



# Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 10: Recapitulare Comprehensivă



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din Bucureşti

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

## Obiective de învățare

La finalul acestui capitol, veți fi capabili să:

1. Aplicați fluxul complet de prognoză, de la date la evaluare
2. Selectați modelul potrivit în funcție de caracteristicile datelor
3. Evaluați acuratețea prognozelor folosind metri și validare încrucișată
4. Integrați cunoștințele din toate capitolele anterioare în practică



## Cuprins

### Fundamente

- Metodologia Prognozei
- Studiu de Caz 1: Volatilitatea Bitcoin (GARCH)
- Studiu de Caz 2: Ciclurile Petelor Solare (Fourier)

### Aplicații

- Studiu de Caz 3: Șomajul (Prophet)
- Studiu de Caz 4: Analiză Multivariată (VAR)
- Sinteză și Ghid
- Quiz



## Abordarea științifică a prognozei

### Întrebarea de cercetare

- Cum putem evalua riguros performanța prognozei evitând supraajustarea?

### Problema fundamentală

- Ajustarea în eșantion  $\neq$  Performanța în afara eșantionului
- Modelele pot “memora” datele de antrenament fără a învăța tipare
- Soluție:** Metodologia corectă train/validation/test

### Principiu cheie

- “Setul de test trebuie să rămână neatins până la evaluarea finală.”
- Practică standard în machine learning și econometrie



## Cadrul Train/Validation/Test

### Time Series Train/Validation/Test Split



Q TSA\_ch10\_train\_val\_test\_split

## Metrici de evaluare

### Definiție 1 (Metrici ale Erorii de Prognoză)

- **Date:** Fie  $y_t$  valorile reale,  $\hat{y}_t$  progozele

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_t (y_t - \hat{y}_t)^2}, \quad \text{MAE} = \frac{1}{n} \sum_t |y_t - \hat{y}_t|, \quad \text{MAPE} = \frac{100\%}{n} \sum_t \left| \frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t} \right|$$

#### Când să folosim

- **RMSE:** Penalizează erorile mari
- **MAE:** Robust la outlieri
- **MAPE:** Independent de scală (%)

#### Atenție

- MAPE nedefinit când  $y_t = 0$
- Comparați pe **același** set test
- Raportați metrici **out-of-sample**



## Evaluarea prognozelor dincolo de RMSE

### Metrici alternative

- **MASE** (Mean Absolute Scaled Error):  $\frac{\text{MAE}_{\text{model}}}{\text{MAE}_{\text{naïve}}} ; < 1 \Rightarrow \text{bate naïve}$
- **DA** (Directional Accuracy):  $\frac{1}{h} \sum_{t=1}^h 1(\text{sgn } \Delta \hat{y}_t = \text{sgn } \Delta y_t)$
- **QL** (Quantile Loss): penalizare asimetrică  $\alpha$  vs  $1-\alpha$

$$QL_\alpha = \begin{cases} \alpha(y_t - \hat{q}_t), & y_t > \hat{q}_t \\ (1 - \alpha)(\hat{q}_t - y_t), & y_t \leq \hat{q}_t \end{cases}$$

- **CRPS** (Continuous Ranked Probability Score):  $\int_{-\infty}^{\infty} (F(x) - 1_{x \geq y})^2 dx$

## Evaluarea prognozelor: Rezultate Bitcoin

### Rezultate Bitcoin (GARCH volatilitate)

Metrică	Valoare
RMSE	2.21
MAE	1.89
MASE	0.98
Dir. Accuracy	28.7%

- MASE < 1: GARCH bate naïve
- DA 28.7%: direcția volatilității e dificilă

### Interpretare

- RMSE/MAE**: eroarea absolută a prognozei volatilității
- MASE < 1**: modelul GARCH performează mai bine decât naïve
- DA 28.7%**: direcția volatilității e extrem de dificil de prezis
- Evaluarea trebuie făcută pe **setul de test**



## Compararea formală a prognozelor: Diebold–Mariano

### Definiție 2 (Testul Diebold–Mariano)

Diferența de pierdere:  $d_t = L(e_{1t}) - L(e_{2t})$ , Statistica:  $DM = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\bar{d})}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$

### Ipoteze

- $H_0$ : performanță predictivă egală
- $H_1$ : un model e semnificativ mai bun
- $|DM|$  mare  $\Rightarrow$  respingem  $H_0$

### Rezultat Bitcoin (GARCH volatilitate)

- Normal vs Student-t:  $DM = -0.51$
- $p = 0.612$  — **nu respingem  $H_0$**
- Acuratețe similară, dar Student-t preferabil prin AIC ( $\Delta = 509$ )

### Mesaj cheie

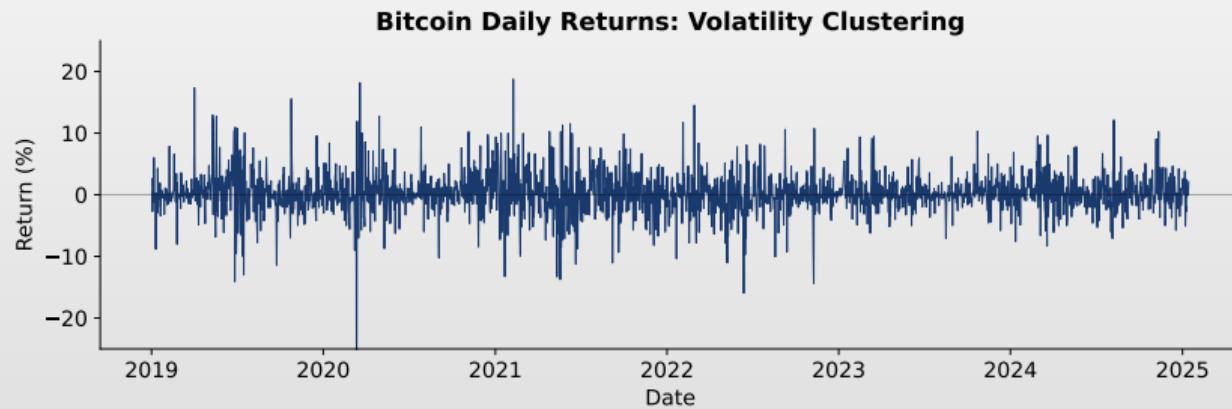
- RMSE mai mic  $\neq$  diferență semnificativă — testarea formală este **obligatorie**



## Bitcoin: volatility clustering

### Observație

- Randamentele mari tind să urmeze randamente mari, cele mici urmează cele mici
- Acesta este **volatility clustering** ⇒ fenomenul pe care GARCH îl captează



Q TSA\_ch10\_btc\_returns



## Bitcoin: definirea problemei

### Întrebarea de cercetare

- Putem prognoza **volatilitatea** Bitcoin folosind modele GARCH?

### Caracteristicile Datelor

- Sursă: Yahoo Finance (BTC-USD)
- Perioadă: Ian 2019 – Ian 2025
- Frecvență: Zilnică
- Observații:  $\approx 2.200$  zile

### Insight cheie

- Randamentele financiare sunt de obicei:
  - ▶ Impredictibile în medie
  - ▶ Predictibile în varianță
- $\Rightarrow$  Focus pe **prognoza volatilității**

### Fapte stilizate

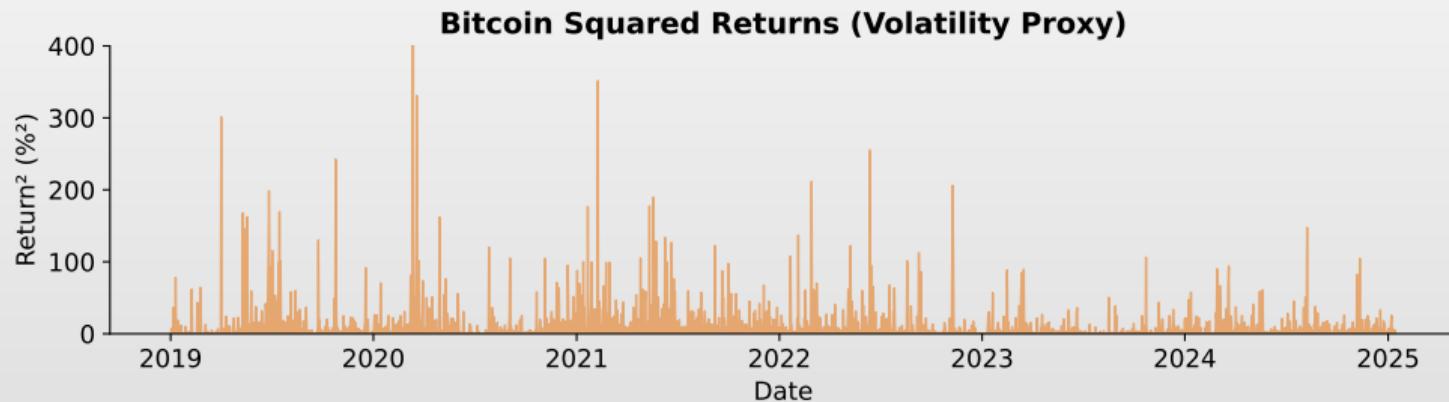
- Randamente: medie aproape zero
- Cozi groase (curtoză  $> 3$ )
- Clustering al volatilității



## Bitcoin: dovezi pentru GARCH

### Observație

- Randamentele pătrate  $r_t^2$  prezintă autocorelație semnificativă  $\Rightarrow$  efecte GARCH
- ACF descreștere lentă  $\Rightarrow$  persistență ridicată a volatilității



Q TSA\_ch10\_btc\_acf\_squared



## Specificarea modelului GARCH

### Definiție 3 (Modelul GARCH(p,q))

- **Date:** Fie  $r_t$  randamentele. Modelul GARCH(p,q) este:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim N(0, 1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

- **Condiții:**  $\omega > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_j \geq 0$ , și  $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$

### Variante de model

- **GARCH(1,1):** Cel mai comun
- **GJR-GARCH:** Efect de levier
- **EGARCH:** Șouri asimetrice

### Interpretare

- $\alpha$ : Impactul șourilor trecute
- $\beta$ : Persistența volatilității
- $\alpha + \beta \approx 1$ : Persistență înaltă



## GARCH: Staționaritate și varianță necondiționată

### Teoremă 1 (Staționaritatea în Covarianță a GARCH(1,1))

Dacă  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ , atunci  $\{\varepsilon_t\}$  este staționar în covarianță cu:

$$\bar{\sigma}^2 = \mathbb{E}[\sigma_t^2] = \frac{\omega}{1 - \alpha_1 - \beta_1}$$

### Derivare

Luăm speranța ambelor părți ale ecuației varianței:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\sigma_t^2] &= \omega + \alpha_1 \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] + \beta_1 \mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2] \\ \bar{\sigma}^2 &= \omega + (\alpha_1 + \beta_1) \bar{\sigma}^2 \quad (\text{staționaritate}) \\ \bar{\sigma}^2 &= \frac{\omega}{1 - \alpha_1 - \beta_1}\end{aligned}$$

### Prognozele multi-step converg la $\bar{\sigma}^2$

Când  $h \rightarrow \infty$ :  $\mathbb{E}_t[\sigma_{t+h}^2] \rightarrow \bar{\sigma}^2$  cu rata  $(\alpha_1 + \beta_1)^h$ .



## Bitcoin: selectarea modelului pe setul de validare

### Metodologie

- Estimăm fiecare model pe **datele de antrenament**, evaluăm pe **setul de validare**

Model	AIC	BIC	Val MAE	Selectare
GARCH(1,1)	6.994,8	7.020,6	2,638	Cel mai bun
GARCH(2,1)	6.993,7	7.024,6	2,640	
GJR-GARCH(1,1)	6.983,7	7.014,6	2,669	
EGARCH(1,1)	—	—	—	Eșuat*

\*Prognoze analitice indisponibile pentru  $h > 1$

### Rezultat

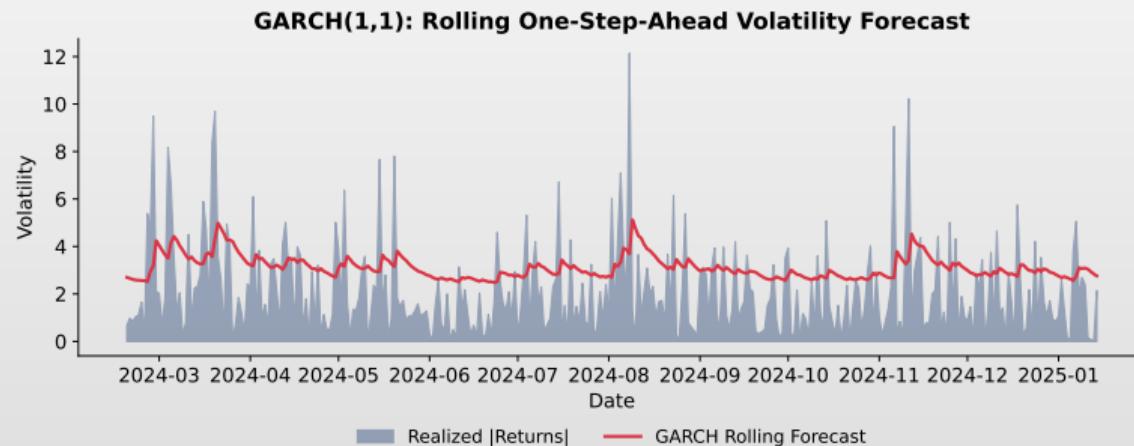
- GARCH(1,1)** selectat pe baza celui mai mic MAE de validare pentru prognozele de volatilitate



## Bitcoin: prognoza volatilității

### Interpretare

- Zona umbrită: interval de încredere 95% al prognozei de volatilitate
- GARCH(1,1) captează bine dinamica volatilității Bitcoin



## Bitcoin: împărțirea datelor și staționaritate

### Împărțirea datelor

Set	Perioadă	N
Antrenament (70%)	2019-01 – 2023-03	1.543
Validare (15%)	2023-04 – 2024-02	333
Test (15%)	2024-03 – 2025-01	329
<b>Total</b>		<b>2.205</b>

### Teste de staționaritate

Serie	ADF	Rezultat
Prețuri	$p = 0.50$	Non-staționară
Randamente	$p < 0.01$	Staționară

⇒ Modelăm **randamente**, nu prețuri

### De ce contează staționaritatea

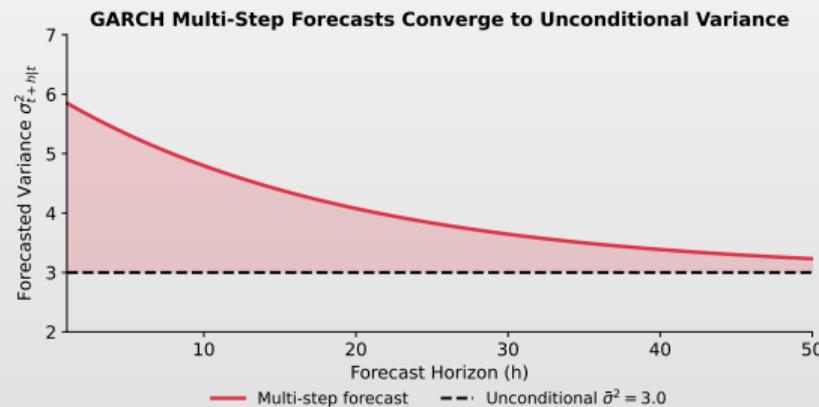
- GARCH**: necesită input slab staționar
- Prețuri vs Randamente**: prețuri = random walk, randamente = stationare



## GARCH: prognozele multi-step converg

### Insight cheie

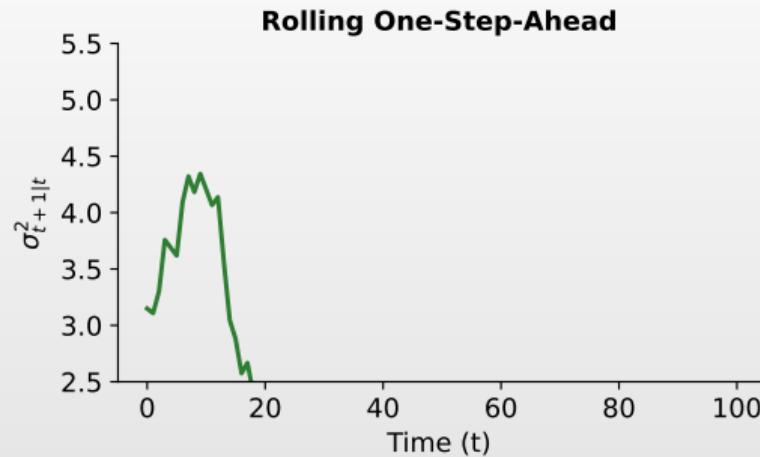
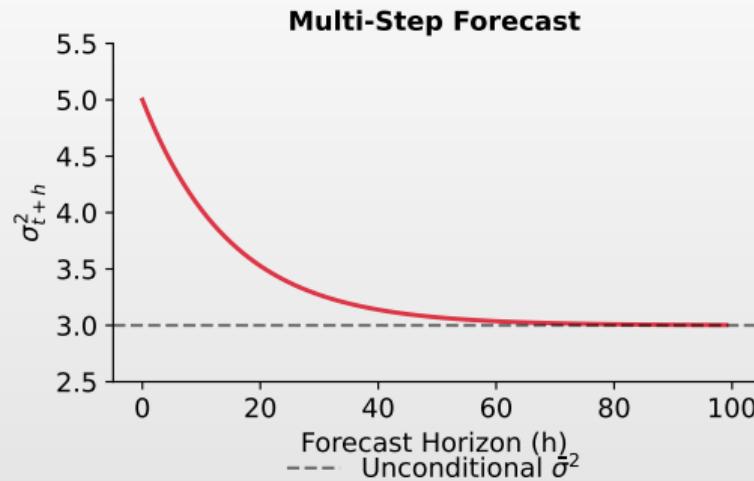
- ◻ Prognozele multi-step converg la  $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$
- ◻ Soluția: prognoze rolling one-step-ahead



TSA\_ch10\_garch\_convergence



## GARCH: soluția rolling one-step-ahead



Q TSA\_ch10\_rolling\_vs\_multistep



## GARCH: Distribuții pentru inovații

### Model

$$r_t = \mu + \sigma_t z_t$$

- Variante pentru  $z_t$ :  $\mathcal{N}(0, 1)$  (normală) sau  $t_\nu$  (cozi groase)

### Bitcoin: dovezi empirice

- Curtoză reziduuri: **13.81** (Normal = 3)
- Skewness: -0.29
- Jarque-Bera: 9085,  $p < 0.001$
- Normalitatea **subestimează** riscul extrem

### Student-t: alegerea corectă

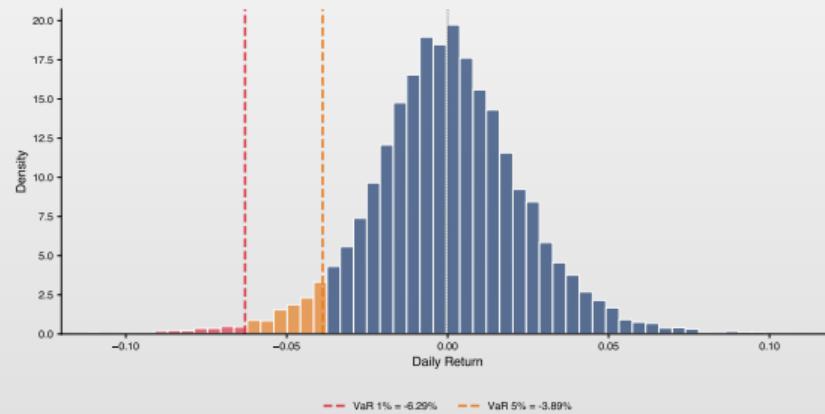
- $\hat{\nu} = 2.96$  grade de libertate
- AIC Normal: 9769 vs Student-t: **9260**
- $\Delta\text{AIC} = 509$  — doavadă **copleșitoare**
- Cozi groase = estimări VaR **mai realiste**



## VaR și ES: ilustrație grafică

### Interpretare

- VaR 1% = pierderea depășită doar în 1% din cazuri
- Zona roșie = pierderi extreme (dincolo de VaR)



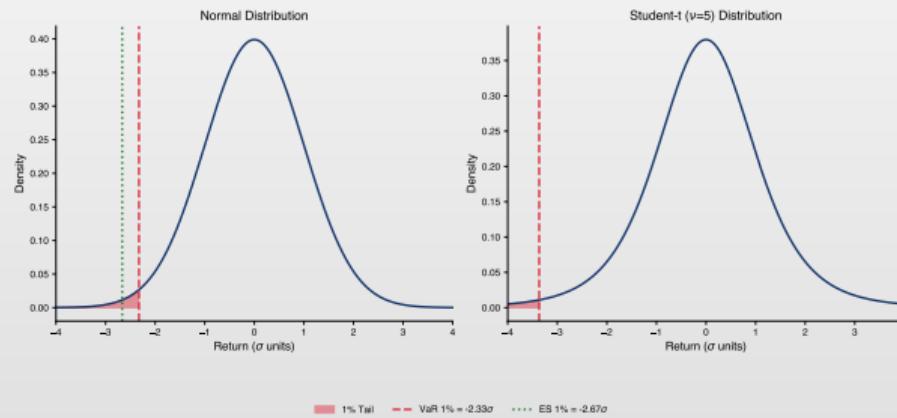
Q TSA\_ch5\_var\_plot



## VaR vs expected shortfall: normal vs Student-t

### Interpretare

- ES măsoară pierderea medie când VaR este depășit
- Student-t: VaR și ES mai mari decât sub distribuția normală



Q TSA\_ch5\_var\_es



## Value at Risk: exemplu numeric

Calculul VaR: Portofoliu 1M EUR,  $\hat{\sigma}_{T+1} = 1.5\%$

Nivel	$z_\alpha$	VaR (%)	VaR (EUR)
5% (1 zi)	1.645	2.47%	24.675
1% (1 zi)	2.326	3.49%	34.890
1% (10 zile)	$2.326 \cdot \sqrt{10}$	11.03%	110.314

Scalare pentru perioade mai lungi

$\text{VaR}_h \text{ zile} = \text{VaR}_1 \text{ zi} \cdot \sqrt{h}$  (presupune randamente i.i.d.)



## Value at Risk: distribuție Student-t

### De ce Student-t?

- Normala **subestimează** riscul de coadă; randamentele au **cozi groase** ( $\text{curtoză} > 3$ )
- Student-t capturează mai bine extremele

Comparație VaR 1% (1 zi) pentru  $\sigma = 1.5\%$ , portofoliu = 1M EUR

Distribuție	Cuantilă	VaR (EUR)
Normal	2.326	34.890
Student-t ( $\nu = 10$ )	2.764	41.460
Student-t ( $\nu = 6$ )	3.143	47.145
Student-t ( $\nu = 4$ )	3.747	56.205

- Cu  $\nu = 6$  (tipic pentru acțiuni), VaR este cu **35% mai mare** decât cel normal!



## VaR: exemplu complet cu GARCH

### Procedura de calcul VaR

1. Estimează modelul GARCH(1,1) cu distribuție Student-t
2. Obține prognoza volatilității:  $\hat{\sigma}_{T+1}$
3. Calculează VaR:  $VaR_\alpha = t_\alpha(\nu) \cdot \hat{\sigma}_{T+1}$

### Exemplu: S&P 500

- Parametri estimați:  $\alpha = 0.088$ ,  $\beta = 0.900$ ,  $\nu = 6.4$
- Volatilitate prognozată:  $\hat{\sigma}_{T+1} = 1.2\%$ , Portofoliu: 10.000.000 EUR
- VaR 1% (1 zi):**  $VaR = 3.05 \times 0.012 \times 10.000.000 = 366.000 \text{ EUR}$



## Ce este VaR backtesting?

### Definiție

- Backtesting** = verificarea ex-post a calității modelului VaR
- Compară pierderile realizate cu pragul VaR proгnozat
  - O **încălcare** (violation) apare când  $r_t < -\text{VaR}_t$

### Principiul Backtesting-ului

- Indicatorul de încălcare:  $I_t = 1(r_t < -\text{VaR}_{\alpha,t})$
- Pentru un model corect la nivel  $\alpha$ :
  - Frecvența:  $\hat{p} = \frac{1}{T} \sum I_t \approx \alpha$ ; încălcări **independente**
- VaR 1% pe 250 zile  $\Rightarrow$  așteptăm  $\sim 2.5$  încălcări/an

### Importanță

- Cerință regulamentară **Basel III/IV** pentru bănci: backtesting obligatoriu



## Testul Kupiec (1995): acoperire necondiționată

### Ipoteze

- $H_0$ : Rata de încălcare este egală cu nivelul VaR ( $p = \alpha$ )
- $H_1$ : Rata de încălcare diferă de nivelul VaR ( $p \neq \alpha$ )

### Statistica de test (Likelihood Ratio)

- Formula:**  $LR_{uc} = -2 \ln \left[ \frac{\alpha^x (1-\alpha)^{T-x}}{\hat{\rho}^x (1-\hat{\rho})^{T-x}} \right] \sim \chi^2(1)$
- Notăție:**  $x = \text{nr. încălcări}, T = \text{nr. observații}, \hat{\rho} = x/T$

### Exemplu

- VaR 1%,  $T = 250$  zile,  $x = 5$  încălcări:  $\hat{\rho} = 2\%$ 
  - ▶ Prea multe încălcări  $\Rightarrow$  modelul **subestimează** riscul
- VaR 1%,  $T = 250$  zile,  $x = 1$  încălcare:  $\hat{\rho} = 0.4\% \Rightarrow$  acceptabil



## Testul Christoffersen (1998): acoperire condiționată

### Motivație

- Kupiec testează doar **frecvența** încălcărilor
- Nu detectează **clusterizarea** încălcărilor (încălcări consecutive)
  - Dacă încălcările apar în clustere  $\Rightarrow$  modelul nu captează dinamica volatilității

### Testul de independentă + acoperire condiționată

- Formula:**  $LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind} \sim \chi^2(2)$
- $LR_{ind}$  testează dacă  $P(I_t = 1 | I_{t-1} = 1) = P(I_t = 1 | I_{t-1} = 0)$
- Un model bun: încălcări rare și distribuite uniform în timp

### Recomandare

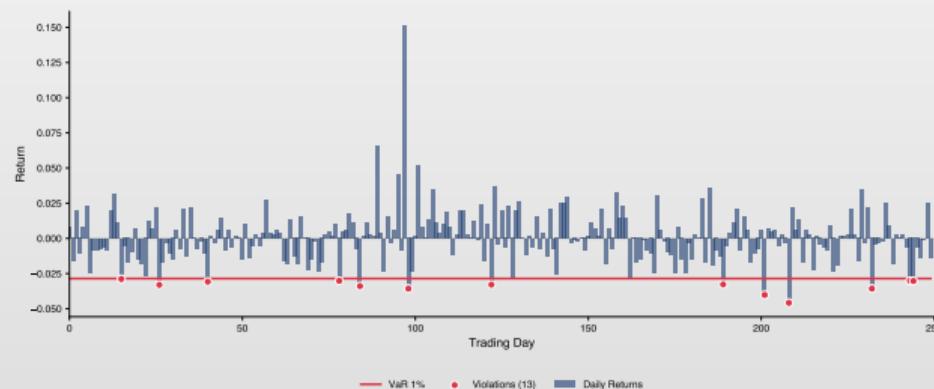
- Folosește **ambele** teste: Kupiec (frecvență) + Christoffersen (independentă)



## VaR backtesting: vizualizare

### Interpretare

- Linia roșie: pragul VaR 1% estimat cu GARCH(1,1)
- Punctele roșii: 13 încălcări din 250 zile ( $\hat{p} = 5.2\%$ )
  - ▶ **Zonă roșie Basel** ⇒ modelul subestimează semnificativ riscul
  - ▶ Soluții: distribuție Student-t, model EGARCH, sau nivel VaR mai conservator



## Backtesting VaR: semaforul Basel

### Zonele de semaforizare Basel III/IV

Zonă	Încălcări/250 zile	Interpretare	Penalizare
Verde	0–4	Model acceptabil	Fără penalizare
Galben	5–9	Necesită investigare	Factor $k$ crește
Roșu	$\geq 10$	Model inadecvat	Penalizare maximă

### Exemplu practic

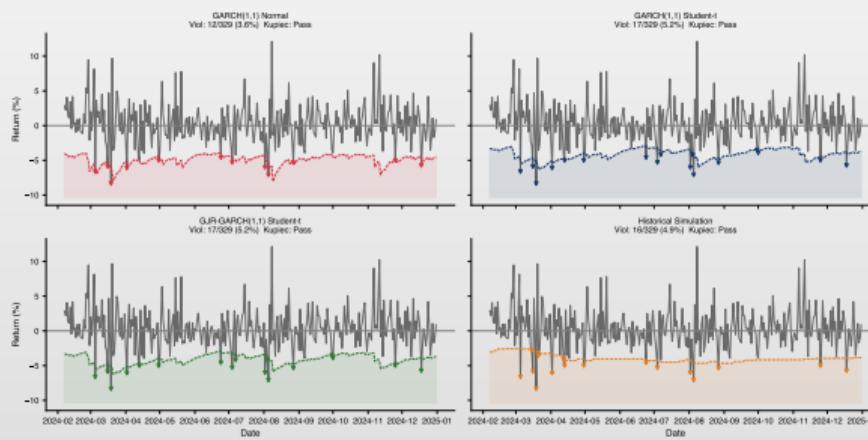
- ☐ Portofoliu cu VaR 1%: 250 zile de backtesting
- ☐ 3 încălcări ⇒ **Zonă verde** ⇒ model acceptabil
- ☐ 7 încălcări ⇒ **Zonă galbenă** ⇒ revizuire necesară
- ☐ 13 încălcări ⇒ **Zonă roșie** ⇒ model respins



## Aplicație: VaR rolling pe multiple modele

### Metodologie

- ☐ VaR rolling one-step-ahead:  $\text{VaR}_{t+1}^{\alpha} = \mu + \hat{\sigma}_{t+1} \cdot z_{\alpha}$
- ☐ 4 modele comparate pe setul de test Bitcoin (329 zile, 2024)



## VaR Backtesting: comparație modele

Rezultate Bitcoin — VaR 5% ( $T = 329$  zile, așteptat: 16,4 încălcări)

Model	Încălcări	Rată	Kupiec $p$	Chr. $p$	Concluzie
GARCH(1,1)-N	12	3,6%	0,238	1,000	Prea conservator
GARCH(1,1)-t	17	5,2%	0,890	0,272	$\approx 5\%$ target
GJR-GARCH(1,1)-t	17	5,2%	0,890	0,272	$\gamma \approx 0$ (simetric)
Hist. Simulation	16	4,9%	0,909	0,216	$\approx 5\%$ target

### Concluzii

- Student-t:** acoperire perfectă ( $5,2\% \approx 5\%$ )
- Normal: prea conservator ( $3,6\% < 5\%$ )
- GJR  $\approx$  GARCH: levier absent pt. Bitcoin
- Toate trec Kupiec și Christoffersen

### Lecții practice

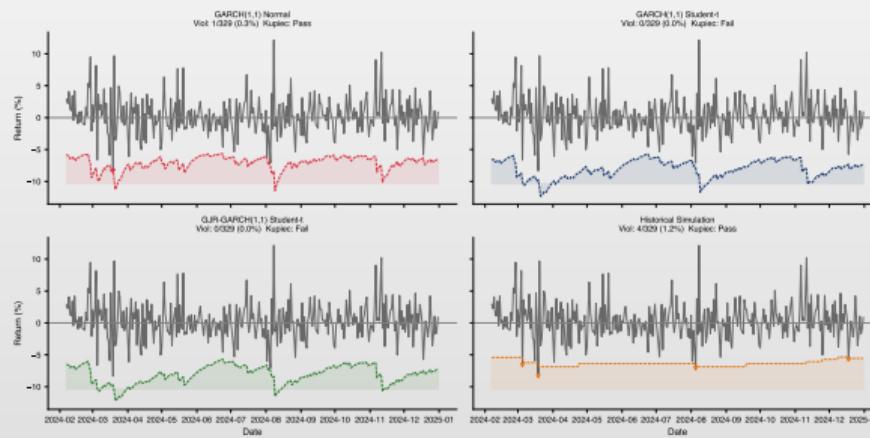
- GARCH-t și HistSim: ambele  $\approx 5\%$  target
- Simularea istorică: alternativă simplă și eficientă
- Testarea statistică formală (Kupiec, Christoffersen) este **obligatorie**



## Aplicație: VaR 1% rolling pe multiple modele

### Metodologie

- ☐ VaR rolling one-step-ahead la nivel  $\alpha = 1\%$  (risc extrem)
- ☐ Aceleași 4 modele; așteptat:  $T \times 0,01 = 3,3$  încălcări



## VaR 1% Backtesting: comparație modele

Rezultate Bitcoin — VaR 1% ( $T = 329$  zile, așteptat: 3,3 încălcări)

Model	Încălcări	Rată	Kupiec $p$	Chr. $p$	Concluzie
GARCH(1,1)-N	1	0,3%	0,137	1,000	Acceptabil
GARCH(1,1)-t	0	0,0%	<b>0,010</b>	1,000	<b>Respins</b>
GJR-GARCH(1,1)-t	0	0,0%	<b>0,010</b>	1,000	<b>Respins</b>
Hist. Simulation	4	1,2%	<b>0,704</b>	1,000	$\approx 1\%$ target

### Concluzii VaR 1%

- GARCH-t/GJR-t: 0 încălcări  $\Rightarrow$  Kupiec **respinge** ( $p = 0,01$ )
- Cozi Student-t prea groase ( $\nu \approx 3$ )  $\Rightarrow$  VaR 1% **prea conservator**
- **Hist. Simulation:**  $1,2\% \approx 1\%$  — singurul model precis

### Lecție: 5% vs 1%

- La 5%: GARCH-t și HistSim ambele excelente
- La 1%: GARCH-t **respins** (prea conservator)
- **Modelul optim depinde de nivelul  $\alpha$ !**



## Limitările GARCH și extensii moderne

### Limitări

- Nu captează **jump-uri** (salturi bruște)
- Parametri constanți în timp
- Sensibil la distribuția aleasă
- Nu modelează **regimuri** diferite

### Extensii

- GJR-GARCH:** efect de levier
- EGARCH:** șocuri asimetrice
- Markov-Switching GARCH:** regimuri
- Volatilitate realizată (HAR)
- Hybrid GARCH + ML

### Mesaj cheie

- GARCH este un **punct de plecare**, nu finalul modelării riscului



## Bitcoin: Concluzii cheie

### Sumar

1. Rendamentele sunt staționare; prețurile nu
2. GARCH(1,1) depășește variantele mai complexe
3. Persistență înaltă ( $\alpha + \beta = 0,93$ )
4. Volatilitatea este predictibilă chiar când randamentele nu sunt

### Implicații practice

- Managementul riscului: VaR, Expected Shortfall
- Evaluarea opțiunilor necesită prognoze de volatilitate
- Optimizarea portofoliului cu risc variabil în timp

### Limitări

- GARCH presupune șocuri simetrice
- Nu captează salturi
- Distribuția normală poate fi restrictivă

### Extensiile

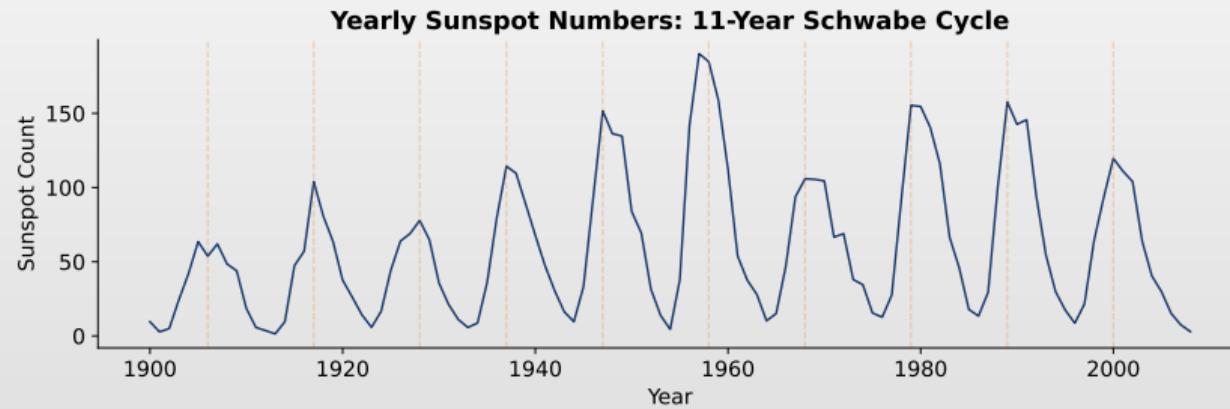
- Inovații Student-t
- Volatilitate realizată
- Modele HAR



## Pete solare: ciclul solar de 11 ani

### Observație

- Ciclu solar clar de  $\approx 11$  ani; amplitudine variabilă între cicluri
- ACF periodică  $\Rightarrow$  sezonalitate lungă, ideală pentru termeni Fourier

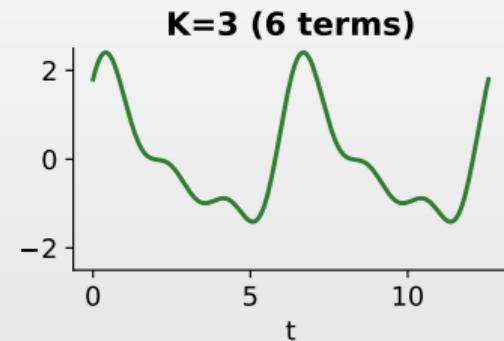
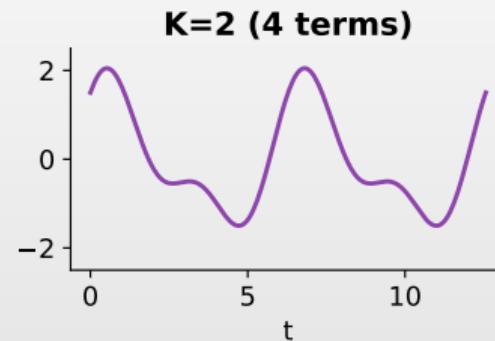
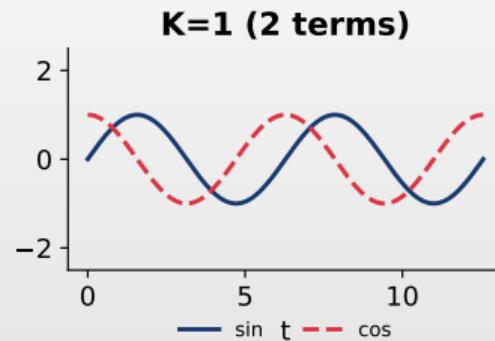


Q TSA\_ch10\_sunspots\_acf



## Termeni Fourier pentru sezonalitate

**Fourier Terms: More K = More Flexibility**



Q TSA\_ch10\_fourier\_terms



## Pete solare: selectarea modelului

### Metodologie

- **Comparatie:**  $K = 1, 2, 3, 4$  armonici Fourier pe setul de validare

Împărțirea Datelor		
Set	Perioadă	N
Antrenament (70%)	1900–1975	76
Validare (20%)	1976–1997	22
Test (10%)	1998–2008	11
<b>Total</b>		<b>109</b>

Comparatie Modele		
K	AIC	Val RMSE
1	665,9	87,15
2	668,0	86,92
3	671,8	<b>86,81</b>
4	674,5	87,93

### Rezultat

- $K = 3$  armonici Fourier selectate (6 parametri pentru ciclul de 11 ani)



## Overfitting în alegerea lui $K$

### Riscul de overfitting

- $K$  prea mare = memorare ciclu istoric
- Modelul se potrivește pe zgomot, nu pe semnal
- Performanța pe test se **degradează**

### Soluția: validare

- Selectăm  $K$  pe setul de **validare**
- Evaluăm pe **test** — neatins
- Trade-off: complexitate vs generalizare

### Fourier $\approx$ regresie periodică

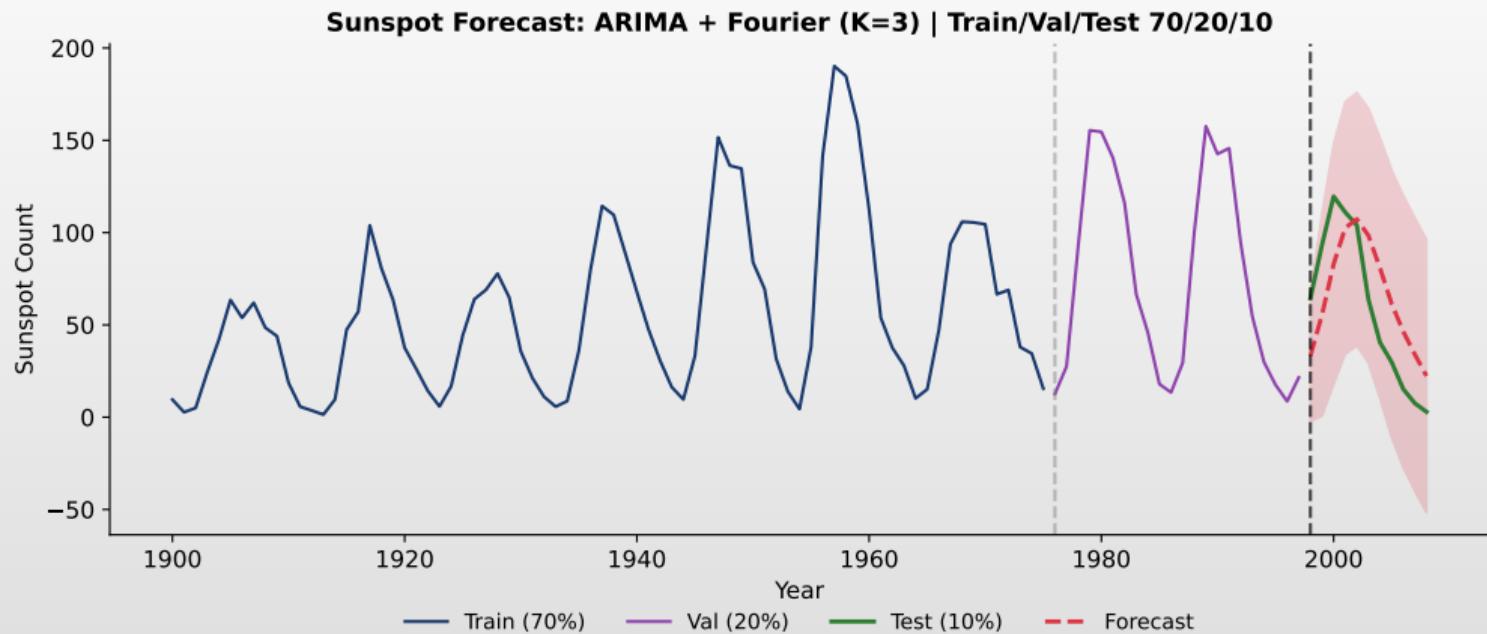
- Fiecare armonic adaugă 2 parametri ( $\sin$ ,  $\cos$ )
- $K = 3$ : 6 parametri suplimentari
- $K = 6$ : 12 parametri — risc supraajustare

### La noi

- $K = 3$  minimizează Val RMSE
- $K = 4$  crește eroarea  $\Rightarrow$  overfitting



## Pete solare: rezultate prognoză



TSA\_ch10\_sunspot\_forecast



## Pete solare: concluzii cheie

### Când să folosiți termeni Fourier

- Perioada sezonieră s este **lungă** (ex: 11 ani, 52 săptămâni)
- SARIMA ar necesita prea multe lag-uri sezoniere
- Tiparul este **neted și periodic**
- Trebuie captureate cicluri multiple

### Fourier vs SARIMA

	Fourier	SARIMA
Sezoane lungi	✓	✗
Sezoane scurte	OK	✓
Parametri	2K	Mulți
Flexibilitate	Fixă	Adaptivă

### Alegerea lui K

- Strategie:** Începeți cu  $K = 1$ , creșteți progresiv
  - ▶ Opriți când eroarea de validare nu mai scade
  - ▶  $K$  prea mare = supraajustare

### Aplicații

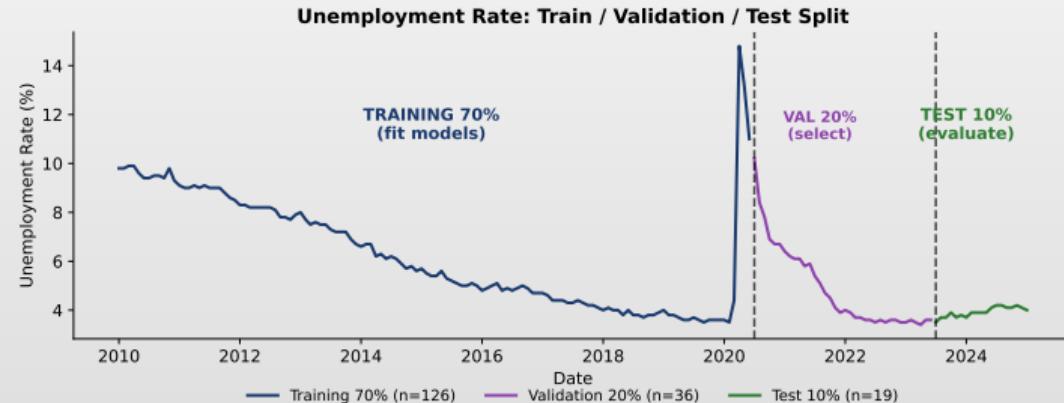
- Domenii:** Cicluri climatice, cicluri de afaceri, fenomene astronomice



## Şomajul: Train / Validation / Test Split

### Metodologie

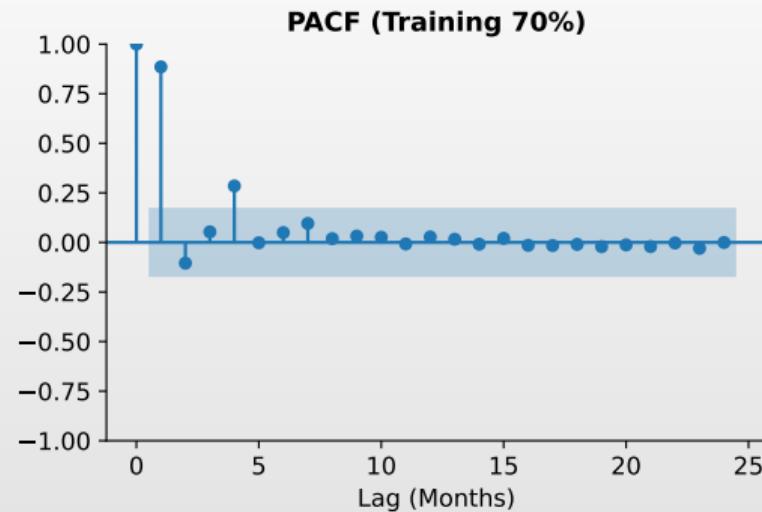
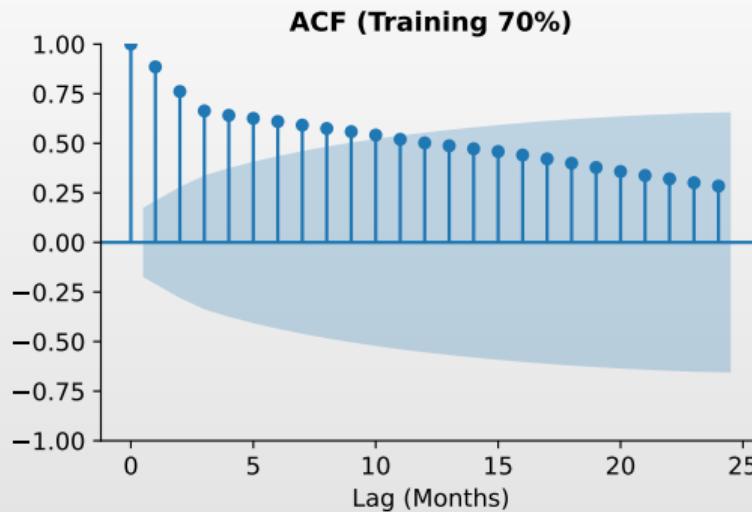
- Training** (70%): Estimare modele
- Validare** (20%): Selectie model
- Test** (10%): Evaluare finală



Q TSA\_ch10\_unemployment\_train\_val\_test

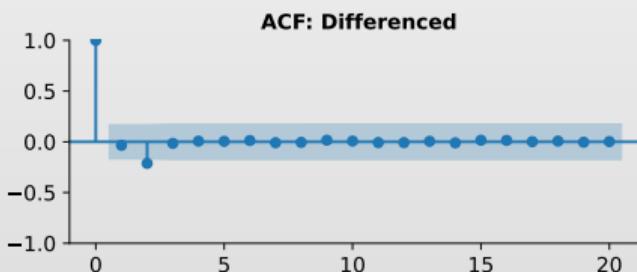
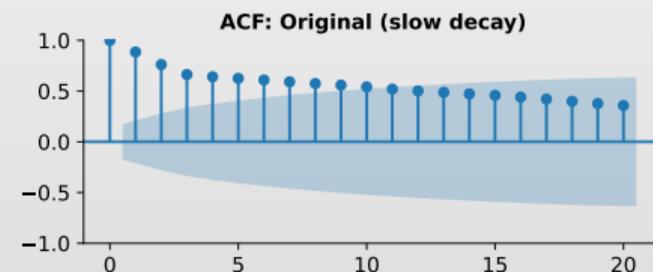
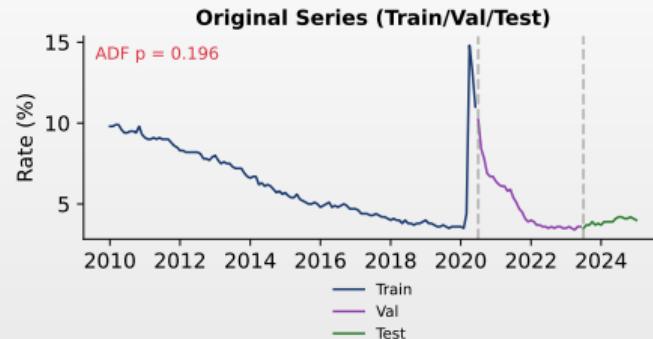


## Șomajul: analiză preliminară



Q TSA\_ch10\_unemployment\_acf\_pacf

## Șomajul: teste de staționaritate



## Rupturi structurale: abordare formală

### Metode clasice

- Chow Test:** ruptură la punct cunoscut
- Bai–Perron:** rupturi multiple, necunoscute
- CUSUM:** detectare secvențială

### Problemă

- ADF poate confunda **break** cu **unit root**
- Test Zivot–Andrews: ADF cu ruptură endogenă

### Rezultat: Șomaj la COVID (martie 2020)

- Chow Test:  $F = 21.73, p < 0.001$
- Ruptură structurală **confirmată**
- SARIMA: parametri constanți — risc
- Prophet: detectează changepoints automat

### Mesaj cheie

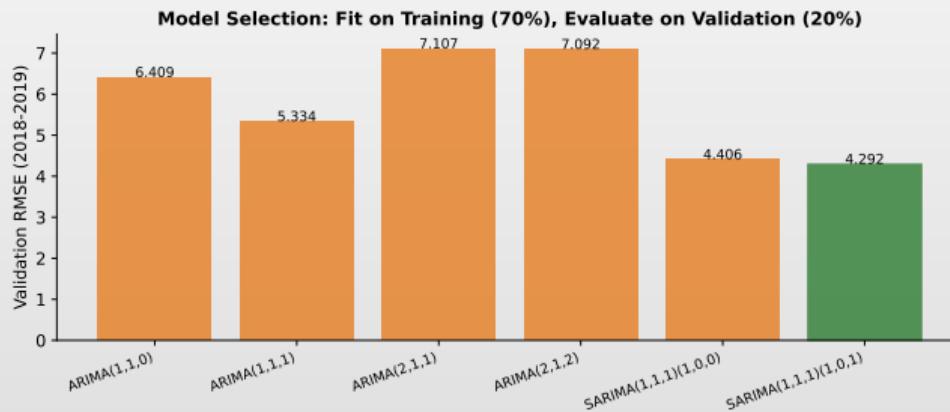
- Modelul trebuie adaptat la **stabilitatea parametrilor**



## Șomajul: selecția modelului (set validare)

Best: SARIMA(1,1,1)(1,0,0)<sub>12</sub>

- Fit pe training (70%), evaluare pe validare (20%)
- Cel mai bun model selectat după Val RMSE minim



 [TSA\\_ch10\\_sarima\\_model\\_selection](#)



## Şomajul: parametrii SARIMA

SARIMA(1,1,1)(1,0,0)<sub>12</sub> estimat pe Train+Val (2010–2023)

- AR(1):  $\phi_1 = -0,86$
- MA(1):  $\theta_1 = 0,78$
- SAR(12):  $\Phi_1 = -0,08$  (n.s.)

**SARIMA(1,1,1)(1,0,1) - Fitted on Train+Val (85%)**

Parameter	Coef	Std Err	P-value	Sig
ar.L1	0.8423	0.2084	0.0001	***
ma.L1	-0.9540	0.1973	0.0000	***
ar.S.L12	0.0326	4.5951	0.9943	
ma.S.L12	-0.0113	4.6087	0.9980	
sigma2	0.8122	0.0608	0.0000	***



## Testul Ljung-Box pentru autocorelația reziduurilor

### Definiție 4 (Testul Ljung-Box)

Pentru reziduurile  $\hat{e}_t$  cu autocorelații eșantion  $\hat{\rho}_k$ , statistica de test:

$$Q(h) = n(n+2) \sum_{k=1}^h \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k} \stackrel{H_0}{\sim} \chi^2(h-p-q)$$

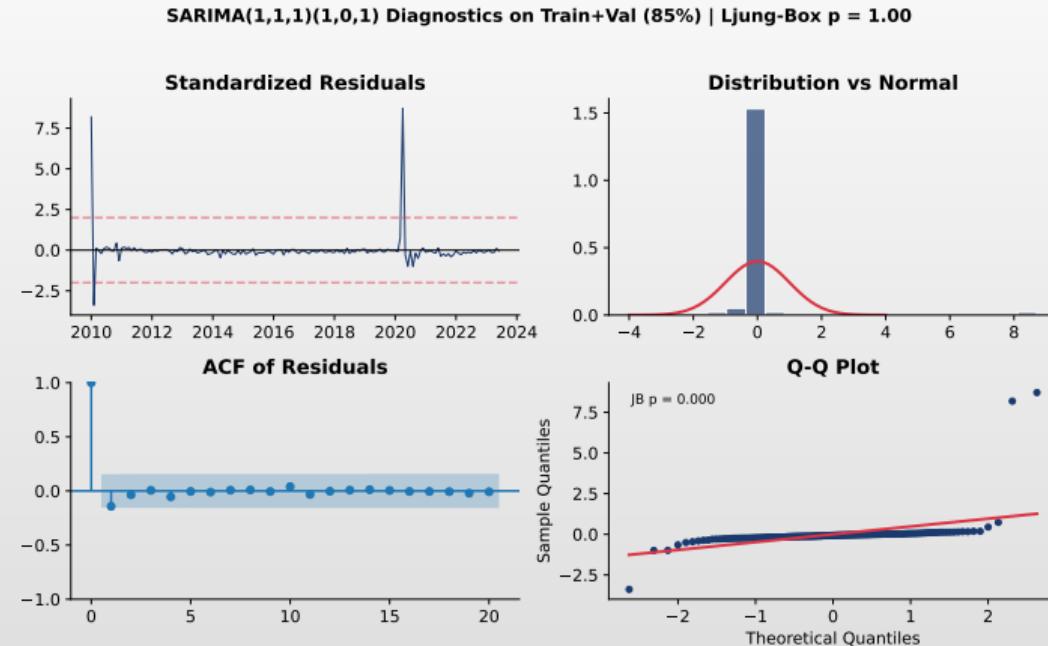
unde  $p, q$  sunt ordinele ARMA.  $H_0$ : Reziduurile sunt zgomot alb.

### Interpretare

- Q mare (p-value mic): Respingem  $H_0$ , reziduurile au structură
- Q mic (p-value mare): Nu respingem  $H_0$ , modelul este adekvat
- Regulă practică: Folosiți  $h = \min(10, n/5)$  pentru ordinul lag-ului



## Şomajul: Diagnosticare SARIMA



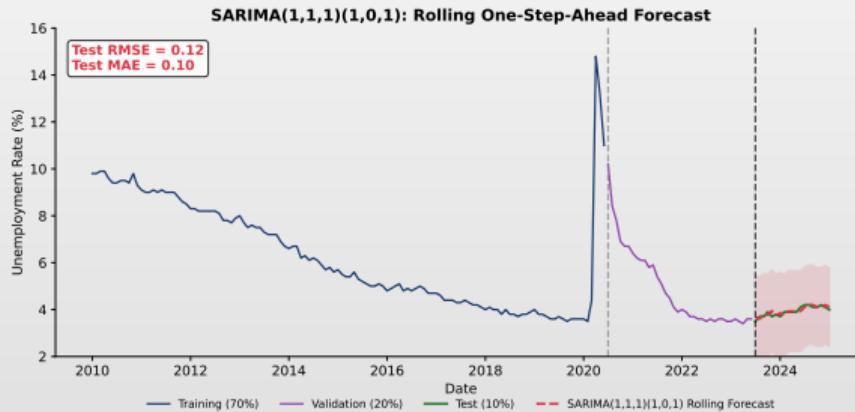
TSA\_ch10\_sarima\_diagnostics



## Şomajul: prognoza rolling SARIMA

### Problemă: Ruptura structurală

- Prognoză rolling one-step-ahead (re-estimare la fiecare  $t$ )
- Test RMSE = 0,12



Q TSA\_ch10\_sarima\_forecast



## Modelul Prophet

### Definiție 5 (Descompunerea Prophet)

- Model:**  $y_t = g(t) + s(t) + h(t) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$
- Componente:**  $g(t)$  = trend,  $s(t)$  = sezonalitate,  $h(t)$  = sărbători

#### Detectare puncte de schimbare

- Selectare automată a locațiilor
- `changepoint_prior_scale` controlează flexibilitatea

#### Avantaje

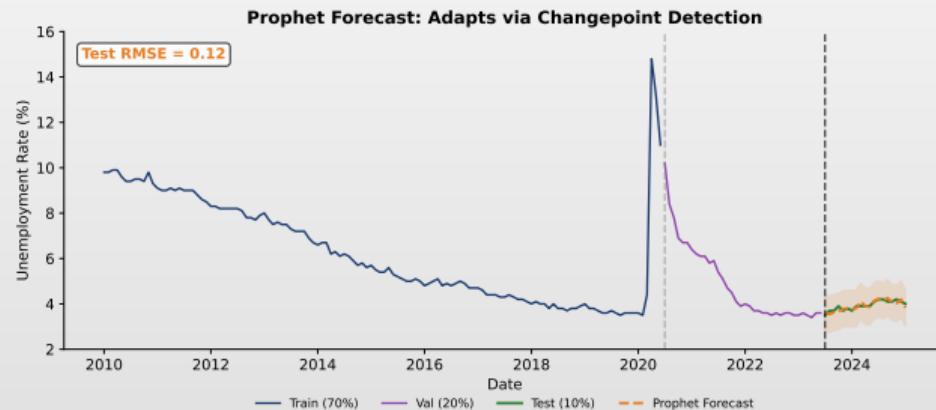
- Gestionează date lipsă
- Componente interpretabile
- Robust la outlieri



## Şomajul: rezultate prognoză Prophet

### Concluzie cheie

- **Prophet:** se adaptează prin detectare changepoint
- **Test RMSE = 0,58**



Q TSA\_ch10\_unemployment\_forecast



## Şomajul: Ajustarea modelului

### Ajustarea hiperparametrilor

- Ajustăm changepoint\_prior\_scale pe setul de validare

Împărțirea Datelor		
Set	Perioadă	N
Antrenament (70%)	2010-01 – 2020-06	126
Validare (20%)	2020-07 – 2023-06	36
Test (10%)	2023-07 – 2025-01	19
<b>Total</b>		<b>181</b>

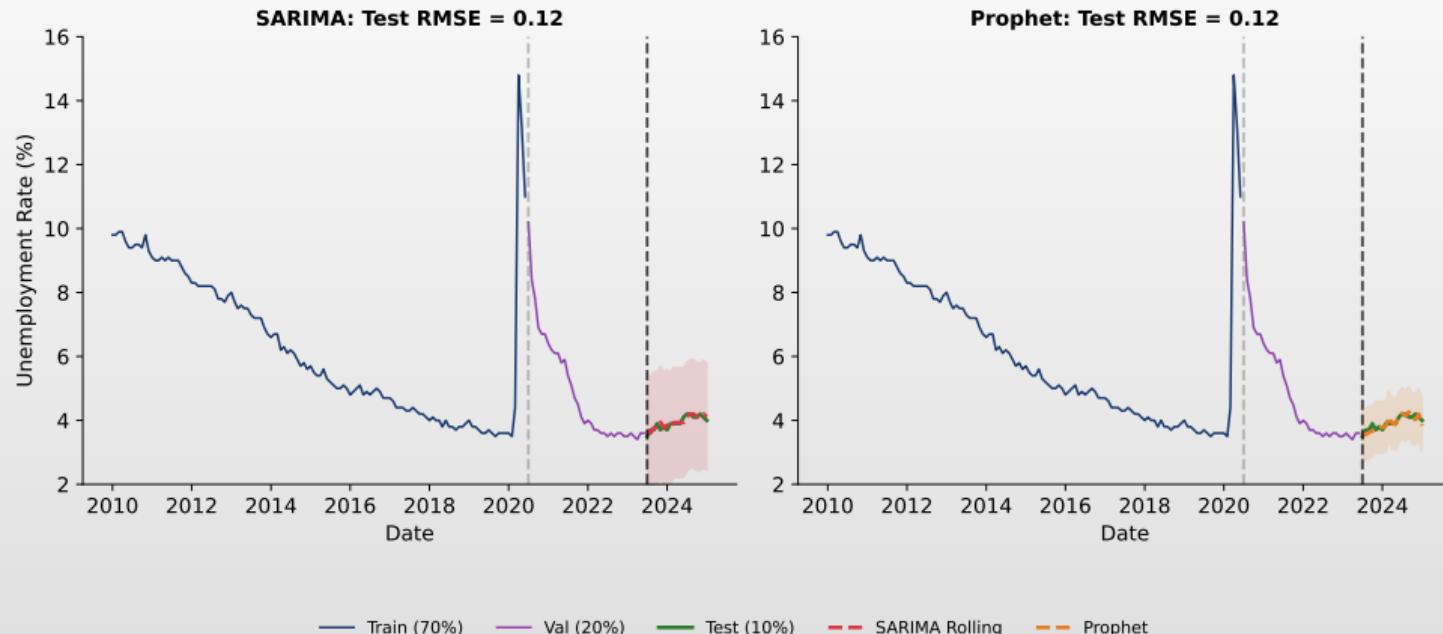
	Scale	Val RMSE	
Comparație Scale	0,01	4,21	
	0,05	3,89	
	0,10	<b>3,52</b>	Cel mai bun
	0,30	3,67	
	0,50	3,81	

### Interpretare

- Scale = 0,10 echilibrează flexibilitatea (captarea şocului COVID) cu stabilitatea



## Șomaj: comparație SARIMA vs Prophet



Q TSA\_ch10\_prophet\_vs\_sarima\_unemployment



## Prophet: când să-l folosești

### Cazuri de utilizare ideale

- Date de business cu **sărbători**
- Valori lipsă** prezente
- Nevoie de componente **interpretabile**
- Prognoze cu **benzi de incertitudine**

### Atenție: Rupturi structurale

- Prophet gestionează rupturile prin changepoints, dar **SARIMA l-a depășit** la șomaj (0,12 vs 0,58)
- Validați întotdeauna!

### Prophet vs ARIMA

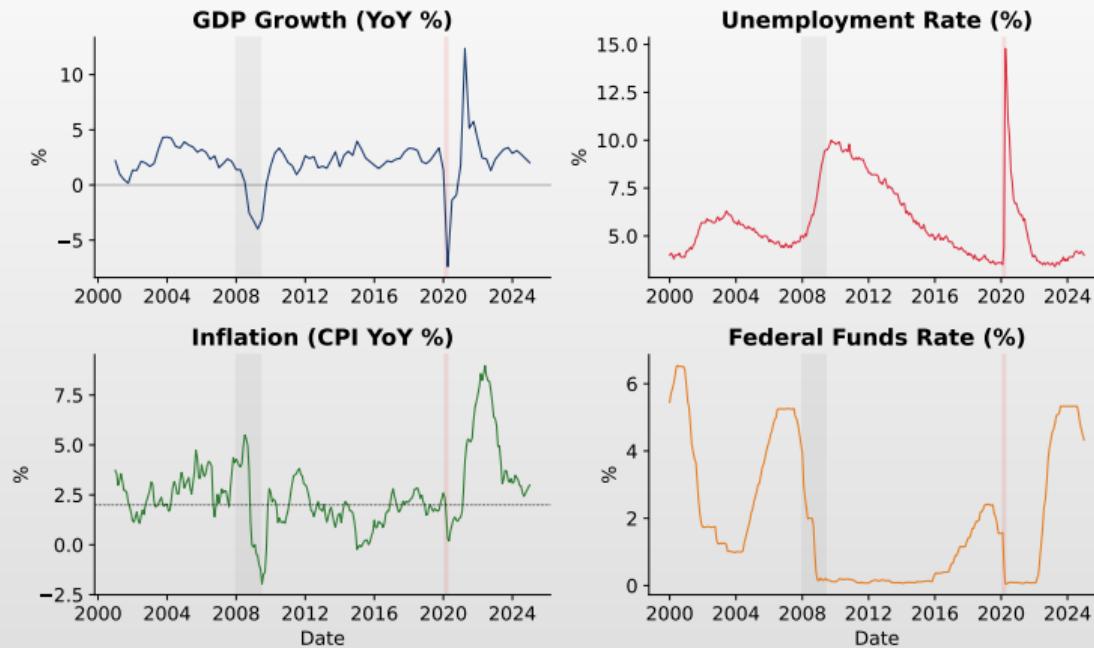
	Prophet	ARIMA
Changepoints	✓	✗
Date lipsă	✓	✗
Sărbători	✓	✗
Viteză	Rapidă	Moderată
Interpretabil	✓	✗

### Parametri cheie

- `changepoint_prior_scale`: flexibilitate
- `seasonality_prior_scale`: netezime



## VAR: date economice multivariate



## Specificarea modelului VAR

### Definiție 6 (Autoregresie Vectorială VAR(p))

- **Date:** Pentru  $K$  variabile  $y_t = (y_{1t}, \dots, y_{Kt})'$ :

$$y_t = c + A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + \dots + A_p y_{t-p} + u_t$$

- **Notatie:**  $A_i$  sunt matrici de coeficienți  $K \times K$ ,  $u_t \sim N(0, \Sigma)$

### Pentru sistemul nostru cu 4 variabile

- **VAR(2):** 4 constante
- $2 \times 4 \times 4 = 32$  coeficienți AR
- **36 parametri total**

### Selectarea lag-ului

- Folosim criterii informaționale:
  - ▶ **AIC:** Tinde să supraajusteze
  - ▶ **BIC:** Mai simplu
  - ▶ Cross-validation pe date păstrate



## Criterii informaționale pentru selectarea modelului

### Definiție 7 (Criteriile Informaționale Akaike și Bayesian)

Pentru un model cu log-verosimilitate  $\mathcal{L}$ ,  $k$  parametri și  $n$  observații:

$$\text{AIC} = -2\mathcal{L} + 2k$$

$$\text{BIC} = -2\mathcal{L} + k \ln(n)$$

#### AIC

- Asimptotic eficient
- Poate supraajusta cu  $n$  mic
- Minimizează eroarea de predicție

#### BIC

- Consistent (găsește modelul adevărat)
- Penalizare mai mare:  $\ln(n) > 2$  dacă  $n \geq 8$
- Mai parcimonios



## VAR: selectarea lag-ului și estimare

### Criterii informaționale

Lag	BIC
1	-4,810
2	<b>-5,178</b>
3	-4,633
4	-4,614

### Împărțirea datelor

Set	Perioadă	N
Antrenament (70%)	2001-T1 – 2017-T4	67
Validare (20%)	2018-T1 – 2022-T4	20
Test (10%)	2023-T1 – 2025-T2	10
<b>Total</b>		<b>97</b>

### Verificare validare

- VAR(2) obține și cel mai mic RMSE de validare



## Stabilitatea modelului VAR

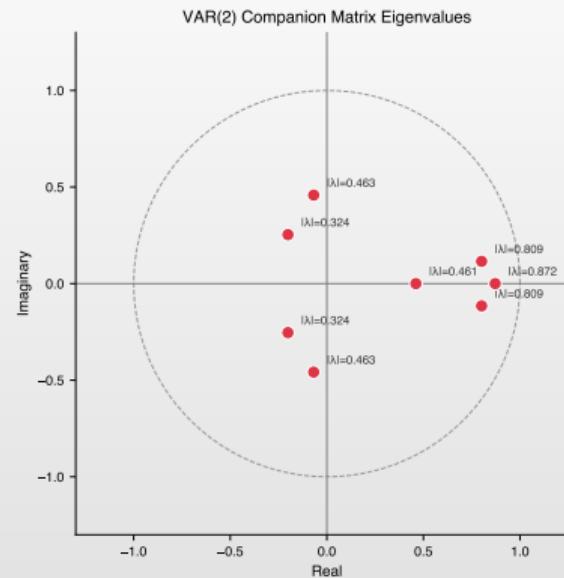
### Condiția de stabilitate

- Toate valorile proprii ale **matricei companion**:  $|\lambda_i| < 1, \forall i$

### Rezultate VAR(2) — date economice

$ \lambda_1 ,  \lambda_2 $	0.324
$ \lambda_3 ,  \lambda_4 $	0.463
$ \lambda_5 $	0.461
$ \lambda_6 $	<b>0.872</b>
$ \lambda_7 ,  \lambda_8 $	0.810

- Max  $|\lambda| = 0.872 < 1$  — **stabil**



## VAR vs VECM: cointegrare

### Problemă

- Dacă variabilele sunt  $I(1)$   $\Rightarrow$  VAR pe niveluri produce regresii spurioase

### Definiție 8 (VECM)

$$\Delta y_t = \Pi y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \Delta y_{t-i} + u_t, \quad \Pi = \alpha \beta'$$

### Johansen Test — date economice

$r$	Trace	CV 5%	Respins?
0	<b>64.09</b>	47.85	Da
1	24.03	29.80	Nu
2	11.89	15.49	Nu
3	1.28	3.84	Nu

- 1 relație de cointegrare găsită
- VECM e mai adecvat decât VAR pe niveluri

### Mesaj cheie

- VAR pe diferențe: pierde relația pe termen lung; VECM: o păstrează prin  $\Pi = \alpha \beta'$



## Cauzalitatea Granger: Rezultate empirice

### Interpretare

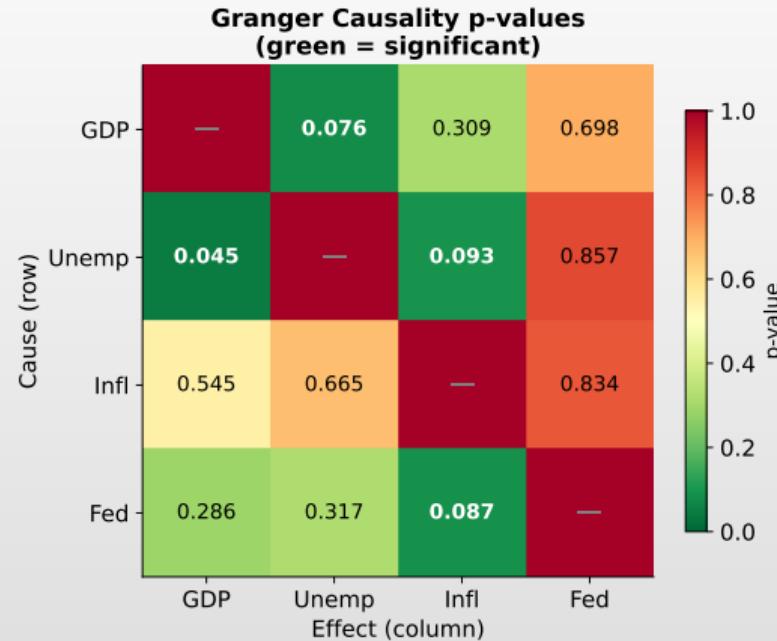
Fiecare celulă arată p-value-ul pentru testarea dacă variabila din rând Granger-cauzează variabila din coloană. Verde:  $p < 0,10$ . Citire: rând cauzează coloană.

### Concluzii economice

- Șomaj  $\rightarrow$  PIB ( $p = 0,045$ ): Legea lui Okun
- Fed  $\rightarrow$  Inflație ( $p = 0,087$ ): Transmisia politiciei monetare
- PIB  $\rightarrow$  Șomaj: Dovezi slabe



## Cauzalitatea Granger: heatmap *p*-values



## Cauzalitatea Granger: Definiție formală

### Definiție 9 (Cauzalitatea Granger)

**X Granger-cauzează Y** dacă, pentru un  $h > 0$ :

$$\mathbb{E} \left[ (Y_{t+h} - \mathbb{E}[Y_{t+h} | \mathcal{F}_t^{X,Y}])^2 \right] < \mathbb{E} \left[ (Y_{t+h} - \mathbb{E}[Y_{t+h} | \mathcal{F}_t^Y])^2 \right]$$

unde  $\mathcal{F}_t^{X,Y}$  include valorile trecute ale lui X și Y, iar  $\mathcal{F}_t^Y$  include doar trecutul lui Y.

### Observație importantă

- Cauzalitatea Granger = **cauzalitate predictivă**, nu cauzalitate reală
- “X Granger-cauzează Y”  $\Rightarrow$  X conține informație utilă pentru prognoza lui Y
- Nu implică faptul că X cauzează Y în sens structural

### Procedura de testare

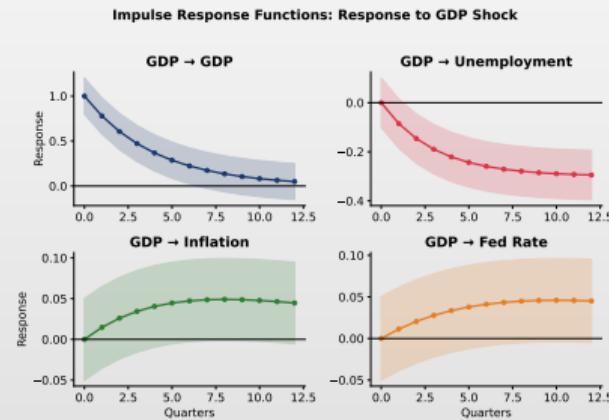
- Testul F (sau Wald):  $H_0$ : coeficienții lag-urilor lui X sunt simultan zero în ecuația lui Y
- Respingem  $H_0 \Rightarrow$  X Granger-cauzează Y



## Funcții de răspuns la impuls (IRF)

### Efecte

- ↑ PIB  $\Rightarrow$  ↓ Șomaj (Okun), ↑ Inflație (cerere), Fed crește rata



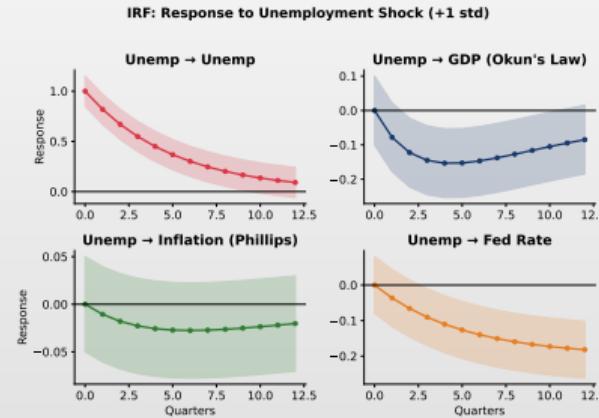
**TSA\_ch10\_irf\_gdp\_shock**



## IRF: șoc șomaj

### Efecte

- ↑ Șomaj  $\Rightarrow$  ↓ PIB (Okun), ↓ Inflație (Phillips), Fed reduce rata



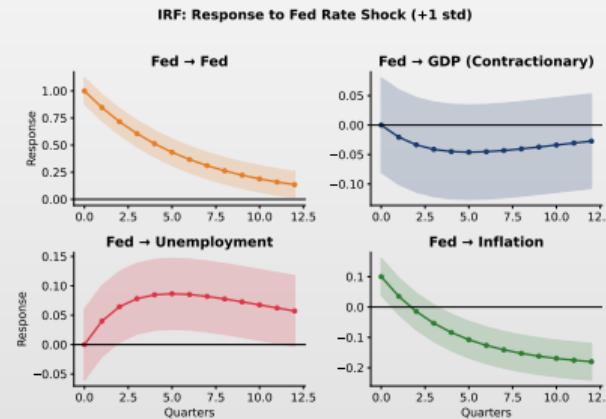
Q TSA\_ch10\_irf\_unemp\_shock



## IRF: şoc rată Fed

### Politică monetară

- Creștere rată  $\Rightarrow$  PIB  $\downarrow$ , Șomaj  $\uparrow$ , Inflație  $\downarrow$

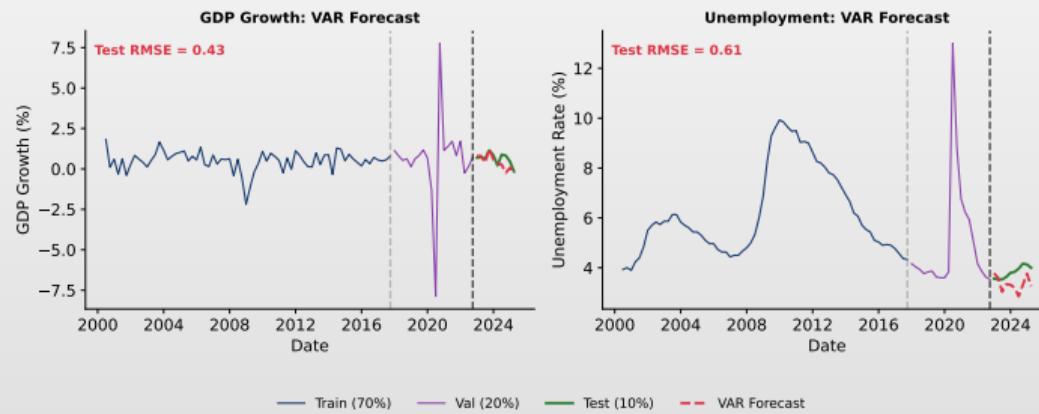


Q TSA\_ch10\_irf\_fed\_shock

## VAR: Prognoza (Train/Val/Test)

### Prognoză Rolling one-step-ahead

- VAR captează dinamică PIB-Şomaj
- Şocul COVID vizibil în perioadă validare (2020)



Q TSA\_ch10\_var\_forecast



## VAR: rezultate set test

### Performanță set Test pe variabile

Variabilă	RMSE	MAE	Acur. Direcție
Creștere PIB	1,33	0,99	50%
Șomaj	0,64	0,52	50%
Inflație	1,56	1,12	60%
Rata Fed	2,59	2,45	80%
Medie	<b>1,53</b>	<b>1,27</b>	<b>60%</b>

### Puncte forte

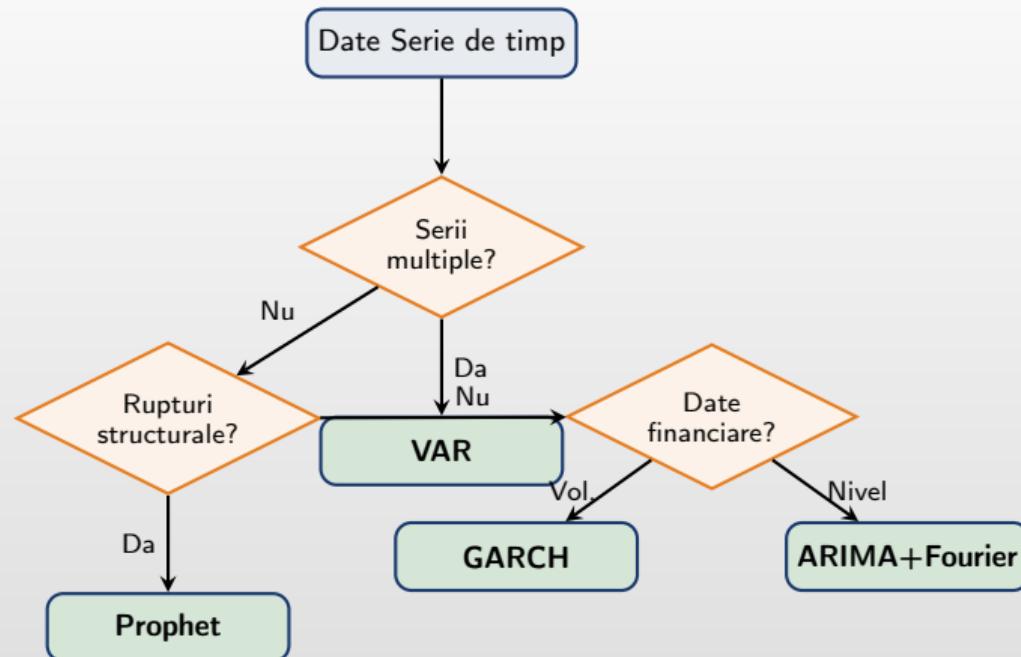
- Captează dinamică între variabile
- Acuratețe direcțională bună
- Relații interpretabile

### Limitări

- Mulți parametri (blestemul dimensionalității)
- Sensibil la selectarea lag-ului
- Perioada COVID dificilă



## Cadrul de selectare a modelului



## Sinteză: Comparația modelelor

Caracteristică	GARCH	Fourier	Prophet	VAR
<b>Tintă</b>	Volatilitate	Nivel	Nivel	Multiple
<b>Sezonalitate</b>	Nu	Da (lungă)	Da (multiplă)	Nu
<b>Rupturi structurale</b>	Nu	Nu	Da	Nu
<b>Serii multiple</b>	Nu	Nu	Nu	Da
<b>Interpretabil</b>	Mediu	Ridicat	Ridicat	Ridicat
<b>Parametri</b>	Puțini	2K	Auto	Mulți
<b>Date lipsă</b>	Nu	Nu	Da	Nu
<b>Ideal pentru</b>	Finanțe	Cicluri	Business	Macro

### Concluzii empirice

- **GARCH:** Student-t > Normal ( $\Delta AIC = 509$ )
- **Fourier:**  $K = 3$  armonici, validat pe set de validare
- **Prophet:** adaptare la rupturi via changepoints
- **VAR:** interacțiuni macro semnificative (Granger)

### Insight cheie

- RMSE nu se compară între seturi de date diferite!
- Fiecare model excelează în domeniul său
- Alegerea: potrivirea model  $\leftrightarrow$  date

## Bune practici pentru prognoza aplicată

### Metodologie

1. **Explorați** datele temeinic
2. **Testați** staționaritatea
3. **Împărțiți** train/validation/test
4. **Comparați** modele pe validare
5. **Raportați** metrii pe test

### Greșeli frecvente

- Privirea în datele de test
- Supraajustare pe setul de antrenament
- Ignorarea ipotezelor modelului
- Neraportarea incertitudinii

### Sfaturi practice

- Începeți simplu (random walk, naiv)
- Adăugați complexitate doar dacă e necesar
- Vizualizați prognoze vs. valori reale
- Verificați reziduurile pentru tipare
- Raportați intervale de încredere

### Amintiți-vă

- “Toate modelele sunt greșite, dar unele sunt utile.” — George E. P. Box



## Prognoză vs Cauzalitate vs Decizie

Obiectiv	Model	Focalizare
Predictie pură	ARIMA / ML	Acuratețe out-of-sample
Risc financiar	GARCH	Volatilitate, VaR
Dinamici macro	VAR	Interacțiuni multivariate
Relații structurale	SVAR / VECM	Identificare cauzală
Regimuri	Markov Switching	Schimbări de regim

### Mesaj cheie

- Nu există model universal
- Există potrivire între model și problemă



## Concluzii cheie

### 1. Metodologie Riguroasă

- ▶ Împărțirea train/validation/test previne supraajustarea
- ▶ Setul de test trebuie să rămână neatins până la evaluarea finală

### 2. Potriviți Modelul cu Datele

- ▶ Volatilitate finanțiară ⇒ GARCH
- ▶ Sezonalitate lungă ⇒ Termini Fourier
- ▶ Rupturi structurale ⇒ Prophet
- ▶ Serii multiple ⇒ VAR

### 3. Interpretați Rezultatele cu Grijă

- ▶ Cauzalitate Granger ≠ cauzalitate adeverată
- ▶ Performanța out-of-sample contează cel mai mult
- ▶ Modelele mai simple funcționează adesea mai bine



## Rolul AI în modelarea seriilor de timp

### AI poate

- Generează cod pentru estimare și prognoză
- Selectează modele (AutoML, grid search)
- Combina prognoze (ensemble)
- Detecta anomalii și pattern-uri

### Dar nu poate

- Înlocuiște validarea statistică
- Detectă automat **data leakage**
- Garantează interpretare economică corectă
- Verifică ipotezele modelului

### Principiu

- AI este **instrument**, nu autoritate
- Validarea statistică rămâne responsabilitatea cercetătorului



## Exercițiu AI: Gândire critică

Prompt de testat în ChatGPT / Claude / Copilot

"Descarcă de pe FRED vânzările lunare cu amănuntul din SUA (seria RSXFS) din 2010-01 până în 2024-12 (180 observații). Fă o analiză completă a seriei de timp: descompunere, teste de staționaritate, selecție model (compară ETS, SARIMA și Prophet), prognoză pe 12 luni, evaluare cu RMSE/MAE/MASE pe un split temporal 70/15/15. Vreau cod Python de calitate publicabilă."

**Exercițiu:**

1. Rulați prompt-ul într-un LLM la alegere și analizați critic răspunsul.
2. Urmează fluxul corect? (grafic → descompunere → test → model → diagnostic → prognoză)
3. Compară mai multe modele (ETS, ARIMA, SARIMA) cu benchmark-uri adecvate?
4. Împărțirea train/test este făcută corect? Există surgeri de date (data leakage)?
5. Discută limitările și ipotezele modelului ales?

**Atenție:** Codul generat de AI poate rula fără erori și arăta profesional. *Asta nu înseamnă că e corect.*



## Întrebarea 1

### Întrebare

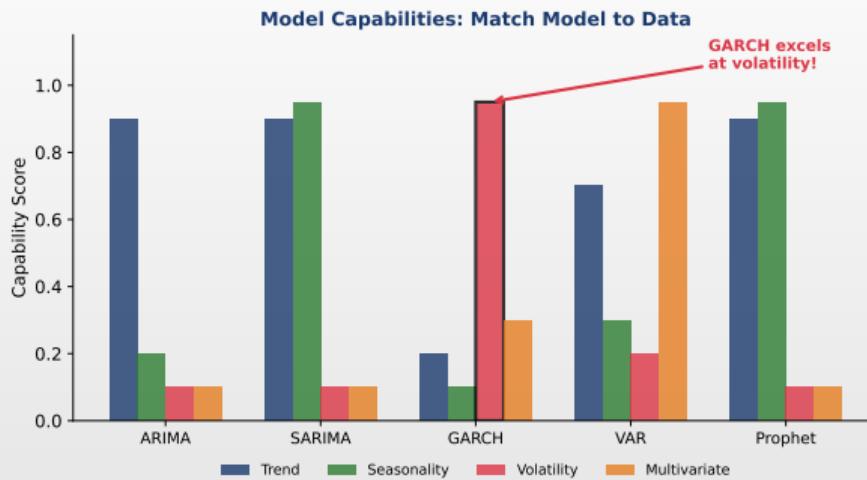
- Ce model alegeti pentru a prognoza volatilitatea randamentelor financiare?

### Variante de răspuns

- (A) ARIMA — captează tendințe și autocorelații
- (B) GARCH — modelează varianța condiționată
- (C) Prophet — detectează puncte de schimbare
- (D) VAR — model multivariat pentru interdependențe



## Întrebarea 1: Răspuns



Răspuns: (B)

- GARCH captează volatility clustering și riscul variabil în timp. ARIMA modeleză nivelul, Prophet sezonalitatea, VAR relațiile între serii — niciunul nu modeleză varianța direct.



## Întrebarea 2

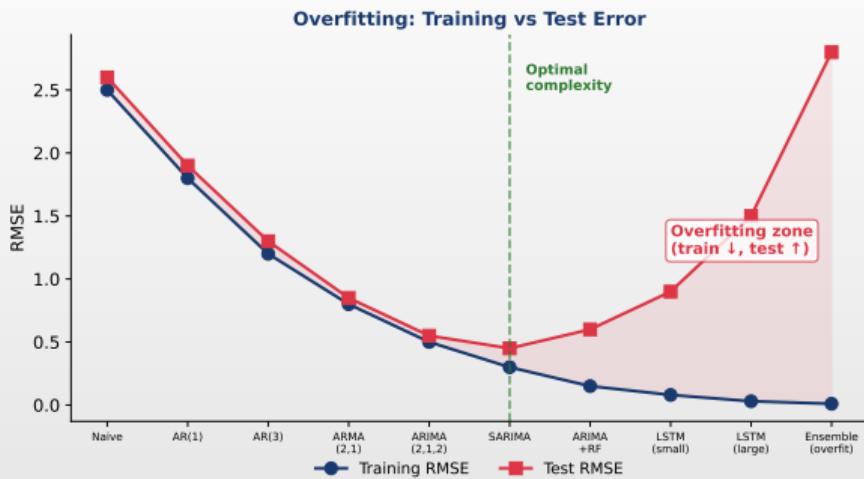
### Întrebare

- Un model SARIMA obține RMSE = 0,05 pe antrenament, dar RMSE = 2,30 pe test. Ce indică aceasta?

### Variante de răspuns

- (A)** Modelul este excelent — eroare mică pe antrenament
- (B)** Modelul suferă de overfitting — memorează zgomotul
- (C)** Setul de test este greșit — trebuie schimbat
- (D)** Diferența este normală — nu e nicio problemă

## Întrebarea 2: Răspuns



Răspuns: (B)

- Un raport de  $46\times$  între RMSE test și train semnalează overfitting sever. Modelul se potrivește zgomotului din antrenament și nu generalizează. Soluție: model mai simplu, validare.



## Întrebarea 3

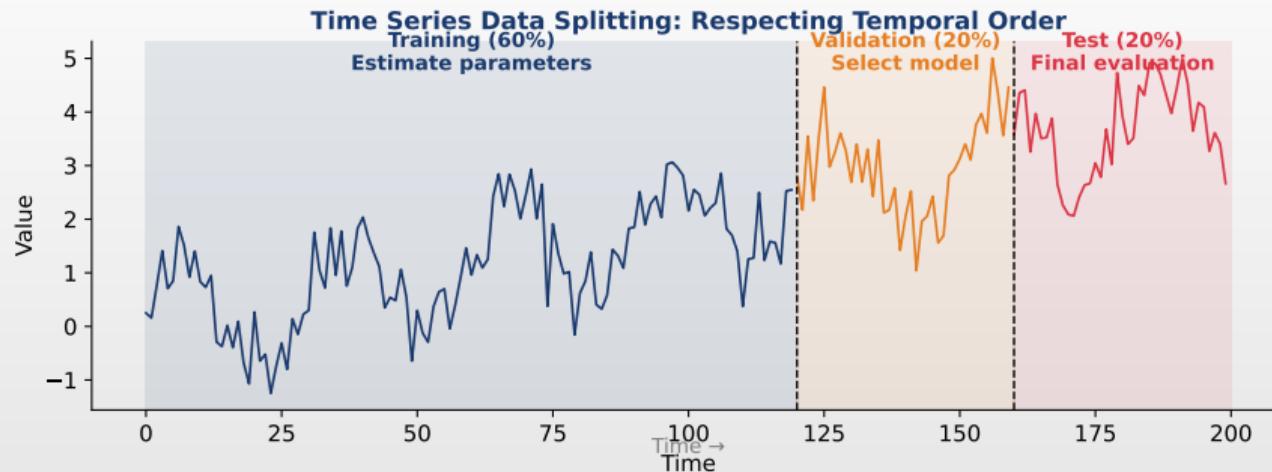
### Întrebare

- De ce este importantă separarea datelor în train/validation/test?

### Variante de răspuns

- (A)** Pentru a avea mai multe date de antrenament
- (B)** Pentru a preveni supraajustarea și a evalua corect
- (C)** Este doar o convenție, nu are importanță reală
- (D)** Pentru a reduce timpul de calcul

## Întrebarea 3: Răspuns



Răspuns: (B)

- Train: estimează parametrii. Validare: selectează modelul. Test: evaluare finală nebiasată. Amestecarea acestor roluri duce la estimări optimiste ale performanței.

Q TSA\_ch10\_quiz3\_train\_val\_test



## Întrebarea 4

### Întrebare

- Cauzalitatea Granger este echivalentă cu cauzalitatea reală (structurală)?

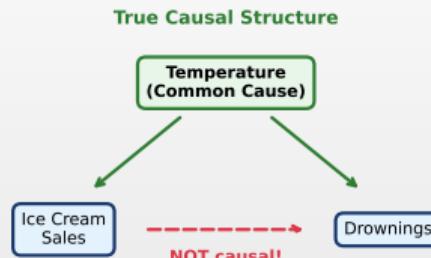
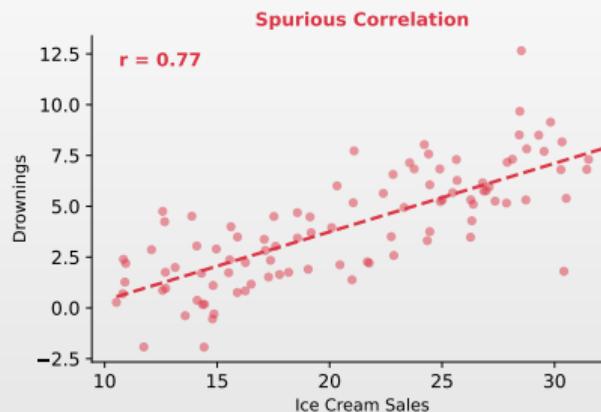
### Variante de răspuns

- (A) Da — dacă  $X$  prezice  $Y$ , atunci  $X$  cauzează  $Y$
- (B) Nu — testează doar conținut predictiv, nu cauzalitate
- (C) Depinde de numărul de lag-uri selectate
- (D) Da, dacă p-value < 0,05



## Întrebarea 4: Răspuns

Granger Causality ≠ True Causality



Răspuns: (B)

- Testul Granger verifică dacă trecutul lui  $X$  îmbunătățește predicția lui  $Y$ . Corelații false (ex: vânzări de înghețată și încuri) pot trece testul din cauza cauzelor comune.



## Întrebarea 5

### Întrebare

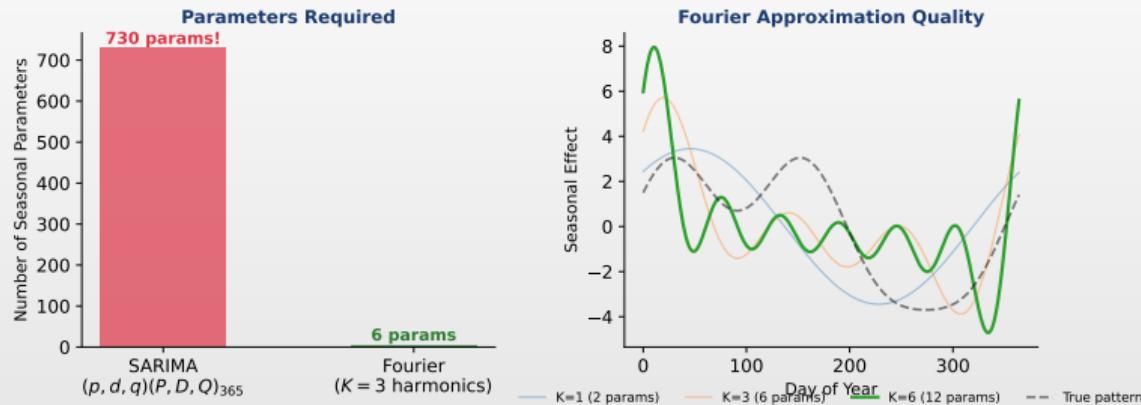
- Ce model folosiți pentru o serie cu sezonalitate lungă (ex:  $s = 365$  zile)?

### Variante de răspuns

- (A) SARIMA( $p, d, q$ )( $P, D, Q$ )<sub>365</sub>
- (B) GARCH — modelează variația
- (C) ARIMA + Termeni Fourier sau Prophet/TBATS
- (D) VAR cu 365 lag-uri

## Întrebarea 5: Răspuns

Long Seasonality ( $s = 365$ ): Fourier Terms vs SARIMA



Răspuns: (C)

- SARIMA<sub>365</sub> necesită polinoame lag de ordin 365 — imposibil de estimat computațional. Termenii Fourier cu  $K = 3$  folosesc doar 6 parametri (sin/cos). Prophet și TBATS gestionează sezonalități multiple automat.



## Bibliografie I

### Manuale fundamentale (referințe comune tuturor capitolelor)

- Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*, 3rd ed., OTexts.
- Shumway, R.H., & Stoffer, D.S. (2017). *Time Series Analysis and Its Applications*, 4th ed., Springer.

### Lucrări de referință pe domenii

- Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*, 3rd ed., Wiley. (GARCH, VAR)
- Lütkepohl, H. (2005). *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer. (VAR, VECM)
- Francq, C., & Zakoïan, J.-M. (2019). *GARCH Models*, 2nd ed., Wiley. (Volatilitate)



## Bibliografie II

### Abordări moderne și competiții de prognoză

- Petropoulos, F., et al. (2022). Forecasting: Theory and Practice, *International Journal of Forecasting*, 38(3), 845–1054.
- Makridakis, S., Spiliotis, E., & Assimakopoulos, V. (2020). The M4 Competition, *International Journal of Forecasting*, 36(1), 54–74.
- Taylor, S.J., & Letham, B. (2018). Forecasting at Scale, *The American Statistician*, 72(1), 37–45.



## Sumarul cursului

### Ce am învățat

- Selectarea modelului depinde de caracteristicile datelor: staționaritate, sezonalitate, volatilitate
- Metodologia Box-Jenkins oferă un cadru sistematic pentru modelarea seriilor de timp
- Evaluarea corectă necesită testare out-of-sample și validare încrucișată

### Important

- Niciun model nu câștigă peste tot — potriviți modelul cu datele:
  - ▶ ARIMA pentru tendințe
  - ▶ SARIMA pentru sezonalitate
  - ▶ GARCH pentru volatilitate
  - ▶ VAR/VECM pentru dinamici multivariate
  - ▶ Prophet/TBATS pentru tipare complexe
- Validați întotdeauna out-of-sample!



## Referințe

-  Box, G.E.P., Jenkins, G.M., Reinsel, G.C., & Ljung, G.M. (2015). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. 5th ed., Wiley.
-  Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
-  Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*. 3rd ed., Wiley.
-  Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*. 3rd ed., OTexts.
-  Taylor, S.J., & Letham, B. (2018). Forecasting at Scale. *The American Statistician*, 72(1), 37-45.
-  Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307-327.
-  Sims, C.A. (1980). Macroeconomics and Reality. *Econometrica*, 48(1), 1-48.

# Vă Mulțumim!

## Întrebări?

Materialele cursului sunt disponibile la: <https://danpele.github.io/Time-Series-Analysis/>

