



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 9: Prophet și TBATS

Modele Moderne pentru Sezonalități Multiple



Cuprins

1 Sezonalități Multiple

2 Modelul TBATS

3 Facebook Prophet

4 Comparație și Ghid de Selecție

5 Studiu de Caz

6 Sumar

Problema: Tipare Sezoniere Complexe

Exemple din Lumea Reală

- **Cerere de electricitate pe oră:** Tipare zilnice + săptămânaile + anuale
- **Trafic web:** Zilnic + săptămânal + efecte de sărbători
- **Vânzări retail:** Săptămânal + lunar + anual + sărbători
- **Volum call center:** Pe oră + zilnic + săptămânal

Limitarea SARIMA

SARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s standard gestionează doar o singură perioadă sezonieră s .

Pentru date orare cu tipare zilnice și săptămânaile, avem nevoie de $s_1 = 24$ și $s_2 = 168$.

Soluții pentru Sezonalități Multiple

Abordări Tradiționale

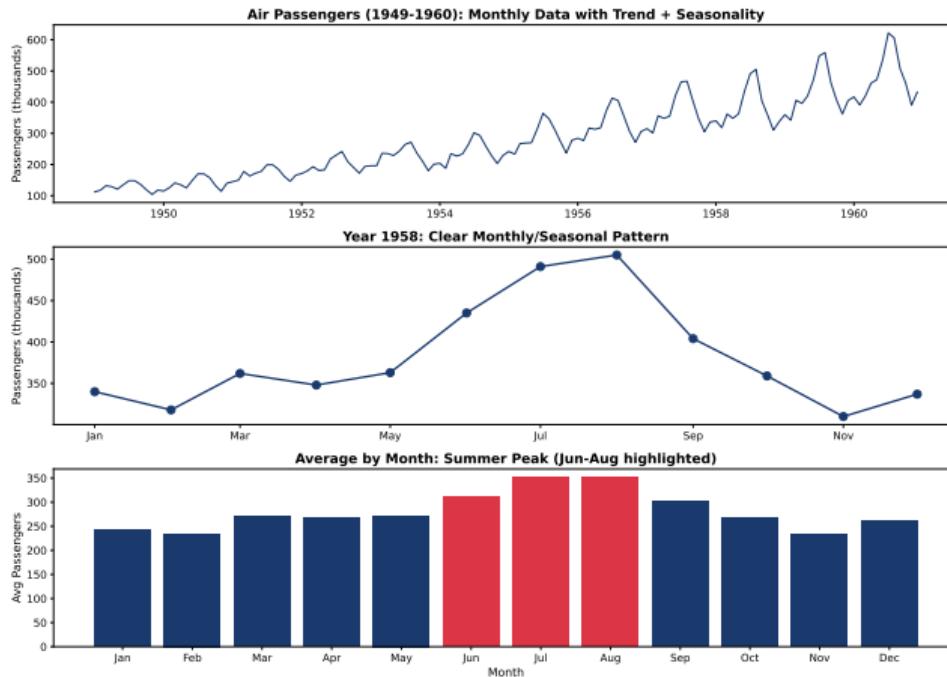
- **Termeni Fourier:** Adăugare regresori sin/cos
- **Variabile dummy:** Multi parametri
- **Modele nested:** Specificare complexă

Abordări Moderne

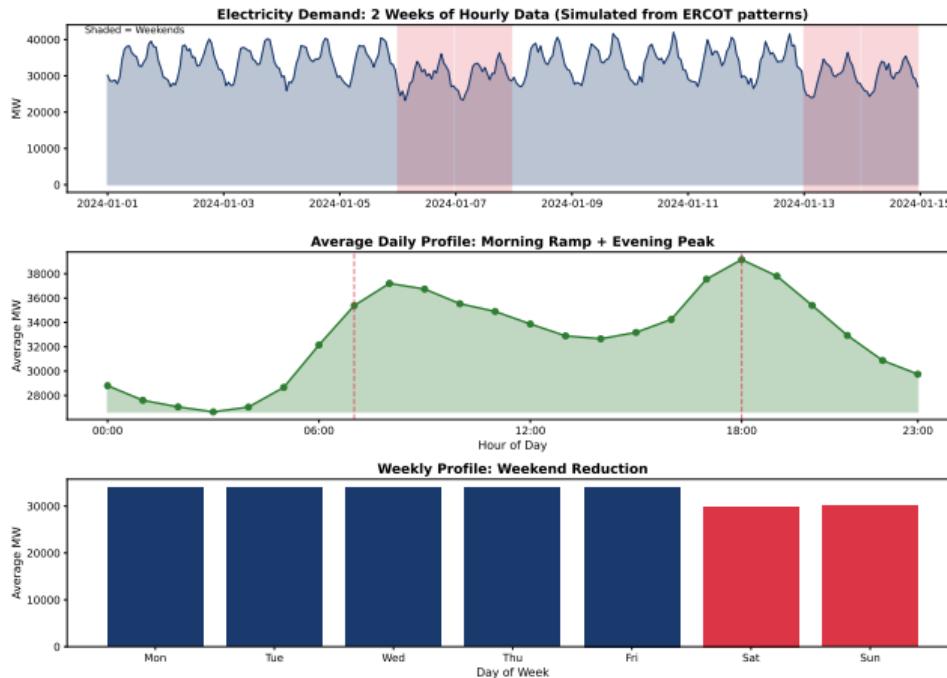
- **TBATS:** Automat, gestionează multe perioade
- **Prophet:** Flexibil, interpretabil
- **Metode neurale:** Deep learning

| Metodă | Nr. Max Sezonalități | Interpretabil |
|-----------------|----------------------|---------------|
| SARIMA | 1 | Da |
| Fourier + ARIMA | Multiple | Moderat |
| TBATS | Multiple | Moderat |
| Prophet | Multiple | Da |

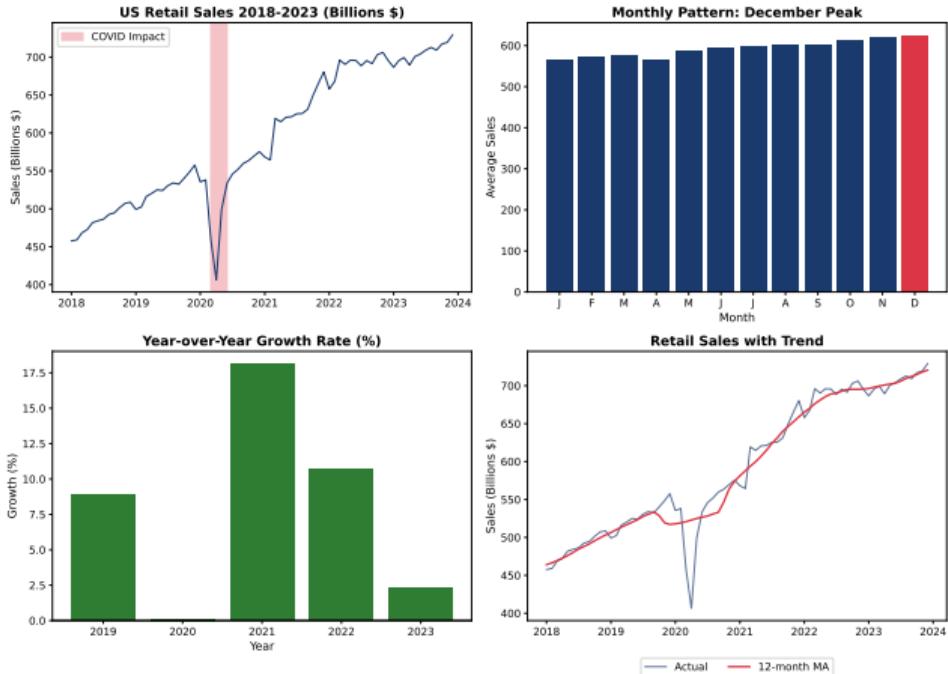
Exemplu: Date Orare cu Sezonalități Multiple



Exemplu Real: Cerere de Electricitate



Exemplu Real: Vânzări Retail cu Sărbători



Componentele TBATS

- T** Sezonalitate **Trigonometrică** folosind termeni Fourier
- B** Transformare **Box-Cox** pentru stabilizarea varianței
- A** Erori **ARMA** pentru autocorelația reziduală
- T** Componentă de **Trend** (posibil amortizat)
- S** Componente **Sezoniere** (multiple permise)

Inovația Cheie

TBATS folosește **reprezentare trigonometrică** pentru sezonalitate:

$$s_t^{(i)} = \sum_{j=1}^{k_i} \left[s_j^{(i)} \cos\left(\frac{2\pi j t}{m_i}\right) + s_j^{*(i)} \sin\left(\frac{2\pi j t}{m_i}\right) \right]$$

unde m_i este perioada sezonieră i și k_i este numărul de armonici.

Specificația Completă a Modelului

$$y_t^{(\omega)} = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \sum_{i=1}^T s_{t-m_i}^{(i)} + d_t \quad (1)$$

$$\ell_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha d_t \quad (2)$$

$$b_t = \phi b_{t-1} + \beta d_t \quad (3)$$

$$d_t = \sum_{i=1}^p \varphi_i d_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \quad (4)$$

Unde:

- $y_t^{(\omega)}$ este seria transformată Box-Cox (dacă $\omega \neq 1$)
- ℓ_t este nivelul local, b_t este trendul cu amortizare ϕ
- $s_t^{(i)}$ sunt T componente sezoniere cu perioade m_1, \dots, m_T
- d_t este procesul de eroare ARMA(p, q)

De Ce Termeni Fourier/Trigonometrici?

- ① **Parcimonios:** Mai puțini parametri decât variabilele dummy
- ② **Neted:** Captează natural tiparele sezoniere netede
- ③ **Flexibil:** Numărul de armonici k controlează complexitatea
- ④ **Perioade non-întregi:** Poate gestiona $s = 365.25$ pentru date zilnice

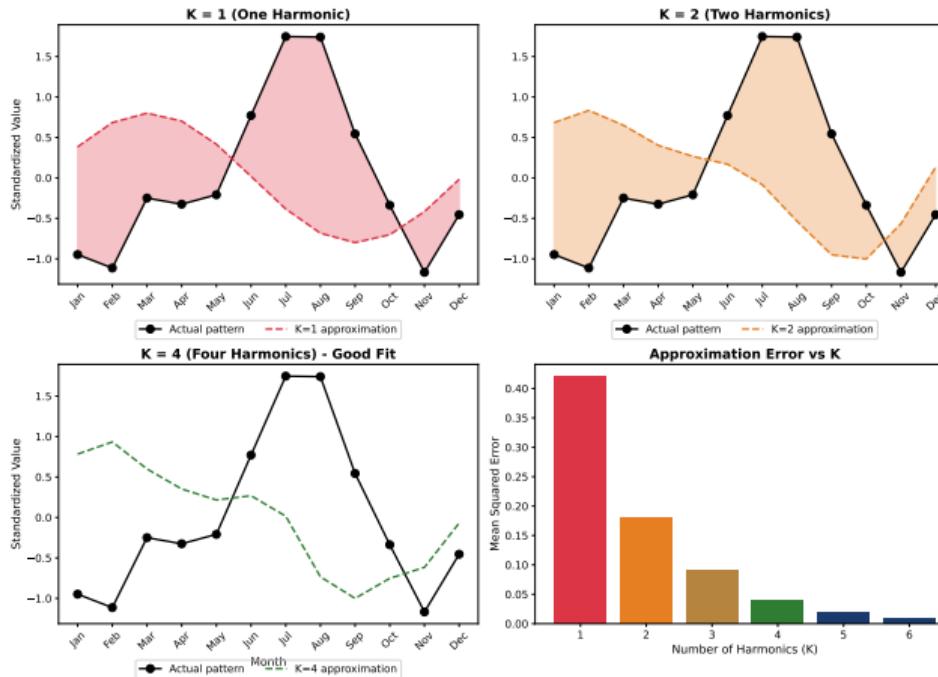
k mic (puține armonici)

- Tipar neted
- Mai puțini parametri
- Poate rata vârfuri abrupte

k mare (multe armonici)

- Poate capta orice tipar
- Mai mulți parametri
- Risc de supraajustare

Aproximarea Fourier a Sezonalității



Implementare Python

Pachetul tbats oferă selecție automată a modelului:

- Selectează automat parametrul Box-Cox ω
- Alege numărul de armonici k_i pentru fiecare perioadă sezonieră
- Selectează ordinele ARMA (p, q)
- Testează trend amortizat vs neamortizat

Exemplu de Cod

```
from tbats import TBATS
estimator = TBATS(seasonal_periods=[7, 365.25])
model = estimator.fit(y)
forecast = model.forecast(steps=30)
```

Notă: BATS este versiunea mai simplă fără termeni trigonometrici (folosește stări sezoniere tradiționale).

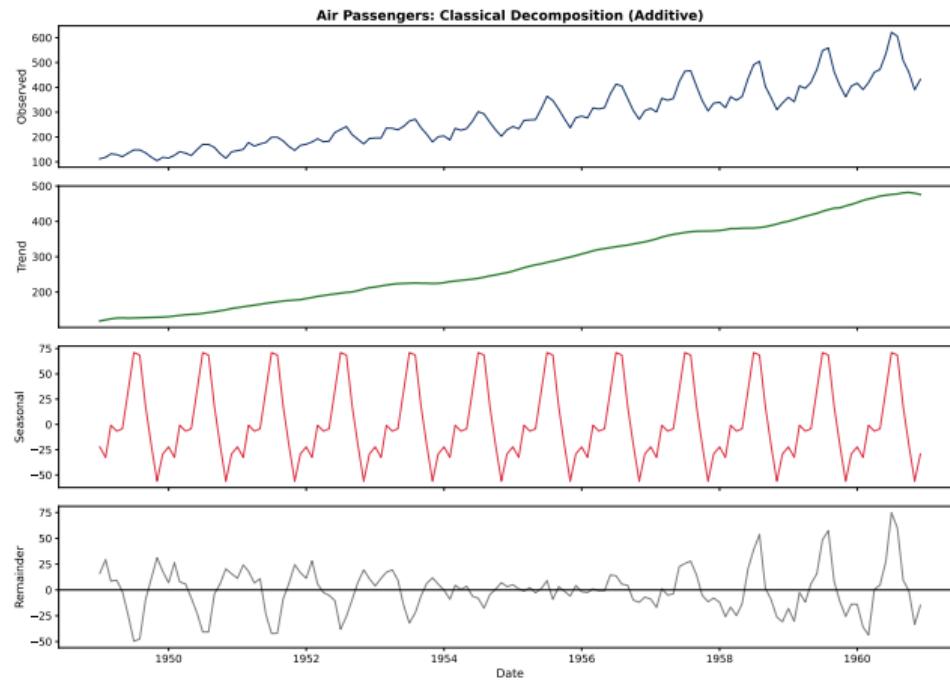
Avantaje

- Gestionează **multiple** perioade sezoniere
- Selectie **automată** a modelului
- Gestionează perioade **non-întregi** (365.25)
- **Box-Cox** pentru heteroscedasticitate
- Bun pentru date de **frecvență înaltă**

Limitări

- Intensiv **computațional**
- Fără **regresori externi**
- Mai puțin **interpretabil** decât Prophet
- Poate fi **lent** pentru serii foarte lungi
- Necesită **suficiente date** per sezon

Exemplu Descompunere TBATS



Ce este Prophet?

Prophet este o procedură de prognoză dezvoltată de Facebook (Meta) în 2017.

Proiectat pentru **serii de timp de business** cu:

- Efecte sezoniere puternice (zilnice, săptămâna, anuale)
- Efecte de sărbători
- Schimbări de trend (changepoints)
- Date lipsă și outlieri

Filosofia Cheie

"Analyst-in-the-loop" forecasting

Prophet este proiectat pentru a fi ajustat de analiști cu cunoștințe de domeniu, dar care nu sunt neapărat experți în serii de timp.

Abordare prin Descompunere

Prophet folosește o descompunere aditivă:

$$y(t) = g(t) + s(t) + h(t) + \varepsilon_t$$

$g(t)$: Trend

- Liniar sau logistic
- Changepoints automate
- Saturație de creștere

$s(t)$: Sezonalitate

- Serii Fourier
- Perioade multiple
- Sezonalitate custom

$h(t)$: Sărbători

- Sărbători pe țară
- Evenimente custom
- Efecte de fereastră

Trend Liniar cu Changepoints

$$g(t) = (k + \mathbf{a}(t)^T \boldsymbol{\delta}) \cdot t + (m + \mathbf{a}(t)^T \boldsymbol{\gamma})$$

unde:

- k este rata de creștere de bază
- $\boldsymbol{\delta}$ este un vector de ajustări de rată la changepoints
- $\mathbf{a}(t)$ indică ce changepoints sunt active la momentul t
- m este offset-ul, $\boldsymbol{\gamma}$ asigură continuitatea

Creștere Logistică (pentru trenduri cu saturatie)

$$g(t) = \frac{C(t)}{1 + \exp(-(k + \mathbf{a}(t)^T \boldsymbol{\delta})(t - (m + \mathbf{a}(t)^T \boldsymbol{\gamma})))}$$

unde $C(t)$ este capacitatea maximă (posibil variabilă în timp).

Reprezentare prin Serii Fourier

Pentru o perioadă sezonieră P , Prophet folosește:

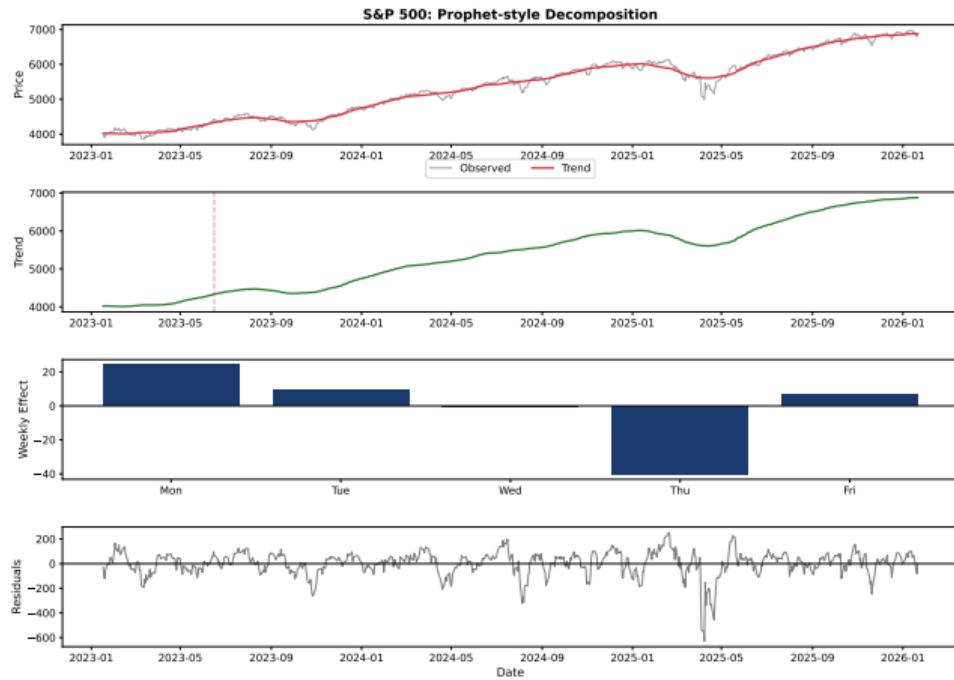
$$s(t) = \sum_{n=1}^N \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{P}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{P}\right) \right]$$

Setări Implicite

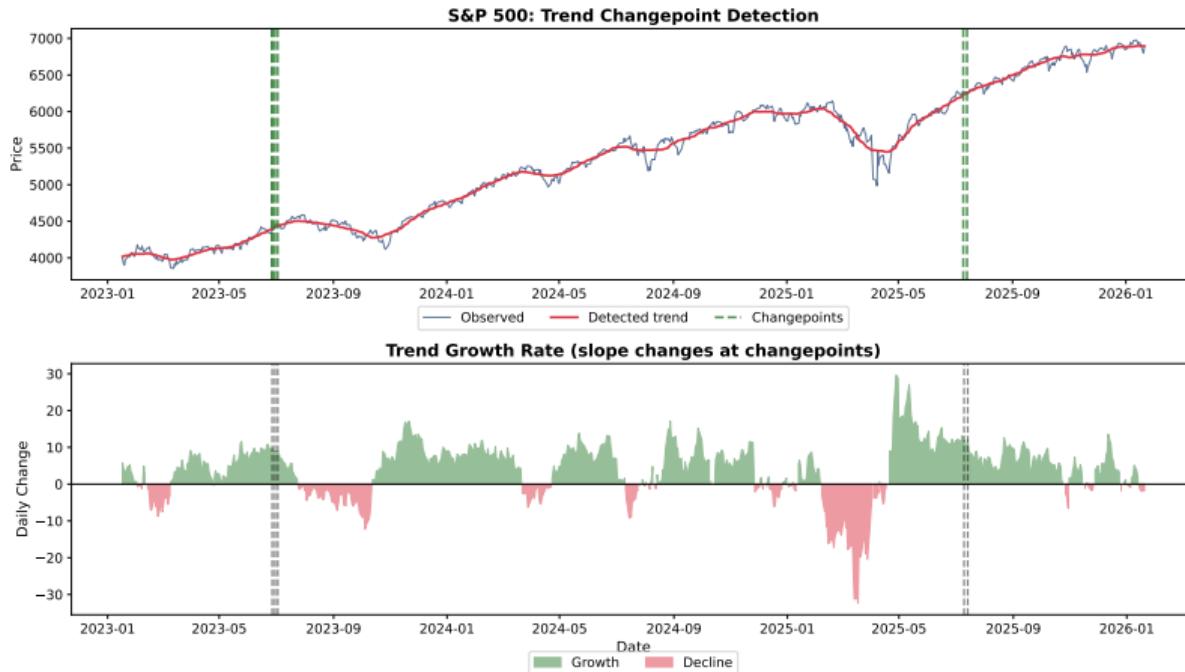
| Sezonalitate | Perioadă | Ordin Fourier |
|--------------|-------------|---------------|
| Anuală | 365.25 zile | 10 |
| Săptămânală | 7 zile | 3 |
| Zilnică | 1 zi | 4 |

Ordin Fourier N mai mare = mai multă flexibilitate (poate ajusta tipare mai complexe) dar risc mai mare de supraajustare.

Descompunerea Componentelor Prophet



Detectarea Changepoints în Trend



Modelul de Sărbători

$$h(t) = Z(t) \cdot \kappa$$

unde $Z(t)$ este o matrice indicator pentru sărbători și κ sunt efectele sărbătorilor.

Caracteristici

- **Sărbători integrate:** 60+ țări suportate
- **Sărbători custom:** Adăugați propriile evenimente (Black Friday, evenimente companie)
- **Efecte de fereastră:** Sărbătorile pot afecta zilele înainte/după
- **Prior scale:** Controlează regularizarea efectelor de sărbătoare

Exemplu de Cod

```
holidays = pd.DataFrame({'holiday': 'black_friday', ....})  
model = Prophet(holidays=holidays)
```

Utilizare de Bază

```
from prophet import Prophet
import pandas as pd

# Datele trebuie să aibă coloane 'ds' (dată) și 'y' (valoare)
df = pd.DataFrame({'ds': dates, 'y': values})

model = Prophet()
model.fit(df)

future = model.make_future_dataframe(periods=365)
forecast = model.predict(future)
```

Adăugare Sezonalitate Custom

```
model = Prophet(weekly_seasonality=False)
model.add_seasonality(name='monthly', period=30.5, fourier_order=5)
model.add_seasonality(name='quarterly', period=91.25, fourier_order=3)
```

Trei Surse de Incertitudine

- ❶ **Incertitudine de trend:** Changepoints viitoare sunt incerte
- ❷ **Incertitudine de sezonalitate:** Incertitudine în estimarea parametrilor
- ❸ **Zgomot de observație:** Aleatorietate inherentă

Intervale de Predicție

Prophet oferă:

- Prognoză punctuală: \hat{y}
- Limita inferioară: \hat{y}_{lower}
- Limita superioară: \hat{y}_{upper}

Implicit este interval de 80%.

Schimbați cu `interval_width=0.95`

Notă

Incertitudinea crește cu orizontul de prognoză, în special pentru incertitudinea de trend.

Parametri Cheie

| Parametru | Efect |
|-------------------------|---|
| changepoint_prior_scale | Flexibilitate trend (implicit: 0.05) |
| seasonality_prior_scale | Flexibilitate sezonalitate (implicit: 10) |
| holidays_prior_scale | Mărime efect sărbători (implicit: 10) |
| seasonality_mode | 'additive' sau 'multiplicative' |
| changepoint_range | Porțiune din istoric pentru changepoints |

Sfaturi Practice

- **Supraajustare pe trend?** Micșorați `changepoint_prior_scale`
- **Subajustare pe sezonalitate?** Măriți `seasonality_prior_scale`
- **Amplitudinea sezonieră variază?** Folosiți `seasonality_mode='multiplicative'`

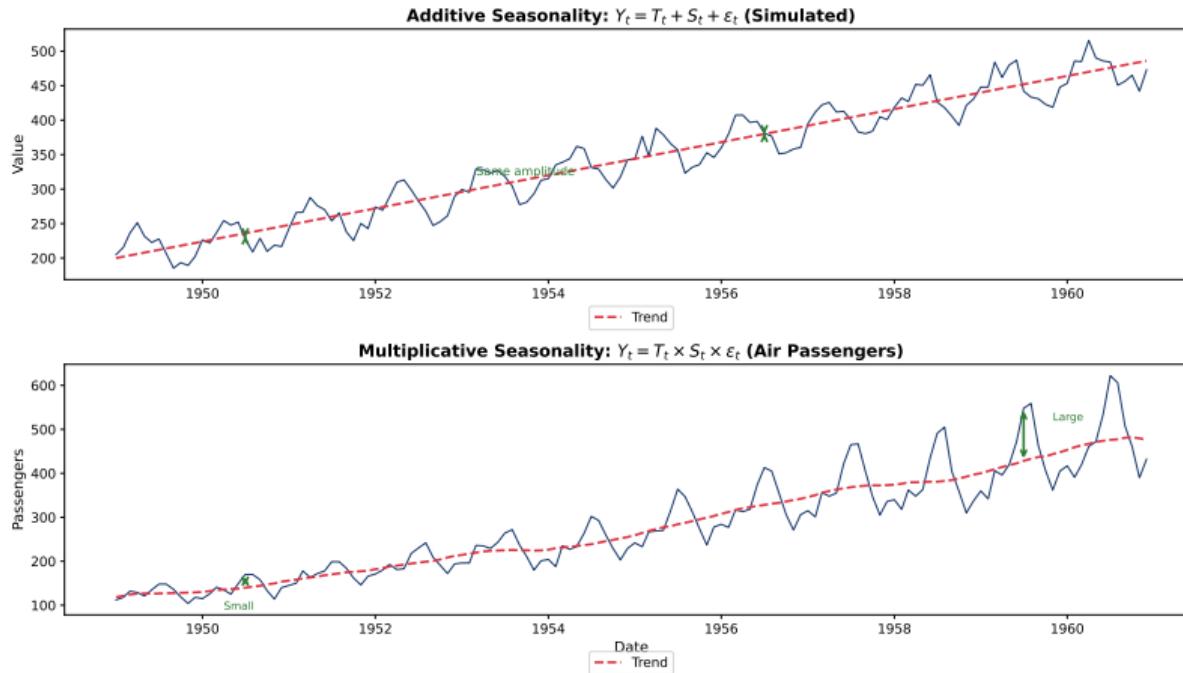
Avantaje

- **Ușor de folosit:** Ajustare minimă necesară
- **Interpretabil:** Descompunere clară
- **Gestionează date lipsă bine**
- **Efecte sărbători integrate**
- **Sezonalități multiple**
- **Regresori externi suportați**
- **Ajustare rapidă**

Limitări

- **Nu bazat pe ARIMA:** Fără modelare autocorelație
- **Focus pe date zilnice:** Mai puțin potrivit pentru frecvență foarte înaltă
- **Ipoteze de trend:** Liniar/logistic poate să nu se potrivească
- **Fără CV integrat:** Trebuie implementat manual
- **Risc supraajustare cu multe sezonalități**

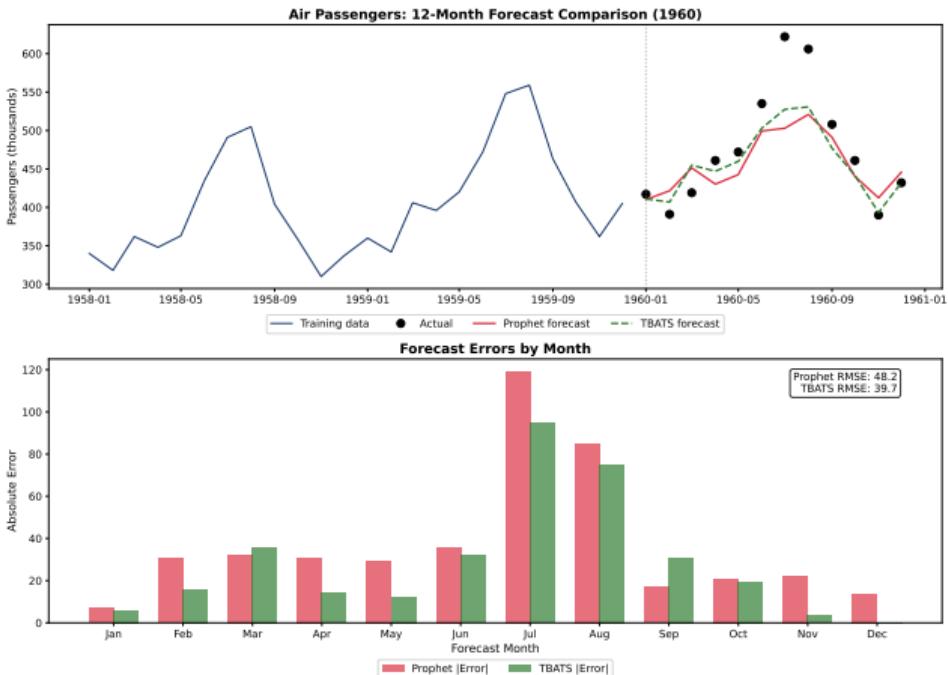
Sezonalitate Aditivă vs Multiplicativă



TBATS vs Prophet: Comparație Directă

| Caracteristică | TBATS | Prophet |
|-------------------------|----------------------|----------------------|
| Sezonalități multiple | Da (automat) | Da (manual sau auto) |
| Efecte sărbători | Nu | Da (integrat) |
| Regresori externi | Nu | Da |
| Changepoints trend | Nu (neted) | Da (automat) |
| Date lipsă | Necesită interpolare | Gestionează nativ |
| Interpretabilitate | Moderată | Înaltă |
| Viteză calcul | Lent | Rapid |
| Date frecvență înaltă | Bun | Moderat |
| Perioade non-întregi | Da (ex: 365.25) | Da |
| Intervale incertitudine | Da | Da |

Comparație Prophet vs TBATS: Prognoze



Când să Folosim Fiecare Model

Folosiți TBATS când:

- Date de frecvență înaltă (orare, sub-zilnice)
- Multiple perioade sezoniere complexe
- Nu sunt necesari regresori externi
- Se preferă selecție automată a modelului
- Se dorește framework tradițional state-space

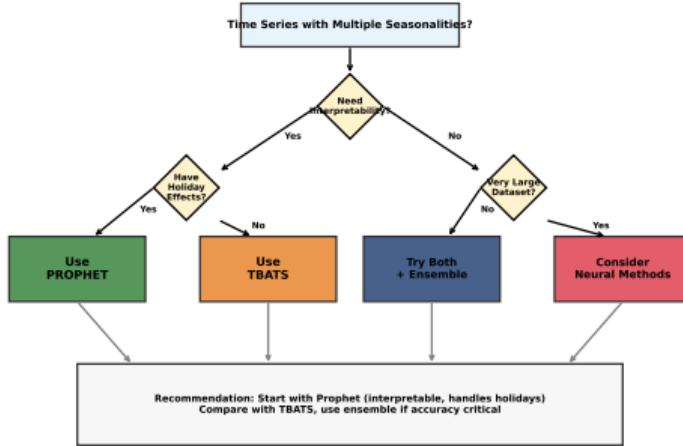
Folosiți Prophet când:

- Prognoză de business (zilnic/săptămânal)
- Efectele sărbătorilor sunt importante
- Trendul are rupturi structurale
- Sunt prezente date lipsă
- Interpretabilitatea este cheie
- Sunt disponibili regresori externi

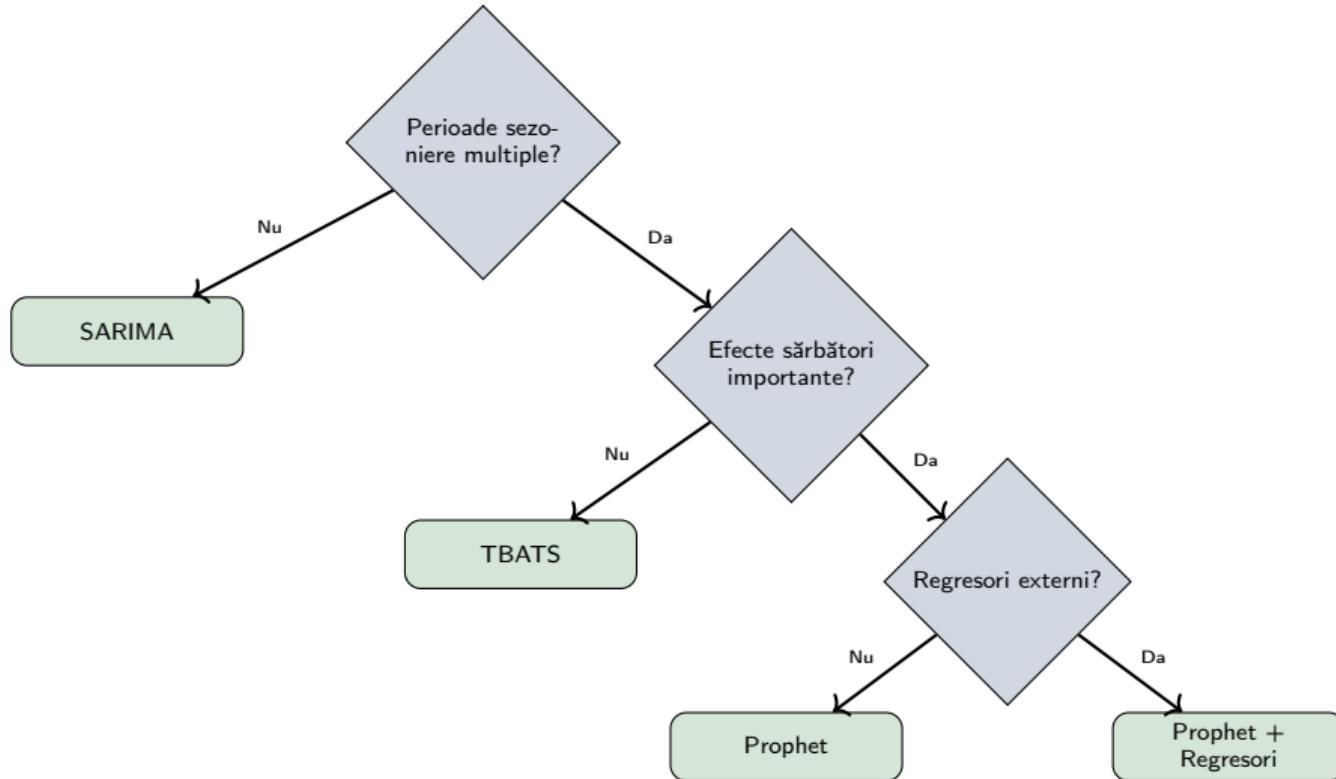
Ghid General

Prophet pentru aplicații de business cu date zilnice
TBATS pentru aplicații tehnice cu date de frecvență înaltă

Model Selection Guide for Multiple Seasonalities



Diagramă de Decizie



Problema

Prognozați cererea de electricitate pe oră cu:

- **Tipar zilnic:** Vârf la prânz și seara
- **Tipar săptămânal:** Mai scăzut în weekend
- **Tipar anual:** Mai mare vara (AC) și iarna (încălzire)
- **Efecte sărbători:** Cerere mai mică în sărbători

Abordare

- ➊ Încercați TBATS cu perioade [24, 168, 8766]
- ➋ Încercați Prophet cu sezonalitate zilnică, săptămânală, anuală + sărbători
- ➌ Comparați folosind cross-validation

Studiu de Caz: Interpretarea Rezultatelor

Metrici de Evaluare

- **MAPE**: Mean Absolute Percentage Error
- **RMSE**: Root Mean Square Error
- **Acoperire**: % din valori reale în intervalul de predicție

Rezultate Tipice

| Model | MAPE | RMSE | Acoperire |
|----------------------|------|--------|-----------|
| SARIMA (doar zilnic) | 8.5% | 450 MW | 75% |
| TBATS | 4.2% | 220 MW | 82% |
| Prophet | 4.8% | 250 MW | 85% |
| Prophet + sărbători | 3.9% | 200 MW | 88% |

Modelele cu sezonalități multiple depășesc semnificativ SARIMA cu o singură sezonialitate.

Sezonalități Multiple

- Datele din lumea reală au adesea tipare sezoniere multiple
- SARIMA standard gestionează doar o perioadă sezonieră
- TBATS și Prophet sunt proiectate pentru această provocare

Selectia Modelului

- **TBATS:** Automat, gestionează frecvență înaltă, fără regresori externi
- **Prophet:** Interpretabil, efecte sărbători, regresori externi
- Ambele folosesc termeni Fourier pentru reprezentare eficientă a sezonalității

De Reținut

Validați întotdeauna cu cross-validation adecvat pentru serii de timp!

Întrebări?

Întrebări?

Pași Următori:

- Exersați cu notebook-ul Jupyter
- Încercați Prophet pe propriile date
- Explorați NeuralProphet pentru extensia deep learning