



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 10: Recapitulare Comprehensivă



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din Bucureşti

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

Obiective de învățare

La finalul acestui capitol, veți fi capabili să:

1. Aplicați fluxul complet de prognoză, de la date la evaluare
2. Selectați modelul potrivit în funcție de caracteristicile datelor
3. Evaluați acuratețea prognozelor folosind metri și validare încrucișată
4. Integrați cunoștințele din toate capitolele anterioare în practică



Cuprins

Fundamente

- Metodologia Prognozei
- Studiu de Caz 1: Volatilitatea Bitcoin (GARCH)
- Studiu de Caz 2: Ciclurile Petelor Solare (Fourier)

Aplicații

- Studiu de Caz 3: Șomajul (Prophet)
- Studiu de Caz 4: Analiză Multivariată (VAR)
- Sinteză și Ghid
- Quiz



Abordarea științifică a prognozei

Întrebarea de cercetare

- Cum putem evalua riguros performanța prognozei evitând supraajustarea?

Problema fundamentală

- Ajustarea în eșantion \neq Performanța în afara eșantionului
- Modelele pot “memora” datele de antrenament fără a învăța tipare
- Soluție:** Metodologia corectă train/validation/test

Principiu cheie

- “Setul de test trebuie să rămână neatins până la evaluarea finală.”
- Practică standard în machine learning și econometrie



Cadrul Train/Validation/Test

Time Series Train/Validation/Test Split



Q TSA_ch10_train_val_test_split

Metrici de evaluare

Definiție 1 (Metrici ale Erorii de Prognoză)

- **Date:** Fie y_t valorile reale, \hat{y}_t progozele

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_t (y_t - \hat{y}_t)^2}, \quad \text{MAE} = \frac{1}{n} \sum_t |y_t - \hat{y}_t|, \quad \text{MAPE} = \frac{100\%}{n} \sum_t \left| \frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t} \right|$$

Când să folosim

- **RMSE:** Penalizează erorile mari
- **MAE:** Robust la outlieri
- **MAPE:** Independent de scală (%)

Atenție

- MAPE nedefinit când $y_t = 0$
- Comparați pe **același** set test
- Raportați metrici **out-of-sample**



Evaluarea prognozelor dincolo de RMSE

Metrici alternative

- **MASE** (Mean Absolute Scaled Error): $\frac{\text{MAE}_{\text{model}}}{\text{MAE}_{\text{naïve}}} ; < 1 \Rightarrow \text{bate naïve}$
- **DA** (Directional Accuracy): $\frac{1}{h} \sum_{t=1}^h \mathbb{1}(\text{sgn } \Delta \hat{y}_t = \text{sgn } \Delta y_t)$
- **QL** (Quantile Loss): penalizare asimetrică α vs $1-\alpha$

$$QL_\alpha = \begin{cases} \alpha(y_t - \hat{q}_t), & y_t > \hat{q}_t \\ (1 - \alpha)(\hat{q}_t - y_t), & y_t \leq \hat{q}_t \end{cases}$$

- **CRPS** (Continuous Ranked Probability Score): $\int_{-\infty}^{\infty} (F(x) - \mathbb{1}_{x \geq y})^2 dx$

Evaluarea prognozelor: Rezultate Bitcoin

Rezultate Bitcoin (GARCH volatilitate)

Metrică	Valoare
RMSE	2.21
MAE	1.89
MASE	0.98
Dir. Accuracy	28.7%

- MASE < 1: GARCH bate naïve
- DA 28.7%: direcția volatilității e dificilă

Interpretare

- RMSE/MAE**: eroarea absolută a prognozei volatilității
- MASE < 1**: modelul GARCH performează mai bine decât naïve
- DA 28.7%**: direcția volatilității e extrem de dificil de prezis
- Evaluarea trebuie făcută pe **setul de test**



Compararea formală a prognozelor: Diebold–Mariano

Definiție 2 (Testul Diebold–Mariano)

Diferența de pierdere: $d_t = L(e_{1t}) - L(e_{2t})$, Statistica: $DM = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\bar{d})}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$

Ipoteze

- H_0 : performanță predictivă egală
- H_1 : un model e semnificativ mai bun
- $|DM|$ mare \Rightarrow respingem H_0

Rezultat Bitcoin (GARCH volatilitate)

- Normal vs Student-t: $DM = -0.51$
- $p = 0.612$ — **nu respingem H_0**
- Acuratețe similară, dar Student-t preferabil prin AIC ($\Delta = 509$)

Mesaj cheie

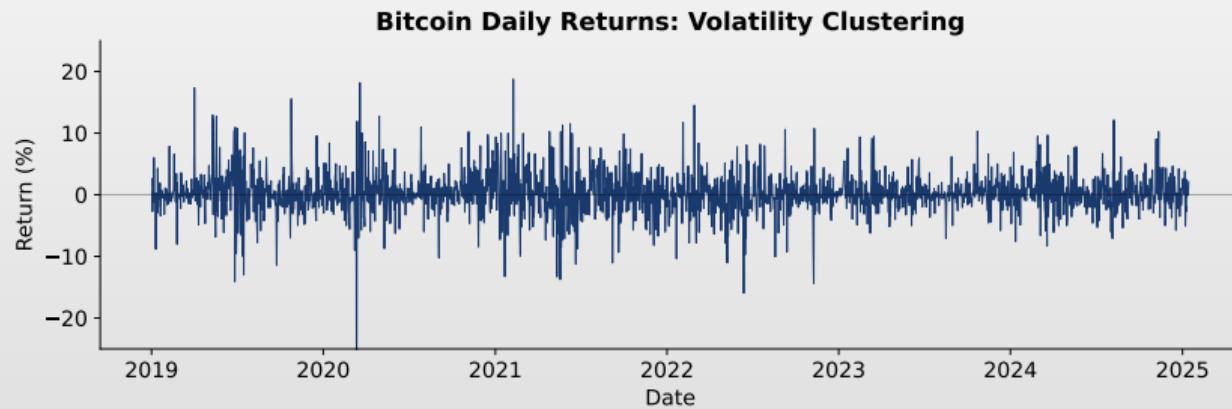
- RMSE mai mic \neq diferență semnificativă — testarea formală este **obligatorie**



Bitcoin: volatility clustering

Observație

- Randamentele mari tind să urmeze randamente mari, cele mici urmează cele mici
- Acesta este **volatility clustering** ✎ fenomenul pe care GARCH îl captează



Q TSA_ch10_btc_returns



Bitcoin: definirea problemei

Întrebarea de cercetare

- Putem prognoza **volatilitatea** Bitcoin folosind modele GARCH?

Caracteristicile Datelor

- Sursă: Yahoo Finance (BTC-USD)
- Perioadă: Ian 2019 – Ian 2025
- Frecvență: Zilnică
- Observații: ≈ 2.200 zile

Fapte stilizate

- Randamente: medie aproape zero
- Cozi groase (curtosis > 3)
- Clustering al volatilității

Insight cheie

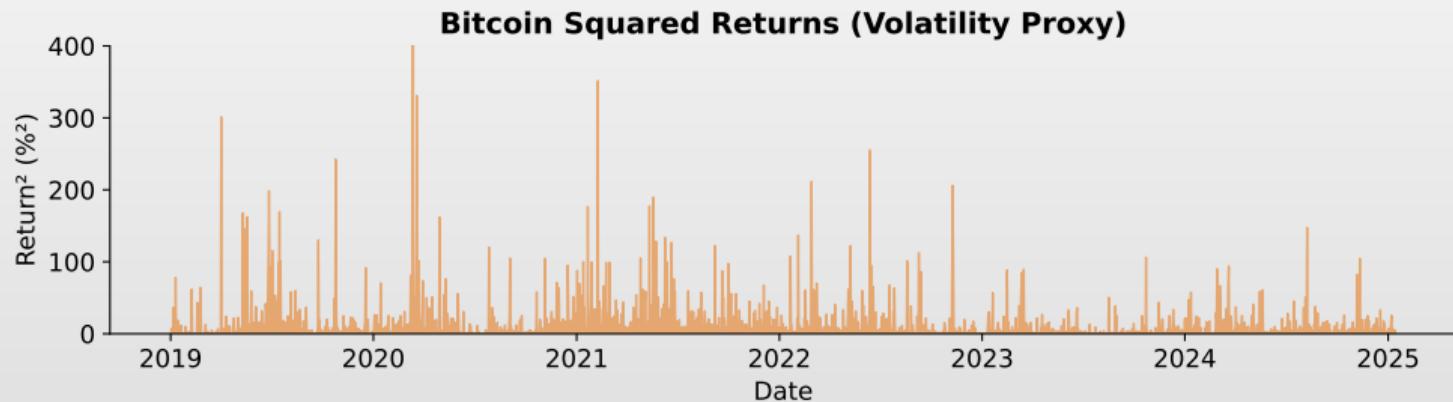
- Randamentele financiare sunt de obicei:
 - ▶ Impredictibile în medie
 - ▶ Predictibile în varianță
- ➔ Focus pe **prognoza volatilității**



Bitcoin: dovezi pentru GARCH

Observație

- Randamentele pătrate r_t^2 prezintă autocorelație semnificativă \succ efecte GARCH
- ACF descreștere lentă \succ persistență ridicată a volatilității



 TSA_ch10_btc_acf_squared



Specificarea modelului GARCH

Definiție 3 (Modelul GARCH(p,q))

- **Date:** Fie r_t randamentele. Modelul GARCH(p,q) este:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim N(0, 1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

- **Condiții:** $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, și $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$

Variante de model

- **GARCH(1,1):** Cel mai comun
- **GJR-GARCH:** Efect de levier
- **EGARCH:** Șouri asimetrice

Interpretare

- α : Impactul șourilor trecute
- β : Persistența volatilității
- $\alpha + \beta \approx 1$: Persistență înaltă



GARCH: Staționaritate și varianță necondiționată

Teoremă 1 (Staționaritatea în Covarianță a GARCH(1,1))

Dacă $\alpha_1 + \beta_1 < 1$, atunci $\{\varepsilon_t\}$ este staționar în covarianță cu:

$$\bar{\sigma}^2 = \mathbb{E}[\sigma_t^2] = \frac{\omega}{1 - \alpha_1 - \beta_1}$$

Derivare

Luăm speranța ambelor părți ale ecuației varianței:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\sigma_t^2] &= \omega + \alpha_1 \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] + \beta_1 \mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2] \\ \bar{\sigma}^2 &= \omega + (\alpha_1 + \beta_1) \bar{\sigma}^2 \quad (\text{staționaritate}) \\ \bar{\sigma}^2 &= \frac{\omega}{1 - \alpha_1 - \beta_1}\end{aligned}$$

Prognozele multi-step converg la $\bar{\sigma}^2$

Când $h \rightarrow \infty$: $\mathbb{E}_t[\sigma_{t+h}^2] \rightarrow \bar{\sigma}^2$ cu rata $(\alpha_1 + \beta_1)^h$.



Bitcoin: selectarea modelului pe setul de validare

Metodologie

- Estimăm fiecare model pe **datele de antrenament**, evaluăm pe **setul de validare**

Model	AIC	BIC	Val MAE	Selectare
GARCH(1,1)	6.994,8	7.020,6	2,638	Cel mai bun
GARCH(2,1)	6.993,7	7.024,6	2,640	
GJR-GARCH(1,1)	6.983,7	7.014,6	2,669	
EGARCH(1,1)	—	—	—	Eșuat*

*Prognoze analitice indisponibile pentru $h > 1$

Rezultat

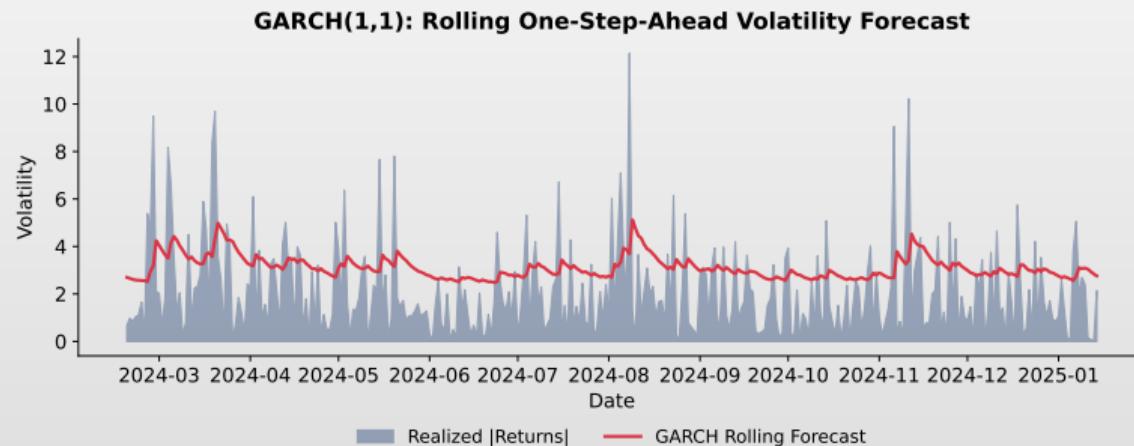
- GARCH(1,1)** selectat pe baza celui mai mic MAE de validare pentru prognozele de volatilitate



Bitcoin: prognoza volatilității

Interpretare

- Zona umbrită: interval de încredere 95% al prognozei de volatilitate
- GARCH(1,1) captează bine dinamica volatilității Bitcoin



Bitcoin: împărțirea datelor și staționaritate

Împărțirea datelor

Set	Perioadă	N
Antrenament (70%)	2019-01 – 2023-03	1.543
Validare (20%)	2023-03 – 2024-06	441
Test (10%)	2024-06 – 2025-01	221
Total		2.205

Teste de staționaritate

Serie	ADF	Rezultat
Prețuri	$p = 0.50$	Non-staționară
Randamente	$p < 0.01$	Staționară

➤ Modelăm **randamente**, nu prețuri

De ce contează staționaritatea

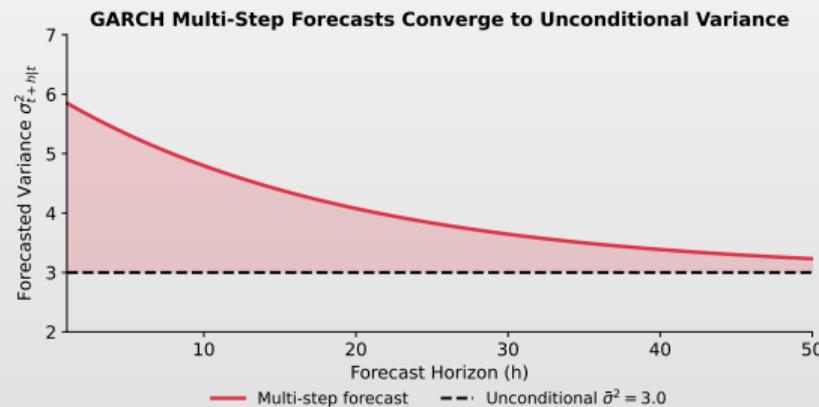
- GARCH**: necesită input slab staționar
- Prețuri vs Randamente**: prețuri = random walk, randamente = stationare



GARCH: prognozele multi-step converg

Insight cheie

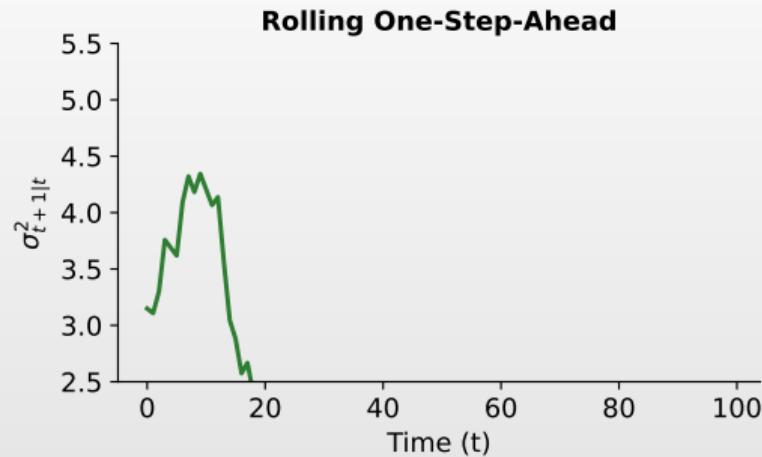
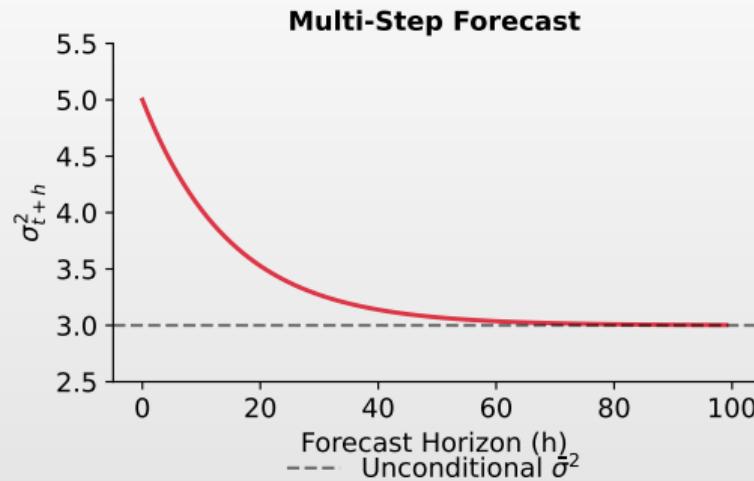
- ◻ Prognozele multi-step converg la $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$
- ◻ Soluția: prognoze rolling one-step-ahead



TSA_ch10_garch_convergence



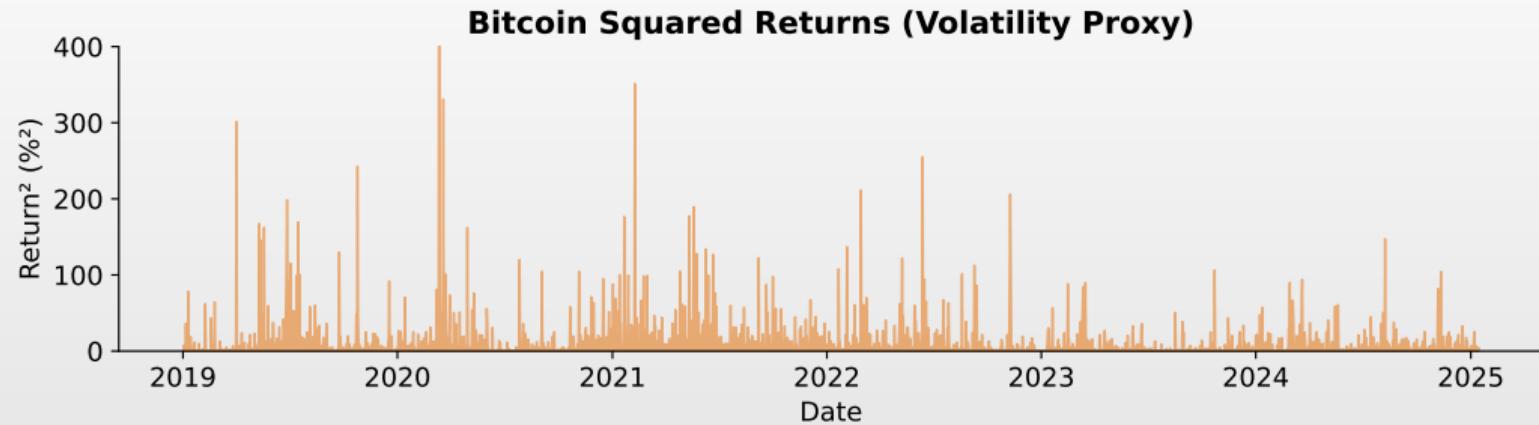
GARCH: soluția rolling one-step-ahead



Q TSA_ch10_rolling_vs_multistep



Bitcoin: Fapte stilizate GARCH



GARCH: Distribuții pentru inovații

Model

$$r_t = \mu + \sigma_t z_t$$

- Variante pentru z_t : $\mathcal{N}(0, 1)$ (normală) sau t_ν (cozi groase)

Bitcoin: dovezi empirice

- Kurtosis reziduuri: **13.81** (Normal = 3)
- Skewness: -0.29
- Jarque-Bera: 9085, $p < 0.001$
- Normalitatea **subestimează** riscul extrem

Student-t: alegerea corectă

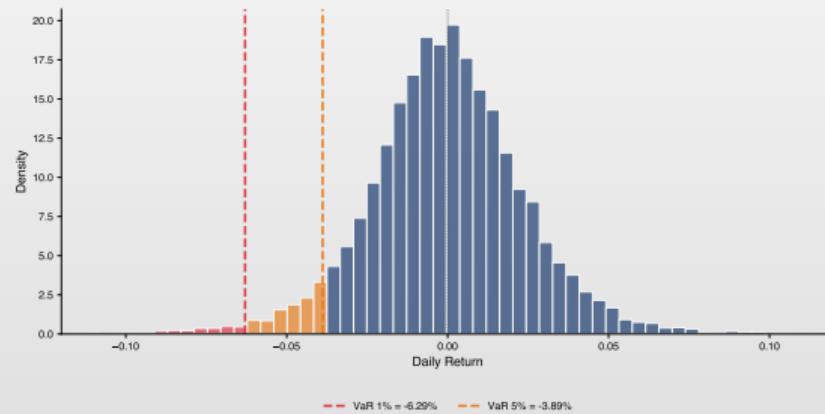
- $\hat{\nu} = 2.96$ grade de libertate
- AIC Normal: 9769 vs Student-t: **9260**
- $\Delta\text{AIC} = 509$ — doavadă **copleșitoare**
- Cozi groase = estimări VaR **mai realiste**



VaR și ES: ilustrație grafică

Interpretare

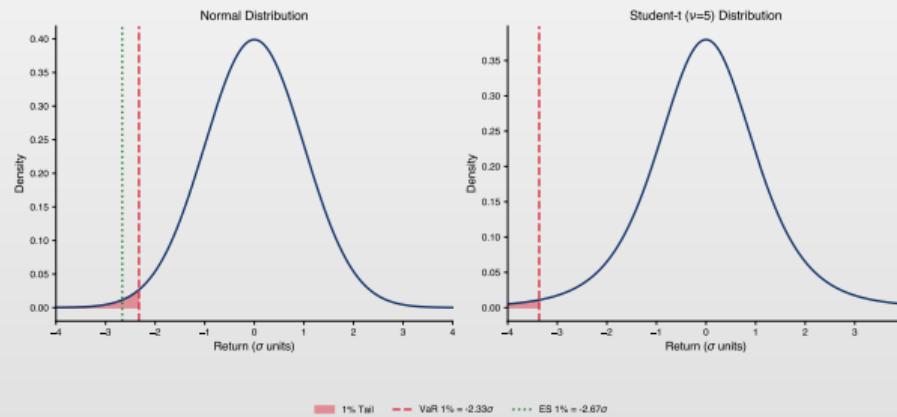
- ◻ VaR 1% = pierderea depășită doar în 1% din cazuri
- ◻ Zona roșie = pierderi extreme (dincolo de VaR)



VaR vs expected shortfall: normal vs Student-t

Interpretare

- ES măsoară pierderea medie când VaR este depășit
- Student-t: VaR și ES mai mari decât sub distribuția normală



Q TSA_ch5_var_es



Value at risk > exemplu numeric

Calculul VaR: Portofoliu 1M EUR, $\hat{\sigma}_{T+1} = 1.5\%$

Nivel	z_α	VaR (%)	VaR (EUR)
5% (1 zi)	1.645	2.47%	24.675
1% (1 zi)	2.326	3.49%	34.890
1% (10 zile)	$2.326 \cdot \sqrt{10}$	11.03%	110.314

Scalare pentru perioade mai lungi

$\text{VaR}_h \text{ zile} = \text{VaR}_1 \text{ zi} \cdot \sqrt{h}$ (presupune randamente i.i.d.)



Value at risk > distribuție Student-t

De ce Student-t?

- Normala **subestimează** riscul de coadă; randamentele au **cozi groase** ($kurtosis > 3$)
- Student-t capturează mai bine extremele

Comparație VaR 1% (1 zi) pentru $\sigma = 1.5\%$, portofoliu = 1M EUR

Distribuție	Cuantilă	VaR (EUR)
Normal	2.326	34.890
Student-t ($\nu = 10$)	2.764	41.460
Student-t ($\nu = 6$)	3.143	47.145
Student-t ($\nu = 4$)	3.747	56.205

- Cu $\nu = 6$ (tipic pentru acțiuni), VaR este cu **35% mai mare** decât cel normal!



VaR > exemplu complet cu GARCH

Procedura de calcul VaR

1. Estimează modelul GARCH(1,1) cu distribuție Student-t
2. Obține prognoza volatilității: $\hat{\sigma}_{T+1}$
3. Calculează VaR: $VaR_{\alpha} = t_{\alpha}(\nu) \cdot \hat{\sigma}_{T+1} \cdot \sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}}$

Exemplu: S&P 500

- Parametri estimați: $\alpha = 0.088$, $\beta = 0.900$, $\nu = 6.4$
- Volatilitate prognozată: $\hat{\sigma}_{T+1} = 1.2\%$, Portofoliu: 10.000.000 EUR
- **VaR 1% (1 zi):** $VaR = 3.05 \times 0.012 \times 10.000.000 = 366.000 \text{ EUR}$



Ce este VaR backtesting?

Definiție

- Backtesting** = verificarea ex-post a calității modelului VaR
- Compară pierderile realizate cu pragul VaR proгnozat
 - O **încălcare** (violation) apare când $r_t < -\text{VaR}_t$

Principiul Backtesting-ului

- Indicatorul de încălcare: $I_t = 1(r_t < -\text{VaR}_{\alpha,t})$
- Pentru un model corect la nivel α :
 - Frecvența: $\hat{p} = \frac{1}{T} \sum I_t \approx \alpha$; încălcări **independente**
- VaR 1% pe 250 zile \succ așteptăm ~ 2.5 încălcări/an

Importanță

- Cerință regulamentară **Basel III/IV** pentru bănci: backtesting obligatoriu



Testul Kupiec (1995) \succ acoperire necondiționată

Ipoteze

- H_0 : Rata de încălcare este egală cu nivelul VaR ($p = \alpha$)
- H_1 : Rata de încălcare diferă de nivelul VaR ($p \neq \alpha$)

Statistica de test (Likelihood Ratio)

- Formula:** $LR_{uc} = -2 \ln \left[\frac{\alpha^x (1-\alpha)^{T-x}}{\hat{\rho}^x (1-\hat{\rho})^{T-x}} \right] \sim \chi^2(1)$
- Notăție:** $x = \text{nr. încălcări}, T = \text{nr. observații}, \hat{\rho} = x/T$

Exemplu

- VaR 1%, $T = 250$ zile, $x = 5$ încălcări: $\hat{\rho} = 2\%$
 - ▶ Prea multe încălcări \succ modelul **subestimează** riscul
- VaR 1%, $T = 250$ zile, $x = 1$ încălcare: $\hat{\rho} = 0.4\% \succ$ acceptabil



Testul Christoffersen (1998) \succ acoperire condiționată

Motivație

- Kupiec testează doar **frecvența** încălcărilor
- Nu detectează **clusterizarea** încălcărilor (încălcări consecutive)
 - Dacă încălcările apar în clustere \succ modelul nu captează dinamica volatilității

Testul de independentă + acoperire condiționată

- Formula:** $LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind} \sim \chi^2(2)$
- LR_{ind} testează dacă $P(I_t = 1 | I_{t-1} = 1) = P(I_t = 1 | I_{t-1} = 0)$
- Un model bun: încălcări rare și distribuite uniform în timp

Recomandare

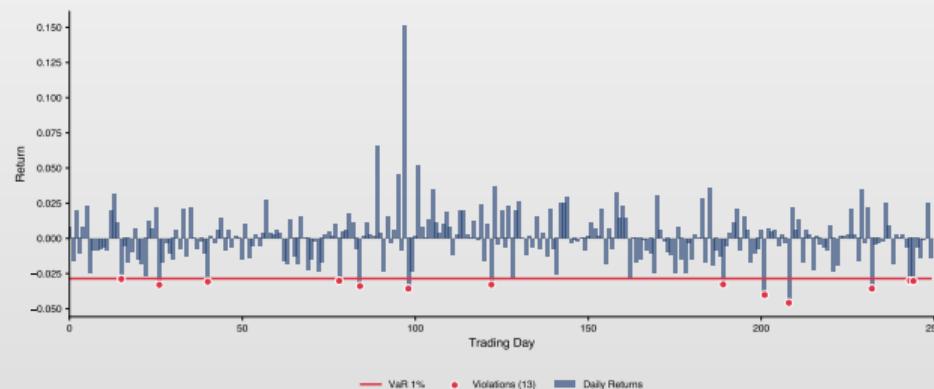
- Folosește **ambele** teste: Kupiec (frecvență) + Christoffersen (independentă)



VaR backtesting: vizualizare

Interpretare

- Linia roșie: pragul VaR 1% estimat cu GARCH(1,1)
- Punctele roșii: 13 încălcări din 250 zile ($\hat{p} = 5.2\%$)
 - ▶ **Zonă roșie Basel** \succ modelul subestimează semnificativ riscul
 - ▶ Soluții: distribuție Student-t, model EGARCH, sau nivel VaR mai conservator



Backtesting VaR: semaforul Basel

Zonele de semaforizare Basel III/IV

Zonă	Încălcări/250 zile	Interpretare	Penalizare
Verde	0–4	Model acceptabil	Fără penalizare
Galben	5–9	Necesită investigare	Factor k crește
Roșu	≥ 10	Model inadecvat	Penalizare maximă

Exemplu practic

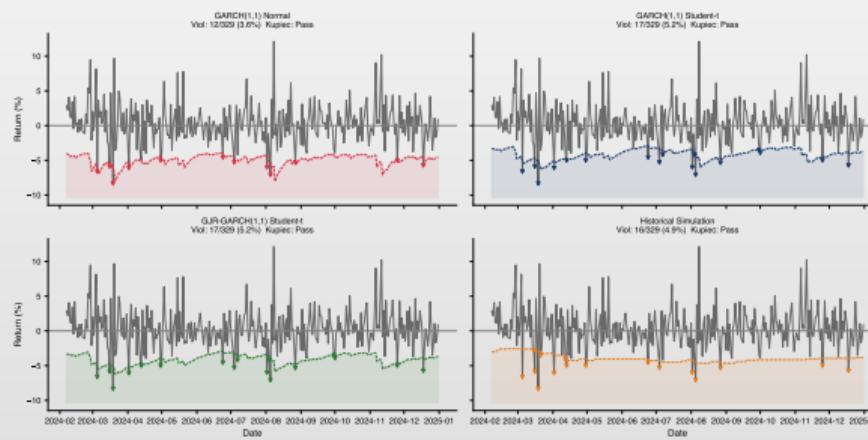
- ☐ Portofoliu cu VaR 1%: 250 zile de backtesting
- ☐ 3 încălcări \succ **Zonă verde** \succ model acceptabil
- ☐ 7 încălcări \succ **Zonă galbenă** \succ revizuire necesară
- ☐ 13 încălcări \succ **Zonă roșie** \succ model respins



Aplicație: VaR rolling pe multiple modele

Metodologie

- ☐ VaR rolling one-step-ahead: $\text{VaR}_{t+1}^{\alpha} = \mu + \hat{\sigma}_{t+1} \cdot z_{\alpha}$
- ☐ 4 modele comparate pe setul de test Bitcoin (329 zile, 2024)



VaR Backtesting: comparație modele

Rezultate Bitcoin — VaR 5% ($T = 329$ zile, așteptat: 16,5 încălcări)

Model	Încălcări	Rată	Kupiec p	Chr. p	Concluzie
GARCH(1,1)-N	12	3,6%	0,238	1,000	Prea conservator
GARCH(1,1)-t	17	5,2%	0,890	0,272	$\approx 5\%$ target
GJR-GARCH(1,1)-t	17	5,2%	0,890	0,272	$\gamma \approx 0$ (simetric)
Hist. Simulation	16	4,9%	0,909	0,216	$\approx 5\%$ target

Concluzii

- Student-t:** acoperire perfectă ($5,2\% \approx 5\%$)
- Normal: prea conservator ($3,6\% < 5\%$)
- GJR \approx GARCH: levier absent pt. Bitcoin
- Toate trec Kupiec și Christoffersen

Lecții practice

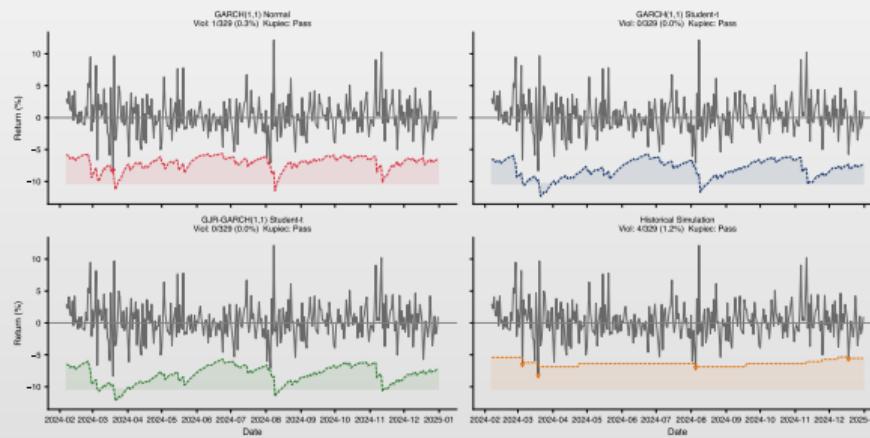
- GARCH-t și HistSim: ambele $\approx 5\%$ target
- Simularea istorică: alternativă simplă și eficientă
- Testarea statistică formală (Kupiec, Christoffersen) este **obligatorie**



Aplicație: VaR 1% rolling pe multiple modele

Metodologie

- ☐ VaR rolling one-step-ahead la nivel $\alpha = 1\%$ (risc extrem)
- ☐ Aceleași 4 modele; așteptat: $T \times 0,01 = 3,3$ încălcări



VaR 1% Backtesting: comparație modele

Rezultate Bitcoin — VaR 1% ($T = 329$ zile, așteptat: 3,3 încălcări)

Model	Încălcări	Rată	Kupiec p	Chr. p	Concluzie
GARCH(1,1)-N	1	0,3%	0,137	1,000	Acceptabil
GARCH(1,1)-t	0	0,0%	1,000	1,000	Acceptabil
GJR-GARCH(1,1)-t	0	0,0%	1,000	1,000	Acceptabil
Hist. Simulation	4	1,2%	0,704	1,000	Acceptabil

Concluzii VaR 1%

- Toate modelele trec Kupiec ($p > 0,05$)
- Cu doar 3,3 încălcări așteptate, testul are **putere statistică scăzută**
- Nu putem distinge semnificativ între 0 și 4 încălcări

Lecție: 5% vs 1%

- La 5% (≈ 16 încălcări): test puternic, Student-t cel mai bun
- La 1% (≈ 3 încălcări): test slab, modele **indistinguibile**
- Concluzie:** puterea testului crește cu α și T



Limitările GARCH și extensii moderne

Limitări

- Nu captează **jump-uri** (salturi bruște)
- Parametri constanți în timp
- Sensibil la distribuția aleasă
- Nu modelează **regimuri** diferite

Extensii

- GJR-GARCH:** efect de levier
- EGARCH:** șocuri asimetrice
- Markov-Switching GARCH:** regimuri
- Volatilitate realizată (HAR)
- Hybrid GARCH + ML

Mesaj cheie

- GARCH este un **punct de plecare**, nu finalul modelării riscului



Bitcoin: Concluzii cheie

Sumar

1. Rendamentele sunt staționare; prețurile nu
2. GARCH(1,1) depășește variantele mai complexe
3. Persistență înaltă ($\alpha + \beta = 0,93$)
4. Volatilitatea este predictibilă chiar când randamentele nu sunt

Implicații practice

- Managementul riscului: VaR, Expected Shortfall
- Evaluarea opțiunilor necesită prognoze de volatilitate
- Optimizarea portofoliului cu risc variabil în timp

Limitări

- GARCH presupune șocuri simetrice
- Nu captează salturi
- Distribuția normală poate fi restrictivă

Extensiile

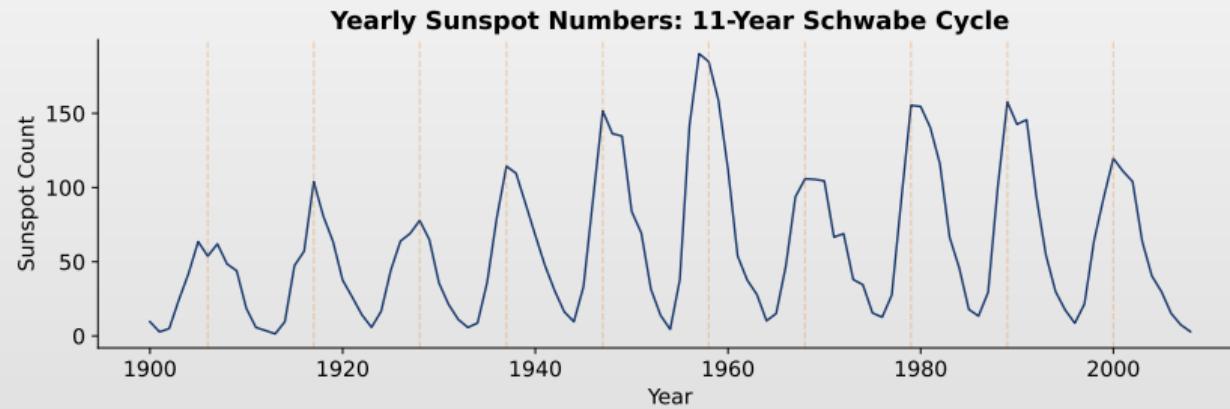
- Inovații Student-t
- Volatilitate realizată
- Modele HAR



Pete solare: ciclul solar de 11 ani

Observație

- Ciclu solar clar de ≈ 11 ani; amplitudine variabilă între cicluri
- ACF periodică \succ sezonalitate lungă, ideală pentru termeni Fourier

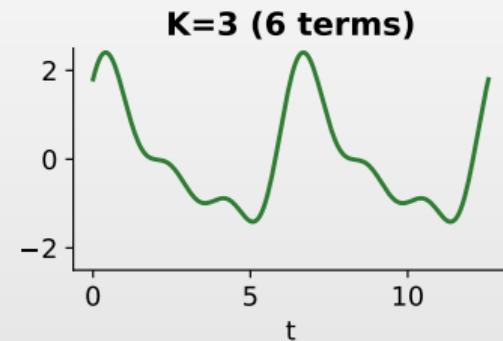
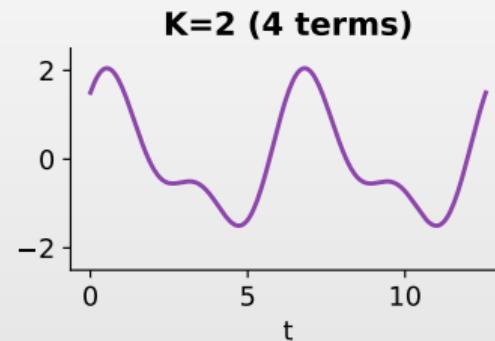
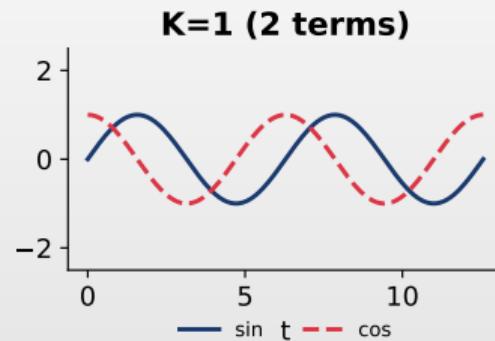


Q TSA_ch10_sunspots_acf



Termeni Fourier pentru sezonalitate

Fourier Terms: More K = More Flexibility



[TSA_ch10_fourier_terms](#)



Pete solare: selectarea modelului

Metodologie

- **Comparatie:** $K = 1, 2, 3, 4$ armonici Fourier pe setul de validare

Împărțirea Datelor		
Set	Perioadă	N
Antrenament (70%)	1900–1975	76
Validare (20%)	1976–1997	22
Test (10%)	1998–2008	11
Total		109

Comparatie Modele		
K	AIC	Val RMSE
1	665,9	87,15
2	668,0	86,92
3	671,8	86,81
4	674,5	87,93

Rezultat

- $K = 3$ armonici Fourier selectate (6 parametri pentru ciclul de 11 ani)



Overfitting în alegerea lui K

Riscul de overfitting

- K prea mare = memorare ciclu istoric
- Modelul se potrivește pe zgomot, nu pe semnal
- Performanța pe test se **degradează**

Soluția: validare

- Selectăm K pe setul de **validare**
- Evaluăm pe **test** — neatins
- Trade-off: complexitate vs generalizare

Fourier \approx regresie periodică

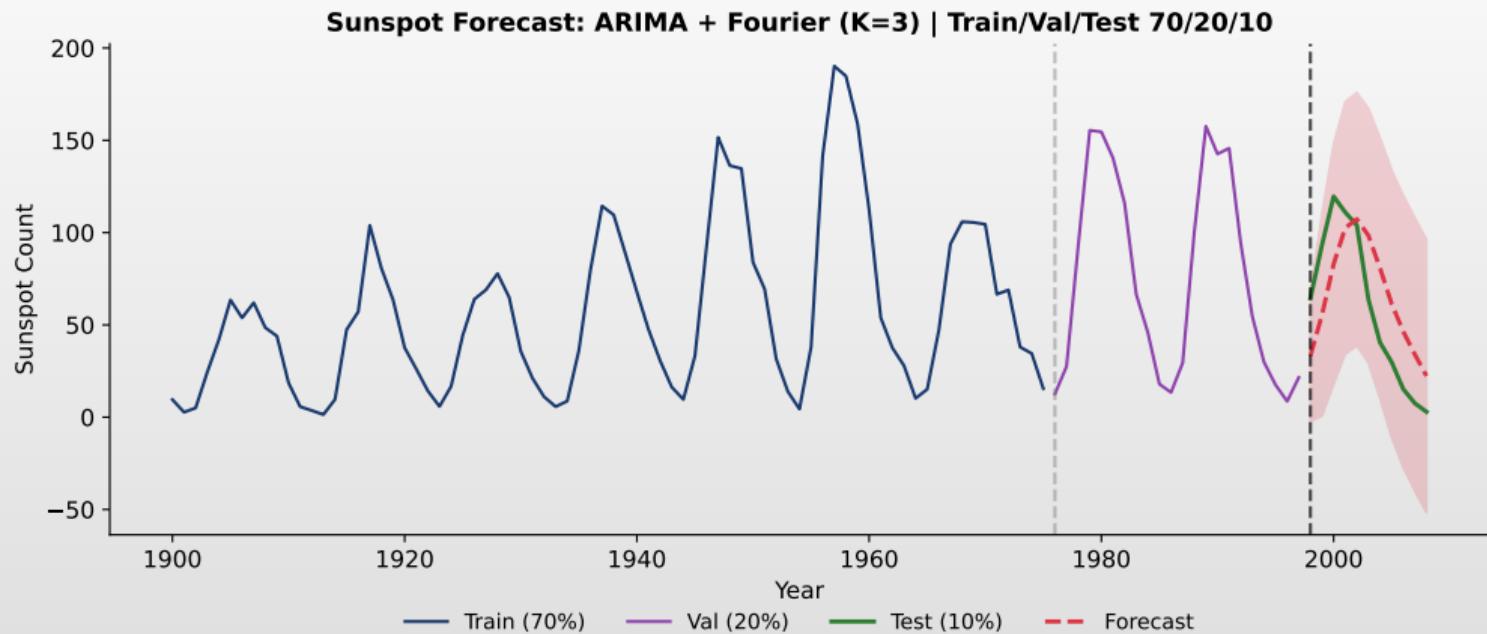
- Fiecare armonic adaugă 2 parametri (\sin , \cos)
- $K = 3$: 6 parametri suplimentari
- $K = 6$: 12 parametri — risc supraajustare

La noi

- $K = 3$ minimizează Val RMSE
- $K = 4$ crește eroarea \succ overfitting



Pete solare: rezultate prognoză



Pete solare: concluzii cheie

Când să folosiți termeni Fourier

- Perioada sezonieră s este **lungă** (ex: 11 ani, 52 săptămâni)
- SARIMA ar necesita prea multe lag-uri sezoniere
- Tiparul este **neted și periodic**
- Trebuie captureate cicluri multiple

Fourier vs SARIMA

	Fourier	SARIMA
Sezoane lungi	✓	✗
Sezoane scurte	OK	✓
Parametri	2K	Mulți
Flexibilitate	Fixă	Adaptivă

Alegerea lui K

- Strategie:** Începeți cu $K = 1$, creșteți progresiv
 - ▶ Opriți când eroarea de validare nu mai scade
 - ▶ K prea mare = supraajustare

Aplicații

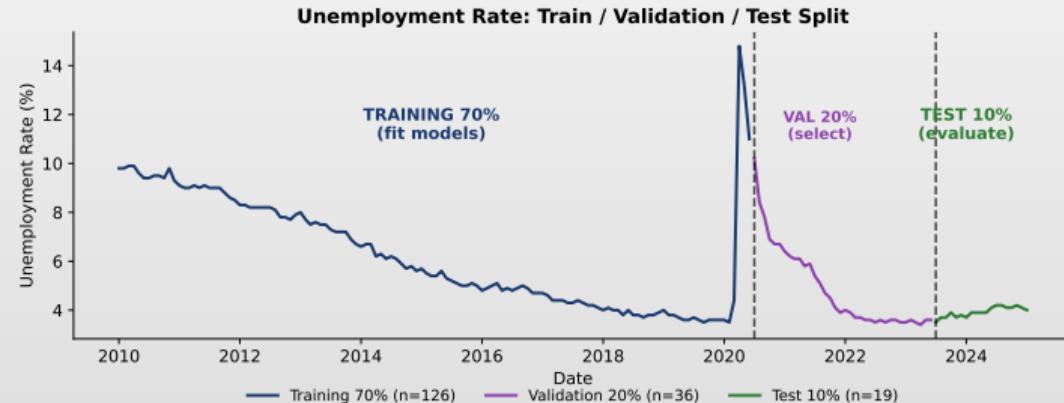
- Domenii:** Cicluri climatice, cicluri de afaceri, fenomene astronomice



Şomajul: Train / Validation / Test Split

Metodologie

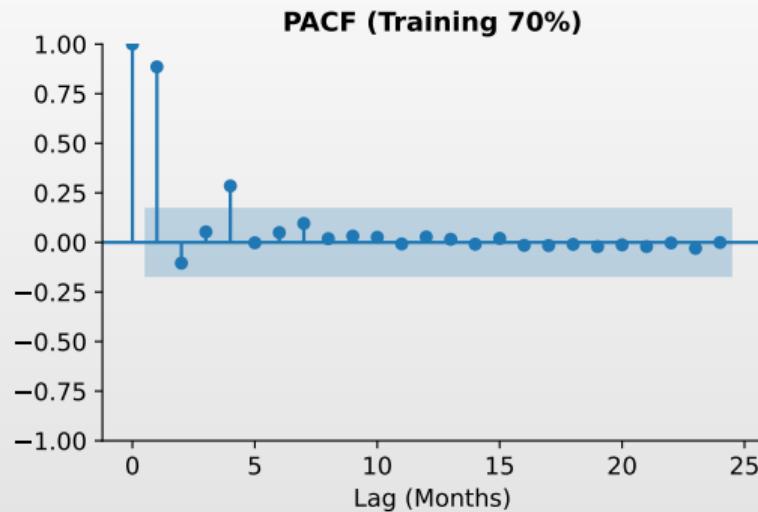
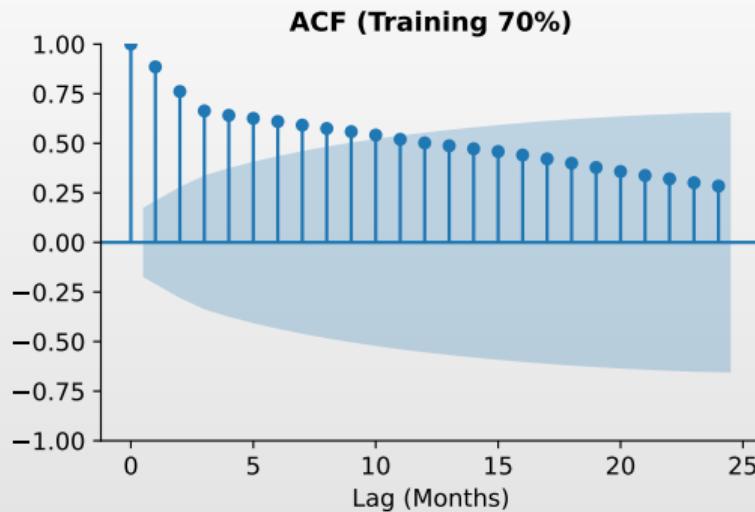
- Training** (70%): Estimare modele
- Validare** (20%): Selectie model
- Test** (10%): Evaluare finală



Q TSA_ch10_unemployment_train_val_test

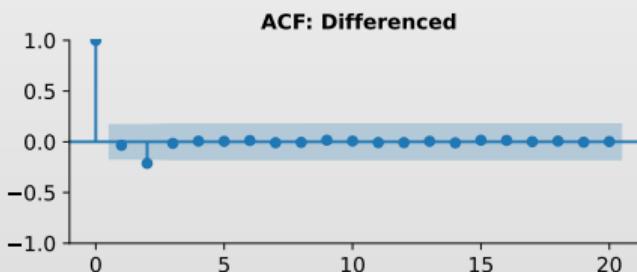
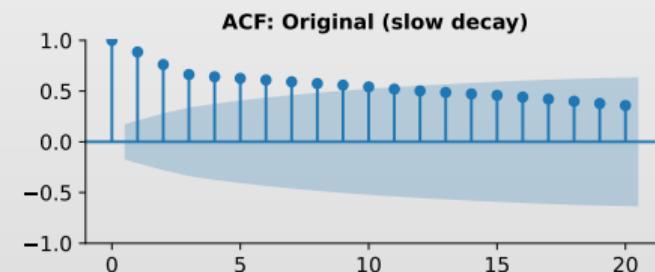


Șomajul: analiză preliminară



Q TSA_ch10_unemployment_acf_pacf

Șomajul: teste de staționaritate



Rupturi structurale: abordare formală

Metode clasice

- Chow Test:** ruptură la punct cunoscut
- Bai–Perron:** rupturi multiple, necunoscute
- CUSUM:** detectare secvențială

Problemă

- ADF poate confunda **break** cu **unit root**
- Test Zivot–Andrews: ADF cu ruptură endogenă

Rezultat: Șomaj la COVID (martie 2020)

- Chow Test: $F = 21.73, p < 0.001$
- Ruptură structurală **confirmată**
- SARIMA: parametri constanți — risc
- Prophet: detectează changepoints automat

Mesaj cheie

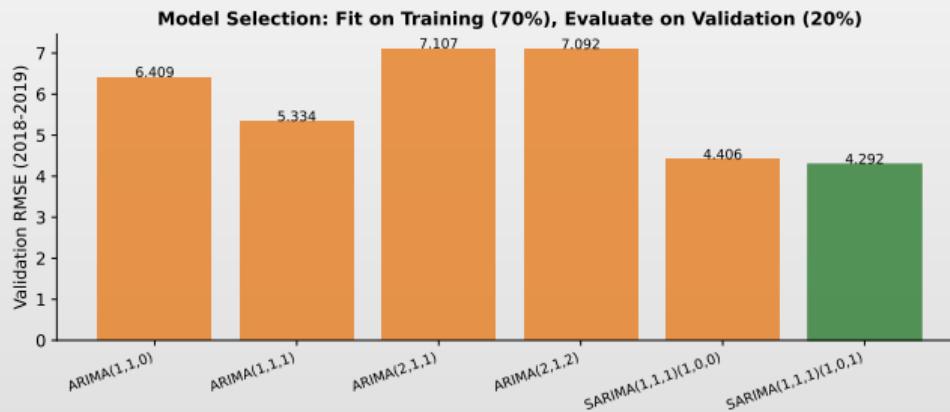
- Modelul trebuie adaptat la **stabilitatea parametrilor**



Șomajul: selecția modelului (set validare)

Best: SARIMA(1,1,1)(1,0,0)₁₂

- Fit pe training (70%), evaluare pe validare (20%)
- Cel mai bun model selectat după Val RMSE minim



 [TSA_ch10_sarima_model_selection](#)



Şomajul: parametrii SARIMA

SARIMA(1,1,1)(1,0,0)₁₂ estimat pe Train+Val (2010-2019)

- AR(1): $\phi_1 = -0,86$
- MA(1): $\theta_1 = 0,78$
- SAR(12): $\Phi_1 = -0,08$ (n.s.)

SARIMA(1,1,1)(1,0,1) - Fitted on Train+Val (85%)

Parameter	Coef	Std Err	P-value	Sig
ar.L1	0.8423	0.2084	0.0001	***
ma.L1	-0.9540	0.1973	0.0000	***
ar.S.L12	0.0326	4.5951	0.9943	
ma.S.L12	-0.0113	4.6087	0.9980	
sigma2	0.8122	0.0608	0.0000	***



Testul Ljung-Box pentru autocorelația reziduurilor

Definiție 4 (Testul Ljung-Box)

Pentru reziduurile \hat{e}_t cu autocorelații eșantion $\hat{\rho}_k$, statistica de test:

$$Q(h) = n(n+2) \sum_{k=1}^h \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k} \stackrel{H_0}{\sim} \chi^2(h-p-q)$$

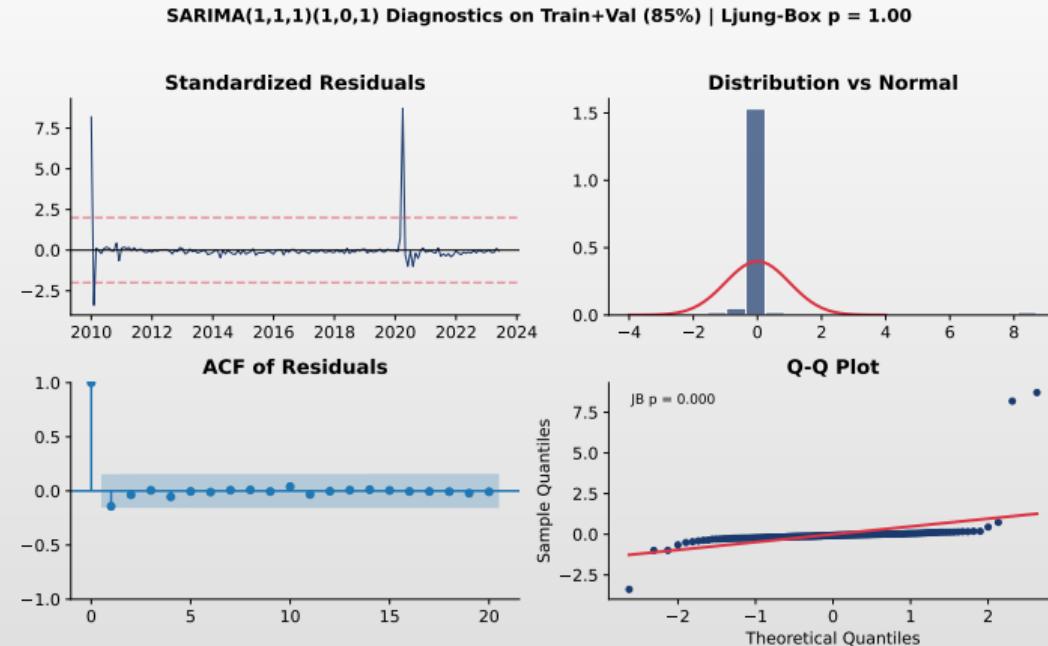
unde p, q sunt ordinele ARMA. H_0 : Reziduurile sunt zgomot alb.

Interpretare

- Q mare (p-value mic): Respingem H_0 , reziduurile au structură
- Q mic (p-value mare): Nu respingem H_0 , modelul este adekvat
- Regulă practică: Folosiți $h = \min(10, n/5)$ pentru ordinul lag-ului



Şomajul: Diagnosticare SARIMA



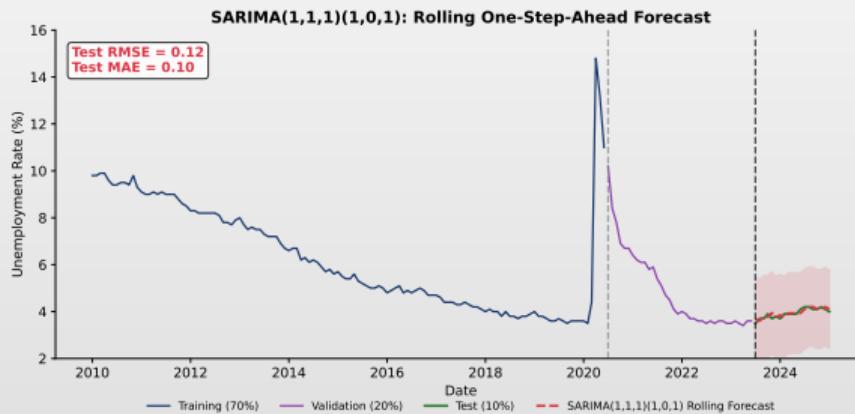
TSA_ch10_sarima_diagnostics



Şomajul: prognoza rolling SARIMA

Problemă: Ruptura structurală

- Prognoză rolling one-step-ahead (re-estimare la fiecare t)
- Test RMSE = 0,12



Q TSA_ch10_sarima_forecast



Modelul Prophet

Definiție 5 (Descompunerea Prophet)

- Model:** $y_t = g(t) + s(t) + h(t) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$
- Componente:** $g(t)$ = trend, $s(t)$ = sezonalitate, $h(t)$ = sărbători

Detectare puncte de schimbare

- Selectare automată a locařilor
- `changepoint_prior_scale` controlează flexibilitatea

Avantaje

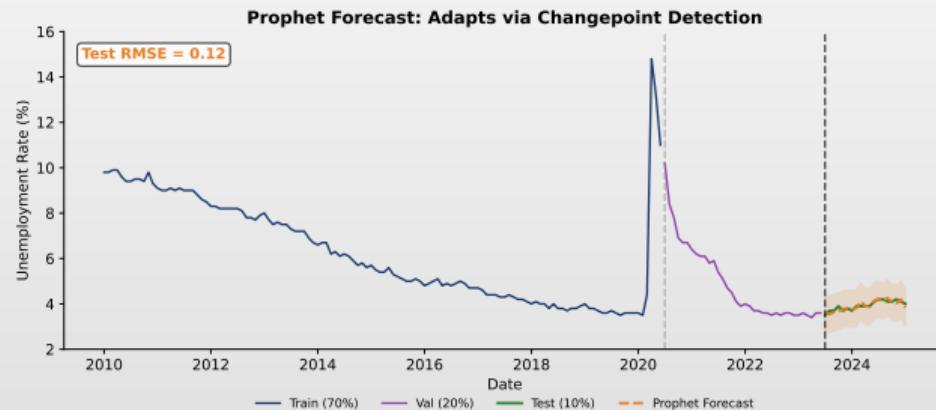
- Gestionează date lipsă
- Componente interpretabile
- Robust la outlieri



Şomajul: rezultate prognoză Prophet

Concluzie cheie

- **Prophet:** se adaptează prin detectare changepoint
- **Test RMSE = 0,58**



Q TSA_ch10_unemployment_forecast



Şomajul: Ajustarea modelului

Ajustarea hiperparametrilor

- Ajustăm changepoint_prior_scale pe setul de validare

Împărțirea Datelor		
Set	Perioadă	N
Antrenament (70%)	2010-01 – 2020-06	126
Validare (20%)	2020-07 – 2023-06	36
Test (10%)	2023-07 – 2025-01	19
Total		181

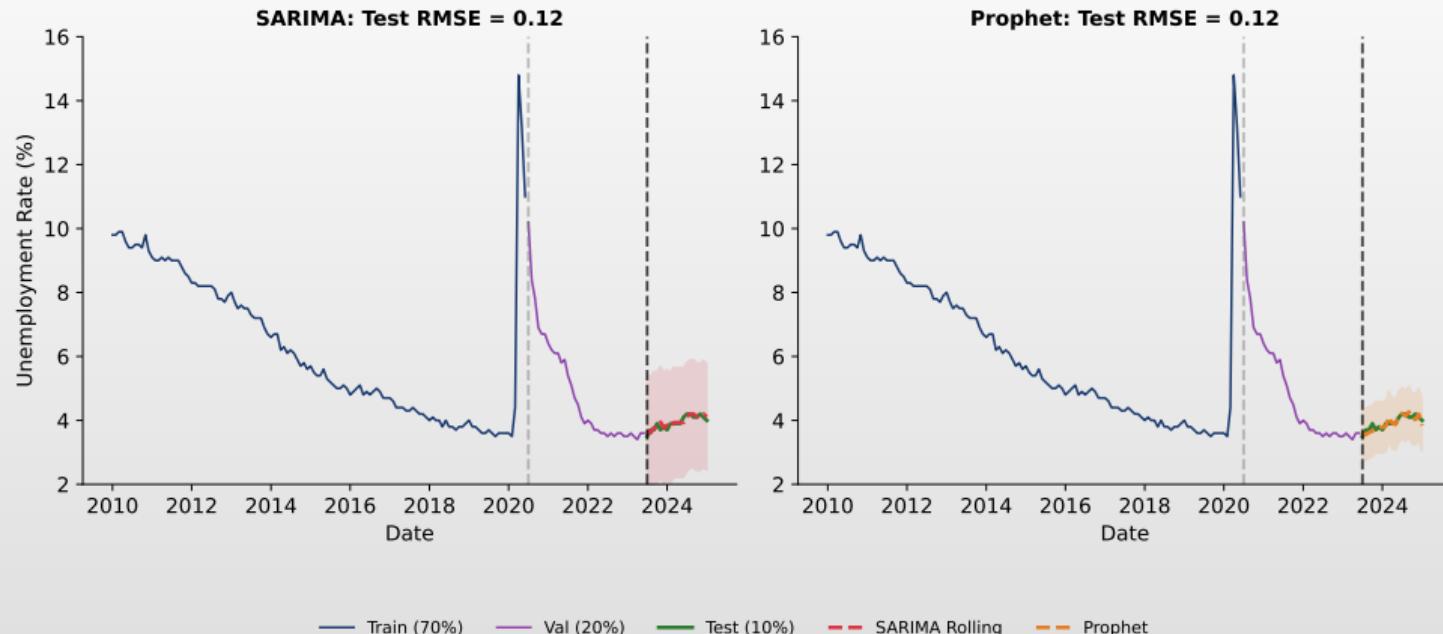
	Scale	Val RMSE	
Comparație Scale	0,01	4,21	
	0,05	3,89	
	0,10	3,52	Cel mai bun
	0,30	3,67	
	0,50	3,81	

Interpretare

- Scale = 0,10 echilibrează flexibilitatea (captarea şocului COVID) cu stabilitatea



Șomaj: comparație SARIMA vs Prophet



Q TSA_ch10_prophet_vs_sarima_unemployment



Prophet: când să-l folosești

Cazuri de utilizare ideale

- Date de business cu **sărbători**
- Valori lipsă** prezente
- Nevoie de componente **interpretabile**
- Prognoze cu **benzi de incertitudine**

Atenție: Rupturi structurale

- Prophet gestionează rupturile prin changepoints, dar **SARIMA l-a depășit** la șomaj (0,12 vs 0,58)
- Validați întotdeauna!

Prophet vs ARIMA

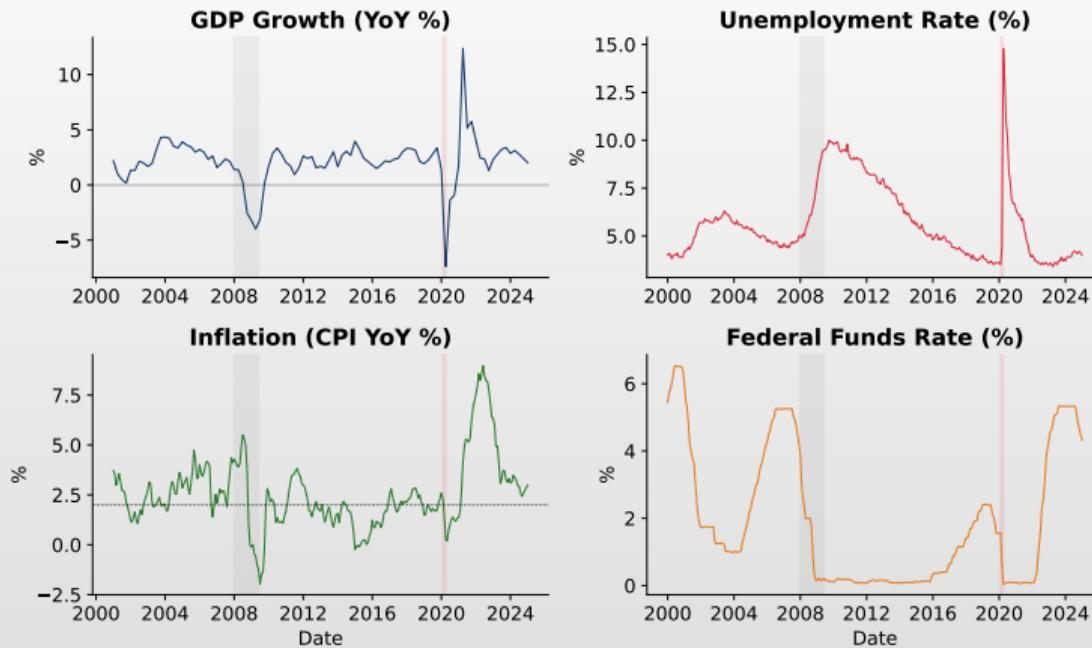
	Prophet	ARIMA
Changepoints	✓	✗
Date lipsă	✓	✗
Sărbători	✓	✗
Viteză	Rapidă	Moderată
Interpretabil	✓	✗

Parametri cheie

- `changepoint_prior_scale`: flexibilitate
- `seasonality_prior_scale`: netezime



VAR: date economice multivariate



Specificarea modelului VAR

Definiție 6 (Autoregresie Vectorială VAR(p))

- **Date:** Pentru K variabile $y_t = (y_{1t}, \dots, y_{Kt})'$:

$$y_t = c + A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + \dots + A_p y_{t-p} + u_t$$

- **Notatie:** A_i sunt matrici de coeficienți $K \times K$, $u_t \sim N(0, \Sigma)$

Pentru sistemul nostru cu 4 variabile

- **VAR(2):** 4 constante
- $2 \times 4 \times 4 = 32$ coeficienți AR
- **36 parametri total**

Selectarea lag-ului

- Folosim criterii informaționale:
 - ▶ **AIC:** Tinde să supraajusteze
 - ▶ **BIC:** Mai simplu
 - ▶ Cross-validation pe date păstrate



Criterii informaționale pentru selectarea modelului

Definiție 7 (Criteriile Informaționale Akaike și Bayesian)

Pentru un model cu log-verosimilitate \mathcal{L} , k parametri și n observații:

$$\text{AIC} = -2\mathcal{L} + 2k$$

$$\text{BIC} = -2\mathcal{L} + k \ln(n)$$

AIC

- Asimptotic eficient
- Poate supraajusta cu n mic
- Minimizează eroarea de predicție

BIC

- Consistent (găsește modelul adevărat)
- Penalizare mai mare: $\ln(n) > 2$ dacă $n > 7$
- Mai parcimonios



VAR: selectarea lag-ului și estimare

Criterii informaționale

Lag	BIC
1	-4,810
2	-5,178
3	-4,633
4	-4,614

Împărțirea datelor

Set	Perioadă	N
Antrenament (70%)	2001-T1 – 2017-T4	67
Validare (20%)	2018-T1 – 2022-T4	20
Test (10%)	2023-T1 – 2025-T1	10
Total		97

Verificare validare

- VAR(2) obține și cel mai mic RMSE de validare



Stabilitatea modelului VAR

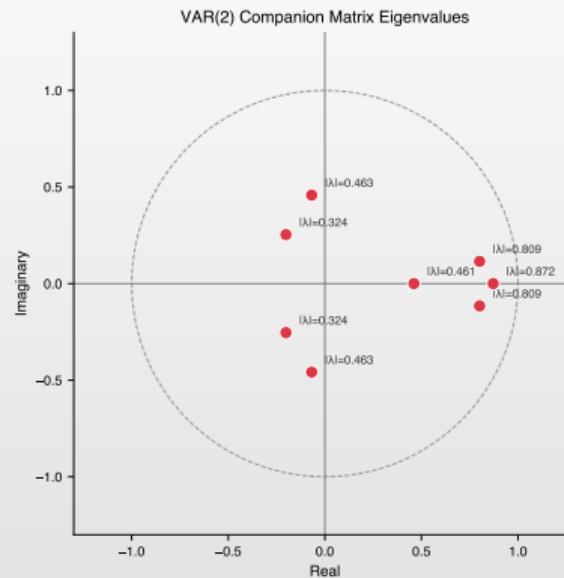
Condiția de stabilitate

- Toate valorile proprii ale **matricei companion**: $|\lambda_i| < 1, \forall i$

Rezultate VAR(2) — date economice

$ \lambda_1 , \lambda_2 $	0.324
$ \lambda_3 , \lambda_4 $	0.463
$ \lambda_5 $	0.461
$ \lambda_6 $	0.872
$ \lambda_7 , \lambda_8 $	0.810

- Max $|\lambda| = 0.872 < 1$ — **stabil**



VAR vs VECM: cointegrare

Problemă

- Dacă variabilele sunt $I(1) \succ$ VAR pe niveluri produce regresii spurioase

Definiție 8 (VECM)

$$\Delta y_t = \Pi y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \Delta y_{t-i} + u_t, \quad \Pi = \alpha \beta'$$

Johansen Test — date economice

r	Trace	CV 5%	Respins?
0	64.09	47.85	Da
1	24.03	29.80	Nu
2	11.89	15.49	Nu
3	1.28	3.84	Nu

- 1 relație de cointegrare găsită
- VECM e mai adecvat decât VAR pe niveluri

Mesaj cheie

- VAR pe diferențe: pierde relația pe termen lung; VECM: o păstrează prin $\Pi = \alpha \beta'$



Cauzalitatea Granger: Rezultate empirice

Interpretare

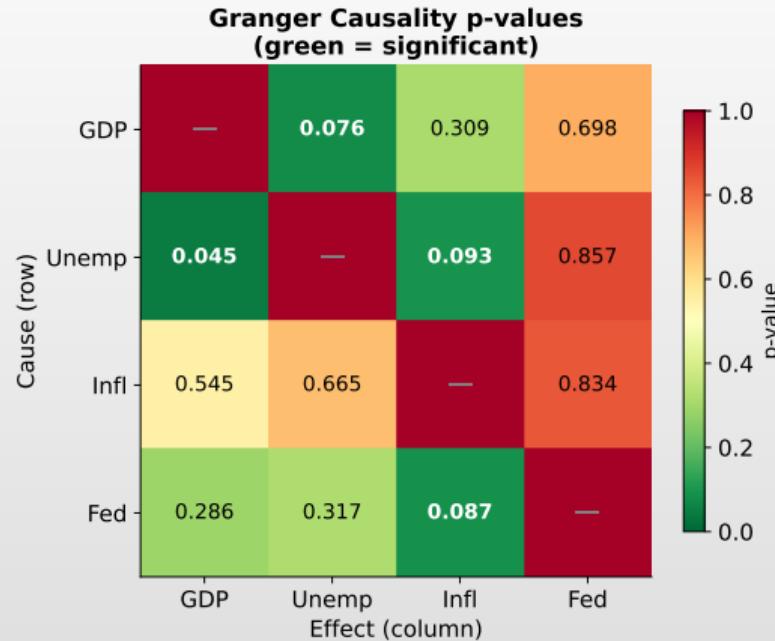
Fiecare celulă arată p-value-ul pentru testarea dacă variabila din rând Granger-cauzează variabila din coloană. Verde: $p < 0,10$. Citire: rând cauzează coloană.

Concluzii economice

- Șomaj \rightarrow PIB ($p = 0,045$): Legea lui Okun
- Fed \rightarrow Inflație ($p = 0,087$): Transmisia politiciei monetare
- PIB \rightarrow Șomaj: Dovezi slabe



Cauzalitatea Granger: Rezultate empirice



Cauzalitatea Granger: Definiție formală

Definiție 9 (Cauzalitatea Granger)

X Granger-cauzează Y dacă, pentru un $h > 0$:

$$\text{MSE} \left[\mathbb{E}[Y_{t+h} | \mathcal{F}_t^{X,Y}] \right] < \text{MSE} \left[\mathbb{E}[Y_{t+h} | \mathcal{F}_t^Y] \right]$$

unde $\mathcal{F}_t^{X,Y}$ include valorile trecute ale lui X și Y, iar \mathcal{F}_t^Y include doar trecutul lui Y.

Observație importantă

- Cauzalitatea Granger = **cauzalitate predictivă**, nu cauzalitate reală
- “X Granger-cauzează Y” \Rightarrow X conține informație utilă pentru prognoza lui Y
- Nu implică faptul că X cauzează Y în sens structural

Procedura de testare

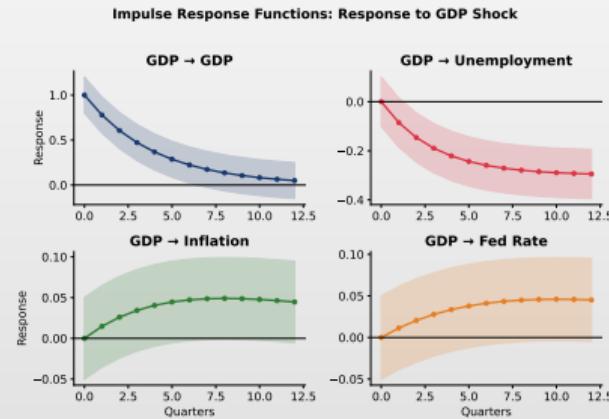
- Testul F (sau Wald): H_0 : coeficienții lag-urilor lui X sunt simultan zero în ecuația lui Y
- Respingem $H_0 \Rightarrow X$ Granger-cauzează Y



Funcții de răspuns la impuls (IRF)

Efecte

- ↑ PIB \succ ↓ Șomaj (Okun), ↑ Inflație (cerere), Fed crește rata



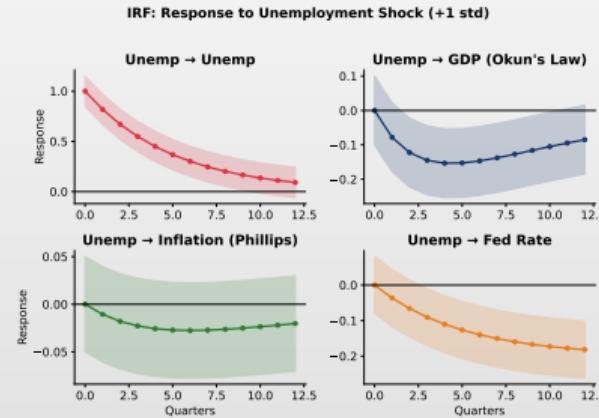
TSA_ch10_irf_gdp_shock



IRF: şoc şomaj

Efecte

- ↑ řomaj \succ ↓ PIB (Okun), ↓ Inflařie (Phillips), Fed reduce rata



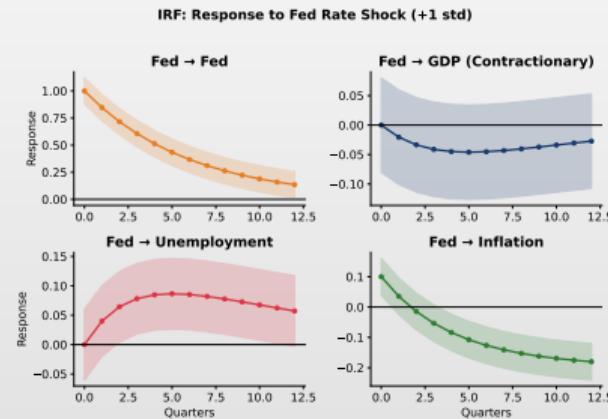
Q TSA_ch10_irf_unemp_shock



IRF: şoc rată Fed

Politică monetară

- Creștere rată \succ PIB \downarrow , Șomaj \uparrow , Inflație \downarrow

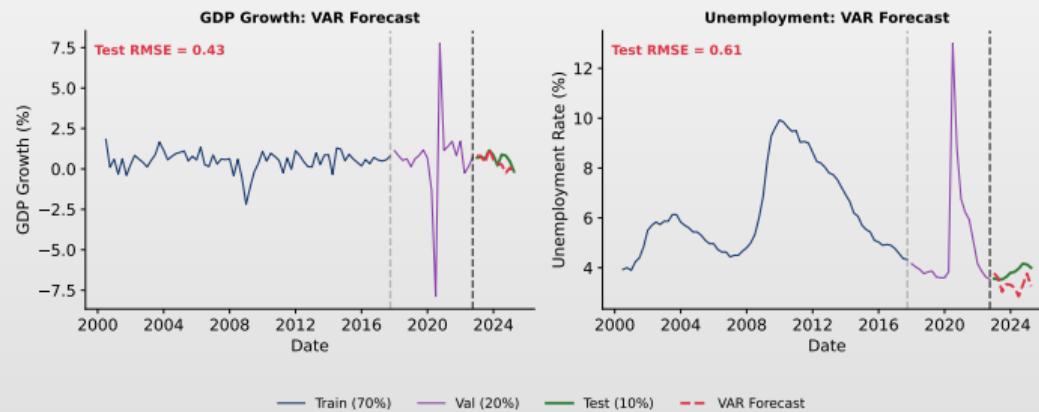


Q TSA_ch10_irf_fed_shock

VAR: Prognoza (Train/Val/Test)

Prognoză Rolling one-step-ahead

- VAR captează dinamică PIB-Şomaj
- Şocul COVID vizibil în perioadă validare (2020)



Q TSA_ch10_var_forecast



VAR: rezultate set test

Performanță set Test pe variabile

Variabilă	RMSE	MAE	Acur. Direcție
Creștere PIB	1,33	0,99	50%
Șomaj	0,64	0,52	50%
Inflație	1,56	1,12	60%
Rata Fed	2,59	2,45	80%
Medie	1,53	1,27	60%

Puncte forte

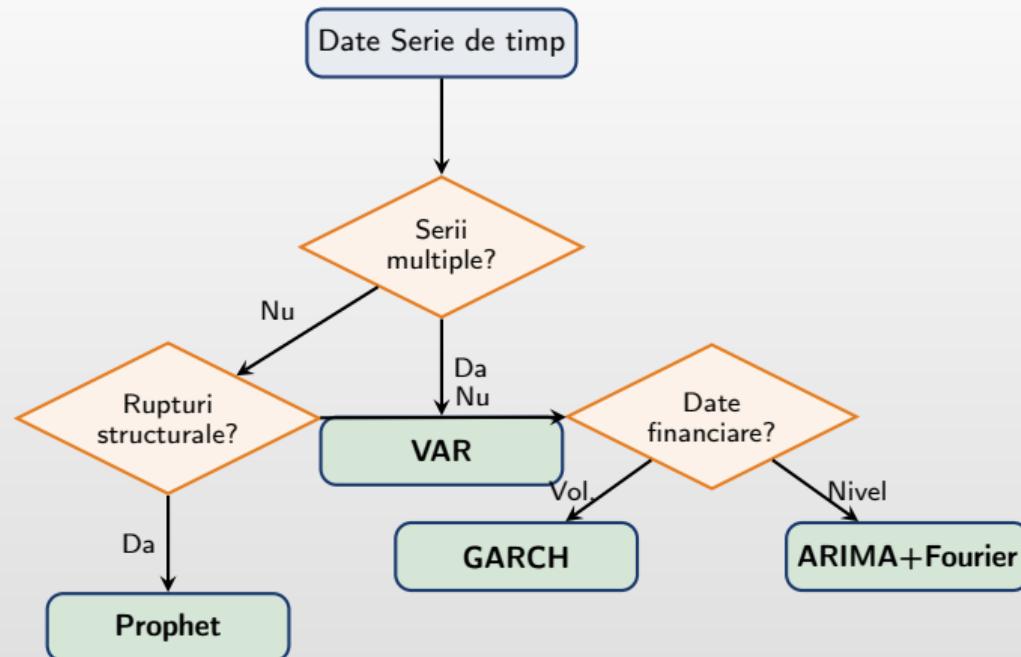
- Captează dinamică între variabile
- Acuratețe direcțională bună
- Relații interpretabile

Limitări

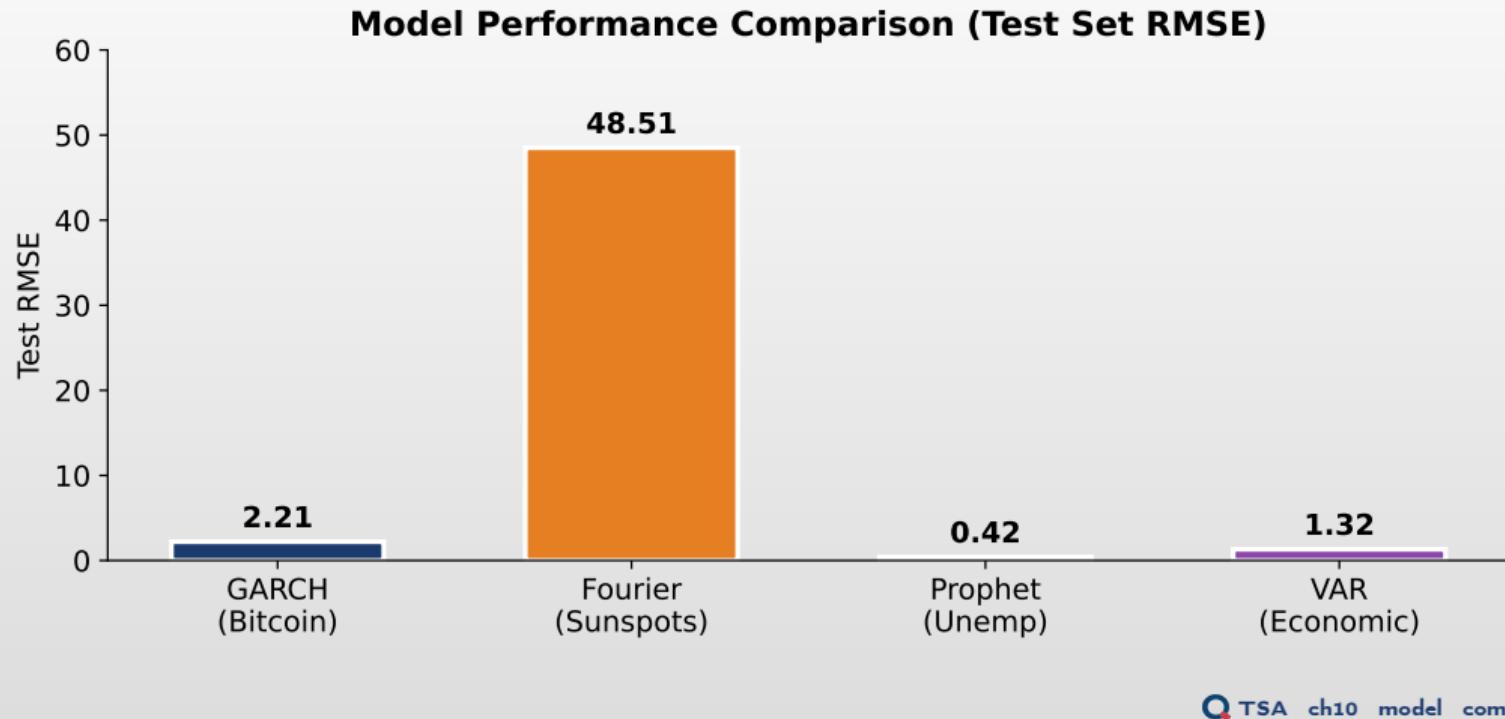
- Mulți parametri (blestemul dimensionalității)
- Sensibil la selectarea lag-ului
- Perioada COVID dificilă



Cadrul de selectare a modelului



Sumar: comparație modele



Sinteză: Comparația modelelor

Caracteristică	GARCH	Fourier	Prophet	VAR
Tintă	Volatilitate	Nivel	Nivel	Multiple
Sezonalitate	Nu	Da (lungă)	Da (multiplă)	Nu
Rupturi structurale	Nu	Nu	Da	Nu
Serii multiple	Nu	Nu	Nu	Da
Interpretabil	Mediu	Ridicat	Ridicat	Ridicat
Parametri	Puțini	2K	Auto	Mulți
Date lipsă	Nu	Nu	Da	Nu
Ideal pentru	Finanțe	Cicluri	Business	Macro

Concluzii empirice

- **GARCH:** Student-t \succ Normal ($\Delta AIC = 509$)
- **Fourier:** $K = 3$ armonici, validat pe set de test
- **Prophet:** adaptare la rupturi via changepoints
- **VAR:** interacțiuni macro semnificative (Granger)

Insight cheie

- RMSE nu se compară între seturi de date diferite!
- Fiecare model excelează în domeniul său
- Alegerea: potrivirea model \leftrightarrow date

Bune practici pentru prognoza aplicată

Metodologie

1. **Explorați** datele temeinic
2. **Testați** staționaritatea
3. **Împărțiți** train/validation/test
4. **Comparați** modele pe validare
5. **Raportați** metrii pe test

Greșeli frecvente

- Privirea în datele de test
- Supraajustare pe setul de antrenament
- Ignorarea ipotezelor modelului
- Neraportarea incertitudinii

Sfaturi practice

- Începeți simplu (random walk, naiv)
- Adăugați complexitate doar dacă e necesar
- Vizualizați prognoze vs. valori reale
- Verificați reziduurile pentru tipare
- Raportați intervale de încredere

Amintiți-vă

- “Toate modelele sunt greșite, dar unele sunt utile.” — George E. P. Box



Prognoză vs Cauzalitate vs Decizie

Obiectiv	Model	Focalizare
Predictie pură	ARIMA / ML	Acuratețe out-of-sample
Risc financiar	GARCH	Volatilitate, VaR
Dinamici macro	VAR	Interacțiuni multivariate
Relații structurale	SVAR / VECM	Identificare cauzală
Regimuri	Markov Switching	Schimbări de regim

Mesaj cheie

- Nu există model universal
- Există potrivire între model și problemă



Concluzii cheie

1. Metodologie Riguroasă

- ▶ Împărțirea train/validation/test previne supraajustarea
- ▶ Setul de test trebuie să rămână neatins până la evaluarea finală

2. Potriviți Modelul cu Datele

- ▶ Volatilitate finanțiară > GARCH
- ▶ Sezonalitate lungă > Termini Fourier
- ▶ Rupturi structurale > Prophet
- ▶ Serii multiple > VAR

3. Interpretați Rezultatele cu Grijă

- ▶ Cauzalitate Granger ≠ cauzalitate adeverată
- ▶ Performanța out-of-sample contează cel mai mult
- ▶ Modelele mai simple funcționează adesea mai bine



Rolul AI în modelarea seriilor de timp

AI poate

- Generează cod pentru estimare și prognoză
- Selectă modele (AutoML, grid search)
- Combina prognoze (ensemble)
- Detectă anomalii și pattern-uri

Dar nu poate

- Înlocuiște validarea statistică
- Detectă automat **data leakage**
- Garantează interpretare economică corectă
- Verifică ipotezele modelului

Principiu

- AI este **instrument**, nu autoritate
- Validarea statistică rămâne responsabilitatea cercetătorului



Exercițiu AI: Gândire critică

Prompt de testat în ChatGPT / Claude / Copilot

"Descarcă de pe FRED vânzările lunare cu amănuntul din SUA (seria RSXFS) din 2010-01 până în 2024-12 (180 observații). Fă o analiză completă a seriei de timp: descompunere, teste de staționaritate, selecție model (compară ETS, SARIMA și Prophet), prognoză pe 12 luni, evaluare cu RMSE/MAE/MASE pe un split temporal 70/15/15. Vreau cod Python de calitate publicabilă."

Exercițiu:

1. Rulați prompt-ul într-un LLM la alegere și analizați critic răspunsul.
2. Urmează fluxul corect? (grafic → descompunere → test → model → diagnostic → prognoză)
3. Compară mai multe modele (ETS, ARIMA, SARIMA) cu benchmark-uri adecvate?
4. Împărțirea train/test este făcută corect? Există surgeri de date (data leakage)?
5. Discută limitările și ipotezele modelului ales?

Atenție: Codul generat de AI poate rula fără erori și arăta profesional. *Asta nu înseamnă că e corect.*



Întrebarea 1

Întrebare

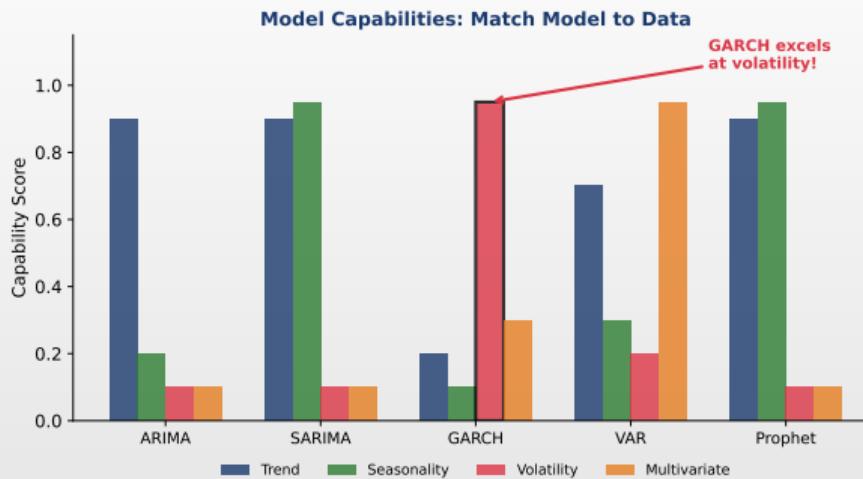
- Ce model alegeti pentru a prognoza volatilitatea randamentelor financiare?

Variante de răspuns

- (A) ARIMA — captează tendințe și autocorelații
- (B) GARCH — modelează varianța condiționată
- (C) Prophet — detectează puncte de schimbare
- (D) VAR — model multivariat pentru interdependențe



Întrebarea 1: Răspuns



Răspuns: (B)

- GARCH captează volatility clustering și riscul variabil în timp. ARIMA modeleză nivelul, Prophet sezonalitatea, VAR relațiile între serii — niciunul nu modeleză varianța direct.



Întrebarea 2

Întrebare

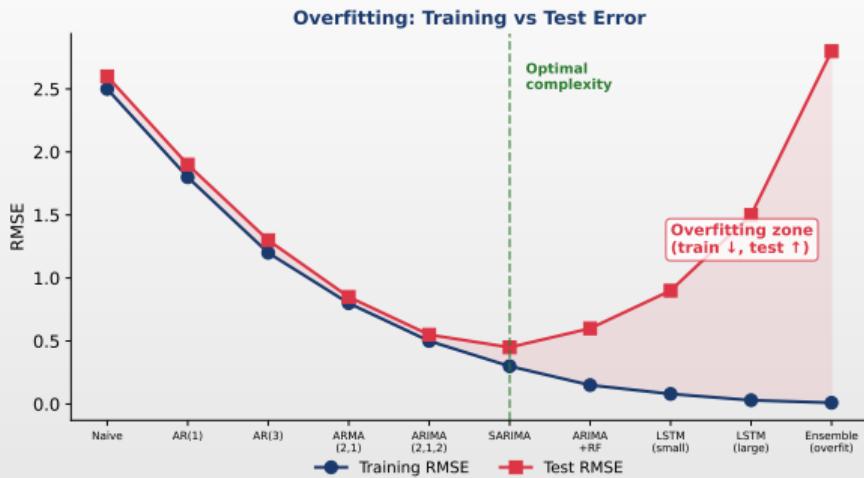
- Un model SARIMA obține RMSE = 0,05 pe antrenament, dar RMSE = 2,30 pe test. Ce indică aceasta?

Variante de răspuns

- (A)** Modelul este excelent — eroare mică pe antrenament
- (B)** Modelul suferă de overfitting — memorează zgomotul
- (C)** Setul de test este greșit — trebuie schimbat
- (D)** Diferența este normală — nu e nicio problemă



Întrebarea 2: Răspuns



Răspuns: (B)

- Un raport de $46\times$ între RMSE test și train semnalează overfitting sever. Modelul se potrivește zgomotului din antrenament și nu generalizează. Soluție: model mai simplu, validare.



Întrebarea 3

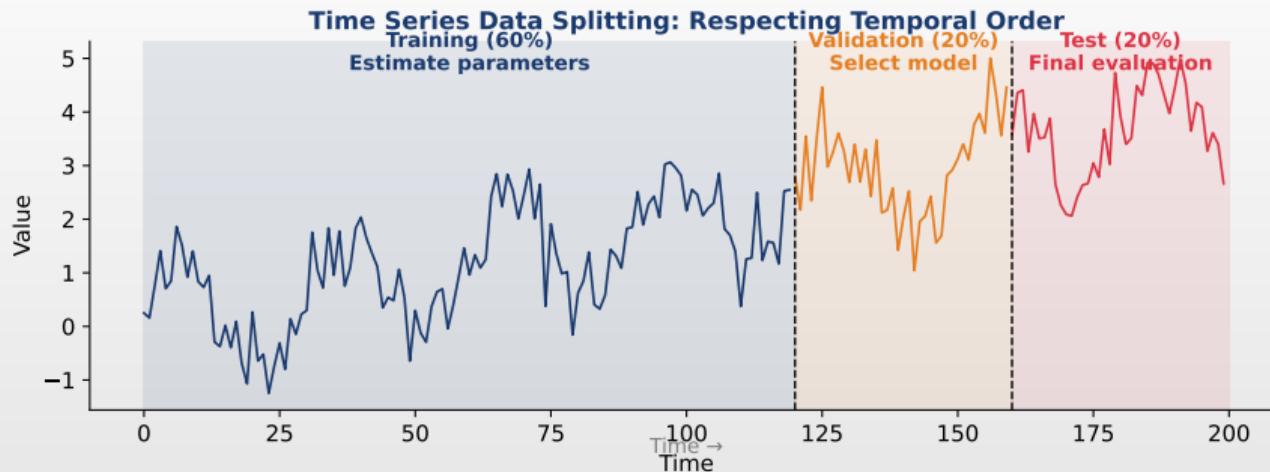
Întrebare

- De ce este importantă separarea datelor în train/validation/test?

Variante de răspuns

- (A)** Pentru a avea mai multe date de antrenament
- (B)** Pentru a preveni supraajustarea și a evalua corect
- (C)** Este doar o convenție, nu are importanță reală
- (D)** Pentru a reduce timpul de calcul

Întrebarea 3: Răspuns



Răspuns: (B)

- Train: estimează parametrii. Validare: selectează modelul. Test: evaluare finală nebiasată. Amestecarea acestor roluri duce la estimări optimiste ale performanței.

Q TSA_ch10_quiz3_train_val_test



Întrebarea 4

Întrebare

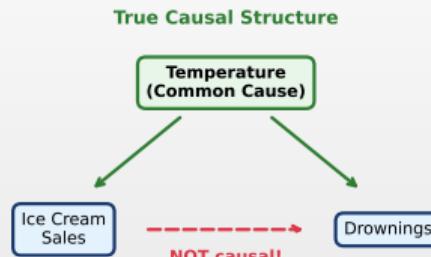
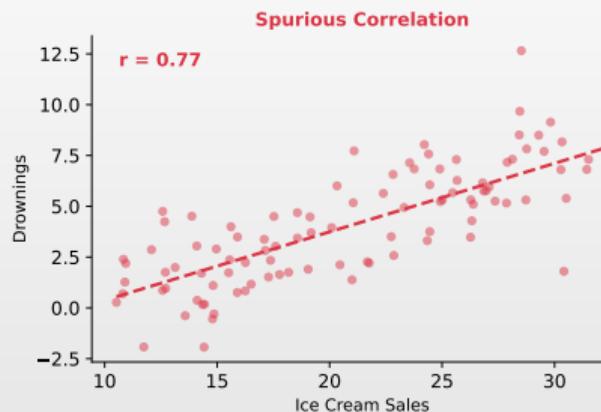
- Cauzalitatea Granger este echivalentă cu cauzalitatea reală (structurală)?

Variante de răspuns

- (A) Da — dacă X prezice Y , atunci X cauzează Y
- (B) Nu — testează doar conținut predictiv, nu cauzalitate
- (C) Depinde de numărul de lag-uri selectate
- (D) Da, dacă p-value < 0,05

Întrebarea 4: Răspuns

Granger Causality ≠ True Causality



Răspuns: (B)

- Testul Granger verifică dacă trecutul lui X îmbunătățește predicția lui Y . Corelații false (ex: vânzări de înghețată și încuri) pot trece testul din cauza cauzelor comune.



Întrebarea 5

Întrebare

- Ce model folosiți pentru o serie cu sezonalitate lungă (ex: $s = 365$ zile)?

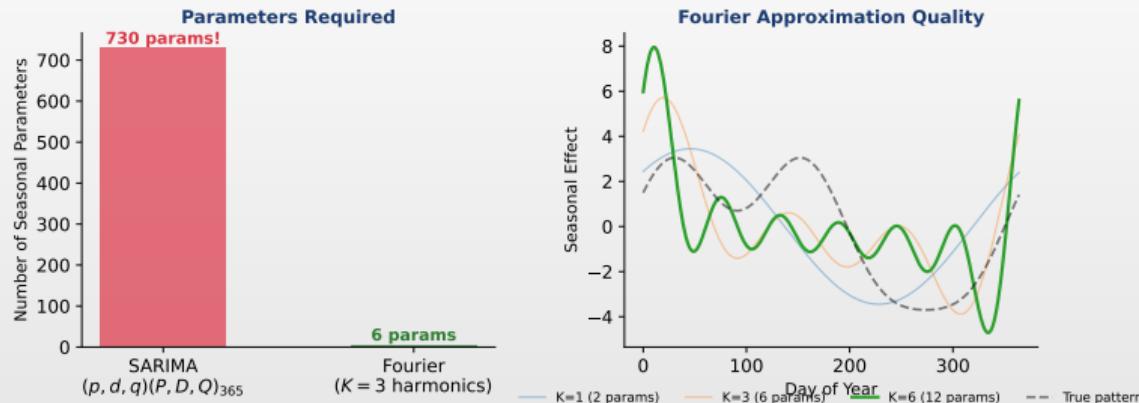
Variante de răspuns

- (A) SARIMA(p, d, q)(P, D, Q)₃₆₅
- (B) GARCH — modelează variația
- (C) ARIMA + Termeni Fourier sau Prophet/TBATS
- (D) VAR cu 365 lag-uri



Întrebarea 5: Răspuns

Long Seasonality ($s = 365$): Fourier Terms vs SARIMA



Răspuns: (C)

- SARIMA₃₆₅ necesită ~730 parametri sezonieri — imposibil. Termenii Fourier cu $K = 3$ folosesc doar 6 parametri. Prophet și TBATS gestionează sezonalități multiple automat.



Bibliografie I

Manuale fundamentale (referințe comune tuturor capitolelor)

- Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*, 3rd ed., OTexts.
- Shumway, R.H., & Stoffer, D.S. (2017). *Time Series Analysis and Its Applications*, 4th ed., Springer.

Lucrări de referință pe domenii

- Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*, 3rd ed., Wiley. (GARCH, VAR)
- Lütkepohl, H. (2005). *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer. (VAR, VECM)
- Francq, C., & Zakoïan, J.-M. (2019). *GARCH Models*, 2nd ed., Wiley. (Volatilitate)



Bibliografie II

Abordări moderne și competiții de prognoză

- Petropoulos, F., et al. (2022). Forecasting: Theory and Practice, *International Journal of Forecasting*, 38(3), 845–1054.
- Makridakis, S., Spiliotis, E., & Assimakopoulos, V. (2020). The M4 Competition, *International Journal of Forecasting*, 36(1), 54–74.
- Taylor, S.J., & Letham, B. (2018). Forecasting at Scale, *The American Statistician*, 72(1), 37–45.



Concluzii esențiale

Ce am învățat

- Selectarea modelului depinde de caracteristicile datelor: staționaritate, sezonalitate, volatilitate
- Metodologia Box-Jenkins oferă un cadru sistematic pentru modelarea seriilor de timp
- Evaluarea corectă necesită testare out-of-sample și validare încrucișată

Important

- Niciun model nu câștigă peste tot — potriviți modelul cu datele:
 - ▶ ARIMA pentru tendințe
 - ▶ SARIMA pentru sezonalitate
 - ▶ GARCH pentru volatilitate
 - ▶ VAR/VECM pentru dinamici multivariate
 - ▶ Prophet/TBATS pentru tipare complexe
- Validați întotdeauna out-of-sample!



Referințe

-  Box, G.E.P., Jenkins, G.M., Reinsel, G.C., & Ljung, G.M. (2015). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. 5th ed., Wiley.
-  Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
-  Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*. 3rd ed., Wiley.
-  Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*. 3rd ed., OTexts.
-  Taylor, S.J., & Letham, B. (2018). Forecasting at Scale. *The American Statistician*, 72(1), 37-45.
-  Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307-327.
-  Sims, C.A. (1980). Macroeconomics and Reality. *Econometrica*, 48(1), 1-48.

Vă Mulțumim!

Întrebări?

Materialele cursului sunt disponibile la: <https://danpele.github.io/Time-Series-Analysis/>

