



## Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 5: Modele ARCH/GARCH pentru Volatilitate



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din Bucureşti

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

## Cuprins

### Fundamente

- Motivație
- Introducere în Modelarea Volatilității
- Modelul ARCH
- Modelul GARCH
- Modele GARCH Asimetrice
- Selectarea și Diagnosticarea modelelor

### Aplicații

- Prognoza volatilității
- Implementare în Python
- Studiu de Caz: S&P 500
- Studiu de Caz: Bitcoin
- Rezumat și Quiz



## Obiective de învățare

La finalul acestui capitol, veți fi capabili să:

1. Înțelegeți **volatility clustering** și faptele stilizate ale randamentelor financiare
2. Estimați și interpretați modele **ARCH** și **GARCH**
3. Aplicați modele asimetrice (**EGARCH, GJR-GARCH**) pentru efectul de levier
4. Efectuați validarea și selectarea modelelor
5. Prognozați volatilitatea și calculați **Value at Risk (VaR)**

## Competențe Practice

- Implementare Python cu pachetul **arch**
  - ▶ Estimare, prognoză și diagnostic automat
- Interpretarea parametrilor și a persistenței volatilității
- Calculul VaR pentru managementul riscului
  - ▶ Backtesting și validarea prognozelor



## De ce modelăm volatilitatea?

### Observații Empirice în Seriile Financiare

- Randamentele prezintă **volatility clustering**
  - ▶ Perioadele de volatilitate ridicată sunt urmate de perioade similare
- Distribuția randamentelor are **cozi groase** (leptokurtosis)
  - ▶ Kurtosis  $> 3$ , mai multe valori extreme decât normală
- Corelația randamentelor  $\approx 0$ , dar corelația  $r_t^2$  este semnificativă
- Volatilitatea răspunde **asimetric** la șocuri (leverage effect)

### Limitarea modelelor ARIMA

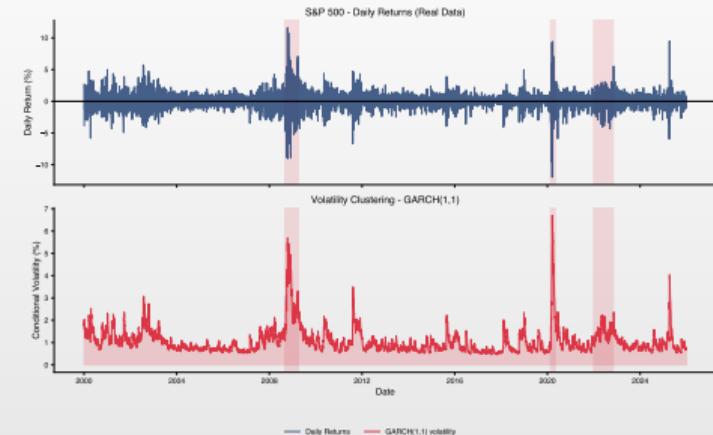
- Modelele ARIMA presupun **varianță constantă** (homoscedasticitate)
  - ▶ Nu pot modela schimbările dinamice ale volatilității
- Soluția: modele ARCH/GARCH pentru varianța condiționată



## Volatility clustering

### Observații

- Perioadele de volatilitate mare sunt urmate de perioade similare
- Perioadele de calm sunt urmate de perioade de calm
- Varianța condiționată este **predictibilă**



 TSA\_ch5\_clustering



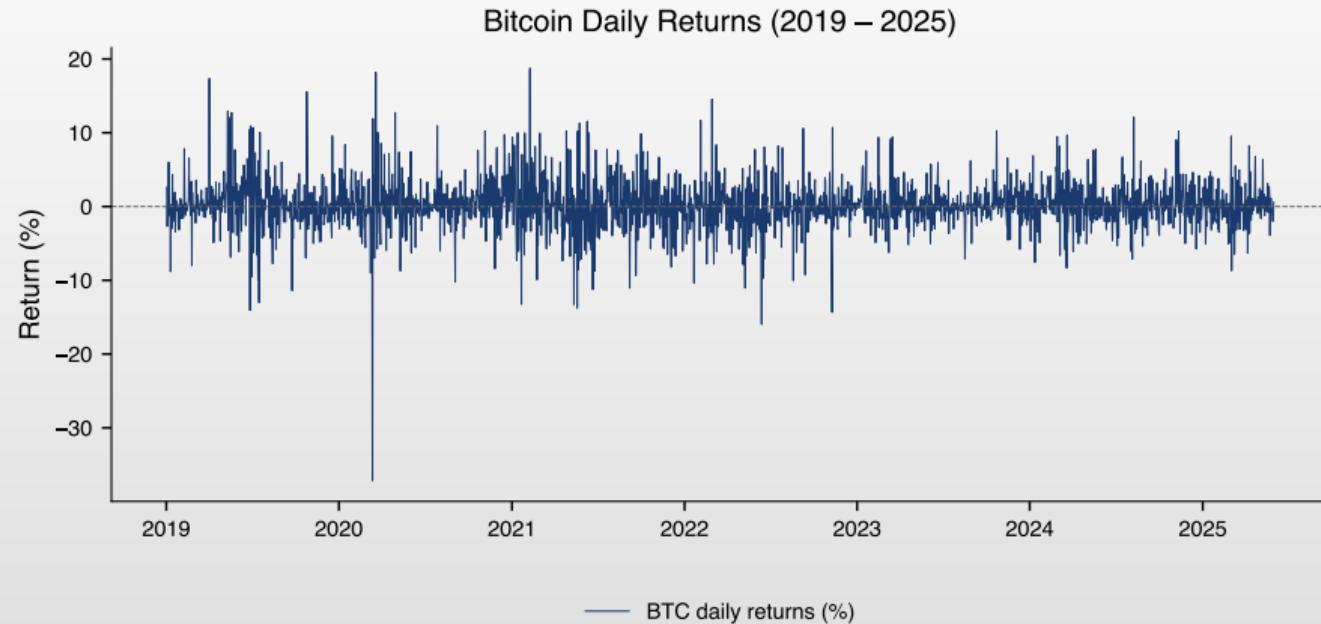
## Exemplu: Bitcoin & volatility clustering

### Observații

- Randamente zilnice Bitcoin (2019–2025): volatility clustering extrem de pronunțat
  - ▶ Randamente de  $\pm 20\%$  în perioadele de criză (COVID, Terra/Luna)
- Volatilitatea Bitcoin este semnificativ mai mare decât a activelor tradiționale
  - ▶  $\alpha$  tipic  $\approx 0.10\text{--}0.20$  (reacție rapidă la news)



## Exemplu: Bitcoin $\succcurlyeq$ volatility clustering



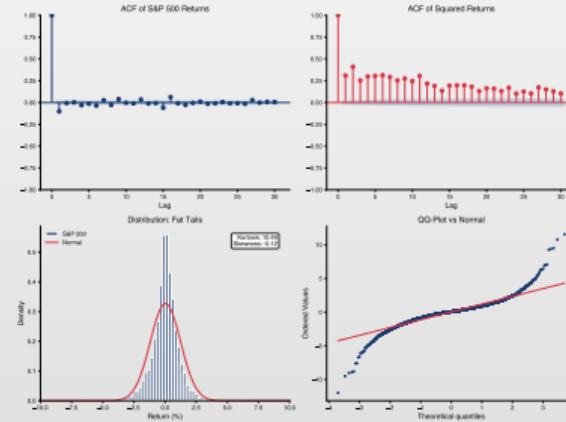
Q TSA\_ch5\_btc\_returns



## Fapte stilizate ale randamentelor financiare

### Proprietăți Observate

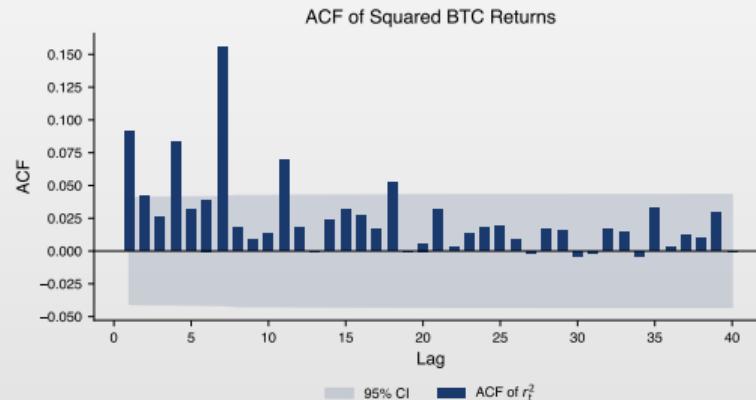
- ◻ Absența autocorelației în randamente, dar autocorelație semnificativă în  $r_t^2$
- ◻ Cozi groase (kurtosis > 3), leverage effect, volatility clustering



## Exemplu: Diagnosticul modelului cu efecte ARCH

### Interpretare

- Sus:**  $r_t^2$  (proxy pentru volatilitate)  $\succ$  vârfurile coincid cu crizele de piață
- Jos:** ACF( $r_t^2$ ) semnificativ  $\succ$  efecte ARCH prezente, varianță predictibilă



TSA\_ch5\_btc\_arch

## Heteroscedasticitate condiționată

### Definiție 1 (Varianță Condiționată)

- **Definiție:** Fie  $\{r_t\}$  o serie de randamente. Varianța condiționată la momentul  $t$  este:

$$\sigma_t^2 = \text{Var}(r_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}[(r_t - \mu_t)^2 | \mathcal{F}_{t-1}]$$

- **Notatie:**  $\mathcal{F}_{t-1}$  reprezintă informația disponibilă până la momentul  $t-1$

### Modelul General

- **Ecuăția:**  $r_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \text{i.i.d.}(0, 1)$
- $\mu_t$  = media condiționată (modelată prin ARMA)
- $\sigma_t^2$  = varianța condiționată (modelată prin GARCH)
- $z_t$  = inovații standardizate



## Portret de cercetător: Engle & Bollerslev



Robert Engle (\*1942)  
Premiul Nobel 2003

[W Wikipedia \(en\)](#)



Tim Bollerslev (\*1958)

[W Wikipedia \(en\)](#)

### Biografie

- **Robert Engle:** economist american la NYU Stern. Premiul Nobel (2003) „pentru metode de analiză a seriilor economice cu volatilitate variabilă în timp (ARCH)”
- **Tim Bollerslev:** economist danez-american la Duke University, doctorand al lui Engle

### Contribuții principale

- **Modelul ARCH** (Engle, 1982) — heteroskedasticitate condiționată autoregresivă
- **Modelul GARCH** (Bollerslev, 1986) — ARCH generalizat cu volatilitate persistentă
- **Volatilitatea realizată** și econometria de înaltă frecvență
- Fundamentul managementului modern al riscului financiar (VaR, ES)



## Modelul ARCH(q) ⊳ Engle (1982)

### Definiție 2 (ARCH(q))

- **Model:** Autoregressive Conditional Heteroskedasticity de ordin  $q$ :

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \text{i.i.d.}(0, 1), \quad \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

### Restricții pentru Staționaritate

- $\omega > 0$  ⊳ nivel de bază pozitiv
- $\alpha_i \geq 0$  pentru  $i = 1, \dots, q$  ⊳ non-negativitate
- $\sum_{i=1}^q \alpha_i < 1$  ⊳ staționaritate (variantă necondiționată finită)

### Observație 1

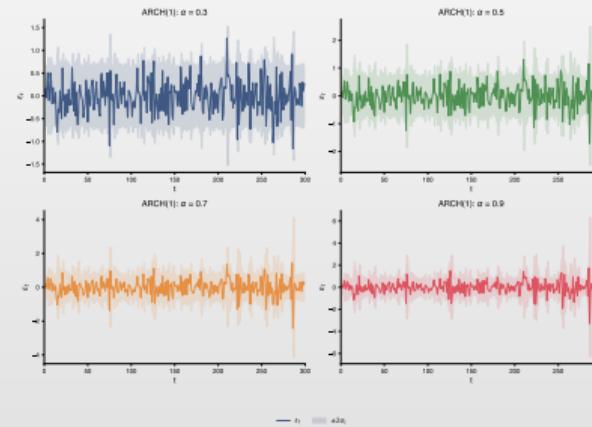
- Robert Engle a primit **Premiul Nobel pentru Economie** în 2003 pentru dezvoltarea modelului ARCH!



## Simulare ARCH(1): Efectul parametrului $\alpha$

### Interpretare

- Cu cât  $\alpha$  este mai mare, cu atât volatilitatea reacționează mai puternic la șocuri recente



 TSA\_ch5\_arch\_sim

## Proprietăți ale modelului ARCH(1)

$$\text{ARCH}(1): \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

- **Varianța necondiționată:**  $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \frac{\omega}{1 - \alpha_1}$  (dacă  $\alpha_1 < 1$ )
- **Kurtosis:**  $\kappa = 3 \cdot \frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2}$  (dacă  $\alpha_1^2 < 1/3$ )
- Kurtosis  $> 3$  pentru  $\alpha_1 > 0 \succ$  cozi groase!

Exemplu Numeric:  $\omega = 0.0001$ ,  $\alpha_1 = 0.3$

- **Varianța necondiționată:**  $\sigma^2 = \frac{0.0001}{1 - 0.3} = 0.000143$
- **Kurtosis:**  $\kappa = 3 \cdot \frac{1 - 0.09}{1 - 0.27} = 3.74 > 3$



## Demonstrație: varianța necondiționată ARCH(1)

### Obiectiv

- **Scop:** pentru ARCH(1):  $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2$ , demonstrăm  $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \frac{\omega}{1-\alpha}$

### Demonstrație

- **Pas 1:** Legea speranțelor iterate:  $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}]] = \mathbb{E}[\sigma_t^2]$
- **Pas 2:** Înlocuim ARCH(1):  $\mathbb{E}[\sigma_t^2] = \mathbb{E}[\omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2] = \omega + \alpha \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2]$
- **Pas 3:** La staționaritate  $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \bar{\sigma}^2$ :  $\bar{\sigma}^2 = \omega + \alpha \bar{\sigma}^2 \succ \bar{\sigma}^2(1 - \alpha) = \omega \succ \boxed{\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha}}$

### Condiție de Staționaritate

- Soluția există și este pozitivă doar dacă  $\alpha < 1$



## Demonstrație: kurtosis ARCH(1)

### Obiectiv

- Scop: ARCH(1) generează cozi groase:  $\kappa = 3 \cdot \frac{1-\alpha^2}{1-3\alpha^2} > 3$

### Demonstrație

- Pas 1:  $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$  cu  $z_t \sim N(0, 1)$  independent de  $\sigma_t$ ;  $\mathbb{E}[\varepsilon_t^4] = 3\mathbb{E}[\sigma_t^4]$
- Pas 2:  $\sigma_t^4 = (\omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2)^2$ , la staționaritate:  $\mathbb{E}[\sigma_t^4] = \omega^2 + 2\omega\alpha\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] + \alpha^2\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^4]$
- Pas 3: Rezolvând:  $\kappa = \frac{\mathbb{E}[\varepsilon_t^4]}{(\mathbb{E}[\varepsilon_t^2])^2} = 3 \cdot \frac{1-\alpha^2}{1-3\alpha^2}$

### Implicație

- Exemplu:  $\alpha = 0.3$ :  $\kappa = 3 \cdot \frac{0.91}{0.73} = 3.74 > 3$  (cozi mai groase decât normala!)



## Demonstrație: varianța necondiționată GARCH(1,1)

### Obiectiv

- Scop: pentru GARCH(1,1):  $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$ , demonstrăm  $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$

### Demonstrație

- Pas 1: Aplicăm operatorul de speranță:  $\mathbb{E}[\sigma_t^2] = \omega + \alpha \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] + \beta \mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2]$
- Pas 2: Folosim  $\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] = \mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2]$  (legea speranțelor iterate):  $\mathbb{E}[\sigma_t^2] = \omega + (\alpha + \beta) \mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2]$
- Pas 3: La staționaritate  $\mathbb{E}[\sigma_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2] = \bar{\sigma}^2$ :  $\bar{\sigma}^2 = \omega + (\alpha + \beta) \bar{\sigma}^2 \succ \boxed{\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}}$

### Condiție de Staționaritate

- Soluția există doar dacă  $\alpha + \beta < 1$
- Când  $\alpha + \beta = 1$  (IGARCH), varianța este infinită



## Demonstrație: Reprezentarea ARMA pentru $\varepsilon_t^2$

### Obiectiv

- Scop: arătăm că un proces GARCH(1,1) implică un proces ARMA(1,1) pentru  $\varepsilon_t^2$

### Demonstrație

- Pas 1: Definim "șocul varianței":  $\nu_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$
- Pas 2:  $\nu_t$  este diferența de martingal:  $\mathbb{E}[\nu_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0$
- Pas 3: Din ecuația GARCH, înlocuind  $\sigma_{t-1}^2 = \varepsilon_{t-1}^2 - \nu_{t-1}$ :

$$\varepsilon_t^2 = \omega + (\alpha + \beta)\varepsilon_{t-1}^2 + \nu_t - \beta\nu_{t-1}$$

### Rezultat

- Aceasta este o ecuație **ARMA(1,1)** cu coeficient AR =  $\alpha + \beta$  și coeficient MA =  $-\beta$ !



## Demonstrație: persistența volatilității și half-life

### Prognosă multi-pas GARCH(1,1)

- $\mathbb{E}_t[\sigma_{t+h}^2] = \bar{\sigma}^2 + (\alpha + \beta)^{h-1}(\sigma_{t+1}^2 - \bar{\sigma}^2)$

### Demonstrație

- **Pas 1:** Notăm  $\phi = \alpha + \beta$  și  $q_t = \sigma_t^2 - \bar{\sigma}^2$  (deviația de la medie)
- **Pas 2:** Din ecuația GARCH:  $\mathbb{E}_t[q_{t+1}] = \phi \cdot q_t$ , deci  $\mathbb{E}_t[q_{t+h}] = \phi^h \cdot q_t$
- **Pas 3:** Half-life = timpul până când deviația se înjumătățește:

$$\phi^{HL} = 0.5 \succ HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\phi)} = \frac{-0.693}{\ln(\alpha+\beta)}$$

### Exemplu: S&P 500

- Cu  $\alpha + \beta = 0.988$ :  $HL = \frac{-0.693}{-0.012} \approx 58$  zile (șocurile persistă ~3 luni!)



## Testarea efectelor ARCH

### Testul Engle pentru Efecte ARCH

1. Estimează modelul pentru medie și obține reziduurile  $\hat{\varepsilon}_t$
2. Calculează  $\hat{\varepsilon}_t^2$
3. Regreseză:  $\hat{\varepsilon}_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \cdots + \beta_q \hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + u_t$
4. Calculează statistica  $LM = T \cdot R^2 \sim \chi^2(q)$

### Ipoteze

- $H_0$ : Nu există efecte ARCH ( $\alpha_1 = \cdots = \alpha_q = 0$ )
- $H_1$ : Există efecte ARCH (cel puțin un  $\alpha_i \neq 0$ )



## Limitări ale modelului ARCH

### Probleme Practice

1. **Ordine mare**  $\succ$  de obicei sunt necesare multe lag-uri ( $q$  mare)
  - ▶ Exemplu: ARCH(20) pentru date zilnice
2. **Mulți parametri**  $\succ$  dificultăți de estimare
3. **Restricții de non-negativitate**  $\succ$  greu de impus pentru  $q$  mare
  - ▶ Toți  $\alpha_i \geq 0$  trebuie verificate simultan
4. **Nu capturează persistența**  $\succ$  volatilitatea observată este foarte persistentă

### Soluția

- Modelul GARCH**  $\succ$  introduce lag-uri ale varianței condiționate pentru a captura persistența cu mai puțini parametri!



## Modelul GARCH(p,q) $\succ$ Bollerslev (1986)

### Definiție 3 (GARCH(p,q))

- **Model:** Generalized ARCH:

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \text{i.i.d.}(0, 1), \quad \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

### Interpretare

- $\omega$  = nivel de bază al volatilității (constantă, independentă de șocuri)
- $\alpha_i$  = reacția la șocuri recente;  $\alpha$  mare  $\succ$  reacție rapidă la informații noi
- $\beta_j$  = persistența volatilității;  $\beta$  mare  $\succ$  volatilitatea se disipează lent
- $\alpha + \beta$  = persistența totală (aproape de 1 în practică)

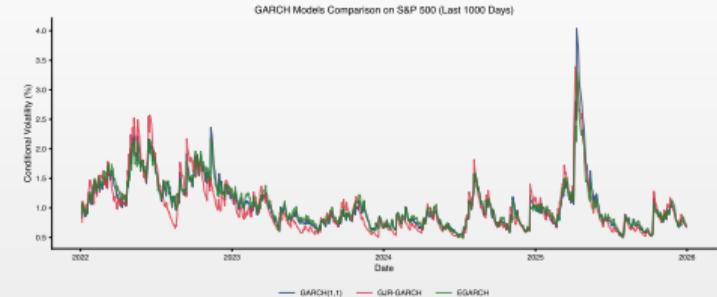
## Modelul GARCH(1,1)

### Cel Mai Popular Model de Volatilitate

- $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$

### Restricții și proprietăți

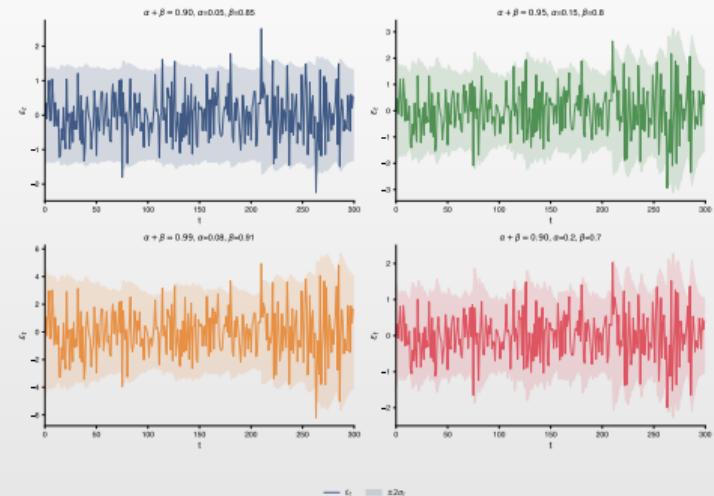
- **Restricții:**  $\omega > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta < 1$
- **Varianța necondiționată:**  $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$
- **Half-life:**  $HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha+\beta)}$



## Simulare GARCH(1,1): efectul persistenței

### Interpretare

- $\alpha$  controlează reacția la șocuri
- $\beta$  controlează persistența
- Suma  $\alpha + \beta$  determină viteza de revenire la medie



 TSA\_ch5\_garch\_sim



## GARCH(1,1) ca ARMA pentru $\varepsilon_t^2$

### Reprezentare ARMA(1,1)

- Definiție:  $\nu_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$  (șocul varianței). Atunci:

$$\varepsilon_t^2 = \omega + (\alpha + \beta)\varepsilon_{t-1}^2 + \nu_t - \beta\nu_{t-1}$$

- Aceasta este un ARMA(1,1) pentru  $\varepsilon_t^2$ !

### Implicații

- ACF al  $\varepsilon_t^2$  decinde exponențial (ca ARMA)
  - ▶ Pătratele randamentelor au memorie lungă
- Persistența este dată de  $\alpha + \beta$
- PACF poate ajuta la identificarea ordinului

## Estimarea modelelor GARCH

### Metoda Verosimilității Maxime (MLE)

- ☐ Log-verosimilitate (distribuție normală):

$$\ell(\theta) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[ \ln(\sigma_t^2) + \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} \right]$$

### Distribuții Alternative pentru $z_t$

- ☐ **Student-t**: capturează cozile groase ( $\nu$  tipic 4–8 pentru acțiuni)
- ☐ **GED**: flexibilitate pentru kurtosis (generalizare a normalei)
- ☐ **Skewed Student-t**: asimetrie și cozi groase

## Valori tipice pentru GARCH(1,1)

Serie	$\alpha$	$\beta$	$\alpha + \beta$
S&P 500 zilnic	0.05–0.10	0.85–0.95	0.95–0.99
EUR/USD zilnic	0.03–0.08	0.90–0.95	0.95–0.99
Bitcoin zilnic	0.10–0.20	0.75–0.85	0.90–0.98
Obligațiuni	0.02–0.05	0.90–0.97	0.95–0.99

### Observații

- $\alpha + \beta$  aproape de 1  $\succ$  volatilitate foarte persistentă (half-life de ordinul lunilor)
- $\alpha$  mic,  $\beta$  mare  $\succ$  reacție lentă la șocuri, memorie lungă
- Bitcoin:  $\alpha$  mai mare  $\succ$  reacție mai rapidă la news (piată mai sensibilă)



## IGARCH $\succ$ integrated GARCH

### Definiție 4 (IGARCH(1,1))

- **Condiție:** Când  $\alpha + \beta = 1$ :  $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + (1 - \alpha) \sigma_{t-1}^2$

### Proprietăți

- Varianța necondiționată nu există (infinită)  $\succ$  nu există mean reversion
- řocurile au efect **permanent** asupra volatilității
- Folosit pentru serii cu persistență extremă
- Util pentru **RiskMetrics** (J.P. Morgan):  $\alpha = 0.06$ ,  $\beta = 0.94$

### Observație 2

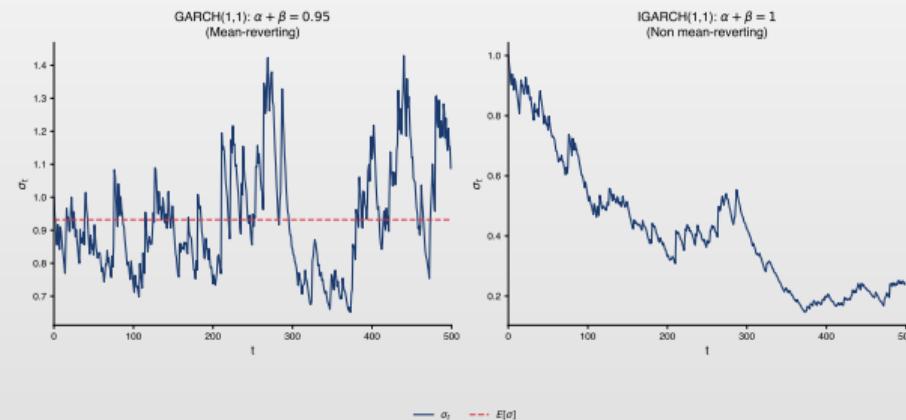
- IGARCH este analog cu o rădăcină unitară în varianță!



## GARCH vs IGARCH: comparație persistență

### Interpretare

- GARCH standard revine la media necondiționată
- IGARCH nu are medie finită  $\succ$  șocurile persistă indefinit



Q TSA\_ch5\_igarch



## GARCH-in-Mean (GARCH-M) $\succ$ Engle, Lilien & Robins (1987)

### Definiție 5 (GARCH-M)

- **Model:** Volatilitatea intră direct în ecuația mediei:

$$\begin{aligned}r_t &= \mu + \delta \cdot g(\sigma_t^2) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2\end{aligned}$$

- **Funcția  $g$ :** poate fi  $\sigma_t^2$ ,  $\sigma_t$ , sau  $\ln(\sigma_t^2)$

### Interpretare economică

- $\delta > 0$ : **prima de risc**  $\succ$  randamente mai mari când volatilitatea este ridicată
- Formalizează relația risc-randament (CAPM, Merton ICAPM); testul  $H_0 : \delta = 0$

### Exemplu tipic: acțiuni

- $r_t = 0.02 + \underbrace{0.15}_{\delta} \cdot \sigma_t + \varepsilon_t \quad \succ$  La  $\sigma_t = 2\%$ :  $\mathbb{E}[r_t] = 0.023$  (0.3% primă)



## GARCH-M: Specificații Alternative

### Specificații Comune

- Prima de risc poate intra sub diferite forme:
- (1)  $r_t = \mu + \lambda\sigma_t + \varepsilon_t$
- (2)  $r_t = \mu + \lambda\sigma_t^2 + \varepsilon_t$
- (3)  $r_t = \mu + \lambda \ln(\sigma_t^2) + \varepsilon_t$

### Rezultate Tipice pentru Piețele de Acțiuni

- $\lambda$  estimat adesea pozitiv dar mic (0.01–0.10)
- Semnificația variază în funcție de piață și perioadă
- Specificația cu varianță produce estimări  $\lambda$  mai mari

### Observație 3

- GARCH-M este utilizat în prețuirea activelor, optimizarea portofoliului și testarea CAPM.



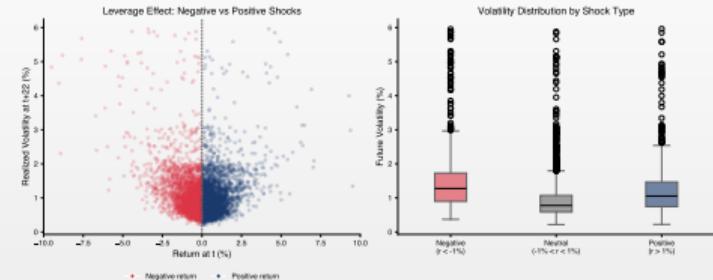
## Leverage effect

### Definiție

- **Leverage effect:** řocurile negative cresc volatilitatea **mai mult** decât cele pozitive de aceeași magnitudine

### Problema GARCH standard

- $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \succ$  doar  $\varepsilon_{t-1}^2$  contează, semnul se pierde!



## Modelul EGARCH $\succ$ Nelson (1991)

### Definiție 6 (EGARCH(1,1))

- Model:** Exponential GARCH:  $\ln(\sigma_t^2) = \omega + \alpha(|z_{t-1}| - \mathbb{E}[|z|]) + \gamma z_{t-1} + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2)$
- Notăție:**  $z_t = \varepsilon_t / \sigma_t$

### Avantaje EGARCH

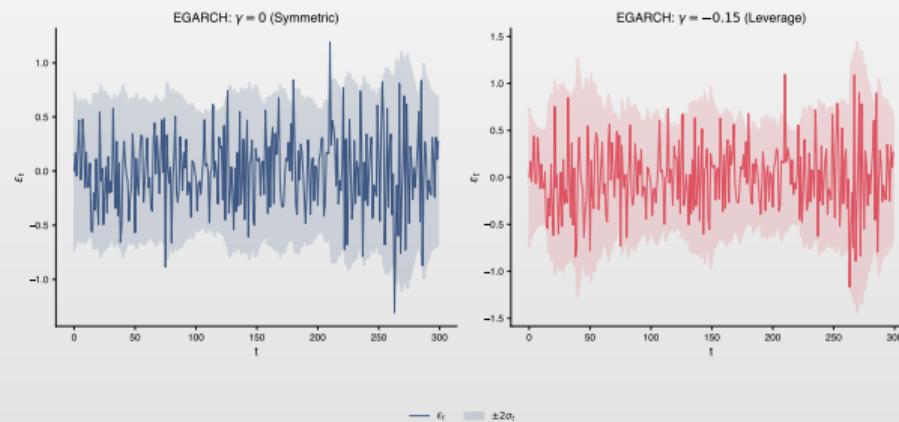
- Nu necesită restricții de non-negativitate**
  - ▶ Modelează  $\ln(\sigma_t^2)$  care poate fi orice valoare reală
- Captează leverage effect prin parametrul  $\gamma$** 
  - ▶  $\gamma < 0$ : șocuri negative  $\succ$  volatilitate mai mare
- Persistența este dată de  $\beta$**



## Simulare EGARCH: Efect Simetric vs Asimetric

### Interpretare

- Când  $\gamma < 0$ , şocurile negative cresc volatilitatea mai mult decât cele pozitive



Q TSA\_ch5\_egarch\_sim

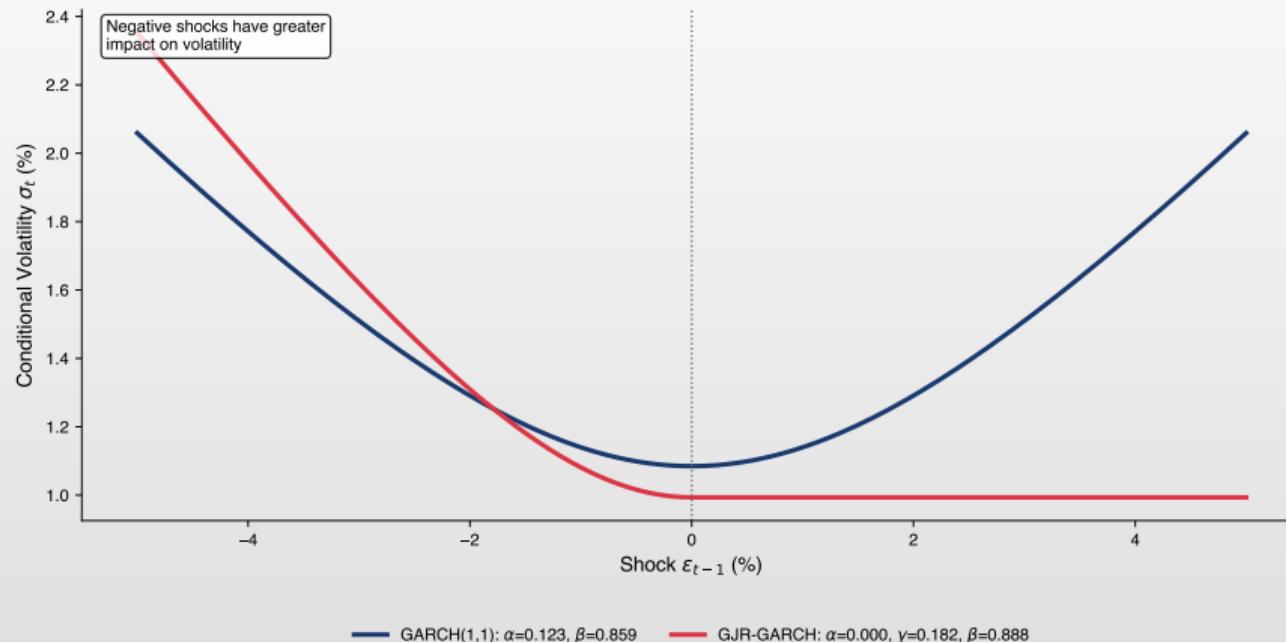
## News impact curve $\curvearrowright$ EGARCH

### Interpretare

- News Impact Curve:** relația între  $\varepsilon_t$  și  $\sigma_{t+1}^2$
- GARCH:** curba simetrică (parabolă)
  - ▶ řocuri pozitive și negative au același impact
- EGARCH:** curba asimetrică
  - ▶ řocuri negative au impact mai mare asupra volatilității



## News impact curve $\curvearrowright$ EGARCH



## Modelul GJR-GARCH (TGARCH)

### Definiție 7 (GJR-GARCH(1,1))

- **Autori:** Glosten, Jagannathan & Runkle (1993)
- **Model:**  $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 \cdot I_{t-1} + \beta \sigma_{t-1}^2$
- **Indicator:**  $I_{t-1} = 1$  dacă  $\varepsilon_{t-1} < 0$ , altfel 0

### Interpretare

- řouri pozitive: impact =  $\alpha$ ; řouri negative: impact =  $\alpha + \gamma$
- Leverage effect prezent dacă  $\gamma > 0$
- **Stationaritate:**  $\alpha + \gamma/2 + \beta < 1$

## TGARCH $\succ$ threshold GARCH

### Definiție 8 (TGARCH(1,1))

- Autor:** Zakoian (1994)  $\succ$  modelează deviația standard:

$$\sigma_t = \omega + \alpha^+ \varepsilon_{t-1}^+ + \alpha^- \varepsilon_{t-1}^- + \beta \sigma_{t-1}$$

- Notăție:**  $\varepsilon_t^+ = \max(\varepsilon_t, 0)$  și  $\varepsilon_t^- = \max(-\varepsilon_t, 0)$

### Comparație Modele Asimetrice

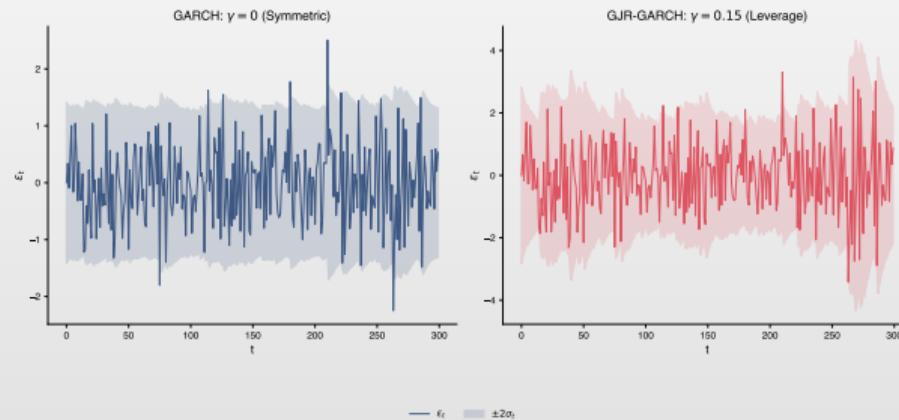
Model	Specificație	Leverage
GARCH	$\sigma_t^2$	Nu
EGARCH	$\ln(\sigma_t^2)$	Da ( $\gamma < 0$ )
GJR-GARCH	$\sigma_t^2$ cu indicător	Da ( $\gamma > 0$ )
TGARCH	$\sigma_t$	Da ( $\alpha^- > \alpha^+$ )



## Simulare GJR-GARCH/TGARCH

### Interpretare

- GJR-GARCH adaugă un termen indicator pentru a captura răspunsul asimetric la șocuri negative

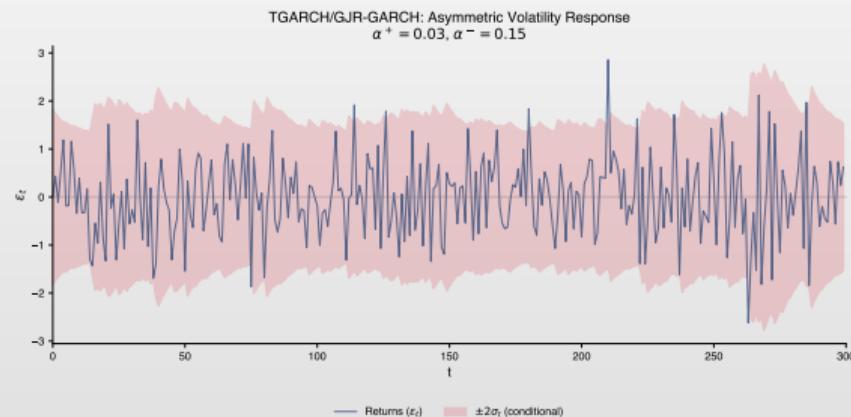


Q TSA\_ch5\_gjr\_sim

## Simulare TGARCH: răspuns asimetric la volatilitate

### Interpretare

- TGARCH cu  $\alpha^+ = 0.03$  și  $\alpha^- = 0.15$  > șocurile negative amplifică volatilitatea de 5×
- Benzile de volatilitate  $\pm 2\sigma$  se largesc asimetric în perioadele de criză



Q TSA\_ch5\_tgarch\_sim



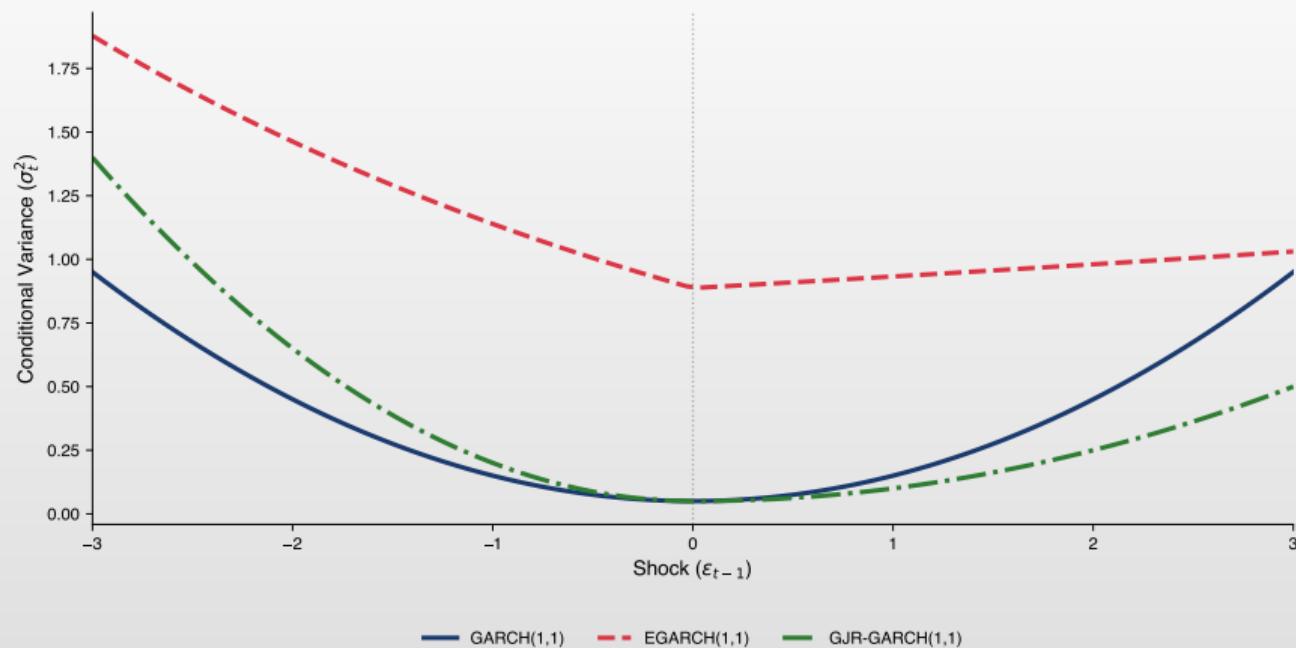
## Comparație news impact curves

### Interpretare

- GARCH standard:** simetric
  - ▶ Tratează şocuri pozitive și negative identic
- EGARCH și GJR-GARCH:** captează asimetria
  - ▶ Leverage effect: şocuri negative  $\succ$  impact mai mare



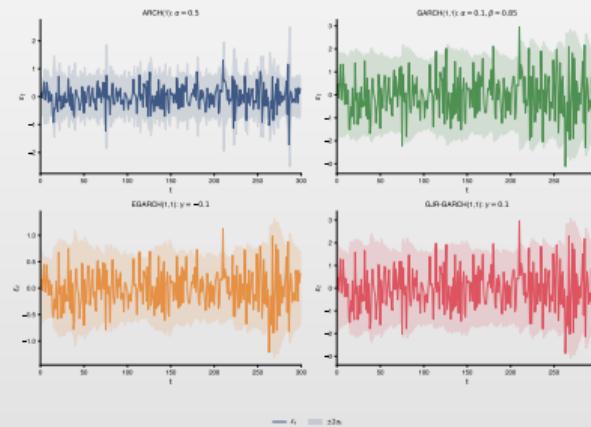
## Comparație news impact curves



## Comparație familie GARCH

### Interpretare

- Toate modelele capturează volatility clustering, dar diferă în modul de modelare a asimetriei



TSA\_ch5\_family



## Selectarea ordinului

### Criterii informaționale

- AIC** =  $-2\ell + 2k$  > penalizare moderată; preferă modele flexibile
- BIC** =  $-2\ell + k \ln(T)$  > penalizare mai mare; modele parsimonioase
- HQIC** =  $-2\ell + 2k \ln(\ln(T))$  > intermediar între AIC și BIC

unde:  $\ell$  = maximul log-verosimilității,  $k$  = nr. parametri,  $T$  = dimensiunea eșantionului

### Recomandări Practice

- GARCH(1,1) este suficient în **90% din cazuri**
  - ▶ Modele de ordin mai mare rareori aduc îmbunătățiri semnificative
- Verifică dacă modelul asimetric îmbunătățește fit-ul
  - ▶ Compară GARCH vs EGARCH vs GJR-GARCH prin AIC/BIC
- Alege distribuția inovațiilor care minimizează AIC/BIC



## Diagnosticarea modelelor GARCH

### Reziduuri Standardizate

- $\hat{z}_t = \frac{\hat{\epsilon}_t}{\hat{\sigma}_t} \succ$  dacă modelul este corect,  $\hat{z}_t$  ar trebui să fie i.i.d.(0,1)

### Verificări Diagnostic

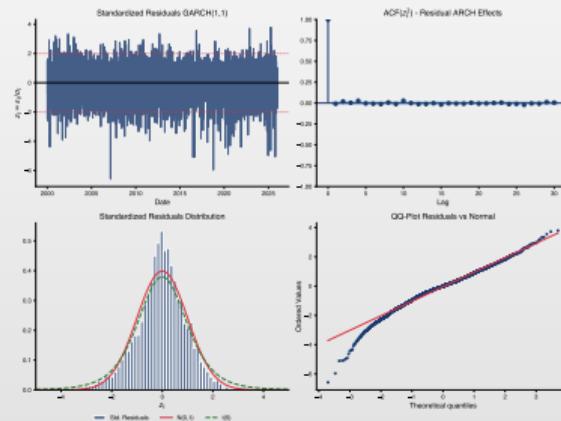
- Teste pentru medie**
  - ▶ Ljung-Box pe  $\hat{z}_t$ : verifică absența autocorelației
- Teste pentru varianță**
  - ▶ Ljung-Box pe  $\hat{z}_t^2$ : verifică absența efectelor ARCH reziduale
  - ▶ Test ARCH-LM: confirmă absența heteroscedasticității
- Verificare distribuție**
  - ▶ Histogramă + QQ-plot: verifică distribuția asumată



## Exemplu diagnostic

### Verificare

- ☐ Reziduurile standardizate trebuie să fie i.i.d. fără efecte ARCH reziduale

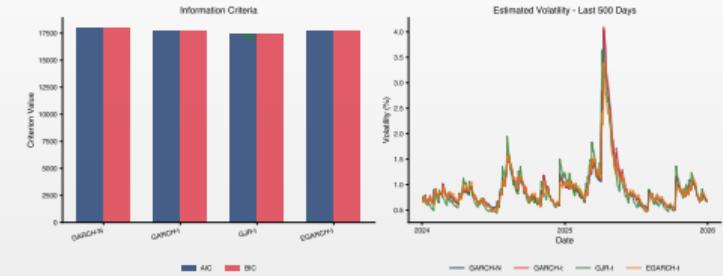


 TSA\_ch5\_diagnostic

## Comparație modele GARCH $\succ$ validare

### Interpretare

- GARCH(1,1) obține cel mai mic MAE pe setul de validare
  - ▶ Mai parsimonios și mai stabil decât modelele de ordin mai mare
- GARCH(2,1) și GJR-GARCH: performanță similară, dar mai mulți parametri
- **Concluzie:** simplitatea câștigă  $\succ$  GARCH(1,1) este greu de bătut



Q TSA\_ch5\_comparison



## Prognoza cu GARCH(1,1)

### Prognoză Un Pas Înainte

- ◻  $\hat{\sigma}_{T+1}^2 = \omega + \alpha \varepsilon_T^2 + \beta \sigma_T^2$

### Prognoză multi-pas ( $h > 1$ )

- ◻  $\mathbb{E}_T[\sigma_{T+h}^2] = \bar{\sigma}^2 + (\alpha + \beta)^{h-1}(\sigma_{T+1}^2 - \bar{\sigma}^2) \quad \text{unde } \bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$

### Convergență

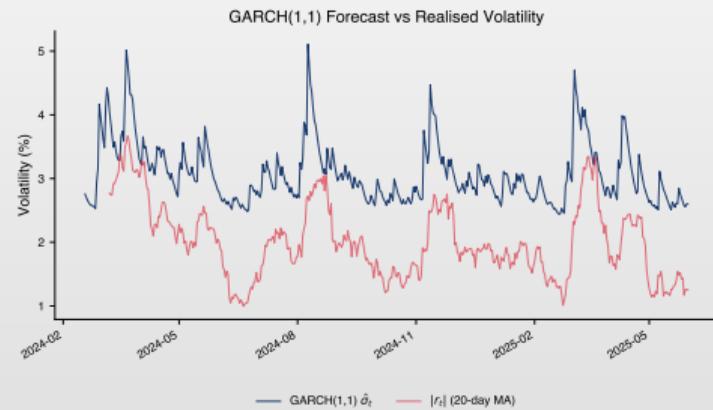
- ◻  $\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{E}_T[\sigma_{T+h}^2] = \bar{\sigma}^2 \succ \text{Prognoza converge către varianța necondiționată!}$



## Prognoza volatilității $\succ$ Vizualizare

### Proprietăți

- ◻ Prognoză converge exponential către  $\bar{\sigma}^2$
- ◻ Viteza de convergență depinde de  $\alpha + \beta$



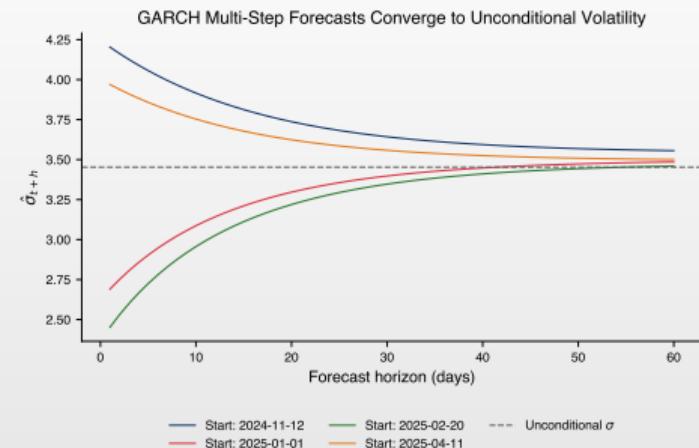
TSA\_ch5\_vol\_forecast



## Convergența prognozei GARCH către varianța necondiționată

### Interpretare

- ◻ Prognoza multi-pas converge exponențial către  $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$
- ◻ Cu cât  $\alpha + \beta$  este mai aproape de 1, cu atât convergența este mai lentă
  - ▶ S&P 500:  $\alpha + \beta \approx 0.99 \succ$  convergență în ~50 zile
  - ▶ Bitcoin:  $\alpha + \beta \approx 0.95 \succ$  convergență mai rapidă



TSA\_ch5\_convergence



## Aplicații ale prognozei volatilității

### Value at Risk (VaR)

- $\text{VaR}_\alpha = z_\alpha \cdot \sigma_{T+1}$
- Pierdere maximă cu probabilitate  $1 - \alpha$

### Expected Shortfall (ES)

- $\text{ES}_\alpha = \mathbb{E}[-r | r < -\text{VaR}_\alpha]$
- Pierdere medie când VaR este depășit

### Alte Aplicații

- Prețul opțiunilor
- Hedging dinamic
- Alocarea portofoliului
- Stress testing



## VaR și ES: ilustrație grafică

### Interpretare

- ◻ VaR 1% = pierderea depășită doar în 1% din cazuri
- ◻ Zona roșie = pierderi extreme (dincolo de VaR)



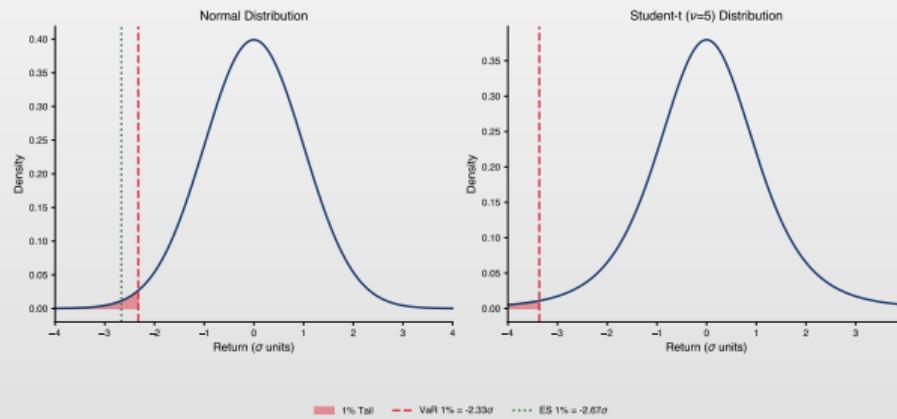
Q TSA\_ch5\_var\_plot



## VaR vs expected shortfall: normal vs Student-t

### Interpretare

- ES măsoară pierderea medie când VaR este depășit
- Student-t: VaR și ES mai mari decât sub distribuția normală



Q TSA\_ch5\_var\_es



## Value at risk > exemplu numeric

Calculul VaR: Portofoliu 1M EUR,  $\hat{\sigma}_{T+1} = 1.5\%$

Nivel	$z_\alpha$	VaR (%)	VaR (EUR)
5% (1 zi)	1.645	2.47%	24.675
1% (1 zi)	2.326	3.49%	34.890
1% (10 zile)	$2.326 \cdot \sqrt{10}$	11.03%	110.314

## Scalare pentru Perioade Mai Lungi

- $\text{VaR}_h \text{ zile} = \text{VaR}_{1 \text{ zi}} \cdot \sqrt{h}$  (presupune randamente i.i.d.)



## Value at risk > distribuție Student-t

### De ce Student-t?

- Normala **subestimează** riscul de coadă; randamentele au **cozi groase** ( $kurtosis > 3$ )
- Student-t capturează mai bine extremele

Comparație VaR 1% (1 zi) pentru  $\sigma = 1.5\%$ , Portofoliu = 1M EUR

Distribuție	Cuantilă	VaR (EUR)
Normal	2.326	34.890
Student-t ( $\nu = 10$ )	2.764	41.460
Student-t ( $\nu = 6$ )	3.143	47.145
Student-t ( $\nu = 4$ )	3.747	56.205

- Cu  $\nu = 6$  (tipic pentru acțiuni), VaR este cu **35% mai mare** decât cel normal!



## VaR > exemplu complet cu GARCH

### Procedura de Calcul VaR

1. Estimează modelul GARCH(1,1) cu distribuție Student-t
2. Obține prognoza volatilității:  $\hat{\sigma}_{T+1}$
3. Calculează VaR:  $VaR_{\alpha} = t_{\alpha}(\nu) \cdot \hat{\sigma}_{T+1} \cdot \sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}}$

### Exemplu: S&P 500

- Parametri estimați:  $\alpha = 0.088$ ,  $\beta = 0.900$ ,  $\nu = 6.4$
- Volatilitate prognozată:  $\hat{\sigma}_{T+1} = 1.2\%$ , Portofoliu: 10.000.000 EUR
- VaR 1% (1 zi):**  $VaR = 3.05 \times 0.012 \times 10.000.000 = 366.000 \text{ EUR}$



## Ce este VaR backtesting?

### Definiție

- Backtesting** = verificarea ex-post a calității modelului VaR
- Compară pierderile realizate cu pragul VaR proгnozat
  - ▶ O **încălcare** (violation) apare când  $r_t < -\text{VaR}_t$

### Principiul Backtesting-ului

- Indicatorul de încălcare:  $I_t = 1(r_t < -\text{VaR}_{\alpha,t})$
- Pentru un model corect la nivel  $\alpha$ :
  - ▶ Frecvența:  $\hat{p} = \frac{1}{T} \sum I_t \approx \alpha$ ; încălcări **independente**
- VaR 1% pe 250 zile  $\succ$  așteptăm  $\sim 2.5$  încălcări/an

### Importanță

- Cerință regulamentară **Basel III/IV** pentru bănci: backtesting obligatoriu



## Testul Kupiec (1995) $\succ$ acoperire necondiționată

### Ipoteze

- $H_0$ : Rata de încălcare este egală cu nivelul VaR ( $p = \alpha$ )
- $H_1$ : Rata de încălcare diferă de nivelul VaR ( $p \neq \alpha$ )

### Statistica de test (Likelihood Ratio)

- Formula:**  $LR_{uc} = -2 \ln \left[ \frac{\alpha^x (1-\alpha)^{T-x}}{\hat{\rho}^x (1-\hat{\rho})^{T-x}} \right] \sim \chi^2(1)$
- Notăție:**  $x = \text{nr. încălcări}, T = \text{nr. observații}, \hat{\rho} = x/T$

### Exemplu

- VaR 1%,  $T = 250$  zile,  $x = 5$  încălcări:  $\hat{\rho} = 2\%$ 
  - ▶ Prea multe încălcări  $\succ$  modelul **subestimează** riscul
- VaR 1%,  $T = 250$  zile,  $x = 1$  încălcare:  $\hat{\rho} = 0.4\% \succ$  acceptabil



## Testul Christoffersen (1998) > acoperire condiționată

### Motivație

- Kupiec testează doar **frecvența** încălcărilor
- Nu detectează **clusterizarea** încălcărilor (încălcări consecutive)
  - ▶ Dacă încălcările apar în clustere > modelul nu captează dinamica volatilității

### Testul de independentă + acoperire condiționată

- Formula:**  $LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind} \sim \chi^2(2)$
- $LR_{ind}$  testează dacă  $P(I_t = 1 | I_{t-1} = 1) = P(I_t = 1 | I_{t-1} = 0)$
- Un model bun: încălcări rare și distribuite uniform în timp

### Recomandare

- Folosește **ambele** teste: Kupiec (frecvență) + Christoffersen (independentă)



## Backtesting VaR: semaforul Basel

### Zonele de semaforizare Basel III/IV

Zonă	Încălcări/250 zile	Interpretare	Penalizare
Verde	0–4	Model acceptabil	Fără penalizare
Galben	5–9	Necesită investigare	Factor $k$ crește
Roșu	$\geq 10$	Model inadecvat	Penalizare maximă

### Exemplu practic

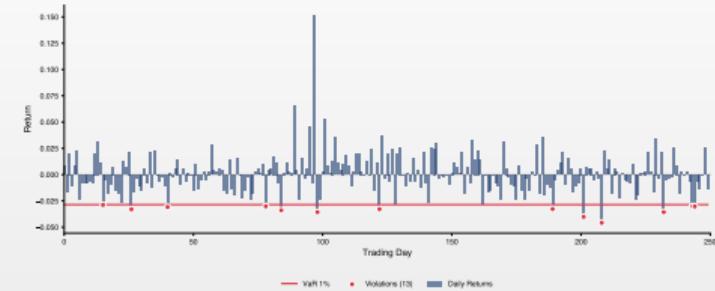
- ☐ Portofoliu cu VaR 1%: 250 zile de backtesting
- ☐ 3 încălcări  $\succ$  Zonă verde  $\succ$  model acceptabil
- ☐ 7 încălcări  $\succ$  Zonă galbenă  $\succ$  revizuire necesară
- ☐ 13 încălcări  $\succ$  Zonă roșie  $\succ$  model respins



## VaR backtesting: vizualizare

### Interpretare

- Linia roșie: pragul VaR 1% estimat cu GARCH(1,1)
- Punctele roșii: 13 încălcări din 250 zile ( $\hat{p} = 5.2\%$ )
  - **Zonă roșie Basel**  $\succ$  modelul subestimează semnificativ riscul
  - Soluții: distribuție Student-t, model EGARCH, sau nivel VaR mai conservator



 TSA\_ch5\_backtest



## Metodologia Rolling Window pentru VaR

### Conceptul Rolling Window

- O fereastră mobilă de dimensiune fixă  $W$  (ex. 500 zile) se deplasează zi cu zi
- La fiecare pas  $t$ : re-estimare GARCH pe  $[t - W, t - 1]$ , prognoză  $\hat{\sigma}_{t|t-1}$ , calcul  $\text{VaR}_t$

### Procedura pas cu pas (pentru fiecare zi $t = W + 1, \dots, T$ )

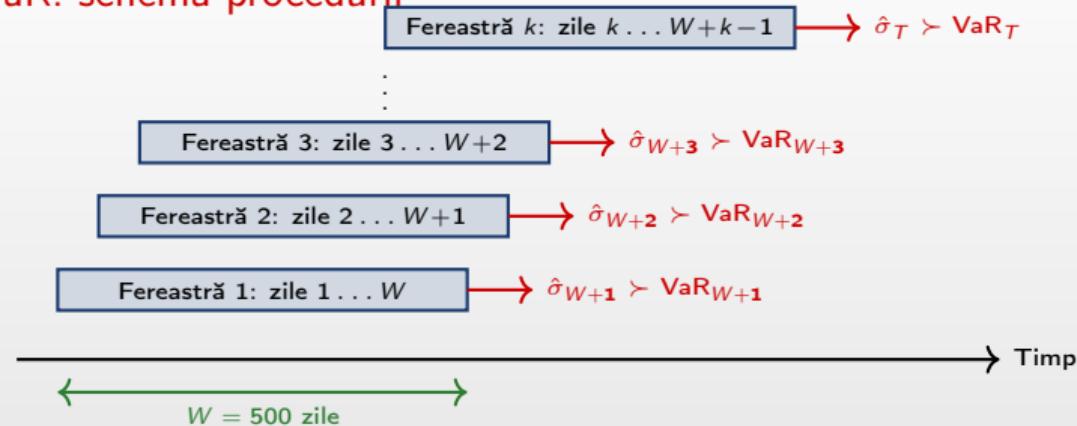
1. Estimează GARCH pe  $\{r_{t-W}, \dots, r_{t-1}\} \succ$  parametri  $\hat{\omega}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\nu}$
2. Prognozează:  $\hat{\sigma}_{t|t-1}^2 = \hat{\omega} + \hat{\alpha} r_{t-1}^2 + \hat{\beta} \hat{\sigma}_{t-1}^2$
3. Calculează:  $\text{VaR}_{\alpha,t} = -t_\alpha(\hat{\nu}) \cdot \sqrt{\frac{\hat{\nu}-2}{\hat{\nu}}} \cdot \hat{\sigma}_{t|t-1}$
4. Verifică încălcarea:  $I_t = 1(r_t < -\text{VaR}_{\alpha,t})$

### De ce Rolling și nu Expanding?

- Fereastra fixă: parametrii reflectă **regimul curent** al volatilității
- Datele vechi ( $> W$  zile) pot fi irelevante (schimbări structurale, crize)



## Rolling Window VaR: schema procedurii



### Rezultat

- Obținem seria  $\{\text{VaR}_{\alpha,t}\}_{t=W+1}^T >$  un prag **diferit** în fiecare zi
- VaR-ul se adaptează la regimul curent: crește în perioadele volatile, scade în cele calme
- Comparăm  $r_t$  cu  $-\text{VaR}_{\alpha,t}$  pentru a identifica încălcările

## VaR backtesting în Python > rolling window

### Estimare VaR rolling cu GARCH(1,1)-t

```
from arch import arch_model
import numpy as np
from scipy import stats

returns = ... # pd.Series cu randamente zilnice
window = 500; alpha = 0.01
VaR_series = pd.Series(index=returns.index[window:], dtype=float)

for t in range(window, len(returns)):
    train = returns.iloc[t-window:t]
    model = arch_model(train, vol='Garch', p=1, q=1, dist='t')
    res = model.fit(disp='off', show_warning=False)
    fcast = res.forecast(horizon=1, reindex=False)
    sigma = np.sqrt(fcast.variance.values[-1, 0])
    nu = res.params['nu'] # grade de libertate Student-t
    q = stats.t.ppf(alpha, nu) * np.sqrt((nu-2)/nu)
    VaR_series.iloc[t - window] = -q * sigma
```

Q TSA\_ch5\_backtest\_py



## Testul Kupiec > implementare Python

### Funcția kupiec\_test()

```
def kupiec_test(violations, T, alpha=0.01):
    """Kupiec (1995) unconditional coverage LR test."""
    x = violations.sum()           # nr. încălcări observate
    p_hat = x / T                 # rata empirică
    if x == 0 or x == T:
        return np.nan, np.nan
    LR_uc = -2 * (x*np.log(alpha) + (T-x)*np.log(1-alpha)
                  - x*np.log(p_hat) - (T-x)*np.log(1-p_hat))
    p_value = 1 - stats.chi2.cdf(LR_uc, df=1)
    return LR_uc, p_value
```

### Utilizare

```
violations = returns[window:] < -VaR_series
LR, pval = kupiec_test(violations, len(violations))
print(f"Kupiec LR = {LR:.3f}, p-value = {pval:.4f}")
# p-value < 0.05 => respingem H0 => model inadecvat
```



## Testul Christoffersen $\succ$ implementare Python

### Funcția christoffersen\_test()

```
def christoffersen_test(violations):
    """Christoffersen (1998) conditional coverage test."""
    V = violations.astype(int).values
    # Matricea de tranzitie: n_ij
    n00 = ((V[:-1]==0) & (V[1:]==0)).sum()
    n01 = ((V[:-1]==0) & (V[1:]==1)).sum()
    n10 = ((V[:-1]==1) & (V[1:]==0)).sum()
    n11 = ((V[:-1]==1) & (V[1:]==1)).sum()
    # Probabilități condiționate
    p01 = n01/(n00+n01) if (n00+n01)>0 else 0
    p11 = n11/(n10+n11) if (n10+n11)>0 else 0
    p = (n01+n11) / (n00+n01+n10+n11) # rata globală
    if p01==0 or p11==0 or p==0 or p==1: return np.nan, np.nan
    LR_ind = -2*(np.log(1-p)*(n00+n10) + np.log(p)*(n01+n11)
                 - np.log(1-p01)*n00 - np.log(p01)*n01
                 - np.log(1-p11)*n10 - np.log(p11)*n11)
    p_value = 1 - stats.chi2.cdf(LR_ind, df=1)
    return LR_ind, p_value
```



## Backtesting complet > rezultate și decizie

### Aplicare S&P 500 (T=500, VaR 1%)

```
violations = returns[window:] < -VaR_series
n_viol = violations.sum()
T = len(violations)
rate = n_viol / T
print(f"Încălcări: {n_viol}/{T} (rata = {rate:.2%})")
LR_uc, p_uc = kupiec_test(violations, T, alpha=0.01)
LR_ind, p_ind = christoffersen_test(violations)
LR_cc = LR_uc + LR_ind  # test combinat ~ chi2(2)
p_cc = 1 - stats.chi2.cdf(LR_cc, df=2)
```

### Output tipic

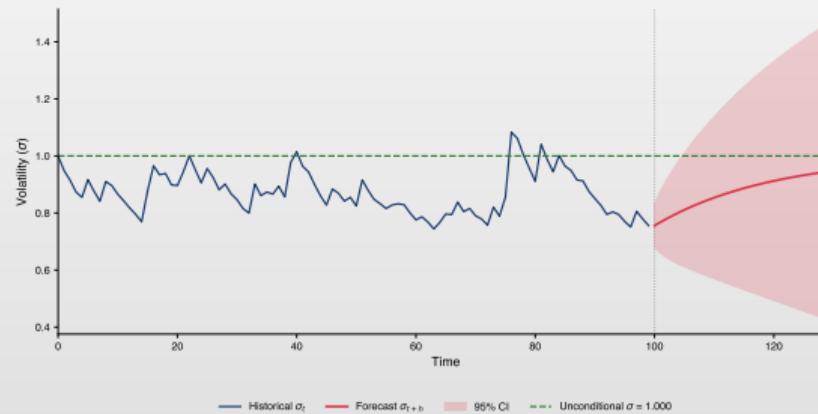
```
Încălcări: 13/500 (rata = 2.60%)
Kupiec    LR = 5.83,  p-value = 0.0157  => Respins (p<0.05)
Independ. LR = 0.42,  p-value = 0.5171  => Acceptat
Combinat  LR = 6.25,  p-value = 0.0439  => Respins
Zona Basel: ROȘU (>=10 încălcări) => Model inadecvat
```



## Prognoza volatilității cu intervale de încredere

### Interpretare

- ◻ Prognoza converge către  $\bar{\sigma}$
- ◻ Incertitudinea crește cu orizontul de prognoză



Q TSA\_ch5\_vol\_ci



## Rolling forecast > prognoza pas cu pas

### Procedura

S&P 500, W=500, GARCH(1,1)-t

- Re-estimare GARCH pe  $[t-W, t-1]$ ; prognoză  $\hat{\sigma}_{t|t-1}$
- Comparație cu vol. realizată (std. rulantă 20 zile)

### Rezultate (2015 zile OOS)

- $\rho = 0.938 \succ$  urmărire excelentă; MAE = 0.15%, RMSE = 0.24%
- COVID-19: sub-predicție temporară, adaptare rapidă



TSA\_ch5\_rolling\_forecast



## Estimare GARCH în Python > arch

### Cod Python

```
pip install arch
from arch import arch_model

model = arch_model(returns,
    vol='Garch', p=1, q=1,
    dist='normal')
results = model.fit(disp='off')
print(results.summary())
```

### Parametri cheie

- **vol:** tip model
  - ▶ 'Garch', 'EGARCH'
- **p, q:** ordine GARCH
  - ▶ p=1, q=1 standard
- **dist:** distribuție
  - ▶ 'normal', 't'

 TSA\_ch5\_garch

## Modele Asimetrice în Python

### EGARCH și GJR-GARCH

```
# EGARCH
model_egarch = arch_model(returns, vol='EGARCH', p=1, q=1)
# GJR-GARCH (o=1 adaugă termenul asimetric)
model_gjr = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, o=1, q=1)
```

### Distribuții Alternative

```
# Student-t pentru cozi groase
model_t = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, q=1, dist='t')
# Skewed Student-t pentru asimetrie și cozi groase
model_skewt = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, q=1,
                           dist='skewt')
```

## Prognoza și Diagnosticul

### Prognoza volatilității

```
forecasts = results.forecast(horizon=10)
vol_forecast = np.sqrt(forecasts.variance.values[-1,:])
```

### Diagnostic și VaR

```
std_resid = results.std_resid
lb_test = acorr_ljungbox(std_resid**2, lags=10)
sigma = np.sqrt(forecasts.variance.values[-1, 0])
VaR_5pct = 1.645 * sigma
```

 TSA\_ch5\_forecast



## ARMA-GARCH: modelarea combinată a mediei și varianței

### De ce Modelare Combinată?

- **Corelație serială**  $\succ$  ARMA pentru medie
  - ▶ Captează dependența liniară în randamente
- **Volatility clustering**  $\succ$  GARCH pentru varianță
  - ▶ Captează dependența neliniară (heteroscedasticitate)

### Definiție 9 (ARMA(p,q)-GARCH(r,s))

- **Ecuația mediei:**  $r_t = \mu + \sum_{i=1}^p \phi_i(r_{t-i} - \mu) + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$
- **Ecuația varianței:**  $\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^r \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2$



## ARMA-GARCH: strategie de selecție a modelului

### Abordare Pas cu Pas

- Identifică modelul pentru medie:** Verifică ACF/PACF al randamentelor
- Testează efectele ARCH:** Aplică testul ARCH-LM pe reziduuri
- Specifică modelul pentru varianță:** De obicei GARCH(1,1) este suficient
- Estimare combinată:** Estimează ambele ecuații prin MLE
- Diagnostic:** Reziduurile standardizate trebuie să fie i.i.d.

### Specificații Comune

- Randamente acțiuni:** AR(1)-GARCH(1,1) sau ARMA(1,1)-GARCH(1,1)
  - ▶ Leverage effect frecvent  $\succ$  EGARCH poate fi preferat
- Cursuri de schimb:** Adesea doar GARCH(1,1)
  - ▶ Fără dinamică semnificativă în medie
- Rate ale dobânzii:** AR(1)-EGARCH(1,1) pentru efecte de levier



## ARMA-GARCH: implementare Python

### Utilizând Pachetul arch

```
from arch import arch_model
model = arch_model(returns,
                    mean='ARX',
                    lags=1,
                    vol='Garch',
                    p=1, q=1,
                    dist='t')
result = model.fit(disp='off')
print(result.summary())
```

### Parametri

- `mean='ARX'`: medie ARMA; `lags=1`: AR(1); `dist='t'`: Student-t



## ARMA-GARCH: Exemplu Complet

```
from arch import arch_model
model = arch_model(returns,
                    mean='ARX', lags=[1],
                    vol='EGARCH', p=1, q=1,
                    dist='skewt')
result = model.fit(update_freq=0)
cond_mean = result.conditional_mean
cond_vol = result.conditional_volatility
forecasts = result.forecast(horizon=5)
```

### Notă

- Pentru termeni MA, folosiți `mean='HARX'` sau pre-filtrări cu `statsmodels ARIMA`

## Pasul 1: Datele > randamente zilnice S&P 500

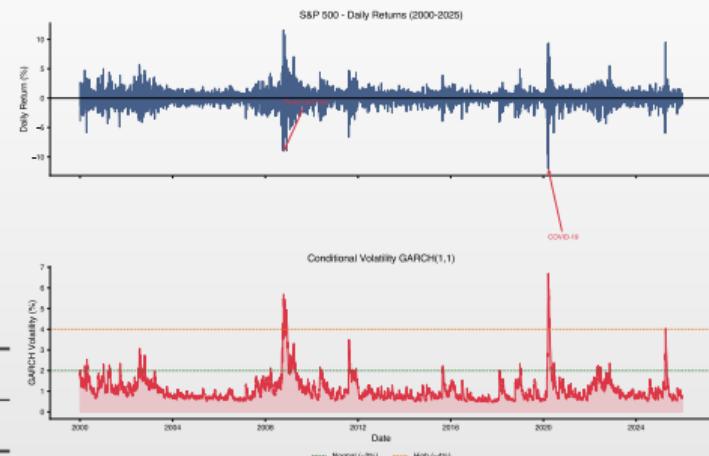
### Descrierea datelor

- Sursă:** Yahoo Finance, S&P 500, date zilnice 2000–2024 ( $T > 6000$ )
- Randamente:**  $r_t = \ln(P_t/P_{t-1}) \times 100$

### Statistică descriptivă

Medie	Std. Dev.	Skewness	Kurtosis	Min	Max
0.034%	1.21%	-0.29	13.8	-12.8%	+11.0%

- Cozi groase (kurtosis  $\gg 3$ ) și asimetrie negativă > efecte ARCH



Q TSA\_ch5\_sp500



## Pasul 2: Testarea efectelor ARCH

### Cod Python $\succ$ ARCH-LM și Ljung-Box pe $r_t^2$

```
import yfinance as yf
from statsmodels.stats.diagnostic import het_arch, acorr_ljungbox
sp = yf.download('^GSPC', start='2000-01-01', end='2024-12-31')
returns = np.log(sp['Close']).diff().dropna() * 100
# Testul ARCH-LM (Engle, 1982)
lm_stat, lm_pval, _, _ = het_arch(returns, nlags=10)
# Ljung-Box pe randamente pătrate
lb = acorr_ljungbox(returns**2, lags=20)
```

### Rezultate

Test	Statistică	p-value
ARCH-LM (10 lags)	892.4	< 0.0001
Ljung-Box $r_t^2$ (lag 20)	4217.6	< 0.0001

- **Concluzie:** Efecte ARCH puternice  $\succ$  heteroscedasticitate semnificativă

## Pasul 3: Estimarea mai multor modele GARCH

Cod Python ➤ estimare 4 modele candidate

```
from arch import arch_model
models = {}
m1 = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, q=1, dist='normal')
models['GARCH-N'] = m1.fit(disp='off')
m2 = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, q=1, dist='t')
models['GARCH-t'] = m2.fit(disp='off')
m3 = arch_model(returns, vol='EGARCH', p=1, q=1, dist='t')
models['EGARCH-t'] = m3.fit(disp='off')
m4 = arch_model(returns, vol='GARCH', p=1, o=1, q=1, dist='t')
models['GJR-t'] = m4.fit(disp='off')
```

### Strategie

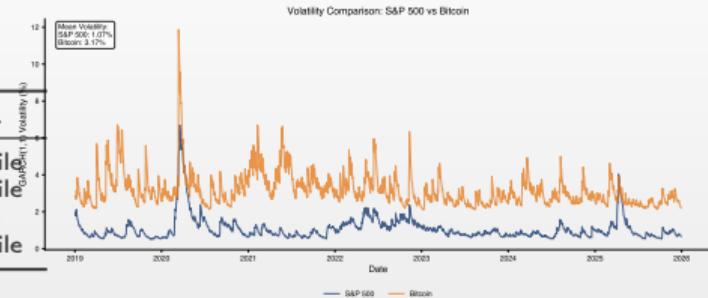
- Estimăm modele simetrice și asimetrice, cu diferite distribuții
- Alegerea finală: **AIC/BIC + diagnostice + interpretare economică**



## Pasul 3: Parametri estimați > comparație

Tabel parametri estimați

Model	$\omega$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\alpha + \beta$	$\nu$	HL
GARCH-N	0.011	0.088	0.901	—	0.989	—	60 zile
GARCH-t	0.011	0.088	0.900	—	0.989	6.42	60 zile
EGARCH-t	0.003	0.103	0.987	-0.120	—	6.38	—
GJR-t	0.010	0.022	0.906	0.126	0.991	6.51	78 zile



### Interpretare

- EGARCH  $\gamma = -0.12$  semnificativ > leverage effect confirmat
- GJR:  $\alpha_{\text{neg}} = \alpha + \gamma = 0.148$  vs  $\alpha_{\text{poz}} = 0.022$  > asimetrie puternică

Q TSA\_ch5\_sp500\_garch



## Pasul 4: Selecția modelului $\succ$ AIC/BIC

### Criterii informaționale

Model	Log-Lik	AIC	BIC	Rang
GARCH(1,1)-N	-8042.3	16090.6	16111.0	4
GARCH(1,1)-t	-7981.5	15971.0	15997.8	3
EGARCH(1,1)-t	-7964.2	<b>15938.4</b>	<b>15971.6</b>	<b>1</b>
GJR-GARCH(1,1)-t	-7968.1	15946.2	15979.4	2

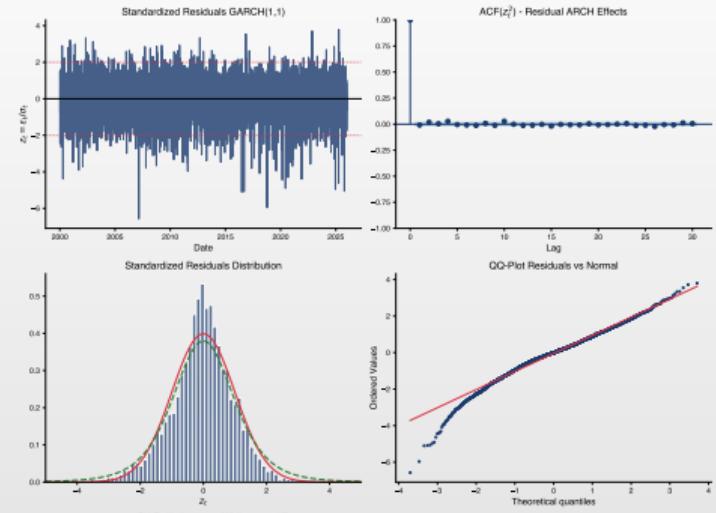
### Decizia

- EGARCH(1,1)-t câștigă:** cel mai mic AIC și BIC
- Student-t superior normalei ( $\Delta\text{AIC} \approx 120$ )  $\succ$  cozi groase contează!
- Leverage effect justifică modele asimetrice ( $\Delta\text{AIC} \approx 33$  față de GARCH-t)

## Pasul 5: Diagnostice $\succ$ EGARCH(1,1)-t

Verificări pe reziduuri standardizate  $z_t = \varepsilon_t / \hat{\sigma}_t$

- Ljung-Box** pe  $z_t$ : p-value = 0.38  $\succ$  fără autocorelație reziduală
- Ljung-Box** pe  $z_t^2$ : p-value = 0.52  $\succ$  efecte ARCH eliminate
- Q-Q plot**: punctele urmează dreapta teoretică Student-t
- Concluzie**: modelul EGARCH(1,1)-t captează adekvat dinamica volatilității



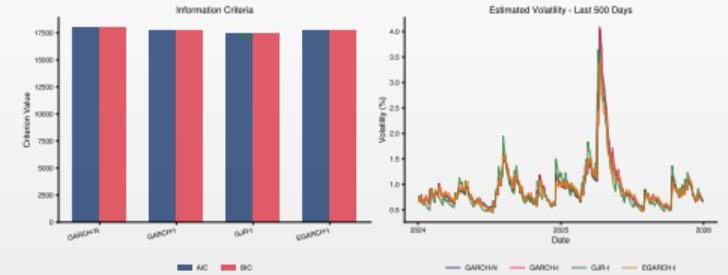
Q TSA\_ch5\_sp500\_diag



## Pasul 5: Leverage effect > vizualizare

### GARCH vs EGARCH > diferențe de volatilitate

- EGARCH produce volatilitate **mai mare** după șocuri negative (2008, 2020)
- GARCH simetric **subestimează** riscul în perioadele de criză
- Diferența: până la 2–3 puncte procentuale în volatilitate zilnică



TSA\_ch5\_sp500\_comp



## Pasul 6: VaR rolling window $\succ$ S&P 500

### Procedura rolling window (W=500 zile, VaR 1%)

```
from scipy import stats
W = 500; alpha = 0.01
VaR_roll = pd.Series(index=returns.index[W:], dtype=float)
for t in range(W, len(returns)):
    train = returns.iloc[t-W:t]
    m = arch_model(train, vol='Garch', p=1, q=1, dist='t')
    res = m.fit(disp='off', show_warning=False)
    fcast = res.forecast(horizon=1, reindex=False)
    sigma = np.sqrt(fcast.variance.values[-1, 0])
    nu = res.params['nu']
    VaR_roll.iloc[t-W] = -stats.t.ppf(alpha, nu)*np.sqrt((nu-2)/nu)*sigma
```

### Caracteristici VaR rolling S&P 500 (2017–2024)

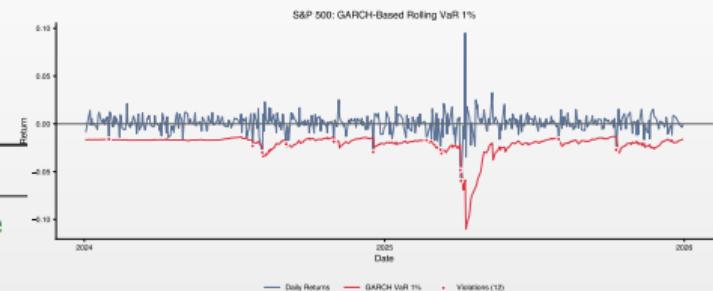
- VaR mediu:** 2.53% ( $\approx$  EUR 253.000 / 10M EUR)
- VaR maxim:** 22.02%  $\succ$  criză COVID-19 ( $\approx$  EUR 2.202.000)
- VaR minim:** 0.91%  $\succ$  perioadă calmă ( $\approx$  EUR 91.000)
- VaR-ul se adaptează:** crește automat în perioadele de criză



## Pasul 6: Backtesting rolling VaR $\succ$ S&P 500

Rezultate Kupiec + Christoffersen (2015 zile out-of-sample)

Test	Statistică	p-value	Decizia
Încălcări	27/2015 ( $\hat{p} = 1.34\%$ )	—	Zona verde
Kupiec (uc)	2.13	0.145	Acceptat
Christoffersen (ind)	0.79	0.375	Acceptat
Combinat (cc)	2.91	0.233	Acceptat



Q TSA\_ch5\_sp500\_var



## Pasul 7: Concluzii $\succ$ Studiu S&P 500

### Rezumatul metodologiei pas cu pas

1. **Date:** randamente log, statistici descriptive  $\succ$  cozi groase, asimetrie
2. **Test ARCH:** ARCH-LM + Ljung-Box pe  $r_t^2 \succ$  efecte ARCH semnificative
3. **Estimare:** 4 modele candidate (simetric/asimetric  $\times$  Normal/Student-t)
4. **Selectie:** AIC/BIC  $\succ$  EGARCH(1,1)-t câștigător
5. **Diagnostice:** reziduuri standardizate  $\succ$  model adekvat
6. **VaR:** rolling window + backtesting Kupiec/Christoffersen  $\succ$  model validat

### Lecții cheie

- Distribuția Student-t este **esențială** pentru date financiare
- Leverage effect: modelele asimetrice **obligatorii** pentru acțiuni
- Backtesting sistematic: nu doar „arată bine”, ci **testat statistic**



## Pasul 1: Datele > randamente zilnice Bitcoin

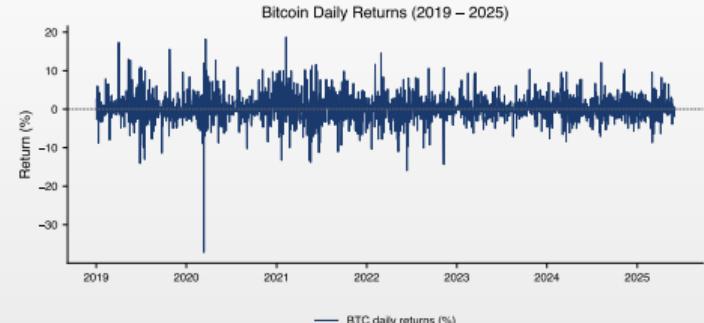
### Descrierea datelor

- Sursă: Yahoo Finance (BTC-USD), date zilnice 2018–2024
- Randamente log: media  $\approx 0.05\%$ , volatilitate  $\approx 3.5\%$

### Statistică descriptivă

Medie	Std. Dev.	Skewness	Kurtosis	Min	Max
0.05%	3.48%	-0.72	12.1	-46.5%	+22.5%

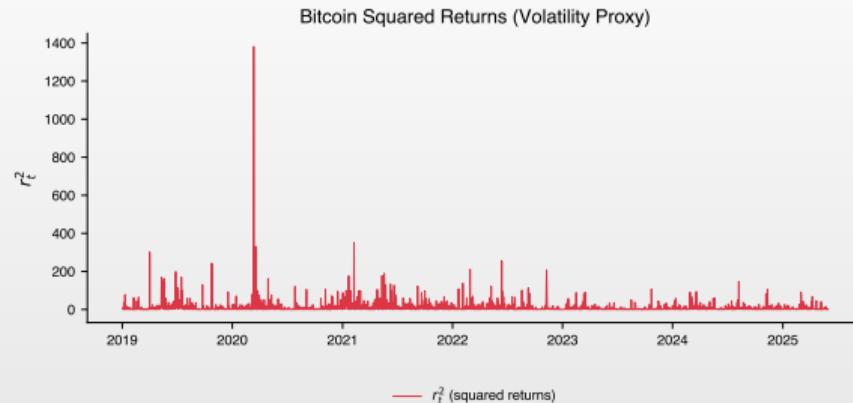
- Volatilitate  $\sim 3\times$  mai mare decât S&P 500
- Kurtosis extremă > riscul de pierderi mari



Q TSA\_ch5\_btc



## Pasul 2: Testarea efectelor ARCH $\succ$ Bitcoin



Q TSA\_ch5\_btc\_arch

## Pasul 3–4: Estimare și selecție modele $\succ$ Bitcoin

### Parametri estimați

Model	$\omega$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\alpha+\beta$	$\nu$	AIC
GARCH-t	0.42	0.131	0.848	—	0.979	4.82	9284
EGARCH-t	0.08	0.184	0.976	-0.061	—	4.79	9276
GJR-t	0.40	0.088	0.854	0.078	0.976	4.85	<b>9271</b>

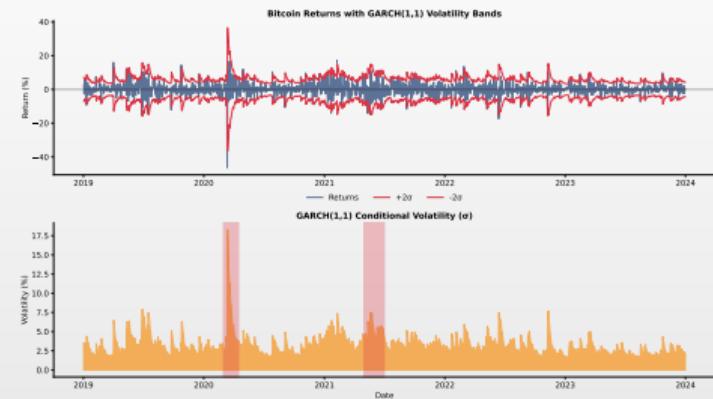
### Interpretare

- **GJR-GARCH-t câștigă** (cel mai mic AIC)
- $\nu \approx 4.8$ : cozi **mult mai groase** decât S&P 500 ( $\nu = 6.4$ )
- $\alpha = 0.131$  (BTC) vs 0.088 (S&P)  $\succ$  Bitcoin reacționează mai rapid la news
- Leverage effect mai slab decât la acțiuni ( $\gamma_{\text{BTC}} = 0.078$  vs 0.126)

## Pasul 5: Volatilitatea condiționată $\succ$ Bitcoin

### Diagnostic GJR-GARCH(1,1)-t

- Ljung-Box pe  $z_t^2$ : p-value = 0.41  $\succ$  efecte ARCH eliminate
- Vârfuri volatilitate: martie 2020 (COVID), mai 2022 (Terra/Luna)
- Volatilitate zilnică: de la 1% (perioadele calme) la  $>15\%$  (crize)



Q TSA\_ch5\_btc\_garch



## Pasul 6: VaR rolling window $\succ$ Bitcoin

### Rolling window GJR-GARCH-t (W=500 zile, VaR 1%)

```
W = 500; alpha = 0.01
VaR_btc = pd.Series(index=btc_returns.index[W:], dtype=float)
for t in range(W, len(btc_returns)):
    train = btc_returns.iloc[t-W:t]
    m = arch_model(train, vol='GARCH', p=1, o=1, q=1, dist='t')
    res = m.fit(disp='off', show_warning=False)
    fcast = res.forecast(horizon=1, reindex=False)
    sigma = np.sqrt(fcast.variance.values[-1, 0])
    nu = res.params['nu']
    VaR_btc.iloc[t-W] = -stats.t.ppf(alpha,nu)*np.sqrt((nu-2)/nu)*sigma
```

### Caracteristici VaR rolling Bitcoin (2018–2024)

- VaR mediu: 9.34% ( $\approx$  EUR 93.400 / 1M EUR)
- VaR maxim: 37.54%  $\succ$  crash COVID martie 2020
- VaR minim: 2.90%  $\succ$  perioadă calmă
- Bitcoin: VaR rolling  $\sim 4 \times$  mai mare decât S&P 500 la aceeași expunere

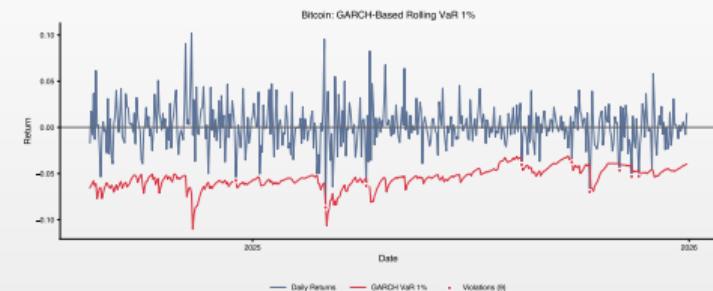
## Pasul 6: Backtesting rolling VaR $\succ$ Bitcoin

### Teste statistice (2421 zile out-of-sample)

Test	Statistică	p-value	Decizia
Încălcări	28/2421 ( $\hat{p} = 1.16\%$ )	—	Zona verde
Kupiec (uc)	0.57	0.450	Acceptat
Christoffersen (ind)	0.94	0.333	Acceptat
Combinat (cc)	1.51	0.471	Acceptat

### Interpretare

- Volatilitatea variază de la 3% la 38%  $\succ$  rolling window esențial
- Toate testele acceptate: model valid pentru managementul riscului



Q TSA\_ch5\_btc\_var



## Comparație finală: S&P 500 vs Bitcoin

### Rezumat comparativ

	S&P 500	Bitcoin
Volatilitate medie	1.2%	3.5%
Kurtosis	13.8	12.1
Student-t $\nu$	6.42	4.82
Cel mai bun model	EGARCH(1,1)-t	GJR-GARCH(1,1)-t
Leverage effect	Puternic ( $\gamma = -0.12$ )	Moderat ( $\gamma = 0.078$ )
Half-life	~60 zile	~42 zile
Rolling VaR 1% mediu	2.53%	9.34%
Rolling VaR 1% maxim	22.02% (COVID)	37.54% (COVID)
Kupiec	Acceptat ( $p=0.145$ )	Acceptat ( $p=0.450$ )
Christoffersen (ind)	Acceptat ( $p=0.375$ )	Acceptat ( $p=0.333$ )

### Concluzie generală

- Re-estimare GARCH la fiecare pas: Kupiec + Christoffersen **acceptate**
- Rolling window VaR: **obligatoriu**  $\succ$  VaR static complet inadecvat
- Student-t + model asimetric: **esențiale** pentru ambele piețe



## Formule cheie

### Modele de Volatilitate

- **ARCH(q):**  $\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$
- **GARCH(1,1):**  $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$
- **EGARCH:**  $\ln(\sigma_t^2) = \omega + \alpha(|z_{t-1}| - \mathbb{E}[|z|]) + \gamma z_{t-1} + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2)$
- **GJR-GARCH:**  $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 I_{t-1} + \beta \sigma_{t-1}^2$

### Proprietăți și Măsuri

- **Var. necond.:**  $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$  | **Half-life:**  $HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha+\beta)}$  | **VaR:**  $VaR_\alpha = z_\alpha \cdot \sigma_{T+1}$

### Test ARCH-LM

- **Statistica:**  $LM = T \cdot R^2 \sim \chi^2(q)$  unde  $R^2$  provine din regresia  $\hat{\varepsilon}_t^2$  pe lag-urile sale
- **Staționaritate:**  $\alpha + \beta < 1$



## Exercițiu AI: Gândire critică

Prompt de testat în ChatGPT / Claude / Copilot

"Descărcați randamentele zilnice S&P 500 cu yfinance. Testați efectele ARCH, ajustați un model GARCH și prognozați volatilitatea pe 20 de zile de tranzacționare. Vreau cod Python complet."

**Exercițiu:**

1. Rulați prompt-ul într-un LLM la alegere și analizați critic răspunsul.
2. Calculează randamentele logaritmice corect? Elimină media înainte de GARCH?
3. Cum testează efectele ARCH? Folosește testul LM al lui Engle?
4. Separă ecuația mediei de ecuația varianței?
5. Discută efectele asimetrice (GJR-GARCH, EGARCH)? Estimările VaR sunt calculate din distribuția condițională?

**Atenție:** Codul generat de AI poate rula fără erori și arăta profesional. *Asta nu înseamnă că e corect.*



## Rezumat ➔ Capitolul 5: Modele de Volatilitate

### Concepție Cheie

- **ARCH(q)**: varianța condiționată depinde de pătratele erorilor trecute (Nobel 2003)
- **GARCH(p,q)**: adaugă lag-uri ale varianței pentru persistență (GARCH(1,1) în 90% din cazuri)
- **EGARCH**: permite leverage effect, fără restricții de pozitivitate
- **GJR-GARCH/TGARCH**: captură asimetria cu variabile indicator

### Aplicații

- Măsurarea și prognoza riscului (VaR, ES)
- Prețul derivatelor, hedging dinamic, managementul portofoliului

### Sfat Practic

- Începe cu GARCH(1,1), verifică leverage effect, alege distribuția care minimizează AIC/BIC!
  - ▶ Student-t adesea superior distribuției normale



## Întrebarea 1

### Întrebare

Ce descrie cel mai bine fenomenul de *volatility clustering* în seriile financiare?

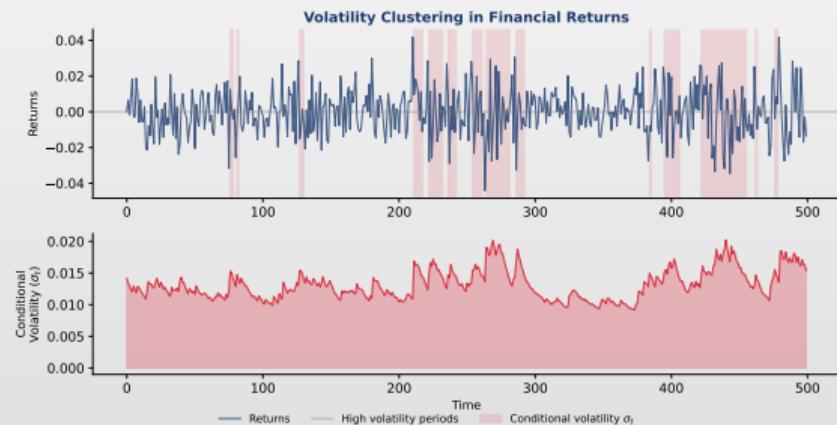
- (A) Randamentele financiare sunt distribuite normal și independente
- (B) Perioadele de volatilitate ridicată sunt urmate de perioade de volatilitate ridicată, și invers
- (C) Volatilitatea este constantă în timp (homoscedasticitate)
- (D) Corelația dintre randamente este întotdeauna pozitivă



## Întrebarea 1: Răspuns

Răspuns Corect: (B) Perioadele de volatilitate ridicată sunt urmate de perioade similare

Volatility clustering este un fapt stilizat fundamental. Implică faptul că varianța condiționată este predictibilă, motivând modelele ARCH/GARCH.



Q TSA\_ch5\_quiz1\_volatility\_clustering



## Întrebarea 2

### Întrebare

Care este diferența principală dintre un model ARCH(q) și un model GARCH(p,q)?

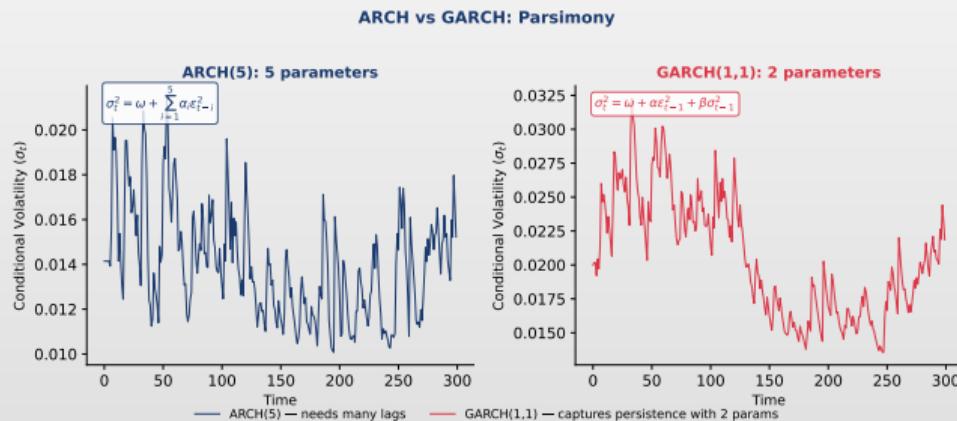
- (A) GARCH modelează media condiționată, ARCH modelează varianța
- (B) ARCH include lag-uri ale varianței condiționate, GARCH nu
- (C) GARCH adaugă lag-uri ale varianței condiționate ( $\sigma_{t-j}^2$ ) pe lângă pătratele erorilor
- (D) ARCH este mai parsimonios decât GARCH



## Întrebarea 2: Răspuns

Răspuns Corect: (C) GARCH adaugă lag-uri ale varianței condiționate

GARCH(1,1) captează aceeași persistență ca ARCH(q) cu doar 2 parametri în loc de q. În practică, GARCH(1,1) este suficient în 90% din cazuri.



Q [TSA\\_ch5\\_quiz2\\_arch\\_vs\\_garch](#)



## Întrebarea 3

### Întrebare

Ce este *leverage effect* și ce modele GARCH îl captează?

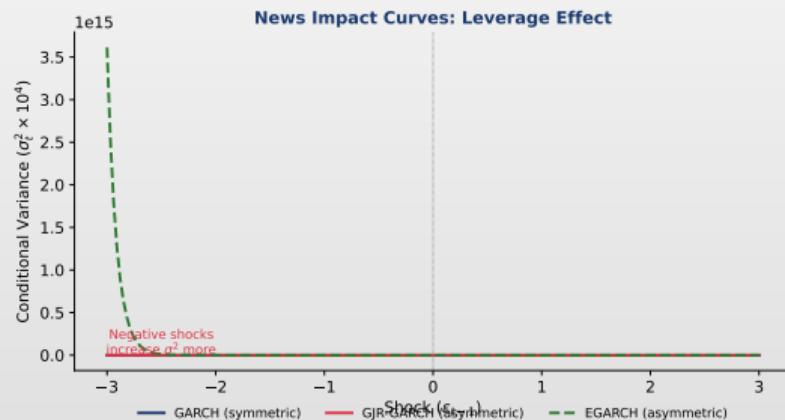
- (A) řocurile pozitive cresc volatilitatea mai mult; captat de GARCH standard
- (B) řocurile negative cresc volatilitatea mai mult; captat de EGARCH și GJR-GARCH
- (C) Volatilitatea este simetrică; captat de toate modelele GARCH
- (D) Efectul de levier financiar asupra prețului acțiunilor; captat de IGARCH



### Întrebarea 3: Răspuns

Răspuns Corect: (B) řocurile negative cresc volatilitatea mai mult; EGARCH și GJR-GARCH

Scăderile de preț cresc volatilitatea **mai mult** decât creșterile de aceeași magnitudine. GARCH standard folosește  $\varepsilon_{t-1}^2$ , pierzând informația de semn.



 TSA\_ch5\_quiz3\_leverage\_effect



## Întrebarea 4

### Întrebare

Care este condiția de staționaritate pentru un model GARCH(1,1)?

- (A)  $\alpha + \beta = 1$
- (B)  $\alpha > 0$  și  $\beta > 0$
- (C)  $\alpha + \beta < 1$ , cu  $\omega > 0$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$
- (D)  $\alpha \cdot \beta < 1$

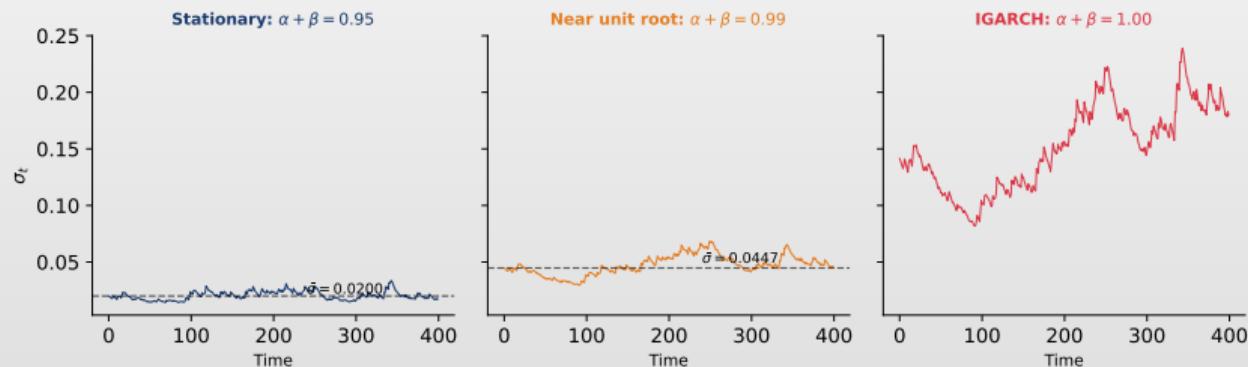


## Întrebarea 4: Răspuns

Răspuns Corect: (C)  $\alpha + \beta < 1$ , cu  $\omega > 0$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$

Asigură existența varianței necondiționate finite:  $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$ . Când  $\alpha + \beta = 1$  (IGARCH), varianța este infinită.

GARCH(1,1) Stationarity:  $\alpha + \beta < 1$



Q TSA\_ch5\_quiz4\_stationarity



## Întrebarea 5

### Întrebare

Ce reprezintă *half-life* al volatilității într-un model GARCH(1,1)?

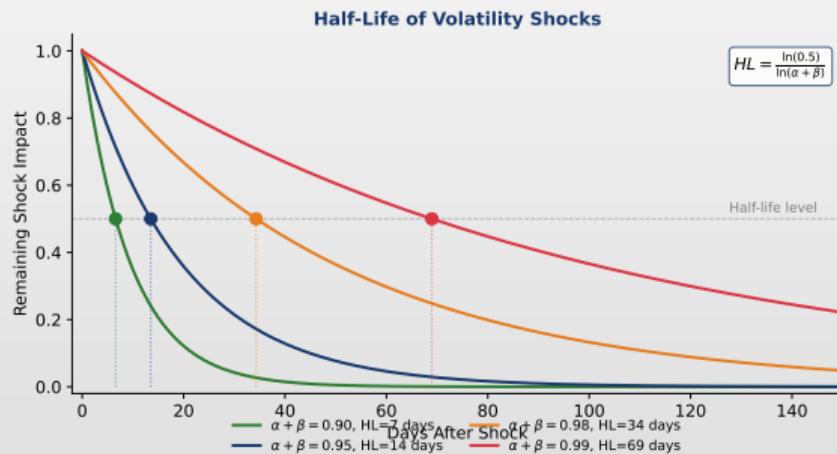
- (A) Timpul necesar ca prețul să revină la media sa
- (B) Numărul de perioade până când volatilitatea devine zero
- (C) Numărul de perioade necesare ca un soc de volatilitate să se reducă la jumătate
- (D) Durata medie a unui episod de volatilitate ridicată



## Întrebarea 5: Răspuns

Răspuns Corect: (C) Numărul de perioade necesare ca un şoc să se reducă la jumătate

$HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha+\beta)}$ . Exemplu: S&P 500 cu  $\alpha + \beta = 0.988$  dă  $HL \approx 58$  zile (şocurile persistă  $\sim 3$  luni).



## Bibliografie I

### Lucrări fundamentale ARCH/GARCH

- Engle, R.F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation, *Econometrica*, 50(4), 987–1007.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 31(3), 307–327.
- Nelson, D.B. (1991). Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach, *Econometrica*, 59(2), 347–370.

### Modele asimetrice și extensii

- Glosten, L.R., Jagannathan, R., & Runkle, D.E. (1993). On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks, *Journal of Finance*, 48(5), 1779–1801.
- Francq, C., & Zakoïan, J.-M. (2019). *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*, 2nd ed., Wiley.

## Bibliografie II

### Manuale și aplicații financiare

- Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*, 3rd ed., Wiley.
- Franke, J., Härdle, W.K., & Hafner, C.M. (2019). *Statistics of Financial Markets*, 4th ed., Springer.
- McNeil, A.J., Frey, R., & Embrechts, P. (2015). *Quantitative Risk Management*, 2nd ed., Princeton University Press.

### Resurse online și cod

- Quantlet:** <https://quantlet.com> ➔ Depozit de cod pentru statistică
- Quantinar:** <https://quantinar.com> ➔ Platformă de învățare metode cantitative
- GitHub TSA:** <https://github.com/QuantLet/TSA> ➔ Cod Python pentru acest curs



# Vă Mulțumim!

## Întrebări?

Materialele cursului sunt disponibile la: <https://danpele.github.io/Time-Series-Analysis/>

