



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 5: Modele ARCH/GARCH pentru Volatilitate



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

Cuprins

Fundamente

- Motivație
- Introducere în Modelarea Volatilității
- Modelul ARCH
- Modelul GARCH
- Modele GARCH Asimetrice
- Selectarea și Diagnosticarea modelelor

Aplicații

- Prognoza volatilității
- Implementare în Python
- Studiu de Caz: S&P 500
- Studiu de Caz: Bitcoin
- Rezumat și Quiz



Obiective de învățare

La finalul acestui capitol, veți fi capabili să:

1. Înțelegeți **volatility clustering** și faptele stilizate ale randamentelor financiare
2. Estimați și interpretați modele **ARCH** și **GARCH**
3. Aplicați modele asimetrice (**EGARCH, GJR-GARCH**) pentru efectul de levier
4. Efectuați validarea și selectarea modelelor
5. Prognozați volatilitatea și calculați **Value at Risk (VaR)**

Competențe Practice

- Implementare Python cu pachetul **arch**
 - ▶ Estimare, prognoză și diagnostic automat
- Interpretarea parametrilor și a persistenței volatilității
- Calculul VaR pentru managementul riscului
 - ▶ Backtesting și validarea prognozelor



De ce modelăm volatilitatea?

Observații Empirice în Seriile Financiare

- Randamentele prezintă **volatility clustering**
 - ▶ Perioadele de volatilitate ridicată sunt urmate de perioade similare
- Distribuția randamentelor are **cozi groase** (leptokurtosis)
 - ▶ Kurtosis > 3 , mai multe valori extreme decât normală
- Corelația randamentelor ≈ 0 , dar corelația r_t^2 este semnificativă
- Volatilitatea răspunde **asimetric** la șocuri (leverage effect)

Limitarea modelelor ARIMA

- Modelele ARIMA presupun **varianță constantă** (homoscedasticitate)
 - ▶ Nu pot modela schimbările dinamice ale volatilității
- Soluția: modele ARCH/GARCH pentru varianța condiționată



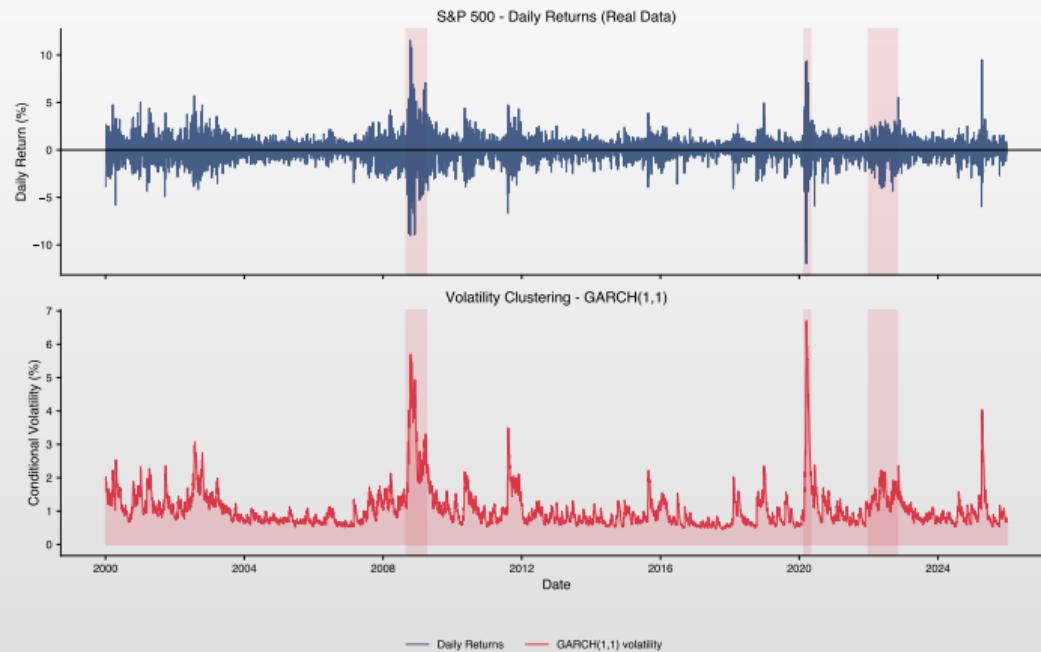
Volatility clustering

Observații

- Perioadele de volatilitate mare sunt urmate de perioade similare
- Perioadele de calm sunt urmate de perioade de calm
- Varianța condiționată este **predictibilă**



Volatility clustering



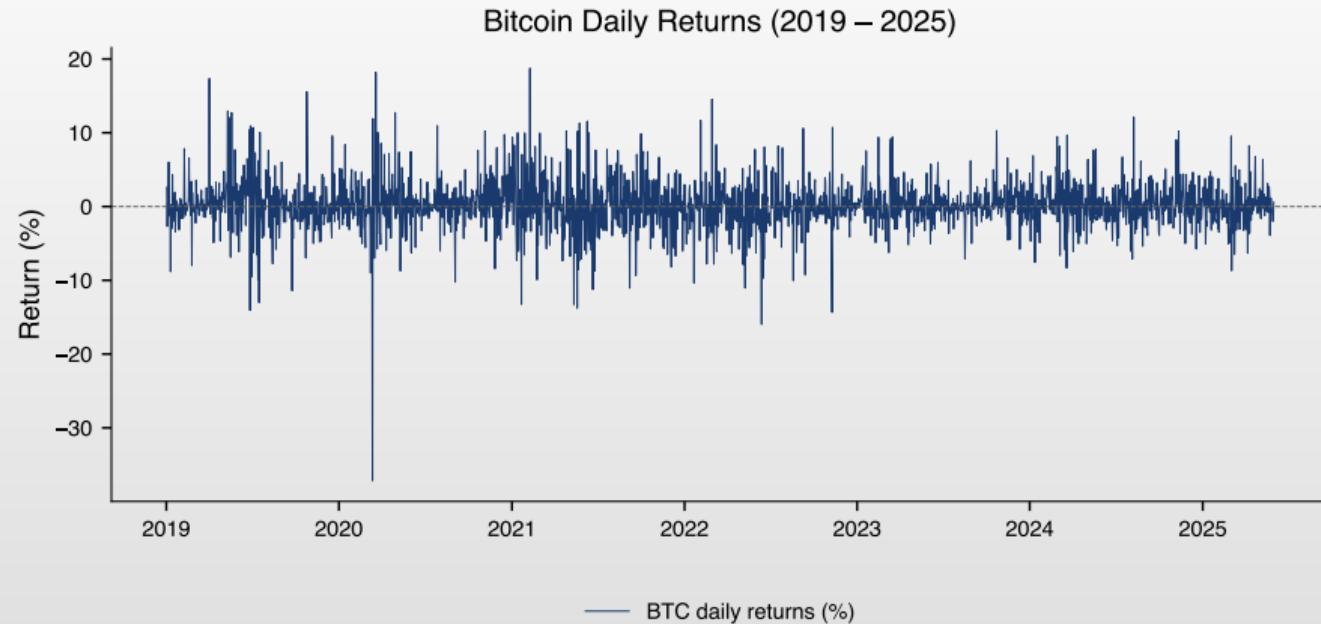
Exemplu: Bitcoin & volatility clustering

Observații

- Randamente zilnice Bitcoin (2019–2025): volatility clustering extrem de pronunțat
 - ▶ Randamente de $\pm 20\%$ în perioadele de criză (COVID, Terra/Luna)
- Volatilitatea Bitcoin este semnificativ mai mare decât a activelor tradiționale
 - ▶ α tipic $\approx 0.10\text{--}0.20$ (reacție rapidă la news)



Exemplu: Bitcoin \succcurlyeq volatility clustering



Q TSA_ch5_btc_returns



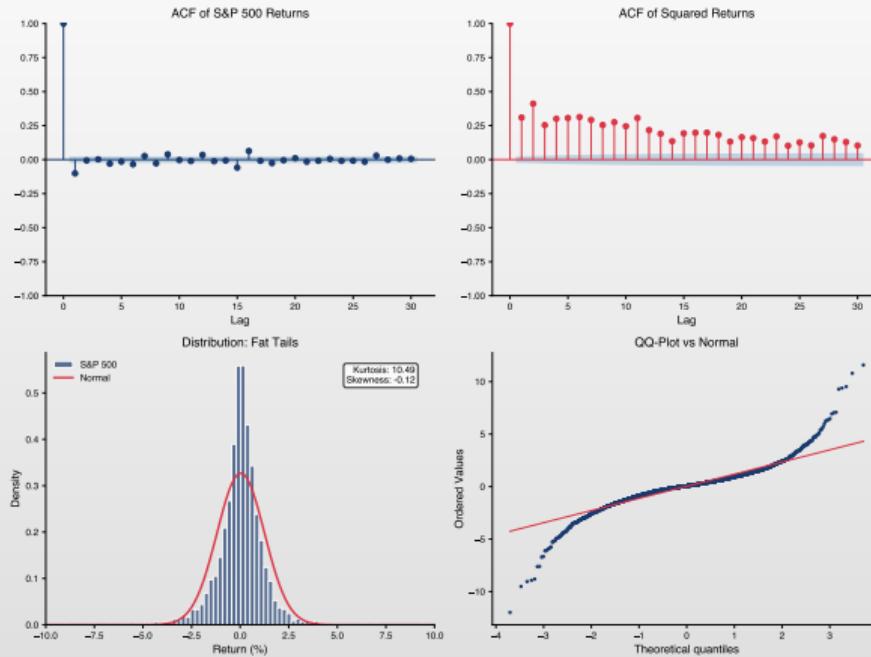
Fapte stilizate ale randamentelor financiare

Proprietăți Observate

- Absența autocorelației** în randamente, dar **autocorelație semnificativă** în r_t^2
- Cozi groase** ($kurtosis > 3$), **leverage effect**, **volatility clustering**



Fapte stilizate ale randamentelor financiare

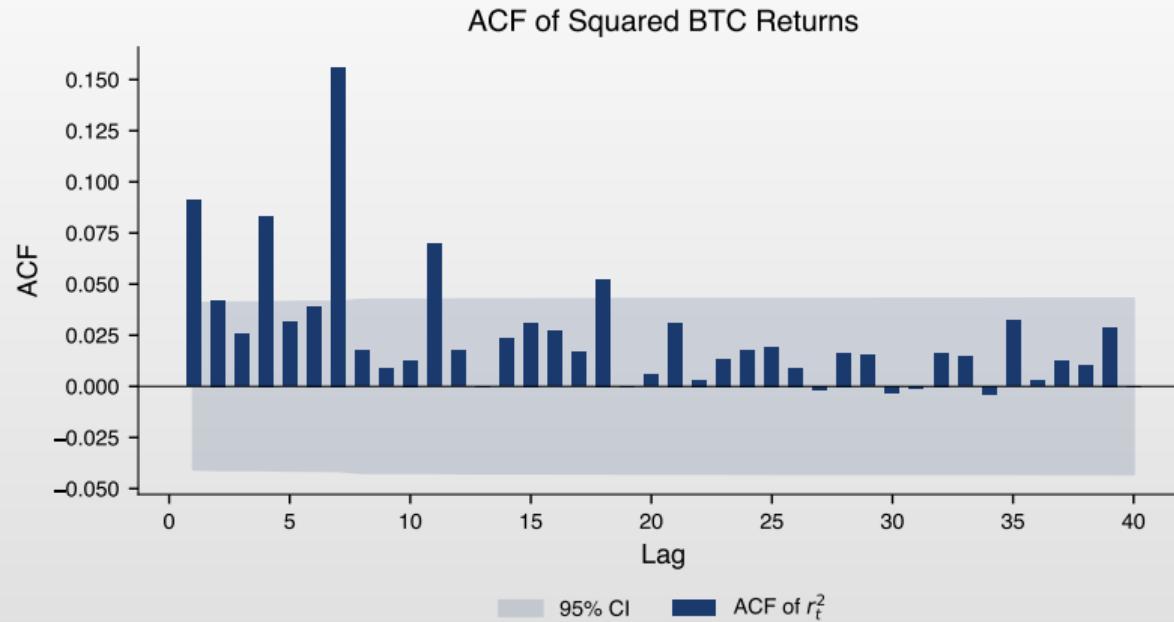


Exem Interpretare

- Sus:** r_t^2 (proxy pentru volatilitate) \succ vârfurile coincid cu crizele de piață
- Jos:** ACF(r_t^2) semnificativ \succ efecte ARCH prezente, varianță predictibilă



Exemplu: Bitcoin \succ evidență pentru efecte ARCH



Heteroscedasticitate condiționată

Definiție 1 (Varianță Condiționată)

- **Definiție:** Fie $\{r_t\}$ o serie de randamente. Varianța condiționată la momentul t este:

$$\sigma_t^2 = \text{Var}(r_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}[(r_t - \mu_t)^2 | \mathcal{F}_{t-1}]$$

- **Notatie:** \mathcal{F}_{t-1} reprezintă informația disponibilă până la momentul $t-1$

Modelul General

- **Ecuăția:** $r_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \text{i.i.d.}(0, 1)$
- μ_t = media condiționată (modelată prin ARMA)
- σ_t^2 = varianța condiționată (modelată prin GARCH)
- z_t = inovații standardizate



Portret de cercetător: Engle & Bollerslev



Robert Engle (*1942)
Premiul Nobel 2003

[W Wikipedia \(en\)](#)



Tim Bollerslev (*1958)

[W Wikipedia \(en\)](#)

Biografie

- **Robert Engle**: economist american la NYU Stern. Premiul Nobel (2003) „pentru metode de analiză a seriilor economice cu volatilitate variabilă în timp (ARCH)”
- **Tim Bollerslev**: economist danez-american la Duke University, doctorand al lui Engle

Contribuții principale

- **Modelul ARCH** (Engle, 1982) — heteroskedasticitate condiționată autoregresivă
- **Modelul GARCH** (Bollerslev, 1986) — ARCH generalizat cu volatilitate persistentă
- **Volatilitatea realizată** și econometria de înaltă frecvență
- Fundamentul managementului modern al riscului financiar (VaR, ES)



Modelul ARCH(q) \succ Engle (1982)

Definiție 2 (ARCH(q))

- **Model:** Autoregressive Conditional Heteroskedasticity de ordin q :

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \text{i.i.d.}(0, 1), \quad \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

Restricții pentru Staționaritate

- $\omega > 0 \succ$ nivel de bază pozitiv
- $\alpha_i \geq 0$ pentru $i = 1, \dots, q \succ$ non-negativitate
- $\sum_{i=1}^q \alpha_i < 1 \succ$ staționaritate (varianță necondiționată finită)

Observație 1

- Robert Engle a primit **Premiul Nobel pentru Economie** în 2003 pentru dezvoltarea modelului ARCH!



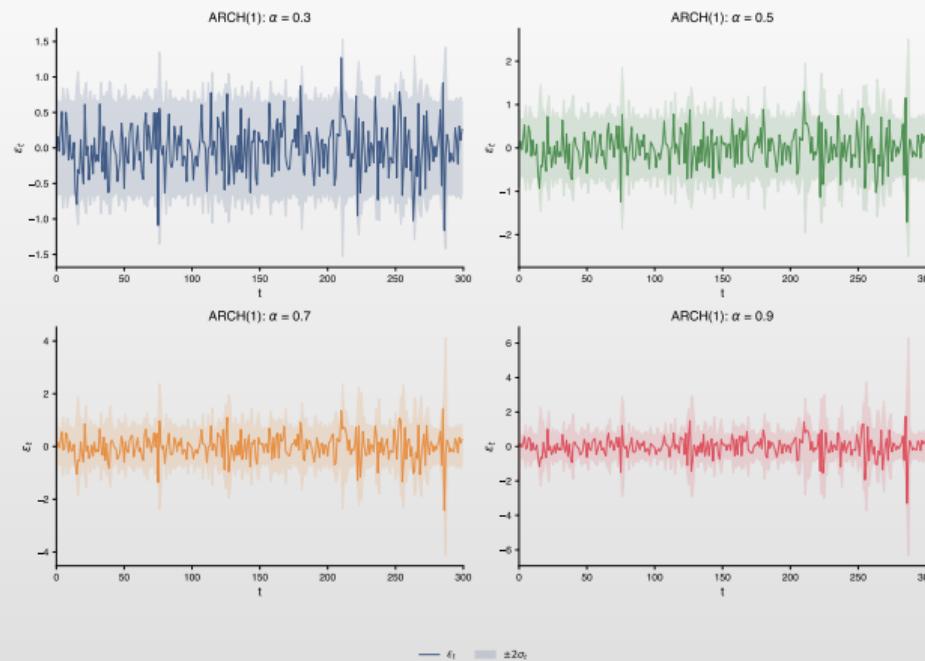
Simulare ARCH(1): Efectul parametrului α

Interpretare

- Cu cât α este mai mare, cu atât volatilitatea reacționează mai puternic la șocuri recente



Simulare ARCH(1): Efectul parametrului α



Proprietăți ale modelului ARCH(1)

$$\text{ARCH}(1): \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

- **Varianța necondiționată:** $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \frac{\omega}{1 - \alpha_1}$ (dacă $\alpha_1 < 1$)
- **Kurtosis:** $\kappa = 3 \cdot \frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2}$ (dacă $\alpha_1^2 < 1/3$)
- Kurtosis > 3 pentru $\alpha_1 > 0 \succ$ cozi groase!

Exemplu Numeric: $\omega = 0.0001$, $\alpha_1 = 0.3$

- **Varianța necondiționată:** $\sigma^2 = \frac{0.0001}{1 - 0.3} = 0.000143$
- **Kurtosis:** $\kappa = 3 \cdot \frac{1 - 0.09}{1 - 0.27} = 3.74 > 3$



Demonstrație: varianța necondiționată ARCH(1)

Obiectiv

- **Scop:** pentru ARCH(1): $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2$, demonstrăm $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \frac{\omega}{1-\alpha}$

Demonstrație

- **Pas 1:** Legea speranțelor iterate: $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}]] = \mathbb{E}[\sigma_t^2]$
- **Pas 2:** Înlocuim ARCH(1): $\mathbb{E}[\sigma_t^2] = \mathbb{E}[\omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2] = \omega + \alpha \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2]$
- **Pas 3:** La staționaritate $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \bar{\sigma}^2$: $\bar{\sigma}^2 = \omega + \alpha \bar{\sigma}^2 \succ \bar{\sigma}^2(1 - \alpha) = \omega \succ \boxed{\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha}}$

Condiție de Staționaritate

- Soluția există și este pozitivă doar dacă $\alpha < 1$



Demonstrație: kurtosis ARCH(1)

Obiectiv

- **Scop:** ARCH(1) generează cozi groase: $\kappa = 3 \cdot \frac{1-\alpha^2}{1-3\alpha^2} > 3$

Demonstrație

- **Pas 1:** $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ cu $z_t \sim N(0, 1)$ independent de σ_t ; $\mathbb{E}[\varepsilon_t^4] = 3\mathbb{E}[\sigma_t^4]$
- **Pas 2:** $\sigma_t^4 = (\omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2)^2$, la staționaritate: $\mathbb{E}[\sigma_t^4] = \omega^2 + 2\omega\alpha\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] + \alpha^2\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^4]$
- **Pas 3:** Rezolvând: $\kappa = \frac{\mathbb{E}[\varepsilon_t^4]}{(\mathbb{E}[\varepsilon_t^2])^2} = 3 \cdot \frac{1-\alpha^2}{1-3\alpha^2}$

Implicație

- **Exemplu:** $\alpha = 0.3$: $\kappa = 3 \cdot \frac{0.91}{0.73} = 3.74 > 3$ (cozi mai groase decât normală!)



Demonstrație: varianța necondiționată GARCH(1,1)

Obiectiv

- Scop: pentru GARCH(1,1): $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$, demonstrăm $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$

Demonstrație

- Pas 1: Aplicăm operatorul de speranță: $\mathbb{E}[\sigma_t^2] = \omega + \alpha \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] + \beta \mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2]$
- Pas 2: Folosim $\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] = \mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2]$ (legea speranțelor iterate): $\mathbb{E}[\sigma_t^2] = \omega + (\alpha + \beta) \mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2]$
- Pas 3: La staționaritate $\mathbb{E}[\sigma_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2] = \bar{\sigma}^2$: $\bar{\sigma}^2 = \omega + (\alpha + \beta) \bar{\sigma}^2 \succ \boxed{\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}}$

Condiție de Staționaritate

- Soluția există doar dacă $\alpha + \beta < 1$
- Când $\alpha + \beta = 1$ (IGARCH), varianța este infinită



Demonstrație: Reprezentarea ARMA pentru ε_t^2

Obiectiv

- Scop: arătăm că un proces GARCH(1,1) implică un proces ARMA(1,1) pentru ε_t^2

Demonstrație

- Pas 1: Definim "șocul varianței": $\nu_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$
- Pas 2: ν_t este diferența de martingal: $\mathbb{E}[\nu_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0$
- Pas 3: Din ecuația GARCH, înlocuind $\sigma_{t-1}^2 = \varepsilon_{t-1}^2 - \nu_{t-1}$:

$$\varepsilon_t^2 = \omega + (\alpha + \beta)\varepsilon_{t-1}^2 + \nu_t - \beta\nu_{t-1}$$

Rezultat

- Aceasta este o ecuație **ARMA(1,1)** cu coeficient AR = $\alpha + \beta$ și coeficient MA = $-\beta$!



Demonstrație: persistența volatilității și half-life

Prognosă multi-pas GARCH(1,1)

- $\mathbb{E}_t[\sigma_{t+h}^2] = \bar{\sigma}^2 + (\alpha + \beta)^{h-1}(\sigma_{t+1}^2 - \bar{\sigma}^2)$

Demonstrație

- **Pas 1:** Notăm $\phi = \alpha + \beta$ și $q_t = \sigma_t^2 - \bar{\sigma}^2$ (deviația de la medie)
- **Pas 2:** Din ecuația GARCH: $\mathbb{E}_t[q_{t+1}] = \phi \cdot q_t$, deci $\mathbb{E}_t[q_{t+h}] = \phi^h \cdot q_t$
- **Pas 3:** Half-life = timpul până când deviația se înjumătățește:

$$\phi^{HL} = 0.5 \succ HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\phi)} = \frac{-0.693}{\ln(\alpha+\beta)}$$

Exemplu: S&P 500

- Cu $\alpha + \beta = 0.988$: $HL = \frac{-0.693}{-0.012} \approx 58$ zile (șocurile persistă ~3 luni!)



Testarea efectelor ARCH

Testul Engle pentru Efecte ARCH

1. Estimează modelul pentru medie și obține reziduurile $\hat{\varepsilon}_t$
2. Calculează $\hat{\varepsilon}_t^2$
3. Regreseză: $\hat{\varepsilon}_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \cdots + \beta_q \hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + u_t$
4. Calculează statistica $LM = T \cdot R^2 \sim \chi^2(q)$

Ipoteze

- H_0 : Nu există efecte ARCH ($\alpha_1 = \cdots = \alpha_q = 0$)
- H_1 : Există efecte ARCH (cel puțin un $\alpha_i \neq 0$)



Limitări ale modelului ARCH

Probleme Practice

1. **Ordine mare** \succ de obicei sunt necesare multe lag-uri (q mare)
 - ▶ Exemplu: ARCH(20) pentru date zilnice
2. **Mulți parametri** \succ dificultăți de estimare
3. **Restricții de non-negativitate** \succ greu de impus pentru q mare
 - ▶ Toți $\alpha_i \geq 0$ trebuie verificate simultan
4. **Nu capturează persistența** \succ volatilitatea observată este foarte persistentă

Soluția

- Modelul GARCH** \succ introduce lag-uri ale varianței condiționate pentru a captura persistența cu mai puțini parametri!



Modelul GARCH(p,q) \succ Bollerslev (1986)

Definiție 3 (GARCH(p,q))

- **Model:** Generalized ARCH:

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \text{i.i.d.}(0, 1), \quad \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Interpretare

- ω = nivel de bază al volatilității (constantă, independentă de șocuri)
- α_i = reacția la șocuri recente; α mare \succ reacție rapidă la informații noi
- β_j = persistența volatilității; β mare \succ volatilitatea se disipează lent
- $\alpha + \beta$ = persistența totală (aproape de 1 în practică)

Modelul GARCH(1,1)

Cel Mai Popular Model de Volatilitate

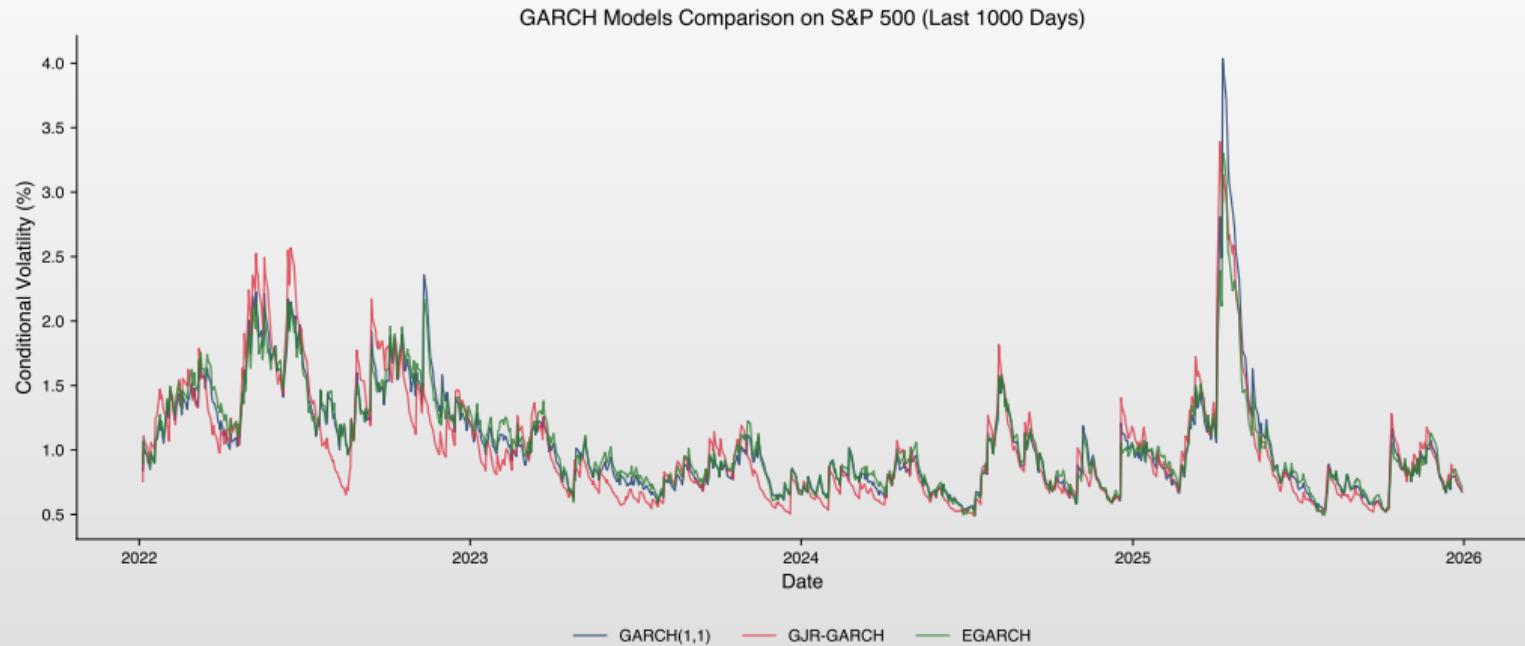
- $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$

Restricții și proprietăți

- Restricții:** $\omega > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta < 1$
- Varianța necondiționată:** $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$
- Half-life:** $HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha+\beta)}$



Modelul GARCH(1,1)



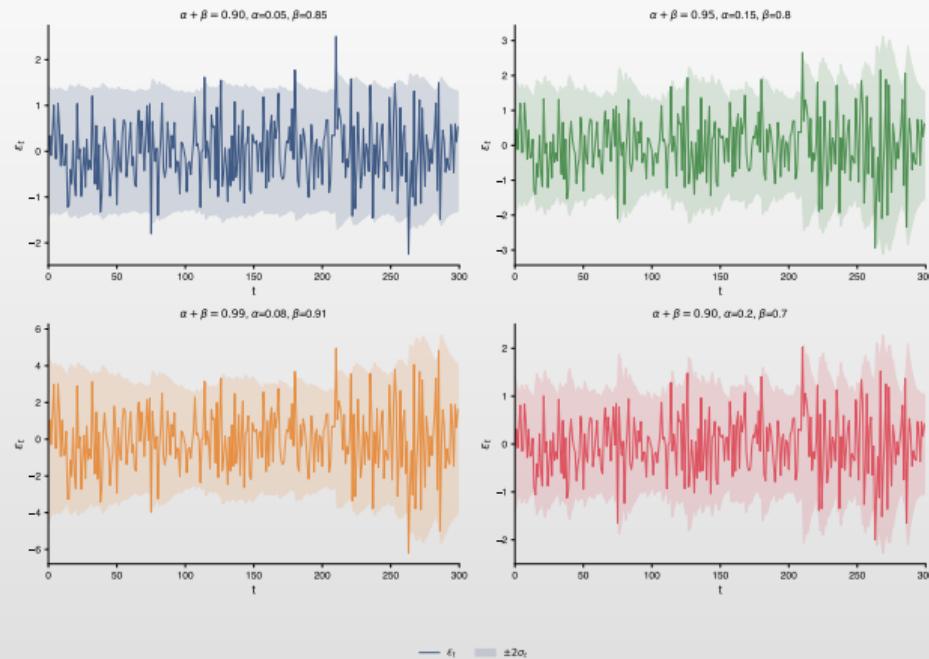
Simulare GARCH(1,1): efectul persistenței

Interpretare

- α controlează reacția la șocuri
- β controlează persistența
- Suma $\alpha + \beta$ determină viteza de revenire la medie



Simulare GARCH(1,1): efectul persistenței



GARCH(1,1) ca ARMA pentru ε_t^2

Reprezentare ARMA(1,1)

- Definiție: $\nu_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ (șocul varianței). Atunci:

$$\varepsilon_t^2 = \omega + (\alpha + \beta)\varepsilon_{t-1}^2 + \nu_t - \beta\nu_{t-1}$$

- Aceasta este un ARMA(1,1) pentru ε_t^2 !

Implicații

- ACF al ε_t^2 decinde exponențial (ca ARMA)
 - ▶ Pătratele randamentelor au memorie lungă
- Persistența este dată de $\alpha + \beta$
- PACF poate ajuta la identificarea ordinului

Estimarea modelelor GARCH

Metoda Verosimilității Maxime (MLE)

- ☐ Log-verosimilitate (distribuție normală):

$$\ell(\theta) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[\ln(\sigma_t^2) + \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} \right]$$

Distribuții Alternative pentru z_t

- ☐ **Student-t**: capturează cozile groase (ν tipic 4–8 pentru acțiuni)
- ☐ **GED**: flexibilitate pentru kurtosis (generalizare a normalei)
- ☐ **Skewed Student-t**: asimetrie și cozi groase

Valori tipice pentru GARCH(1,1)

Serie	α	β	$\alpha + \beta$
S&P 500 zilnic	0.05–0.10	0.85–0.95	0.95–0.99
EUR/USD zilnic	0.03–0.08	0.90–0.95	0.95–0.99
Bitcoin zilnic	0.10–0.20	0.75–0.85	0.90–0.98
Obligațiuni	0.02–0.05	0.90–0.97	0.95–0.99

Observații

- $\alpha + \beta$ aproape de 1 \succ volatilitate foarte persistentă (half-life de ordinul lunilor)
- α mic, β mare \succ reacție lentă la șocuri, memorie lungă
- Bitcoin: α mai mare \succ reacție mai rapidă la news (piată mai sensibilă)



IGARCH \succ integrated GARCH

Definiție 4 (IGARCH(1,1))

- **Condiție:** Când $\alpha + \beta = 1$: $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + (1 - \alpha) \sigma_{t-1}^2$

Proprietăți

- Varianța necondiționată nu există (infinită) \succ nu există mean reversion
- řocurile au efect **permanent** asupra volatilității
- Folosit pentru serii cu persistență extremă
- Util pentru **RiskMetrics** (J.P. Morgan): $\alpha = 0.06$, $\beta = 0.94$

Observație 2

- IGARCH este analog cu o rădăcină unitară în varianță!



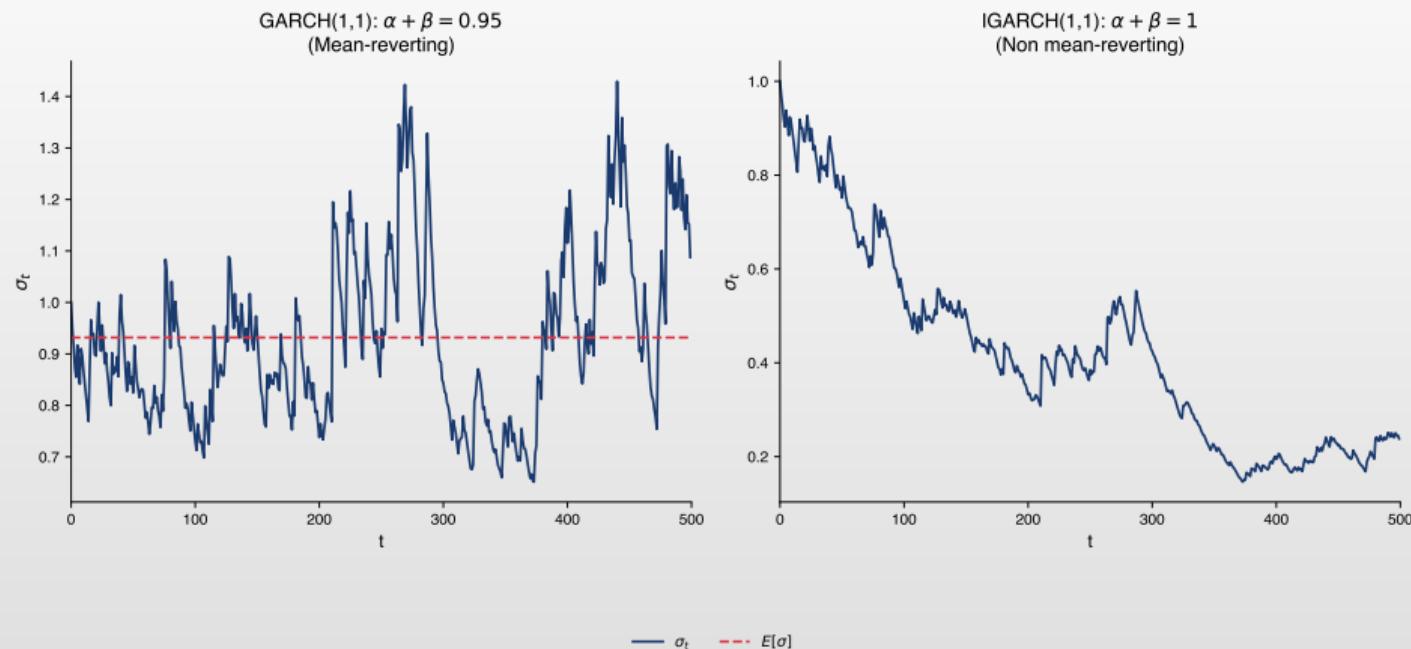
GARCH vs IGARCH: comparație persistență

Interpretare

- GARCH standard revine la media necondiționată
- IGARCH nu are medie finită \succ řocurile persistă indefinit



GARCH vs IGARCH: comparație persistență



GARCH-in-Mean (GARCH-M) \succ Engle, Lilien & Robins (1987)

Definiție 5 (GARCH-M)

- **Model:** Volatilitatea intră direct în ecuația mediei:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + \delta \cdot g(\sigma_t^2) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \end{aligned}$$

- **Funcția g :** poate fi σ_t^2 , σ_t , sau $\ln(\sigma_t^2)$

Interpretare economică

- $\delta > 0$: **prima de risc** \succ randamente mai mari când volatilitatea este ridicată
- Formalizează relația risc-randament (CAPM, Merton ICAPM); testul $H_0 : \delta = 0$

Exemplu tipic: acțiuni

- $r_t = 0.02 + \underbrace{0.15}_{\delta} \cdot \sigma_t + \varepsilon_t \quad \succ$ La $\sigma_t = 2\%$: $\mathbb{E}[r_t] = 0.023$ (0.3% primă)



GARCH-M: Specificații Alternative

Specificații Comune

- Prima de risc poate intra sub diferite forme:
- (1) $r_t = \mu + \lambda\sigma_t + \varepsilon_t$
- (2) $r_t = \mu + \lambda\sigma_t^2 + \varepsilon_t$
- (3) $r_t = \mu + \lambda \ln(\sigma_t^2) + \varepsilon_t$

Rezultate Tipice pentru Piețele de Acțiuni

- λ estimat adesea pozitiv dar mic (0.01–0.10)
- Semnificația variază în funcție de piață și perioadă
- Specificația cu varianță produce estimări λ mai mari

Observație 3

- GARCH-M este utilizat în prețuirea activelor, optimizarea portofoliului și testarea CAPM.



Leverage effect

Definiție

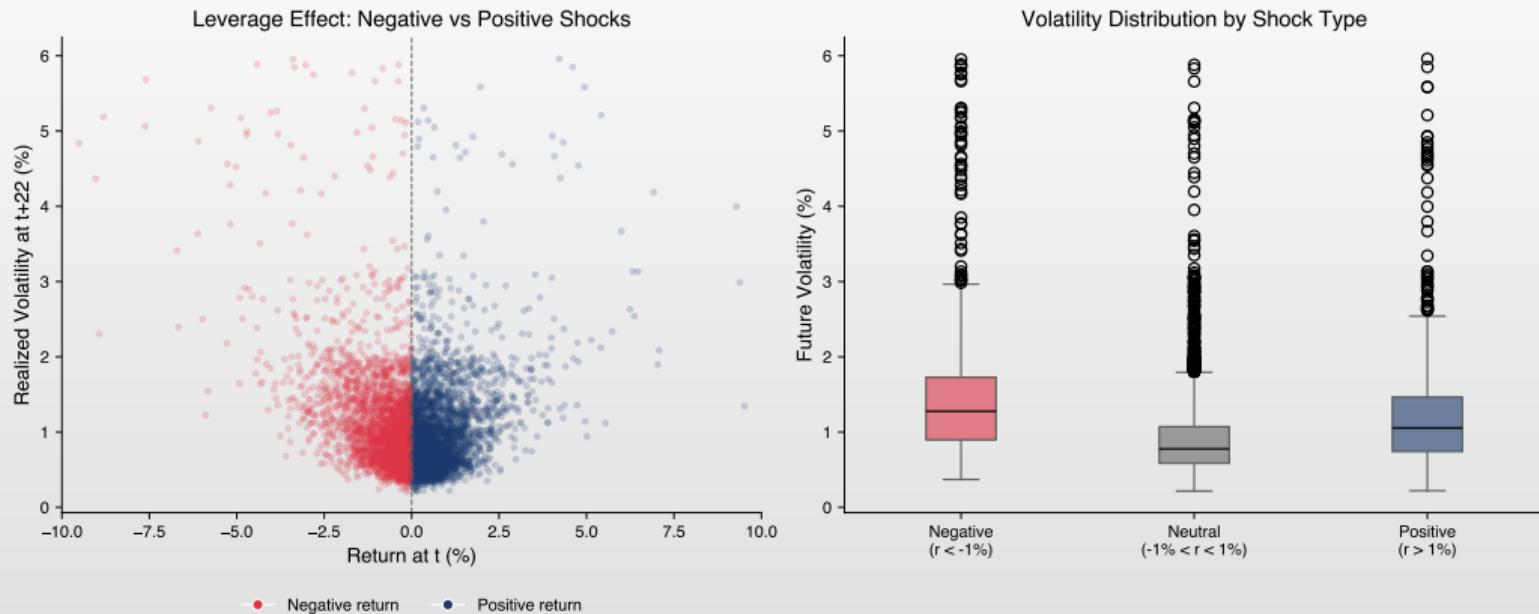
- **Leverage effect:** řocurile negative cresc volatilitatea **mai mult** decât cele pozitive de aceeași magnitudine

Problema GARCH standard

- $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 >$ doar ε_{t-1}^2 contează, semnul se pierde!



Leverage effect



Modelul EGARCH \succ Nelson (1991)

Definiție 6 (EGARCH(1,1))

- Model:** Exponential GARCH: $\ln(\sigma_t^2) = \omega + \alpha(|z_{t-1}| - \mathbb{E}[|z|]) + \gamma z_{t-1} + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2)$
- Notăție:** $z_t = \varepsilon_t / \sigma_t$

Avantaje EGARCH

- Nu necesită restricții de non-negativitate**
 - ▶ Modelează $\ln(\sigma_t^2)$ care poate fi orice valoare reală
- Captează leverage effect prin parametrul γ**
 - ▶ $\gamma < 0$: șocuri negative \succ volatilitate mai mare
- Persistența este dată de β**



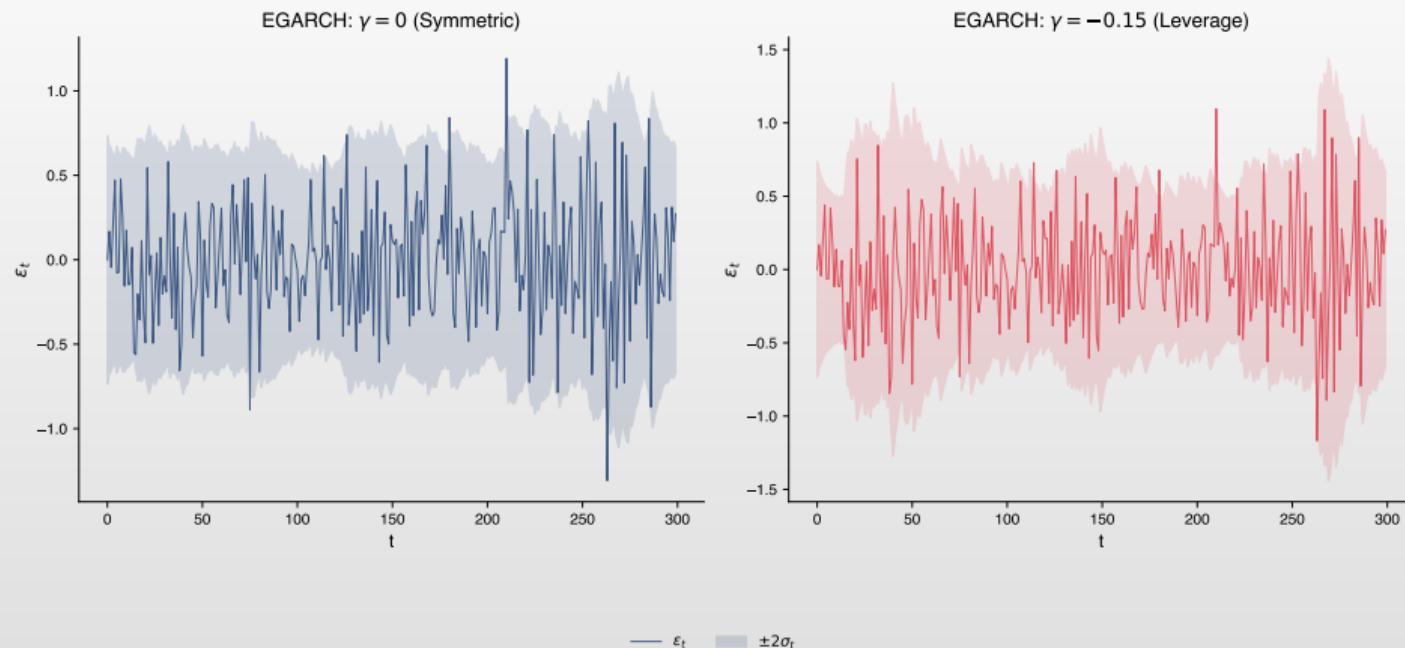
Simulare EGARCH: Efect Simetric vs Asimetric

Interpretare

- Când $\gamma < 0$, řocurile negative cresc volatilitatea mai mult decât cele pozitive



Simulare EGARCH: Efect Simetric vs Asimetric



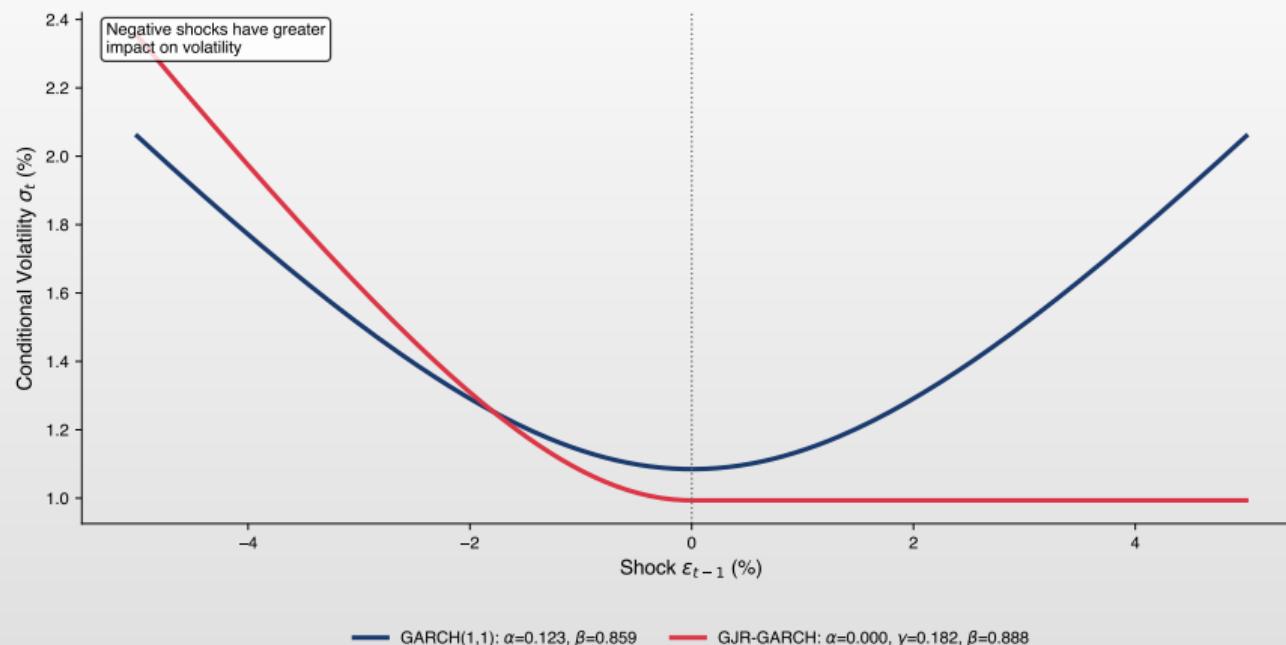
News impact curve \curvearrowright EGARCH

Interpretare

- News Impact Curve:** relația între ε_t și σ_{t+1}^2
- GARCH:** curba simetrică (parabolă)
 - řocuri pozitive și negative au același impact
- EGARCH:** curba asimetrică
 - řocuri negative au impact mai mare asupra volatilității



News impact curve \curvearrowright EGARCH



Modelul GJR-GARCH (TGARCH)

Definiție 7 (GJR-GARCH(1,1))

- **Autori:** Glosten, Jagannathan & Runkle (1993)
- **Model:** $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 \cdot I_{t-1} + \beta \sigma_{t-1}^2$
- **Indicator:** $I_{t-1} = 1$ dacă $\varepsilon_{t-1} < 0$, altfel 0

Interpretare

- řouri pozitive: impact = α ; řouri negative: impact = $\alpha + \gamma$
- Leverage effect prezent dacă $\gamma > 0$
- **Stationaritate:** $\alpha + \gamma/2 + \beta < 1$

TGARCH \succ threshold GARCH

Definiție 8 (TGARCH(1,1))

- Autor:** Zakoian (1994) \succ modelează deviația standard:

$$\sigma_t = \omega + \alpha^+ \varepsilon_{t-1}^+ + \alpha^- \varepsilon_{t-1}^- + \beta \sigma_{t-1}$$

- Notăție:** $\varepsilon_t^+ = \max(\varepsilon_t, 0)$ și $\varepsilon_t^- = \max(-\varepsilon_t, 0)$

Comparație Modele Asimetrice

Model	Specificație	Leverage
GARCH	σ_t^2	Nu
EGARCH	$\ln(\sigma_t^2)$	Da ($\gamma < 0$)
GJR-GARCH	σ_t^2 cu indicător	Da ($\gamma > 0$)
TGARCH	σ_t	Da ($\alpha^- > \alpha^+$)



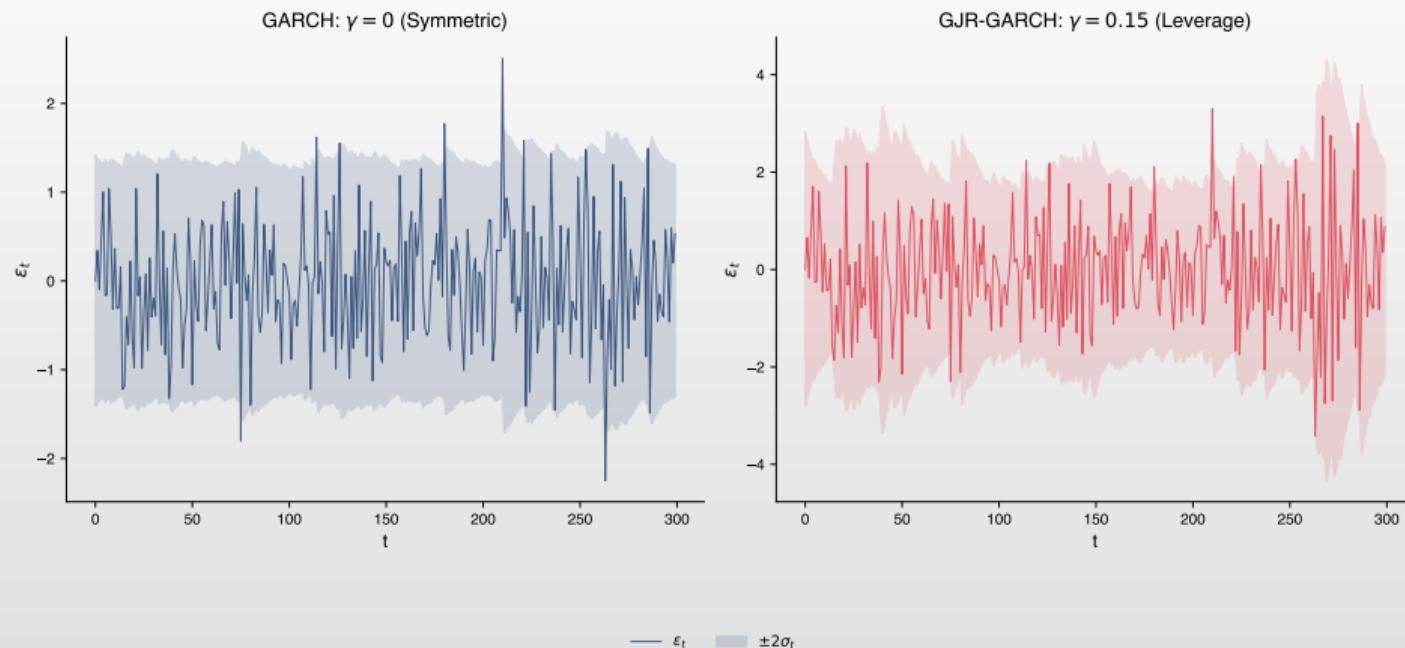
Simulare GJR-GARCH/TGARCH

Interpretare

- GJR-GARCH adaugă un termen indicator pentru a captura răspunsul asimetric la şocuri negative



Simulare GJR-GARCH/TGARCH



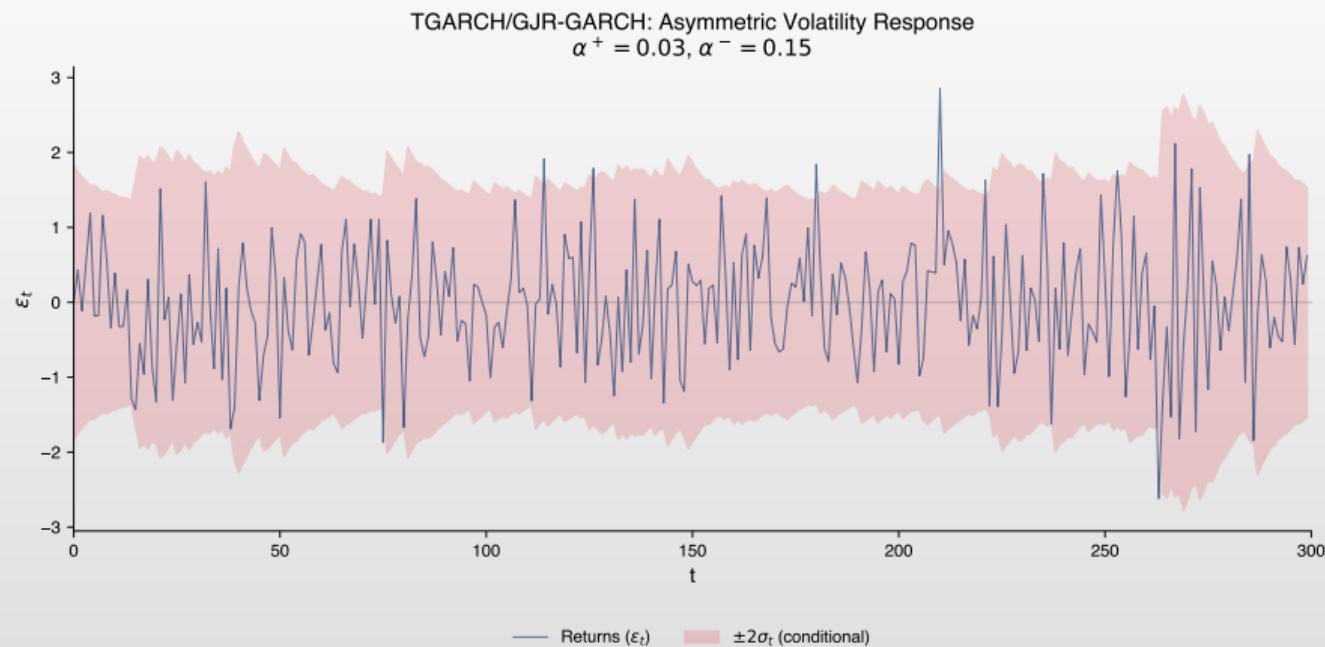
Simulare TGARCH: răspuns asimetric la volatilitate

Interpretare

- TGARCH cu $\alpha^+ = 0.03$ și $\alpha^- = 0.15$ > řocurile negative amplifică volatilitatea de $5 \times$
- Benzile de volatilitate $\pm 2\sigma$ se largesc asimetric în perioadele de criză



Simulare TGARCH: răspuns asimetric la volatilitate



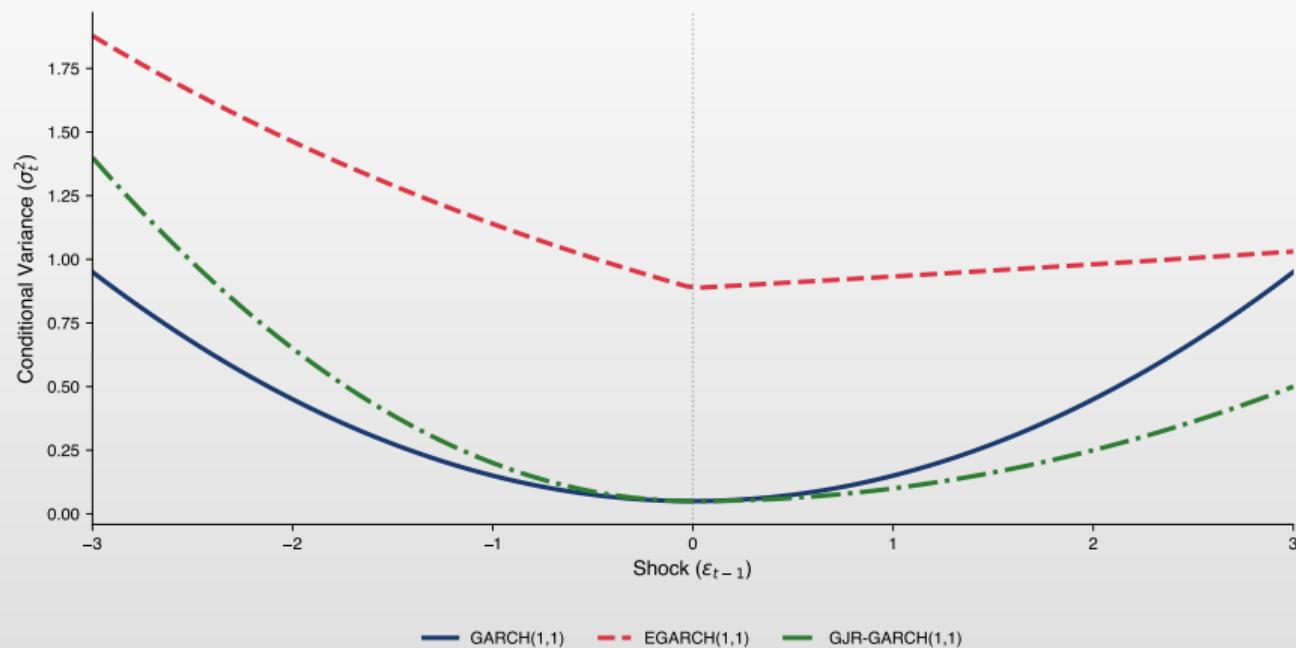
Comparație news impact curves

Interpretare

- GARCH standard:** simetric
 - ▶ Tratează şocuri pozitive și negative identic
- EGARCH și GJR-GARCH:** captează asimetria
 - ▶ Leverage effect: şocuri negative \succ impact mai mare



Comparație news impact curves



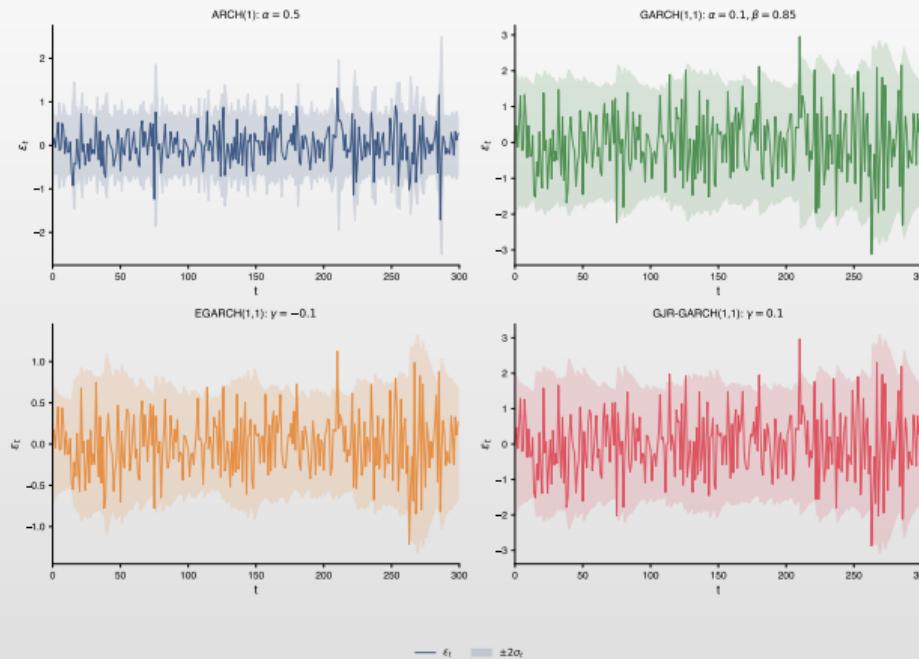
Comparație familie GARCH

Interpretare

- Toate modelele capturează volatility clustering, dar diferă în modul de modelare a asimetriei



Comparație familie GARCH



Selectarea ordinului

Criterii informaționale

- AIC** = $-2\ell + 2k$ > penalizare moderată; preferă modele flexibile
- BIC** = $-2\ell + k \ln(T)$ > penalizare mai mare; modele parsimonioase
- HQIC** = $-2\ell + 2k \ln(\ln(T))$ > intermediar între AIC și BIC

unde: ℓ = maximul log-verosimilității, k = nr. parametri, T = dimensiunea eșantionului

Recomandări Practice

- GARCH(1,1) este suficient în **90% din cazuri**
 - ▶ Modele de ordin mai mare rareori aduc îmbunătățiri semnificative
- Verifică dacă modelul asimetric îmbunătățește fit-ul
 - ▶ Compară GARCH vs EGARCH vs GJR-GARCH prin AIC/BIC
- Alege distribuția inovațiilor care minimizează AIC/BIC



Diagnosticarea modelelor GARCH

Reziduuri Standardizate

- $\hat{z}_t = \frac{\hat{\epsilon}_t}{\hat{\sigma}_t} \succ$ dacă modelul este corect, \hat{z}_t ar trebui să fie i.i.d.(0,1)

Verificări Diagnostic

- Teste pentru medie**
 - ▶ Ljung-Box pe \hat{z}_t : verifică absența autocorelației
- Teste pentru varianță**
 - ▶ Ljung-Box pe \hat{z}_t^2 : verifică absența efectelor ARCH reziduale
 - ▶ Test ARCH-LM: confirmă absența heteroscedasticității
- Verificare distribuție**
 - ▶ Histogramă + QQ-plot: verifică distribuția asumată



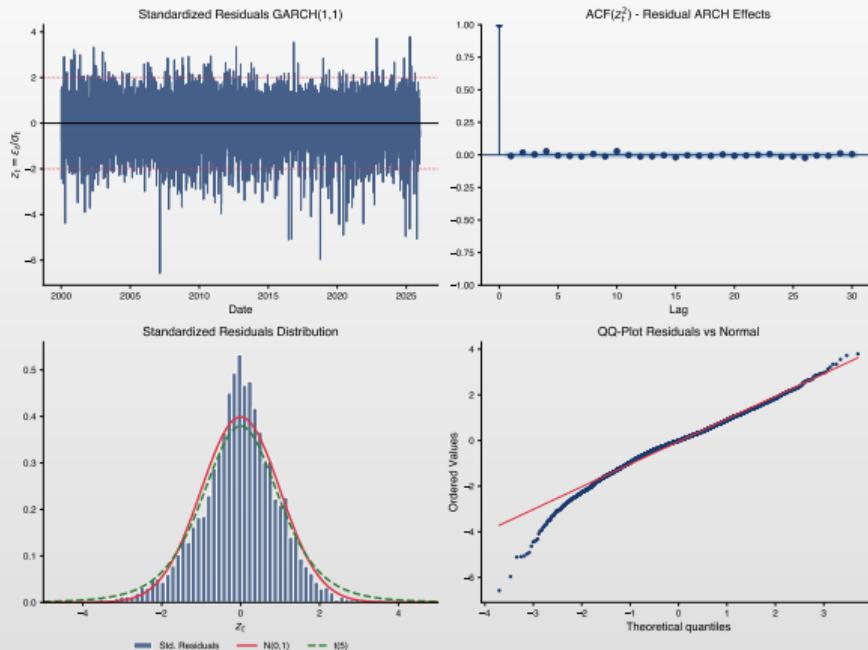
Exemplu diagnostic

Verificare

- Reziduurile standardizate trebuie să fie i.i.d. fără efecte ARCH reziduale



Exemplu diagnostic



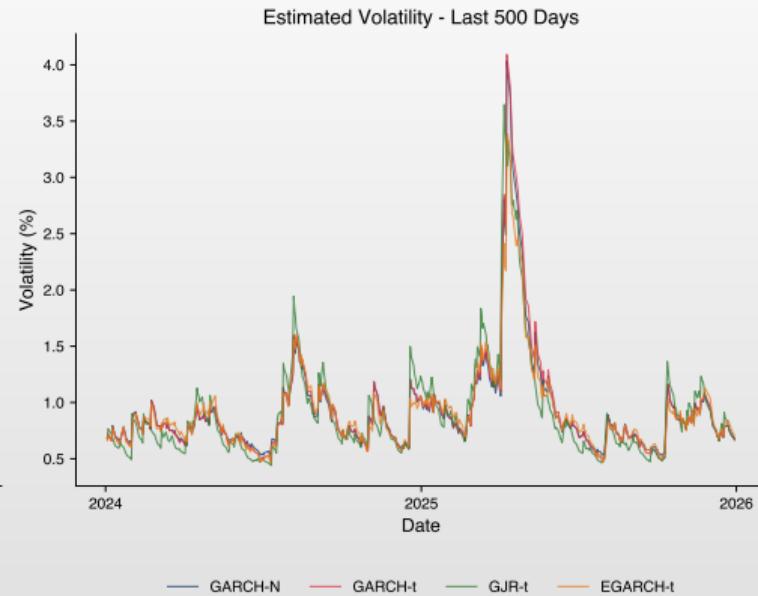
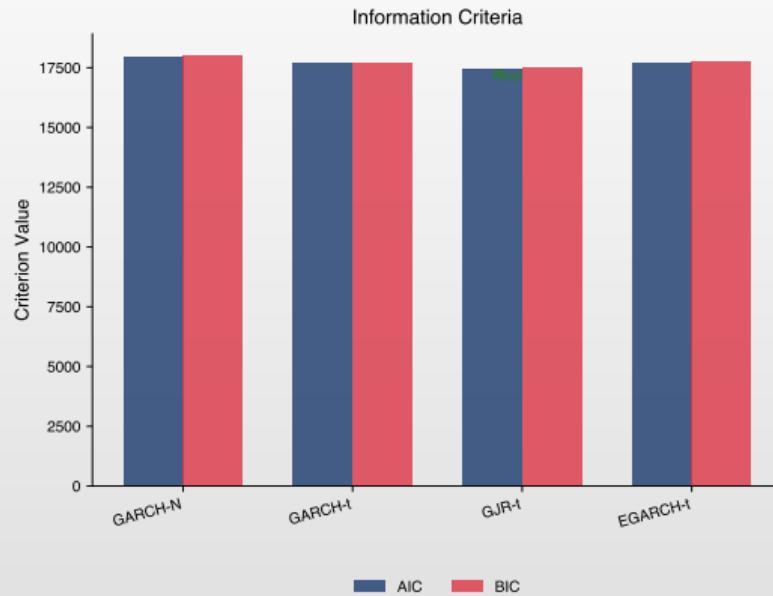
Comparativ modele GARCH & validare

Interpretare

- GARCH(1,1) obține cel mai mic MAE pe setul de validare
 - ▶ Mai parsimonios și mai stabil decât modelele de ordin mai mare
- GARCH(2,1) și GJR-GARCH: performanță similară, dar mai mulți parametri
- Concluzie:** simplitatea câștigă \succ GARCH(1,1) este greu de bătut



Comparație modele GARCH > validare



Prognoza cu GARCH(1,1)

Prognoză Un Pas Înainte

- $\hat{\sigma}_{T+1}^2 = \omega + \alpha \varepsilon_T^2 + \beta \sigma_T^2$

Prognoză multi-pas ($h > 1$)

- $\mathbb{E}_T[\sigma_{T+h}^2] = \bar{\sigma}^2 + (\alpha + \beta)^{h-1}(\sigma_{T+1}^2 - \bar{\sigma}^2) \quad \text{unde } \bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$

Convergență

- $\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{E}_T[\sigma_{T+h}^2] = \bar{\sigma}^2 \succ \text{Prognoza converge către varianța necondiționată!}$



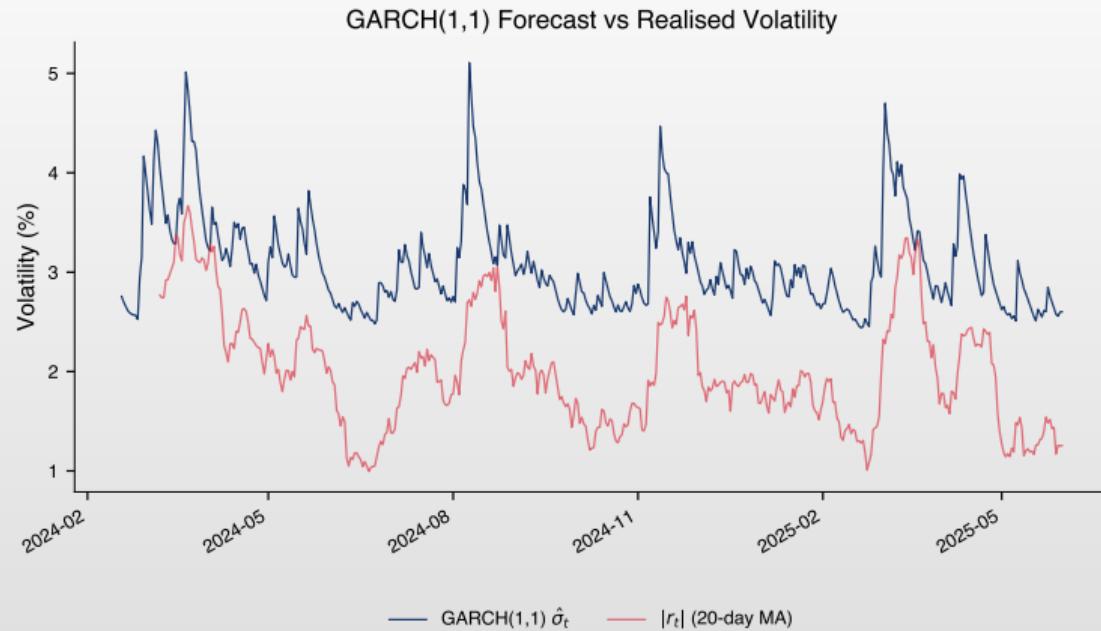
Prognoza volatilității \succ Vizualizare

Proprietăți

- Prognoză converge exponential către $\bar{\sigma}^2$
- Viteza de convergență depinde de $\alpha + \beta$



Prognoza volatilității > Vizualizare



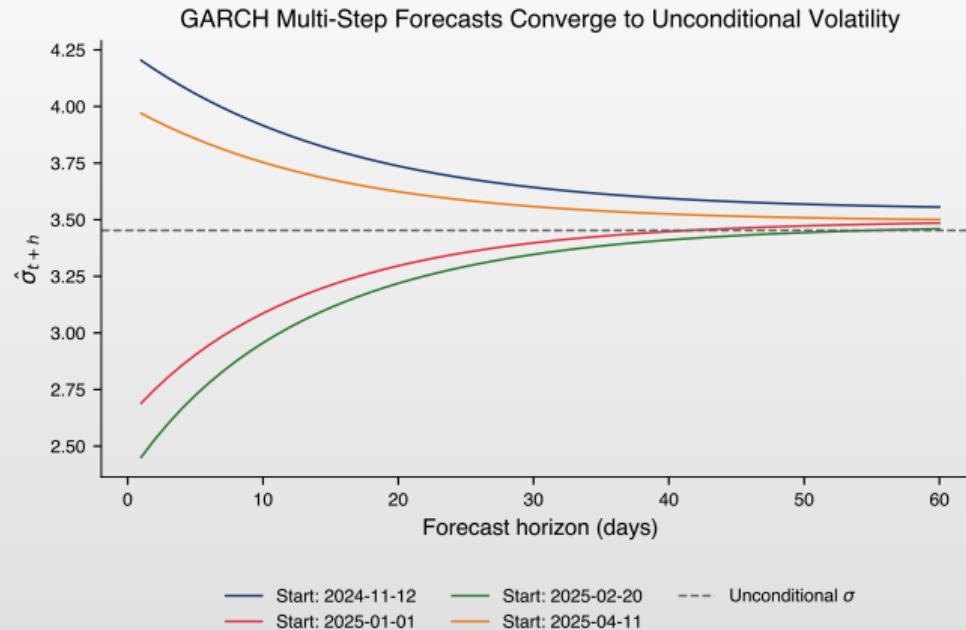
Convergența progrizei GARCH către varianța necondiționată

Interpretare

- Prognoza multi-pas converge exponențial către $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$
- Cu cât $\alpha + \beta$ este mai aproape de 1, cu atât convergența este mai lentă
 - ▶ S&P 500: $\alpha + \beta \approx 0.99 \succ$ convergență în ~50 zile
 - ▶ Bitcoin: $\alpha + \beta \approx 0.95 \succ$ convergență mai rapidă



Convergența prognozei GARCH către varianța necondiționată



Aplicații ale prognozei volatilității

Value at Risk (VaR)

- $\text{VaR}_\alpha = z_\alpha \cdot \sigma_{T+1}$
- Pierdere maximă cu probabilitate $1 - \alpha$

Expected Shortfall (ES)

- $\text{ES}_\alpha = \mathbb{E}[-r | r < -\text{VaR}_\alpha]$
- Pierdere medie când VaR este depășit

Alte Aplicații

- Prețul opțiunilor
- Hedging dinamic
- Alocarea portofoliului
- Stress testing



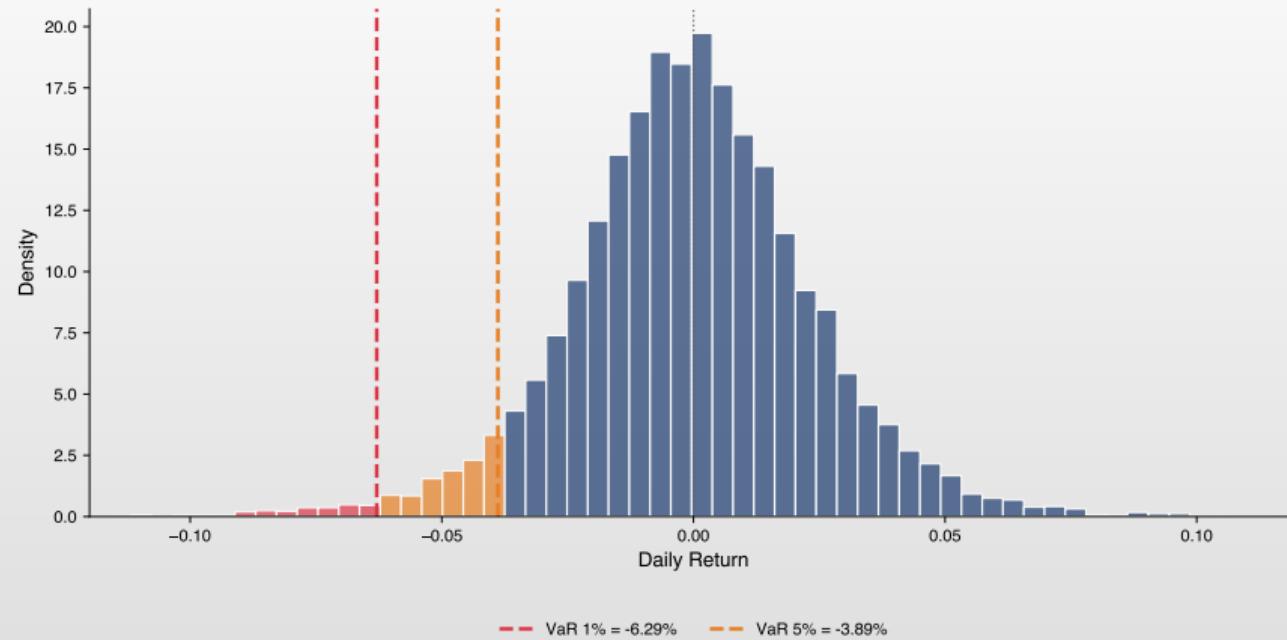
VaR și ES: ilustrație grafică

Interpretare

- VaR 1% = pierderea depășită doar în 1% din cazuri
- Zona roșie = pierderi extreme (dincolo de VaR)



VaR și ES: ilustrație grafică



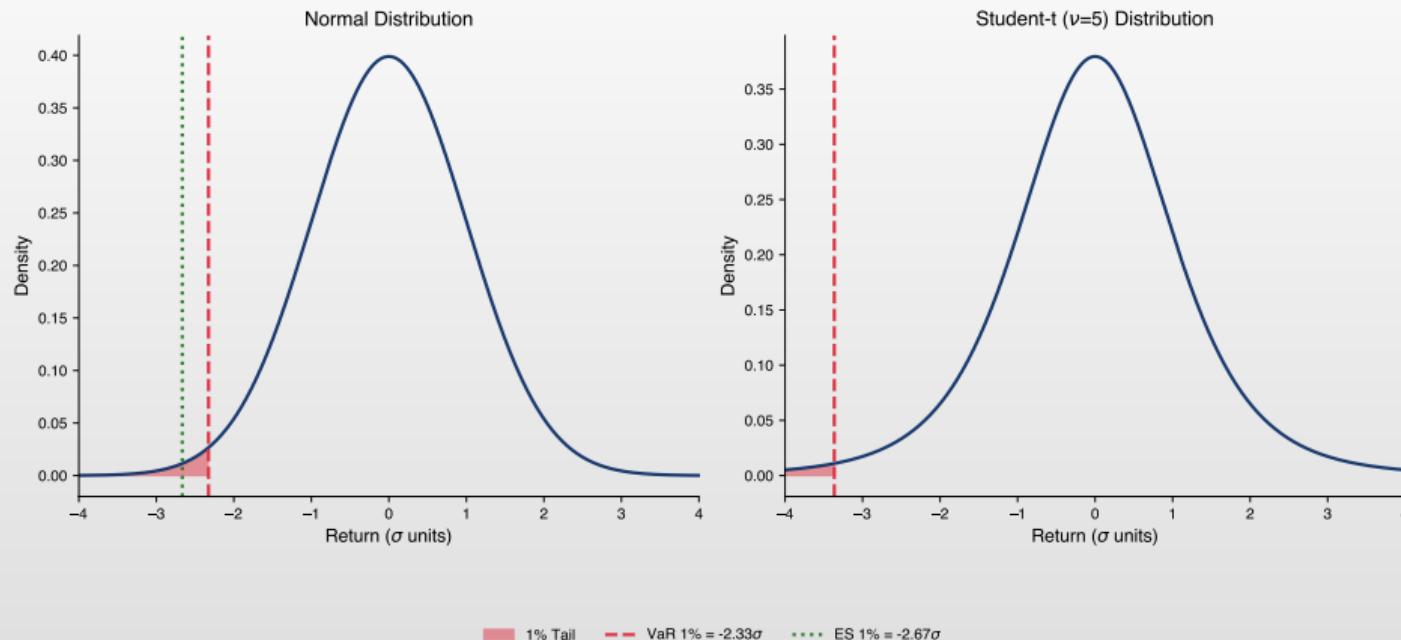
VaR vs expected shortfall: normal vs Student-t

Interpretare

- ES măsoară pierderea medie când VaR este depășit
- Student-t: VaR și ES mai mari decât sub distribuția normală



VaR vs expected shortfall: normal vs Student-t



Value at risk > exemplu numeric

Calculul VaR: Portofoliu 1M EUR, $\hat{\sigma}_{T+1} = 1.5\%$

Nivel	z_α	VaR (%)	VaR (EUR)
5% (1 zi)	1.645	2.47%	24.675
1% (1 zi)	2.326	3.49%	34.890
1% (10 zile)	$2.326 \cdot \sqrt{10}$	11.03%	110.314

Scalare pentru Perioade Mai Lungi

- $\text{VaR}_h \text{ zile} = \text{VaR}_{1 \text{ zi}} \cdot \sqrt{h}$ (presupune randamente i.i.d.)



Value at risk > distribuție Student-t

De ce Student-t?

- Normala **subestimează** riscul de coadă; randamentele au **cozi groase** ($kurtosis > 3$)
- Student-t capturează mai bine extremele

Comparație VaR 1% (1 zi) pentru $\sigma = 1.5\%$, Portofoliu = 1M EUR

Distribuție	Cuantilă	VaR (EUR)
Normal	2.326	34.890
Student-t ($\nu = 10$)	2.764	41.460
Student-t ($\nu = 6$)	3.143	47.145
Student-t ($\nu = 4$)	3.747	56.205

- Cu $\nu = 6$ (tipic pentru acțiuni), VaR este cu **35% mai mare** decât cel normal!



VaR > exemplu complet cu GARCH

Procedura de Calcul VaR

1. Estimează modelul GARCH(1,1) cu distribuție Student-t
2. Obține prognoza volatilității: $\hat{\sigma}_{T+1}$
3. Calculează VaR: $VaR_{\alpha} = t_{\alpha}(\nu) \cdot \hat{\sigma}_{T+1} \cdot \sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}}$

Exemplu: S&P 500

- Parametri estimați: $\alpha = 0.088$, $\beta = 0.900$, $\nu = 6.4$
- Volatilitate prognozată: $\hat{\sigma}_{T+1} = 1.2\%$, Portofoliu: 10.000.000 EUR
- VaR 1% (1 zi):** $VaR = 3.05 \times 0.012 \times 10.000.000 = 366.000 \text{ EUR}$



Ce este VaR backtesting?

Definiție

- Backtesting** = verificarea ex-post a calității modelului VaR
- Compară pierderile realizate cu pragul VaR proгnozat
 - ▶ O **încălcare** (violation) apare când $r_t < -\text{VaR}_t$

Principiul Backtesting-ului

- Indicatorul de încălcare: $I_t = 1(r_t < -\text{VaR}_{\alpha,t})$
- Pentru un model corect la nivel α :
 - ▶ Frecvența: $\hat{p} = \frac{1}{T} \sum I_t \approx \alpha$; încălcări **independente**
- VaR 1% pe 250 zile \succ așteptăm ~ 2.5 încălcări/an

Importanță

- Cerință regulamentară **Basel III/IV** pentru bănci: backtesting obligatoriu



Testul Kupiec (1995) \succ acoperire necondiționată

Ipoteze

- H_0 : Rata de încălcare este egală cu nivelul VaR ($p = \alpha$)
- H_1 : Rata de încălcare diferă de nivelul VaR ($p \neq \alpha$)

Statistica de test (Likelihood Ratio)

- Formula:** $LR_{uc} = -2 \ln \left[\frac{\alpha^x (1-\alpha)^{T-x}}{\hat{\rho}^x (1-\hat{\rho})^{T-x}} \right] \sim \chi^2(1)$
- Notăție:** $x = \text{nr. încălcări}, T = \text{nr. observații}, \hat{\rho} = x/T$

Exemplu

- VaR 1%, $T = 250$ zile, $x = 5$ încălcări: $\hat{\rho} = 2\%$
 - ▶ Prea multe încălcări \succ modelul **subestimează** riscul
- VaR 1%, $T = 250$ zile, $x = 1$ încălcare: $\hat{\rho} = 0.4\% \succ$ acceptabil



Testul Christoffersen (1998) > acoperire condiționată

Motivație

- Kupiec testează doar **frecvența** încălcărilor
- Nu detectează **clusterizarea** încălcărilor (încălcări consecutive)
 - Dacă încălcările apar în clustere > modelul nu captează dinamica volatilității

Testul de independentă + acoperire condiționată

- Formula:** $LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind} \sim \chi^2(2)$
- LR_{ind} testează dacă $P(I_t = 1 | I_{t-1} = 1) = P(I_t = 1 | I_{t-1} = 0)$
- Un model bun: încălcări rare și distribuite uniform în timp

Recomandare

- Folosește **ambele** teste: Kupiec (frecvență) + Christoffersen (independentă)



Backtesting VaR: semaforul Basel

Zonele de semaforizare Basel III/IV

Zonă	Încălcări/250 zile	Interpretare	Penalizare
Verde	0–4	Model acceptabil	Fără penalizare
Galben	5–9	Necesită investigare	Factor k crește
Roșu	≥ 10	Model inadecvat	Penalizare maximă

Exemplu practic

- ☐ Portofoliu cu VaR 1%: 250 zile de backtesting
- ☐ 3 încălcări \succ Zonă verde \succ model acceptabil
- ☐ 7 încălcări \succ Zonă galbenă \succ revizuire necesară
- ☐ 13 încălcări \succ Zonă roșie \succ model respins



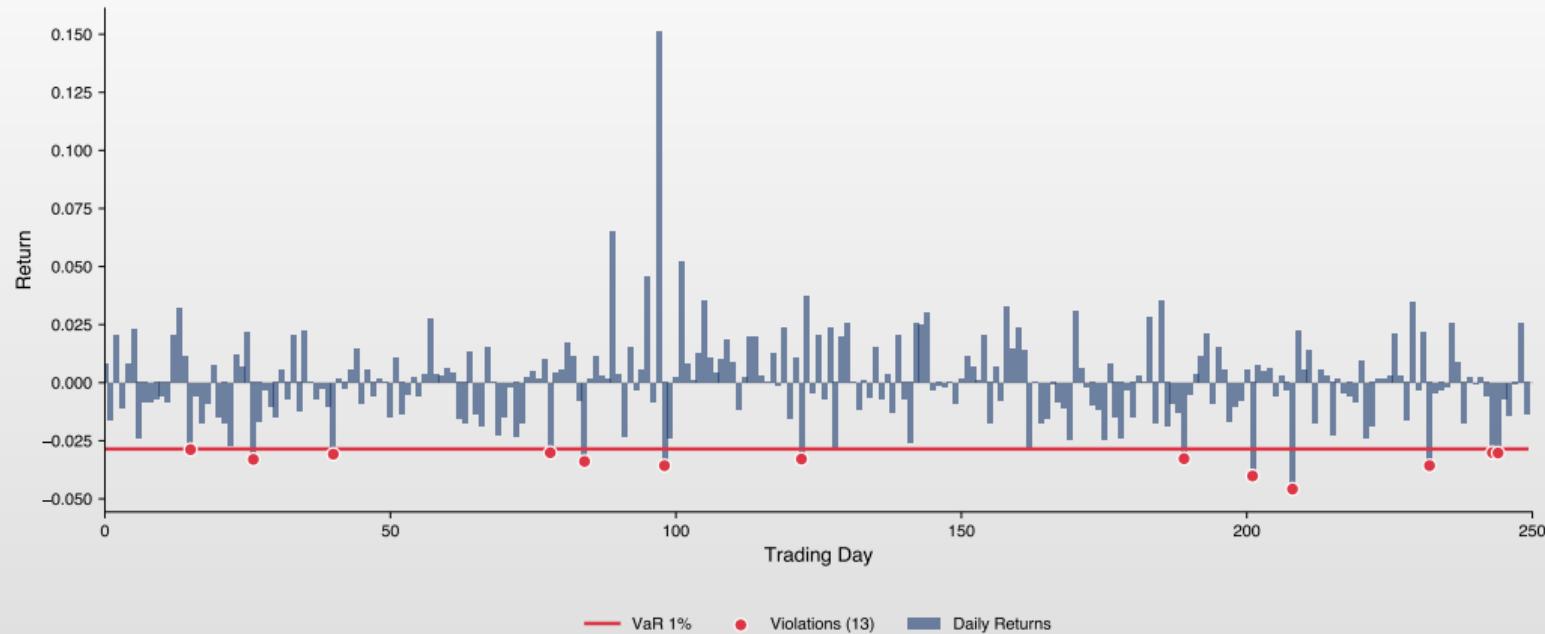
VaR backtesting: vizualizare

Interpretare

- Linia roșie: pragul VaR 1% estimat cu GARCH(1,1)
- Punctele roșii: 13 încălcări din 250 zile ($\hat{p} = 5.2\%$)
 - ▶ **Zonă roșie Basel** \succ modelul subestimează semnificativ riscul
 - ▶ Soluții: distribuție Student-t, model EGARCH, sau nivel VaR mai conservator



VaR backtesting: vizualizare



Metodologia Rolling Window pentru VaR

Conceptul Rolling Window

- O fereastră mobilă de dimensiune fixă W (ex. 500 zile) se deplasează zi cu zi
- La fiecare pas t : re-estimare GARCH pe $[t - W, t - 1]$, prognoză $\hat{\sigma}_{t|t-1}$, calcul VaR_t

Procedura pas cu pas (pentru fiecare zi $t = W + 1, \dots, T$)

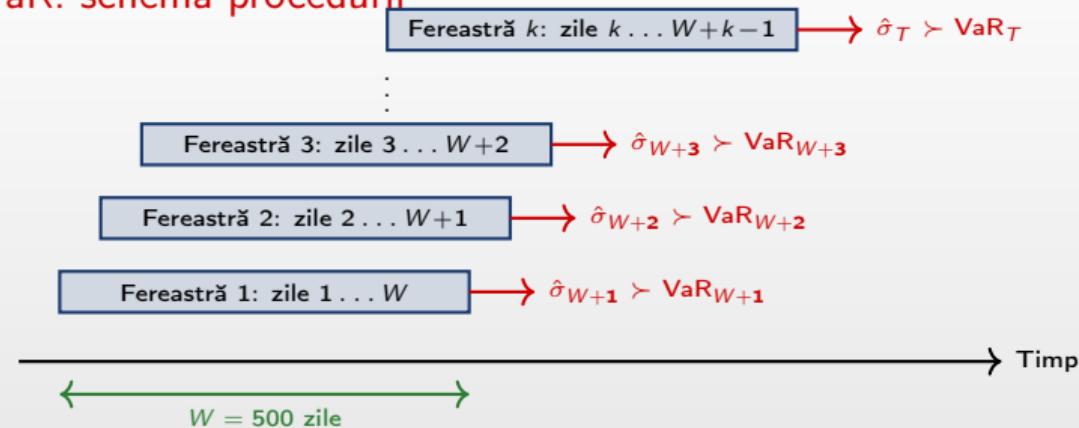
1. Estimează GARCH pe $\{r_{t-W}, \dots, r_{t-1}\} \succ$ parametri $\hat{\omega}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\nu}$
2. Prognozează: $\hat{\sigma}_{t|t-1}^2 = \hat{\omega} + \hat{\alpha} r_{t-1}^2 + \hat{\beta} \hat{\sigma}_{t-1}^2$
3. Calculează: $\text{VaR}_{\alpha,t} = -t_\alpha(\hat{\nu}) \cdot \sqrt{\frac{\hat{\nu}-2}{\hat{\nu}}} \cdot \hat{\sigma}_{t|t-1}$
4. Verifică încălcarea: $I_t = 1(r_t < -\text{VaR}_{\alpha,t})$

De ce Rolling și nu Expanding?

- Fereastra fixă: parametrii reflectă **regimul curent** al volatilității
- Datele vechi ($> W$ zile) pot fi irelevante (schimbări structurale, crize)



Rolling Window VaR: schema procedurii



Rezultat

- Obținem seria $\{\text{VaR}_{\alpha,t}\}_{t=W+1}^T \succ$ un prag **diferit** în fiecare zi
- VaR-ul se adaptează la regimul curent: crește în perioadele volatile, scade în cele calme
- Comparăm r_t cu $-\text{VaR}_{\alpha,t}$ pentru a identifica încălcările



VaR backtesting în Python > rolling window

Estimare VaR rolling cu GARCH(1,1)-t

```
from arch import arch_model
import numpy as np
from scipy import stats

returns = ... # pd.Series cu randamente zilnice
window = 500; alpha = 0.01
VaR_series = pd.Series(index=returns.index[window:], dtype=float)

for t in range(window, len(returns)):
    train = returns.iloc[t-window:t]
    model = arch_model(train, vol='Garch', p=1, q=1, dist='t')
    res = model.fit(disp='off', show_warning=False)
    fcast = res.forecast(horizon=1, reindex=False)
    sigma = np.sqrt(fcast.variance.values[-1, 0])
    nu = res.params['nu'] # grade de libertate Student-t
    q = stats.t.ppf(alpha, nu) * np.sqrt((nu-2)/nu)
    VaR_series.iloc[t - window] = -q * sigma
```

Q TSA_ch5_backtest_py



Testul Kupiec > implementare Python

Funcția kupiec_test()

```
def kupiec_test(violations, T, alpha=0.01):
    """Kupiec (1995) unconditional coverage LR test."""
    x = violations.sum()           # nr. încălcări observate
    p_hat = x / T                 # rata empirică
    if x == 0 or x == T:
        return np.nan, np.nan
    LR_uc = -2 * (x*np.log(alpha) + (T-x)*np.log(1-alpha)
                  - x*np.log(p_hat) - (T-x)*np.log(1-p_hat))
    p_value = 1 - stats.chi2.cdf(LR_uc, df=1)
    return LR_uc, p_value
```

Utilizare

```
violations = returns[window:] < -VaR_series
LR, pval = kupiec_test(violations, len(violations))
print(f"Kupiec LR = {LR:.3f}, p-value = {pval:.4f}")
# p-value < 0.05 => respingem H0 => model inadecvat
```



Testul Christoffersen \succ implementare Python

Funcția christoffersen_test()

```
def christoffersen_test(violations):
    """Christoffersen (1998) conditional coverage test."""
    V = violations.astype(int).values
    # Matricea de tranzitie: n_ij
    n00 = ((V[:-1]==0) & (V[1:]==0)).sum()
    n01 = ((V[:-1]==0) & (V[1:]==1)).sum()
    n10 = ((V[:-1]==1) & (V[1:]==0)).sum()
    n11 = ((V[:-1]==1) & (V[1:]==1)).sum()
    # Probabilități condiționate
    p01 = n01/(n00+n01) if (n00+n01)>0 else 0
    p11 = n11/(n10+n11) if (n10+n11)>0 else 0
    p = (n01+n11) / (n00+n01+n10+n11) # rata globală
    if p01==0 or p11==0 or p==0 or p==1: return np.nan, np.nan
    LR_ind = -2*(np.log(1-p)*(n00+n10) + np.log(p)*(n01+n11)
                 - np.log(1-p01)*n00 - np.log(p01)*n01
                 - np.log(1-p11)*n10 - np.log(p11)*n11)
    p_value = 1 - stats.chi2.cdf(LR_ind, df=1)
    return LR_ind, p_value
```



Backtesting complet > rezultate și decizie

Aplicare S&P 500 (T=500, VaR 1%)

```
violations = returns[window:] < -VaR_series
n_viol = violations.sum()
T = len(violations)
rate = n_viol / T
print(f"Încălcări: {n_viol}/{T} (rata = {rate:.2%})")
LR_uc, p_uc = kupiec_test(violations, T, alpha=0.01)
LR_ind, p_ind = christoffersen_test(violations)
LR_cc = LR_uc + LR_ind # test combinat ~ chi2(2)
p_cc = 1 - stats.chi2.cdf(LR_cc, df=2)
```

Output tipic

```
Încălcări: 13/500 (rata = 2.60%)
Kupiec    LR = 5.83,  p-value = 0.0157 => Respins (p<0.05)
Independ. LR = 0.42,  p-value = 0.5171 => Acceptat
Combinat  LR = 6.25,  p-value = 0.0439 => Respins
Zona Basel: ROȘU (>=10 încălcări) => Model inadecvat
```



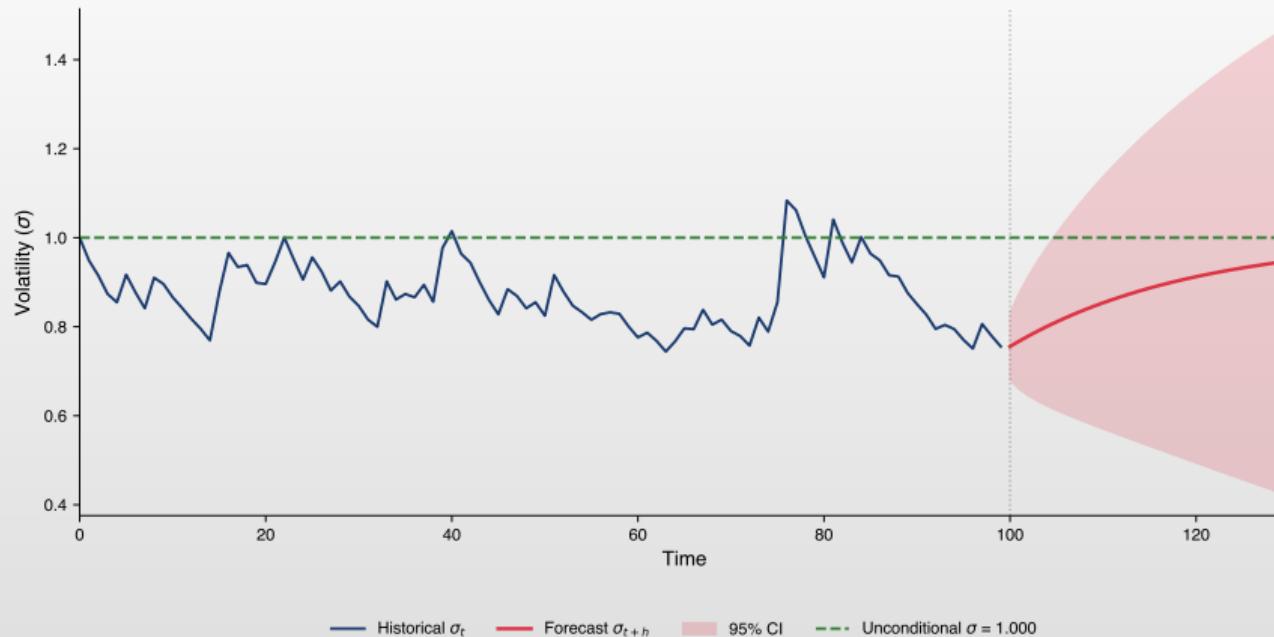
Prognoza volatilității cu intervale de încredere

Interpretare

- Prognoza converge către $\bar{\sigma}$
- Incertitudinea crește cu orizontul de prognoză



Prognoza volatilității cu intervale de încredere



Rolling forecast > prognoza pas cu pas

Procedura

S&P 500, W=500, GARCH(1,1)-t

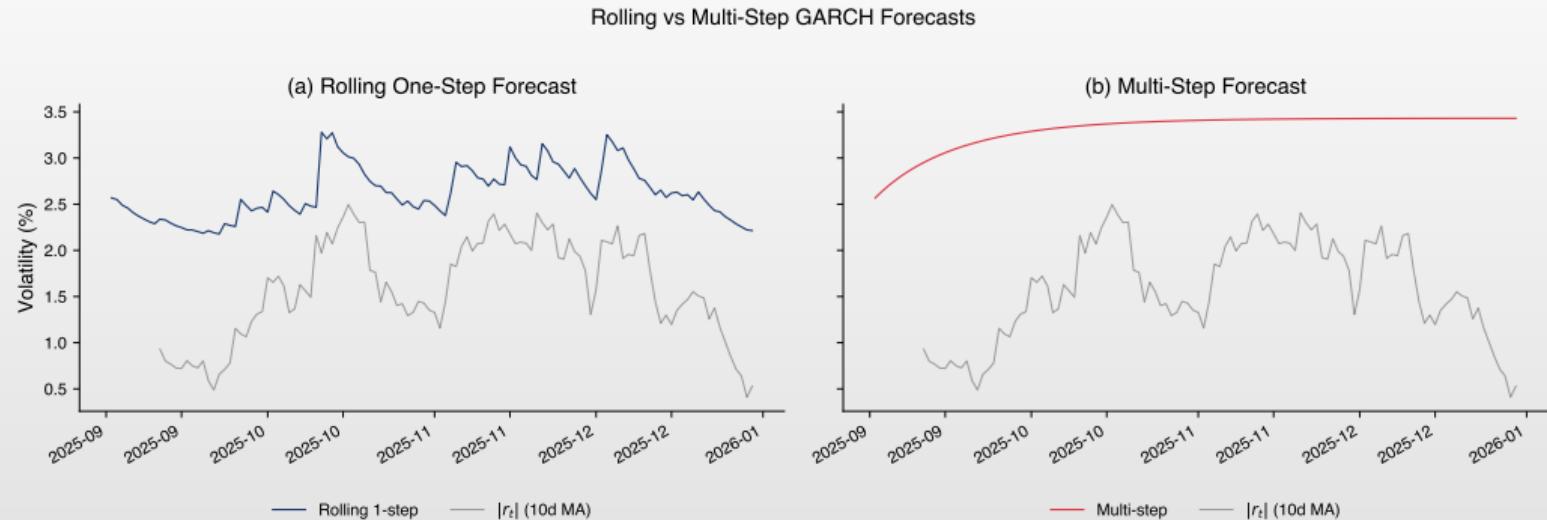
- Re-estimare GARCH pe $[t-W, t-1]$; prognoză $\hat{\sigma}_{t|t-1}$
- Comparație cu vol. realizată (std. rulantă 20 zile)

Rezultate (2015 zile OOS)

- $\rho = 0.938$ > urmărire excelentă; MAE = 0.15%, RMSE = 0.24%
- COVID-19: sub-predicție temporară, adaptare rapidă



Rolling forecast > prognosă pas cu pas



 TSA_ch5_rolling_forecast

Estimare GARCH în Python > arch

Cod Python

```
pip install arch
from arch import arch_model

model = arch_model(returns,
    vol='Garch', p=1, q=1,
    dist='normal')
results = model.fit(disp='off')
print(results.summary())
```

Parametri cheie

- **vol:** tip model
 - ▶ 'Garch', 'EGARCH'
- **p, q:** ordine GARCH
 - ▶ p=1, q=1 standard
- **dist:** distribuție
 - ▶ 'normal', 't'

 TSA_ch5_garch

Modele Asimetrice în Python

EGARCH și GJR-GARCH

```
# EGARCH
model_egarch = arch_model(returns, vol='EGARCH', p=1, q=1)
# GJR-GARCH (o=1 adaugă termenul asimetric)
model_gjr = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, o=1, q=1)
```

Distribuții Alternative

```
# Student-t pentru cozi groase
model_t = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, q=1, dist='t')
# Skewed Student-t pentru asimetrie și cozi groase
model_skewt = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, q=1,
                           dist='skewt')
```

Prognoza și Diagnosticul

Prognoza volatilității

```
forecasts = results.forecast(horizon=10)
vol_forecast = np.sqrt(forecasts.variance.values[-1,:])
```

Diagnostic și VaR

```
std_resid = results.std_resid
lb_test = acorr_ljungbox(std_resid**2, lags=10)
sigma = np.sqrt(forecasts.variance.values[-1, 0])
VaR_5pct = 1.645 * sigma
```

 TSA_ch5_forecast



ARMA-GARCH: modelarea combinată a mediei și varianței

De ce Modelare Combinată?

- **Corelație serială** \succ ARMA pentru medie
 - ▶ Captează dependența liniară în randamente
- **Volatility clustering** \succ GARCH pentru varianță
 - ▶ Captează dependența neliniară (heteroscedasticitate)

Definiție 9 (ARMA(p,q)-GARCH(r,s))

- **Ecuația mediei:** $r_t = \mu + \sum_{i=1}^p \phi_i(r_{t-i} - \mu) + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$
- **Ecuația varianței:** $\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^r \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2$



ARMA-GARCH: strategie de selecție a modelului

Abordare Pas cu Pas

- Identifică modelul pentru medie:** Verifică ACF/PACF al randamentelor
- Testează efectele ARCH:** Aplică testul ARCH-LM pe reziduuri
- Specifică modelul pentru varianță:** De obicei GARCH(1,1) este suficient
- Estimare combinată:** Estimează ambele ecuații prin MLE
- Diagnostic:** Reziduurile standardizate trebuie să fie i.i.d.

Specificații Comune

- Randamente acțiuni:** AR(1)-GARCH(1,1) sau ARMA(1,1)-GARCH(1,1)
 - ▶ Leverage effect frecvent \succ EGARCH poate fi preferat
- Cursuri de schimb:** Adesea doar GARCH(1,1)
 - ▶ Fără dinamică semnificativă în medie
- Rate ale dobânzii:** AR(1)-EGARCH(1,1) pentru efecte de levier



ARMA-GARCH: implementare Python

Utilizând Pachetul arch

```
from arch import arch_model
model = arch_model(returns,
                    mean='ARX',
                    lags=1,
                    vol='Garch',
                    p=1, q=1,
                    dist='t')
result = model.fit(disp='off')
print(result.summary())
```

Parametri

- `mean='ARX'`: medie ARMA; `lags=1`: AR(1); `dist='t'`: Student-t



ARMA-GARCH: Exemplu Complet

```
from arch import arch_model
model = arch_model(returns,
                    mean='ARX', lags=[1],
                    vol='EGARCH', p=1, q=1,
                    dist='skewt')
result = model.fit(update_freq=0)
cond_mean = result.conditional_mean
cond_vol = result.conditional_volatility
forecasts = result.forecast(horizon=5)
```

Notă

- Pentru termeni MA, folosiți `mean='HARX'` sau pre-filtrări cu `statsmodels ARIMA`

Pasul 1: Datele și randamente zilnice S&P 500

Descrierea datelor

- Sursă:** Yahoo Finance, S&P 500, date zilnice 2000–2024 ($T > 6000$)
- Randamente:** $r_t = \ln(P_t/P_{t-1}) \times 100$

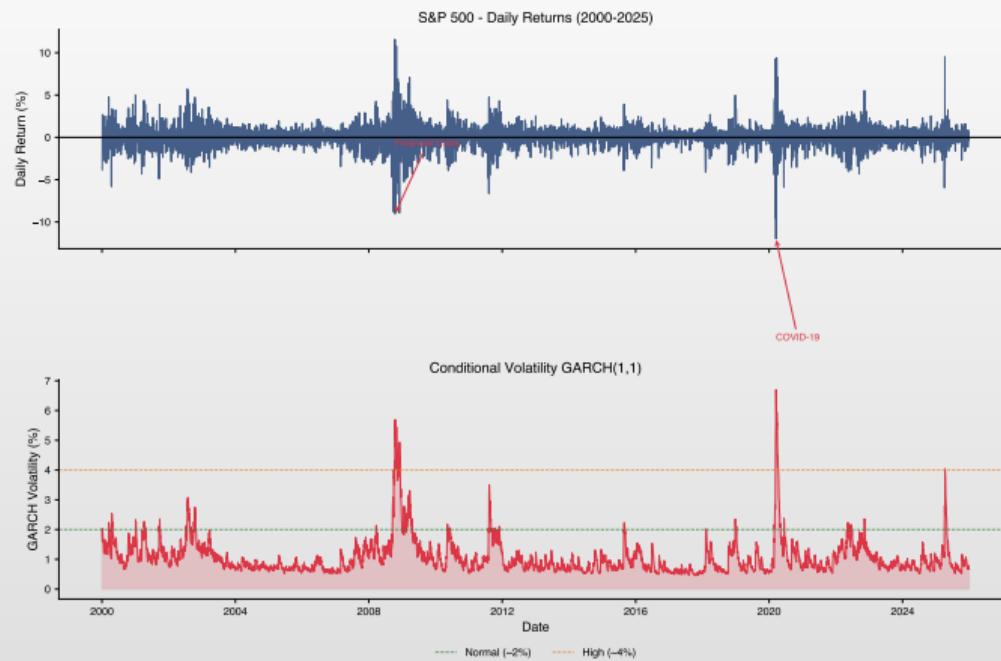
Statistici descriptive

Medie	Std. Dev.	Skewness	Kurtosis	Min	Max
0.034%	1.21%	-0.29	13.8	-12.8%	+11.0%

- Cozi groase (kurtosis $\gg 3$) și asimetrie negativă \succ efecte ARCH



Pasul 1: Datele > randamente zilnice S&P 500



Pasul 2: Testarea efectelor ARCH

Cod Python \succ ARCH-LM și Ljung-Box pe r_t^2

```
import yfinance as yf
from statsmodels.stats.diagnostic import het_arch, acorr_ljungbox
sp = yf.download('^GSPC', start='2000-01-01', end='2024-12-31')
returns = np.log(sp['Close']).diff().dropna() * 100
# Testul ARCH-LM (Engle, 1982)
lm_stat, lm_pval, _, _ = het_arch(returns, nlags=10)
# Ljung-Box pe randamente pătrate
lb = acorr_ljungbox(returns**2, lags=20)
```

Rezultate

Test	Statistică	p-value
ARCH-LM (10 lags)	892.4	< 0.0001
Ljung-Box r_t^2 (lag 20)	4217.6	< 0.0001

- Concluzie: Efecte ARCH puternice \succ heteroscedasticitate semnificativă

Pasul 3: Estimarea mai multor modele GARCH

Cod Python ➤ estimare 4 modele candidate

```
from arch import arch_model
models = {}
m1 = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, q=1, dist='normal')
models['GARCH-N'] = m1.fit(disp='off')
m2 = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, q=1, dist='t')
models['GARCH-t'] = m2.fit(disp='off')
m3 = arch_model(returns, vol='EGARCH', p=1, q=1, dist='t')
models['EGARCH-t'] = m3.fit(disp='off')
m4 = arch_model(returns, vol='GARCH', p=1, o=1, q=1, dist='t')
models['GJR-t'] = m4.fit(disp='off')
```

Strategie

- Estimăm modele simetrice și asimetrice, cu diferite distribuții
- Alegerea finală: **AIC/BIC + diagnostice + interpretare economică**



Pasul 3: Parametri estimati & comparatie

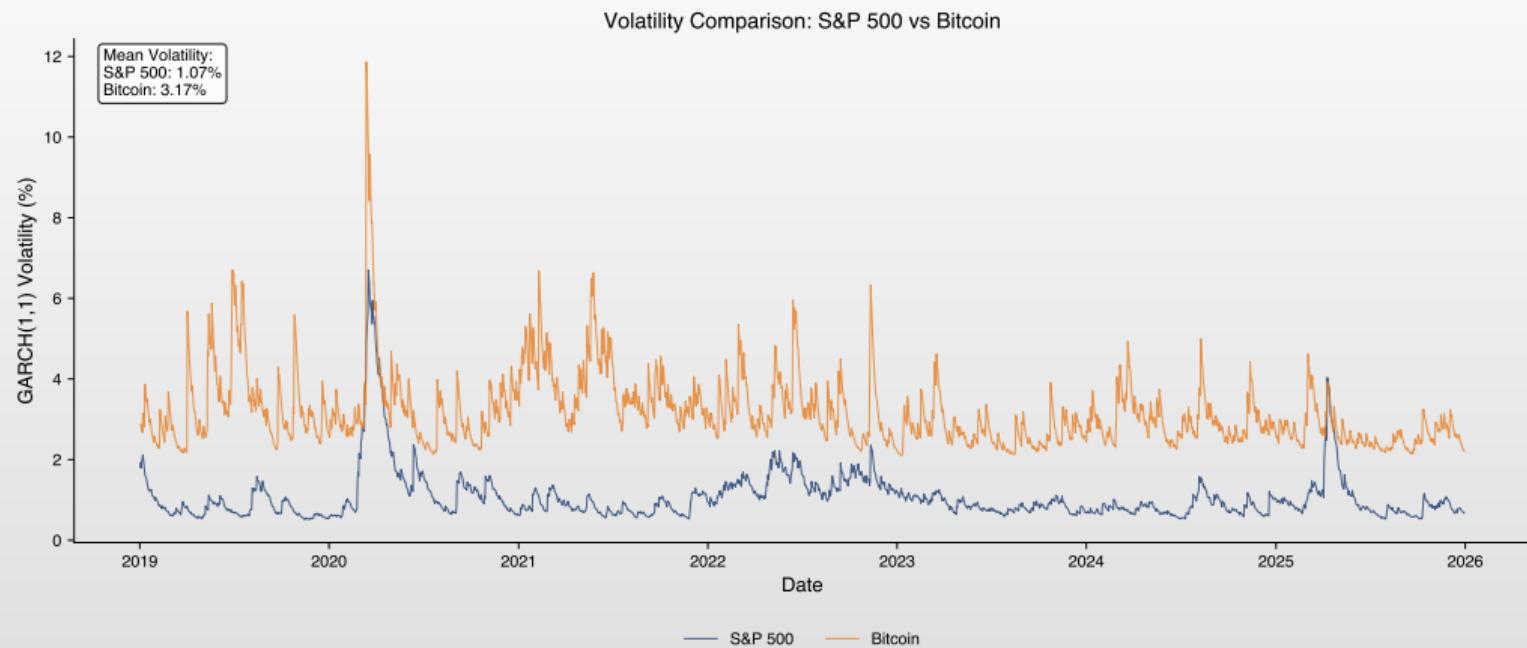
Tabel parametri estimați

Model	ω	α	β	γ	$\alpha + \beta$	ν	HL
GARCH-N	0.011	0.088	0.901	—	0.989	—	60 zile
GARCH-t	0.011	0.088	0.900	—	0.989	6.42	60 zile
EGARCH-t	0.003	0.103	0.987	-0.120	—	6.38	—
GJR-t	0.010	0.022	0.906	0.126	0.991	6.51	78 zile

Interpretare

- EGARCH $\gamma = -0.12$ semnificativ \succ leverage effect confirmat
- GJR: $\alpha_{\text{neg}} = \alpha + \gamma = 0.148$ vs $\alpha_{\text{poz}} = 0.022 \succ$ asimetrie puternică

Pasul 3: Parametri estimați > comparație



Pasul 4: Selecția modelului \succ AIC/BIC

Criterii informaționale

Model	Log-Lik	AIC	BIC	Rang
GARCH(1,1)-N	-8042.3	16090.6	16111.0	4
GARCH(1,1)-t	-7981.5	15971.0	15997.8	3
EGARCH(1,1)-t	-7964.2	15938.4	15971.6	1
GJR-GARCH(1,1)-t	-7968.1	15946.2	15979.4	2

Decizia

- EGARCH(1,1)-t câștigă:** cel mai mic AIC și BIC
- Student-t superior normalei ($\Delta\text{AIC} \approx 120$) \succ cozi groase contează!
- Leverage effect justifică modele asimetrice ($\Delta\text{AIC} \approx 33$ față de GARCH-t)

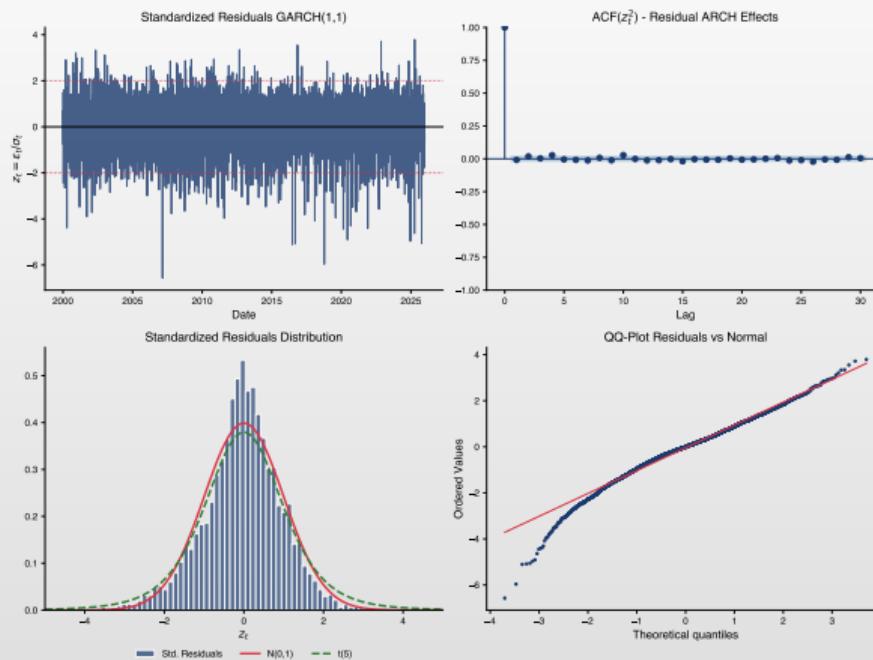


Pasul 5: Diagnostice \succ EGARCH(1,1)-t

Verificări pe reziduuri standardizate $z_t = \varepsilon_t / \hat{\sigma}_t$

- Ljung-Box** pe z_t : p-value = 0.38 \succ fără autocorelație reziduală
- Ljung-Box** pe z_t^2 : p-value = 0.52 \succ efecte **ARCH** eliminate
- Q-Q plot**: punctele urmează dreapta teoretică Student-t
- Concluzie**: modelul EGARCH(1,1)-t captează adekvat dinamica volatilității

Pasul 5: Diagnostice \succ EGARCH(1,1)-t

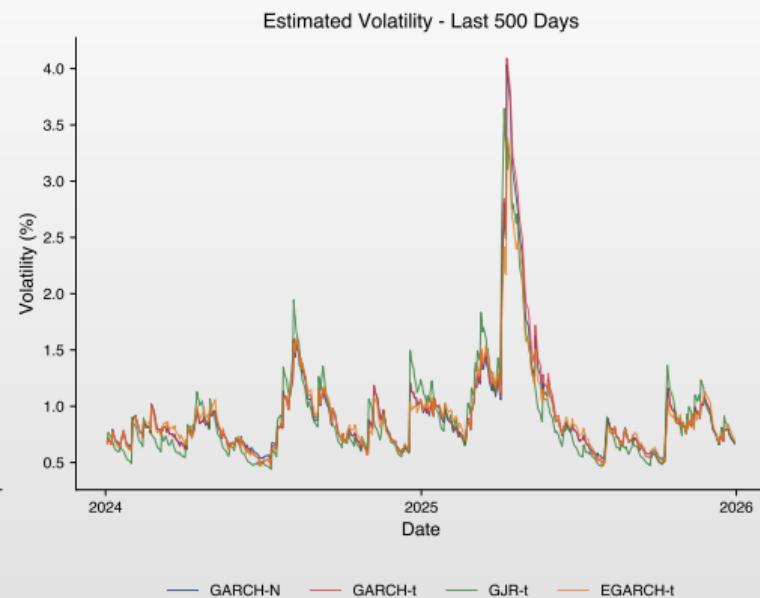
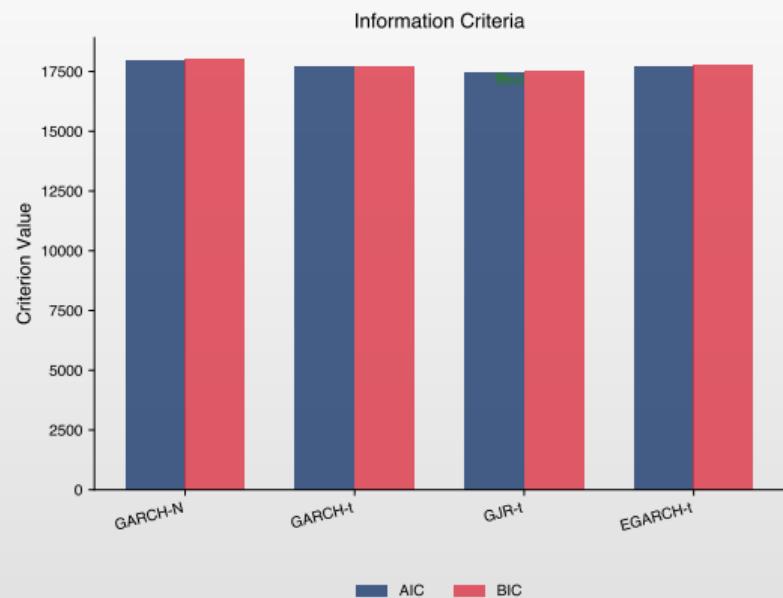


Pasul 5: Leverage effect ➤ vizualizare

GARCH vs EGARCH ➤ diferențe de volatilitate

- EGARCH produce volatilitate **mai mare** după șocuri negative (2008, 2020)
- GARCH simetric **subestimează** riscul în perioadele de criză
- Diferența: până la 2–3 puncte procentuale în volatilitate zilnică

Pasul 5: Leverage effect > vizualizare



Q TSA_ch5_sp500_comp



Pasul 6: VaR rolling window \succ S&P 500

Procedura rolling window (W=500 zile, VaR 1%)

```
from scipy import stats
W = 500; alpha = 0.01
VaR_roll = pd.Series(index=returns.index[W:], dtype=float)
for t in range(W, len(returns)):
    train = returns.iloc[t-W:t]
    m = arch_model(train, vol='Garch', p=1, q=1, dist='t')
    res = m.fit(disp='off', show_warning=False)
    fcast = res.forecast(horizon=1, reindex=False)
    sigma = np.sqrt(fcast.variance.values[-1, 0])
    nu = res.params['nu']
    VaR_roll.iloc[t-W] = -stats.t.ppf(alpha, nu)*np.sqrt((nu-2)/nu)*sigma
```

Caracteristici VaR rolling S&P 500 (2017–2024)

- VaR mediu:** 2.53% (\approx EUR 253.000 / 10M EUR)
- VaR maxim:** 22.02% \succ criză COVID-19 (\approx EUR 2.202.000)
- VaR minim:** 0.91% \succ perioadă calmă (\approx EUR 91.000)
- VaR-ul se adaptează:** crește automat în perioadele de criză

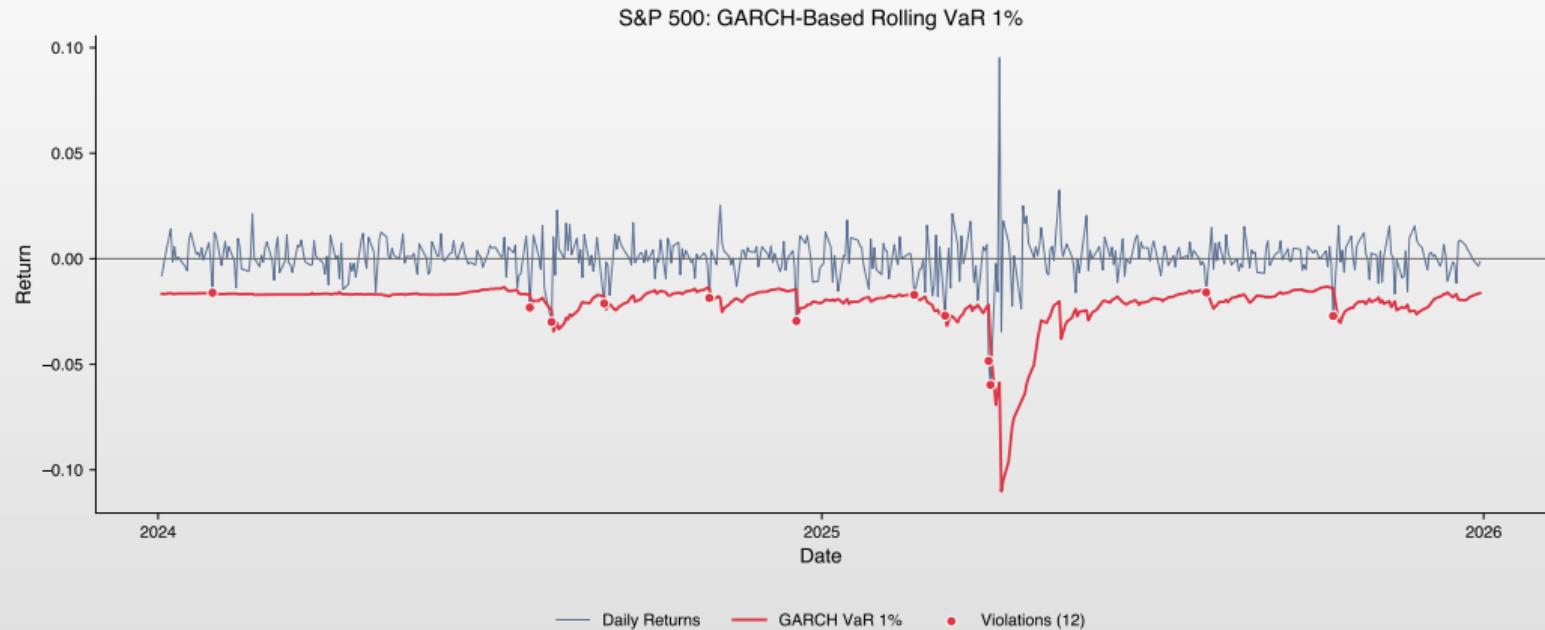
Pasul 6: Backtesting rolling VaR cu S&P 500

Rezultate Kupiec + Christoffersen (2015 zile out-of-sample)

Test	Statistică	p-value	Decizia
Încălcări	27/2015 ($\hat{p} = 1.34\%$)	—	Zona verde
Kupiec (uc)	2.13	0.145	Acceptat
Christoffersen (ind)	0.79	0.375	Acceptat
Combinat (cc)	2.91	0.233	Acceptat



Pasul 6: Backtesting rolling VaR \succ S&P 500



Pasul 7: Concluzii \succ Studiu S&P 500

Rezumatul metodologiei pas cu pas

1. **Date:** randamente log, statistici descriptive \succ cozi groase, asimetrie
2. **Test ARCH:** ARCH-LM + Ljung-Box pe r_t^2 \succ efecte ARCH semnificative
3. **Estimare:** 4 modele candidate (simetric/asimetric \times Normal/Student-t)
4. **Selectie:** AIC/BIC \succ **EGARCH(1,1)-t** câștigător
5. **Diagnostice:** reziduuri standardizate \succ model adekvat
6. **VaR:** rolling window + backtesting Kupiec/Christoffersen \succ model validat

Lecții cheie

- Distribuția Student-t este **esențială** pentru date financiare
- Leverage effect: modelele asimetrice **obligatorii** pentru acțiuni
- Backtesting sistematic: nu doar „arată bine”, ci **testat statistic**



Pasul 1: Datele și randamente zilnice Bitcoin

Descrierea datelor

- Sursă:** Yahoo Finance (BTC-USD), date zilnice 2018–2024
- Randamente log: media $\approx 0.05\%$, volatilitate $\approx 3.5\%$

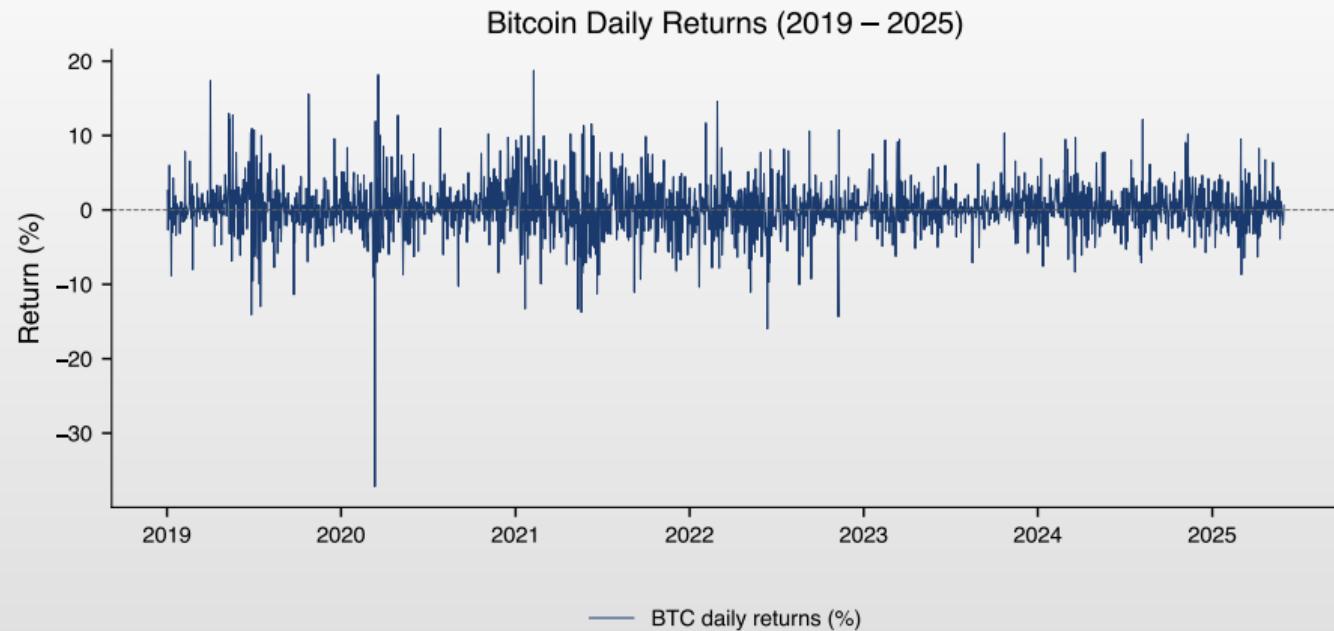
Statistici descriptive

Medie	Std. Dev.	Skewness	Kurtosis	Min	Max
0.05%	3.48%	-0.72	12.1	-46.5%	+22.5%

- Volatilitate $\sim 3 \times$ mai mare decât S&P 500
- Kurtosis extremă \succ riscul de pierderi mari



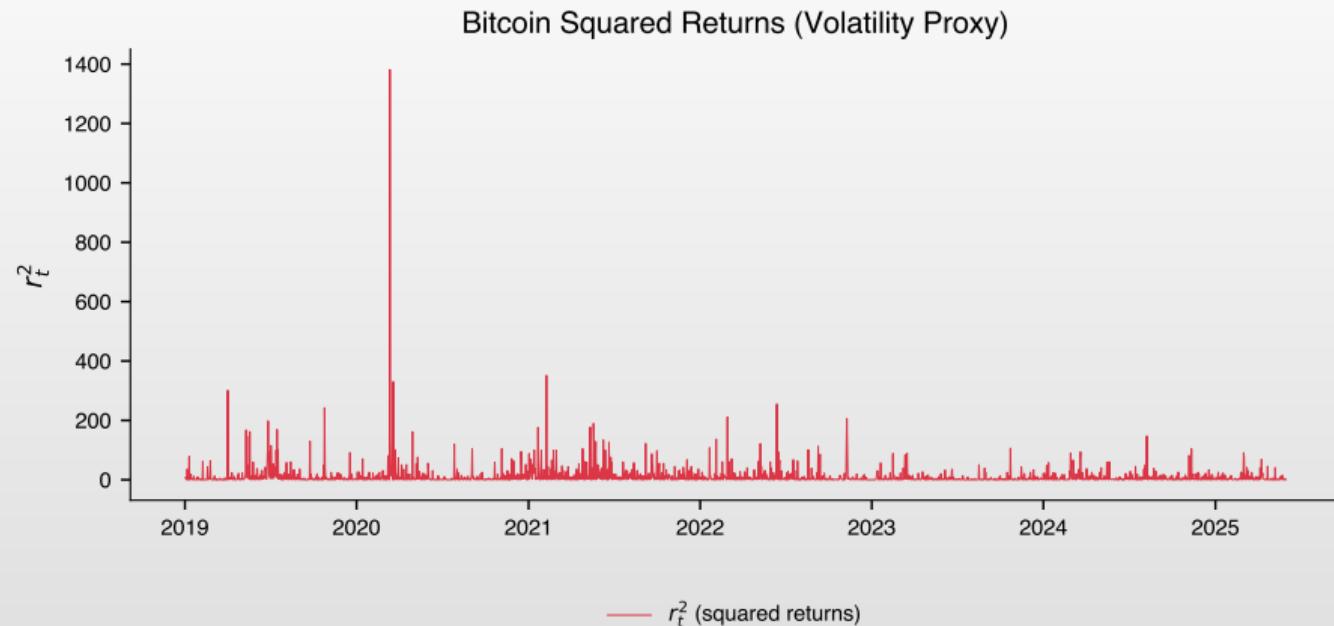
Pasul 1: Datele > randamente zilnice Bitcoin



Pasul 2: Testarea efectelor ARCH \succ Bitcoin



Pasul 2: Testarea efectelor ARCH \succ Bitcoin



Pasul 3–4: Estimare și selecție modele \succ Bitcoin

Parametri estimați

Model	ω	α	β	γ	$\alpha+\beta$	ν	AIC
GARCH-t	0.42	0.131	0.848	—	0.979	4.82	9284
EGARCH-t	0.08	0.184	0.976	-0.061	—	4.79	9276
GJR-t	0.40	0.088	0.854	0.078	0.976	4.85	9271

Interpretare

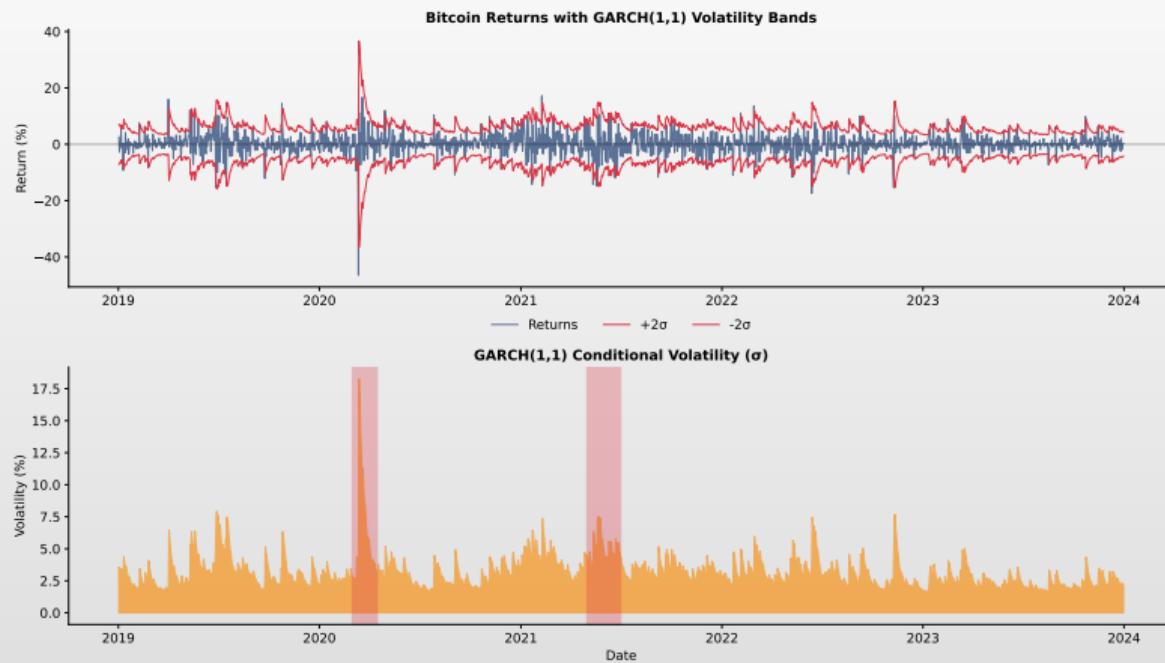
- GJR-GARCH-t câștigă** (cel mai mic AIC)
- $\nu \approx 4.8$: cozi **mult mai groase** decât S&P 500 ($\nu = 6.4$)
- $\alpha = 0.131$ (BTC) vs 0.088 (S&P) \succ Bitcoin reacționează mai rapid la news
- Leverage effect mai slab decât la acțiuni ($\gamma_{\text{BTC}} = 0.078$ vs 0.126)

Pasul 5: Volatilitatea condiționată \succ Bitcoin

Diagnostice GJR-GARCH(1,1)-t

- Ljung-Box pe z_t^2 : p-value = 0.41 \succ efecte ARCH eliminate
- Vârfuri volatilitate: martie 2020 (COVID), mai 2022 (Terra/Luna)
- Volatilitate zilnică: de la 1% (perioadele calme) la >15% (crize)

Pasul 5: Volatilitatea condiționată \succ Bitcoin



Q TSA_ch5_btc_garch

Pasul 6: VaR rolling window \succ Bitcoin

Rolling window GJR-GARCH-t (W=500 zile, VaR 1%)

```
W = 500; alpha = 0.01
VaR_btc = pd.Series(index=btc_returns.index[W:], dtype=float)
for t in range(W, len(btc_returns)):
    train = btc_returns.iloc[t-W:t]
    m = arch_model(train, vol='GARCH', p=1, o=1, q=1, dist='t')
    res = m.fit(disp='off', show_warning=False)
    fcast = res.forecast(horizon=1, reindex=False)
    sigma = np.sqrt(fcast.variance.values[-1, 0])
    nu = res.params['nu']
    VaR_btc.iloc[t-W] = -stats.t.ppf(alpha,nu)*np.sqrt((nu-2)/nu)*sigma
```

Caracteristici VaR rolling Bitcoin (2018–2024)

- VaR mediu: 9.34% (\approx EUR 93.400 / 1M EUR)
- VaR maxim: 37.54% \succ crash COVID martie 2020
- VaR minim: 2.90% \succ perioadă calmă
- Bitcoin: VaR rolling $\sim 4 \times$ mai mare decât S&P 500 la aceeași expunere

Pasul 1: Teste statistice (2421 zile out-of-sample)

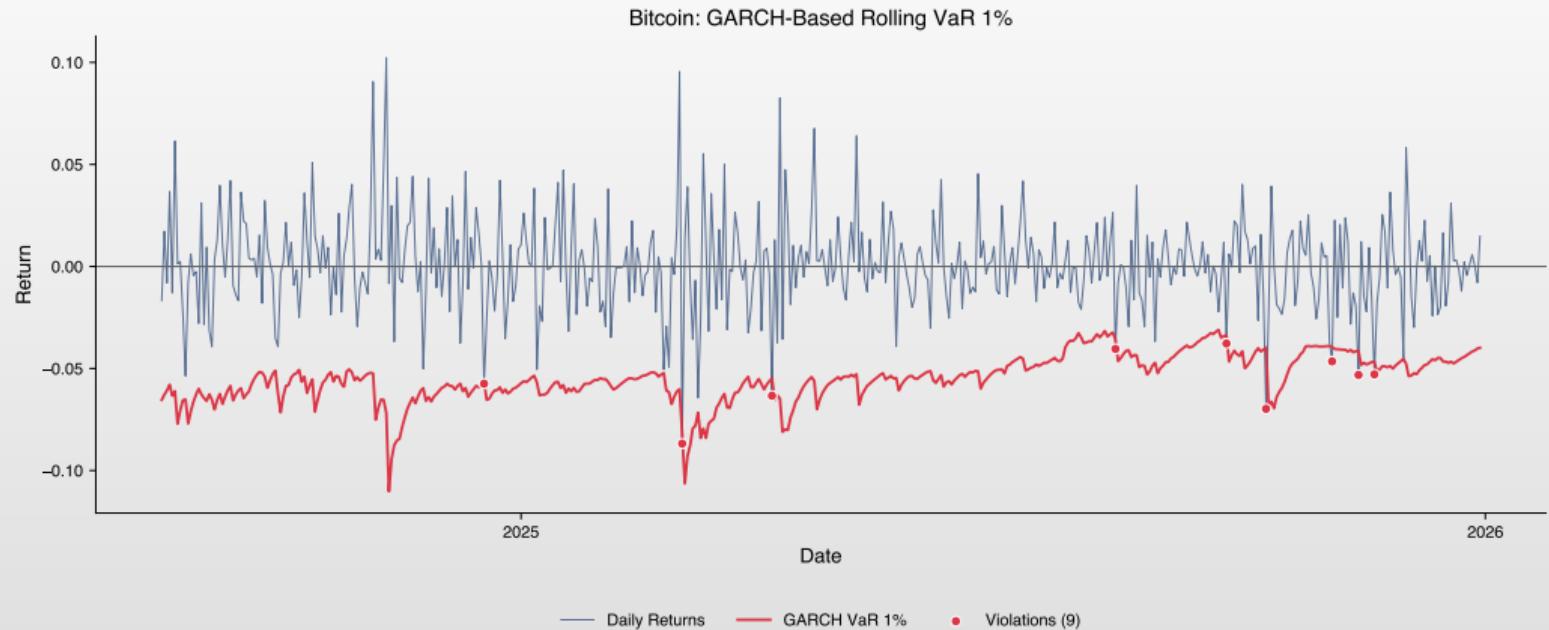
Test	Statistică	p-value	Decizia
Încălcări	28/2421 ($\hat{\beta} = 1.16\%$)	—	Zona verde
Kupiec (uc)	0.57	0.450	Acceptat
Christoffersen (ind)	0.94	0.333	Acceptat
Combinat (cc)	1.51	0.471	Acceptat

Interpretare

- Volatilitatea variază de la 3% la 38% \succ rolling window **esențial**
- Toate testele **acceptate**: model valid pentru managementul riscului



Pasul 6: Backtesting rolling VaR > Bitcoin



Comparație finală: S&P 500 vs Bitcoin

Rezumat comparativ

	S&P 500	Bitcoin
Volatilitate medie	1.2%	3.5%
Kurtosis	13.8	12.1
Student-t ν	6.42	4.82
Cel mai bun model	EGARCH(1,1)-t	GJR-GARCH(1,1)-t
Leverage effect	Puternic ($\gamma = -0.12$)	Moderat ($\gamma = 0.078$)
Half-life	~60 zile	~42 zile
Rolling VaR 1% mediu	2.53%	9.34%
Rolling VaR 1% maxim	22.02% (COVID)	37.54% (COVID)
Kupiec	Acceptat ($p=0.145$)	Acceptat ($p=0.450$)
Christoffersen (ind)	Acceptat ($p=0.375$)	Acceptat ($p=0.333$)

Concluzie generală

- Re-estimare GARCH la fiecare pas: Kupiec + Christoffersen **acceptate**
- Rolling window VaR: **obligatoriu** \succ VaR static complet inadecvat
- Student-t + model asimetric: **esențiale** pentru ambele piețe



Formule cheie

Modele de Volatilitate

- **ARCH(q):** $\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$
- **GARCH(1,1):** $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$
- **EGARCH:** $\ln(\sigma_t^2) = \omega + \alpha(|z_{t-1}| - \mathbb{E}[|z|]) + \gamma z_{t-1} + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2)$
- **GJR-GARCH:** $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 I_{t-1} + \beta \sigma_{t-1}^2$

Proprietăți și Măsuri

- **Var. necond.:** $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$ | **Half-life:** $HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha+\beta)}$ | **VaR:** $VaR_\alpha = z_\alpha \cdot \sigma_{T+1}$

Test ARCH-LM

- **Statistica:** $LM = T \cdot R^2 \sim \chi^2(q)$ unde R^2 provine din regresia $\hat{\varepsilon}_t^2$ pe lag-urile sale
- **Staționaritate:** $\alpha + \beta < 1$

Exercițiu AI: Gândire critică

Prompt de testat în ChatGPT / Claude / Copilot

"Descărcați randamentele zilnice S&P 500 cu yfinance. Testați efectele ARCH, ajustați un model GARCH și prognozați volatilitatea pe 20 de zile de tranzacționare. Vreau cod Python complet."

Exercițiu:

1. Rulați prompt-ul într-un LLM la alegere și analizați critic răspunsul.
2. Calculează randamentele logaritmice corect? Elimină media înainte de GARCH?
3. Cum testează efectele ARCH? Folosește testul LM al lui Engle?
4. Separă ecuația mediei de ecuația varianței?
5. Discută efectele asimetrice (GJR-GARCH, EGARCH)? Estimările VaR sunt calculate din distribuția condițională?

Atenție: Codul generat de AI poate rula fără erori și arăta profesional. *Asta nu înseamnă că e corect.*



Rezumat ➔ Capitolul 5: Modele de Volatilitate

Concepție Cheie

- **ARCH(q)**: varianța condiționată depinde de pătratele erorilor trecute (Nobel 2003)
- **GARCH(p,q)**: adaugă lag-uri ale varianței pentru persistență (GARCH(1,1) în 90% din cazuri)
- **EGARCH**: permite leverage effect, fără restricții de pozitivitate
- **GJR-GARCH/TGARCH**: captură asimetria cu variabile indicator

Aplicații

- Măsurarea și prognoza riscului (VaR, ES)
- Prețul derivatelor, hedging dinamic, managementul portofoliului

Sfat Practic

- Începe cu GARCH(1,1), verifică leverage effect, alege distribuția care minimizează AIC/BIC!
 - ▶ Student-t adesea superior distribuției normale



Întrebarea 1

Întrebare

Ce descrie cel mai bine fenomenul de *volatility clustering* în seriile financiare?

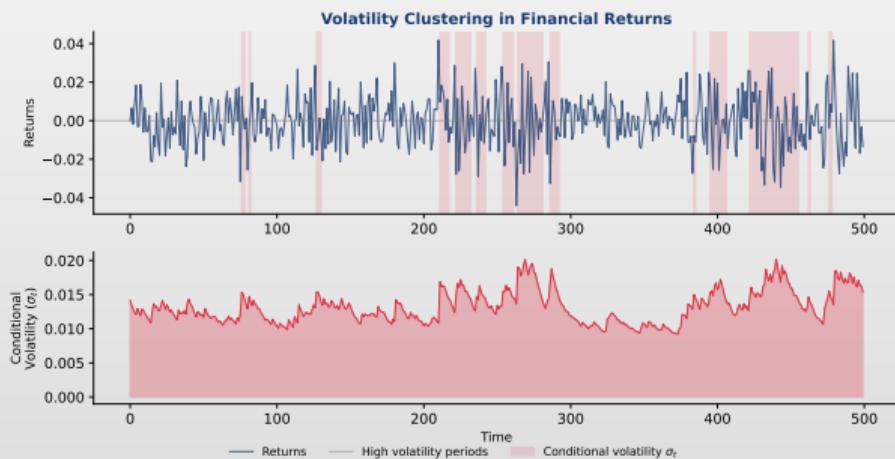
- (A) Randamentele financiare sunt distribuite normal și independente
- (B) Perioadele de volatilitate ridicată sunt urmate de perioade de volatilitate ridicată, și invers
- (C) Volatilitatea este constantă în timp (homoscedasticitate)
- (D) Corelația dintre randamente este întotdeauna pozitivă



Întrebarea 1: Răspuns

Răspuns Corect: (B) Perioadele de volatilitate ridicată sunt urmate de perioade similare

Volatility clustering este un fapt stilizat fundamental. Implică faptul că varianța condiționată este predictibilă, motivând modelele ARCH/GARCH.



Întrebarea 2

Întrebare

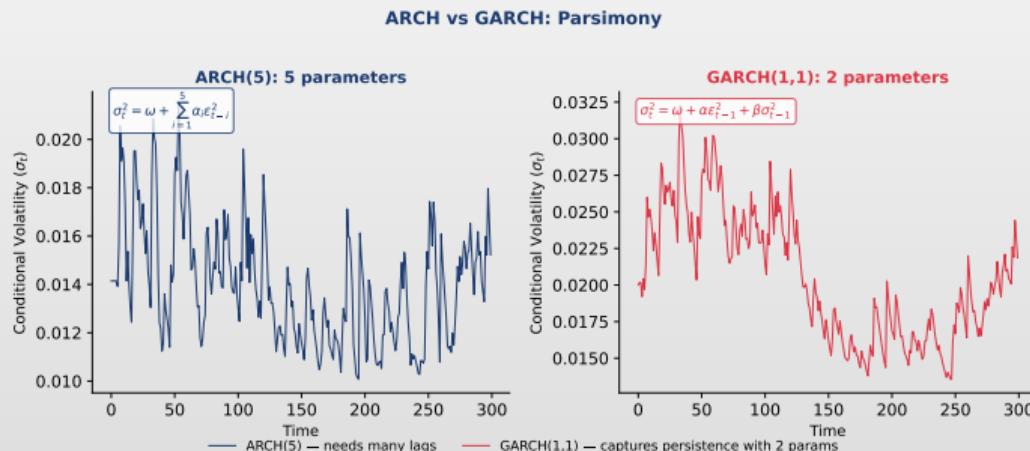
Care este diferența principală dintre un model ARCH(q) și un model GARCH(p,q)?

- (A) GARCH modelează media condiționată, ARCH modelează varianța
- (B) ARCH include lag-uri ale varianței condiționate, GARCH nu
- (C) GARCH adaugă lag-uri ale varianței condiționate (σ_{t-j}^2) pe lângă pătratele erorilor
- (D) ARCH este mai parsimonios decât GARCH

Întrebarea 2: Răspuns

Răspuns Corect: (C) GARCH adaugă lag-uri ale varianței condiționate

GARCH(1,1) captează aceeași persistență ca ARCH(q) cu doar 2 parametri în loc de q. În practică, GARCH(1,1) este suficient în 90% din cazuri.



Întrebarea 3

Întrebare

Ce este *leverage effect* și ce modele GARCH îl captează?

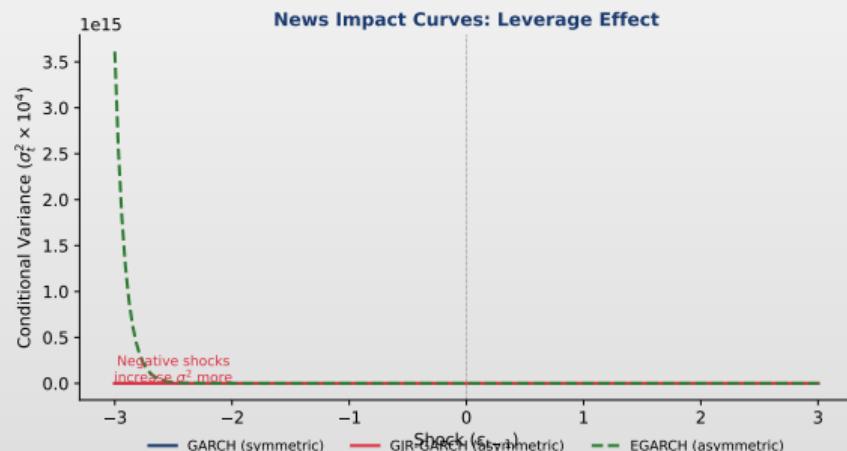
- (A) řocurile pozitive cresc volatilitatea mai mult; captat de GARCH standard
- (B) řocurile negative cresc volatilitatea mai mult; captat de EGARCH și GJR-GARCH
- (C) Volatilitatea este simetrică; captat de toate modelele GARCH
- (D) Efectul de levier financiar asupra prețului acțiunilor; captat de IGARCH



Întrebarea 3: Răspuns

Răspuns Corect: (B) řocurile negative cresc volatilitatea mai mult; EGARCH și GJR-GARCH

Scăderile de preț cresc volatilitatea **mai mult** decât creșterile de aceeași magnitudine. GARCH standard folosește ε_{t-1}^2 , pierzând informația de semn.



Întrebarea 4

Întrebare

Care este condiția de staționaritate pentru un model GARCH(1,1)?

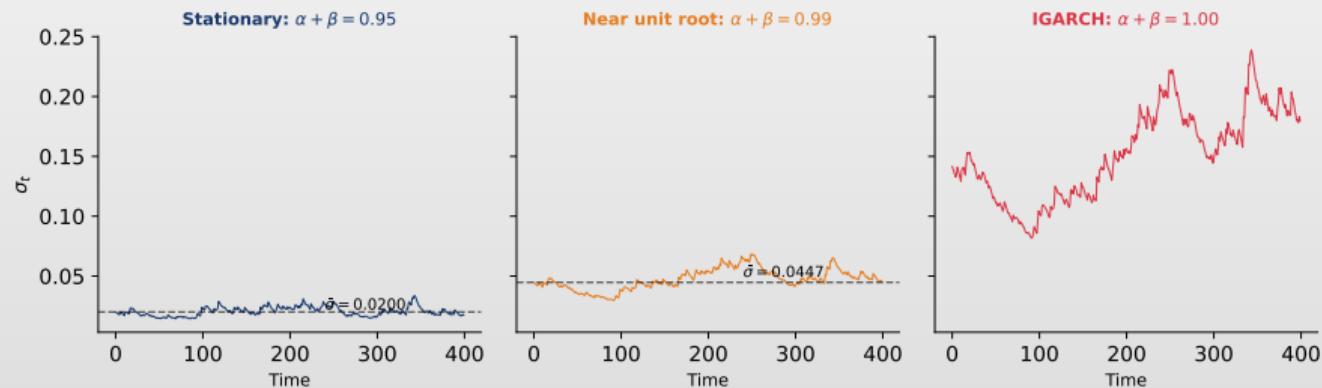
- (A) $\alpha + \beta = 1$
- (B) $\alpha > 0$ și $\beta > 0$
- (C) $\alpha + \beta < 1$, cu $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$
- (D) $\alpha \cdot \beta < 1$

Întrebarea 4: Răspuns

Răspuns Corect: (C) $\alpha + \beta < 1$, cu $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$

Asigură existența varianței necondiționate finite: $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$. Când $\alpha + \beta = 1$ (IGARCH), varianța este infinită.

GARCH(1,1) Stationarity: $\alpha + \beta < 1$



Întrebarea 5

Întrebare

Ce reprezintă *half-life* al volatilității într-un model GARCH(1,1)?

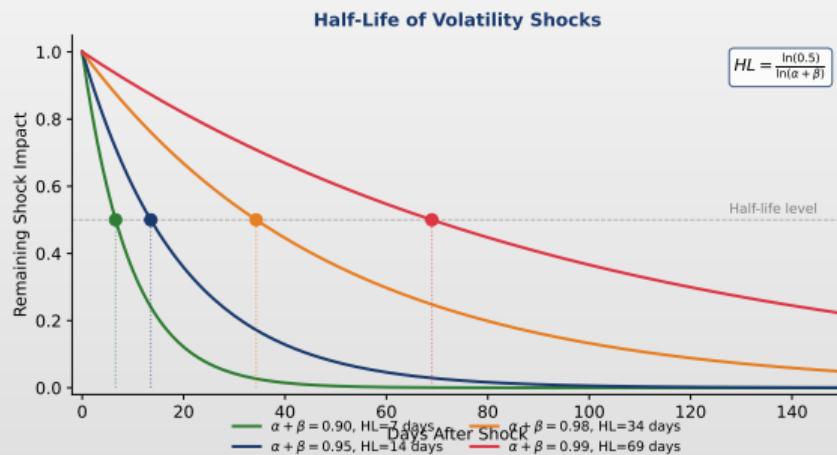
- (A) Timpul necesar ca prețul să revină la media sa
- (B) Numărul de perioade până când volatilitatea devine zero
- (C) Numărul de perioade necesare ca un soc de volatilitate să se reducă la jumătate
- (D) Durata medie a unui episod de volatilitate ridicată



Întrebarea 5: Răspuns

Răspuns Corect: (C) Numărul de perioade necesare ca un şoc să se reducă la jumătate

$HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha+\beta)}$. Exemplu: S&P 500 cu $\alpha + \beta = 0.988$ dă $HL \approx 58$ zile (şocurile persistă ~ 3 luni).



Bibliografie I

Lucrări fundamentale ARCH/GARCH

- Engle, R.F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation, *Econometrica*, 50(4), 987–1007.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 31(3), 307–327.
- Nelson, D.B. (1991). Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach, *Econometrica*, 59(2), 347–370.

Modele asimetrice și extensii

- Glosten, L.R., Jagannathan, R., & Runkle, D.E. (1993). On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks, *Journal of Finance*, 48(5), 1779–1801.
- Francq, C., & Zakoïan, J.-M. (2019). *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*, 2nd ed., Wiley.



Bibliografie II

Manuale și aplicații financiare

- Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*, 3rd ed., Wiley.
- Franke, J., Härdle, W.K., & Hafner, C.M. (2019). *Statistics of Financial Markets*, 4th ed., Springer.
- McNeil, A.J., Frey, R., & Embrechts, P. (2015). *Quantitative Risk Management*, 2nd ed., Princeton University Press.

Resurse online și cod

- Quantlet:** <https://quantlet.com> ➔ Depozit de cod pentru statistică
- Quantinar:** <https://quantinar.com> ➔ Platformă de învățare metode cantitative
- GitHub TSA:** <https://github.com/QuantLet/TSA> ➔ Cod Python pentru acest curs



Vă Mulțumim!

Întrebări?

Materialele cursului sunt disponibile la: <https://danpele.github.io/Time-Series-Analysis/>

