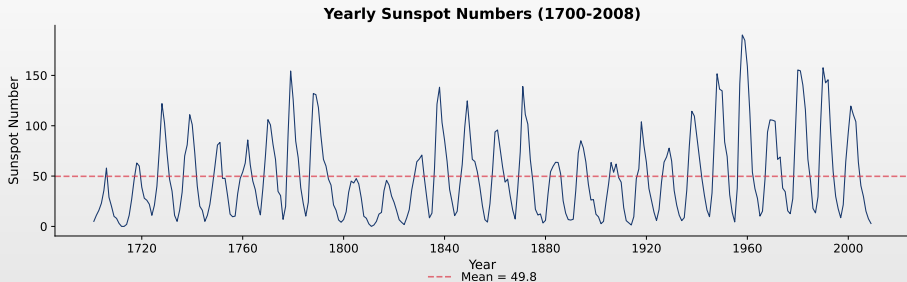
print(model.summary())
```

Rezultat: Cel mai bun ordin al modelului și parametrii potriviți

Rezumat flux de lucru

1. **Pregătirea datelor**
 - ▶ Verificați valori lipsă, valori aberante
 - ▶ Transformați dacă este necesar (log, diferențiere)
2. **Verificarea staționarității**
 - ▶ Inspecție vizuală: grafic temporal, ACF
 - ▶ Teste formale: ADF, KPSS
 - ▶ Diferențiați dacă este nestaționar
3. **Identificarea modelului**
 - ▶ Tipare ACF/PACF
 - ▶ Căutare pe grilă cu criterii informaționale
4. **Estimare și diagnosticare**
 - ▶ Potriviiți modelul, verificați semnificația
 - ▶ Analiză reziduală, testul Ljung-Box
5. **Proгноză**
 - ▶ Prognoze punctuale cu intervale de încredere
 - ▶ Validare în afara eșantionului

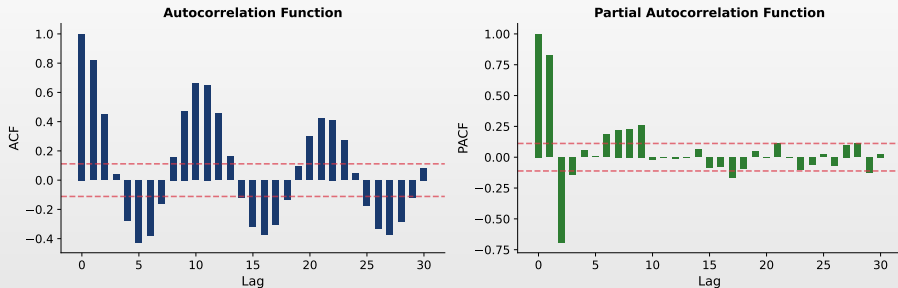
Studiu de Caz: Petele Solare (Sunspots)



Descrierea Datelor

- Pete solare anuale (1700–2008): serie staționară cu cicluri de ~ 11 ani; metodologie Box-Jenkins

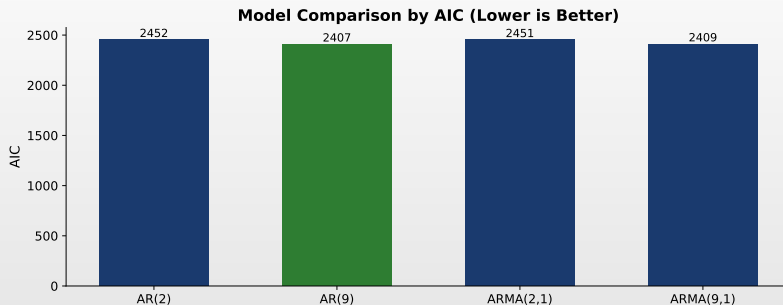
Pasul 1: Analiza ACF/PACF



Identificare

- ☐ ACF sinusoidală (AR); PACF cu vârfuri la lag 1, 2, 9 \Rightarrow AR(2) sau AR(9); serie staționară ($d = 0$)

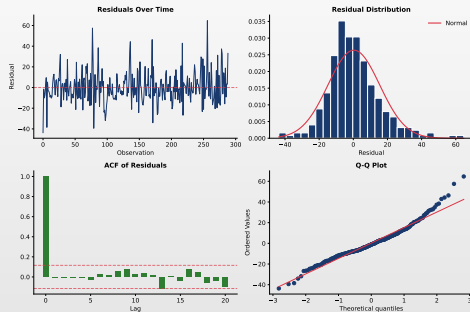
Pasul 2: Compararea modelelor



Selecția modelului

- Comparăm mai multe modele candidate folosind criteriul AIC
- Modelul **AR(9)** are cel mai mic AIC, capturând ciclul solar de 11 ani

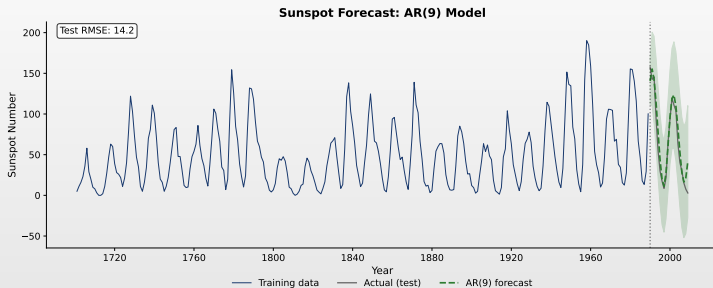
Pasul 3: Verificarea Diagnostică



Diagnostic AR(9)

- Reziduuri: zgomot alb, medie zero, varianță constantă, ACF fără structură, \approx normal

Pasul 4: Prognoza



Rezultate

- AR(9) captează ciclicitatea; IC 95% acoperă valorile reale; $RMSE \approx 30$

Concluzii cheie

1. **AR(p)**: Depinde de p valori trecute; staționaritate: rădăcini în afara cercului unitate; PACF se întrerupe la lag p
2. **MA(q)**: Depinde de q șocuri trecute; întotdeauna staționar; ACF se întrerupe la lag q
3. **ARMA(p,q)**: Combină AR și MA; atât ACF cât și PACF scad
4. **Box-Jenkins**: Identificare \rightarrow Estimare \rightarrow Diagnosticare \rightarrow Prognoză
5. **Diagnosticare**: Reziduurile trebuie să fie zgomot alb
6. **Prognoze**: Converge la medie; incertitudinea crește cu orizontul

Previzualizare capitolul următor

Capitolul 3: ARIMA și Modele Sezoniere

- ARIMA(p,d,q): Modele integrate pentru date nestaționare
- ARIMA Sezonier: SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_s
- Diferențiere sezonieră
- Aplicații practice cu tipare sezoniere

Lectură:

- Hyndman & Athanasopoulos, *Forecasting: Principles and Practice*, Cap. 9
- Box, Jenkins, Reinsel & Ljung, *Time Series Analysis*, Cap. 3-4

Întrebarea 1

Întrebare

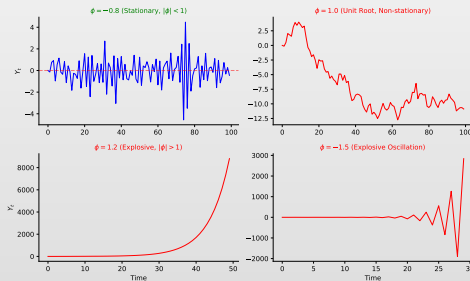
Pentru ce valoare a lui ϕ este procesul AR(1) $X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$ staționar?

- (A) $\phi = 1.2$
- (B) $\phi = 1.0$
- (C) $\phi = -0.8$
- (D) $\phi = -1.5$

Întrebarea 1: Răspuns

Răspuns Corect: (C) $\phi = -0.8$

- ☐ AR(1) este staționar dacă și numai dacă $|\phi| < 1$
- ☐ Doar $|-0.8| = 0.8 < 1$



Întrebarea 2

Întrebare

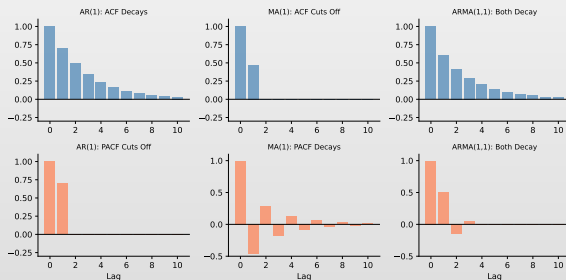
Observați: ACF are vârf la lag 1, apoi se întrerupe. PACF scade gradual. Ce model?

- (A) AR(1)
- (B) MA(1)
- (C) ARMA(1,1)
- (D) Zgomot alb

Întrebarea 2: Răspuns

Răspuns Corect: (B) MA(1)

- ACF se întrerupe \rightarrow proces MA
- PACF scade \rightarrow confirmă MA(1)



Întrebarea 3

Întrebare

Este MA(1) $X_t = \varepsilon_t + 1.5\varepsilon_{t-1}$ invertibil?

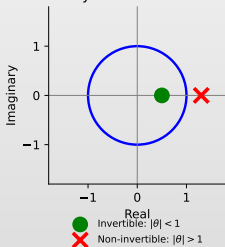
- (A) Da, procesele MA sunt întotdeauna invertibile
- (B) Da, deoarece $1.5 > 0$
- (C) Nu, deoarece $|\theta| = 1.5 > 1$
- (D) Nu, procesele MA nu sunt niciodată invertibile

Întrebarea 3: Răspuns

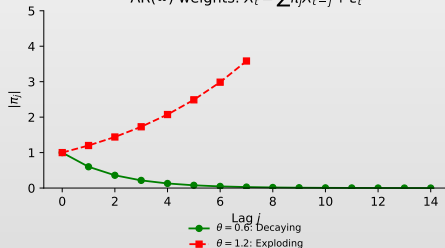
Răspuns Corect: (C) Nu, deoarece $|\theta| = 1.5 > 1$

- Invertibilitatea necesită $|\theta| < 1$
- Aici $|\theta| = 1.5 > 1$, deci nu este invertibil

Invertibility: Root outside unit circle



AR(∞) weights: $X_t = \sum \pi_j X_{t-j} + \varepsilon_t$



Întrebarea 4

Întrebare

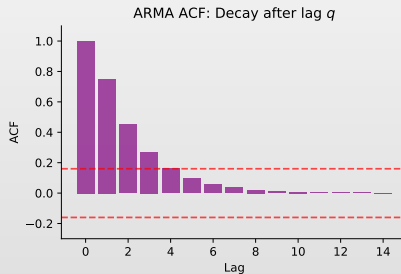
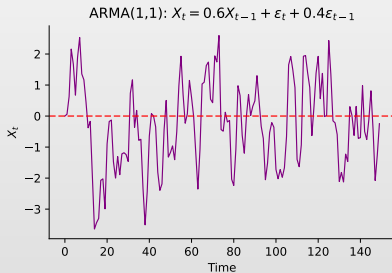
Forma compactă $\phi(L)X_t = \theta(L)\varepsilon_t$ reprezintă ce model?

- (A) Model AR pur
- (B) Model MA pur
- (C) Model ARMA
- (D) Niciunul de mai sus

Întrebarea 4: Răspuns

Răspuns Corect: (C) Model ARMA

□ $\phi(L)$ este polinomul AR, $\theta(L)$ este polinomul MA \rightarrow ARMA(p,q)



Întrebarea 5

Întrebare

Ce este $(1 - L)^2 X_t$?

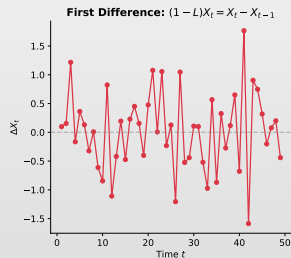
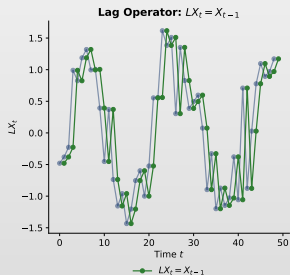
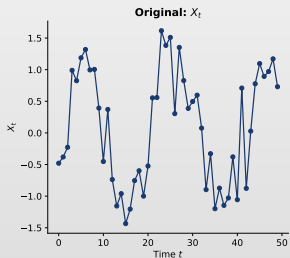
- (A) $X_t - X_{t-1}$
- (B) $X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$
- (C) $X_t + X_{t-1} + X_{t-2}$
- (D) $X_t - X_{t-2}$

Întrebarea 5: Răspuns

Răspuns Corect: (B) $X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$

☐ $(1 - L)^2 = 1 - 2L + L^2$

☐ $(1 - L)^2 X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$



Întrebarea 6

Întrebare

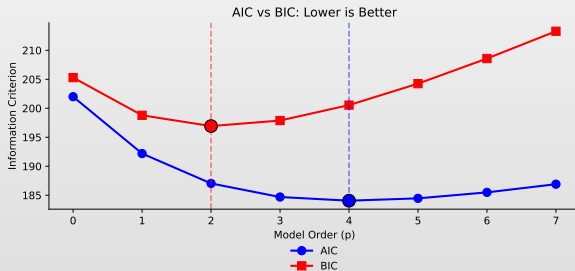
Comparând $ARMA(1,1)$ vs $ARMA(2,1)$ folosind BIC, care este corect?

- (A) BIC mai mic înseamnă întotdeauna prognoze mai bune
- (B) BIC penalizează complexitatea mai puțin decât AIC
- (C) Modelul cu BIC mai mic este preferat
- (D) BIC poate compara doar modele cu același număr de parametri

Întrebarea 6: Răspuns

Răspuns Corect: (C) Modelul cu BIC mai mic este preferat

- BIC mai mic indică un compromis mai bun între estimare și complexitate
- BIC penalizează complexitatea *mai mult* decât AIC



Întrebarea 7

Întrebare

După estimarea unui model ARMA, rulați testul Ljung-Box pe reziduuri și obțineți $p\text{-value} = 0.03$. Ce înseamnă asta?

- (A) Modelul este adecvat, reziduurile sunt zgomot alb
- (B) Modelul este inadecvat, reziduurile au autocorelație
- (C) Trebuie să creșteți dimensiunea eșantionului
- (D) Testul este neconcludent

Întrebarea 7: Răspuns

Răspuns Corect: (B) Modelul este inadecvat

- ☐ p-value < 0.05 respinge H_0 (zgomot alb)
- ☐ Indică autocorelație reziduală rămasă



Întrebarea 8

Întrebare

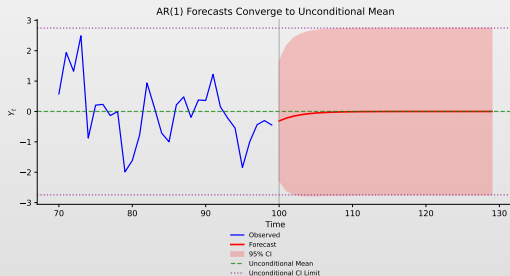
Pentru un model $AR(1)$ staționar, ce se întâmplă cu prognozele când orizontul $h \rightarrow \infty$?

- (A) Prognozele cresc nelimitat
- (B) Prognozele oscilează la nesfârșit
- (C) Prognozele converg la media necondiționată μ
- (D) Prognozele devin mai precise

Întrebarea 8: Răspuns

Răspuns Corect: (C) Prognozele converg la μ

□ $\hat{X}_{n+h|n} = \mu + \phi^h(X_n - \mu) \rightarrow \mu$ când $h \rightarrow \infty$ (deoarece $|\phi| < 1$)



Surse de Date și Software

Pachete Software:

- ▣ statsmodels – Modele statistice pentru Python, inclusiv ARIMA
- ▣ pmdarima – Selecție automată ARIMA pentru Python
- ▣ scipy – Optimizare și funcții statistice
- ▣ numpy, pandas – Manipulare date
- ▣ matplotlib – Vizualizare

Date și Exemple:

- ▣ serii de timp simulate pentru ilustrații
- ▣ Exemple bazate pe Hyndman & Athanasopoulos (2021)

Bibliografie I

Manuale fundamentale

- ▣ Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*, 3rd ed., OTexts.
- ▣ Shumway, R.H., & Stoffer, D.S. (2017). *Time Series Analysis and Its Applications*, 4th ed., Springer.
- ▣ Brockwell, P.J., & Davis, R.A. (2016). *Introduction to Time Series and Forecasting*, 3rd ed., Springer.

Serii de timp financiare

- ▣ Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*, 3rd ed., Wiley.
- ▣ Franke, J., Härdle, W.K., & Hafner, C.M. (2019). *Statistics of Financial Markets*, 4th ed., Springer.

Bibliografie II

Abordari moderne si Machine Learning

- ▣ Nielsen, A. (2019). *Practical Time Series Analysis*, O'Reilly Media.
- ▣ Petropoulos, F., et al. (2022). *Forecasting: Theory and Practice*, International Journal of Forecasting.
- ▣ Makridakis, S., Spiliotis, E., & Assimakopoulos, V. (2020). The M4 Competition, International Journal of Forecasting.

Resurse online si cod

- ▣ **Quantlet**: <https://quantlet.com> — Repository de cod pentru statistica
- ▣ **Quantinar**: <https://quantinar.com> — Platforma de invatare metode cantitative
- ▣ **GitHub TSA**: <https://github.com/QuantLet/TSA> — Cod Python pentru acest curs