



# Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 2: Modele ARMA



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

## Obiective de învățare

La finalul acestui capitol, veți fi capabili să:

1. Definiți și simulați procese AR( $p$ ), MA( $q$ ) și ARMA( $p, q$ )
2. Verificați condițiile de staționaritate și invertibilitate
3. Identificați ordinele  $p$  și  $q$  prin analiza ACF/PACF
4. Estimați parametrii prin Yule-Walker, MLE și criterii informaționale (AIC, BIC)
5. Diagnosticați modelul prin analiza reziduurilor și testul Ljung-Box
6. Prognozați folosind modele ARMA cu intervale de încredere
7. Aplicați metodologia Box-Jenkins pe date reale (pete solare)

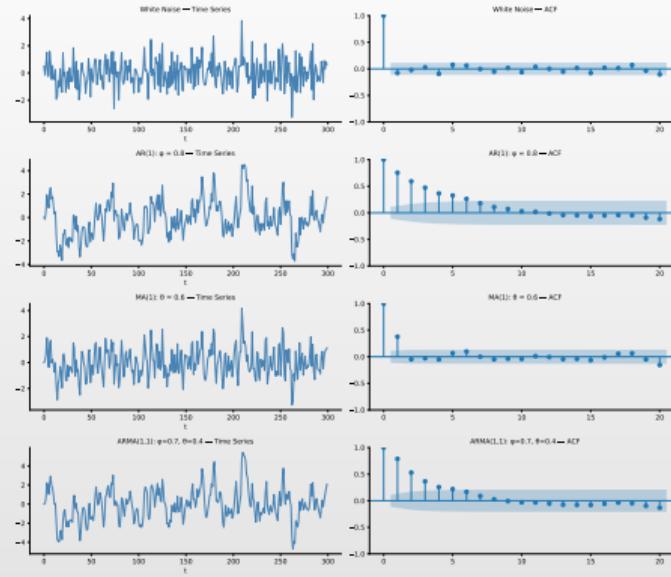


## Cuprins

- Motivație
- Diagnosticul modelului
- Introducere și operatorul lag
- Prognoza cu ARMA
- Modele autoregresive (AR)
- Implementare practică
- Modele de medie mobilă (MA)
- Studiu de caz: date reale
- Modele ARMA
- Utilizare IA
- Identificarea modelului
- Rezumat
- Estimarea parametrilor



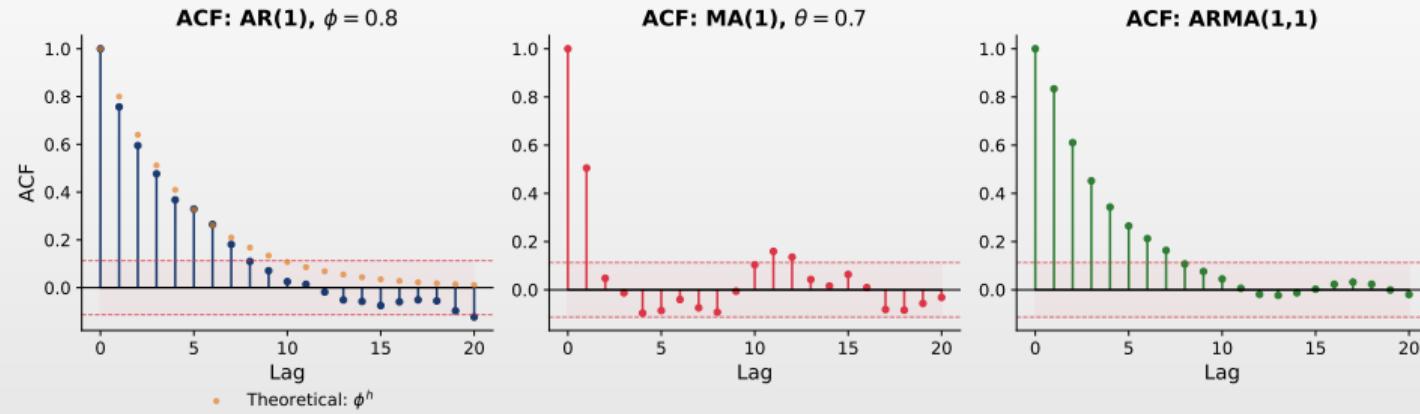
## De ce modele ARMA?



- **Procese AR:** Valoarea curentă depinde de valorile trecute  $\succ$  comportament de revenire la medie
- **Procese MA:** Valoarea curentă depinde de řourile trecute  $\succ$  memorie scurtă
- **ARMA:** Combină ambele mecanisme pentru modelare flexibilă

## Identificarea modelului prin tipare ACF

Distinct ACF patterns for different models



ACF reflectă structura modelului

- Tipare distințe:** AR: descreștere exponențială; MA: anulare bruscă; ARMA: descreștere mixtă
- Identificare:** Analiza vizuală a ACF/PACF ghidează selecția ordinelor  $p$  și  $q$



## Recapitulare: Staționaritatea

### Din capitolul 1

- Un proces  $\{X_t\}$  este **slab staționar** dacă:
  1.  $E[X_t] = \mu$  (medie constantă)
  2.  $\text{Var}(X_t) = \sigma^2 < \infty$  (varianță constantă, finită)
  3.  $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$  (covarianță depinde doar de lag-ul  $h$ )

### De ce contează staționaritatea pentru ARMA

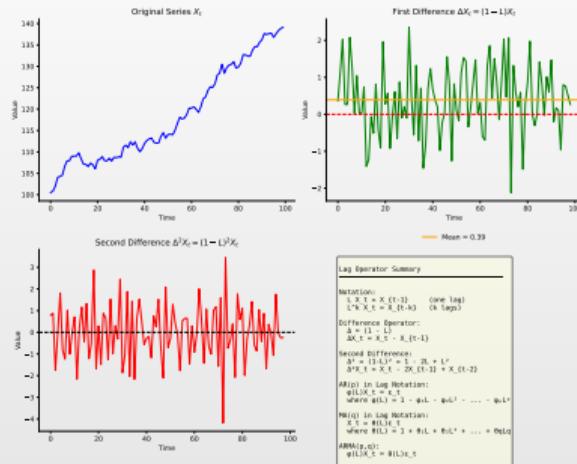
- Modelele ARMA presupun **staționaritate** – parametrii rămân stabili în timp, structura de autocorelație se menține
- Date **nestaționare**  $\succ$  diferențiați mai întâi (ARIMA, Cap. 3)

### Obiectivul capitolului

- Modele parametrice pentru serii staționare  $\succ$  combinând dependența de observațiile anterioare (AR) cu influența șocurilor aleatoare (MA)



## Operatorul lag: ilustrație vizuală



Q TSA\_ch2\_lag\_operator

## Rolul operatorului lag

- ☐ **Notație compactă:** ecuații cu diferențe, polinoame lag
- ☐ **Utilitate:** manipulare algebraică, condiții de staționaritate



## Operatorul lag (operatorul de întârziere)

### Definiție 1 (Operatorul lag)

- **Operatorul lag**  $L$  (sau operatorul de întârziere  $B$ ) deplasează o serie de timp înapoi cu o perioadă:  
$$LX_t = X_{t-1}$$

### Proprietăți

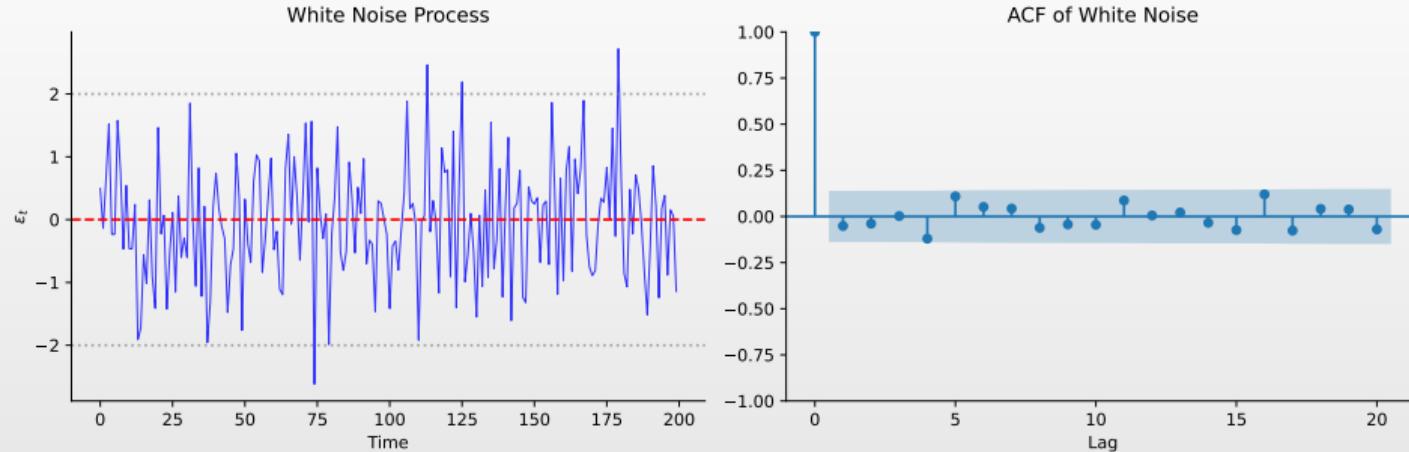
- $L^k X_t = X_{t-k}$  (deplasare înapoi cu  $k$  perioade)
- $L^0 X_t = X_t$  (identitate)
- $(1 - L)X_t = X_t - X_{t-1} = \Delta X_t$  (prima diferență)
- $(1 - L)^d X_t = \Delta^d X_t$  (diferență de ordin  $d$ )

### Polinoame lag

- **Polinom AR:**  $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p$
- **Polinom MA:**  $\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q$



## Zgomot alb: ilustrare vizuală



### Caracteristici cheie

- Stânga:** Fluctuații aleatorii, fără tipare, varianță constantă
- Dreapta:** ACF doar un vârf la lag 0; celelalte în limitele de semnificație  $\succ$  fără dependență liniară

TSA\_ch2\_white\_noise



## Procesul de zgomot alb

### Definiție 2 (Zgomot Alb)

- Un proces  $\{\varepsilon_t\}$  este **zgomot alb**, notat  $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ , dacă:
  1.  $E[\varepsilon_t] = 0$  pentru toți  $t$
  2.  $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$  pentru toți  $t$
  3.  $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$  pentru toți  $t \neq s$

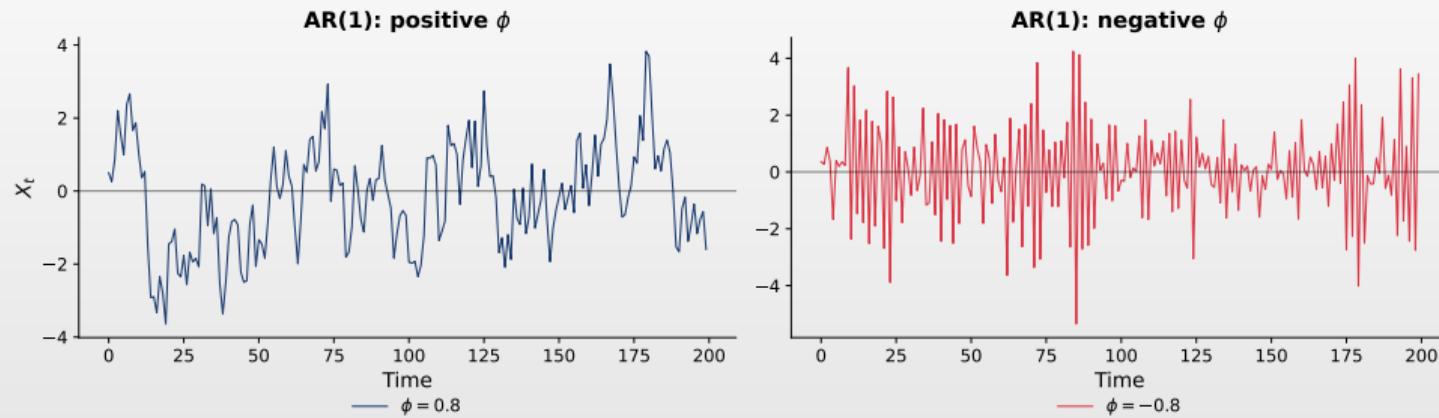
### Proprietăți

- **Element de bază:** Zgomotul alb stă la baza tuturor modelelor ARMA
- **ACF:**  $\rho(0) = 1$ ,  $\rho(h) = 0$  pentru  $h \neq 0$ ; PACF: același tipar
- **Zgomot alb Gaussian:**  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$  i.i.d.
- **Nepredictibil:** Zgomotul alb *nu* este predictibil  $\succ$  este pur aleatoriu



## AR(1): ilustrație vizuală

AR(1): different behavior for positive vs negative  $\phi$



### Interpretarea vizuală

- $\phi$  pozitiv:** Fluctuații persistente, revenire graduală la medie
- $\phi$  negativ:** Comportament oscilant, alternând în jurul mediei
- $|\phi|$  mai mare  $\succ$  persistență mai mare, revenire mai lentă



## Modelul AR(1): definiție

### Definiție 3 (Proces AR(1))

- Un proces autoregresiv de ordin 1 este:  $X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$
- $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$  și  $|\phi| < 1$  pentru staționaritate

### Interpretare

- $c$ : constantă (interceptul)
- $\phi$ : coeficient autoregresiv
  - ▶ Măsoară persistența seriei
- $\varepsilon_t$ : inovație (șoc)

### Notație cu operatorul lag

- $(1 - \phi L)X_t = c + \varepsilon_t$
- $\phi(L)X_t = c + \varepsilon_t$
- $\phi(L) = 1 - \phi L$



## Condiția de staționaritate AR(1)

Condiție necesară și suficientă:  $|\phi| < 1$

- Rădăcina ecuației caracteristice trebuie să fie în afara cercului unitate

Nestaționar ( $|\phi| \geq 1$ )

- řocurile se diminuează în timp
  - ▶ Procesul revine la medie
  - ▶ Varianță finită, stabilă

- $|\phi| = 1$ : mers aleatoriu
  - ▶ Rădăcină unitate, varianță  $\rightarrow \infty$
- $|\phi| > 1$ : proces exploziv

### Ecuatăia caracteristică

- $\phi(z) = 1 - \phi z = 0 \implies z = 1/\phi$
- Staționaritate  $\Leftrightarrow$  rădăcina în afara cercului unitate ( $|z| > 1$ )



## Proprietățile AR(1)

### AR(1) staționar cu $|\phi| < 1$

- Proprietățile momentelor:

**Media:**  $\mu = \mathbb{E}[X_t] = \frac{c}{1-\phi}$

**Varianță:**  $\gamma(0) = \text{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$

**Autocovarianță:**  $\gamma(h) = \frac{\phi^h \sigma^2}{1-\phi^2}$

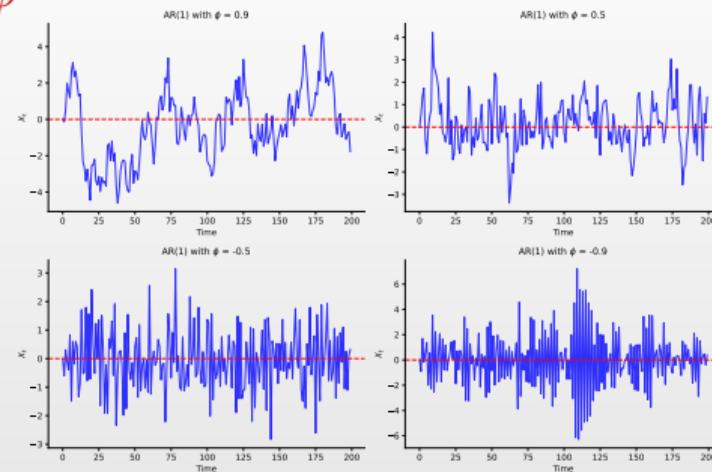
**Autocorelația (ACF):**  $\rho(h) = \phi^h$

### Observație cheie

- **Semnătura AR(1):** ACF scade exponential cu factorul  $\phi$

- ▶  $\phi > 0$ : descreștere monotonă spre zero
- ▶  $\phi < 0$ : oscilații amortizate (semne alternante)

## Simulări AR(1): efectul lui $\phi$

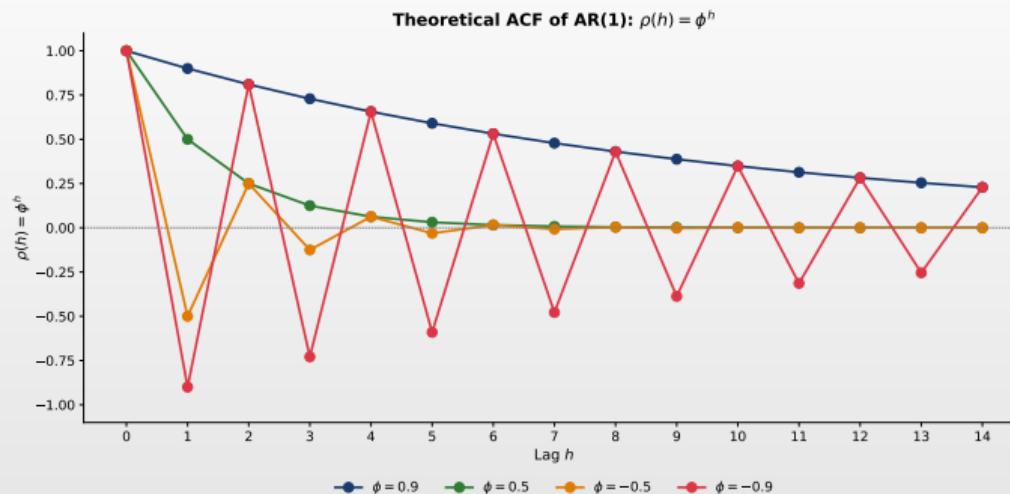


### Interpretare

- Valori diferite ale lui  $\phi$  produc comportamente distincte:  $|\phi|$  mai mare  $\succ$  mai multă persistență
- $\phi$  pozitiv creează evoluții netede;  $\phi$  negativ creează oscilații
- Pe măsură ce  $|\phi| \rightarrow 1$ , procesul se apropie de nestaționaritate



## ACF teoretic AR(1)

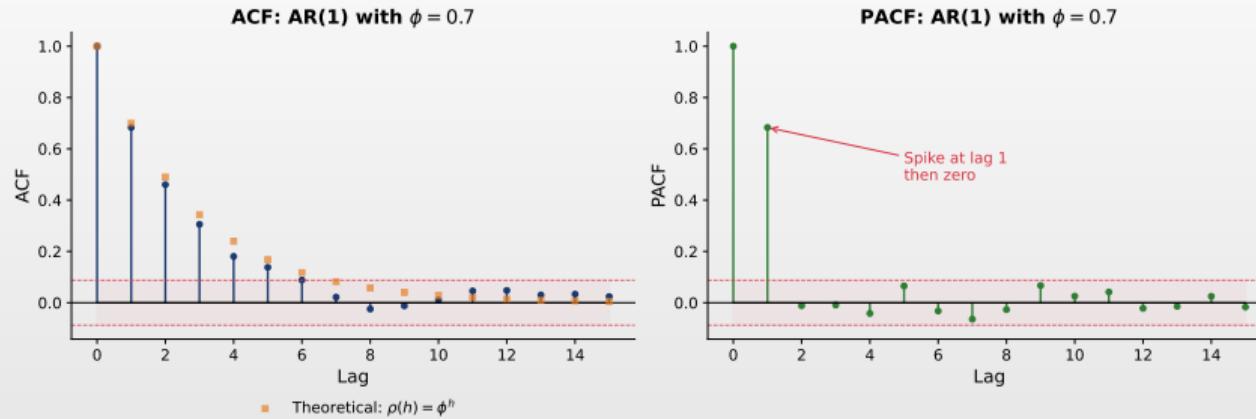


## Tipar ACF

- Formula:  $\rho(h) = \phi^h \succ$  descreștere exponențială
- $\phi > 0$ : descreștere monotonă;  $\phi < 0$ : semne alternante

## ACF și PACF AR(1): teorie vs eşantion

ACF and PACF for AR(1): theory vs sample



### Interpretare

- **ACF:** Descreștere exponențială cu factorul  $\phi$ ; formula:  $\rho(h) = \phi^h$
- **PACF:** Un singur vârf la lag 1, apoi se anulează ✓ identifică AR(1)
- Estimările din eşantion fluctuează în jurul valorilor teoretice



## Demonstrație: media AR(1)

### Afirmație

- Pentru AR(1):  $X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$ , media este  $\mu = \frac{c}{1-\phi}$

### Demonstrație

- Luăm speranța ambelor părți:  $\mathbb{E}[X_t] = c + \phi\mathbb{E}[X_{t-1}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t]$
- Prin staționaritate,  $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_{t-1}] = \mu$ , și  $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$ :  $\mu = c + \phi\mu$
- Rezolvând:  $\mu - \phi\mu = c \implies \mu(1 - \phi) = c \implies \mu = \frac{c}{1 - \phi}$

### Cerintă

- **Condiție necesară:**  $\phi \neq 1$  pentru ca media să fie definită
  - ▶ Dacă  $\phi = 1$  (rădăcină unitară), media este nedefinită
  - ▶ Procesul devine mers aleatoriu (nestaționaritate)



## Demonstrație: varianța AR(1)

### Afirmație

- $\text{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$

### Demonstrație

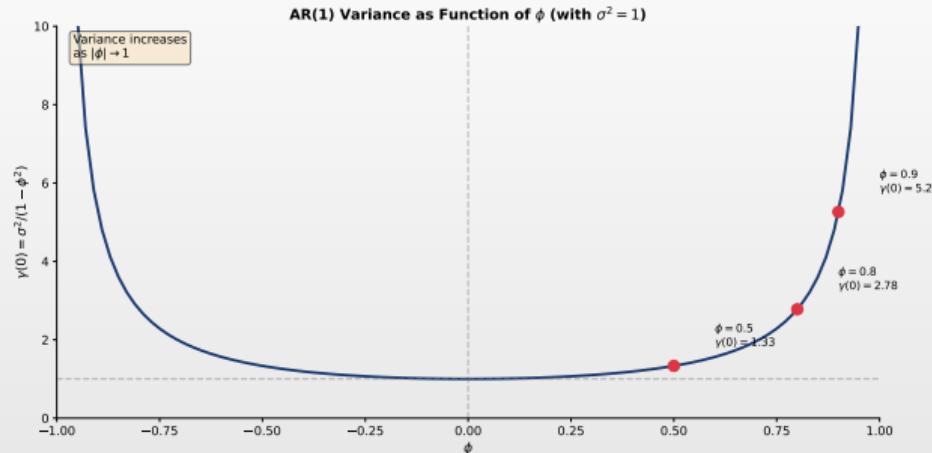
- Presupunem  $c = 0$ . Luăm varianța din  $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$ :
- $\text{Var}(X_t) = \phi^2 \text{Var}(X_{t-1}) + \text{Var}(\varepsilon_t) + 2\phi \underbrace{\text{Cov}(X_{t-1}, \varepsilon_t)}_{=0}$
- Prin staționaritate,  $\text{Var}(X_t) = \text{Var}(X_{t-1}) = \gamma(0)$ :
- $\gamma(0) = \phi^2 \gamma(0) + \sigma^2 \implies \gamma(0)(1 - \phi^2) = \sigma^2 \implies \boxed{\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}}$

### Notă

- Necesită  $|\phi| < 1$  pentru varianță pozitivă. Când  $|\phi| \rightarrow 1$ , varianță  $\rightarrow \infty$



## Varianța AR(1) ca funcție de $\phi$



### Observații

- Pe măsură ce  $|\phi| \rightarrow 1$ , varianța explodează  $\succ$  nestaționaritate
- Pentru  $\phi = 0$ :  $\gamma(0) = \sigma^2$  (zgomot alb); varianța crește monoton cu  $|\phi|$

## Demonstrație: funcția de autocorelație AR(1)

Afirmație:  $\rho(h) = \phi^h$  pentru  $h \geq 0$

- Găsim autocovarianța  $\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t-h})$

### Demonstrație

- Înmulțim  $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$  cu  $X_{t-h}$  și luăm media:
- $\mathbb{E}[X_t X_{t-h}] = \phi \mathbb{E}[X_{t-1} X_{t-h}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-h}]$
- Pentru  $h \geq 1$ :  $\mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-h}] = 0 \succ \gamma(h) = \phi \gamma(h-1)$
- Relație recursivă de la  $\gamma(0)$ :  $\gamma(1) = \phi \gamma(0)$ ,  $\gamma(2) = \phi^2 \gamma(0)$ , ...  $\gamma(h) = \phi^h \gamma(0)$
- ACF:  $\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \frac{\phi^h \gamma(0)}{\gamma(0)} = \boxed{\phi^h}$



## Demonstrație: condiția de staționaritate AR(1)

### Afirmație

- AR(1) este staționar dacă și numai dacă  $|\phi| < 1$

### Demonstrație

- Substituție recursivă:  $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t = \phi(\phi X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \dots$
- După  $n$  pași:  $X_t = \phi^n X_{t-n} + \sum_{j=0}^{n-1} \phi^j \varepsilon_{t-j}$
- Dacă  $|\phi| < 1$ :  $\phi^n \rightarrow 0$  când  $n \rightarrow \infty$ , deci  $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}$
- Varianță finită:  $\text{Var}(X_t) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j} = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} < \infty$  (serie geometrică)

### Concluzie

- Converge  $\iff |\phi| < 1$ . Pentru  $|\phi| \geq 1$ , termenul  $\phi^n X_{t-n}$  nu dispare  $\Rightarrow$  varianță infinită



## Funcția de autocorelație parțială (PACF)

### Definiție 4 (PACF)

- Autocorelația parțială de ordin  $k$ , notată  $\pi_k$ , măsoară corelația dintre  $X_t$  și  $X_{t-k}$  după eliminarea efectelor liniare ale variabilelor intermediare  $X_{t-1}, \dots, X_{t-k+1}$

### Definiție formală

- $\pi_1 = \rho(1)$
- Pentru  $k \geq 2$ :  $\pi_k$  este ultimul coeficient din:  
$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \dots + \alpha_k X_{t-k} + e_t$$
- $\pi_k = \alpha_k$  (coeficientul lui  $X_{t-k}$ )

### Calculul prin Yule-Walker

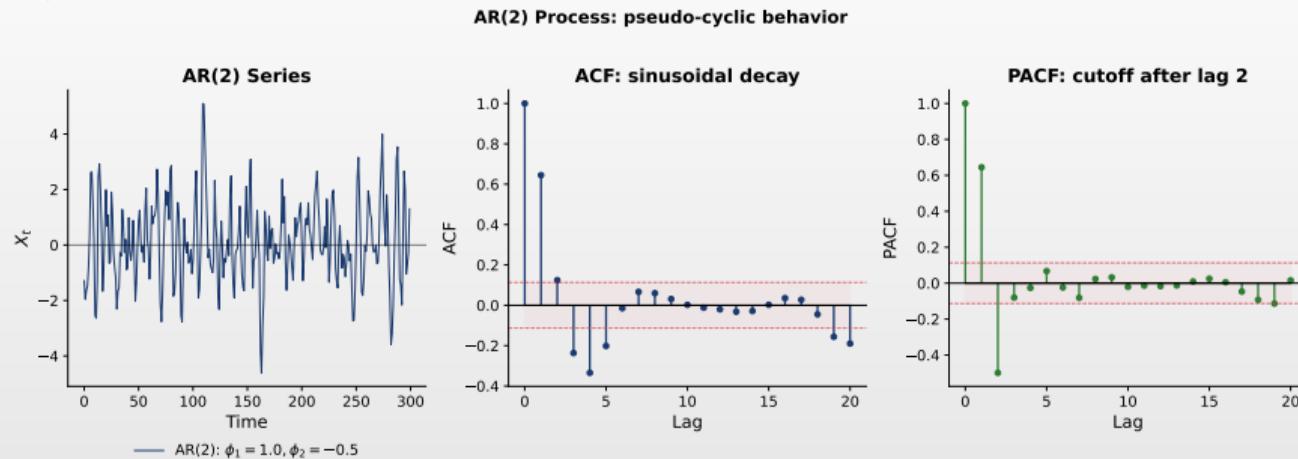
- Se rezolvă ecuațiile Yule-Walker de ordin  $k$
- $\pi_k =$  ultimul element al vectorului soluție

### Utilitate

- Identificare:** PACF determină ordinul  $p$  al unui model AR
  - PACF se anulează după lag  $p$



## AR(p): ilustrație vizuală



### Observații

- AR(2) poate prezenta comportament pseudo-ciclic (rădăcini complexe); ACF sinusoidală amortizată
- PACF se anulează după lag 2 ➤ tiparul cheie de identificare



## Modelul AR(p): forma generală

### Definiție 5 (Proces AR(p))

- Un proces autoregresiv de ordin  $p$  este:  $X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$
- Operator lag:  $\phi(L)X_t = c + \varepsilon_t$ , unde  $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p$

### Condiție de staționaritate

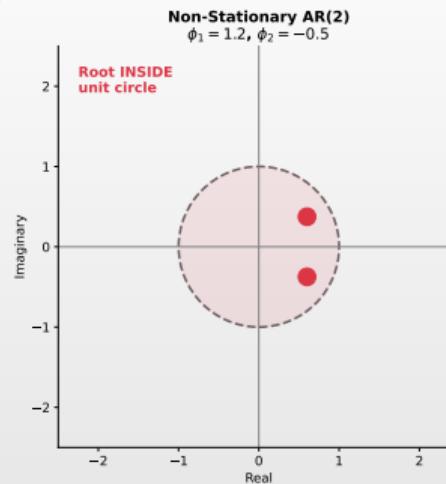
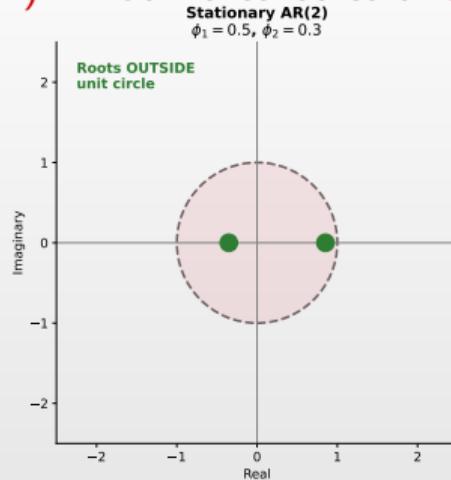
- Toate rădăcinile lui  $\phi(z) = 0$  trebuie să se afle în afara cercului unitate
- Echivalent: toate rădăcinile au modul  $> 1$

### Tiparul PACF

- PACF se anulează după lag  $p$
- ACF scade (exponențial sau cu oscilații amortizate)



## Staționaritatea AR(2): vizualizarea cercului unitate

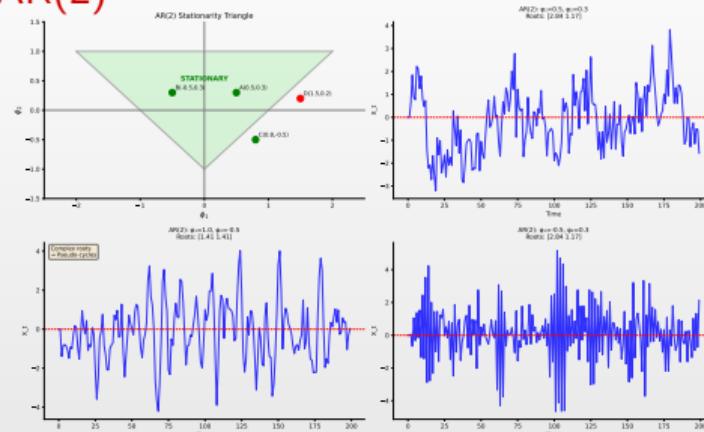


### Polinomul caracteristic și condiția cercului unitate

- **Polinomul caracteristic** al unui proces AR( $p$ ):  $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p$
- Toate rădăcinile lui  $\phi(z) = 0$  trebuie să se afle **în afara** cercului unitate ( $|z| > 1$ )
- Rădăcini pe cerc: nestaționar; rădăcini **în interior**: proces exploziv



## Triunghiul de staționaritate AR(2)

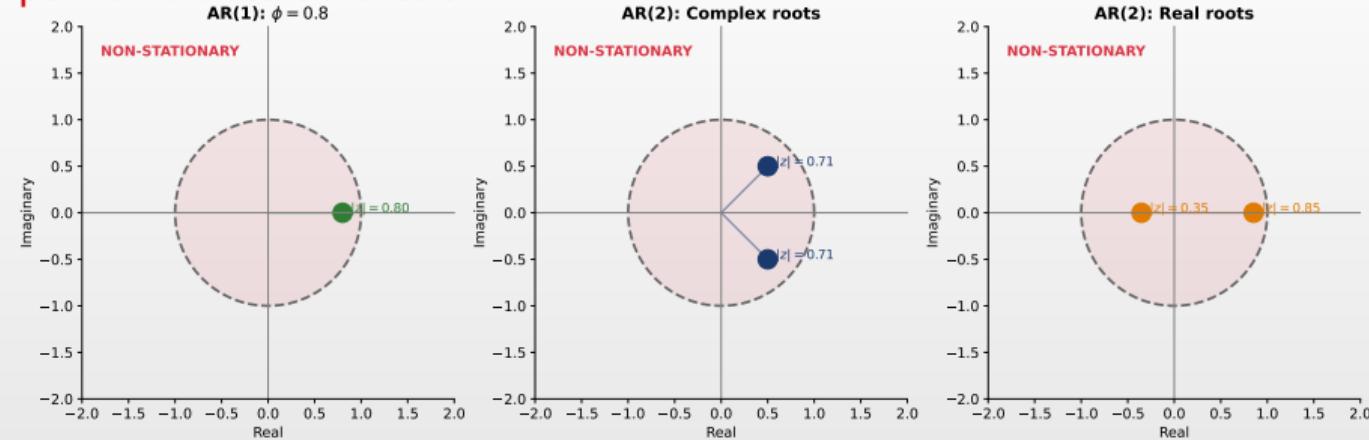


### Regiunea de staționaritate

- Regiunea triunghiulară definește combinațiile de parametri AR(2) staționari
- Granițe:**  $\phi_1 + \phi_2 < 1$ ,  $\phi_2 - \phi_1 < 1$  și  $|\phi_2| < 1$
- Punctele din afara regiunii  $\succ$  procese nestaționare sau explosive



## Rădăcinile polinomului caracteristic



### Tipuri de rădăcini

- **Rădăcini reale:** descreștere exponențială în ACF
- **Rădăcini complexe:** oscilații amortizate (pseudo-cicluri)
- Toate rădăcinile trebuie să fie în afara cercului unitate



## Modelul AR(2)

### Definiție 6 (Proces AR(2))

- $X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$

### Condiții de staționaritate

- $\phi_1 + \phi_2 < 1; \quad \phi_2 - \phi_1 < 1; \quad |\phi_2| < 1$

### Comportamentul ACF

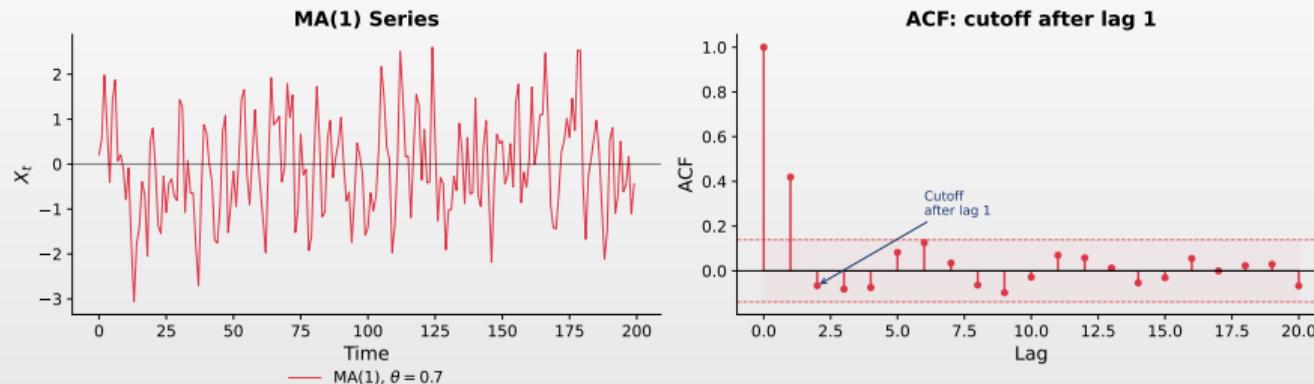
- Rădăcini reale:** amestec de două descreșteri exponențiale
- Rădăcini complexe:** tipar sinusoidal amortizat (pseudo-cicluri)
- PACF:** Se anulează după lag 2 ( $\pi_k = 0$  pentru  $k > 2$ )

Q TSA\_ch2\_ar2



## MA(1): ilustrație vizuală

MA(1): short memory series with ACF cutoff



### Interpretare vizuală

- Panoul stâng: Serie MA(1)  $\succ$  revenire rapidă la medie
- Panoul drept: ACF cu anulare după lag 1; PACF descreștere exponențială



## Modelul MA(1): definiție

### Definiție 7 (Proces MA(1))

- Un proces de medie mobilă de ordin 1 este:  $X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$
- $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$

### Interpretare

- $\mu$ : media procesului
- $\theta$ : coeficient MA
  - ▶ Măsoară impactul şocului trecut
- Depinde de  $\varepsilon_t$  și  $\varepsilon_{t-1}$

### Notație cu operatorul lag

- $X_t = \mu + \theta(L)\varepsilon_t$
- $\theta(L) = 1 + \theta L$

### Proprietate cheie

- Staționaritate garantată:** Procesele MA sunt întotdeauna staționare
  - ▶ Nu depinde de valoarea lui  $\theta$



## Proprietățile MA(1)

MA(1):  $X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$

- Media:**  $\mathbb{E}[X_t] = \mu$ ;    **Varianță:**  $\gamma(0) = \sigma^2(1 + \theta^2)$
- Autocovarianță:**  $\gamma(1) = \theta\sigma^2$ ,  $\gamma(h) = 0$  ( $h > 1$ )
- ACF:**  $\rho(1) = \frac{\theta}{1+\theta^2}$ ,  $\rho(h) = 0$  ( $h > 1$ )

### Observație cheie

- Semnătura MA(1):** ACF se anulează după lag 1
  - $\rho(1) \neq 0$ , dar  $\rho(h) = 0$  pentru  $h > 1$ ; tipar opus față de AR(1)

 TSA\_ch2\_ma1



## Demonstrație: varianța și autocovarianța MA(1)

Punct de plecare:  $X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$  (presupunând  $\mu = 0$ )

### Varianța:

$$\gamma(0) = \text{Var}(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}) = \sigma^2 + \theta^2\sigma^2 + 0 = \boxed{\sigma^2(1 + \theta^2)}$$

### Autocovarianța la lag 1

- $\gamma(1) = \text{Cov}(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2})$
- $= \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) + \theta\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-2}) + \theta\text{Cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) + \theta^2\text{Cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2})$
- $= 0 + 0 + \theta\sigma^2 + 0 = \boxed{\theta\sigma^2}$

### Autocovarianța la lag $h \geq 2$

- Niciun termen ε comun  $\succ \gamma(h) = 0$



## Demonstrație: maximul ACF pentru MA(1)

Afirmație:  $|\rho(1)| \leq 0.5$  pentru orice valoare a lui  $\theta$

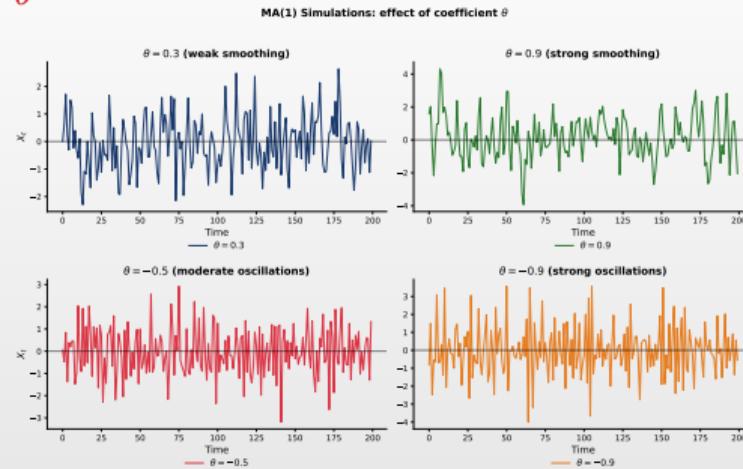
- ACF la lag 1:  $\rho(1) = \frac{\theta}{1+\theta^2}$
- Derivăm:  $\frac{d\rho(1)}{d\theta} = \frac{1-\theta^2}{(1+\theta^2)^2} = 0 \succ \theta = \pm 1$
- La aceste valori:  $\rho(1)|_{\theta=1} = \frac{1}{2}$ ,  $\rho(1)|_{\theta=-1} = -\frac{1}{2}$

### Implicație

- **Test practic:** Dacă  $|\hat{\rho}(1)| > 0.5$  din date, procesul **nu** este MA(1)
  - ▶ Maximul  $|\rho(1)| = 0.5$  se atinge la  $\theta = \pm 1$
  - ▶ Considerați modele AR sau ARMA ca alternative



## Simulări MA(1): efectul lui $\theta$



### Interpretare

- MA(1) este întotdeauna staționar indiferent de  $\theta \succ$  memorie finită de doar un lag
- $\theta$  pozitiv netezește seria;  $\theta$  negativ creează fluctuații mai rapide
- Spre deosebire de AR(1), șocurile MA(1) afectează procesul doar pentru o perioadă



## Demonstrație: ACF pentru MA(1)

Afirmație:  $\rho(1) = \frac{\theta}{1+\theta^2}$  și  $\rho(h) = 0$  pentru  $h > 1$

- MA(1) are autocorelație nenulă doar la lag 1

### Demonstrație

- Fie  $X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$ .
- Autocorelația la lag 1:  $\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{\theta\sigma^2}{\sigma^2(1+\theta^2)} = \boxed{\frac{\theta}{1+\theta^2}}$
- Pentru  $h > 1$ :  $\gamma(h) = \text{Cov}(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-h} + \theta\varepsilon_{t-h-1})$
- Termenii  $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}$  nu se suprapun cu  $\varepsilon_{t-h}, \varepsilon_{t-h-1}$  când  $h > 1$ , deci  $\boxed{\gamma(h) = 0}$

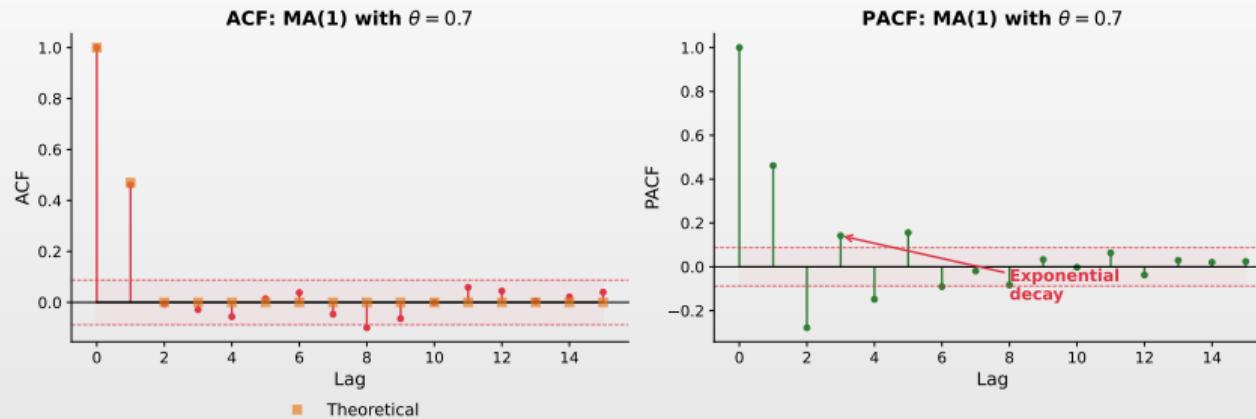
### Consecință practică

- ACF se anulează brusc după lag 1  $\Rightarrow$  semn distinctiv al proceselor MA(1)



## ACF și PACF MA(1): comparație vizuală

ACF and PACF for MA(1): opposite pattern to AR(1)

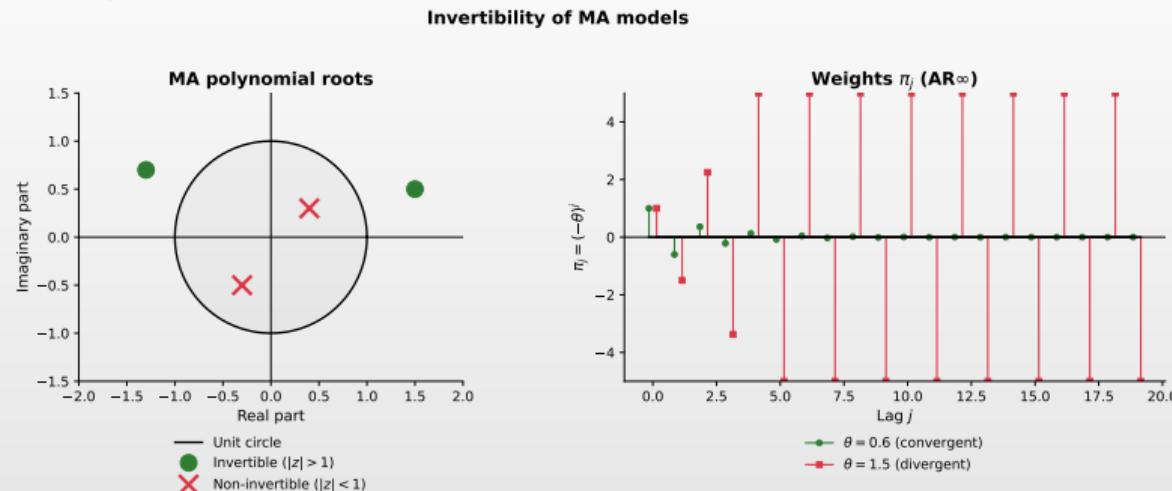


### Interpretare

- **ACF:** Un singur vârf la lag 1, apoi se anulează  $\succ$  semnătura cheie MA(1)
- **PACF:** Descreștere exponențială  $\succ$  tipar opus față de AR(1)
- Această inversare diferențiază procesele MA de cele AR



## Invertibilitate: ilustrație vizuală



### Interpretare

- **Stânga:** invertibilitatea necesită rădăcini în afara cercului unitate
- **Dreapta:** ponderile  $AR(\infty)$  scad doar când  $|\theta| < 1$



## Invertibilitatea modelelor MA

### Definiție 8 (Invertibilitate)

- Un proces MA este **invertibil** dacă poate fi scris ca un proces AR infinit:
- $X_t = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j (X_{t-j} - \mu) + \varepsilon_t$

### Condiții de invertibilitate

- MA(1):** Invertibil dacă  $|\theta| < 1$
- MA(q):** Rădăcinile lui  $\theta(z) = 0$  în afara cercului unitate

### De ce contează invertibilitatea

- Asigură reprezentare unică (fără invertibilitate, mai multe modele MA descriu aceleași date)
- Necesară pentru prognoză și estimare
- Staționaritate**  $\succ$  AR; **Invertibilitate**  $\succ$  MA



## Demonstrație: invertibilitatea MA(1)

### Afirmație

- MA(1) este invertibil dacă și numai dacă  $|\theta| < 1$

### Demonstrație

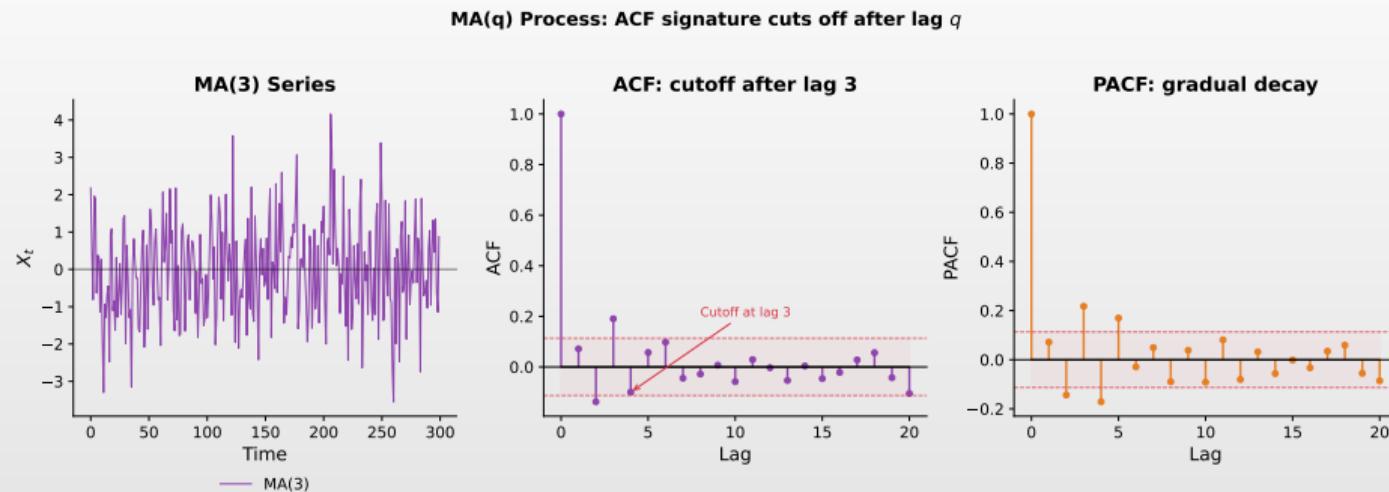
- Din  $X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$ , izolăm:  $\varepsilon_t = X_t - \theta\varepsilon_{t-1}$
- Substituție recursivă:  $\varepsilon_t = X_t - \theta(X_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-2}) = X_t - \theta X_{t-1} + \theta^2\varepsilon_{t-2}$
- Continuând:  $\varepsilon_t = \sum_{j=0}^n (-\theta)^j X_{t-j} + (-\theta)^{n+1}\varepsilon_{t-n-1}$
- Dacă  $|\theta| < 1$ :  $(-\theta)^{n+1} \rightarrow 0$ , deci 
$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} (-\theta)^j X_{t-j}$$

### Concluzie

- Seria geometrică converge  $\iff |\theta| < 1 \Rightarrow \text{MA}(1) \text{ se scrie ca AR}(\infty)$



## MA(q): ilustrație vizuală



### Observație

- Proces MA(3): semnătura cheie  $\succcurlyeq$  ACF se anulează după lag  $q$  ( $\rho(h) = 0$  pentru  $h > 3$ )

TSA\_ch2\_acf\_pacf\_patterns



## Modelul MA(q): forma generală

### Definiție 9 (Proces MA(q))

- Un proces de medie mobilă de ordin q:  $X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q\varepsilon_{t-q}$
- Operator lag:  $X_t = \mu + \theta(L)\varepsilon_t$ , unde  $\theta(L) = 1 + \theta_1L + \dots + \theta_qL^q$

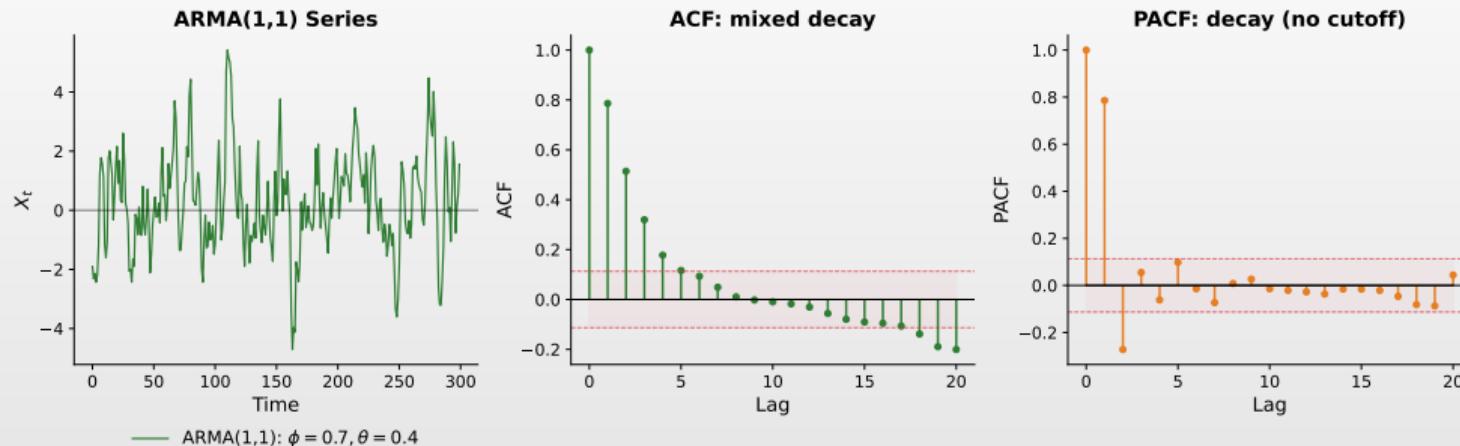
### Proprietăți

- Întotdeauna staționar (varianță finită)
- ACF se anulează după lag  $q$ :  $\rho(h) = 0$  pentru  $h > q$ ; PACF scade gradual
- Invertibil dacă toate rădăcinile lui  $\theta(z) = 0$  se află în afara cercului unitate



## ARMA: ilustrație vizuală

**ARMA(1,1): neither ACF nor PACF cut off**



### Interpretare ARMA(1,1)

- Combină persistența AR cu răspunsul la șocuri MA; ACF/PACF ambele descresc
- Nici ACF nici PACF nu se întrerup ➤ identificator cheie pentru modele mixte



## Modelul ARMA(p,q): definiție

### Definiție 10 (Proces ARMA(p,q))

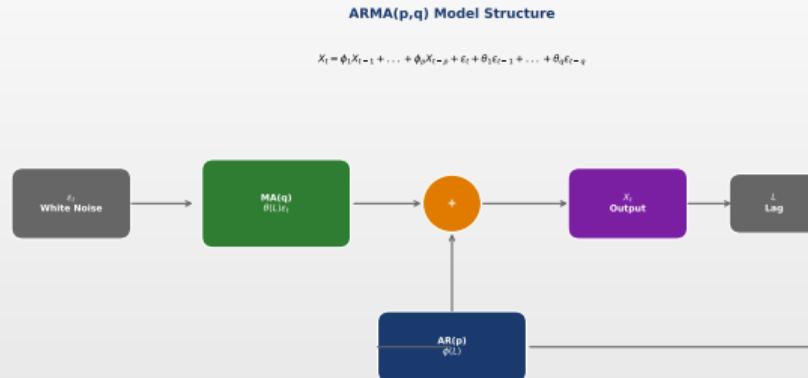
- $X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$
- Formă compactă:**  $\phi(L)X_t = c + \theta(L)\varepsilon_t$ , unde  $\mu = \frac{c}{1-\phi_1-\cdots-\phi_p}$

### Idee cheie

- Flexibilitate:** Combină componentele AR și MA
  - ▶ AR captează persistență; MA captează răspunsul la șocuri
- Parcimonie:** ARMA(1,1) poate fi mai bun decât AR(5) sau MA(5)
  - ▶ Mai puțini parametri, mai puțin risc de supraajustare



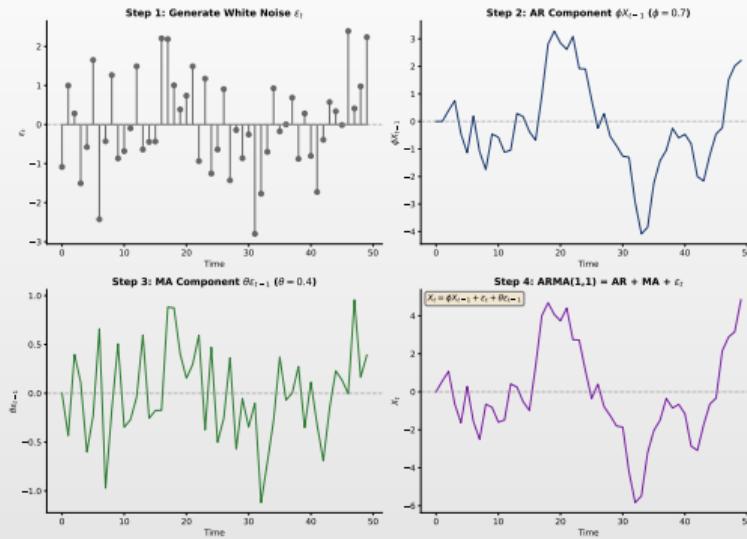
## Structura modelului ARMA



### Componente

- **AR:** valorile trecute  $\succ$  persistență, memorie
- **MA:** şocuri trecute  $\succ$  răspuns la inovații
- **Forma compactă:**  $\phi(L)X_t = \theta(L)\varepsilon_t$

## Cum funcționează simularea ARMA

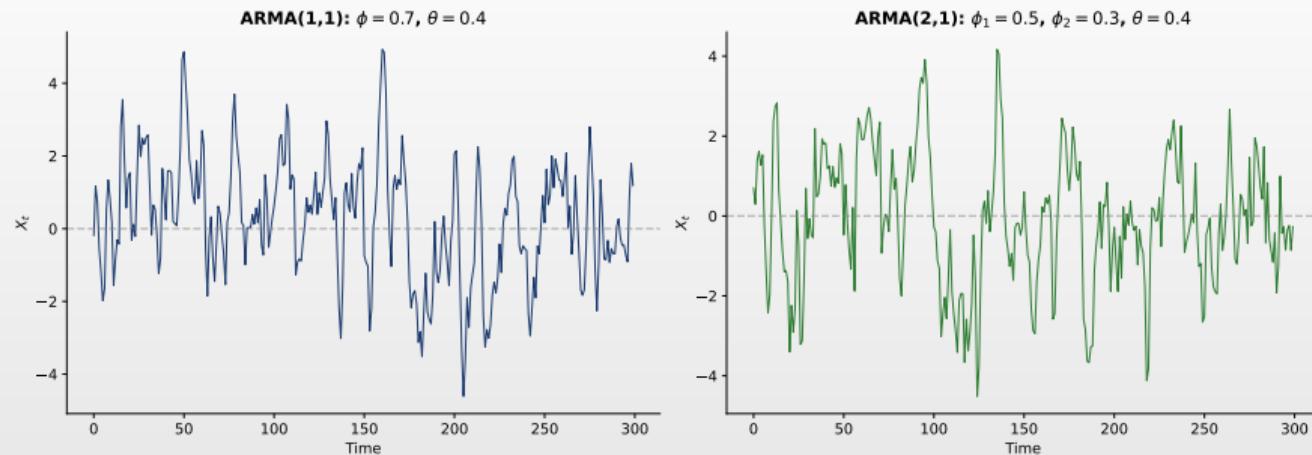


Pași

- Generare zgomot alb, aplicare ecuația ARMA recursiv, obținere serie simulață



## Exemple ARMA



### Observație

- Diferite combinații de ordine  $(p, q)$  produc comportamente distincte

## Modelul ARMA(1,1)

### Definiție 11 (Proces ARMA(1,1))

- $X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$

### Proprietăți (staționaritate și invertibilitate)

- Media:**  $\mu = \frac{c}{1-\phi}$ ; **Varianță:**  $\gamma(0) = \frac{(1+2\phi\theta+\theta^2)\sigma^2}{1-\phi^2}$

### ACF

- $\rho(1) = \frac{(1+\phi\theta)(\phi+\theta)}{1+2\phi\theta+\theta^2}; \quad \rho(h) = \phi \cdot \rho(h-1)$  pentru  $h \geq 2$
- ACF scade exponențial după lag 1 (punctul de pornire depinde de  $\phi$  și  $\theta$ )

## Demonstrație: varianța ARMA(1,1)

### Afirmăție

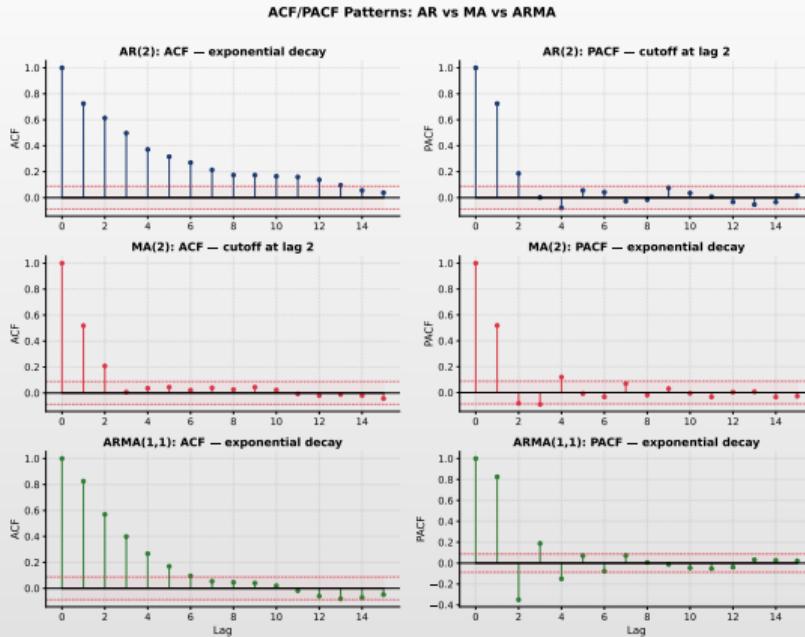
$\gamma(0) = \frac{(1+2\phi\theta+\theta^2)\sigma^2}{1-\phi^2}$

### Demonstrație

- Fie  $Y_t = X_t - \mu$ :  $Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$
- Ridicăm la pătrat:  $Y_t^2 = \phi^2 Y_{t-1}^2 + \varepsilon_t^2 + \theta^2 \varepsilon_{t-1}^2 + 2\phi Y_{t-1} \varepsilon_t + 2\phi\theta Y_{t-1} \varepsilon_{t-1} + 2\theta \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}$
- Luăm media;  $\mathbb{E}[\varepsilon_t Y_{t-1}] = 0$ ,  $\mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}] = 0$ :
- $\gamma(0) = \phi^2 \gamma(0) + \sigma^2 + \theta^2 \sigma^2 + 2\phi\theta \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1} Y_{t-1}]$
- Din  $Y_{t-1} = \phi Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \theta \varepsilon_{t-2}$ : doar  $\varepsilon_{t-1}^2$  contribuie  $\Rightarrow \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1} Y_{t-1}] = \sigma^2$
- $\gamma(0)(1 - \phi^2) = (1 + 2\phi\theta + \theta^2)\sigma^2 \implies \boxed{\gamma(0) = \frac{(1 + 2\phi\theta + \theta^2)\sigma^2}{1 - \phi^2}}$



## Tipare ACF/PACF: AR vs MA vs ARMA



[TSA\\_ch2\\_acf\\_pacf\\_patterns](#)



## Demonstrație: ACF la lag 1 pentru ARMA(1,1)

### Afirmăție

- $\square \rho(1) = \frac{(1+\phi\theta)(\phi+\theta)}{1+2\phi\theta+\theta^2}; \quad \rho(h) = \phi \rho(h-1) \text{ pentru } h \geq 2$

### Demonstrație

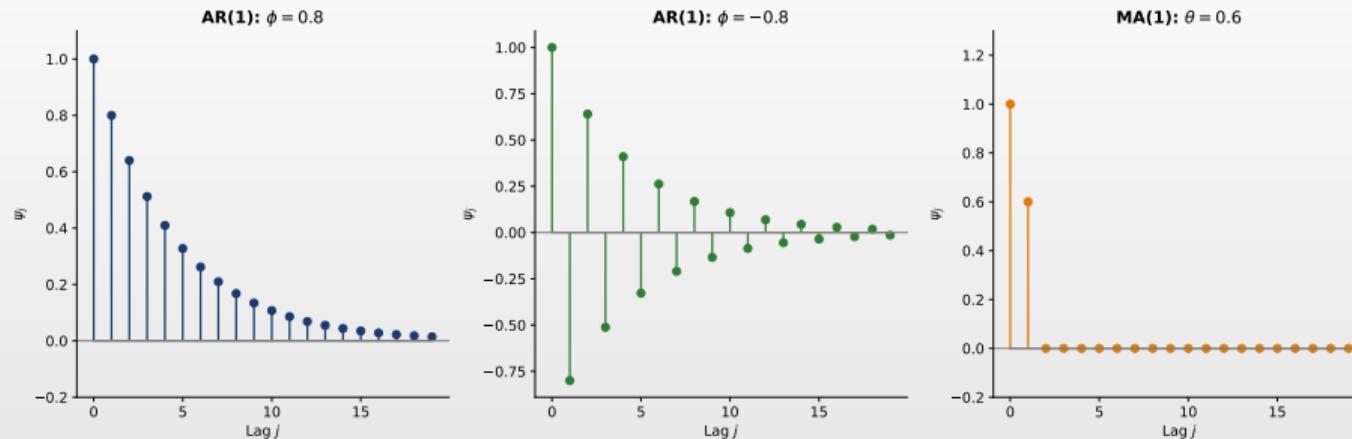
- $\square$  Înmulțim  $Y_t$  cu  $Y_{t-1}$  și luăm media:  $\gamma(1) = \phi\gamma(0) + \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t Y_{t-1}]}_{=0} + \theta \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1} Y_{t-1}]}_{=\sigma^2} = \phi\gamma(0) + \theta\sigma^2$
- $\square$  Împărțim la  $\gamma(0)$ :  $\rho(1) = \phi + \frac{\theta\sigma^2}{\gamma(0)}$ . Substituim  $\gamma(0)$ :
- $\square \rho(1) = \phi + \frac{\theta(1-\phi^2)}{1+2\phi\theta+\theta^2} = \frac{\phi(1+2\phi\theta+\theta^2)+\theta(1-\phi^2)}{1+2\phi\theta+\theta^2}$
- $\square$  Numărătorul:  $\phi + \theta + \phi^2\theta + \phi\theta^2 = (\phi + \theta)(1 + \phi\theta)$ , deci  $\boxed{\rho(1) = \frac{(1 + \phi\theta)(\phi + \theta)}{1 + 2\phi\theta + \theta^2}}$

### Recursivitate

- $\square$  Pentru  $h \geq 2$ :  $\gamma(h) = \phi\gamma(h-1)$ , deci  $\rho(h) = \phi \rho(h-1) \Rightarrow$  descreștere exponențială de la lag 1



## Funcții de răspuns la impuls



### Propagarea șocurilor

- Arată cum se propagă un șoc unitar prin sistem în timp
- AR: descreștere exponențială sau oscilantă; MA: efect limitat la  $q$  perioade

## Rezumat staționaritate și invertibilitate

Condiții pentru un model ARMA(p,q) valid

- Rezumat cerințe:

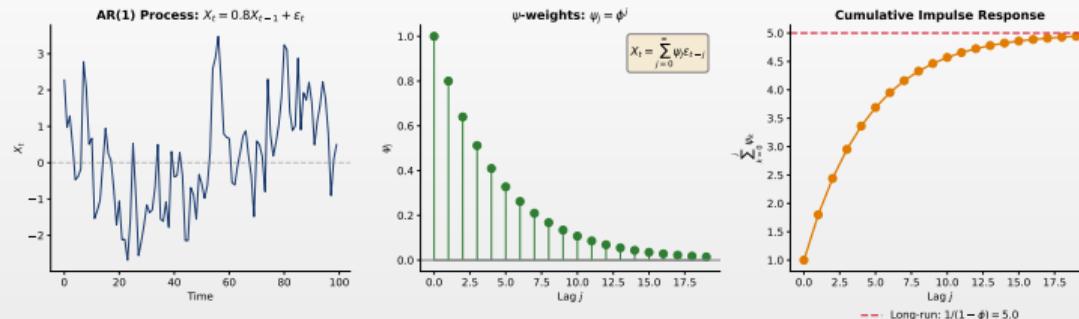
Condiție	Cerință
Staționaritate	Rădăcinile lui $\phi(z) = 0$ în afara cercului unitate
Invertibilitate	Rădăcinile lui $\theta(z) = 0$ în afara cercului unitate

### Implicații

- **Staționaritate:** Se poate scrie ca MA( $\infty$ ):  $X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$
- **Invertibilitate:** Se poate scrie ca AR( $\infty$ ):  $X_t = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j (X_{t-j} - \mu) + \varepsilon_t$
- **Reprezentare cauzală:**  $X_t$  depinde doar de șocurile *trecute*  $\succ$  necesară pentru prognoză



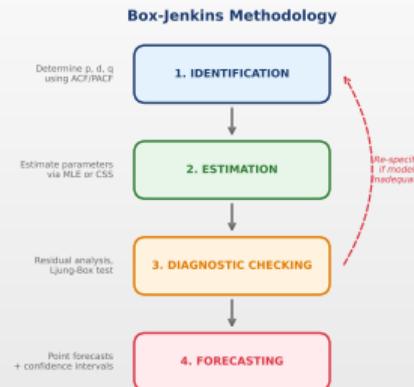
## Teorema de descompunere a lui Wold



### Teorema Wold (1938)

- Orice proces **staționar**  $\{X_t\}$  poate fi descompus unic:  $X_t = \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}}_{\text{componentă stochastică}} + \underbrace{D_t}_{\text{deterministă}}$  unde
- $\psi_0 = 1, \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty, \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$
- **Implicatie:** orice proces staționar  $= MA(\infty) \Rightarrow$  ARMA este o aproximare **parcimonioasă** cu un număr finit de parametri

## Metodologia Box-Jenkins



### Abordare iterativă

- Pas 1:** Identificare (ACF/PACF, AIC/BIC)
- Pas 2:** Estimare (MLE, Yule-Walker)
- Pas 3:** Validare (reziduuri = zgomot alb?)
- Pas 4:** Prognoză

## Reguli de identificare ACF/PACF

### Tipare teoretice pentru procese staționare

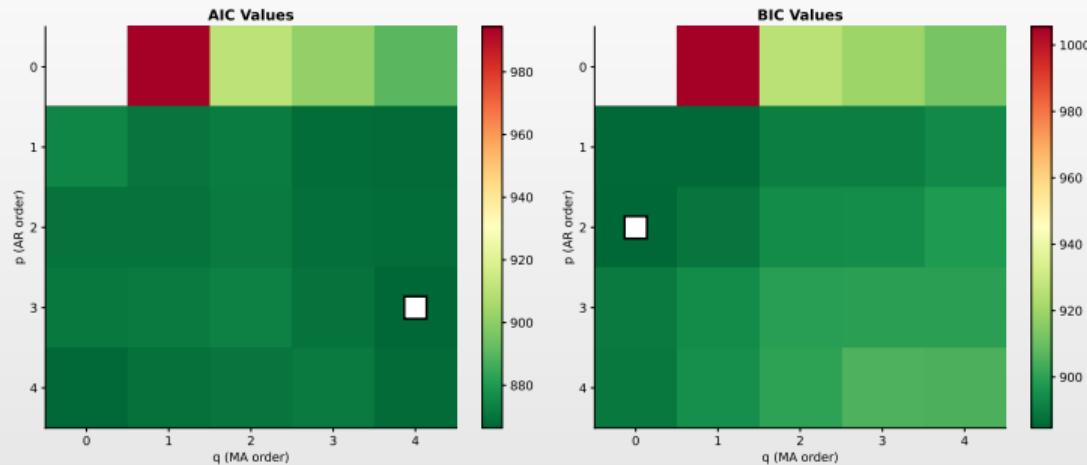
Model	Tipar ACF	Tipar PACF
AR(1)	Descreștere exponențială	Vârf la lag 1, apoi 0
AR(2)	Exp./sinusoidă amortizată	Vârfuri la lag-uri 1-2, apoi 0
AR(p)	Scade gradual	Se anulează după lag $p$
MA(1)	Vârf la lag 1, apoi 0	Descreștere exponențială
MA(2)	Vârfuri la lag-uri 1-2, apoi 0	Exp./sinusoidă amortizată
MA(q)	Se anulează după lag $q$	Scade gradual
ARMA(p,q)	Scade	Scade

Model Identification: ACF/PACF Patterns

Model	ACF Pattern	PACF Pattern
AR(p)	Exponential decay or damped oscillation	Cuts off after lag p
MA(q)	Cuts off after lag q	Exponential decay or damped oscillation
ARMA(p,q)	Exponential decay after lag q=0	Exponential decay after lag p+q



## AIC vs BIC: selecția modelului



### Interpretare

- Heatmap:** verde = AIC/BIC mic,  = cel mai bun model
- Practică:** AIC  $\succ$  prognoză, BIC  $\succ$  identificare



## Criterii informaționale

### AIC (Akaike)

- $AIC = -2 \ln(\hat{L}) + 2k$
- Penalizare moderată
  - ▶ Tinde să aleagă modele mai mari
  - ▶ Optim pentru prognoză

### BIC (Bayesian)

- $BIC = -2 \ln(\hat{L}) + k \ln(n)$
- Penalizare mai puternică
  - ▶ Preferă modele parcimonioase
  - ▶ Consistent pentru identificare

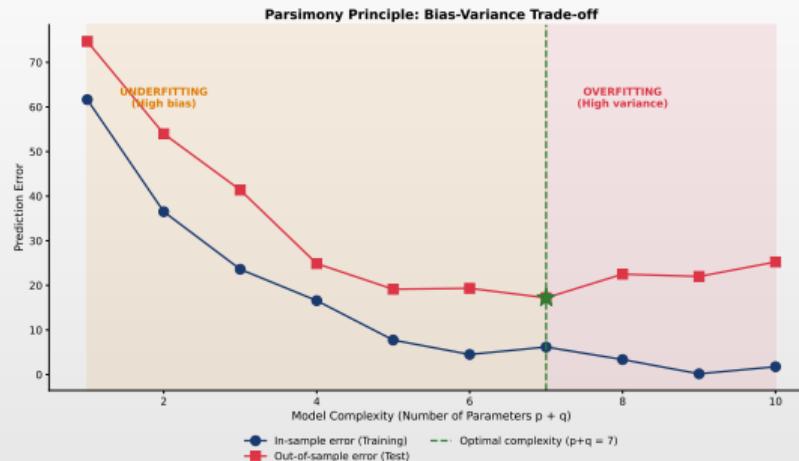
unde:  $\hat{L}$  = maximul funcției de verosimilitate,  $k$  = numărul de parametri estimați,  $n$  = dimensiunea eșantionului

## Reguli

- Valori mai mici = model mai bun. Comparați modele pe *aceleași date*



## Principiul parcimoniei: echilibrul bias-varianță



### Echilibrul bias-varianță

- **Prea simplu:** bias mare (subajustare)
- **Prea complex:** varianță mare (supraajustare)
- **Optim:** intersecția curbelor; AIC/BIC ajută



## Selectia automată a modelului

### Abordarea grid search

- Estimați ARMA( $p,q$ ) pentru  $p = 0, \dots, p_{max}$  și  $q = 0, \dots, q_{max}$
- Selectați modelul cu cel mai mic AIC sau BIC; verificați cu teste de validare

### În Python

- `pm.auto_arima()` din pachetul `pmdarima`
- Testează automat staționaritatea, parcurge ordine  $(p, q)$ , returnează cel mai bun model

### Atenție

- Selectia automată nu este răspunsul final  $\succ$  verificați validitatea modelului
- Auto-ARIMA complet (inclusiv selecția lui  $d$ )  $\succ$  Capitolul 3



## Metode de estimare

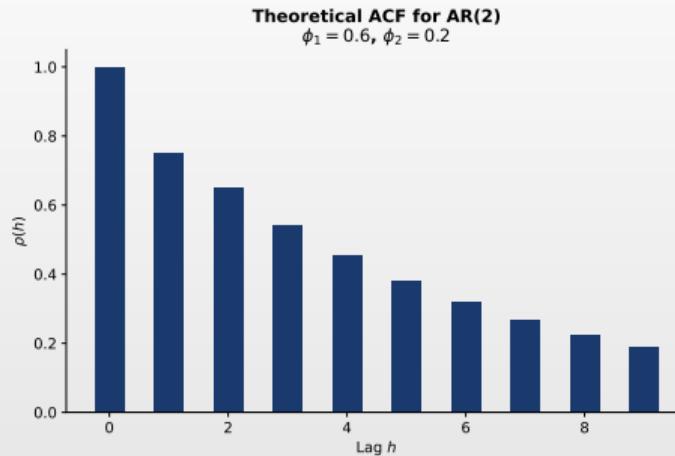
ARMA Parameter Estimation Methods		
Yule-Walker	Maximum Likelihood	Conditional LS
<b>Pros:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>+ Simple computation</li><li>+ Closed-form solution</li></ul> <b>Cave:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>- AR only</li><li>- Less efficient</li></ul>	<b>Pros:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>+ Most efficient</li><li>+ Works for ARMA</li></ul> <b>Cave:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>- Iterative</li><li>- Local optima risk</li></ul>	<b>Pros:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>+ Simple to implement</li><li>+ Fast computation</li></ul> <b>Cave:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>- Based on residuals</li><li>- Ignores initial values</li></ul>
Recommendation: Use MLE for final estimation, Yule-Walker for initial values		

## Cele trei abordări principale

- Yule-Walker:** formă închisă, doar AR; egalează autocorelațiile din eşantion cu cele teoretice
- MLE:** cea mai eficientă și consistentă; necesită ipoteză de distribuție (Gaussiană)
- Cele mai mici pătrate condiționate:** compromis; minimizează suma pătratelor reziduurilor



## Ecuațiile Yule-Walker pentru AR(p)



### Yule-Walker Equations

$$\rho(1) = \phi_1 + \phi_2 \rho(1)$$

$$\rho(2) = \phi_1 \rho(1) + \phi_2$$

Matrix form:  $R \cdot \phi = \rho$

$R$  = autocorrelation matrix

Solution:  $\hat{\phi} = R^{-1} \rho$

### Idea principală

- Relație liniară:** autocorelații  $\leftrightarrow$  parametri AR
- Formă închisă:** fără optimizare numerică, matrice Toeplitz



## Ecuațiile Yule-Walker: forma matriceală

### Ecuațiile Yule-Walker pentru AR(p)

- $\rho(k) = \phi_1\rho(k-1) + \phi_2\rho(k-2) + \cdots + \phi_p\rho(k-p), \quad k = 1, 2, \dots, p$

### Forma matriceală

- $$\begin{pmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \cdots & \rho(p-1) \\ \rho(1) & \rho(0) & \cdots & \rho(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(p-1) & \rho(p-2) & \cdots & \rho(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(p) \end{pmatrix}$$

- Estimare:** Înlocuiți  $\rho(k)$  cu  $\hat{\rho}(k)$ ; matricea Toeplitz este simetrică și pozitiv definită

## Exemplu numeric: Yule-Walker pentru AR(2)

Date din eșantion ( $T = 100$ )

- Autocorelații estimate:  $\hat{\rho}(1) = 0.75$ ,  $\hat{\rho}(2) = 0.65$ , varianța estimată:  $\hat{\gamma}(0) = 4.0$

Pas 1: Sistemul matriceal

- Yule-Walker:  $R\hat{\phi} = \rho \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0.75 \\ 0.75 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.65 \end{pmatrix}$

Pas 2: Rezolvare (regula lui Cramer)

- $\det(R) = 1 - 0.75^2 = 0.4375$
- $\hat{\phi}_1 = \frac{0.75 \times 1 - 0.75 \times 0.65}{0.4375} = \frac{0.2625}{0.4375} = 0.600$
- $\hat{\phi}_2 = \frac{0.65 \times 1 - 0.75 \times 0.75}{0.4375} = \frac{0.0875}{0.4375} = 0.200$

Pas 3: Varianța zgomotului

- $\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}(0)(1 - \hat{\phi}_1\hat{\rho}(1) - \hat{\phi}_2\hat{\rho}(2)) = 4.0(1 - 0.45 - 0.13) = 1.68$

Verificare staționaritate:  $\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2 = 0.8 < 1 \checkmark$     $|\hat{\phi}_2| = 0.2 < 1 \checkmark$     $\hat{\phi}_2 - \hat{\phi}_1 = -0.4 < 1 \checkmark$



## Demonstrație: ecuațiile Yule-Walker

Scop: Derivarea  $\rho(k) = \phi_1\rho(k-1) + \cdots + \phi_p\rho(k-p)$

- Pornim de la AR(p):  $X_t = \phi_1X_{t-1} + \cdots + \phi_pX_{t-p} + \varepsilon_t$
- Înmulțim cu  $X_{t-k}$  și luăm media:
- $\mathbb{E}[X_t X_{t-k}] = \phi_1\mathbb{E}[X_{t-1} X_{t-k}] + \cdots + \phi_p\mathbb{E}[X_{t-p} X_{t-k}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-k}]$
- Pentru  $k \geq 1$ :  $\mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-k}] = 0 \succ \gamma(k) = \phi_1\gamma(k-1) + \cdots + \phi_p\gamma(k-p)$
- Împărțind la  $\gamma(0)$ :  $\boxed{\rho(k) = \phi_1\rho(k-1) + \phi_2\rho(k-2) + \cdots + \phi_p\rho(k-p)}$

## Cazul special AR(1)

- $\rho(k) = \phi_1\rho(k-1) = \phi_1^k$  (folosind  $\rho(0) = 1$ )



## Estimarea prin metoda verosimilității maxime

Logaritmul funcției de verosimilitate ARMA(p,q) (erori gaussiene:  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ )

- $\ell(\phi, \theta, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2$
- $\varepsilon_t$  sunt inovațiile calculate recursiv

### Procedura de estimare

- Inițializare: folosiți metoda momentelor sau OLS pentru valori inițiale
- Optimizare: metode numerice (BFGS, Newton-Raphson)
- Iterare până la convergență

### În practică

- `statsmodels.tsa.arima.model.ARIMA` ✓ implementează MLE exact cu inițializare automată



## Erori standard și inferență

### Distribuția asimptotică a MLE

- $\hat{\theta} \xrightarrow{d} N(\theta_0, \frac{1}{n} I(\theta_0)^{-1})$ , unde **I( $\theta$ ) este matricea informațională Fisher**
- $I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'}\right] \succ$  curbura medie a funcției de verosimilitate
- Matricea de varianță-covarianță estimată:  $\hat{V} = \frac{1}{n} \hat{I}^{-1}$

### Ce este eroarea standard (SE)?

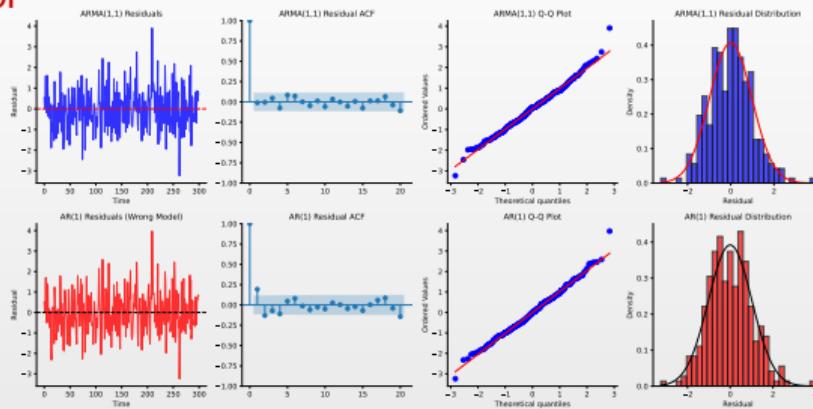
- $SE(\hat{\theta}_j) = \sqrt{\hat{V}_{jj}} = \sqrt{\text{diag}_j\left(\frac{1}{n} \hat{I}^{-1}\right)} \succ$  măsoară incertitudinea estimării
- Exemplu AR(1):**  $SE(\hat{\phi}) \approx \sqrt{(1 - \hat{\phi}^2)/n}$ ; pentru  $\hat{\phi} = 0.8$ ,  $n = 100$ :  $SE \approx 0.06$
- Interpretare:** un SE mic  $\Rightarrow$  parametrul este estimat cu precizie ridicată

### Testarea semnificației parametrilor

- $H_0 : \theta_j = 0$  Statistică:  $z = \frac{\hat{\theta}_j}{SE(\hat{\theta}_j)} \sim N(0, 1)$  asimptotic
- Respingeți dacă  $|z| > 1.96$  la 5%  $\Rightarrow$  IC:  $\hat{\theta}_j \pm 1.96 \cdot SE(\hat{\theta}_j)$



## Diagnosticarea reziduurilor



Dacă modelul este corect specificat, reziduurile trebuie să fie zgomot alb

- Graficul reziduurilor:** fluctuații aleatorii în jurul lui zero, varianță constantă
- ACF reziduurilor:** fără vârfuri semnificative  $\succ$  zgomot alb
- Graficul Q-Q:** punctele pe diagonală  $\succ$  distribuție normală; cozi groase  $\succ$  erori non-normale

### Decizie

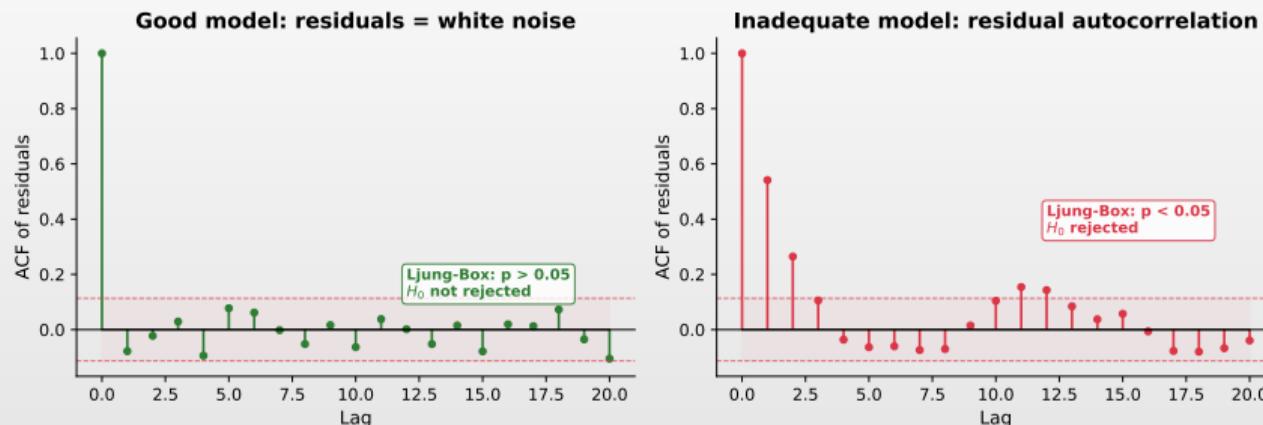
- Toate verificările OK**  $\succ$  model adekvat

**Nesatisfăcut**  $\succ$  reveniți la identificare



## Testul Ljung-Box: ilustrație vizuală

Ljung-Box Test: good model vs inadequate model



### Interpretare

- Stânga: model bun  $\succ$  reziduuri zgomot alb
- Dreapta: model inadecvat  $\succ$  autocorelație reziduală  $\succ$  re-specificare necesară



## Testul Ljung-Box

### Definiție 12 (Testul Ljung-Box)

- Testează dacă reziduurile sunt distribuite independent (fără autocorelație)
- Statistică:  $Q(m) = n(n + 2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k}$

### Ipoteze și distribuție

- $H_0$ : Reziduurile sunt zgomot alb;  $H_1$ : Reziduurile sunt autocorelate
- Sub  $H_0$ ,  $Q(m) \sim \chi^2(m - p - q)$  aproximativ

### Decizie

- $p\text{-value} > 0.05 \succ$  nu respingem  $H_0 \succ$  reziduurile sunt zgomot alb
- $p\text{-value} < 0.05 \succ$  autocorelație reziduală  $\succ$  model inadecvat

## Listă de verificare a modelului

Un model ARMA bun ar trebui să îndeplinească

- Staționaritate:** Rădăcinile AR în afara cercului unitate (arroots)
- Invertibilitate:** Rădăcinile MA în afara cercului unitate (maroots)
- Reziduuri zgomot alb:** Fără ACF semnificativ (testul Ljung-Box)
- Reziduuri normale:** Grafic Q-Q, testul Jarque-Bera
- Fără heteroscedasticitate:** Varianță constantă (testul ARCH)
- Simplu:** Cel mai mic AIC/BIC dintre modelele adecvate

Dacă verificările nu sunt satisfăcute

- Reveniți la identificare, încercați ordine diferite



## Prognoze punctuale

Prognoză optimă:  $\hat{X}_{n+h|n} = \mathbb{E}[X_{n+h}|X_n, X_{n-1}, \dots]$

- Speranța condiționată minimizează MSE

AR(1):  $X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$

- $\hat{X}_{n+1|n} = c + \phi X_n; \quad \hat{X}_{n+h|n} = \mu + \phi^h (X_n - \mu)$
- Prognozele converg la media  $\mu$  când  $h \rightarrow \infty$  (revenire la medie)

MA(1):  $X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$

- $\hat{X}_{n+1|n} = \mu + \theta \varepsilon_n; \quad \hat{X}_{n+h|n} = \mu$  pentru  $h > 1$



## Incertitudinea prognozei

### Eroarea medie pătratică de prognoză (MSFE)

- **Eroarea:**  $e_{n+h|n} = X_{n+h} - \hat{X}_{n+h|n}$
- **MSFE:**  $MSFE(h) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2$ , unde  $\psi_j$  sunt coeficienții MA( $\infty$ )

Pentru AR(1):  $\psi_j = \phi^j$

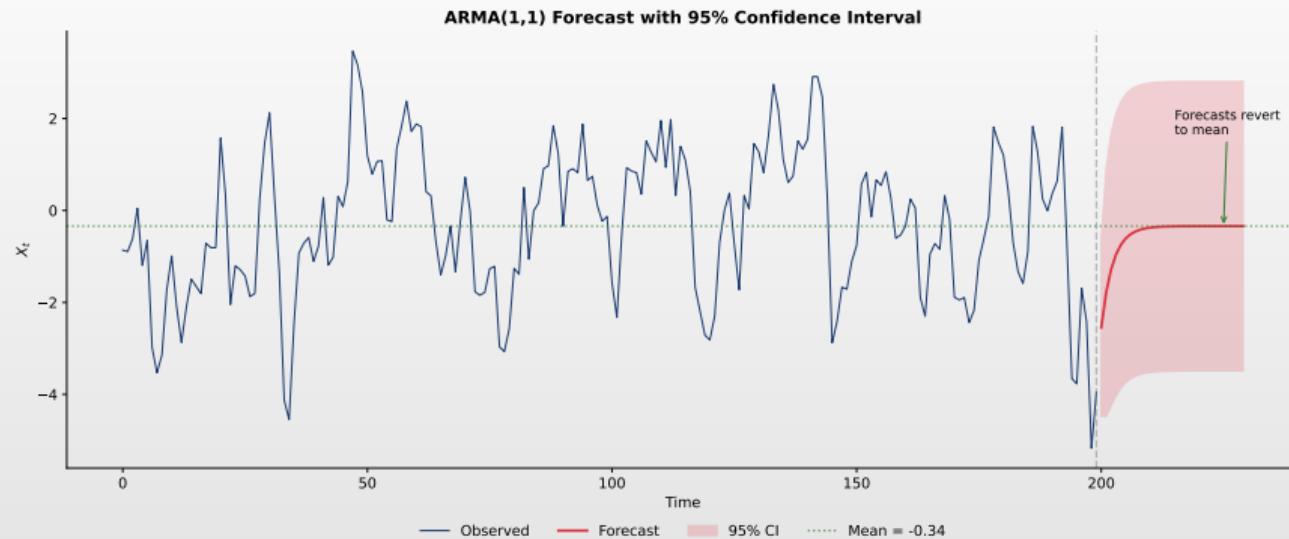
- $MSFE(h) = \sigma^2 \frac{1-\phi^{2h}}{1-\phi^2} \rightarrow \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} = \text{Var}(X_t)$

### Observație cheie

- Incertitudinea prognozei crește cu orizontul
- Converge la varianța necondiționată  $\text{Var}(X_t)$



## Prognoza ARMA cu intervale de încredere



### Observație

- Banda de încredere se lărgeste cu orizontul  $\succ$  convergență la intervalul necondiționat



## Demonstrație: MSFE pentru AR(1)

### Afirmație

- $\text{MSFE}(h) = \sigma^2 \frac{1 - \phi^{2h}}{1 - \phi^2}$  și  $\text{MSFE}(\infty) = \gamma(0)$

### Demonstrație

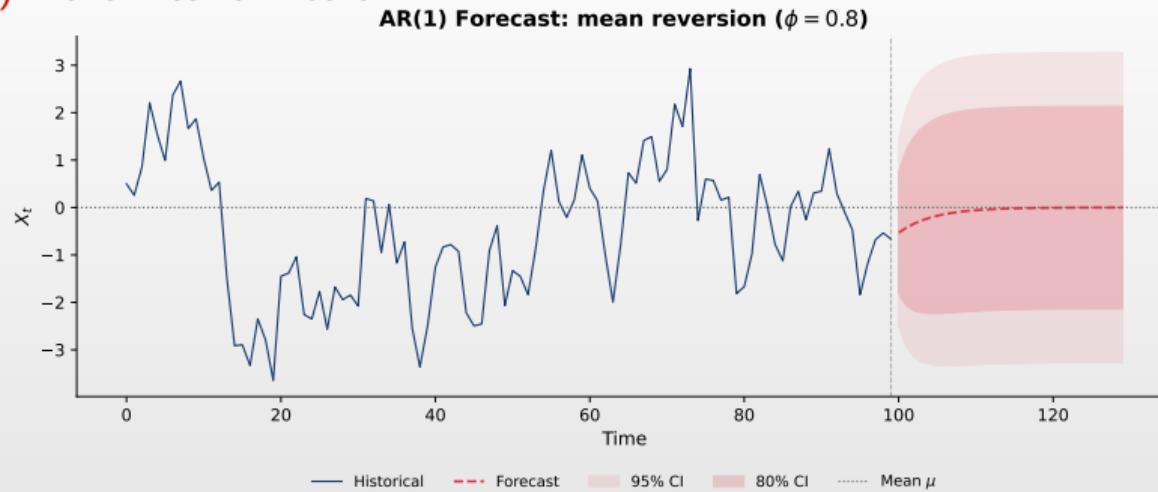
- Eroarea de prognoză la orizontul  $h$ :  $e_{n+h|n} = X_{n+h} - \hat{X}_{n+h|n}$
- Prin substituție recursivă:  $e_{n+h|n} = \sum_{j=0}^{h-1} \phi^j \varepsilon_{n+h-j}$
- $\text{MSFE}(h) = \mathbb{E}[e_{n+h|n}^2] = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \phi^{2j} = \boxed{\sigma^2 \frac{1 - \phi^{2h}}{1 - \phi^2}}$
- Limita:  $\text{MSFE}(\infty) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2} = \gamma(0) \Rightarrow \text{prognoza converge la media necondiționată}$

### Interpretare

- La orizonturi lungi, nu facem mai bine decât media necondiționată:  $\text{IC} \rightarrow 2 \times 1.96 \sqrt{\gamma(0)}$



## Prognoza AR(1): revenirea la medie

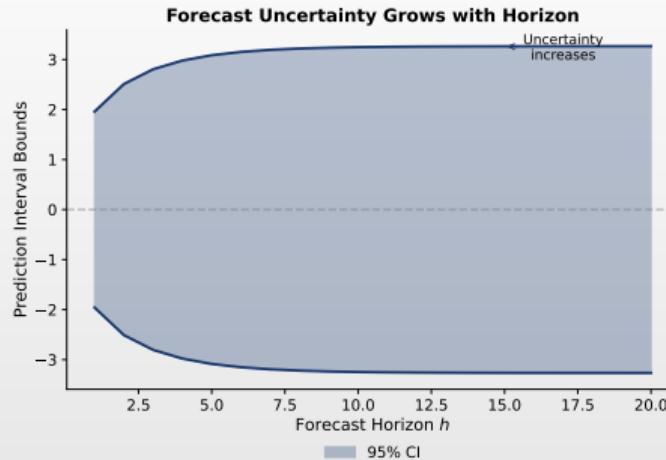
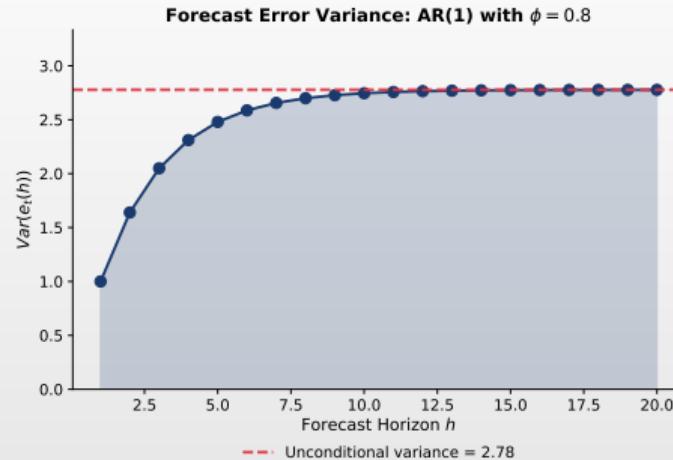


### Proprietăți

- ◻ Prognozele converg la media necondiționată  $\mu$  pe măsură ce orizontul crește
- ◻  $|\phi|$  mai mare  $\succ$  revenire mai lentă; IC se lărgesc cu orizontul



## Varianța erorii de prognoză în funcție de orizont



### Observație

- MSFE crește monoton cu orizontul  $h \succ$  convergență la  $\text{Var}(X_t)$  (limita predictibilității)



## Intervale de încredere pentru prognoze

### Formule

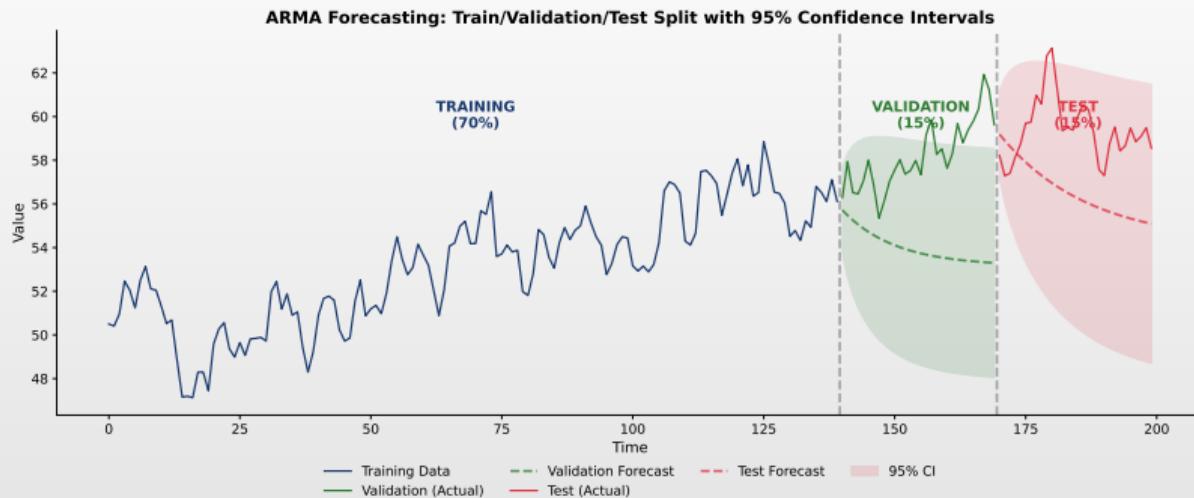
- $X_{n+h}|X_n, \dots \sim N\left(\hat{X}_{n+h|n}, \text{MSFE}(h)\right)$
- **IC**  $(1 - \alpha)$ :  $\hat{X}_{n+h|n} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\text{MSFE}(h)}$ , unde  $z_{\alpha/2} = 1.96$  pentru 95%

### Proprietăți

- Intervalele se largesc pe măsură ce orizontul crește
  - ▶ Converg la intervalul necondiționat:  $\mu \pm z_{\alpha/2}\sigma_x$
- Lățimea depinde de parametrii modelului
  - ▶ Coeficienți AR mai mari  $\succ$  intervale mai largi
- **Python**: `model.get_forecast(h).conf_int()`



## Exemplu de prognoză train/validare/test



### Bună practică

- Evaluati întotdeauna prognozele pe date neutilizate la estimare (împărțire antrenare/validare/test)



## Evaluarea prognozei

### Testare în afara eşantionului

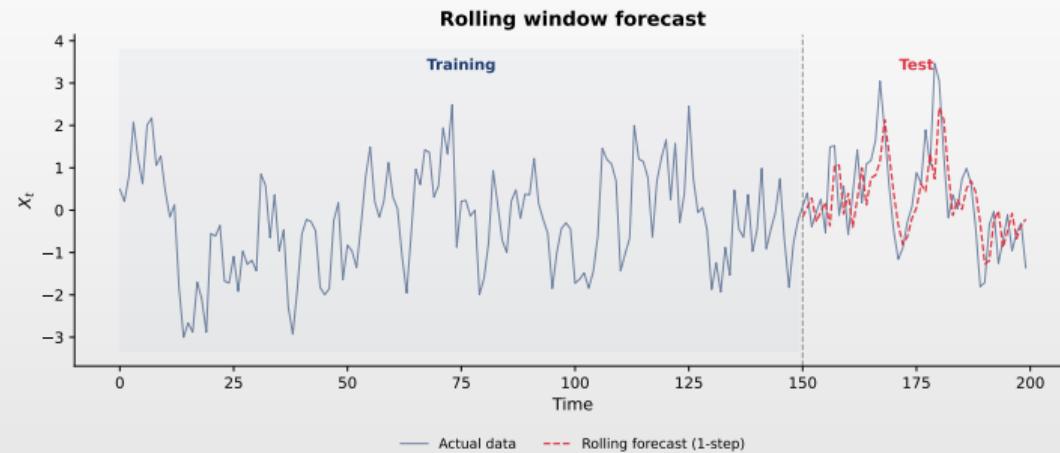
- Împărțiți datele: antrenare + test
- Generați prognoze pe test
- Comparați cu valorile reale
- Fereastră mobilă:** re-estimați pe măsură ce sosesc date noi

### Metrici de eroare

- MAE** =  $\frac{1}{n} \sum |e_t|$ 
  - ▶ Robust la valori extreme
- RMSE** =  $\sqrt{\frac{1}{n} \sum e_t^2}$ 
  - ▶ Penalizează erorile mari
- MAPE** =  $\frac{100}{n} \sum \left| \frac{e_t}{X_t} \right|$ 
  - ▶ Procentual, interpretabil



## Prognoza cu fereastră mobilă (rolling forecast)



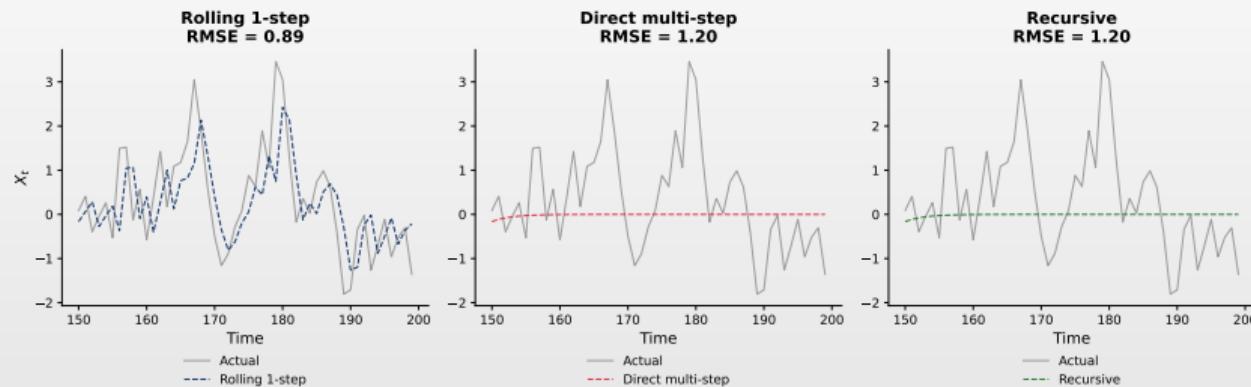
### Metodologia rolling forecast

- Fereastră fixă (ultimele  $w$  obs.) vs expansivă (toate datele); generează prognoza 1-pas, repetă



## Rolling vs prognoza multi-pas

Comparison: Rolling vs Multi-step vs Recursive

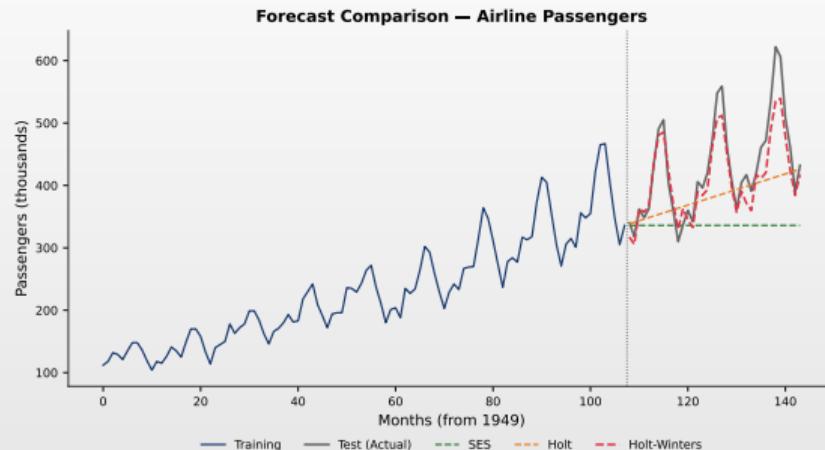


### Diferențe cheie

- Rolling 1-pas** (precis); **Multi-pas direct** (model separat/orizont); **Recursiv** (acumulare erori)



## Aplicație cu date reale: comparație prognoze



### Considerații practice

- Date reale: nestaționaritate, rupturi structurale; comparați modele; folosiți validare pe fereastră mobilă



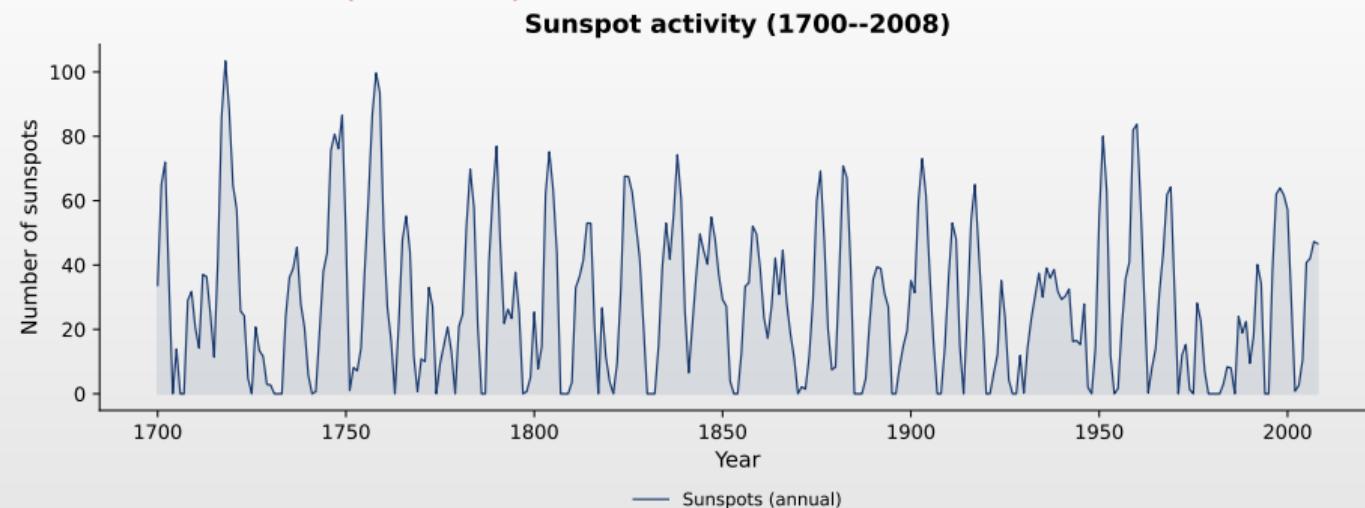
## Rezumat flux de lucru

### Pașii metodologiei Box-Jenkins

- 1. Pregătirea datelor:** Verificați valori lipsă, valori aberante; transformați dacă este necesar
- 2. Verificarea staționarității:** Inspecție vizuală, teste formale (ADF, KPSS); diferențiați dacă este nestaționar
- 3. Identificarea modelului:** Tipare ACF/PACF; grid search cu criterii informaționale
- 4. Estimare și validare:** Estimați modelul, verificați semnificația; analiză reziduală, testul Ljung-Box
- 5. Prognoză:** Prognoze punctuale cu intervale de încredere; validare în afara eșantionului



## Studiu de caz: petele solare (sunspots)



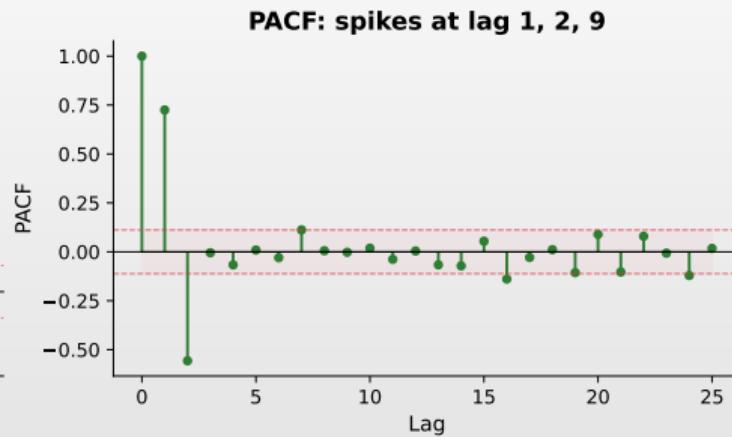
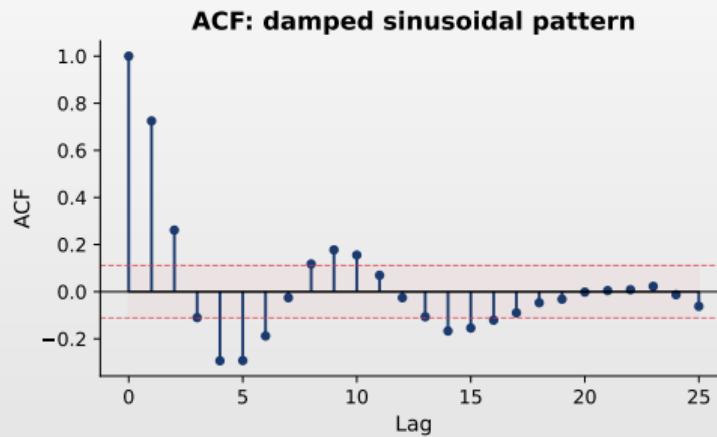
### Descrierea datelor

- Pete solare anuale (1700–2008): serie staționară cu cicluri de  $\sim 11$  ani; metodologie Box-Jenkins



## Pasul 1: analiza ACF/PACF

ACF/PACF analysis for sunspots

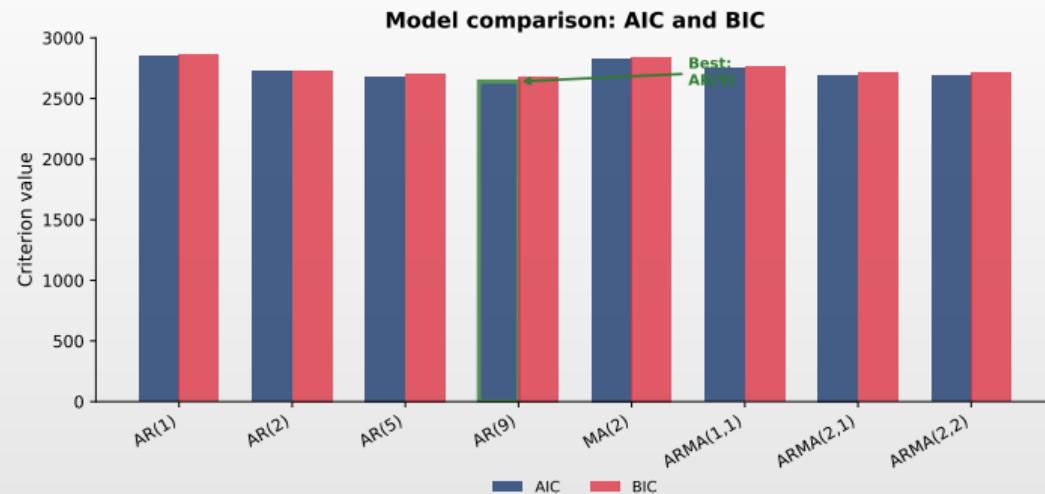


### Identificare

- ACF sinusoidală (AR); PACF cu vârfuri la lag 1, 2, 9  $\succ$  AR(2) sau AR(9); serie staționară ( $d = 0$ )



## Pasul 2: compararea modelelor

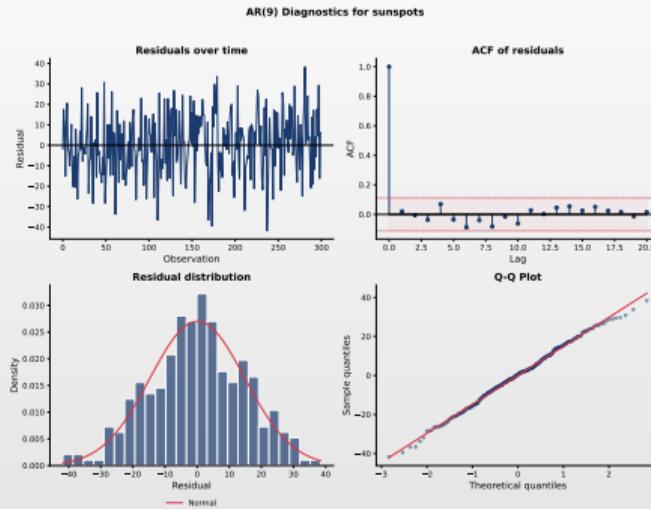


### Selectia modelului

- Comparăm mai multe modele candidate folosind criteriul AIC
- Modelul **AR(9)** are cel mai mic AIC, capturând ciclul solar de 11 ani



## Pasul 3: diagnosticul modelului

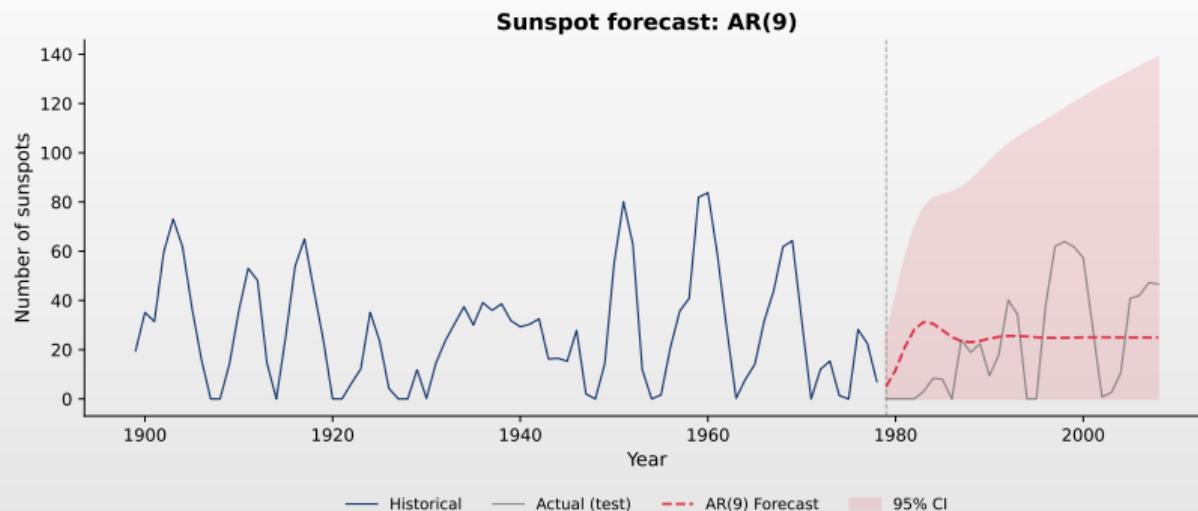


### Diagnosticul AR(9)

- Reziduuri: zgomot alb, medie zero, varianță constantă, ACF fără structură,  $\approx$  normal



## Pasul 4: prognoza



### Rezultate

- AR(9) captează ciclicitatea; IC 95% acoperă valorile reale; RMSE  $\approx 30$



## Exercițiu AI: Gândire critică

Prompt de testat în ChatGPT / Claude / Copilot

"Descarcă de pe FRED indicele lunar al producției industriale din SUA (seria INDPRO) din 2010-01 până în 2024-12 (180 observații). Calculează diferențele logaritmice lunare (rate de creștere). Estimează un model ARMA, fă diagnosticul reziduurilor și prognozează pe 12 luni. Vreau cod Python complet cu grafice."

**Exercițiu:**

1. Rulați prompt-ul într-un LLM la alegere și analizați critic răspunsul.
2. Verifică staționaritatea datelor *înainte* de a estima ARMA? Justificați.
3. Cum alege ordinele  $p$  și  $q$ ? Folosește ACF/PACF sau AIC/BIC?
4. Reziduurile sunt testate corect? (Ljung-Box, Q-Q, heteroscedasticitate)
5. Intervalele de încredere ale prognozei converg la media necondiționată?

**Atenție:** Codul generat de AI poate rula fără erori și arăta profesional. *Asta nu înseamnă că e corect.*



## Rezumat

### Ce am învățat în acest capitol

- Modele autoregresive AR( $p$ )
  - ▶ Depind de  $p$  valori trecute; staționaritate: rădăcini în afara cercului unitate; PACF se anulează la lag  $p$
- Modele de medie mobilă MA( $q$ )
  - ▶ Depind de  $q$  șocuri trecute; întotdeauna staționare; ACF se anulează la lag  $q$
- Modele ARMA( $p, q$ ) și metodologia Box-Jenkins
  - ▶ Combină AR și MA; identificare  $\succ$  estimare  $\succ$  validare  $\succ$  prognoză
- Prognoze cu intervale de încredere
  - ▶ Converg la media necondiționată; incertitudinea crește cu orizontul

### Idee cheie

- Parcimonie:** Începeți cu modele simple (ordine mici), validați cu testul Ljung-Box și criterii informationale (AIC, BIC)



## Ce urmează?

### Capitolul 3: Modele ARIMA pentru date nestaționare

- Nestaționaritate:** tipuri, teste de rădăcină unitară (ADF, PP, KPSS)
- Diferențierea:** operatorul diferență și ordinul de integrare  $d$
- ARIMA( $p, d, q$ ):** modele integrate pentru date nestaționare
- Auto-ARIMA:** selecție automată a modelului complet
- Studiu de caz:** Prognoza PIB SUA

Întrebări?



## Întrebarea 1

### Întrebare

Pentru ce valoare a lui  $\phi$  este procesul AR(1)  $X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$  staționar?

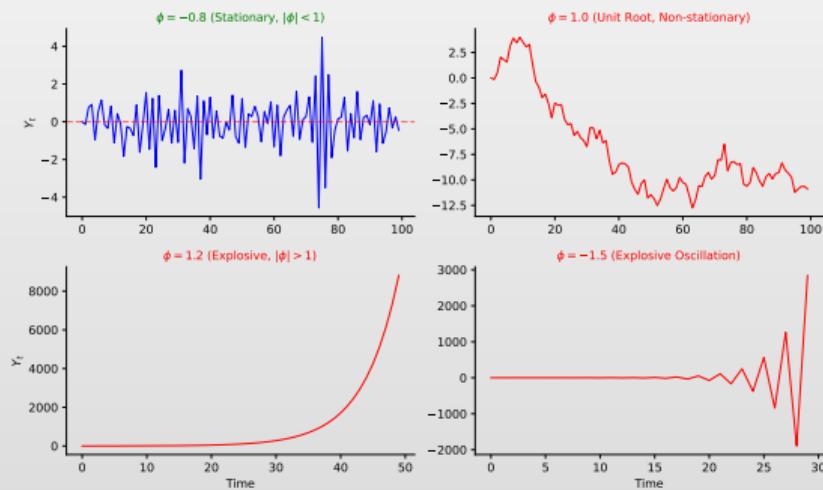
### Variante de răspuns

- (A)  $\phi = 1.2$       (B)  $\phi = 1.0$       (C)  $\phi = -0.8$       (D)  $\phi = -1.5$

## Întrebarea 1: Răspuns

Răspuns corect: (C)  $\phi = -0.8$

- AR(1) este staționar dacă și numai dacă  $|\phi| < 1$
- Doar  $|-0.8| = 0.8 < 1$



## Întrebarea 2

### Întrebare

Observați: ACF are vârf la lag 1, apoi se anulează. PACF scade gradual. Ce model?

### Variante de răspuns

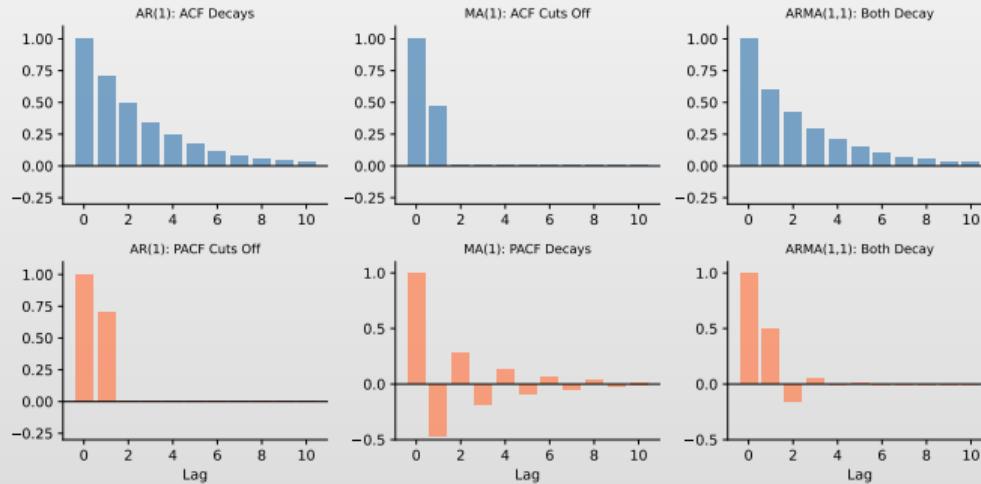
- (A) AR(1)      (B) MA(1)      (C) ARMA(1,1)      (D) Zgomot alb



## Întrebarea 2: Răspuns

Răspuns corect: (B) MA(1)

- ACF se anulează  $\succ$  proces MA
- PACF scade  $\succ$  confirmă MA(1)



## Întrebarea 3

### Întrebare

Este MA(1)  $X_t = \varepsilon_t + 1.5\varepsilon_{t-1}$  invertibil?

### Variante de răspuns

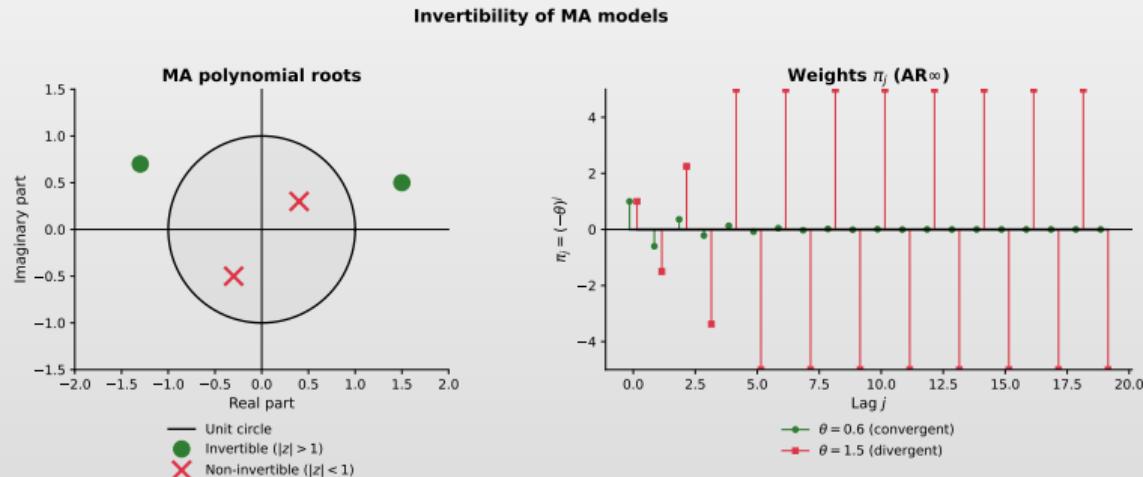
- (A) Da, procesele MA sunt întotdeauna invertibile
- (B) Da, deoarece  $1.5 > 0$
- (C) Nu, deoarece  $|\theta| = 1.5 > 1$
- (D) Nu, procesele MA nu sunt niciodată invertibile



### Întrebarea 3: Răspuns

Răspuns corect: (C) Nu, deoarece  $|\theta| = 1.5 > 1$

- Invertibilitatea necesită  $|\theta| < 1$
- Aici  $|\theta| = 1.5 > 1$ , deci nu este invertibil



## Întrebarea 4

### Întrebare

Forma compactă  $\phi(L)X_t = \theta(L)\varepsilon_t$  reprezintă ce model?

### Variante de răspuns

- (A) Model AR pur      (B) Model MA pur      (C) Model ARMA      (D) Niciunul de mai sus

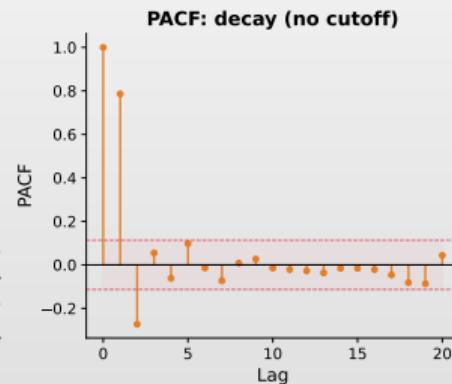
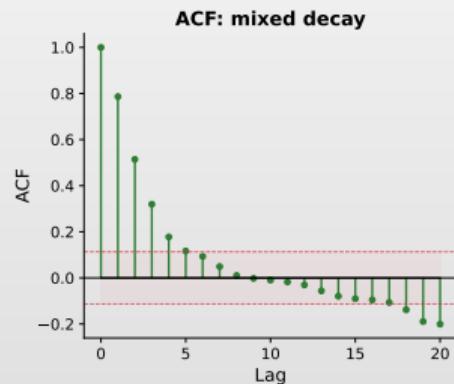
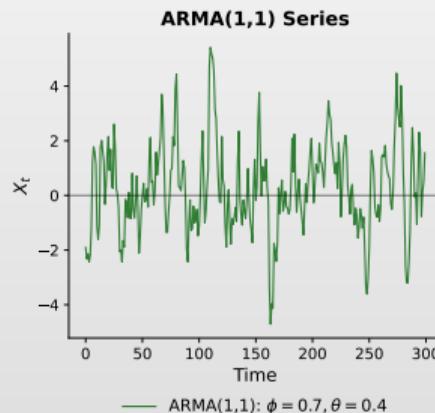


## Întrebarea 4: Răspuns

Răspuns corect: (C) Model ARMA

- $\phi(L)$  este polinomul AR,  $\theta(L)$  este polinomul MA  $\succ$  ARMA(p,q)

ARMA(1,1): neither ACF nor PACF cut off



Q TSA\_ch2\_arma



## Întrebarea 5

### Întrebare

Ce este  $(1 - L)^2 X_t$ ?

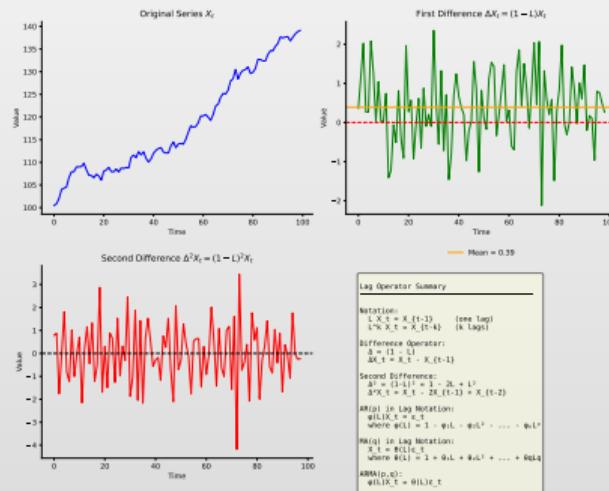
### Variante de răspuns

- (A)**  $X_t - X_{t-1}$     **(B)**  $X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$     **(C)**  $X_t + X_{t-1} + X_{t-2}$     **(D)**  $X_t - X_{t-2}$

## Întrebarea 5: Răspuns

Răspuns corect: (B)  $X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$

- $(1 - L)^2 = 1 - 2L + L^2$
- $(1 - L)^2 X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$



## Întrebarea 6

### Întrebare

- Comparând ARMA(1,1) vs ARMA(2,1) folosind BIC, care este corect?

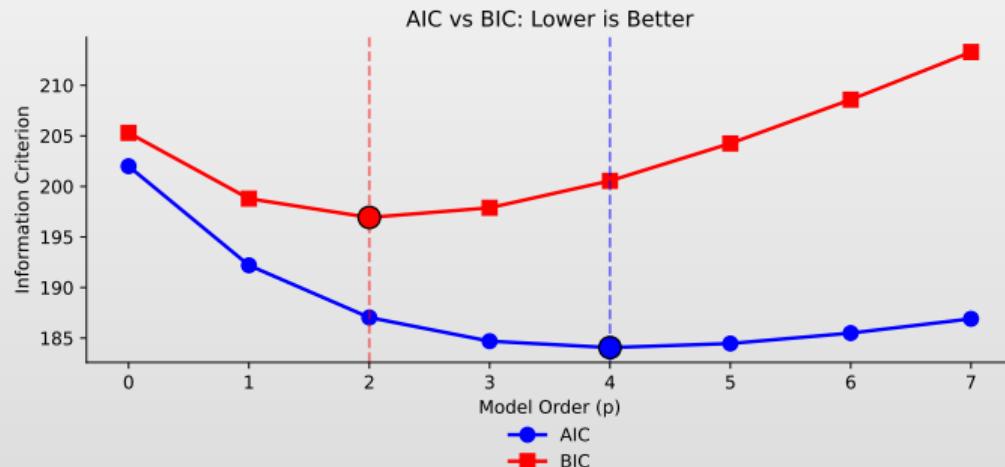
### Variante de răspuns

- (A)** BIC mai mic înseamnă întotdeauna prognoze mai bune
- (B)** BIC penalizează complexitatea mai puțin decât AIC
- (C)** Modelul cu BIC mai mic este preferat
- (D)** BIC poate compara doar modele cu același număr de parametri

## Întrebarea 6: Răspuns

Răspuns corect: (C) Modelul cu BIC mai mic este preferat

- BIC mai mic indică un echilibru mai bun între calitatea estimării și complexitate
- BIC penalizează complexitatea *mai mult* decât AIC



## Întrebarea 7

### Întrebare

- După estimarea unui model ARMA, rulați testul Ljung-Box pe reziduuri și obțineți p-value = 0.03. Ce înseamnă asta?

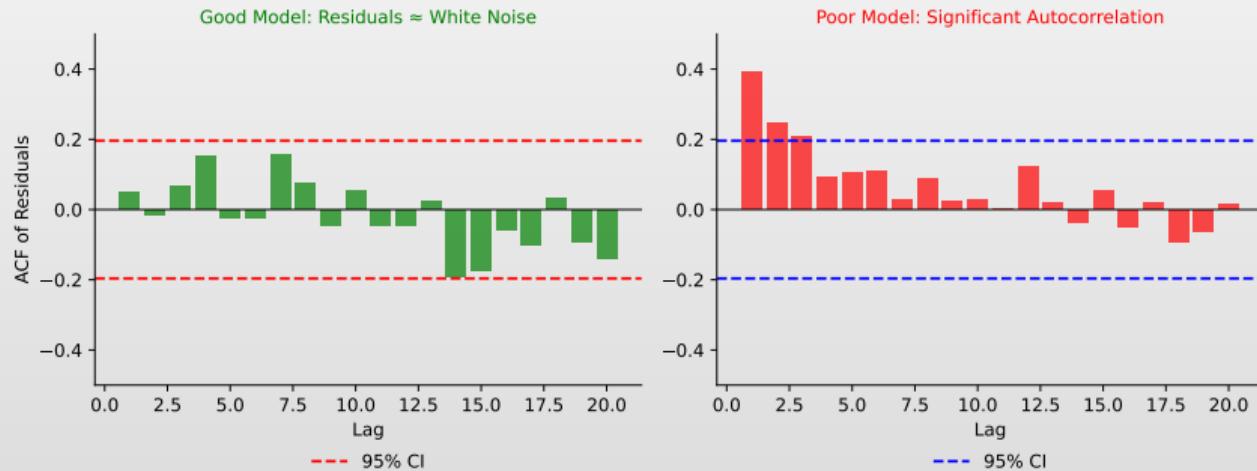
### Variante de răspuns

- (A) Modelul este adecvat, reziduurile sunt zgomot alb
- (B) Modelul este inadecvat, reziduurile au autocorelație
- (C) Trebuie să creșteți dimensiunea eșantionului
- (D) Testul este neconcludent

## Întrebarea 7: Răspuns

Răspuns corect: (B) Modelul este inadecvat

- p-value < 0.05 respinge  $H_0$  (zgomot alb)
- Indică autocorelație reziduală rămasă



## Întrebarea 8

### Întrebare

- Pentru un model AR(1) staționar, ce se întâmplă cu prognozele când orizontul  $h \rightarrow \infty$ ?

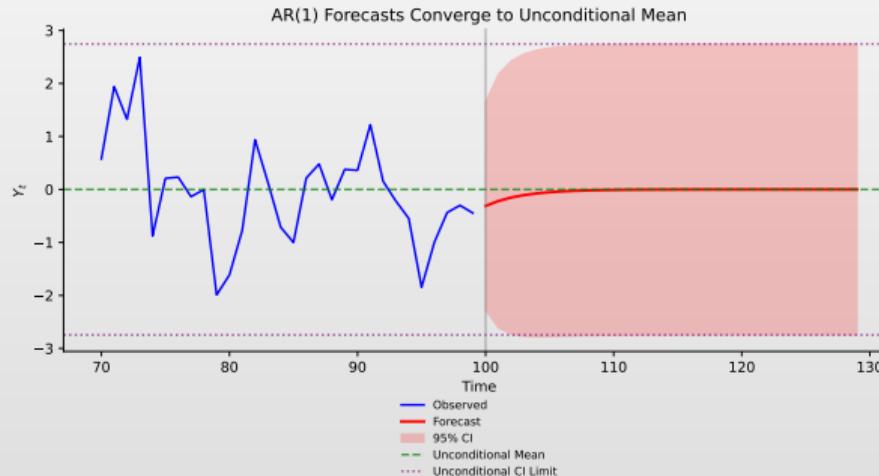
### Variante de răspuns

- (A) Prognozele cresc nelimitat
- (B) Prognozele oscilează la nesfârșit
- (C) Prognozele converg la media necondiționată  $\mu$
- (D) Prognozele devin mai precise

## Întrebarea 8: Răspuns

Răspuns corect: (C) Prognozele converg la  $\mu$

- $\hat{X}_{n+h|n} = \mu + \phi^h(X_n - \mu) \rightarrow \mu$  când  $h \rightarrow \infty$  (deoarece  $|\phi| < 1$ )



## Întrebarea 9

### Întrebare

Fie un proces AR(1) cu  $\phi = 0.6$  și  $\sigma^2 = 4$ . Cât este  $\text{Var}(X_t)$ ?

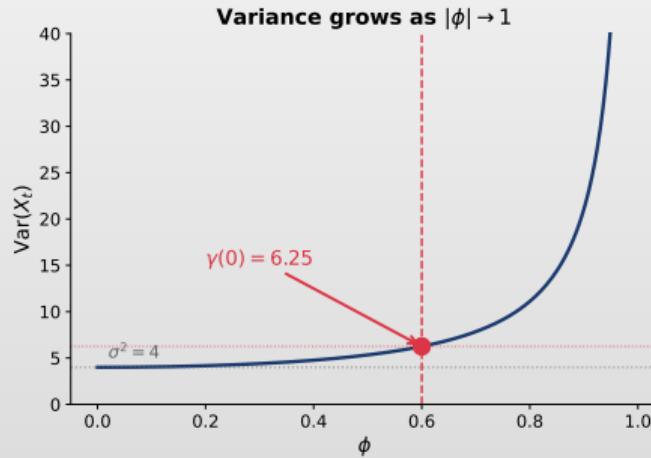
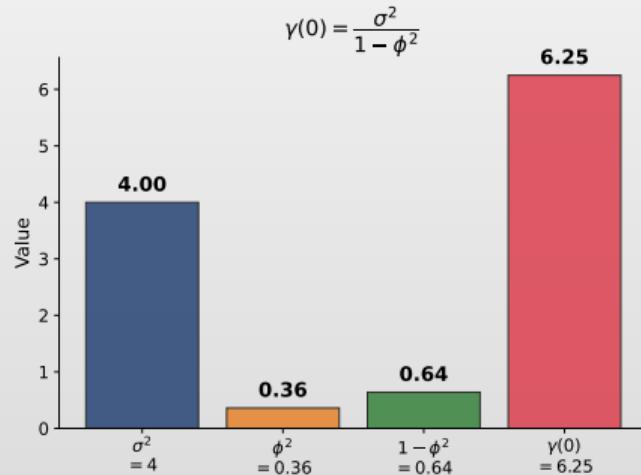
### Variante de răspuns

- (A) 4.0      (B) 5.56      (C) 6.25      (D) 10.0

## Întrebarea 9: Răspuns

Răspuns corect: (C) 6.25

- $\text{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} = \frac{4}{1-0.36} = \frac{4}{0.64} = 6.25$
- Varianța procesului este mai mare decât  $\sigma^2$  din cauza persistenței



## Întrebarea 10

### Întrebare

Fie un proces MA(1) cu  $\theta = 0.5$ . Cât este  $\rho(1)$ ?

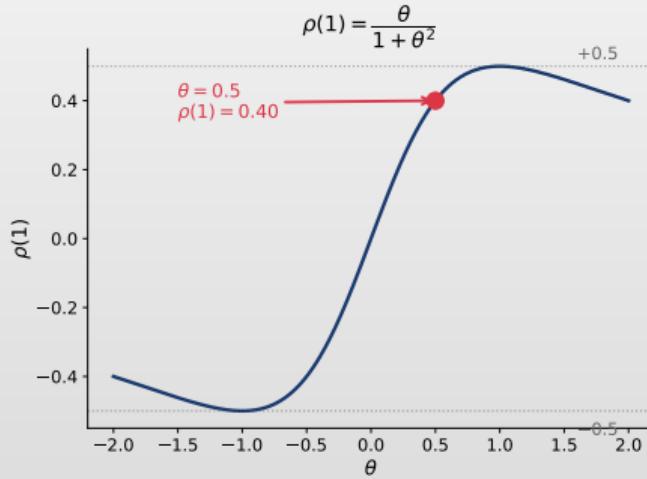
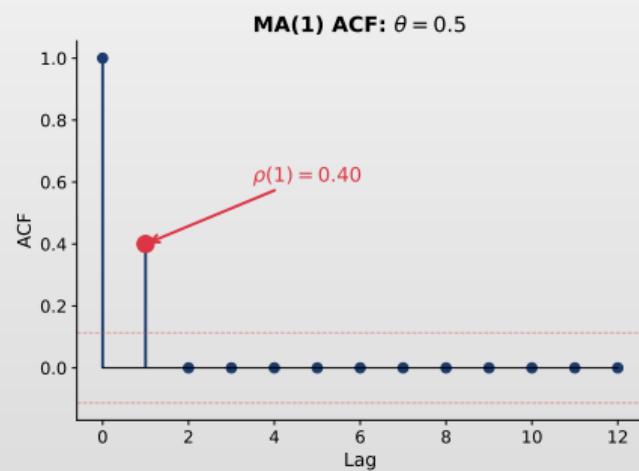
### Variante de răspuns

- (A) 0.50      (B) 0.40      (C) 0.25      (D) 0.33

## Întrebarea 10: Răspuns

Răspuns corect: (B) 0.40

- $\rho(1) = \frac{\theta}{1+\theta^2} = \frac{0.5}{1+0.25} = \frac{0.5}{1.25} = 0.40$
- Observați că  $\rho(1) < \theta$  — autocorelația este **întotdeauna** atenuată



## Întrebarea 11

### Întrebare

- Care afirmație despre ACF-ul unui ARMA(1,1) este **adevărată**?

### Variante de răspuns

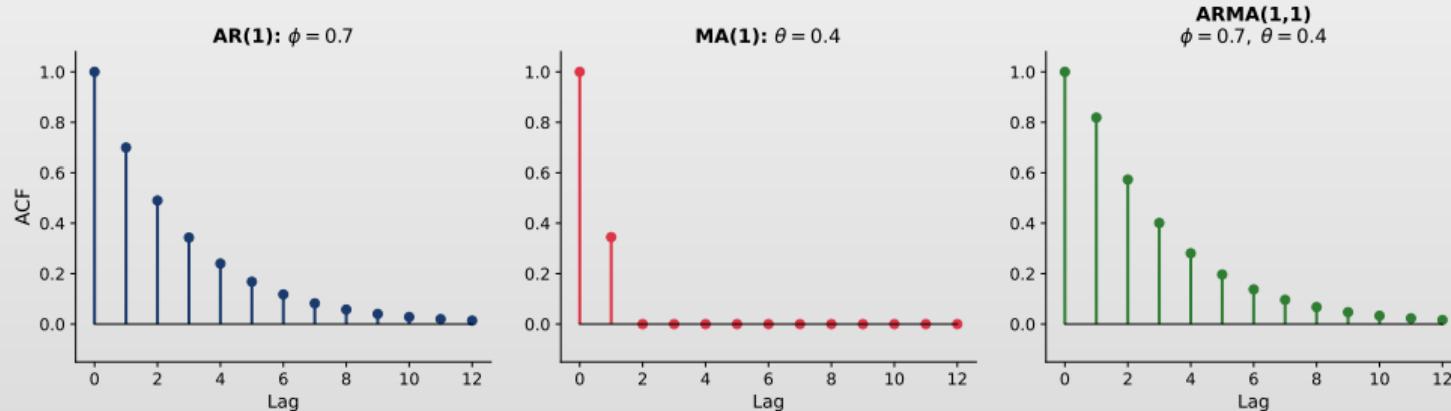
- (A) Se anulează după lag 1
- (B) Descreștere exponențială începând de la lag 1, cu  $\rho(1) \neq \phi$
- (C) Este zero pentru toate lag-urile
- (D) Urmează exact tiparul  $\phi^h$  pentru orice  $h \geq 0$

## Întrebarea 11: Răspuns

Răspuns corect: (B) Descreștere exponențială de la lag 1, cu  $\rho(1) \neq \phi$

- $\rho(1) = \frac{(1+\phi\theta)(\phi+\theta)}{1+2\phi\theta+\theta^2} \neq \phi$  (componenta MA modifică lag-ul 1)
- Pentru  $h \geq 2$ :  $\rho(h) = \phi \rho(h-1)$  — descreștere exponențială ca la AR(1)

ACF Comparison: AR(1) vs MA(1) vs ARMA(1,1)



## Întrebarea 12

### Întrebare

- Un proces AR(2) are  $\phi_1 = 0.8$  și  $\phi_2 = 0.3$ . Este staționar?

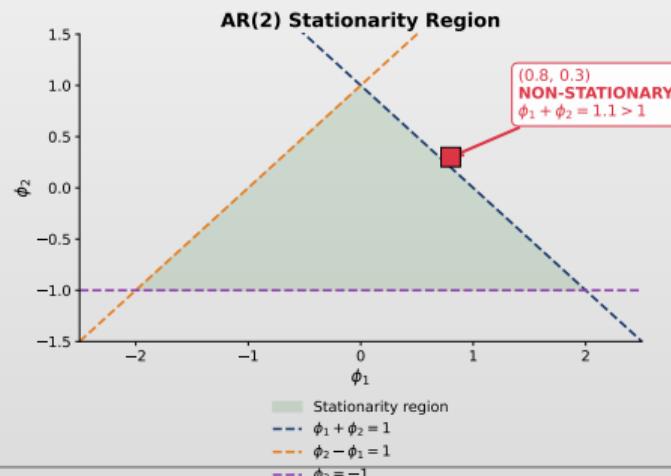
### Variante de răspuns

- (A) Da, este staționar
- (B) Nu, deoarece  $\phi_1 + \phi_2 = 1.1 > 1$
- (C) Nu se poate determina fără date
- (D) Depinde de valoarea lui  $\sigma^2$

## Întrebarea 12: Răspuns

Răspuns corect: (B) Nu, deoarece  $\phi_1 + \phi_2 = 1.1 > 1$

- Condițiile necesare pentru staționaritate AR(2):
- $\phi_1 + \phi_2 < 1, \quad \phi_2 - \phi_1 < 1, \quad |\phi_2| < 1$
- Aici  $0.8 + 0.3 = 1.1 > 1 \Rightarrow$  prima condiție este încălcată



## Întrebarea 13

### Întrebare

- Ce garantează teorema descompunerii Wold?

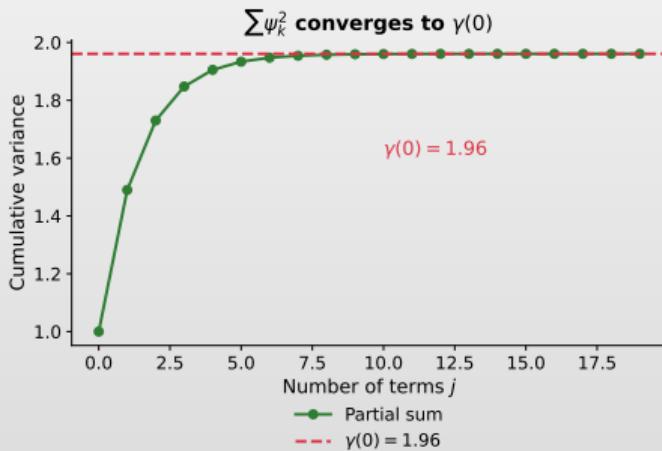
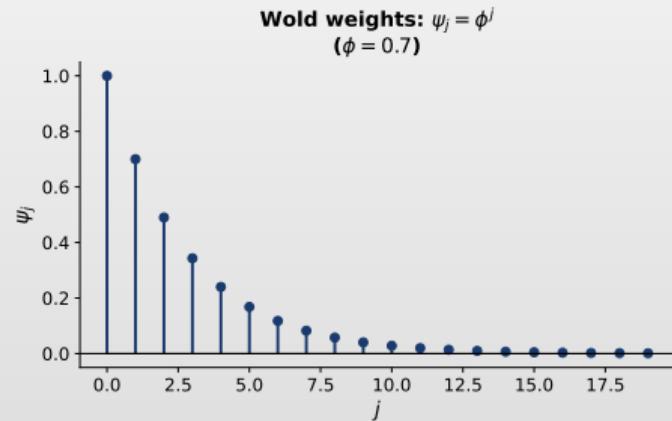
### Variante de răspuns

- (A)** Orice serie de timp este un proces AR
- (B)** Orice proces staționar se poate scrie ca MA( $\infty$ ):  $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$
- (C)** Orice proces are varianță finită
- (D)** Modelele ARMA sunt întotdeauna invertibile

## Întrebarea 13: Răspuns

Răspuns corect: (B) Orice proces staționar = MA( $\infty$ )

- Teorema Wold:  $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + D_t$ , unde  $D_t$  este componenta deterministă
- Aceasta justifică modelele ARMA: sunt aproximări parcimonioase ale lui MA( $\infty$ )



## Întrebarea 14

### Întrebare

AR(1) cu  $\phi = 0.9$ ,  $\sigma^2 = 1$ . Ce se întâmplă cu lățimea IC pe măsură ce  $h \rightarrow \infty$ ?

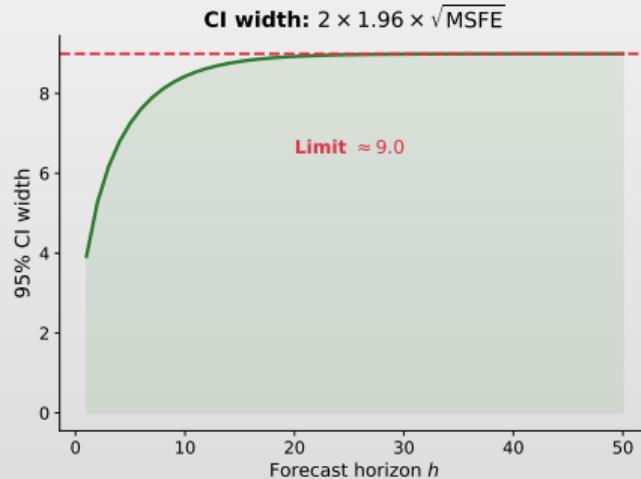
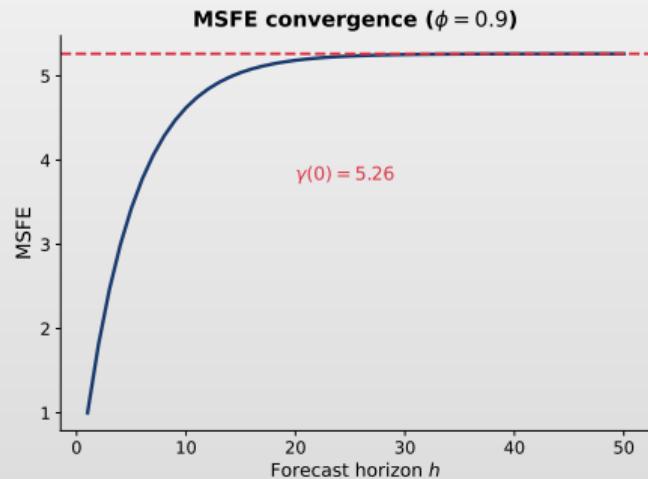
### Variante de răspuns

- (A) Rămâne constantă
- (B) Scade la zero
- (C) Crește spre  $2 \times 1.96 \times \sqrt{1/(1 - 0.81)} \approx 9.0$
- (D) Crește la infinit

## Întrebarea 14: Răspuns

Răspuns corect: (C) Crește spre  $\approx 9.0$

- MSFE( $\infty$ ) =  $\frac{\sigma^2}{1-\phi^2} = \frac{1}{1-0.81} = \frac{1}{0.19} \approx 5.26$
- Lățimea IC =  $2 \times 1.96\sqrt{5.26} \approx 2 \times 1.96 \times 2.29 \approx 9.0$



## Bibliografie I

### Lucrări fundamentale ARMA

- Box, G.E.P., & Jenkins, G.M. (1970). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden-Day.
- Akaike, H. (1974). A New Look at the Statistical Model Identification, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6), 716–723.
- Schwarz, G. (1978). Estimating the Dimension of a Model, *The Annals of Statistics*, 6(2), 461–464.
- Ljung, G.M., & Box, G.E.P. (1978). On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models, *Biometrika*, 65(2), 297–303.

### Manuale clasice

- Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- Brockwell, P.J., & Davis, R.A. (2016). *Introduction to Time Series and Forecasting*, 3rd ed., Springer.
- Shumway, R.H., & Stoffer, D.S. (2017). *Time Series Analysis and Its Applications*, 4th ed., Springer.



## Bibliografie II

### Referințe moderne

- Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*, 3rd ed., OTexts.
- Box, G.E.P., Jenkins, G.M., Reinsel, G.C., & Ljung, G.M. (2015). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, 5th ed., Wiley.
- Lütkepohl, H. (2005). *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer.

### Resurse online și cod

- **Quantlet:** <https://quantlet.com> ↘ Platformă de cod pentru metode cantitative
- **Quantinar:** <https://quantinar.com> ↘ Platformă de învățare pentru metode cantitative
- **GitHub TSA:** [https://github.com/QuantLet/TSA/tree/main/TSA\\_ch2](https://github.com/QuantLet/TSA/tree/main/TSA_ch2) ↘ Cod Python pentru acest capitol



# Vă Mulțumim!

## Întrebări?

Materialele cursului sunt disponibile la: <https://danpele.github.io/Time-Series-Analysis/>

