Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 1: Procese Stochastice și Staționaritate

Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

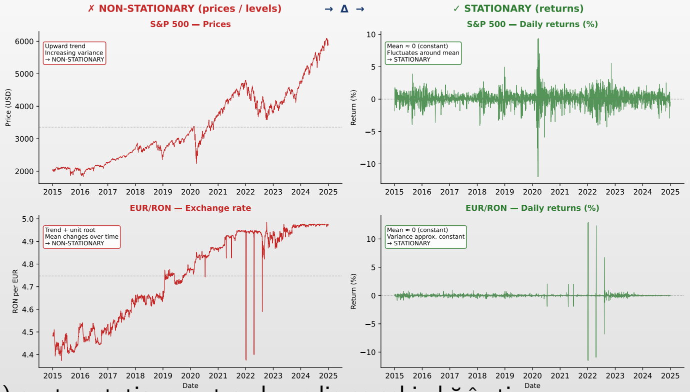
Obiective de Învățare

La finalul acestui capitol, veți fi capabili să:

1. **Definiți** procesele stochastice și să înțelegeți proprietățile acestora
2. **Distingeți** între staționaritatea strictă și slabă (covarianță)
3. **Identificați** procesele de zgomot alb și mers aleatoriu
4. **Calculați** și interpretați ACF și PACF
5. **Aplicați** operatorul lag și diferențierea
6. **Efectuați** teste de staționaritate (ADF, KPSS)
7. **Analizați** date financiare de tip serie de timp
8. **Distingeți** între procesele cu rădăcină unitate și cele staționare în trend

Structura Capitolului

Exemple: Serii Staționare vs. Nestaționare



- **Prețurile** (stânga) sunt nestaționare: trend, media se schimbă în timp
- **Randamentele** (dreapta) sunt staționare: medie ≈ 0, varianță aprox. constantă
- Randamente log: $r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}$ (mai întâi logaritmăm, apoi diferențiem): nestaționar $\to$ staționar

TSA_ch1_motivation

Proces Stochastic: Definiție

Definiție 1 (Proces Stochastic)

Un **proces stochastic** este o colecție de variabile aleatoare indexate după timp:

$$\{X_t(\omega) : t \in \mathcal{T}, \omega \in \Omega\}$$

unde Ω este spațiul eșantion al rezultatelor posibile.

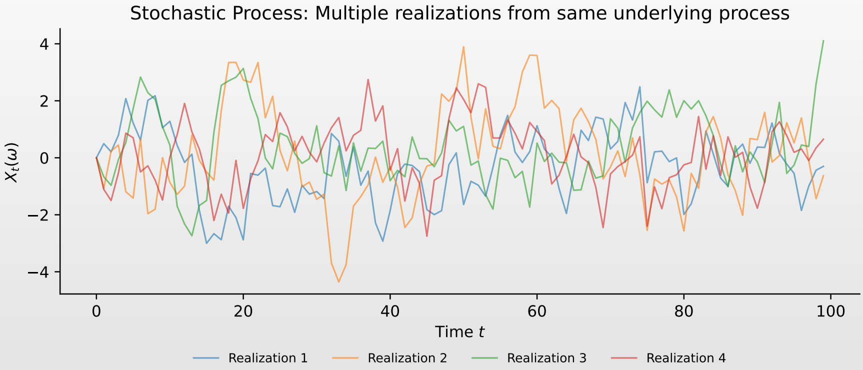
Două Perspective

- ω **fixat**: O *realizare* $\{X_t(\omega)\}_{t\in\mathcal{T}}$
- t **fixat**: O *variabilă aleatoare* X_t

Observație Cheie

O serie de timp pe care o observăm este **o singură realizare** a procesului stochastic subiacent.

Proces Stochastic: Ilustrare Vizuală



- Fiecare linie este o **realizare diferită** din același proces stochastic subiacent
- Observăm doar **o singură realizare**, dar vrem să înțelegem proprietățile procesului

TSA_ch1_stochastic_process

Momentele unui Proces Stochastic

Primele Două Momente Caracterizează Procesul

- **Funcția de Medie:** $\mu_t = \mathbb{E}[X_t]$
- **Autocovarianța (ACVF):** $\gamma(t,s) = \mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \mathbb{E}[(X_t - \mu_t)(X_s - \mu_s)]$
- **Autocorelația (ACF):** $\rho(t,s) = \gamma(t,s)/\sqrt{\mathrm{Var}(X_t)\cdot\mathrm{Var}(X_s)}$

Proprietăți ACF

- $\rho(t,s) \in [-1,1]$
- $\rho(t,t) = 1$ (corelație perfectă cu sine)

Punct Cheie

- μ_t și $\gamma(t,s)$ pot depinde de t
- Staționaritatea elimină această dependență

De ce Contează Staționaritatea

Staționaritatea este o ipoteză fundamentală pentru analiza seriilor de timp:

Fără Staționaritate:

- Media, varianța se schimbă în timp
  - Estimările sunt inconsistente
- Trecutul poate să nu prezică viitorul
- Metodele standard eșuează
- Corelații false (spurioase)

Cu Staționaritate:

- Proprietăți statistice constante
  - Ergodicitate justificată
- Putem estima dintr-o singură realizare
- Inferență validă posibilă
- Modelele sunt semnificative

Principiu Cheie

Majoritatea modelelor de serii de timp (ARMA, ARIMA, etc.) necesită staționaritate. Seriile nestaționare trebuie transformate (de ex., diferențiere) înainte de modelare.

Staționaritatea Strictă

Definiție 2 (Staționaritate Strictă (Puternică))

Un proces $\{X_t\}$ este **strict staționar** dacă pentru orice k, orice $t_1, \ldots, t_k$, și orice h:

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \ldots, X_{t_k+h})$$

Notație: $X \stackrel{d}{=} Y$ înseamnă *egalitate în distribuție*: $P(X \leq x) = P(Y \leq x)$ pentru toți x.

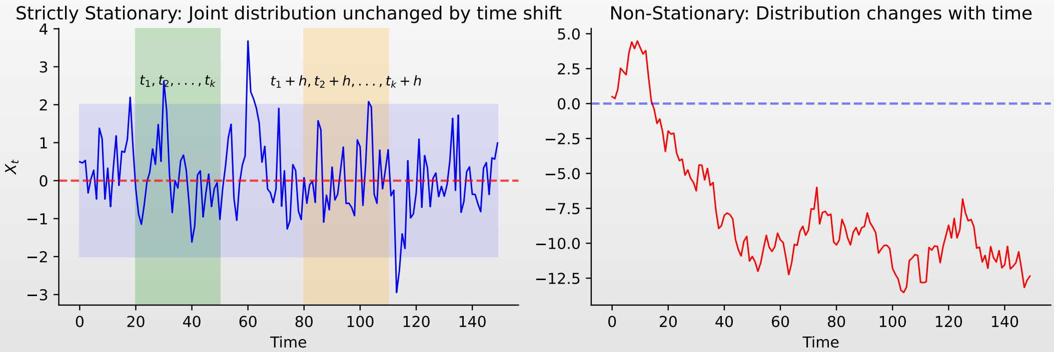
Implicații

- Toate distribuțiile marginale $F_{X_t}(x)$ identice
- $\mathbb{E}[X_t] = \mu$ (medie constantă, dacă există)
- $\text{Var}(X_t) = \sigma^2$ (varianță constantă, dacă există)
- Distribuțiile comune depind doar de lag

Notă

Staționaritatea strictă este o condiție puternică, adesea imposibil de verificat în practică.

Staționaritatea Strictă: Ilustrare Vizuală



- Translația în timp nu schimbă distribuția comună a variabilelor
- Oricare două ferestre temporale au aceleași proprietăți statistice
- În practică: verificăm doar primele momente (staționaritate slabă)

TSA_ch1_stationarity

Staționaritatea Slabă (Covarianță)

Definiție 3 (Staționaritate Slabă)

Un proces $\{X_t\}$ este **slab staționar** (sau staționar în covarianță) dacă:

1. $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$ pentru toți t (momente finite de ordin 2)
2. $\mathbb{E}[X_t] = \mu$ pentru toți t (medie constantă)
3. $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$ (covarianța depinde doar de lag-ul h, nu de t)

Proprietate cheie: Autocovarianța este o funcție doar de lag:

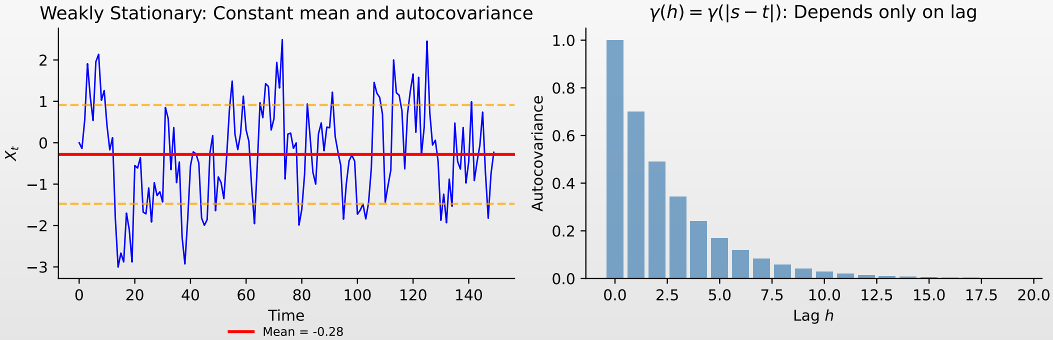
$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \mathbb{E}[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)]$$

Funcția de autocorelație:

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t+h})}{\text{Var}(X_t)}$$

Notă: $\rho(0) = 1$, $|\rho(h)| \leq 1$ și $\rho(h) = \rho(-h)$ (simetrie)

Staționaritatea Slabă: Ilustrare Vizuală



- $\mathbb{E}[X_t] = \mu$ constantă — media nu depinde de timp
- $\mathrm{Var}(X_t) = \sigma^2$ constantă — varianța nu depinde de timp
- $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$ — autocovarianța depinde doar de lag h

TSA_ch1_stationarity

Relația între Staționaritate Strictă și Slabă

Teoremă 1 (Implicație Fundamentală)

Dacă $\{X_t\}$ este **strict staționar** și $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$, atunci $\{X_t\}$ este și **slab staționar**.

Demonstrație.

Fie t_1, t_2 oarecare și h deplasare temporală arbitrară.

Din invarianța distribuției comune: $(X_{t_1}, X_{t_2}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+h}, X_{t_2+h})$
(i) $\mathbb{E}[X_{t_1}] = \mathbb{E}[X_{t_1+h}] = \mu$ (medie constantă)
(ii) $\text{Cov}(X_{t_1}, X_{t_2}) = \text{Cov}(X_{t_1+h}, X_{t_2+h})$
Deci autocovarianța depinde doar de diferența $t_2 - t_1 = h$, nu de t_1. $\square$ $\square$

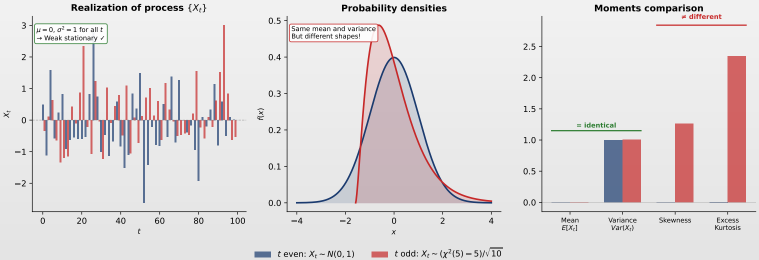
Atenție: Reciproca NU este adevărată!

Există procese slab staționare dar **nu** strict staționare.

Contraexemplu: Slab Staționar dar NU Strict Staționar

Construcție

Fie $\{X_t\}$ variabile aleatoare **independente** cu: t par: $X_t \sim N(0,1)$; t impar: $X_t \sim \frac{\chi^2(5)-5}{\sqrt{10}}$



Slab staționar ✓: $\mathbb{E}[X_t] = 0$, $\text{Var}(X_t) = 1$, $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = 0$ pentru orice t

NU strict staționar ×: Asimetria diferă (0 vs > 0) $\Rightarrow$ $X_1 \overset{d}{\neq} X_2$

TSA_ch1_counterexample

Proprietățile Funcției de Autocovarianță

Propoziție 1

Pentru un proces slab staționar, ACVF $\gamma(h)$ satisface:

1. **Simetrie:** $\gamma(h) = \gamma(-h)$
2. **Maximum la zero:** $|\gamma(h)| \leq \gamma(0) = \mathrm{Var}(X_t)$
3. **Definit nenegativ:** $\sum_{i,j} a_i a_j \gamma(i-j) \geq 0$ pentru orice $a_1, \ldots, a_n$

Demonstrație (prop. 3)

$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_{t+i}\right) = \sum_{i,j} a_i a_j \gamma(i-j) \geq 0 \quad$ (varianța ≥ 0)

Implicație: Nu orice funcție poate fi o funcție de autocovarianță validă.

Ergodicitatea: Fundamentul Inferenței din Date

Definiție 4 (Ergodicitate pentru Medie)

Un proces staționar $\{X_t\}$ este **ergodic pentru medie** dacă: $\bar{X}_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t \xrightarrow{P} \mathbb{E}[X_t] = \mu$ când $T \to \infty$

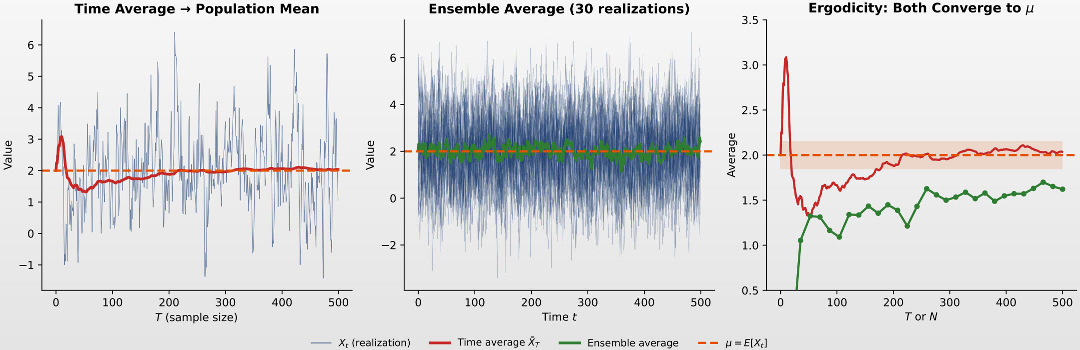
De ce contează ergodicitatea?

- Avem doar **o singură realizare** a procesului stochastic
- Ergodicitatea permite estimarea lui μ din media eșantionului $\bar{X}_T$
- **Fără ergodicitate, inferența statistică nu este posibilă!**

Teoremă 2 (Condiție Suficientă)

Dacă $\sum_{h=0}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty$ (autocovarianțe absolut sumabile), procesul este ergodic.

Ergodicitatea: Ilustrare Vizuală



- **Media temporală** (o singură realizare) și **media ansamblului** (realizări multiple) converg ambele la μ
- Ergodicitatea garantează că putem estima μ dintr-o **singură serie temporală** suficient de lungă

TSA_ch1_ergodicity

Teorema de Descompunere Wold

Teoremă 3 (Wold, 1938)

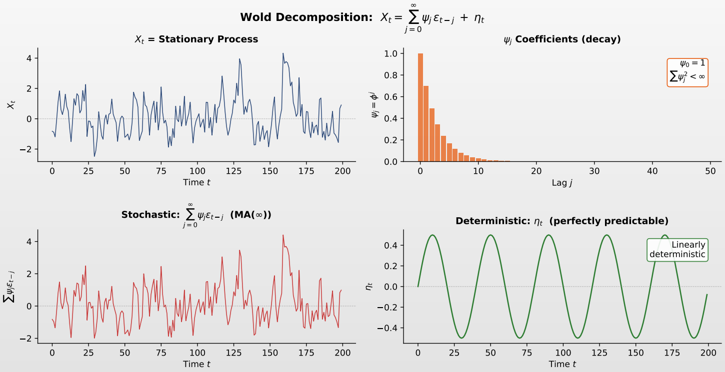
Orice proces **staționar în covarianță** $\{X_t\}$ poate fi scris ca: $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + \eta_t$

- $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ — zgomot alb; $\psi_0 = 1$, $\sum \psi_j^2 < \infty$
- η_t — componenta deterministă (perfect predictibilă)

Semnificația Teoremei Wold

- Orice proces staționar = **medie mobilă infinită** + componentă deterministă
- Justifică teoretic modelele MA(q) și ARMA(p, q)
- Coeficienții ψ_j măsoară impactul șocurilor trecute

Teorema Wold: Ilustrare Vizuală



- X_t se descompune în componentă **stochastică** (MA(∞)) și componentă **deterministă** (η_t)
- Coeficienții ψ_j descresc — șocurile recente au impact mai mare decât cele îndepărtate

TSA_ch1_wold_decomposition

Operatorul Lag

Definiție 5 (Operatorul Lag)

Operatorul lag (sau operatorul de întârziere) L este definit prin:

$$LX_t = X_{t-1}$$

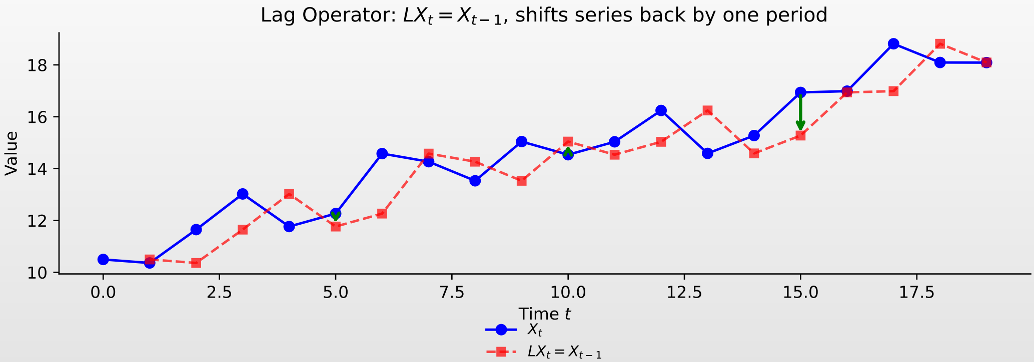
Proprietăți

- $L^k X_t = X_{t-k}$ (întârzie cu k perioade)
  - Notație compactă pentru modele
- $L^0 = I$ (identitate)
- $(1 - \phi L)X_t = X_t - \phi X_{t-1}$

Exemple

- $(1 - L)X_t = X_t - X_{t-1}$ (prima diferență)
- $(1 - L)^2 X_t = \Delta^2 X_t$ (a doua diferență)
- $(1 - L^{12})X_t$ (diferență sezonieră)

Operatorul Lag: Ilustrare Vizuală



- $LX_t = X_{t-1}$ — operatorul lag deplasează seria cu o perioadă în trecut
- $L^k X_t = X_{t-k}$ — deplasare cu k perioade; $L^0 = I$ (identitate)
- **Operatorul diferență**: $\Delta = (1 - L)$, astfel $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$

TSA_ch1_differencing

Diferențierea

Prima Diferență: $\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = (1-L)X_t$

De ce Diferențiem?

- Elimină trendul și rădăcina unitate
- Mers aleatoriu: $\Delta X_t = \varepsilon_t$ (zgomot alb)

Definiție 6 (Proces Integrat de Ordin d)

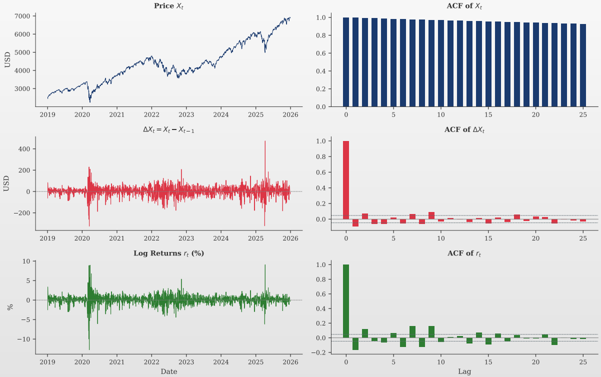
Un proces $\{X_t\}$ este **integrat de ordin** d, notat $X_t \sim I(d)$, dacă:

1. $\Delta^d X_t = (1-L)^d X_t$ este staționar ($I(0)$ proces)
2. $\Delta^{d-1} X_t$ **nu** este staționar

Exemple:

- $I(0)$: Proces staționar (zgomot alb, AR staționar)
- $I(1)$: Mers aleatoriu — $\Delta X_t = \varepsilon_t$ este staționar
- $I(2)$: Necesită două diferențieri pentru staționaritate

Efectul Diferențierii: S&P 500



- **Sus**: Prețuri S&P 500 — trend clar, nestaționar ($I(1)$)
- **Jos**: Randamente log $r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}$ — fluctuează în jurul mediei ≈ 0, staționar

Transformări pentru Stabilizarea Varianței

Problema: Varianță Nestaționară

Multe serii economice au varianță care crește cu nivelul $\Rightarrow$ **heteroscedasticitate**

Transformarea Logaritmică

$Y_t = \log(X_t)$

- Stabilizează varianța când $\sigma_t \propto \mu_t$
- Interpretare: variații procentuale
- **Randamente log**: $r_t = \log(P_t) - \log(P_{t-1})$

Transformarea Box-Cox

$$Y_t^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{X_t^\lambda - 1}{\lambda} & \lambda \neq 0 \\ \log(X_t) & \lambda = 0 \end{cases}$$

- $\lambda = 1$: fără transformare
- $\lambda = 0.5$: rădăcină pătrată
- $\lambda = 0$: logaritm
- λ se estimează din date

Fluxul Complet: Log + Diferențiere

Secvența Standard pentru Serii Financiare

1. **Date brute**: Prețuri P_t (nestaționare, varianță crescătoare)
2. **Logaritmare**: $\log(P_t)$ (stabilizează varianța, încă nestaționară)
3. **Diferențiere**: $\Delta \log(P_t) = \log(P_t) - \log(P_{t-1}) \approx r_t$ (staționară!)

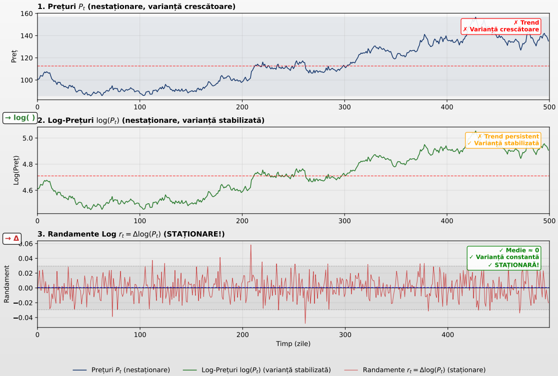
De ce funcționează?

- Log: $\sigma \propto \mu \Rightarrow \sigma_{log} \approx \text{const}$
- Diferența: elimină trendul
- Combinația: serie staționară

Atenție la Ordine!

- **Corect**: Log $\rightarrow$ Diferențiere
- Diferențierea fără log poate lăsa heteroscedasticitate
- Pentru date non-pozitive: Box-Cox cu shift

Transformări: Ilustrare Vizuală



- $P_t \xrightarrow{\log} \log(P_t) \xrightarrow{\Delta}$ Randamente log r_t — secvența standard de transformare
- Logaritmul stabilizează varianța; diferențierea elimină trendul $\Rightarrow$ serie staționară

TSA_ch1_transformations

Procesul de Zgomot Alb

Definiție 7 (Zgomot Alb)

Un proces $\{\varepsilon_t\}$ este **zgomot alb**, notat $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, dacă:

1. $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$ pentru orice t
2. $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$ pentru orice t
3. $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ pentru $t \neq s$

ACF al Zgomotului Alb

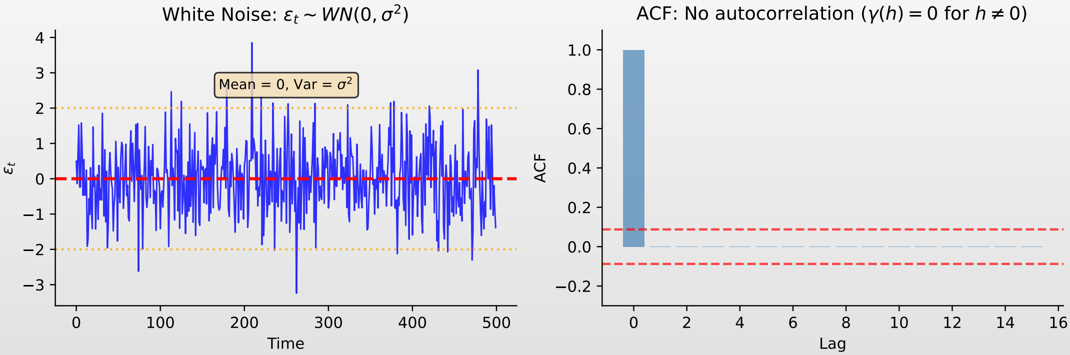
Din definiție: $\gamma(0) = \sigma^2$ și $\gamma(h) = \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = 0$ pentru $h \neq 0$. Deci:

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \begin{cases} 1 & h = 0 \\ 0 & h \neq 0 \end{cases}$$

Tipuri de zgomot alb (în ordine crescătoare a restricțiilor):

1. **Slab (Weak WN)**: doar (1)–(3) de mai sus (necorelat, dar pot exista dependențe neliniare)
2. **Puternic (Strong WN)**: ε_t sunt *independente* și identic distribuite (i.i.d.)
3. **Gaussian WN**: $\varepsilon_t \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$ — necorelat $\Rightarrow$ independent (distincția slab/puternic dispare)

Zgomot Alb: Ilustrare Vizuală



TSA_ch1_white_noise

Procesul de Mers Aleatoriu

Definiție 8 (Mers Aleatoriu)

$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$ unde $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, $X_0 = 0$ **Forma explicită:** $X_t = \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$

Propoziție 2 (Proprietăți)

(i) $\mathbb{E}[X_t] = 0$ **(ii)** $\mathrm{Var}(X_t) = t\sigma^2$ **(iii)** $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \min(t, s) \cdot \sigma^2$

Demonstrații.

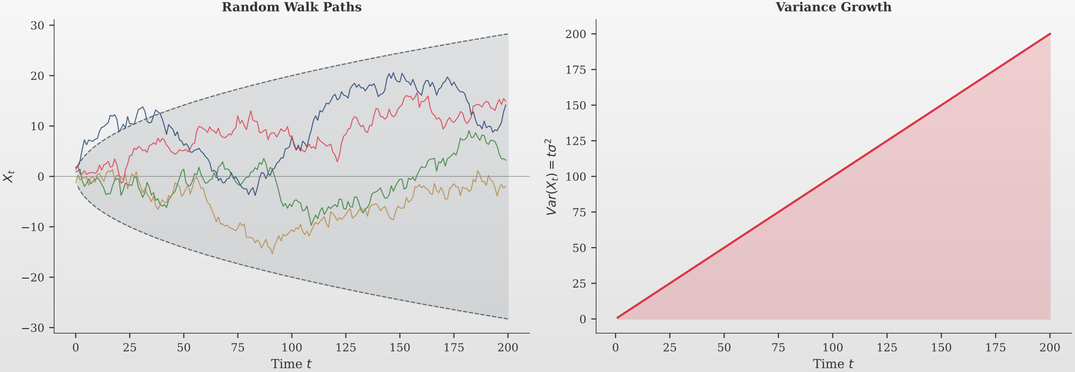
(i) $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i] = \sum_{i=1}^{t} \mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$ **(ii)** $\mathrm{Var}(X_t) = \mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i) \overset{\text{indep.}}{=} \sum_{i=1}^{t} \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = t\sigma^2$

(iii) Fie $s \le t$: $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i, \sum_{j=1}^{s} \varepsilon_j\right) = \sum_{i=1}^{s} \sigma^2 = \min(t, s)\,\sigma^2$ $\square$

Nestaționar!

$\mathrm{Var}(X_t) = t\sigma^2$ depinde de $t \Rightarrow$ mersul aleatoriu **nu este staționar**

Mers Aleatoriu: Vizualizare



- Fiecare șoc are **efect permanent**; $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$ crește liniar cu timpul
- **Soluție**: Diferențierea transformă în zgomot alb: $\Delta X_t = \varepsilon_t$

TSA_ch1_random_walk

Zgomot Alb vs Mers Aleatoriu: Comparație

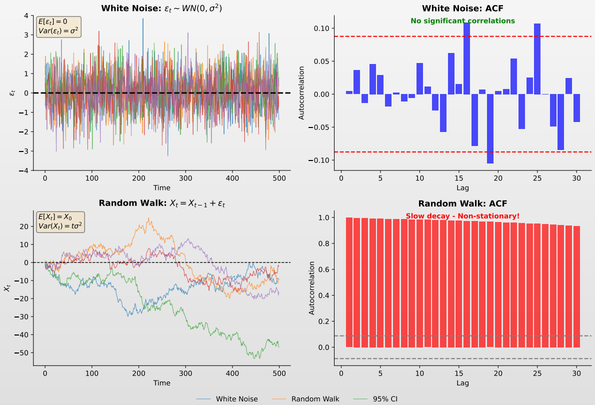
Zgomot Alb

- Staționar
- $\text{Var} = \sigma^2$ (const.)
- $\text{ACF} = 0,\ h \neq 0$
- Fără memorie

Mers Aleatoriu

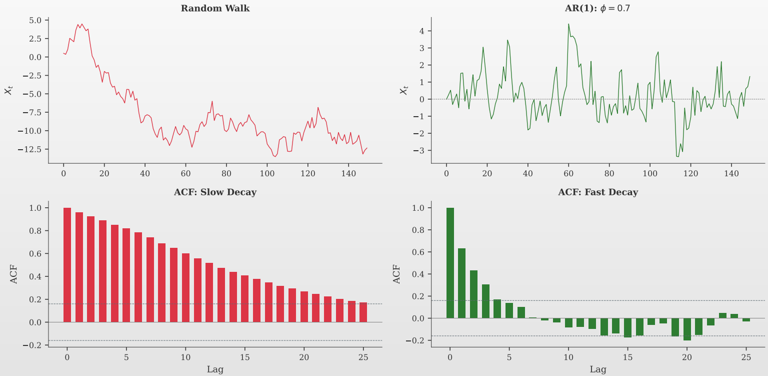
- Nestaționar
- $\text{Var} = t\sigma^2$ (crește)
- $\text{ACF} \approx 1$ (lent)
- Șocuri permanente

Legătură: $\Delta X_t = \varepsilon_t$



TSA_ch1_random_walk

Comparație ACF: Staționar vs Mers Aleatoriu



- **Staționar**: ACF scade rapid (exponențial sau oscilant) spre zero
- **Mers aleatoriu**: ACF scade foarte lent, rămâne aproape de 1
- **Regulă practică**: ACF lent $\Rightarrow$ suspectăm rădăcină unitate $\Rightarrow$ test ADF

TSA_ch1_random_walk

Funcția de Autocorelație Eșantion

ACF Eșantion la Lag-ul h

$\hat{\rho}(h) = \frac{\sum_{t=1}^{T-h}(x_t - \bar{x})(x_{t+h} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2}$ Proprietăți: $\hat{\rho}(0) = 1$, $|\hat{\rho}(h)| \leq 1$

Teoremă 4 (Bartlett, 1946)

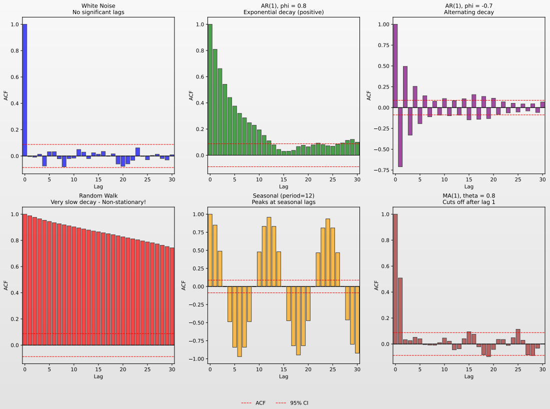
Sub H_0: zgomot alb, pentru T mare: $\hat{\rho}(h) \approx N(0, 1/T)$

Interval de încredere 95%: $\pm\frac{1.96}{\sqrt{T}}$ (benzile din graficele ACF)

Atenție

Formula Bartlett validă **doar sub H_0: zgomot alb**. Pentru AR/MA, varianța asimptotică diferă.

Tipare ACF pentru Diferite Procese



- **Zgomot alb**: ACF $= 0$; **Staționar**: scade rapid; **Nestaționar**: scade lent
- **Sezonier**: Vârfuri la lag-uri sezonale (12, 24 pentru date lunare)

Funcția de Autocorelație Parțială (PACF)

Definiție 9 (Autocorelația Parțială)

PACF la lag-ul h, notat ϕ_{hh}, este ultimul coeficient din regresia liniară:

$$X_t = \phi_{h1}X_{t-1} + \phi_{h2}X_{t-2} + \cdots + \phi_{hh}X_{t-h} + e_t$$

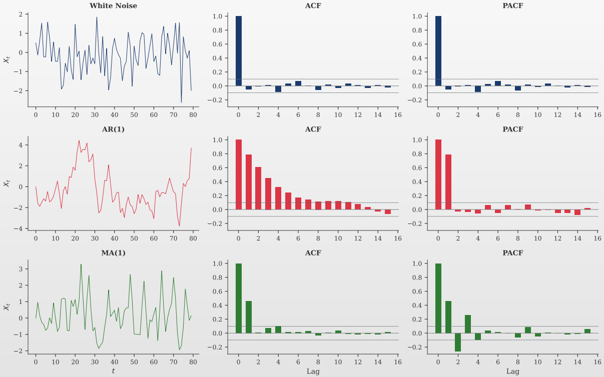
Alternativ: $\phi_{hh} = \text{Corr}(X_t - \hat{X}_t^{(h-1)}, X_{t-h} - \hat{X}_{t-h}^{(h-1)})$
unde $\hat{X}_t^{(h-1)}$ este predicția liniară bazată pe $\{X_{t-1}, \ldots, X_{t-h+1}\}$.

Interpretare: Măsoară dependența *directă* la lag-ul h, eliminând efectul lag-urilor intermediare.

Aplicație Cheie: Identificarea Ordinului Modelului

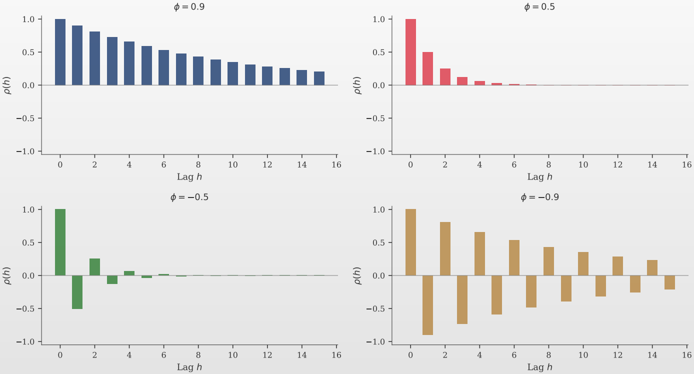
- Pentru AR(p): PACF **se întrerupe** (devine zero) după lag-ul p
- Pentru MA(q): ACF **se întrerupe** după lag-ul q

Tipare ACF și PACF



- **AR(p)**: ACF scade exponențial, PACF se întrerupe după lag p
- **MA(q)**: ACF se întrerupe după lag q, PACF scade exponențial
- **ARMA(p, q)**: Ambele scad exponențial — identificarea necesită criterii informaționale

Tipare de Scădere ACF



- **Scădere exponențială**: Dependență pozitivă persistentă (AR cu $\phi > 0$)
- **Scădere oscilantă**: Dependență alternantă (AR cu $\phi < 0$)
- Viteza de scădere indică puterea memoriei procesului

TSA_ch1_acf_patterns

Testul Augmented Dickey-Fuller (ADF)

Modelul: $\Delta X_t = \alpha + \gamma X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \delta_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t$

Notă: Dacă modelul original este $X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t$, atunci $\gamma = \rho - 1$.
Astfel, $H_0 : \gamma = 0$ este echivalent cu $\rho = 1$ (rădăcină unitate).

Ipoteze

- H_0: $\gamma = 0$ (rădăcină unitate)
- H_1: $\gamma < 0$ (staționar)

Statistica de Test

$$\tau_{ADF} = \frac{\hat{\gamma}}{SE(\hat{\gamma})}$$

Regula de Decizie

$\tau_{ADF} <$ valoarea critică $\Rightarrow$ Respingem H_0 $\Rightarrow$ Staționar
$\tau_{ADF} \geq$ valoarea critică $\Rightarrow$ Nestaționar (rădăcină unitate)

Important: Valorile critice urmează distribuția Dickey-Fuller, **nu** distribuția normală sau t-Student.

Testul KPSS

Modelul

$X_t = \xi t + r_t + \varepsilon_t$ unde $r_t = r_{t-1} + u_t$

Ipoteze (opus ADF)

- H_0: $\sigma_u^2 = 0$ (staționar)
- H_1: $\sigma_u^2 > 0$ (rădăcină unitate)

Statistica de Test

$$LM = \frac{\sum_{t=1}^{T} S_t^2}{T^2 \hat{\sigma}^2}$$

unde $S_t = \sum_{i=1}^{t} \hat{e}_i$

Regula de Decizie

$LM >$ valoarea critică $\Rightarrow$ Respingem H_0 $\Rightarrow$ Nestaționar
$LM \leq$ valoarea critică $\Rightarrow$ Staționar

Folosirea ADF și KPSS Împreună

Testare Confirmatorie

ADF	KPSS	Concluzie
Resp. H_0	Nu resp. H_0	Staționar
Nu resp. H_0	Resp. H_0	Rădăc. Unit.
Resp. H_0	Resp. H_0	Neconcludent
Nu resp. H_0	Nu resp. H_0	Neconcludent

Flux de Lucru

1. Test ADF (H_0: rădăcină)
2. Test KPSS (H_0: staționar)
3. Rezultate concordante $\Rightarrow$ OK
4. Altfel: teste PP, DF-GLS

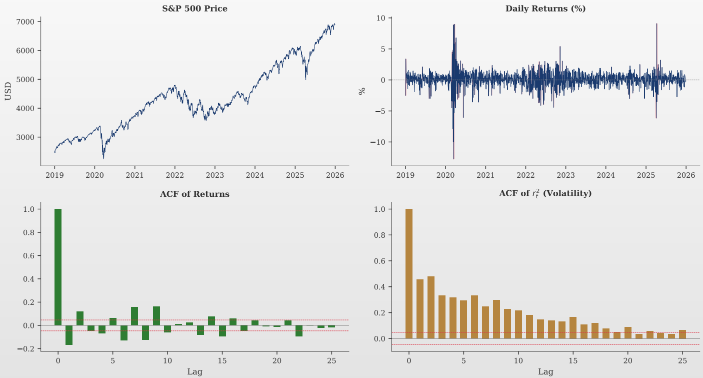
Testul ADF: Vizualizare cu S&P 500

TSA_ch1_unit_root_tests

Interpretarea Testului ADF

- H_0: Rădăcină unitate; Valori critice: -3.43 (1%), -2.86 (5%), -2.57 (10%)
- $\tau <$ val. critică $\Rightarrow$ respingem H_0 $\Rightarrow$ serie staționară
- S&P 500: Prețuri nestaționare; Randamente staționare

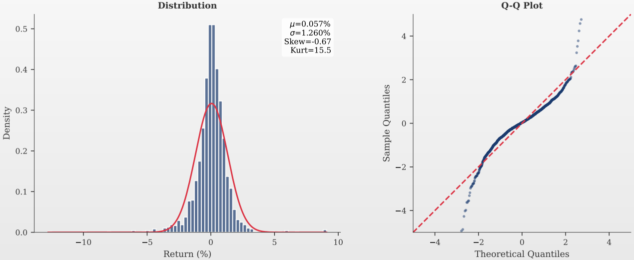
Analiza S&P 500: Prezentare Generală



- **Prețuri**: Trend ascendent, nestaționar; **Randamente**: Medie ≈ 0, staționar
- **ACF randamente**: ≈ 0 (eficient); **ACF** r_t^2: Semnificativ (volatility clustering)

TSA_ch1_ts_basics

Fapte Stilizate ale Randamentelor Financiare



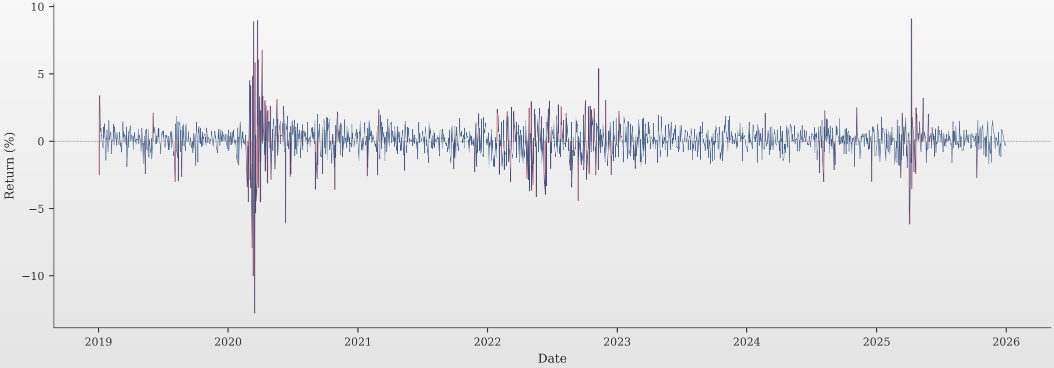
Proprietăți observate:

- Asimetrie negativă (coadă stângă)
- Kurtoză excesivă ($\gg 3$)
- Cozi groase (heavy tails)

Implicații:

- Distribuția normală inadecvată
- Evenimente extreme mai probabile
- Necesită Student-t sau GED

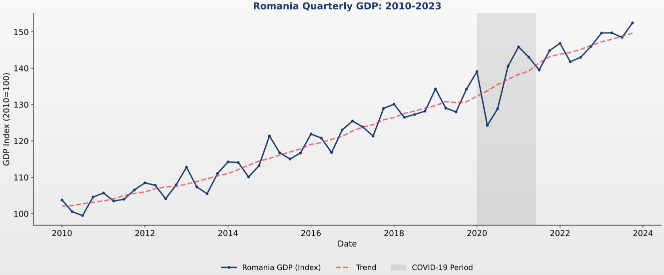
Volatility Clustering



- Randamente mari (în valoare absolută) urmate de randamente mari
- Perioade de calm urmate de perioade de calm
- **Volatilitate variabilă în timp** $\Rightarrow$ modele ARCH/GARCH (Cap. 5)

TSA_ch1_ts_basics

Studiu de Caz: PIB-ul Trimestrial al României



TSA_ch1_case_gdp

Analiza Inițială

- **Date**: PIB trimestrial România 2010–2023 (56 obs., INS/Eurostat)
- **Observații**: Trend ascendent, șoc COVID-19, posibil sezonier
- **Ipoteză**: Serie nestaționară — testăm cu ADF și KPSS

Testarea Staționarității: ADF și KPSS

Testul ADF

- H_0: Rădăcină unitate
- Stat. ADF: -1.23
- Val. critică: -2.89
- Nu respingem H_0

Testul KPSS

- H_0: Staționară
- Stat. KPSS: 0.89
- Val. critică: 0.46
- Respingem H_0

Concluzie: Ambele Teste Concordă

Seria PIB este **nestaționară** — necesită diferențiere

Diferențierea: Transformare la Staționaritate

După Diferențiere

- ADF: -4.56 ($p < 0.01$)
- KPSS: 0.21 ($p > 0.10$)
- Ambele: staționară!

Concluzie

- PIB nivel: nestaționar
- ΔPIB: staționar
- Folosim ΔPIB_t pentru modelare

Rezultat Final

PIB-ul necesită o diferențiere pentru a deveni staționar.

Concluzii Principale

Rezumat

1. **Proces stochastic** = colecție de variabile aleatoare indexate în timp
2. **Staționaritate slabă**: medie, varianță, autocovarianță constante
3. **Zgomot alb**: $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ — staționar, ACF $= 0$
4. **Mers aleatoriu**: $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$ — nestaționar, $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$
5. **ACF/PACF**: Instrumente cheie pentru identificarea structurii
6. **Diferențierea**: Transformă serii nestaționare în staționare
7. **Teste rădăcină unitate**: ADF (H_0: rădăcină unitate) vs KPSS (H_0: staționar)

Formule Importante

Staționaritate Slabă

- $\mathbb{E}[X_t] = \mu$ (medie constantă)
- $\text{Var}(X_t) = \sigma^2$ (varianță constantă)
- $\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h})$
- $\rho(h) = \gamma(h)/\gamma(0)$

Operatorul Lag

- $LX_t = X_{t-1}$
- $\Delta X_t = (1 - L)X_t$

Zgomot Alb (WN)

- $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$
- $\rho(h) = 0$ pentru $h \neq 0$

Mers Aleatoriu (RW)

- $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$
- $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$ (crește!)

Previzualizare Capitolul Următor

Capitolul 2: Modele ARMA

- Modele Autoregresive AR(p)
- Modele Medie Mobilă MA(q)
- Modele ARMA(p, q) combinate
- Identificare cu ACF/PACF

Ce Vom Învăța

- Estimarea parametrilor
- Diagnosticarea modelului
- Prognoză și intervale de încredere
- Selecția modelului (AIC, BIC)

Întrebarea 1

Întrebare

Care sunt cele trei condiții pentru staționaritatea slabă (în covarianță)?

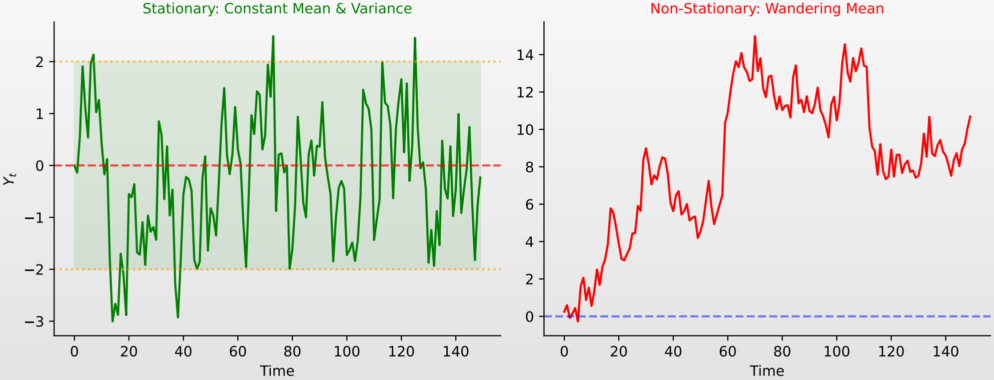
(A) Media zero, varianța infinită, covarianță dependentă de timp

(B) Media constantă, varianța constantă, autocovarianța depinde doar de lag

(C) Distribuție normală, independență, varianță unitară

(D) Trend liniar, sezonalitate constantă, reziduuri albe

Întrebarea 1: Răspuns



Răspuns: (B) — $\mathbb{E}[X_t] = \mu$, $\mathrm{Var}(X_t) = \sigma^2$, $\gamma(t, s) = \gamma(|t - s|)$

TSA_ch1_stationarity

Întrebarea 2

Întrebare

Care este ipoteza nulă (H_0) în testul ADF (Augmented Dickey-Fuller)?

(A) Seria este staționară

(B) Seria are rădăcină unitate (este nestaționară)

(C) Seria nu are autocorelație

(D) Seria are distribuție normală

Întrebarea 2: Răspuns

Răspuns: (B) — H_0: rădăcină unitate; $\tau <$ val. critică $\Rightarrow$ staționară

TSA_ch1_unit_root_tests

Întrebarea 3

Întrebare

Care este ipoteza nulă (H_0) în testul KPSS?

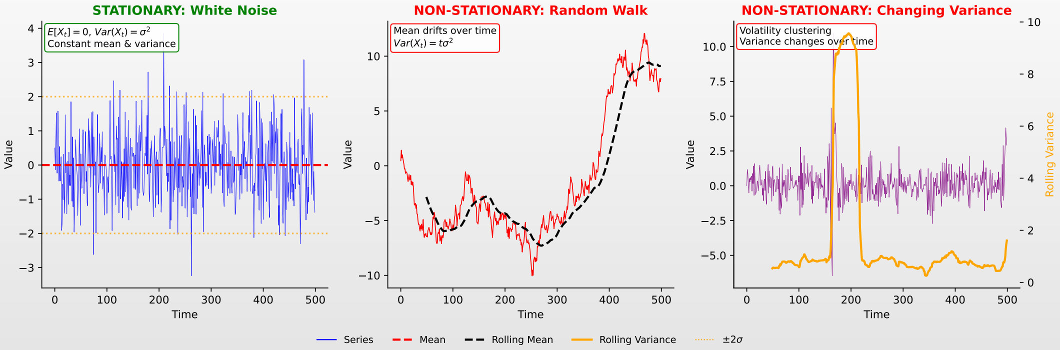
(A) Seria are rădăcină unitate (nestaționară)

(B) Seria este staționară

(C) Seria este un mers aleatoriu

(D) Seria are trend determinist

Întrebarea 3: Răspuns



Răspuns: (B) — KPSS: H_0 staționară (opus ADF). Folosiți ambele teste!

TSA_ch1_stationarity

Întrebarea 4

Întrebare

Care este proprietatea cheie a varianței unui mers aleatoriu $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$?

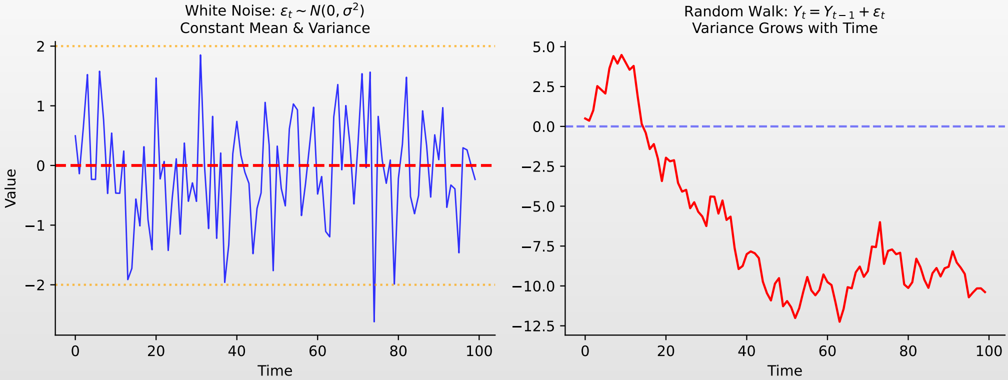
(A) Varianța este constantă: $\text{Var}(X_t) = \sigma^2$

(B) Varianța crește liniar cu timpul: $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$

(C) Varianța scade cu timpul

(D) Varianța este zero

Întrebarea 4: Răspuns



Răspuns: (B) — $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$ crește liniar $\Rightarrow$ nestaționar

TSA_ch1_random_walk

Întrebarea 5

Întrebare

Cum arată ACF-ul unui mers aleatoriu (serie nestaționară cu rădăcină unitate)?

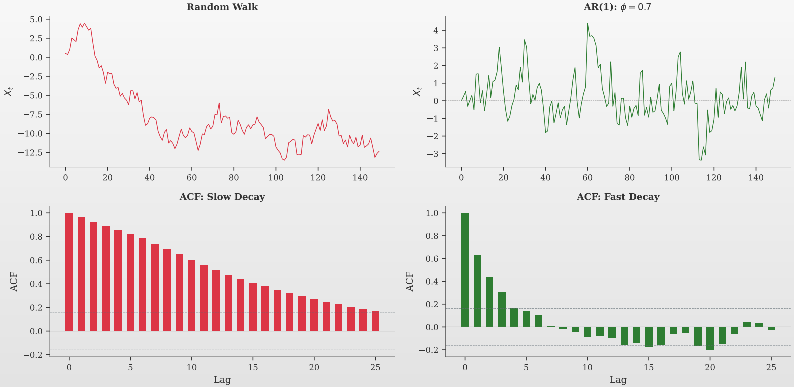
(A) Toate valorile sunt zero după lag 0

(B) Scade exponențial rapid

(C) Scade foarte lent (persistență înaltă)

(D) Oscilează între pozitiv și negativ

Întrebarea 5: Răspuns



Răspuns: (C) — ACF $\approx$ 1 pentru multe lag-uri, scădere lentă $\Rightarrow$ test ADF

TSA_ch1_random_walk

Întrebarea 6

Întrebare

Cum obținem randamente staționare dintr-o serie de prețuri financiare P_t?

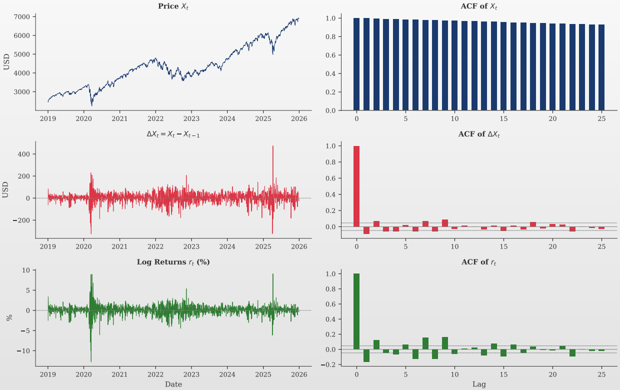
(A) Diferențiere simplă: $\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$

(B) Logaritmare apoi diferențiere: $r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}$

(C) Doar logaritmare: $\ln P_t$

(D) Standardizare: $(P_t - \bar{P})/s_P$

Întrebarea 6: Răspuns



Răspuns: (B) — Randamente log: $r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}$. Mai întâi ln (stabilizează varianța), apoi Δ (elimină trendul) $\Rightarrow$ serie staționară.

TSA_ch1_differencing

Bibliografie

Manuale Fundamentale

- Hyndman & Athanasopoulos (2021). *Forecasting*, OTexts
- Shumway & Stoffer (2017). *Time Series Analysis*, Springer
- Hamilton (1994). *Time Series Analysis*, Princeton

Referințe Clasice

- Wold (1938). *Analysis of Stationary Time Series*
- Bartlett (1946). "Sampling Properties", *JRSS*

Resurse Online

- **Quantlet**: `https://quantlet.com` — cod statistică
- **Quantinar**: `https://quantinar.com` — tutoriale
- **GitHub**: `https://github.com/QuantLet/TSA`

Surse de Date și Software

Date Utilizate

- **S&P 500**: Yahoo Finance
  - Prețuri, randamente
- **PIB România**: INS/Eurostat
  - Date trimestriale
- **Cursuri valutare**: BNR

Software

- **Python**: statsmodels, pandas, matplotlib, scipy
- **R**: forecast, tseries, urca
- **Date**: Yahoo Finance, FRED, Eurostat

Vă Mulțumim!

Întrebări?

Graficele au fost generate folosind Python (statsmodels, matplotlib)

Materialele cursului sunt disponibile la: https://github.com/danpele/Time-Series-Analysis