



## Analiza și Prognoza seriilor de timp

### Seminar 3: Modele ARIMA



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

## Cuprins Seminar

### Activitățile de Astăzi:

1. **Test de Recapitulare** — Verificarea înțelegerii conceptelor ARIMA
2. **Întrebări Adevărat/Fals** — Verificări conceptuale
3. **Probleme Practice** — Calcule cu ARIMA
4. **Exemple Rezolvate** — Aplicații din lumea reală
5. **Analiză pe Date Reale** — Studiu de caz PIB
6. **Exerciții AI** — Modelare om vs. AI

## Test 1: Ordinul de Integrare

### Întrebare

O serie de timp  $Y_t$  necesită două diferențe pentru a deveni staționară. Care este ordinul ei de integrare?

### Variante de răspuns

(A)  $I(0)$       indent (B)  $I(1)$       indent (C)  $I(2)$       indent (D) Nu poate fi determinat

## Test 1: Ordinul de Integrare

### Întrebare

O serie de timp  $Y_t$  necesită două diferențe pentru a deveni staționară. Care este ordinul ei de integrare?

Răspuns:  $C - I(2)$

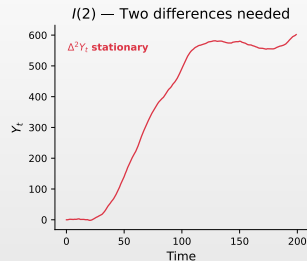
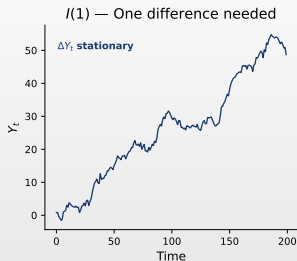
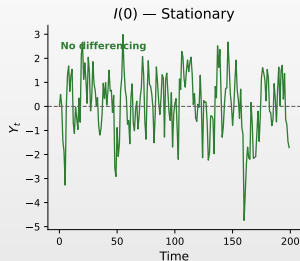
**Definiție:**  $Y_t \sim I(d)$  dacă  $\Delta^d Y_t$  este staționară dar  $\Delta^{d-1} Y_t$  nu este.

**Exemplu:** Dacă  $Y_t$  urmează  $\Delta^2 Y_t = \varepsilon_t$ , atunci:

- ☐  $\Delta Y_t = \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$  (încă are rădăcină unitară)
- ☐  $\Delta^2 Y_t = \varepsilon_t$  (zgomot alb, staționară)

**Lumea reală:** Indicii de prețuri pot fi  $I(2)$  când inflația însăși este nestaționară.

## Vizual: Procese Integrate



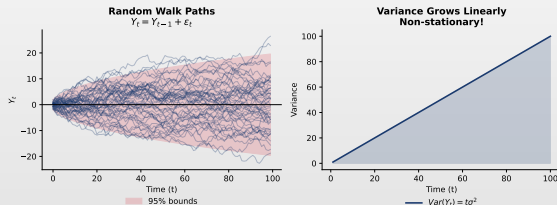
$I(0)$ : staționară.  $I(1)$ : o diferență necesară.  $I(2)$ : două diferențe necesare pentru a deveni staționară.

 TSA\_ch3\_def\_integrated

## Test 2: Proprietățile Mersului Aleatoriu

### Întrebare

Pentru un mers aleator  $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$  cu  $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$ , care este  $\text{Var}(Y_t)$ ?



 TSA\_ch3\_rw\_variance

## Test 3: Ipotezele Testului ADF

### Întrebare

În testul Augmented Dickey-Fuller, care este ipoteza nulă?

### Variante de răspuns

(A) Seria este staționară      indent (B) Seria are o rădăcină unitară      indent (C) Seria nu are autocorelație      indent (D) Seria este distribuită normal

## Test 3: Ipotezele Testului ADF

### Întrebare

În testul Augmented Dickey-Fuller, care este ipoteza nulă?

Răspuns: B – Seria are o rădăcină unitară

**Regresia ADF:**  $\Delta Y_t = \alpha + \gamma Y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \delta_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t$

**Ipoteze:**

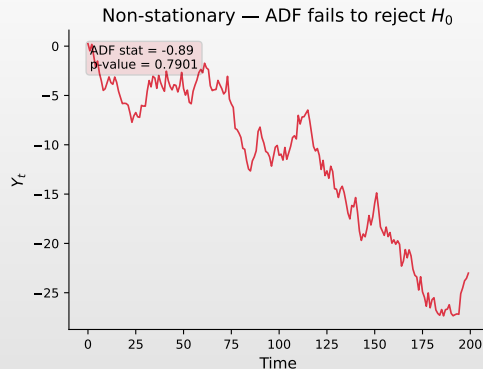
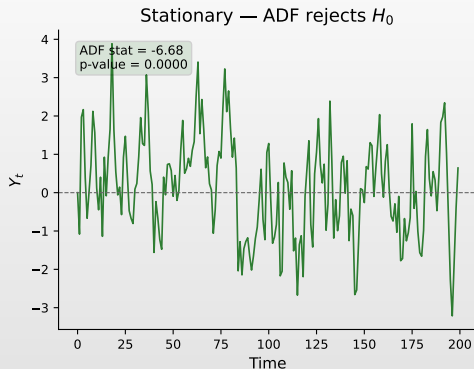
- ☐  $H_0 : \gamma = 0$  (rădăcină unitară, nestăționară)
- ☐  $H_1 : \gamma < 0$  (staționară)

**Decizie:** Respingem  $H_0$  dacă statistica  $t < \text{valoarea critică}$  (de ex.,  $-2.86$  la 5%)

**Notă:** Folosește distribuția specială Dickey-Fuller, nu  $t$  standard.



## Vizual: Testul ADF



Stânga: staționară – ADF respinge rădăcina unitară. Dreapta: nestăționară – ADF nu respinge.

[TSA\\_ch3\\_def\\_adf](#)



## Test 4: Notăția ARIMA

### Întrebare

Ce înseamnă  $ARIMA(2,1,1)$ ?

### Variante de răspuns

- (A)  $AR(2)$  pe date diferențiate cu erori  $MA(1)$
- (B)  $AR(1)$  cu 2 diferențe și  $MA(1)$
- (C)  $MA(2)$  cu 1 diferență și  $AR(1)$
- (D) 2 lag-uri, 1 trend, 1 componentă sezonieră

## Test 4: Notăția ARIMA

### Întrebare

Ce înseamnă ARIMA(2,1,1)?

Răspuns: A – AR(2) pe date diferențiate cu erori MA(1)

**ARIMA**( $p, d, q$ ):  $\phi(L)(1 - L)^d Y_t = \theta(L)\varepsilon_t$

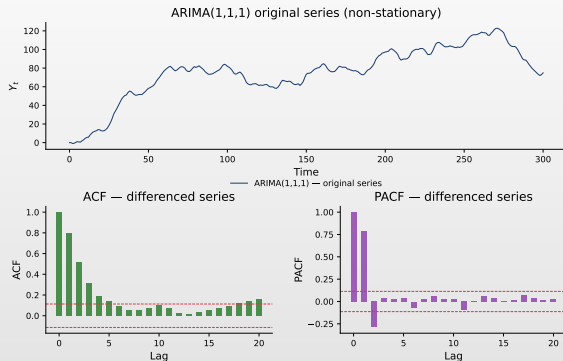
**ARIMA(2,1,1)** se expandează la:

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)(1 - L)Y_t = (1 + \theta_1 L)\varepsilon_t$$

Sau echivalent:  $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)\Delta Y_t = (1 + \theta_1 L)\varepsilon_t$

**Interpretare:** Mai întâi diferențiem seria, apoi ajustăm ARMA(2,1) pe  $\Delta Y_t$ .

## Vizual: Procesul ARIMA



Sus: seria ARIMA originală. Jos: după diferențiere, folosim ACF/PACF pentru a identifica ordinele AR și MA.

## Test 5: Operatorul de Diferență

### Întrebare

Care este  $(1 - L)^2 Y_t$  expandat?

### Variante de răspuns

- (A)  $Y_t - Y_{t-1}$       indent    (B)  $Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$       indent    (C)  $Y_t + 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$       indent  
(D)  $Y_t - Y_{t-2}$

## Test 5: Operatorul de Diferență

### Întrebare

Care este  $(1 - L)^2 Y_t$  expandat?

Răspuns:  $B - Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$

Expandare folosind teorema binomială:

$$(1 - L)^2 = 1 - 2L + L^2$$

Aplicare lui  $Y_t$ :

$$(1 - L)^2 Y_t = Y_t - 2L \cdot Y_t + L^2 \cdot Y_t = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$$

**Notă:** Aceasta este egală cu  $\Delta(\Delta Y_t) = \Delta Y_t - \Delta Y_{t-1}$ , "schimbarea schimbărilor".

## Test 6: KPSS vs ADF

### Întrebare

Cum diferă testul KPSS de testul ADF?

### Variante de răspuns

- (A) KPSS testează sezonality, ADF testează trenduri
- (B) KPSS are staționaritatea ca nulă, ADF are rădăcina unitară ca nulă
- (C) KPSS este mai puternic decât ADF
- (D) Nu există diferență

 TSA\_ch3\_adf\_kpss

## Test 6: KPSS vs ADF

### Întrebare

Cum diferă testul KPSS de testul ADF?

Răspuns: B – Ipoteze nule inversate

ADF Test	KPSS Test
$H_0$ : Unit Root	$H_0$ : Stationary
$H_1$ : Stationary	$H_1$ : Unit Root
Reject if $t\text{-stat} < \text{critical}$	Reject if $LM > \text{critical}$

**Decision Matrix**

ADF rejects	KPSS fails to reject	→ Stationary
ADF fails to reject	KPSS rejects	→ Unit Root
Both reject	or both fail	→ Inconclusive

**Strategie:** Folosiți ambele teste împreună pentru inferență robustă!



## Test 7: Supradiferențierea

### Întrebare

Dacă  $Y_t \sim I(1)$  și calculăm  $\Delta^2 Y_t$ , ce se întâmplă?

### Variante de răspuns

- (A) Obținem o serie staționară mai bună
- (B) Introducem autocorelație negativă artificială
- (C) Varianța scade
- (D) Nu se schimbă nimic

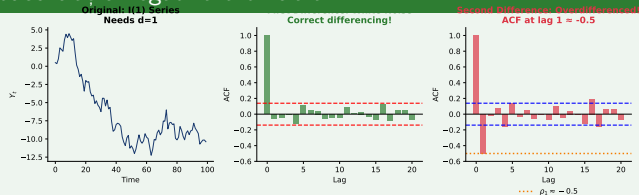
 TSA\_ch3\_overdifferencing

## Test 7: Supradiferențierea

### Întrebare

Dacă  $Y_t \sim I(1)$  și calculăm  $\Delta^2 Y_t$ , ce se întâmplă?

Răspuns: B – Autocorelație negativă artificială



Diagnostic: ACF la lag 1  $\approx -0.5$  semnalează supradiferențiere. Reduceți  $d$  cu 1!

## Test 8: Variația Prognozei

### Întrebare

Pentru un model  $ARIMA(0,1,0)$  (mers aleator), cum se comportă variația prognozei când orizontul  $h$  crește?

### Variante de răspuns

- (A) Rămâne constantă      indent (B) Scade la zero      indent (C) Crește liniar cu  $h$       indent  
(D) Convergă la o limită finită

## Test 8: Variația Prognozei

### Întrebare

Pentru un model ARIMA(0,1,0) (mers aleator), cum se comportă variația prognozei când orizontul  $h$  crește?

Răspuns: C – Crește liniar cu  $h$

**Prognoza mersului aleatoriu:**  $\hat{Y}_{T+h|T} = Y_T$  (cea mai bună prognoză este valoarea curentă)

**Eroarea de prognoză:**  $Y_{T+h} - \hat{Y}_{T+h|T} = \sum_{i=1}^h \varepsilon_{T+i}$

**Varianță:**

$$\text{Var}(Y_{T+h} - \hat{Y}_{T+h|T}) = h\sigma^2$$

**IC 95%:**  $Y_T \pm 1.96\sqrt{h}\sigma$  (se lărgeste cu  $\sqrt{h}$ )

## Test 9: Puterea Testului de Rădăcină Unitară

### Întrebare

Testul ADF are putere scăzută când:

### Variante de răspuns

- (A) Dimensiunea eşantionului este foarte mare
- (B) Rădăcina adevărată este aproape dar nu egală cu 1
- (C) Seria nu are trend
- (D) Seria este clar staţionară

## Test 9: Puterea Testului de Rădăcină Unitară

### Întrebare

Testul ADF are putere scăzută când:

Răspuns: B – Rădăcina aproape dar nu egală cu 1

**Exemplu:** AR(1) cu  $\phi = 0.95$  vs mers aleator ( $\phi = 1$ )

**Problemă:** Ambele au modele ACF similare (descreștere lentă), dar una este staționară!

**Putere scăzută înseamnă:** Probabilitate mare de eroare de tip II (eșec în respingerea lui  $H_0$  fals)

**Soluții:**

- ☐ Dimensiuni mai mari ale eșantionului
- ☐ Testul Phillips-Perron (robust la heteroscedasticitate)
- ☐ Teste de rădăcină unitară pe paneluri (serii multiple)

## Test 10: Selecția modelului ARIMA

### Întrebare

După o diferențiere, ACF arată un vârf doar la lag 1, și PACF descrește. Modelul potrivit este:

### Variante de răspuns

(A) ARIMA(1,1,0)      indent (B) ARIMA(0,1,1)      indent (C) ARIMA(1,1,1)      indent (D) ARIMA(0,2,1)

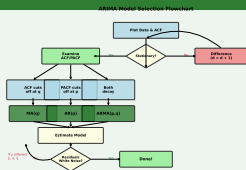
 TSA\_ch3\_arima\_flowchart

## Test 10: Selecția modelului ARIMA

### Întrebare

După o diferențiere, ACF arată un vârf doar la lag 1, și PACF descrește. Modelul potrivit este:

Răspuns: B – ARIMA(0,1,1)



**Model:** ACF se anulează la lag 1, PACF descrește  $\Rightarrow$  MA(1) pentru seria diferențiată. Model complet: ARIMA(0,1,1) = IMA(1,1)



## Test 11: Staționaritate în Trend vs Staționaritate în Diferențe

### Întrebare

Un proces staționar în trend devine staționar prin:

### Variante de răspuns

- (A) Luarea diferențelor de ordinul întâi
- (B) Eliminarea trendului determinist prin regresie
- (C) Luarea diferențelor de ordinul doi
- (D) Aplicarea ajustării sezoniere

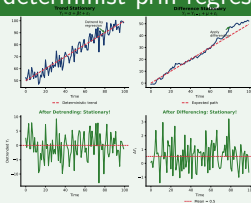
 TSA\_ch3\_trend\_vs\_diff

## Test 11: Staționaritate în Trend vs Staționaritate în Diferențe

### Întrebare

Un proces staționar în trend devine staționar prin:

Răspuns: B – Eliminarea trendului determinist prin regresie



**Staționar în trend:** Eliminarea trendului prin regresie (șocurile sunt temporare). **Staționar în diferențe:** Diferențiere (șocurile sunt permanente). Tratatamentul greșit afectează modelul!

## Test 12: Invertibilitatea ARIMA

### Întrebare

ARIMA(0,1,1) cu  $\theta_1 = 1.2$  este:

### Variante de răspuns

- (A) Staționară și invertibilă      indent (B) Nestaționară dar invertibilă      indent (C) Nestaționară și neinvertibilă      indent (D) Staționară dar neinvertibilă

## Test 12: Invertibilitatea ARIMA

### Întrebare

ARIMA(0,1,1) cu  $\theta_1 = 1.2$  este:

Răspuns: C – Nestaționară și neinvertibilă

**Verificare staționaritate:**  $d = 1$  înseamnă o rădăcină unitară  $\Rightarrow$  **Nestaționară**

**Verificare invertibilitate:** Polinomul MA este  $\theta(z) = 1 + 1.2z$

- ▣ Rădăcină:  $z = -1/1.2 = -0.833$  (în interiorul cercului unitate)
- ▣ Invertibilitatea necesită rădăcina în afara cercului unitate
- ▣  $|\theta_1| = 1.2 > 1 \Rightarrow$  **Neinvertibilă**

**Corecție:** Rescrieți cu  $\theta^* = 1/1.2 = 0.833$  și ajustați varianța.

## Test 13: Regresia falsă

### Întrebare

Regresând un mers aleator pe un alt mers aleator independent, de obicei se obține:

### Variante de răspuns

- (A) Nicio relație semnificativă
- (B)  $R^2$  ridicat și statistici t semnificative (fals)
- (C) Corelație negativă
- (D) Multicolinearitate perfectă

## Test 13: Regresia falsă

### Întrebare

Regresând un mers aleator pe un alt mers aleator independent, de obicei se obține:

Răspuns: B –  $R^2$  ridicat și statistici  $t$  semnificative (fals)

**Granger & Newbold (1974):** Fenomenul regresiei false

**Simptome:**

- ☐  $R^2$  ridicat (adesea  $> 0.9$ ) între serii neînrudite
- ☐ Statistici  $t$  semnificative
- ☐ Statistică Durbin-Watson foarte scăzută ( $\ll 2$ )
- ☐ Reziduuri nestaționare

**Soluții:** (1) Diferențiați ambele serii, sau (2) Testați pentru cointegrare

## Test 14: Prognoza pe Termen Lung

### Întrebare

Prognoza pe termen lung din ARIMA(1,1,0) cu  $\phi_1 = 0.7$  convergă la:

### Variante de răspuns

- (A) Zero
- (B) Media necondiționată
- (C) O extrapolare liniară a trendului
- (D) Ultima valoare observată

## Test 14: Prognoza pe Termen Lung

### Întrebare

Prognoza pe termen lung din ARIMA(1,1,0) cu  $\phi_1 = 0.7$  convergă la:

Răspuns: C – O extrapolare liniară a trendului

**Model:**  $(1 - \phi_1 L)(1 - L)Y_t = c + \varepsilon_t$

**Prognoza pe termen lung:** Pentru modelele I(1) cu derivă c:

$$\hat{Y}_{T+h} \approx Y_T + h \cdot \frac{c}{1 - \phi_1}$$

**Diferențe cheie:**

- ARMA staționară: Prognozele  $\rightarrow$  media necondiționată
- I(1) fără derivă: Prognozele  $\rightarrow$  ultima valoare (plată)
- I(1) cu derivă: Prognozele  $\rightarrow$  extrapolare liniară



## Întrebări Adevărat/Fals

### Întrebare

Determinați dacă fiecare afirmație este Adevărată sau Falsă:

1. Un proces  $I(2)$  necesită două diferențe pentru a deveni staționar.
2. Testul ADF include întotdeauna un termen constant.
3.  $ARIMA(0,1,0)$  este un alt nume pentru un mers aleator.
4. Diferențierea unei serii staționare o face “mai staționară.”
5. Testul KPSS are staționaritatea ca ipoteză nulă.
6. Modelele ARIMA pot captura doar dinamici liniare.

*Răspunsul pe slide-ul următor...*

## Adevărat/Fals: Soluții

## Răspunsuri

1.  $I(2)$  necesită două diferențe. **ADEVĂRAT**  $d$  diferențe pt.  $I(d)$ .  $I(2)$  = două rădăcini unitare.
2. ADF include întotdeauna un termen constant. **FALS** Alegeți: fără constantă, doar constantă, sau constantă + trend.
3.  $ARIMA(0,1,0)$  = mers aleator. **ADEVĂRAT**  $(1 - L)Y_t = \varepsilon_t \Rightarrow Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$ .
4. Diferențierea unei serii staționare  $\rightarrow$  "mai staționară." **FALS** Supradiferențierea creează MA neinvertibil.
5. KPSS:  $H_0$  = staționară. **ADEVĂRAT** Opus testului ADF ( $H_0$  = rădăcină unitară).
6.  $ARIMA$  captează doar modele liniare. **ADEVĂRAT** Liniar în parametri. Neliniare  $\rightarrow$  GARCH, rețele neuronale.

## Problema 1: Testarea Rădăcinii Unitare

### Exercițiu

Aveți date trimestriale de PIB pentru 80 de trimestre. Testul ADF (cu constantă și trend) dă o statistică de test de  $-2.85$ . Valoarea critică la 5% este  $-3.41$ .

1. Care este concluzia dumneavoastră despre staționaritate?
2. Ce ați face în continuare?

## Problema 1: Testarea Rădăcinii Unitare

### Exercițiu

Aveți date trimestriale de PIB pentru 80 de trimestre. Testul ADF (cu constantă și trend) dă o statistică de test de  $-2.85$ . Valoarea critică la 5% este  $-3.41$ .

1. Care este concluzia dumneavoastră despre staționaritate?
2. Ce ați face în continuare?

### Soluție

1. Deoarece  $-2.85 > -3.41$ , **nu respingem**  $H_0$ . Datele par să aibă o rădăcină unitară (nestaționare).
2. Luați prima diferență  $\Delta Y_t$  și repetați testul ADF pe seria diferențiată pentru a confirma că este acum staționară.

## Problema 2: Identificarea modelului

### Exercițiu

După diferențierea o dată a unei serii de timp, ACF arată:

- ▣ Vârf semnificativ la lag 1 ( $\rho_1 = 0.4$ )
- ▣ Toate celelalte lag-uri nesemnificative

PACF arată descreștere graduală.

Ce model ARIMA este sugerat?

## Problema 2: Identificarea modelului

### Exercițiu

După diferențierea o dată a unei serii de timp, ACF arată:

- ▣ Vârf semnificativ la lag 1 ( $\rho_1 = 0.4$ )
- ▣ Toate celelalte lag-uri ne semnificative

PACF arată descreștere graduală.

Ce model ARIMA este sugerat?

### Soluție

- ▣ ACF se anulează după lag 1  $\Rightarrow$  componentă MA(1)
- ▣ PACF descrește  $\Rightarrow$  Confirmă structura MA
- ▣ Deoarece am diferențiat o dată:  $d = 1$

**Model sugerat: ARIMA(0,1,1) sau IMA(1,1)**

## Problema 3: Ecuația ARIMA

### Exercițiu

Scrieți ecuația completă pentru ARIMA(1,1,1):

$$(1 - \phi_1 L)(1 - L)Y_t = c + (1 + \theta_1 L)\varepsilon_t$$

Expandați complet în termenii  $Y_t$ ,  $Y_{t-1}$ ,  $Y_{t-2}$ , etc.

### Problema 3: Ecuația ARIMA

#### Exercițiu

Scrieți ecuația completă pentru ARIMA(1,1,1):

$$(1 - \phi_1 L)(1 - L)Y_t = c + (1 + \theta_1 L)\varepsilon_t$$

Expandați complet în termenii  $Y_t$ ,  $Y_{t-1}$ ,  $Y_{t-2}$ , etc.

#### Soluție

Expandând  $(1 - \phi_1 L)(1 - L) = 1 - L - \phi_1 L + \phi_1 L^2 = 1 - (1 + \phi_1)L + \phi_1 L^2$ :

$$Y_t - (1 + \phi_1)Y_{t-1} + \phi_1 Y_{t-2} = c + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Sau echivalent:

$$Y_t = c + (1 + \phi_1)Y_{t-1} - \phi_1 Y_{t-2} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$



## Problema 4: Calculul Prognozei

### Exercițiu

Dat ARIMA(0,1,1):  $\Delta Y_t = \varepsilon_t + 0.3\varepsilon_{t-1}$

La momentul  $T$ :  $Y_T = 100$ ,  $\hat{\varepsilon}_T = 2$ ,  $\sigma^2 = 4$

Calculați:

1.  $\hat{Y}_{T+1|T}$  (prognoza la un pas)
2.  $\hat{Y}_{T+2|T}$  (prognoza la doi pași)

## Problema 4: Calculul Prognozei

### Exercițiu

Dat ARIMA(0,1,1):  $\Delta Y_t = \varepsilon_t + 0.3\varepsilon_{t-1}$

La momentul  $T$ :  $Y_T = 100$ ,  $\hat{\varepsilon}_T = 2$ ,  $\sigma^2 = 4$

Calculați:

1.  $\hat{Y}_{T+1|T}$  (prognoza la un pas)
2.  $\hat{Y}_{T+2|T}$  (prognoza la doi pași)

### Soluție

1.  $\hat{Y}_{T+1|T} = Y_T + 0.3\hat{\varepsilon}_T = 100 + 0.3(2) = 100.6$
2.  $\hat{Y}_{T+2|T} = \hat{Y}_{T+1|T} + 0.3 \cdot 0 = 100.6 + 0 = 100.6$   
(Șocurile viitoare  $\varepsilon_{T+1}, \varepsilon_{T+2}$  se presupun egale cu 0)

## Problema 5: Intervale de Încredere

### Exercițiu

Continuând de la Problema 4, calculați intervalele de încredere de 95% pentru  $\hat{Y}_{T+1|T}$  și  $\hat{Y}_{T+2|T}$ .  
Reamintim:  $\sigma^2 = 4$ ,  $\theta_1 = 0.3$

## Problema 5: Intervale de Încredere

### Exercițiu

Continuând de la Problema 4, calculați intervalele de încredere de 95% pentru  $\hat{Y}_{T+1|T}$  și  $\hat{Y}_{T+2|T}$ .  
Reamintim:  $\sigma^2 = 4$ ,  $\theta_1 = 0.3$

### Soluție

Pentru IMA(1,1), ponderile MA( $\infty$ ) sunt  $\psi_0 = 1$ ,  $\psi_j = 1 + \theta_1$  pentru  $j \geq 1$ .

**1 pas:**  $\text{Var}(e_{T+1}) = \sigma^2 \psi_0^2 = 4$ , deci  $SE = 2$

$$100.6 \pm 1.96(2) = [96.68, 104.52]$$

**2 pași:**  $\text{Var}(e_{T+2}) = \sigma^2(\psi_0^2 + \psi_1^2) = 4(1 + 1.3^2) = 10.76$ ,  $SE = 3.28$

$$100.6 \pm 1.96(3.28) = [94.17, 107.03]$$

## Exemplu: Testarea Rădăcinii Unitare în Prețurile Acțiunilor

### Scenariu

Aveți prețuri de închidere zilnice pentru o acțiune pe parcursul a 500 de zile. Vreți să determinați dacă prețurile urmează un mers aleator.

### Abordare Pas cu Pas

1. **Inspecție vizuală:** Reprezentați grafic prețurile – probabil arată trend
2. **Testul ADF pe prețuri:** Așteptați să nu respingeți  $H_0$  (rădăcină unitară)
3. **Luați randamentele logaritmice:**  $r_t = \ln(P_t/P_{t-1}) = \Delta \ln(P_t)$
4. **Testul ADF pe randamente:** Ar trebui să respingeți  $H_0$  (staționară)
5. **Concluzie:** Log prețurile sunt  $I(1)$ , randamentele sunt  $I(0)$

## Exemplu: Box-Jenkins pentru Date de Inflație

### Scenariu

Rate lunare ale inflației pentru 10 ani. Construiți un model ARIMA.

### Flux de lucru

1. **Reprezentare grafică și test:** ADF sugerează limită – încercați atât  $d = 0$  cât și  $d = 1$
2. **Dacă  $d = 0$ :** Ajustați modele ARMA, comparați AIC
3. **Dacă  $d = 1$ :** Examinați ACF/PACF ale lui  $\Delta Y_t$ 
  - ▶ ACF: vârf la lag 1, apoi se anulează
  - ▶ PACF: descrește
  - ▶  $\Rightarrow$  Încercați ARIMA(0,1,1)
4. **Estimare:** Ajustați ARIMA(0,1,1), verificați coeficienții
5. **Diagnostic:** Ljung-Box pe reziduuri (vrem  $p > 0.05$ )
6. **Comparare:** AIC al ARIMA(0,1,1) vs ARMA(1,1) pe seria originală

## Exemplu: interpretarea Rezultatelor Python

### Rezultate ARIMA din statsmodels

```

=====
                    ARIMA Model Results
=====
Dep. Variable:          D.y    No. Observations:   99
Model:                ARIMA(1,1,1)    AIC             285.32
                                   BIC             295.63
=====

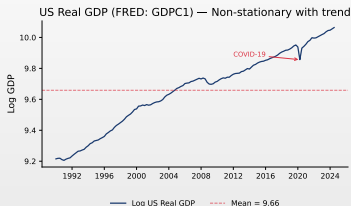
```

	coef	std err	z	P> z
const	0.0521	0.048	1.085	0.278
ar.L1	0.4532	0.102	4.443	0.000
ma.L1	-0.2891	0.118	-2.450	0.014
sigma2	1.2340	0.176	7.011	0.000

### Interpretare

- AR (0.45) semnificativ, MA (-0.29) semnificativ
- Constanta (0.052) ne semnificativă – se poate seta  $c = 0$
- Verificare:  $|\phi_1| < 1$  (staționar),  $|\theta_1| < 1$  (invertibil) – OK!

## Studiu de Caz: PIB Real SUA (1990–2024)



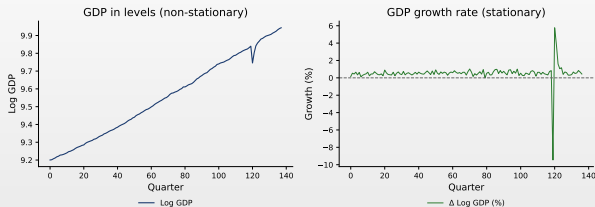
### Observații

PIB Real SUA în miliarde \$ 2017 (trimestrial). **Trend ascendent** clar. Scăderi în recesiuni (2008–09, 2020).  
Nestaționară: necesită diferențiere.

 TSA\_ch3\_gdp\_levels



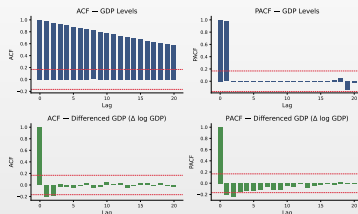
## Staționaritate Prin Diferențiere



### Observații

- **Stânga:** PIB (serie originală) — trend ascendent clar (nestaționară)
- **Dreapta:** Rata de creștere a PIB =  $\Delta \log(Y_t) \times 100$  — staționară, fluctuează în jurul mediei ( $\approx 0.6\%/trim.$ )

## ACF/PACF: Serie originală vs Diferențiată



## Observații

- ▣ **Rândul de sus:** ACF/PACF ale seriei originale PIB — descreștere lentă  $\Rightarrow$  nestaționaritate
- ▣ **Rândul de jos:** ACF/PACF ale creșterii PIB — valori în limitele de încredere
- ▣ Un model ARIMA de ordin mic este potrivit

## Rezultate Estimare ARIMA: Creșterea PIB SUA

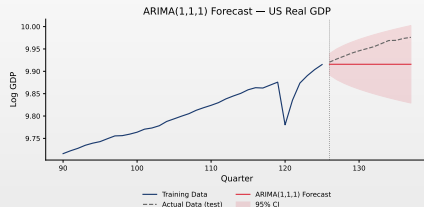
Model: ARIMA(1,1,1) pe log(PIB)

Parametru	Estimat	Eroare Std.	z-stat	valoare-p
$\phi_1$ (AR.L1)	0.312	0.185	1.69	0.091
$\theta_1$ (MA.L1)	-0.087	0.203	-0.43	0.668
$\sigma^2$	0.00012	—	—	—

### Interpretare

- ▣ ARIMA de ordin mic captează rezonabil dinamica PIB
- ▣ Coeficientul AR(1) pozitiv – creșterea PIB arată persistență
- ▣ Alternativă: mersul aleatoriu simplu (ARIMA(0,1,0)) adesea competitiv

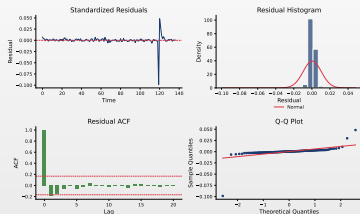
## Proгноză: ARIMA vs Real



### Observații

- ▣ **Albastru:** date istorice de antrenare; **Verde:** date reale de test
- ▣ **Roșu:** prognoze ARIMA cu IC 95% — IC se largesc cu orizontul de prognoză

## Diagnostic Model: Analiza Reziduurilor



### Observații

- Reziduurile fără tipare sistematică în timp; distribuție aproximativ normală (histogramă, Q-Q)
- ACF reziduuri în limite — fără autocorelare; modelul captează adecvat procesul generator de date

## Discuție: Trenduri Deterministe vs Stochastice

### Întrebare Cheie

De ce este important să distingem între trendurile deterministe și stochastice?

### Puncte de Discuție

- **Consecințele tratamentului greșit:**
  - ▶ Eliminarea trendului prin regresie când seria are rădăcină unitară  $\Rightarrow$  staționaritate falsă
  - ▶ Diferențierea unei serii staționare în trend  $\Rightarrow$  supradiferențiere
- **Interpretare economică:**
  - ▶ Trend determinist: șocurile sunt temporare
  - ▶ Trend stohastic: șocurile au efecte permanente
- **Implicații de politică:**
  - ▶ O recesiune reduce permanent PIB-ul, sau economia revine la trend?

## Discuție: Criterii de Selecție a Modelului

### Întrebare Cheie

Când ar trebui să folosiți AIC vs BIC pentru selecția modelului ARIMA?

### Considerații

- ▣ **AIC:** Minimizează eroarea de predicție, poate supraajusta
  - ▶ Mai bun pentru prognoză
  - ▶ Tinde să selecteze modele mai mari
- ▣ **BIC:** Selecție consistentă a modelului, mai simplu
  - ▶ Mai bun pentru identificarea modelului “adevărat”
  - ▶ Penalizează complexitatea mai puternic
- ▣ **Sfat practic:** Raportați ambele, preferați BIC dacă diferă substanțial

## Discuție: Limitările ARIMA

### Întrebare Cheie

Care sunt principalele limitări ale modelelor ARIMA?

### Puncte de Discuție

- ▣ **Liniaritate:** Nu poate captura dinamici neliniare
- ▣ **Varianță constantă:** Presupune homoscedasticitate (fără GARCH)
- ▣ **Fără rupturi structurale:** Parametrii presupuși constanți
- ▣ **Univariat:** Ignoră relațiile cu alte variabile
- ▣ **Simetric:** Tratează șocurile pozitive și negative la fel
- ▣ **Proгноze pe termen lung:** Incertitudinea crește rapid

### Extensii

Aceste limitări motivează GARCH (volatilitate), VAR (multivariat), modele cu schimbări de regim, etc.



## Exercițiu AI 1: Critica unei Analize AI

### Scenariu

Ați cerut unui AI: „Aplică cel mai bun model ARIMA pe datele PIB-ului României.” A returnat:

- ▣ A ajustat ARIMA(3,2,3) cu  $AIC = 1542.7$
- ▣ Nu a efectuat testul ADF
- ▣ Ljung-Box p-value = 0.02 (raportat ca „acceptabil”)
- ▣ Prognoză pe 30 de ani cu intervale de încredere înguste

### Critica voastră:

1. Este ARIMA(3,2,3) supra-parametrizat? Ce ar sugera BIC?
2. De ce Ljung-Box  $p = 0.02$  **nu** este acceptabil la pragul de 5%?
3. Sunt prognozele pe 30 de ani fiabile pentru modele ARIMA? De ce?
4. Ce pași din metodologia Box-Jenkins au fost omis?

## Exercițiu AI 2: Rafinarea Prompturilor pentru ARIMA

### Sarcină

Îmbunătățiți iterativ prompturile pentru ajustarea unui model ARIMA pe date PIB.

**Runda 1** (vag): „Ajustează un model de serie de timp pe PIB”

- Ce a produs AI-ul? Ce lipsește?

**Runda 2** (mai bun): „Testează staționaritatea cu ADF și KPSS, diferențiază dacă e necesar, examinează ACF/PACF, ajustează ARIMA( $p,d,q$ ) folosind BIC, verifică reziduurile cu Ljung-Box”

- A urmat AI-ul metodologia Box-Jenkins?

**Runda 3** (expert): „Urmează Box-Jenkins: (1) grafic & test staționaritate ADF+KPSS, (2) diferențiere, (3) identificare ordine din ACF/PACF, (4) estimare ARIMA(1,1,1), (5) Ljung-Box pe reziduuri, (6) prognoză 8 trimestre cu IC 95%”

- Comparați rezultatele din cele trei runde

## Exercițiu AI 3: Competiție de Selecție a Modelului

### Sarcină

Descărcați date trimestriale PIB real SUA de pe FRED (seria GDPC1).

#### Abordarea voastră (manuală):

- Test ADF + KPSS → diferențiere
- ACF/PACF → modele candidat
- AIC/BIC: ARIMA(0,1,0), (1,1,0), (0,1,1), (1,1,1)
- Diagnostice reziduuri + prognoză rolling 1-pas

#### Abordarea AI:

- Cereți AI-ului: „găsește cel mai bun ARIMA și fă prognoze"

#### Comparați:

- Ce model a selectat fiecare? Comparați RMSE
- Prognoze rolling vs multi-pas?
- **Predați:** reflexie 1 pagină despre AI

## Rezumat Formule cheie

Concept	Formula
Mers aleatoriu	$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$
Varianța mersului aleatoriu	$\text{Var}(Y_t) = t\sigma^2$
ARIMA( $p, d, q$ )	$\phi(L)(1-L)^d Y_t = \theta(L)\varepsilon_t$
Prima diferență	$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (1-L)Y_t$
A doua diferență	$\Delta^2 Y_t = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$
Regresia ADF	$\Delta Y_t = \alpha + \gamma Y_{t-1} + \sum \delta_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t$
Ipoteza nulă ADF	$H_0 : \gamma = 0$ (rădăcină unitară)
Proгноză mers aleator	$\hat{Y}_{T+h T} = Y_T$
IC прогноză mers aleator	$Y_T \pm z_{\alpha/2} \sqrt{h} \sigma$
AIC	$-2 \ln(\hat{L}) + 2k$
BIC	$-2 \ln(\hat{L}) + k \ln(n)$

Notății:  $\hat{L}$  = maximul funcției de verosimilitate,  $k$  = nr. parametri,  $n$  = dimensiunea eșantionului,  $\sigma^2$  = varianța zgomotului alb

Întrebări?

Succes la exerciții!

**Următorul Seminar:** SARIMA și Modele Sezoniere

## Bibliografie I

### Manuale fundamentale

- ▣ Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*, 3rd ed., OTexts.
- ▣ Shumway, R.H., & Stoffer, D.S. (2017). *Time Series Analysis and Its Applications*, 4th ed., Springer.
- ▣ Brockwell, P.J., & Davis, R.A. (2016). *Introduction to Time Series and Forecasting*, 3rd ed., Springer.

### Serii de timp financiare

- ▣ Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*, 3rd ed., Wiley.
- ▣ Franke, J., Härdle, W.K., & Hafner, C.M. (2019). *Statistics of Financial Markets*, 4th ed., Springer.

## Bibliografie II

### Abordări moderne și Machine Learning

- ▣ Nielsen, A. (2019). *Practical Time Series Analysis*, O'Reilly Media.
- ▣ Petropoulos, F., et al. (2022). *Forecasting: Theory and Practice*, International Journal of Forecasting.
- ▣ Makridakis, S., Spiliotis, E., & Assimakopoulos, V. (2020). The M4 Competition, International Journal of Forecasting.

### Resurse online și cod

- ▣ **Quantlet**: <https://quantlet.com> — Platformă de cod pentru statistică
- ▣ **Quantinar**: <https://quantinar.com> — Platformă pentru metode cantitative
- ▣ **GitHub TSA**: [https://github.com/QuantLet/TSA/tree/main/TSA\\_ch3](https://github.com/QuantLet/TSA/tree/main/TSA_ch3) — Cod Python pentru acest capitol