Seminar: Modele de Volatilitate

ARCH, GARCH, EGARCH, TGARCH

Test de Recapitulare și Exerciții Practice

Cuprins Seminar

Întrebarea 1

Ce reprezintă “volatility clustering”?

- A. Volatilitatea este constantă în timp
- B. Perioadele de volatilitate ridicată sunt urmate de perioade de volatilitate ridicată
- C. Randamentele sunt corelate în timp
- D. Distribuția randamentelor este normală

Gândiți-vă la comportamentul piețelor financiare în perioadele de criză...

Răspuns Întrebarea 1

Răspuns Corect: (B)

Perioadele de volatilitate ridicată sunt urmate de perioade de volatilitate ridicată

Explicație

- **Volatility clustering** este un fapt stilizat observat în seriile financiare
- Perioadele "agitate" (cu mișcări mari) tind să persiste
- Perioadele "calme" (cu mișcări mici) tind și ele să persiste
- Aceasta implică că varianța condiționată σ_t^2 este **predictibilă**
- Modelele GARCH captează exact acest fenomen!

Întrebarea 2

În modelul GARCH(1,1): $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$

Ce reprezintă parametrul α?

A. Persistența volatilității
B. Nivelul de bază al volatilității
C. Reacția la șocuri recente (news coefficient)
D. Varianța necondiționată

Răspuns Întrebarea 2

Răspuns Corect: (C)

Reacția la șocuri recente (news coefficient)

Interpretarea Parametrilor GARCH(1,1)

- ω = nivelul de bază (floor) al volatilității
- α = **reacția** la pătratele inovațiilor ("news")
- β = **persistența** volatilității (memory)
- $\alpha + \beta$ = persistența totală

Un α mare înseamnă că volatilitatea reacționează puternic la șocuri recente.

Întrebarea 3

Care este condiția de stationaritate pentru GARCH(1,1)?

- A $\omega > 0$
- B $\alpha + \beta = 1$
- C $\alpha + \beta < 1$
- D $\alpha > \beta$

Răspuns Întrebarea 3

Răspuns Corect: (C)

$\alpha + \beta < 1$

Condiții Complete

Pentru stationaritatea GARCH(1,1):

- $\omega > 0$ (asigură varianță pozitivă)
- $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ (non-negativitate)
- $\alpha + \beta < 1$ (**stationaritate strictă**)

Dacă $\alpha + \beta = 1 \Rightarrow$ IGARCH (șocurile au efect permanent)

Întrebarea 4

Care este formula varianței necondiționate în GARCH(1,1)?

- **A** $\bar{\sigma}^2 = \omega$
- **B** $\bar{\sigma}^2 = \dfrac{\omega}{1-\alpha}$
- **C** $\bar{\sigma}^2 = \dfrac{\omega}{1-\alpha-\beta}$
- **D** $\bar{\sigma}^2 = \dfrac{\omega}{\alpha+\beta}$

Răspuns Întrebarea 4

Răspuns Corect: (C)

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$$

Demonstrație

Luând așteptarea necondiționată a GARCH(1,1):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\sigma_t^2] &= \omega + \alpha \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] + \beta \mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2] \\
\bar{\sigma}^2 &= \omega + \alpha \bar{\sigma}^2 + \beta \bar{\sigma}^2 \\
\bar{\sigma}^2 (1 - \alpha - \beta) &= \omega \\
\bar{\sigma}^2 &= \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}
\end{aligned}$$

Întrebarea 5

Ce este “leverage effect”?

- A. Șocurile pozitive cresc volatilitatea mai mult decât cele negative
- B. Șocurile negative cresc volatilitatea mai mult decât cele pozitive
- C. Volatilitatea este independentă de semnul șocurilor
- D. Randamentele sunt asimetrice

Răspuns Întrebarea 5

Răspuns Corect: (B)

Șocurile negative cresc volatilitatea mai mult decât cele pozitive

Explicație

- Observat empiric pe piețele de acțiuni
- Când prețurile scad, leverage-ul firmei crește (datoria devine mai mare relativă la capitaluri)
- Aceasta face firma mai riscantă $\Rightarrow$ volatilitate mai mare
- GARCH standard **nu poate** captura acest efect (depinde de ε^2)
- Soluții: **EGARCH**, **GJR-GARCH**, **TGARCH**

Întrebarea 6

În modelul EGARCH, parametrul γ negativ indică:

- A. Absența leverage effect
- B. Prezența leverage effect
- C. Volatilitate constantă
- D. Model nestationar

Răspuns Întrebarea 6

Răspuns Corect: (B)

Prezența leverage effect

EGARCH(1,1)

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \alpha(|z_{t-1}| - \mathbb{E}[|z|]) + \gamma z_{t-1} + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2)$$

- $\gamma < 0$: șoc negativ ($z < 0$) $\Rightarrow$ crește $\ln(\sigma_t^2)$
- $\gamma > 0$: efect invers (mai rar întâlnit)
- $\gamma = 0$: efect simetric (ca GARCH)

Întrebarea 7

Care este principalul avantaj al EGARCH față de GARCH?

- A. Este mai rapid de estimat
- B. Nu necesită restricții de non-negativitate
- C. Are mai puțini parametri
- D. Este mai ușor de interpretat

Răspuns Întrebarea 7

Răspuns Corect: (B)

Nu necesită restricții de non-negativitate

Avantajele EGARCH

- Modelează $\ln(\sigma_t^2)$, nu σ_t^2
- $\sigma_t^2 = e^{\ln(\sigma_t^2)} > 0$ **automat**, indiferent de valorile parametrilor
- GARCH necesită $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$
- La estimare, aceste restricții pot cauza probleme de convergență

Întrebarea 8

Ce test folosim pentru a detecta efecte ARCH în reziduuri?

- A Testul Dickey-Fuller
- B Testul Ljung-Box pe reziduuri
- C Testul Engle (ARCH-LM)
- D Testul Breusch-Pagan

Răspuns Întrebarea 8

Răspuns Corect: (C)

Testul Engle (ARCH-LM)

Procedura Testului ARCH-LM

1. Estimează modelul pentru medie, obține reziduurile $\hat{\varepsilon}_t$
2. Calculează $\hat{\varepsilon}_t^2$
3. Regresează: $\hat{\varepsilon}_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \cdots + \beta_q \hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + u_t$
4. Statistica: $LM = T \cdot R^2 \sim \chi^2(q)$ sub H_0

H_0: Nu există efecte ARCH $\quad$ H_1: Există efecte ARCH

Întrebarea 9

Pentru S&P 500, valorile tipice ale $\alpha + \beta$ în GARCH(1,1) sunt:

- A. 0.50 – 0.70
- B. 0.70 – 0.85
- C. 0.95 – 0.99
- D. Mai mare decât 1

Răspuns Întrebarea 9

Răspuns Corect: (C)

0.95 – 0.99

Volatilitate Foarte Persistentă

- Seriile financiare au volatilitate foarte persistentă
- $\alpha + \beta \approx 0.98$ pentru S&P 500
- Half-life: $HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha+\beta)} \approx 35 - 60$ zile
- Aceasta înseamnă că un șoc de volatilitate se disipează în câteva luni

Serie	$\alpha + \beta$
S&P 500	0.97–0.99
Bitcoin	0.90–0.98
EUR/USD	0.96–0.99

Întrebarea 10

Care distribuție este cel mai des folosită pentru inovațiile GARCH pentru a captura cozile groase?

- A. Normală
- B. Uniformă
- C. Student-t
- D. Exponențială

Răspuns Întrebarea 10

Răspuns Corect: (C)

Student-t

Distribuții pentru Inovații

- **Normală**: standard, dar subestimează riscul extrem
- **Student-t**: cozi groase, parametru ν (grade de libertate)
- **GED**: Generalized Error Distribution, flexibilă
- **Skewed Student-t**: asimetrie + cozi groase

Pentru S&P 500: $\nu \approx 5 - 8$ (cozi semnificativ mai groase decât normala)

Adevărat sau Fals?

1. Modelele ARIMA pot captura volatility clustering.
2. În GARCH(1,1), dacă $\alpha + \beta = 1$, modelul se numește IGARCH.
3. GJR-GARCH folosește o variabilă indicator pentru șocuri negative.
4. Prognoza volatilității GARCH converge către zero pe termen lung.
5. EGARCH poate avea parametri negativi fără a genera varianță negativă.
6. Value at Risk (VaR) poate fi calculat folosind prognoza volatilității GARCH.

Răspunsuri Adevărat/Fals

1. **FALS** — ARIMA presupune varianță constantă; GARCH modelează volatilitatea.
2. **ADEVĂRAT** — IGARCH = Integrated GARCH, volatilitatea are rădăcină unitară.
3. **ADEVĂRAT** — $I_{t-1} = 1$ dacă $\varepsilon_{t-1} < 0$, altfel 0.
4. **FALS** — Converge către varianța necondiționată $\bar{\sigma}^2$, nu zero.
5. **ADEVĂRAT** — Modelează $\ln(\sigma_t^2)$, deci $\sigma_t^2 = e^{\ln(\sigma_t^2)} > 0$ mereu.
6. **ADEVĂRAT** — $\text{VaR}_\alpha = z_\alpha \cdot \sigma_{t+1}$ (pentru medie zero).

Problema 1: Calculul Varianței Necondiționate

Enunț

Un model GARCH(1,1) are parametrii estimați:

- $\omega = 0.000002$
- $\alpha = 0.08$
- $\beta = 0.90$

Calculați:

a. Varianța necondiționată zilnică
b. Volatilitatea necondiționată zilnică (ca procent)
c. Volatilitatea anualizată (presupunând 252 zile de tranzacționare)
d. Half-life-ul volatilității

Soluție Problema 1

Răspunsuri

a. $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta} = \frac{0.000002}{1-0.08-0.90} = \frac{0.000002}{0.02} = 0.0001$

b. $\bar{\sigma} = \sqrt{0.0001} = 0.01 = 1\%$ pe zi

c. $\sigma_{\text{annual}} = \bar{\sigma} \times \sqrt{252} = 0.01 \times 15.87 = 15.87\%$ pe an

d. $HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha+\beta)} = \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.98)} = \frac{-0.693}{-0.0202} \approx 34$ zile

Interpretare

Volatilitatea de 15.87% pe an este tipică pentru un indice bursier. Half-life de 34 zile înseamnă că un șoc de volatilitate se reduce la jumătate după aproximativ 7 săptămâni.

Problema 2: Prognoză Volatilitate

Enunț

Folosind modelul GARCH(1,1) de la Problema 1:

- $\omega = 0.000002$, $\alpha = 0.08$, $\beta = 0.90$
- La momentul T: $\varepsilon_T = -0.03$ (scădere de 3%), $\sigma_T^2 = 0.0004$

Calculați prognoza volatilității pentru:

a. σ_{T+1}^2 (un pas înainte)
b. σ_{T+5}^2 (cinci pași înainte)
c. σ_{T+100}^2 (o sută de pași înainte)

Soluție Problema 2

Răspunsuri

a. $\sigma^2_{T+1} = \omega + \alpha\varepsilon^2_T + \beta\sigma^2_T$

$$= 0.000002 + 0.08 \times (0.03)^2 + 0.90 \times 0.0004 = 0.000434$$

Volatilitate: $\sqrt{0.000434} = 2.08\%$

b. $\mathbb{E}_T[\sigma^2_{T+5}] = \bar{\sigma}^2 + (0.98)^4(\sigma^2_{T+1} - \bar{\sigma}^2)$

$$= 0.0001 + 0.922 \times (0.000434 - 0.0001) = 0.000408$$

Volatilitate: $\sqrt{0.000408} = 2.02\%$

c. $\mathbb{E}_T[\sigma^2_{T+100}] = 0.0001 + (0.98)^{99} \times 0.000334 \approx 0.000145$
Volatilitate: $\sqrt{0.000145} = 1.20\%$ (aproape de $\bar{\sigma} = 1\%$)

Problema 3: Value at Risk

Enunț

Un portofoliu de 1.000.000 EUR este investit în acțiuni cu randamente modelate GARCH(1,1).
Prognoza volatilității pentru mâine: $\sigma_{T+1} = 2\%$ zilnic.
Presupunând randamente normal distribuite cu medie zero, calculați:

a. VaR la 95% (1 zi)
b. VaR la 99% (1 zi)
c. VaR la 99% (10 zile), folosind regula "square root of time"

Cuantile: $z_{0.05} = 1.645$, $z_{0.01} = 2.326$

Soluție Problema 3

Răspunsuri

a. VaR 95% (1 zi):

$$\text{VaR}_{95\%} = 1.645 \times 0.02 \times 1{,}000{,}000 = 32{,}900 \text{ EUR}$$

b. VaR 99% (1 zi):

$$\text{VaR}_{99\%} = 2.326 \times 0.02 \times 1{,}000{,}000 = 46{,}520 \text{ EUR}$$

c. VaR 99% (10 zile):

$$\text{VaR}_{99\%,10d} = \text{VaR}_{99\%,1d} \times \sqrt{10} = 46{,}520 \times 3.162 = 147{,}100 \text{ EUR}$$

Atenție

În practică, pentru Student-t, cuantilele sunt mai mari (cozi mai groase)!

Problema 4: Identificarea Modelului

Enunț

Analizați următoarele rezultate ale estimării și identificați modelul:

Parametru	Estimat	Std. Error
ω	0.0000015	0.0000005
α	0.0550	0.0120
γ	0.0850	0.0180
β	0.9100	0.0150

a. Ce model este acesta?
b. Este prezent leverage effect?
c. Care este impactul unui șoc negativ vs pozitiv?
d. Este modelul stationar?

Soluție Problema 4

Răspunsuri

a. **GJR-GARCH(1,1,1)** — prezența parametrului γ (threshold/asymmetry)

b. **Da, leverage effect prezent**: $\gamma = 0.085 > 0$ și semnificativ

c. Impact:
   - Șoc pozitiv: impact $= \alpha = 0.055$
   - Șoc negativ: impact $= \alpha + \gamma = 0.055 + 0.085 = 0.140$
   - Șocurile negative au impact de **2.5x mai mare**!

d. Stationaritate: $\alpha + \gamma/2 + \beta = 0.055 + 0.0425 + 0.91 = 1.0075$
   La limită! Aproape IGARCH. Model foarte persistent.

Pasul 1: Încărcare și Pregătire Date

```
import pandas as pd
import numpy as np
import yfinance as yf
from arch import arch_model
from arch.unitroot import ADF

# Descărcare date S&P 500
data = yf.download('^GSPC', start='2010-01-01', end='2024-01-01')
returns = 100 * data['Adj Close'].pct_change().dropna()

# Verificare stationaritate
adf = ADF(returns)
print(f'ADF statistic: {adf.stat:.4f}')
print(f'p-value: {adf.pvalue:.4f}')
```

Pasul 2: Test Efecte ARCH

```
from statsmodels.stats.diagnostic import het_arch

# Test ARCH-LM pe reziduuri
residuals = returns - returns.mean()
lm_stat, lm_pvalue, f_stat, f_pvalue = het_arch(residuals, nlags=10)

print(f'ARCH-LM statistic: {lm_stat:.4f}')
print(f'p-value: {lm_pvalue:.4f}')

if lm_pvalue < 0.05:
    print('=> Efecte ARCH prezente! Se justifica modelul GARCH.')
```

Pasul 3: Estimare Modele

```
# GARCH(1,1) cu distributie Student-t
model_garch = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, q=1, dist='t')
res_garch = model_garch.fit(disp='off')
print(res_garch.summary())

# GJR-GARCH(1,1,1)
model_gjr = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, o=1, q=1, dist='t')
res_gjr = model_gjr.fit(disp='off')

# EGARCH(1,1)
model_egarch = arch_model(returns, vol='EGARCH', p=1, q=1, dist='t')
res_egarch = model_egarch.fit(disp='off')

# Comparatie AIC
print(f'GARCH AIC: {res_garch.aic:.2f}')
print(f'GJR AIC: {res_gjr.aic:.2f}')
print(f'EGARCH AIC: {res_egarch.aic:.2f}')
```

Pasul 4: Diagnostic

```
# Reziduuri standardizate
std_resid = res_gjr.std_resid

# Test Ljung-Box pe reziduuri patrate
from statsmodels.stats.diagnostic import acorr_ljungbox
lb_test = acorr_ljungbox(std_resid**2, lags=10, return_df=True)
print(lb_test)

# Verificare efecte ARCH reziduale
lm_stat2, lm_pval2, _, _ = het_arch(std_resid, nlags=5)
print(f'ARCH-LM reziduuri: stat={lm_stat2:.2f}, p={lm_pval2:.4f}')

if lm_pval2 > 0.05:
    print('=> Nu mai sunt efecte ARCH reziduale. Model OK!')
```

Pasul 5: Prognoză și VaR

```
# Prognoza 10 zile
forecasts = res_gjr.forecast(horizon=10)
vol_forecast = np.sqrt(forecasts.variance.values[-1, :])

print('Prognoza volatilitatii (%):', vol_forecast)

# Value at Risk 99%
portfolio_value = 1_000_000
VaR_99 = 2.326 * vol_forecast[0] / 100 * portfolio_value
print(f'VaR 99% (1 zi): {VaR_99:,.0f} EUR')

# VaR 10 zile
VaR_99_10d = VaR_99 * np.sqrt(10)
print(f'VaR 99% (10 zile): {VaR_99_10d:,.0f} EUR')
```

Rezumat Seminar

Concepte Cheie

- **ARCH**: varianța condiționată depinde de șocuri trecute
- **GARCH**: adaugă persistența prin lag-uri ale varianței
- **EGARCH/GJR**: captează leverage effect (asimetrie)
- **Stationaritate**: $\alpha + \beta < 1$

Formule Importante

- Varianța necondiționată: $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$
- Half-life: $HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha+\beta)}$
- VaR: $\text{VaR}_\alpha = z_\alpha \cdot \sigma \cdot V$

Sfat Practic

Folosiți distribuția Student-t pentru a captura cozile groase. Verificați absența efectelor ARCH în reziduuri!

Exerciții pentru Acasă

Exercițiul 1

Descărcați randamentele zilnice pentru BET (indicele BVB) și estimați un model GARCH(1,1). Comparați persistența ($\alpha + \beta$) cu S&P 500.

Exercițiul 2

Pentru Bitcoin, estimați GARCH, EGARCH și GJR-GARCH. Este leverage effect prezent pentru criptomonede?

Exercițiul 3

Calculați VaR zilnic pentru un portofoliu de 100.000 EUR investit în EUR/USD, folosind volatilitatea GARCH prognozată.

Exercițiul 4

Compară prognoza volatilității GARCH(1,1) cu volatilitatea realizată (suma pătratelor randamentelor) pentru o perioadă de 20 de zile.