Analiza și Prognoza seriilor de timp

Seminar 5: Modele GARCH și volatilitate

Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Cuprins Seminar

Întrebarea 1

Ce reprezintă "volatility clustering"?

(A) Volatilitatea este constantă în timp
(B) Perioadele de volatilitate ridicată sunt urmate de perioade de volatilitate ridicată
(C) Randamentele sunt corelate în timp
(D) Distribuția randamentelor este normală

Gândiți-vă la comportamentul piețelor financiare în perioadele de criză...

Răspuns Întrebarea 1

Răspuns Corect: (B)

Perioadele de volatilitate ridicată sunt urmate de perioade de volatilitate ridicată

Explicație

- **Volatility clustering** este un fapt stilizat observat în seriile financiare
- Perioadele "agitate" (cu mișcări mari) tind să persiste
- Perioadele "calme" (cu mișcări mici) tind și ele să persiste
- Aceasta implică că varianța condiționată σ_t^2 este **predictibilă**
- Modelele GARCH captează exact acest fenomen!

Întrebarea 2

În modelul GARCH(1,1): $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$

Ce reprezintă parametrul α?

(A) Persistența volatilității

(B) Nivelul de bază al volatilității

(C) Reacția la șocuri recente (news coefficient)

(D) Varianța necondiționată

Răspuns Întrebarea 2

Răspuns Corect: (C)

Reacția la șocuri recente (news coefficient)

Interpretarea Parametrilor GARCH(1,1)

- ω = nivelul de bază (floor) al volatilității
- α = **reacția** la pătratele inovațiilor ("news")
- β = **persistența** volatilității (memory)
- $\alpha + \beta$ = persistența totală

Un α mare înseamnă că volatilitatea reacționează puternic la șocuri recente.

Întrebarea 3

Care este condiția de stationaritate pentru GARCH(1,1)?

(A) $\omega > 0$

(B) $\alpha + \beta = 1$

(C) $\alpha + \beta < 1$

(D) $\alpha > \beta$

Răspuns Întrebarea 3

Răspuns Corect: (C)

$\alpha + \beta < 1$

Condiții Complete

Pentru stationaritatea GARCH(1,1):

- $\omega > 0$ (asigură varianță pozitivă)
- $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ (non-negativitate)
- $\alpha + \beta < 1$ (**stationaritate strictă**)

Dacă $\alpha + \beta = 1 \Rightarrow$ IGARCH (șocurile au efect permanent)

Întrebarea 4

Care este formula varianței necondiționate în GARCH(1,1)?

(A) $\bar{\sigma}^2 = \omega$

(B) $\bar{\sigma}^2 = \dfrac{\omega}{1-\alpha}$

(C) $\bar{\sigma}^2 = \dfrac{\omega}{1-\alpha-\beta}$

(D) $\bar{\sigma}^2 = \dfrac{\omega}{\alpha+\beta}$

Răspuns Întrebarea 4

Răspuns Corect: (C)

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$$

Demonstrație

Luând așteptarea necondiționată a GARCH(1,1):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\sigma_t^2] &= \omega + \alpha\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] + \beta\mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2] \\
\bar{\sigma}^2 &= \omega + \alpha\bar{\sigma}^2 + \beta\bar{\sigma}^2 \\
\bar{\sigma}^2(1-\alpha-\beta) &= \omega \\
\bar{\sigma}^2 &= \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}
\end{aligned}$$

Întrebarea 5

Ce este “leverage effect”?

(A) Șocurile pozitive cresc volatilitatea mai mult decât cele negative

(B) Șocurile negative cresc volatilitatea mai mult decât cele pozitive

(C) Volatilitatea este independentă de semnul șocurilor

(D) Randamentele sunt asimetrice

Răspuns Întrebarea 5

Răspuns Corect: (B)

Șocurile negative cresc volatilitatea mai mult decât cele pozitive

Explicație

- Observat empiric pe piețele de acțiuni
- Când prețurile scad, leverage-ul firmei crește (datoria devine mai mare relativă la capitaluri)
- Aceasta face firma mai riscantă $\Rightarrow$ volatilitate mai mare
- GARCH standard **nu poate** captura acest efect (depinde de ε^2)
- Soluții: **EGARCH**, **GJR-GARCH**, **TGARCH**

Întrebarea 6

În modelul EGARCH, parametrul γ negativ indică:

(A) Absența leverage effect

(B) Prezența leverage effect

(C) Volatilitate constantă

(D) Model nestationar

Răspuns Întrebarea 6

Răspuns Corect: (B)

Prezența leverage effect

EGARCH(1,1)

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \alpha(|z_{t-1}| - \mathbb{E}[|z|]) + \gamma z_{t-1} + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2)$$

- $\gamma < 0$: șoc negativ ($z < 0$) $\Rightarrow$ crește $\ln(\sigma_t^2)$
- $\gamma > 0$: efect invers (mai rar întâlnit)
- $\gamma = 0$: efect simetric (ca GARCH)

Întrebarea 7

Care este principalul avantaj al EGARCH față de GARCH?

(A) Este mai rapid de estimat

(B) Nu necesită restricții de non-negativitate

(C) Are mai puțini parametri

(D) Este mai ușor de interpretat

Răspuns Întrebarea 7

Răspuns Corect: (B)

Nu necesită restricții de non-negativitate

Avantajele EGARCH

- Modelează $\ln(\sigma_t^2)$, nu σ_t^2
- $\sigma_t^2 = e^{\ln(\sigma_t^2)} > 0$ **automat**, indiferent de valorile parametrilor
- GARCH necesită $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$
- La estimare, aceste restricții pot cauza probleme de convergență

Întrebarea 8

Ce test folosim pentru a detecta efecte ARCH în reziduuri?

(A) Testul Dickey-Fuller

(B) Testul Ljung-Box pe reziduuri

(C) Testul Engle (ARCH-LM)

(D) Testul Breusch-Pagan

Răspuns Întrebarea 8

Răspuns Corect: (C)

Testul Engle (ARCH-LM)

Procedura Testului ARCH-LM

1. Estimează modelul pentru medie, obține reziduurile $\hat{\varepsilon}_t$
2. Calculează $\hat{\varepsilon}_t^2$
3. Regresează: $\hat{\varepsilon}_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \cdots + \beta_q \hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + u_t$
4. Statistica: $LM = T \cdot R^2 \sim \chi^2(q)$ sub H_0

H_0: Nu există efecte ARCH $\quad$ H_1: Există efecte ARCH

Întrebarea 9

Pentru S&P 500, valorile tipice ale $\alpha + \beta$ în GARCH(1,1) sunt:

(A) 0.50 – 0.70

(B) 0.70 – 0.85

(C) 0.95 – 0.99

(D) Mai mare decât 1

Răspuns Întrebarea 9

Răspuns Corect: (C)

0.95 – 0.99

Volatilitate Foarte Persistentă

- Seriile financiare au volatilitate foarte persistentă
- $\alpha + \beta \approx 0.98$ pentru S&P 500
- Half-life: $HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha+\beta)} \approx 35 - 60$ zile
- Aceasta înseamnă că un șoc de volatilitate se disipează în câteva luni

Serie	$\alpha + \beta$
S&P 500	0.97–0.99
Bitcoin	0.90–0.98
EUR/USD	0.96–0.99

Întrebarea 10

Care distribuție este cel mai des folosită pentru inovațiile GARCH pentru a captura cozile groase?

(A) Normală

(B) Uniformă

(C) Student-t

(D) Exponențială

Răspuns Întrebarea 10

Răspuns Corect: (C)

Student-t

Distribuții pentru Inovații

- **Normală**: standard, dar subestimează riscul extrem
- **Student-t**: cozi groase, parametru ν (grade de libertate)
- **GED**: Generalized Error Distribution, flexibilă
- **Skewed Student-t**: asimetrie + cozi groase

Pentru S&P 500: $\nu \approx 5 - 8$ (cozi semnificativ mai groase decât normala)

Adevărat sau Fals?

1. Modelele ARIMA pot captura volatility clustering.
2. În GARCH(1,1), dacă $\alpha + \beta = 1$, modelul se numește IGARCH.
3. GJR-GARCH folosește o variabilă indicator pentru șocuri negative.
4. Prognoza volatilității GARCH converge către zero pe termen lung.
5. EGARCH poate avea parametri negativi fără a genera varianță negativă.
6. Value at Risk (VaR) poate fi calculat folosind prognoza volatilității GARCH.

Răspunsuri Adevărat/Fals

1. **FALS** — ARIMA presupune varianță constantă; GARCH modelează volatilitatea.
2. **ADEVĂRAT** — IGARCH = Integrated GARCH, volatilitatea are rădăcină unitară.
3. **ADEVĂRAT** — $I_{t-1} = 1$ dacă $\varepsilon_{t-1} < 0$, altfel 0.
4. **FALS** — Converge către varianța necondiționată $\bar{\sigma}^2$, nu zero.
5. **ADEVĂRAT** — Modelează $\ln(\sigma_t^2)$, deci $\sigma_t^2 = e^{\ln(\sigma_t^2)} > 0$ mereu.
6. **ADEVĂRAT** — $\text{VaR}_\alpha = z_\alpha \cdot \sigma_{t+1}$ (pentru medie zero).

Problema 1: Calculul Varianței Necondiționate

Enunț

Un model GARCH(1,1) are parametrii estimați:

- $\omega = 0.000002$
- $\alpha = 0.08$
- $\beta = 0.90$

Calculați:

(a) Varianța necondiționată zilnică

(b) Volatilitatea necondiționată zilnică (ca procent)

(c) Volatilitatea anualizată (presupunând 252 zile de tranzacționare)

(d) Half-life-ul volatilității

Soluție Problema 1

Răspunsuri

(a) $\bar{\sigma}^2 = \dfrac{\omega}{1-\alpha-\beta} = \dfrac{0.000002}{1-0.08-0.90} = \dfrac{0.000002}{0.02} = 0.0001$

(b) $\bar{\sigma} = \sqrt{0.0001} = 0.01 = 1\%$ pe zi

(c) $\sigma_{\text{annual}} = \bar{\sigma} \times \sqrt{252} = 0.01 \times 15.87 = 15.87\%$ pe an

(d) $HL = \dfrac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha+\beta)} = \dfrac{\ln(0.5)}{\ln(0.98)} = \dfrac{-0.693}{-0.0202} \approx 34$ zile

Interpretare

Volatilitatea de 15.87% pe an este tipică pentru un indice bursier. Half-life de 34 zile înseamnă că un șoc de volatilitate se reduce la jumătate după aproximativ 7 săptămâni.

Problema 2: Prognoză Volatilitate

Enunț

Folosind modelul GARCH(1,1) de la Problema 1:

- $\omega = 0.000002$, $\alpha = 0.08$, $\beta = 0.90$
- La momentul T: $\varepsilon_T = -0.03$ (scădere de 3%), $\sigma_T^2 = 0.0004$

Calculați prognoza volatilității pentru:

(a) σ_{T+1}^2 (un pas înainte)

(b) σ_{T+5}^2 (cinci pași înainte)

(c) σ_{T+100}^2 (o sută de pași înainte)

Soluție Problema 2

Răspunsuri

(a) $\sigma^2_{T+1} = \omega + \alpha\varepsilon^2_T + \beta\sigma^2_T$

$$= 0.000002 + 0.08 \times (0.03)^2 + 0.90 \times 0.0004 = 0.000434$$

Volatilitate: $\sqrt{0.000434} = 2.08\%$

(b) $\mathbb{E}_T[\sigma^2_{T+5}] = \bar{\sigma}^2 + (0.98)^4(\sigma^2_{T+1} - \bar{\sigma}^2)$

$$= 0.0001 + 0.922 \times (0.000434 - 0.0001) = 0.000408$$

Volatilitate: $\sqrt{0.000408} = 2.02\%$

(c) $\mathbb{E}_T[\sigma^2_{T+100}] = 0.0001 + (0.98)^{99} \times 0.000334 \approx 0.000145$
Volatilitate: $\sqrt{0.000145} = 1.20\%$ (aproape de $\bar{\sigma} = 1\%$)

Problema 3: Value at Risk

Enunț

Un portofoliu de 1.000.000 EUR este investit în acțiuni cu randamente modelate GARCH(1,1).
Prognoza volatilității pentru mâine: $\sigma_{T+1} = 2\%$ zilnic.
Presupunând randamente normal distribuite cu medie zero, calculați:

(a) VaR la 95% (1 zi)

(b) VaR la 99% (1 zi)

(c) VaR la 99% (10 zile), folosind regula "square root of time"

Cuantile: $z_{0.05} = 1.645$, $z_{0.01} = 2.326$

Soluție Problema 3

Răspunsuri

(a) VaR 95% (1 zi):

$$\text{VaR}_{95\%} = 1.645 \times 0.02 \times 1{,}000{,}000 = 32{,}900 \text{ EUR}$$

(b) VaR 99% (1 zi):

$$\text{VaR}_{99\%} = 2.326 \times 0.02 \times 1{,}000{,}000 = 46{,}520 \text{ EUR}$$

(c) VaR 99% (10 zile):

$$\text{VaR}_{99\%,10d} = \text{VaR}_{99\%,1d} \times \sqrt{10} = 46{,}520 \times 3.162 = 147{,}100 \text{ EUR}$$

Atenție

În practică, pentru Student-t, cuantilele sunt mai mari (cozi mai groase)!

Problema 4: Identificarea modelului

Enunț

Analizați următoarele rezultate ale estimării și identificați modelul:

Parametru	**Estimat**	**Std. Error**
ω	0.0000015	0.0000005
α	0.0550	0.0120
γ	0.0850	0.0180
β	0.9100	0.0150

(a) Ce model este acesta?

(b) Este prezent leverage effect?

(c) Care este impactul unui șoc negativ vs pozitiv?

(d) Este modelul stationar?

Soluție Problema 4

Răspunsuri

(a) **GJR-GARCH(1,1,1)** — prezența parametrului γ (threshold/asymmetry)

(b) **Da, leverage effect prezent**: $\gamma = 0.085 > 0$ și semnificativ

(c) Impact:
- Șoc pozitiv: impact $= \alpha = 0.055$
- Șoc negativ: impact $= \alpha + \gamma = 0.055 + 0.085 = 0.140$
- Șocurile negative au impact de **2.5x mai mare**!

(d) Stationaritate: $\alpha + \gamma/2 + \beta = 0.055 + 0.0425 + 0.91 = 1.0075$
La limită! Aproape IGARCH. Model foarte persistent.

Pasul 1: Încărcare și Pregătire Date

```
import pandas as pd
import numpy as np
import yfinance as yf
from arch import arch_model
from arch.unitroot import ADF

# Descărcare date S&P 500
data = yf.download('^GSPC', start='2010-01-01', end='2024-01-01')
returns = 100 * data['Adj Close'].pct_change().dropna()

# Verificare stationaritate
adf = ADF(returns)
print(f'ADF statistic: {adf.stat:.4f}')
print(f'p-value: {adf.pvalue:.4f}')
```

Pasul 2: Test Efecte ARCH

```
from statsmodels.stats.diagnostic import het_arch

# Test ARCH-LM pe reziduuri
residuals = returns - returns.mean()
lm_stat, lm_pvalue, f_stat, f_pvalue = het_arch(residuals, nlags=10)

print(f'ARCH-LM statistic: {lm_stat:.4f}')
print(f'p-value: {lm_pvalue:.4f}')

if lm_pvalue < 0.05:
    print('=> Efecte ARCH prezente! Se justifica modelul GARCH.')
```

Pasul 3: Estimare Modele

```
# GARCH(1,1) cu distributie Student-t
model_garch = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, q=1, dist='t')
res_garch = model_garch.fit(disp='off')
print(res_garch.summary())

# GJR-GARCH(1,1,1)
model_gjr = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, o=1, q=1, dist='t')
res_gjr = model_gjr.fit(disp='off')

# EGARCH(1,1)
model_egarch = arch_model(returns, vol='EGARCH', p=1, q=1, dist='t')
res_egarch = model_egarch.fit(disp='off')

# Comparatie AIC
print(f'GARCH AIC: {res_garch.aic:.2f}')
print(f'GJR AIC: {res_gjr.aic:.2f}')
print(f'EGARCH AIC: {res_egarch.aic:.2f}')
```

Pasul 4: Diagnostic

```
# Reziduuri standardizate
std_resid = res_gjr.std_resid

# Test Ljung-Box pe reziduuri patrate
from statsmodels.stats.diagnostic import acorr_ljungbox
lb_test = acorr_ljungbox(std_resid**2, lags=10, return_df=True)
print(lb_test)

# Verificare efecte ARCH reziduale
lm_stat2, lm_pval2, _, _ = het_arch(std_resid, nlags=5)
print(f'ARCH-LM reziduuri: stat={lm_stat2:.2f}, p={lm_pval2:.4f}')

if lm_pval2 > 0.05:
    print('=> Nu mai sunt efecte ARCH reziduale. Model OK!')
```

Pasul 5: Prognoză și VaR

```
# Prognoza 10 zile
forecasts = res_gjr.forecast(horizon=10)
vol_forecast = np.sqrt(forecasts.variance.values[-1, :])

print('Prognoza volatilitatii (%):', vol_forecast)

# Value at Risk 99%
portfolio_value = 1_000_000
VaR_99 = 2.326 * vol_forecast[0] / 100 * portfolio_value
print(f'VaR 99% (1 zi): {VaR_99:,.0f} EUR')

# VaR 10 zile
VaR_99_10d = VaR_99 * np.sqrt(10)
print(f'VaR 99% (10 zile): {VaR_99_10d:,.0f} EUR')
```

Rezumat Seminar

Concepte Cheie

- **ARCH**: varianța condiționată depinde de șocuri trecute
- **GARCH**: adaugă persistența prin lag-uri ale varianței
- **EGARCH/GJR**: captează leverage effect (asimetrie)
- **Stationaritate**: $\alpha + \beta < 1$

Formule importante

- Varianța necondiționată: $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$
- Half-life: $HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha+\beta)}$
- VaR: $\text{VaR}_\alpha = z_\alpha \cdot \sigma \cdot V$

Sfat Practic

Folosiți distribuția Student-t pentru a captura cozile groase. Verificați absența efectelor ARCH în reziduuri!

Exerciții pentru Acasă

Exercițiul 1

Descărcați randamentele zilnice pentru BET (indicele BVB) și estimați un model GARCH(1,1). Comparați persistența $(\alpha + \beta)$ cu S&P 500.

Exercițiul 2

Pentru Bitcoin, estimați GARCH, EGARCH și GJR-GARCH. Este leverage effect prezent pentru criptomonede?

Exercițiul 3

Calculați VaR zilnic pentru un portofoliu de 100.000 EUR investit în EUR/USD, folosind volatilitatea GARCH prognozată.

Exercițiul 4

Compară prognoza volatilității GARCH(1,1) cu volatilitatea realizată (suma pătratelor randamentelor) pentru o perioadă de 20 de zile.

Bibliografie I

Manuale fundamentale

- Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*, 3rd ed., OTexts.
- Shumway, R.H., & Stoffer, D.S. (2017). *Time Series Analysis and Its Applications*, 4th ed., Springer.
- Brockwell, P.J., & Davis, R.A. (2016). *Introduction to Time Series and Forecasting*, 3rd ed., Springer.

Serii de timp financiare

- Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*, 3rd ed., Wiley.
- Franke, J., Härdle, W.K., & Hafner, C.M. (2019). *Statistics of Financial Markets*, 4th ed., Springer.

Bibliografie II

Abordari moderne si Machine Learning

- Nielsen, A. (2019). *Practical Time Series Analysis*, O'Reilly Media.
- Petropoulos, F., et al. (2022). *Forecasting: Theory and Practice*, International Journal of Forecasting.
- Makridakis, S., Spiliotis, E., & Assimakopoulos, V. (2020). The M4 Competition, International Journal of Forecasting.

Resurse online si cod

- **Quantlet**: `https://quantlet.com` — Repository de cod pentru statistica
- **Quantinar**: `https://quantinar.com` — Platforma de invatare metode cantitative
- **GitHub TSA**: `https://github.com/QuantLet/TSA` — Cod Python pentru acest seminar