



Analiza și Prognoza seriilor de timp

Seminar 6: Modele VAR și cauzalitate Granger



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

Cuprins Seminar

Test de Recapitulare

Întrebări Adevărat/Fals

Probleme Practice

Exemple Rezolvate

Analiză pe Date Reale

Subiecte de Discuție

Exerciții pentru Studiu Individual

Test 1: Definiția VAR

Întrebare

Într-un model VAR(2) cu 3 variabile, câte matrice de coeficienți A_i există?

Variante de răspuns

(A) 2 indent (B) 3 indent (C) 6 indent (D) 9

Răspunsul pe slide-ul următor...

Test 1: Răspuns

Răspuns: A – 2 matrice de coeficienți

Modelul VAR(p): $Y_t = c + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \dots + A_p Y_{t-p} + \epsilon_t$

VAR(2) cu $K = 3$:

$$\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ Y_{3t} \end{pmatrix} = c + \underbrace{A_1}_{3 \times 3} \begin{pmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \\ Y_{3,t-1} \end{pmatrix} + \underbrace{A_2}_{3 \times 3} \begin{pmatrix} Y_{1,t-2} \\ Y_{2,t-2} \\ Y_{3,t-2} \end{pmatrix} + \epsilon_t$$

Cheie: p = numărul de lag-uri = numărul de matrice

Test 2: Numărul de Parametri

Întrebare

Un VAR(2) cu $K = 3$ variabile (incluzând constantele) are câți parametri de estimat per ecuație?

Variante de răspuns

(A) 3 indent (B) 6 indent (C) 7 indent (D) 9

Răspunsul pe slide-ul următor...

Test 2: Răspuns

Răspuns: C – 7 parametri per ecuație

VAR(p) Parameter Count: The Curse of Dimensionality

Parameters per equation: $1 + K \times p$ Total parameters: $K(1 + Kp) + K(K + 1)/2$

(coefficients + covariance matrix)

Model	Coefficients	Total
$K=2, p=1$	$2(1+2 \times 1) = 6$	$+ 3 = 9$
$K=3, p=2$	$3(1+3 \times 2) = 21$	$+ 6 = 27$
$K=5, p=4$	$5(1+5 \times 4) = 105$	$+ 15 = 120$
$K=10, p=4$	$10(1+10 \times 4) = 410$	$+ 55 = 465$

Warning: Parameters grow as $K^2 \times p$ — need lots of data!**Formula:** Per ecuație $= 1 + K \times p = 1 + 3 \times 2 = 7$. **Total:** $K(1 + Kp) = 3(1 + 6) = 21$ parametri

Test 3: Cauzalitate Granger

Întrebare

“ X cauzează Granger Y ” înseamnă:

Variante de răspuns

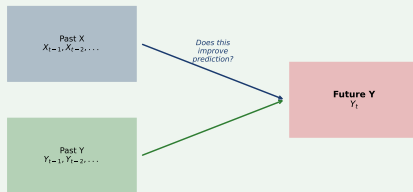
- (A) X este cauza economică a lui Y
- (B) Trecutul lui X ajută la predicția lui Y
- (C) X și Y sunt corelate contemporan
- (D) X crește întotdeauna când Y crește

Răspunsul pe slide-ul următor...

Test 3: Răspuns

Răspuns: B – Trecutul lui X ajută la predicția lui Y

Granger Causality: Predictive, Not Causal!



"X Granger-causes Y" means: Past X helps predict future Y, beyond what past Y alone provides. Does NOT imply true causation!

Cheie: Relație predictivă, NU cauzalitate adevărată!

Test 4: Testul de Cauzalitate Granger

Întrebare

Pentru a testa dacă Y_2 cauzează Granger Y_1 într-un VAR(p), testăm:

Variante de răspuns

- (A) Toți coeficienții din ecuația lui Y_1 sunt egali cu zero
- (B) Coeficienții pe Y_2 întârziat din ecuația lui Y_1 sunt egali cu zero
- (C) Coeficienții pe Y_1 întârziat din ecuația lui Y_2 sunt egali cu zero
- (D) Covarianța erorilor este egală cu zero

Răspunsul pe slide-ul următor...

Test 4: Răspuns

Răspuns: B – Coeficienții pe Y_2 întârziat din ecuația lui $Y_1 = 0$

Ipoteza nulă: $H_0 : a_{12}^{(1)} = a_{12}^{(2)} = \dots = a_{12}^{(p)} = 0$

Statistica de test: Test Wald sau F cu p restricții

Interpretare:

- ☐ Respingem H_0 : Y_2 cauzează Granger Y_1
- ☐ Nu respingem: Fără evidență de relație predictivă

Notă: Testați $Y_1 \rightarrow Y_2$ separat (coeficienți diferiți în ecuația lui Y_2)

Test 5: Stabilitatea VAR

Întrebare

Un model VAR(1) este stabil (staționar) dacă:

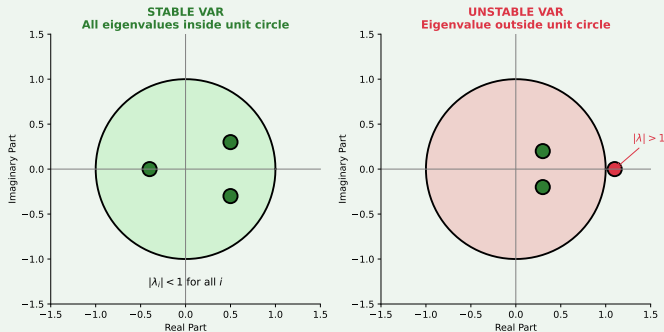
Variante de răspuns

- (A) Toate elementele diagonale ale lui A_1 sunt mai mici decât 1
- (B) Determinantul lui A_1 este mai mic decât 1
- (C) Toate valorile proprii ale lui A_1 sunt mai mici decât 1 în valoare absolută
- (D) Urma lui A_1 este egală cu zero

Răspunsul pe slide-ul următor...

Test 5: Răspuns

Răspuns: C – Toate valorile proprii ale lui A_1 în interiorul cercului unitate



Stabil: Toate $|\lambda_i| < 1$ (în interiorul cercului unitate) \Rightarrow șocurile dispar în timp

Test 6: Funcții de Răspuns la Impuls

Întrebare

O funcție de răspuns la impuls arată:

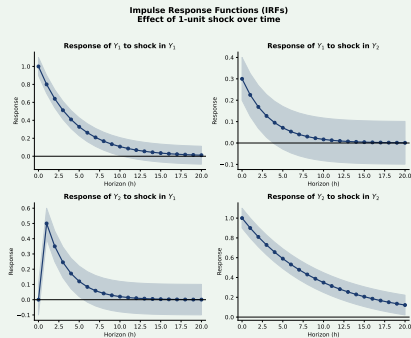
Variante de răspuns

- (A) Corelația între două variabile
- (B) Efectul unui șoc la o variabilă asupra tuturor variabilelor în timp
- (C) Acuratețea prognozei modelului
- (D) Valorile-p ale testelor de coeficienți

Răspunsul pe slide-ul următor...

Test 6: Răspuns

Răspuns: B – Efectul șocului asupra tuturor variabilelor în timp



$IRF_{ij}(h)$: Răspunsul variabilei i la orizontul h la șocul în variabila j

Test 7: Selectarea Ordinului Lag

Întrebare

Care criteriu selectează de obicei cel mai simplu model VAR?

Variante de răspuns

- (A) AIC (Criteriul Informațional Akaike)
- (B) BIC (Criteriul Informațional Bayesian)
- (C) FPE (Eroarea Finală de Predicție)
- (D) R^2 ajustat

Răspunsul pe slide-ul următor...

Test 7: Răspuns

Răspuns: B – BIC (Criteriul Informațional Bayesian)

Comparația penalizărilor:

- ☐ AIC: $-2 \ln L + 2k$
- ☐ BIC: $-2 \ln L + k \ln n$

L = maximul funcției de verosimilitate, k = nr. parametri, n = dimensiunea eșantionului

Deoarece $\ln n > 2$ pentru $n > 8$, BIC penalizează complexitatea mai puternic

Îndrumări practice:

- ☐ Prognoză: AIC poate performa mai bine
- ☐ Inferență/parsimonie: BIC preferat
- ☐ Eșantioane mari: BIC consistent, AIC tinde să supraajusteze

Test 8: interpretarea Cauzalității Granger

Întrebare

“ X cauzează Granger Y ” înseamnă:

Variante de răspuns

- (A) X este cauza adevărată a lui Y
- (B) Valorile trecute ale lui X ajută la predicția lui Y dincolo de trecutul propriu al lui Y
- (C) X și Y sunt corelate
- (D) Y depinde doar de X

Răspunsul pe slide-ul următor...

Test 8: Răspuns

Răspuns: B

Cauzalitatea Granger se referă la conținutul **predictiv**, nu la cauzalitatea adevărată. X cauzează Granger Y dacă termenii lui X întârziați sunt semnificativi conjunct în ecuația lui Y , după controlul pentru Y întârziat.

Test 9: Descompunerea varianței Erorii de Prognoză

Întrebare

FEVD (Descompunerea varianței Erorii de Prognoză) ne spune:

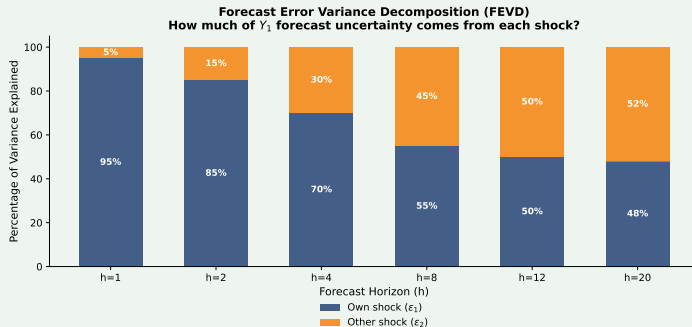
Variante de răspuns

- (A) Corelația între variabile
- (B) Ce proporție din varianța erorii de prognoză vine din fiecare șoc
- (C) Orizontul optim de prognoză
- (D) Ce variabile să includem în model

Răspunsul pe slide-ul următor...

Test 9: Răspuns

Răspuns: B – Proporția varianței erorii de prognoză din fiecare șoc



FEVD: Arată cât din incertitudinea prognozei vine din fiecare șoc la diferite orizonturi

Test 10: VAR Structural vs Forma Redusă

Întrebare

Diferența dintre VAR structural (SVAR) și VAR forma redusă este:

Variante de răspuns

- (A) SVAR are mai multe variabile
- (B) SVAR permite efecte contemporane între variabile
- (C) SVAR folosește metode de estimare diferite
- (D) Nu există diferență

Răspunsul pe slide-ul următor...

Test 10: Răspuns

Răspuns: B

VAR forma redusă: șocurile sunt corelate, fără efecte contemporane în ecuații. SVAR: impune restricții de identificare pentru a recupera șocuri structurale cu interpretare economică (de ex., șoc de politică monetară).

Test 11: Descompunerea Cholesky

Întrebare

Ordonarea Cholesky în analiza IRF presupune:

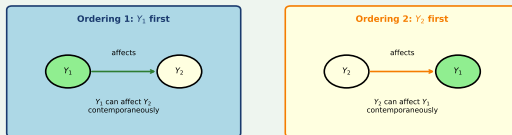
Variante de răspuns

- (A) Toate variabilele sunt la fel de importante
- (B) Variabilele ordonate primele afectează contemporan variabilele de mai târziu, nu invers
- (C) Șocurile sunt necorelate
- (D) Nu sunt necesare restricții

Răspunsul pe slide-ul următor...

Test 11: Răspuns

Răspuns: B – Variabilele ordonate primele afectează contemporan pe cele de mai târziu

Cholesky Ordering: Order Matters!**Key Points:**

- Different orderings give DIFFERENT IRFs!
- Ordering should be based on economic theory
- "Fast-moving" variables should come first

Cholesky: Structură recursivă. Ordonarea contează – justificați prin teoria economică (cel mai exogen primul)!

Test 12: Diagnosticale Reziduurilor VAR

Întrebare

Într-un VAR bine specificat, reziduurile ar trebui să fie:

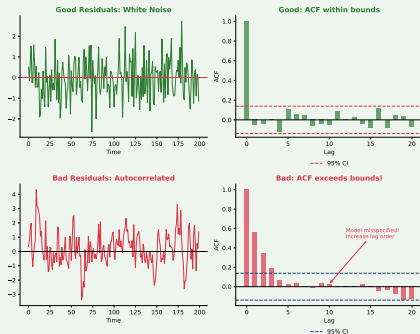
Variante de răspuns

- (A) Autocorelate dar homoscedastice
- (B) Zgomot alb (fără autocorelație)
- (C) Doar distribuite normal
- (D) Corelate între ecuații

Răspunsul pe slide-ul următor...

Test 12: Răspuns

Răspuns: B – Zgomot alb (fără autocorelație)



Diagnostic: Reziduurile ar trebui să fie zgomot alb. Folosiți testul Portmanteau/LM. Corelația între ecuații este permisă (Σ_u).

Test 13: Cointegrare și VAR

Întrebare

Dacă variabilele sunt $I(1)$ și cointegrate, ar trebui să folosiți:

Variante de răspuns

- (A) VAR în niveluri
- (B) VAR în prime diferențe
- (C) Model cu Corecție a Erorilor Vectoriale (VECM)
- (D) Modele ARIMA univariate

Răspunsul pe slide-ul următor...

Test 13: Răspuns

Răspuns: C

Cu cointegrare, VAR în diferențe pierde informația pe termen lung, în timp ce VAR în niveluri poate fi ineficient. VECM încorporează atât dinamica pe termen scurt cât și relațiile de echilibru pe termen lung prin termenul de corecție a erorilor.

Test 14: Cauzalitate Instantanee

Întrebare

Cauzalitatea instantanee diferă de cauzalitatea Granger deoarece testează:

Variante de răspuns

- (A) Doar relații întârziate
- (B) Corelația contemporană a reziduurilor
- (C) Relații pe termen lung
- (D) Stabilitatea modelului

Răspunsul pe slide-ul următor...

Test 14: Răspuns

Răspuns: B

Cauzalitatea instantanee testează dacă șocurile la X și Y sunt corelate în aceeași perioadă (corelația reziduurilor VAR). Cauzalitatea Granger testează dacă valorile *întârziate* ajută la predicție.

Întrebări Adevărat/Fals

Determinați dacă fiecare afirmație este Adevărată sau Falsă:

1. Modelele VAR tratează toate variabilele ca endogene.
2. Cauzalitatea Granger dovedește cauzalitatea economică adevărată.
3. Un VAR stabil are întotdeauna valorile proprii în interiorul cercului unitate.
4. Rezultatele FEVD depind de ordonarea variabilelor.
5. VAR poate fi estimat prin OLS ecuație cu ecuație.
6. Răspunsurile la impuls dispar în cele din urmă într-un VAR stabil.

Răspunsurile pe slide-ul următor...

Adevărat/Fals: Soluții

1. Modelele VAR tratează toate variabilele ca endogene.

Fiecare variabilă este regresată pe lag-urile tuturor variabilelor, inclusiv pe ea însăși.

ADEVĂRAT

2. Cauzalitatea Granger dovedește cauzalitatea economică adevărată.

Arată doar conținut predictiv, nu cauzalitate structurală.

FALS

3. Un VAR stabil are întotdeauna valorile proprii în interiorul cercului unitate.

Condiția de stabilitate: toate valorile proprii ale matricei companion satisfac $|\lambda_i| < 1$.

ADEVĂRAT

4. Rezultatele FEVD depind de ordonarea variabilelor.

Sub identificarea Cholesky, ordonări diferite dau rezultate diferite.

ADEVĂRAT

5. VAR poate fi estimat prin OLS ecuație cu ecuație.

Cu aceiași regresori în fiecare ecuație, OLS = GLS = ML (sub normalitate).

ADEVĂRAT

6. Răspunsurile la impuls dispar în cele din urmă într-un VAR stabil.

Stabilitatea asigură că șocurile au efecte tranzitorii; $IRF \rightarrow 0$ când $h \rightarrow \infty$.

ADEVĂRAT

Problema 1: Scrierea Ecuțiilor VAR

Exercițiu

Scrieți cele două ecuații pentru un model VAR(1) bivariat cu variabilele Y_t (creșterea PIB) și X_t (inflația).

Răspunsul pe slide-ul următor...

Problema 1: Soluție

Soluție

$$Y_t = c_1 + a_{11}Y_{t-1} + a_{12}X_{t-1} + \varepsilon_{1t}$$

$$X_t = c_2 + a_{21}Y_{t-1} + a_{22}X_{t-1} + \varepsilon_{2t}$$

Interpretare:

- a_{12} : Efectul inflației trecute asupra creșterii PIB curente
- a_{21} : Efectul creșterii PIB trecute asupra inflației curente

Problema 2: Numărarea Parametrilor

Exercițiu

Câți parametri totali trebuie estimați într-un VAR(3) cu $K = 4$ variabile (incluzând constantele)?

Răspunsul pe slide-ul următor...

Problema 2: Soluție

Soluție

Per ecuație: $1 + K \times p = 1 + 4 \times 3 = 13$ parametri

Total pentru $K = 4$ ecuații: $4 \times 13 = 52$ parametri

Plus matricea de covarianță Σ : $K(K + 1)/2 = 4 \times 5/2 = 10$ elemente unice

Total general: 62 parametri

Acesta este motivul pentru care VAR-urile pot fi "supraparametrizate" cu date limitate!

Problema 3: interpretarea Cauzalității Granger

Exercițiu

Un test de cauzalitate Granger dă:

- ▣ H_0 : Banii nu cauzează Granger PIB. valoare-p = 0.02
- ▣ H_0 : PIB nu cauzează Granger Banii. valoare-p = 0.35

Interpretați aceste rezultate.

Răspunsul pe slide-ul următor...

Problema 3: Soluție

Soluție

- ▣ **Respingem H_0 la 5%: Banii cauzează Granger PIB**
- ▣ **Nu respingem H_0 : PIB nu cauzează Granger Banii**

Concluzie: Cauzalitate unidirecțională: Bani \rightarrow PIB

Interpretare: Masa monetară trecută ajută la predicția creșterii PIB. Aceasta este consistentă cu punctele de vedere monetariste, dar amintiți-vă: cauzalitate Granger \neq cauzalitate structurală!

Problema 4: Verificarea Stabilității

Exercițiu

Pentru VAR(1) cu $A_1 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$, verificați stabilitatea.

Răspunsul pe slide-ul următor...

Problema 4: Soluție

Soluție

Găsiți valorile proprii: $\det(A_1 - \lambda I) = 0$

$$(0.7 - \lambda)(0.5 - \lambda) - (0.2)(0.1) = 0$$

$$\lambda^2 - 1.2\lambda + 0.33 = 0$$

$$\lambda = \frac{1.2 \pm \sqrt{1.44 - 1.32}}{2} = \frac{1.2 \pm 0.346}{2}$$

$$\lambda_1 = 0.773, \quad \lambda_2 = 0.427$$

Ambele $|\lambda_i| < 1 \Rightarrow$ **Stabil!**

Problema 5: Calculul IRF

Exercițiu

Pentru VAR(1) cu $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.6 \end{pmatrix}$, calculați Φ_2 (răspunsul la $h = 2$).

Răspunsul pe slide-ul următor...

Problema 5: Soluție

Soluție

$$\begin{aligned}\Phi_2 = A^2 &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.25 + 0 & 0.10 + 0.12 \\ 0 + 0 & 0 + 0.36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.22 \\ 0 & 0.36 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Interpretare: Un șoc unitar la Y_2 la t crește Y_1 cu 0.22 la $t + 2$.

Exemplu: Randamente de Acțiuni și Volum de Tranzacționare

Scenariu

Date zilnice despre randamentele acțiunilor (R_t) și volumul de tranzacționare (V_t). Testați cauzalitatea Granger în ambele direcții.

Constatări Tipice în Literatura Financiară

- Randamentele adesea cauzează Granger volumul (modificările de preț declanșează tranzacționare)
- Volumul uneori cauzează Granger randamentele (volumul ca indicator anticipator)
- Rezultate: Adesea cauzalitate **bidirecțională** $R \leftrightarrow V$

Problemă Practică

Randamentele acțiunilor sunt de obicei staționare, dar volumul poate necesita transformare (log sau diferențiere).

Exemplu: Rate de Dobândă și Inflație

Contextul Reguli Taylor

Băncile centrale stabilesc ratele de dobândă (i_t) ca răspuns la inflație (π_t):

$$i_t = r^* + \pi^* + 1.5(\pi_t - \pi^*) + 0.5(y_t - y^*)$$

Întrebări de Analiză VAR

- Inflația cauzează Granger ratele de dobândă? (Reacția băncii centrale)
- Ratele de dobândă cauzează Granger inflația? (Transmisia politicii monetare)

Rezultate Așteptate

Cauzalitate bidirecțională: $\pi \rightarrow i$ rapid (reacția politicii), $i \rightarrow \pi$ întârziat (efectul politicii)

Analiza VAR în Python: Funcții Cheie

Biblioteci Esențiale

```
from statsmodels.tsa.api import VAR
from statsmodels.tsa.stattools import grangercausalitytests
```

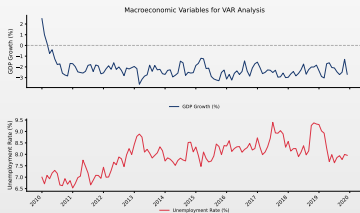
flux de lucru

1. Creați DataFrame: `data = pd.DataFrame({'pib': ..., 'somaj': ...})`
2. Ajustați VAR: `model = VAR(data); results = model.fit(maxlags=8, ic='aic')`
3. Obțineți IRF: `irf = results.irf(periods=20)`
4. Obțineți FEVD: `fevd = results.fevd(periods=20)`
5. Teste Granger: `grangercausalitytests(data[['y', 'x']], maxlag=4)`

Notă

Exemple complete de lucru sunt furnizate în notebook-urile Jupyter.

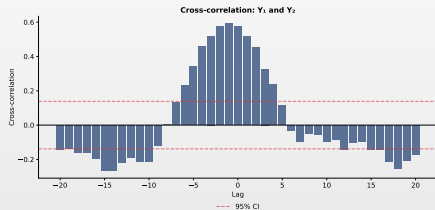
Studiu de Caz: PIB și Șomaj



Observații

Sus: Rata de creștere a PIB Real SUA (trimestrial). **Jos:** Rata șomajului SUA. Relație negativă clară (Legea lui Okun). Modelul VAR poate captura interacțiunile dinamice dintre aceste variabile.

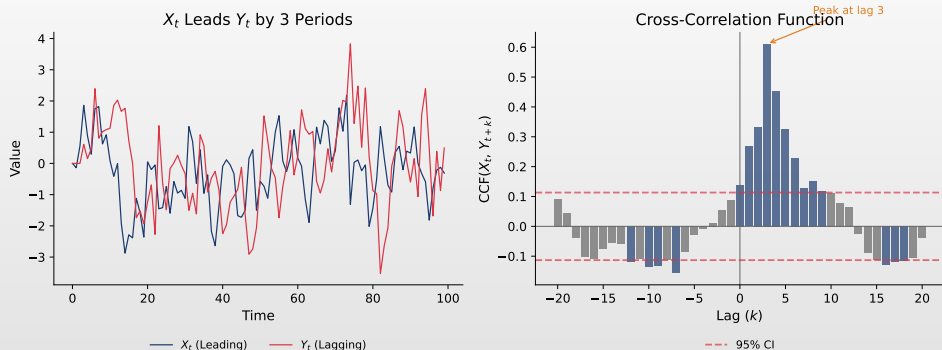
Analiza Corelației Încrucișate



Observații

Corelația încrucișată măsoară relațiile de anticipare-întârziere. Corelație negativă la lag 0: relație inversă contemporană. Model asimetric sugerează că șomajul răspunde la PIB cu întârziere. Ajută la informarea selectării ordinului lag VAR.

Vizual: Funcția de Corelație Încrucișată



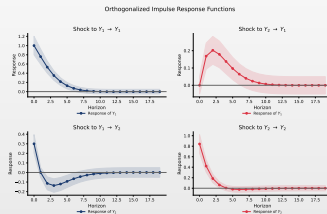
CCF măsoară corelația dintre două serii la lag-uri diferite, relevând relații de anticipare-întârziere.

Rezultate Estimare VAR

Model: VAR(2) pentru Creșterea PIB și Șomaj

Ecuatie	Variabilă	Coef.	Eroare Std.	t-stat
ΔPIB_t	ΔPIB_{t-1}	0.312	0.087	3.59
	ΔPIB_{t-2}	0.145	0.082	1.77
	U_{t-1}	-0.421	0.156	-2.70
	U_{t-2}	0.198	0.148	1.34
U_t	ΔPIB_{t-1}	-0.087	0.032	-2.72
	ΔPIB_{t-2}	-0.045	0.030	-1.50
	U_{t-1}	1.456	0.058	25.1
	U_{t-2}	-0.521	0.055	-9.47

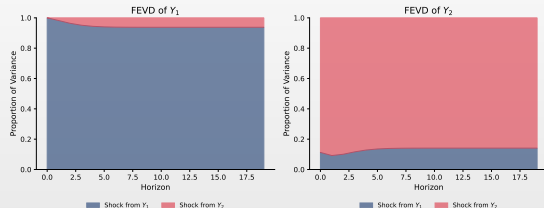
Funcții de Răspuns la Impuls



Observații

- ▣ IRF arată răspunsul dinamic la șocuri de o unitate
- ▣ Șocul PIB: efect pozitiv temporar asupra PIB, negativ asupra șomajului
- ▣ Șocul șomajului: efect negativ asupra PIB, persistent asupra șomajului
- ▣ Benzile de încredere de 95% arată incertitudinea în răspunsuri

Descompunerea varianței Erorii de Prognoză



Observații

- FEVD arată proporția varianței explicată de fiecare șoc
- Varianța PIB: explicată în mare parte de șocurile proprii, parțial de șomaj
- Varianța șomajului: foarte persistentă (șocurile proprii dominante)
- Oferă perspectivă asupra importanței relative a diferitelor șocuri

Discuție: Cauzalitate Granger vs Cauzalitate Adevărată

Întrebare Cheie

Dacă X cauzează Granger Y , înseamnă aceasta că X cauzează de fapt Y ? **NU!**

De ce Poate Eșua Cauzalitatea Granger

- **Omiterea variabilelor:** Z ar putea cauza atât X cât și Y (de ex., vremea \rightarrow înghețată & înecuri)
- **Efecte de anticipare:** Piețele anticipează evenimente viitoare (prețuri acțiuni \rightarrow câștiguri)
- **Probleme de agregare:** Momentul colectării datelor contează

Concluzie

Cauzalitatea Granger se referă la **predicție**, nu la **mecanism**. Pentru cauzalitate structurală, este nevoie de teorie + strategie de identificare.

Discuție: Ordonarea Variabilelor în IRF

Întrebare Cheie

De ce contează ordonarea variabilelor pentru IRF ortogonalizate?

Descompunerea Cholesky Presupune

- Prima variabilă: Afectează toate celelalte contemporan
- A doua variabilă: Afectată de prima, afectează restul
- Ultima variabilă: Afectată de toate, nu afectează niciuna contemporan

Exemplu: Ordonarea VAR pentru Politică Monetară

1. Prețuri petrol (exogen) → 2. PIB (lent) → 3. Inflație → 4. Rate dobândă (rapid)

Regulă

Ordonăți de la “cel mai exogen” la “cel mai endogen” — justificați prin teoria economică!

Exerciții pentru Acasă

1. **Teoretic:** Arătați că un VAR(1) poate fi scris ca MA(∞): $Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} A^i \epsilon_{t-i}$ când este stabil.
2. **Calcul:** Pentru VAR(1) cu $A = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$:
 - ▶ Verificați stabilitatea; Calculați IRF pentru $h = 0, 1, 2, 3$
 - ▶ Reprezentați grafic răspunsul lui Y_1 la un șoc în Y_2
3. **Aplicat:** Descărcați date despre creșterea PIB SUA și șomaj:
 - ▶ Testați staționaritatea; Estimați VAR (selectați lag-ul optim)
 - ▶ Testați cauzalitatea Granger; Calculați și interpretați IRF
4. **Gândire Critică:** De ce ar putea prețurile acțiunilor să “cauzeze Granger” PIB-ul chiar dacă PIB-ul este determinat de factori reali?

Indicii pentru Soluții

Indicii

1. Folosiți substituția recursivă: $Y_t = AY_{t-1} + \varepsilon_t = A(AY_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \dots$
2. Valorile proprii ale lui $\begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$:
 - ▶ Ecuația caracteristică: $\lambda^2 - 1.2\lambda + 0.35 = 0$
 - ▶ $\lambda_1 \approx 0.85$, $\lambda_2 \approx 0.41$ (ambele < 1 , stabil)
3. Pentru PIB/Șomaj:
 - ▶ Creșterea PIB este de obicei $I(0)$, șomajul poate fi $I(1)$
 - ▶ Folosiți modificările ratei șomajului dacă e necesar
 - ▶ Așteptați creștere PIB \rightarrow șomaj (Legea lui Okun)
4. Prețurile acțiunilor anticipează condițiile economice viitoare—ele reflectă așteptările despre PIB viitor, deci “anticipează” PIB-ul în date chiar dacă cauzalitatea merge în direcția opusă.

Concluzii cheie din Acest Seminar

Puncte Principale

1. Modelele VAR captează **interdependențele** între serii de timp multiple
2. Numărul de parametri crește rapid: $K^2p + K$ per sistem
3. **Cauzalitatea Granger** testează conținutul predictiv, nu cauzalitatea adevărată
4. **IRF** arată propagarea dinamică a șocurilor; ordonarea contează

Puncte Practice

- Verificați întotdeauna staționaritatea înainte de a estima VAR
- Folosiți criterii informaționale (AIC/BIC) pentru selectarea lag-ului
- Raportați testele Granger în ambele direcții
- Justificați ordonarea variabilelor prin teoria economică

Amintiți-vă

Cauzalitatea Granger se referă la **predicție**, nu la **mecanism**!

Bibliografie I

Manuale fundamentale

- ▣ Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*, 3rd ed., OTexts.
- ▣ Shumway, R.H., & Stoffer, D.S. (2017). *Time Series Analysis and Its Applications*, 4th ed., Springer.
- ▣ Brockwell, P.J., & Davis, R.A. (2016). *Introduction to Time Series and Forecasting*, 3rd ed., Springer.

Serii de timp financiare

- ▣ Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*, 3rd ed., Wiley.
- ▣ Franke, J., Härdle, W.K., & Hafner, C.M. (2019). *Statistics of Financial Markets*, 4th ed., Springer.

Bibliografie II

Abordari moderne si Machine Learning

- ▣ Nielsen, A. (2019). *Practical Time Series Analysis*, O'Reilly Media.
- ▣ Petropoulos, F., et al. (2022). *Forecasting: Theory and Practice*, International Journal of Forecasting.
- ▣ Makridakis, S., Spiliotis, E., & Assimakopoulos, V. (2020). The M4 Competition, International Journal of Forecasting.

Resurse online si cod

- ▣ **Quantlet**: <https://quantlet.com> — Repository de cod pentru statistica
- ▣ **Quantinar**: <https://quantinar.com> — Platforma de invatare metode cantitative
- ▣ **GitHub TSA**: <https://github.com/QuantLet/TSA> — Cod Python pentru acest seminar