Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 1: Procese Stochastice și Staționaritate

Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

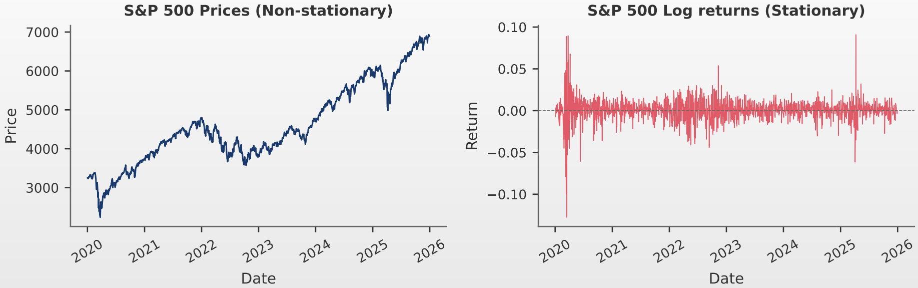
Obiective de învățare

La finalul acestui capitol, veți fi capabili să:

1. **Definiți** procesele stochastice și să înțelegeți proprietățile acestora
2. **Diferențiați** între staționaritatea strictă și slabă (covarianță)
3. **Identificați** procesele de zgomot alb și mers aleatoriu
4. **Calculați** și interpretați ACF (Funcția de Autocorelație) și PACF (Funcția de Autocorelație Parțială)
5. **Aplicați** operatorul lag și diferențierea
6. **Efectuați** teste de staționaritate: ADF (Augmented Dickey-Fuller) și KPSS (Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin)
7. **Analizați** date financiare de tip serie de timp
8. **Diferențiați** între procesele cu rădăcină unitate și cele staționare în trend

Cuprins

Exemple: serii staționare vs. nestaționare

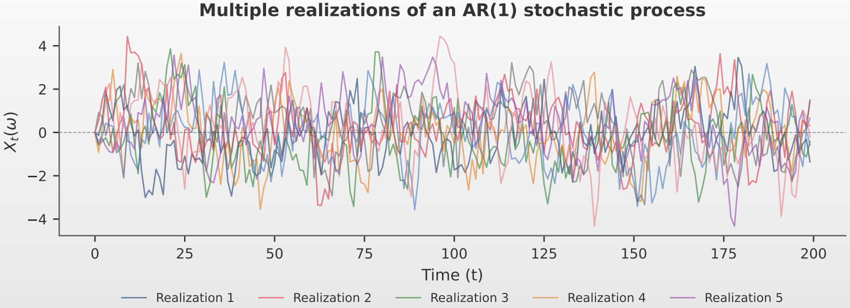


Observații

- **Prețurile** (stânga) sunt nestaționare: trend, media se schimbă în timp
- **Randamentele** (dreapta) sunt staționare: medie ≈ 0, variantă aprox. constantă
- Randamente log: $r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1} \Rightarrow$ nestaționar $\rightarrow$ staționar

TSA_ch1_stationarity

Proces stochastic: ilustrare vizuală



Interpretare

- Fiecare linie este o **realizare diferită** din același proces stochastic subiacent
- Observăm doar **o singură realizare**, dar vrem să înțelegem proprietățile procesului

TSA_ch1_stationarity

Proces stochastic: definiție

Definiție 1 (Proces Stochastic)

- Un **proces stochastic** este o colecție de variabile aleatoare indexate după timp
  - $\{X_t(\omega) : t \in \mathcal{T}, \omega \in \Omega\}$
  - Ω este spațiul eșantion al rezultatelor posibile

Două perspective

- ω **fixat**: O *realizare* $\{X_t(\omega)\}_{t \in \mathcal{T}}$
- t **fixat**: O *variabilă aleatoare* X_t

De reținut

- O serie de timp pe care o observăm este **o singură realizare** a procesului stochastic subiacent

Momentele unui proces stochastic

Primele două momente caracterizează procesul

- **Funcția de Medie**: $\mu_t = \mathbb{E}[X_t]$
- **Autocovarianța (ACVF)**: $\gamma(t,s) = \mathrm{Cov}(X_t, X_s)$
  - $\gamma(t,s) = \mathbb{E}[(X_t - \mu_t)(X_s - \mu_s)]$
- **Autocorelația (ACF)**:
  - $\rho(t,s) = \gamma(t,s)/\sqrt{\mathrm{Var}(X_t) \cdot \mathrm{Var}(X_s)}$

Proprietăți ACF

- **Interval**: $\rho(t,s) \in [-1,1]$
- **Normalizare**: $\rho(t,t) = 1$ (corelație perfectă cu sine)

Important

- **General**: μ_t și $\gamma(t,s)$ pot depinde de t
- **Staționar**: Elimină această dependență

De ce contează staționaritatea

Fără staționaritate

- Media, varianța se schimbă în timp
  - Estimările sunt inconsistente
- Trecutul poate să nu prezică viitorul
- Metodele standard devin inaplicabile
- Corelații false

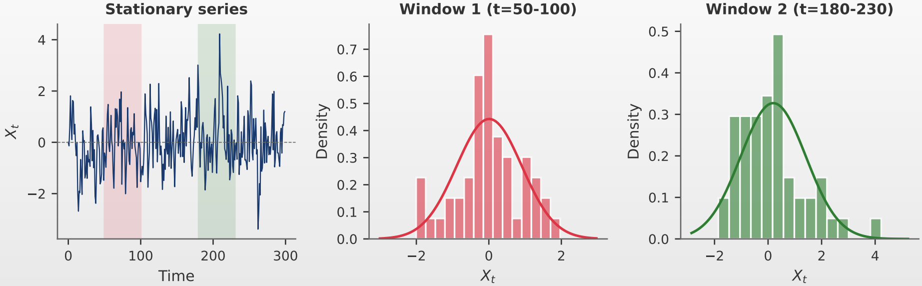
Cu staționaritate

- Proprietăți statistice constante
  - Ergodicitate justificată
- Putem estima dintr-o singură realizare
- Inferență validă posibilă
- Modelele au sens

Principiu fundamental

- Majoritatea modelelor de serii de timp necesită staționaritate
- Exemple: ARMA (AutoRegressive Moving Average), ARIMA (AutoRegressive Integrated Moving Average)
- Seriile nestaționare trebuie transformate (de ex., diferențiere) înainte de modelare

Staționaritatea strictă: ilustrare vizuală



Interpretare

- Translația în timp nu schimbă distribuția comună a variabilelor
- Oricare două ferestre temporale au aceleași proprietăți statistice
- În practică: verificăm doar primele momente (staționaritate slabă)

TSA_ch1_stationarity

Staționaritatea strictă

Definiție 2 (Staționaritate Strictă (Puternică))

- Un proces $\{X_t\}$ este **strict staționar** dacă pentru orice k, orice $t_1, \dots, t_k$, și orice h:
  - $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_k+h})$
- **Notație**: $X \stackrel{d}{=} Y$ înseamnă *egalitate în distribuție*
  - $P(X \leq x) = P(Y \leq x)$

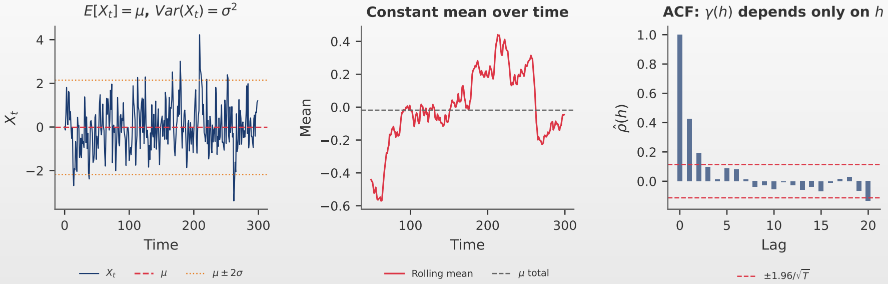
Implicații

- **Distribuții identice**: $F_{X_t}(x)$ nu depinde de t
  - $\mathbb{E}[X_t] = \mu$ (medie constantă, dacă există)
  - $\text{Var}(X_t) = \sigma^2$ (varianță constantă, dacă există)
- **Dependența de lag**: Distribuțiile comune depind doar de lag

Notă

- Staționaritatea strictă este o condiție puternică, adesea imposibil de verificat în practică

Staționaritatea slabă: ilustrare vizuală



Cele trei condiții

- $\mathbb{E}[X_t] = \mu$ constantă $\Rightarrow$ media nu depinde de timp
- $\text{Var}(X_t) = \sigma^2$ constantă $\Rightarrow$ varianța nu depinde de timp
- $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$ $\Rightarrow$ autocovarianța depinde doar de lag h

TSA_ch1_stationarity

Staționaritatea slabă (covarianță)

Definiție 3 (Staționaritate Slabă)

- Un proces $\{X_t\}$ este **slab staționar** (sau staționar în covarianță) dacă:
  - $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$ pentru toți t
    - Momente finite de ordin 2
  - $\mathbb{E}[X_t] = \mu$ pentru toți t
    - Medie constantă
  - $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$
    - Covarianța depinde doar de lag-ul h, nu de t

Proprietăți

- **Autocovarianța** este funcție doar de lag:
  - $\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \mathbb{E}[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)]$
- **Autocorelația**:
  - $\rho(h) = \gamma(h)/\gamma(0) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h})/\text{Var}(X_t)$
- **Notă**: $\rho(0) = 1$, $|\rho(h)| \leq 1$, $\rho(h) = \rho(-h)$ (simetrie)

Relația între staționaritate strictă și slabă

Teoremă 1 (Implicație Fundamentală)

- Dacă $\{X_t\}$ este **strict staționar** și $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$, atunci $\{X_t\}$ este și **slab staționar**

Demonstrație.

- Fie t_1, t_2 oarecare și h deplasare temporală arbitrară
- Din invarianța distribuției comune: $(X_{t_1}, X_{t_2}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+h}, X_{t_2+h})$
- $\mathbb{E}[X_{t_1}] = \mathbb{E}[X_{t_1+h}] = \mu$ (medie constantă)
- $\text{Cov}(X_{t_1}, X_{t_2}) = \text{Cov}(X_{t_1+h}, X_{t_2+h})$
- Deci autocovarianța depinde doar de diferența $t_2 - t_1 = h$, nu de t_1

$\square$

Atenție: Reciproca *nu* este adevărată.

- Există procese slab staționare dar **nu** strict staționare

Exemplu: modelul AR(1) este slab staționar

Modelul AR(1) (AutoRegressive de ordin 1)

- $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad |\phi| < 1$
- $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ — WN (White Noise) = zgomot alb

Verificarea celor trei condiții

1. **Medie constantă**: $\mathbb{E}[X_t] = \phi\,\mathbb{E}[X_{t-1}] + 0 = \phi\,\mathbb{E}[X_t] \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_t] = 0$
2. **Varianță constantă**: $\text{Var}(X_t) = \phi^2\,\text{Var}(X_t) + \sigma^2 \quad \Rightarrow \quad \text{Var}(X_t) = \dfrac{\sigma^2}{1-\phi^2}$
3. **Autocovarianța depinde doar de lag**: $\gamma(h) = \phi^{|h|} \cdot \dfrac{\sigma^2}{1-\phi^2}, \quad \rho(h) = \phi^{|h|}$

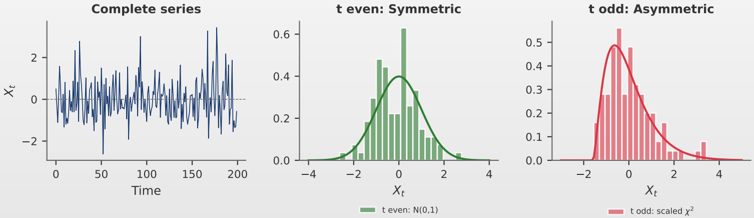
Exemplu numeric: $\phi = 0.8$, $\sigma^2 = 1$

- $\mathbb{E}[X_t] = 0, \quad \text{Var}(X_t) = \frac{1}{1-0.64} = 2.78, \quad \rho(1) = 0.8, \quad \rho(2) = 0.64, \quad \rho(5) = 0.33$

Contraexemplu: slab staționar dar *nu* strict staționar

Construcție

- Fie $\{X_t\}$ variabile aleatoare **independente** cu: t par: $X_t \sim N(0,1)$; t impar: $X_t \sim \frac{\chi^2(5)-5}{\sqrt{10}}$



Slab staționar ✓

- $\mathbb{E}[X_t] = 0$, $\text{Var}(X_t) = 1$, $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = 0$

NU strict staționar ×

- Asimetria diferă (0 vs > 0) $\Rightarrow X_1 \overset{d}{\neq} X_2$

TSA_ch1_stationarity

Proprietățile funcției de autocovarianță

Propoziție 1

Pentru un proces slab staționar, ACVF $\gamma(h)$ satisface:

- **Simetrie:** $\gamma(h) = \gamma(-h)$
- **Maximum la zero:** $|\gamma(h)| \leq \gamma(0) = \text{Var}(X_t)$
- **Definit nenegativ:** $\sum_{i,j} a_i a_j \gamma(i-j) \geq 0$ pentru orice $a_1, \ldots, a_n$

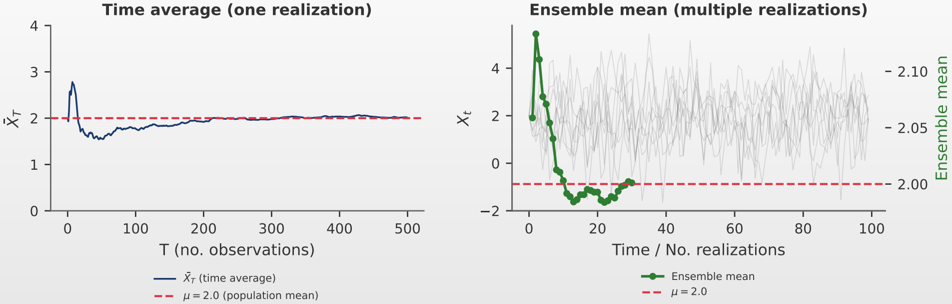
Demonstrație (prop. 3)

- $\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_{t+i}\right) = \sum_{i,j} a_i a_j \gamma(i-j) \geq 0 \quad$ (varianța ≥ 0)

Implicație

- Nu orice funcție poate fi o funcție de autocovarianță validă

Ergodicitatea: ilustrare vizuală



- **Media temporală** (o singură realizare) și **media ansamblului** (realizări multiple) converg ambele la μ
- Ergodicitatea garantează că putem estima μ dintr-o **singură serie temporală** suficient de lungă

TSA_ch1_stationarity

Ergodicitatea: fundamentul inferenței din date

Definiție 4 (Ergodicitate pentru Medie)

Un proces staționar $\{X_t\}$ este ergodic pentru medie dacă $\bar{X}_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t \xrightarrow{P} \mu$ când $T \to \infty$.

De ce contează ergodicitatea?

- **Problema**: Avem doar **o singură realizare** a procesului stochastic
- **Soluția**: Ergodicitatea permite estimarea lui μ din $\bar{X}_T$ (media temporală $\to$ media populației)
- Fără ergodicitate, inferența statistică nu este posibilă.

Teoremă 2 (Condiție Suficientă)

Dacă $\sum_{h=0}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty$ (autocovarianțe absolut sumabile), procesul este ergodic pentru medie.

Contraexemplu: staționar dar ne-ergodic

- Fie $Z \sim N(0,1)$, $X_t = Z \ \forall t$. Strict staționar, dar $\bar{X}_T = Z \Rightarrow$ **nu** converge la $\mu = 0$
- **Concluzie**: ergodicitatea este o ipoteză **suplimentară**, mai puternică decât staționaritatea

Densitatea spectrală: domeniul frecvențelor

Definiție 5 (Densitatea spectrală de putere)

Pentru un proces staționar cu $\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty$, **densitatea spectrală este:**

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h)\, e^{-i\omega h} = \frac{1}{2\pi}\left[\gamma(0) + 2\sum_{h=1}^{\infty} \gamma(h)\cos(\omega h)\right], \quad \omega \in [-\pi, \pi].$$

Descompune varianța: $\gamma(0) = \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega)\, d\omega$.

Interpretare

- $S(\omega)$ mare la ω mic $\Rightarrow$ ciclu lung dominant
- Zgomot alb: $S(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$ (plat)
- AR(1) $\phi > 0$: putere concentrată la frecvențe joase
- MA(1) $\theta > 0$: putere concentrată la frecvențe joase

Conexiuni

- **Perechea Fourier**: $S(\omega) \leftrightarrow \gamma(h)$ (echivalente)
- Domeniul timp (ACF) $\equiv$ domeniul frecvență (spectru)
- **Periodograma**: estimator empiric al lui $S(\omega)$
- Util pentru detectarea sezonalității ascunse

Teorema de descompunere Wold

Teoremă 3 (Wold, 1938)

- Orice proces **staționar în covarianță** $\{X_t\}$ poate fi scris ca: $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + \eta_t$
  - $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2) \Rightarrow$ zgomot alb, cu $\psi_0 = 1$, $\sum \psi_j^2 < \infty$
  - $\eta_t \Rightarrow$ componenta deterministă (perfect predictibilă)

Semnificația teoremei Wold

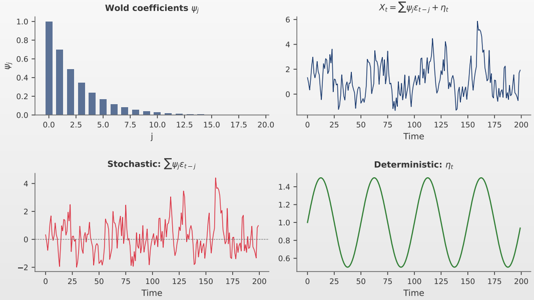
- **Descompunere**: Orice proces staționar = **MA(∞)** (Moving Average de ordin infinit) + componentă deterministă
  - Justifică teoretic modelele MA(q) și ARMA(p, q)
  - Coeficienții ψ_j măsoară impactul șocurilor trecute

Demonstrația teoremei Wold (schiță)

Schiță de demonstrație.

1. **Spațiul Hilbert al trecutului**: Definim $\mathcal{H}_t = \overline{\text{sp}}\{X_s : s \leq t\}$ — spațiul închis generat de valorile trecute și prezente, cu produsul scalar $\langle X, Y \rangle = \text{Cov}(X, Y)$.
2. **Inovația**: Definim $\varepsilon_t = X_t - \hat{X}_t$, unde $\hat{X}_t = \text{Proj}_{\mathcal{H}_{t-1}}(X_t)$ este proiecția ortogonală. Prin construcție, $\varepsilon_t \perp \mathcal{H}_{t-1}$, deci $\varepsilon_t \perp \varepsilon_s$ pentru $t \neq s \Rightarrow \{\varepsilon_t\}$ este zgomot alb.
3. **Reprezentarea iterativă**: Aplicând recursiv proiecția:
$$X_t = \varepsilon_t + \psi_1\varepsilon_{t-1} + \psi_2\varepsilon_{t-2} + \cdots + \eta_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + \eta_t$$
unde ψ_j rezultă din proiecțiile succesive, iar $\eta_t \in \mathcal{H}_{-\infty} = \bigcap_t \mathcal{H}_t$.
4. **Convergența**: $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ deoarece $\text{Var}(X_t) < \infty$ (staționaritate).
5. **Componenta deterministă**: $\eta_t \in \mathcal{H}_{-\infty} \Rightarrow \eta_t$ este *perfect predictibilă* din trecutul infinit. $\square$

Teorema Wold: ilustrare vizuală

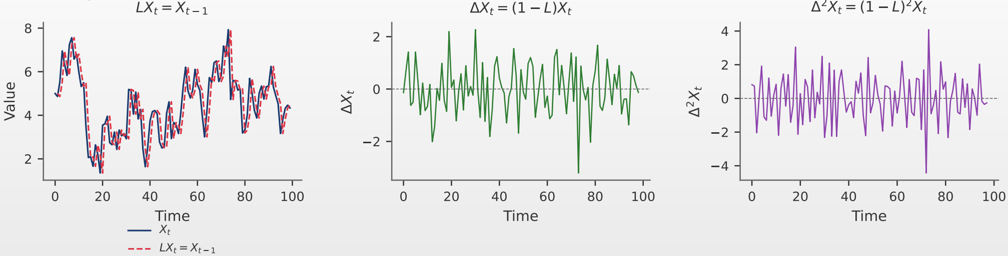


Interpretare

- X_t se descompune în componentă **stochastică** (MA(∞)) și componentă **deterministă** (η_t)
- Coeficienții ψ_j descresc $\Rightarrow$ șocurile recente au impact mai mare decât cele îndepărtate

TSA_ch1_operators

Operatorul lag: ilustrare vizuală



Proprietăți

- $LX_t = X_{t-1} \Rightarrow$ operatorul lag deplasează seria cu o perioadă în trecut
- $L^k X_t = X_{t-k} \Rightarrow$ deplasare cu k perioade; $L^0 = I$ (identitate)
- **Operatorul diferență**: $\Delta = (1-L)$, astfel $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$

TSA_ch1_operators

Operatorul lag

Definiție 6 (Operatorul lag)

- **Operatorul lag** (sau operatorul de întârziere) L este definit prin: $LX_t = X_{t-1}$

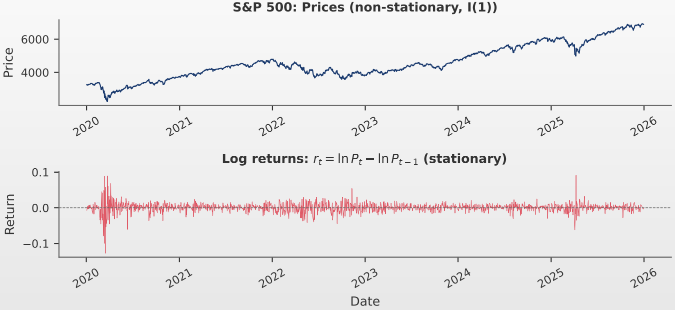
Proprietăți

- **Puteri**: $L^k X_t = X_{t-k}$ (întârzie cu k perioade)
  - Notație compactă pentru modele
- **Identitate**: $L^0 = I$
- **Polinom**: $(1 - \phi L)X_t = X_t - \phi X_{t-1}$

Exemple

- **Prima diferență**: $(1 - L)X_t = X_t - X_{t-1}$
- **A doua diferență**: $(1 - L)^2 X_t = \Delta^2 X_t$
- **Sezonieră**: $(1 - L^{12})X_t$

Efectul diferențierii: S&P 500



Interpretare

- **Sus**: Prețuri S&P 500 $\Rightarrow$ trend clar, nestaționar ($I(1)$)
- **Jos**: Randamente log $r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}$ $\Rightarrow$ fluctuează în jurul mediei ≈ 0, staționar

TSA_ch1_operators

Diferențierea

De ce diferențiem?

- **Prima Diferență**: $\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = (1-L)X_t$
  - Elimină trendul și rădăcina unitate
  - Mers aleator: $\Delta X_t = \varepsilon_t$

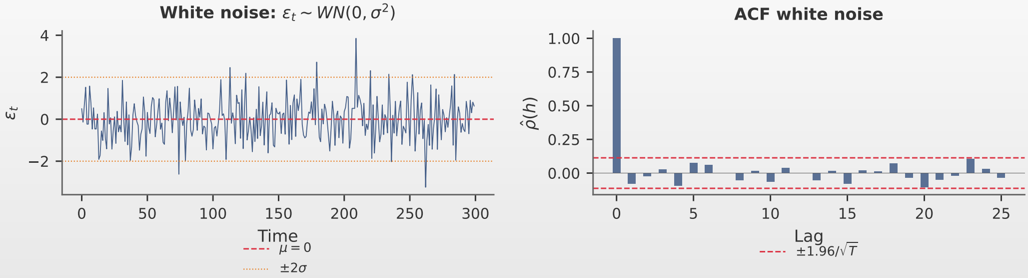
Definiție 7 (Proces Integrat de Ordin d)

- Un proces $\{X_t\}$ este **integrat de ordin** d, notat $X_t \sim I(d)$, dacă:
  - $\Delta^d X_t = (1-L)^d X_t$ este staționar ($I(0)$ proces)
  - $\Delta^{d-1} X_t$ **nu** este staționar

Exemple

- $I(0)$: Proces staționar (zgomot alb, AR staționar)
- $I(1)$: Mers aleator $\Rightarrow \Delta X_t = \varepsilon_t$ este staționar
- $I(2)$: Necesită două diferențieri pentru staționaritate

Zgomot alb: ilustrare vizuală



TSA_ch1_white_noise

Procesul de zgomot alb

Definiție 8 (Zgomot Alb)

- Un proces $\{\varepsilon_t\}$ este **zgomot alb**, notat $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, dacă:
  - $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$ pentru orice t (medie zero)
  - $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$ pentru orice t (varianță constantă)
  - $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ pentru $t \neq s$ (necorelat)

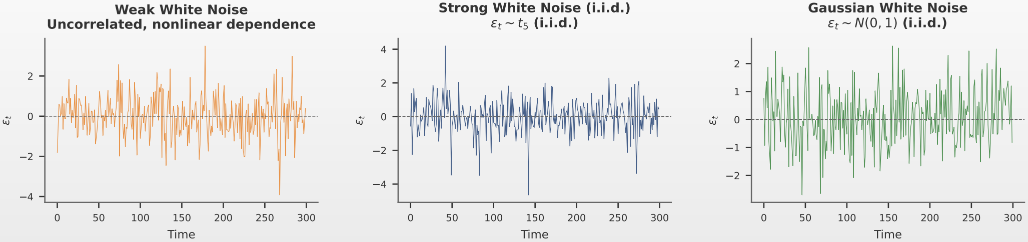
ACF al zgomotului alb

- Din definiție: $\gamma(0) = \sigma^2$ și $\gamma(h) = 0$ pentru $h \neq 0$; $\rho(h) = \begin{cases} 1 & h = 0 \\ 0 & h \neq 0 \end{cases}$

Observație

- Zgomotul alb este cel mai simplu proces staționar — element fundamental al modelelor ARMA
- Există trei tipuri: slab, puternic (i.i.d.) și Gaussian (vezi diapozitivul următor)

Cele trei tipuri de zgomot alb

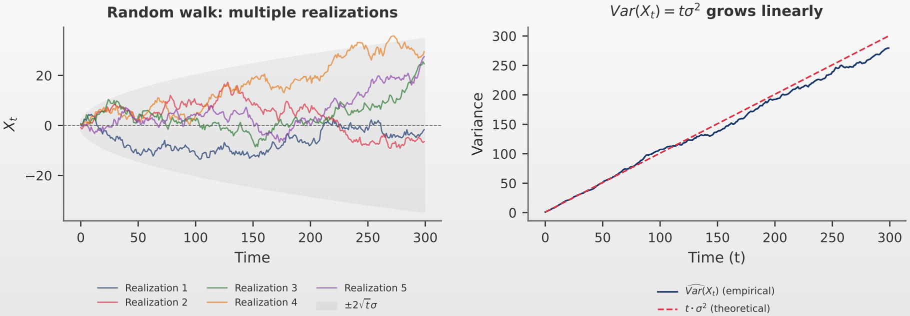


Relația de incluziune: Gaussian $\subset$ puternic (i.i.d.) $\subset$ slab (necorelat)

- **Slab**: $\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$, dar pot exista dependențe neliniare (ex. GARCH)
- **Puternic**: ε_t sunt i.i.d. (independente și identic distribuite) — orice distribuție (ex. Student-t)
- **Gaussian**: $\varepsilon_t \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$ — necorelat $\Leftrightarrow$ independent

TSA_ch1_white_noise

Mers aleator: vizualizare



Observații

- Fiecare șoc are **efect permanent**; $\mathrm{Var}(X_t) = t\sigma^2$ crește liniar cu timpul
- **Soluție** — diferențierea transformă în zgomot alb, $\Delta X_t = \varepsilon_t$

TSA_ch1_random_walk

Procesul de mers aleatoriu

Definiție 9 (Mers Aleatoriu)

- $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2),\ X_0 = 0$
- **Forma explicită**: $X_t = \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$

Propoziție 2 (Proprietăți)

- $\mathbb{E}[X_t] = 0$
- $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$ (crește cu timpul)
- $\text{Cov}(X_t, X_s) = \min(t, s) \cdot \sigma^2$

Demonstrații.

- $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i\right] = 0$; $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$ (independență); $\text{Cov}(X_t, X_s) = \min(t, s)\,\sigma^2$

$\square$

Nestaționar

- $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$ depinde de $t \Rightarrow$ mersul aleatoriu **nu este staționar**

Mers aleator cu drift

Definiție 10 (Mers Aleatoriu cu Drift)

- $X_t = c + X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad c \neq 0$ este **driftul**
- **Forma explicită**: $X_t = ct + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$

Propoziție 3 (Proprietăți)

$\mathbb{E}[X_t] = ct$ (trend liniar); $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$ (crește cu timpul)

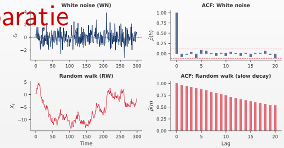
Diferențiere

$\Delta X_t = c + \varepsilon_t$ — constantă plus zgomot alb $\Rightarrow$ seria diferențiată este staționară

Importanța practică

- PIB nominal, prețuri de acțiuni $\Rightarrow$ adesea modele ca RW cu drift
- Testul ADF: variante fără constantă, cu constantă, cu constantă și trend

Zgomot alb vs mers aleatoriu: comparație



Zgomot alb

- Staționar, Var $= \sigma^2$ (const.), ACF $= 0$ pentru $h \neq 0$, fără memorie

Mers aleator

- Nestaționar, Var $= t\sigma^2$ (crește), ACF ≈ 1 (lent), șocuri permanente

Legătură

- $\Delta X_t = \varepsilon_t$

TSA_ch1_random_walk

Staționaritate în trend vs. staționaritate în diferențe

Staționaritate în trend — TS (Trend Stationary)

- **Model**: $Y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$
  - Trend **determinist**
  - Abaterile de la trend sunt temporare
- **Soluție**: regresie pe t, se extrag reziduurile
- **Efect**: Șocurile *nu* au efect permanent

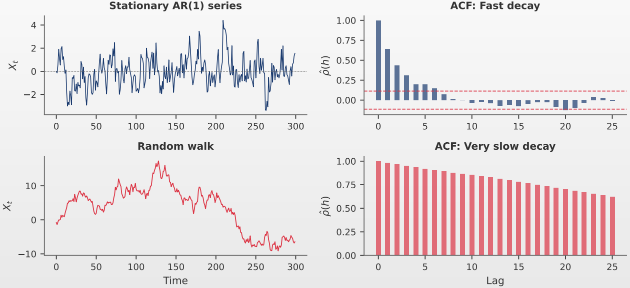
Staționaritate în diferențe — DS (Difference Stationary)

- **Model**: $Y_t = c + Y_{t-1} + \varepsilon_t$
  - Trend **stochastic**
  - Abaterile de la trend sunt permanente
- **Soluție**: diferențiere (ΔY_t)
- **Efect**: Șocurile AU efect permanent

De ce contează distincția?

- **Diferențiere pe TS**: introduce rădăcină unitară artificială în MA
- **Regresie pe DS**: produce reziduuri **tot nestaționare**
- **Soluție**: Testele ADF și KPSS ajută la distincție

Comparație ACF: staționar vs mers aleatoriu

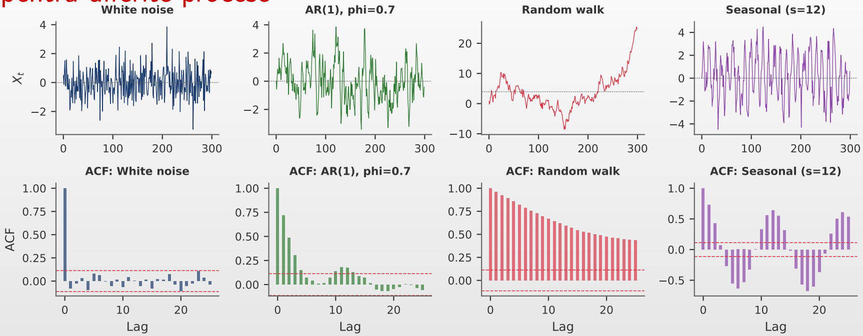


Interpretare

- **Staționar**: ACF scade rapid (exponențial sau oscilant) spre zero
- **Mers aleator**: ACF scade foarte lent, rămâne aproape de 1
- **Regulă practică**: ACF lent $\Rightarrow$ suspectăm rădăcină unitate $\Rightarrow$ test ADF

TSA_ch1_random_walk

Tipare ACF pentru diferite procese



Interpretare

- **Zgomot alb**: ACF = 0; **Staționar**: scade rapid; **Nestaționar**: scade lent
- **Sezonier**: Vârfuri la lag-uri sezoniere (12, 24 pentru date lunare)

TSA_ch1_acf_patterns

Funcția de autocorelație eșantion

ACF eșantion la lag-ul h

- $\hat{\rho}(h) = \frac{\sum_{t=1}^{T-h}(x_t - \bar{x})(x_{t+h} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2}$; Proprietăți: $\hat{\rho}(0) = 1$, $|\hat{\rho}(h)| \leq 1$

Teoremă 4 (Bartlett, 1946)

- Sub H_0: zgomot alb, pentru T mare: $\hat{\rho}(h) \approx N(0, 1/T)$

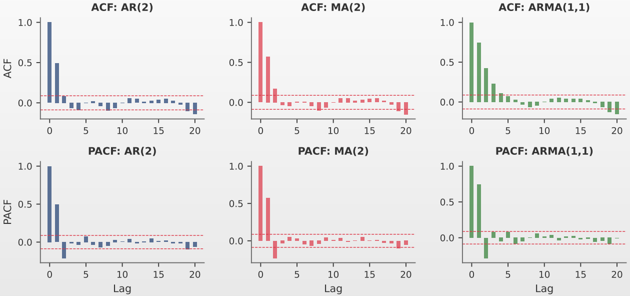
Interval de încredere 95%

- $\pm 1.96/\sqrt{T}$ (benzile din graficele ACF)

Atenție

- Formula Bartlett validă **doar sub H_0: zgomot alb**; pentru AR/MA, varianța asimptotică diferă

Tipare ACF și PACF



Reguli de identificare

- **AR(p)**: ACF scade exponențial, PACF se anulează după lag p
- **MA(q)**: ACF se anulează după lag q, PACF scade exponențial
- **ARMA(p, q)**: Ambele scad exponențial $\Rightarrow$ identificarea necesită criterii informaționale

TSA_ch1_acf_patterns

Funcția de autocorelație parțială (PACF)

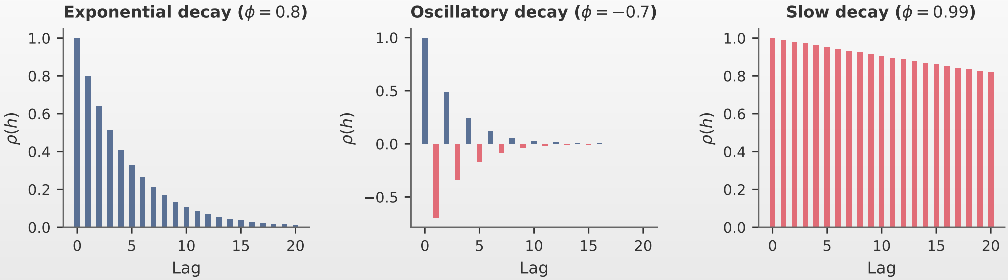
Definiție 11 (Autocorelația Parțială)

- **PACF** la lag-ul h, notat ϕ_{hh}: ultimul coeficient din regresia:
  - $X_t = \phi_{h1} X_{t-1} + \phi_{h2} X_{t-2} + \cdots + \phi_{hh} X_{t-h} + e_t$
- **Alternativ**:
  - $\phi_{hh} = \text{Corr}(X_t - \hat{X}_t^{(h-1)}, X_{t-h} - \hat{X}_{t-h}^{(h-1)})$
- **Interpretare**: Dependența *directă* la lag-ul h
  - Elimină efectul lag-urilor intermediare

Aplicație practică

- PACF identifică direct ordinul p al unui model AR(p)
- $\phi_{hh} = 0$ pentru $h > p \Rightarrow$ PACF se anulează după lag-ul p

Tipare de scădere ACF



Interpretare

- **Scădere exponențială**: Dependență pozitivă persistentă (AR cu $\phi > 0$)
- **Scădere oscilantă**: Dependență alternantă (AR cu $\phi < 0$)
- Viteza de scădere indică puterea memoriei procesului

TSA_ch1_acf_patterns

Testul Augmented Dickey-Fuller (ADF)

Modelul ADF

- $\Delta X_t = \alpha + \gamma X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \delta_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t, \quad \gamma = \rho - 1, \quad H_0 : \gamma = 0 \Leftrightarrow \rho = 1$

Ipoteze

- H_0: $\gamma = 0$ (rădăcină unitate)
- H_1: $\gamma < 0$ (staționar)

Statistica de Test

- $\tau_{ADF} = \hat{\gamma} \,/\, SE(\hat{\gamma})$
- $\hat{\gamma}$ = coeficient OLS (Ordinary Least Squares) al X_{t-1}
- $SE(\hat{\gamma})$ din regresia OLS

Regula de decizie

- $\tau_{ADF} <$ val. critică $\Rightarrow$ Respingem H_0 $\Rightarrow$ Staționar
- $\tau_{ADF} \geq$ val. critică $\Rightarrow$ Nestaționar (rădăcină unitate)
- Valorile critice urmează distribuția Dickey-Fuller (**nu** t-Student!)

Testul KPSS

Modelul

- $X_t = \xi t + r_t + \varepsilon_t$ unde $r_t = r_{t-1} + u_t$

Ipoteze (opus ADF)

- H_0: $\sigma_u^2 = 0$ (staționar)
- H_1: $\sigma_u^2 > 0$ (rădăcină unitate)

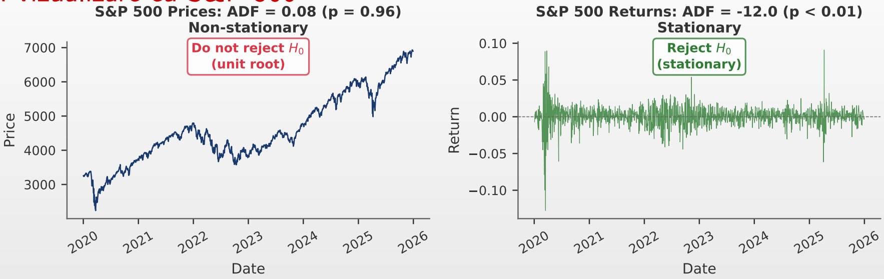
Statistica de Test

- $LM = \frac{\sum_{t=1}^{T} S_t^2}{T^2 \hat{\sigma}_{LR}^2}$
- $S_t = \sum_{i=1}^{t} \hat{e}_i$, $\hat{\sigma}_{LR}^2$ = varianța de lungă durată

Regula de decizie

- $LM >$ valoarea critică $\Rightarrow$ Respingem H_0 $\Rightarrow$ Nestaționar
- $LM \leq$ valoarea critică $\Rightarrow$ Staționar

Testul ADF: vizualizare cu S&P 500



TSA_ch1_unit_root_tests

Interpretarea testului ADF

- **Ipoteza**: H_0: Rădăcină unitate
  - Valori critice: -3.43 (1%), -2.86 (5%), -2.57 (10%)
  - $\tau <$ val. critică $\Rightarrow$ respingem $H_0 \Rightarrow$ serie staționară
- **S&P 500**: Prețuri nestaționare; Randamente staționare

Folosirea ADF și KPSS împreună

Testare confirmatorie

- **ADF respinge H_0 + KPSS nu respinge**: Staționar
- **ADF nu respinge + KPSS respinge H_0**: Rădăcină Unitară
- **Ambele resping sau ambele nu resping**: Neconcludent
  - Necesită teste suplimentare: PP (Phillips-Perron)
  - Sau DF-GLS (Dickey-Fuller Generalized Least Squares)

Flux de lucru

- **Pasul 1**: Test ADF (H_0: rădăcină)
- **Pasul 2**: Test KPSS (H_0: staționar)
- **Pasul 3**: Rezultate concordante $\Rightarrow$ OK
  - Altfel: teste PP, DF-GLS

Testul Phillips-Perron (PP)

Definiție 12 (Phillips-Perron, 1988)

- Testează aceeași ipoteză ca ADF: H_0: rădăcină unitate ($\gamma = 0$)
- Modelul de bază (fără lag-uri augmentate): $\Delta y_t = \alpha + \gamma\, y_{t-1} + e_t$
- Corectează autocorelația și heteroscedasticitatea din e_t prin **corecție neparametrică** (Newey-West) a statisticii t

Statistica PP

- $Z_t = t_\gamma \cdot \sqrt{\frac{s_e^2}{\hat{\lambda}^2}} - \frac{T(\hat{\lambda}^2 - s_e^2)}{2\hat{\lambda}^2 \cdot SE(\hat{\gamma})}$
- $\hat{\lambda}^2$: varianța de lungă durată (kernel Newey-West)
- s_e^2: varianța reziduală OLS
- Valorile critice: identice cu ADF (distribuția Dickey-Fuller)

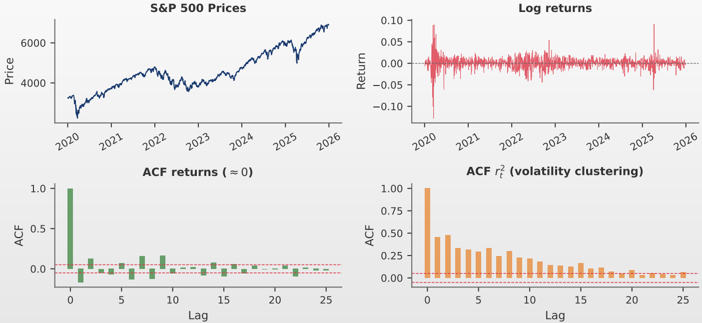
PP vs ADF

- **ADF**: adaugă lag-uri $\Delta y_{t-j} \Rightarrow$ parametric
- **PP**: corectează statistica $t \Rightarrow$ neparametric
- PP mai robust la heteroscedasticitate
- ADF mai robust la MA cu rădăcini aproape de -1

Python

```
from statsmodels.tsa.stattools import PhillipsPerron
```

Analiza S&P 500: prezentare generală

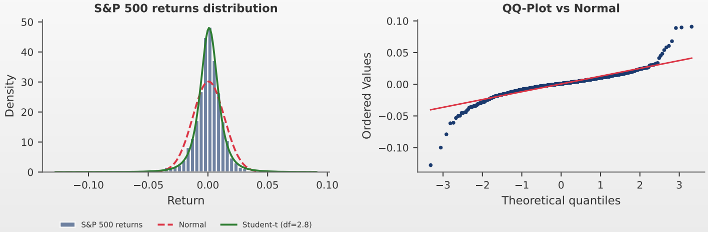


Observații

- **Prețuri**: Trend ascendent, nestaționar; **Randamente**: Medie ≈ 0, staționar
- **ACF randamente**: ≈ 0 (eficient); **ACF** r_t^2: Semnificativ (volatility clustering)

TSA_ch1_ts_basics

Fapte stilizate ale randamentelor financiare



Proprietăți observate

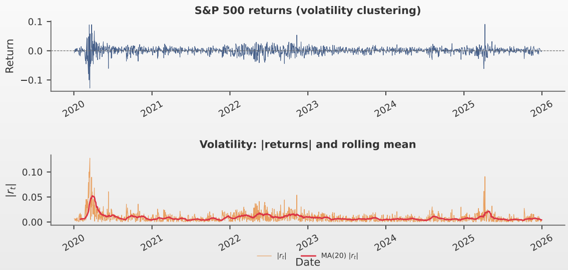
- Asimetrie negativă (coadă stângă)
- Kurtosis excesiv ($\gg 3$)
- Cozi groase (heavy tails)

Implicații

- Distribuția normală inadecvată
- Evenimente extreme mai probabile
- Necesită distribuții cu cozi groase
- Ex.: Student-t, GED (Generalized Error Distribution)

TSA_ch1_ts_basics

Volatility clustering

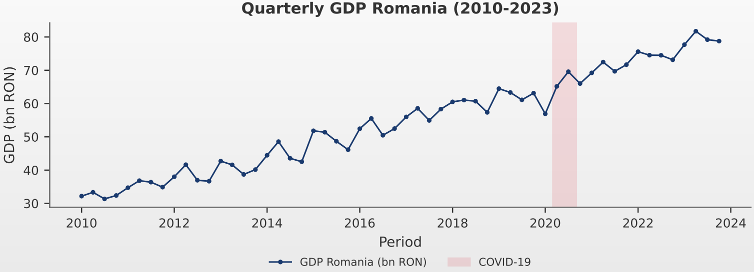


Observații

- Randamente mari (în valoare absolută) urmate de randamente mari
- Perioade de calm urmate de perioade de volatilitate ridicată
- **Volatilitate variabilă în timp** $\Rightarrow$ necesită modele specializate (Cap. 5)
- Modele ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity) / GARCH (Generalized ARCH)

TSA_ch1_ts_basics

Studiu de caz: PIB-ul trimestrial al României



TSA_ch1_case_gdp

Analiza inițială

- **Date**: PIB trimestrial România 2010–2023 (56 obs., INS — Institutul Național de Statistică / Eurostat)
- **Observații**: Trend ascendent, posibil sezonier
  - Șoc structural COVID-19 vizibil
- **Ipoteză**: Serie nestaționară ⇒ testăm cu ADF și KPSS

Testarea staționarității: ADF și KPSS

Testul ADF

- **Ipoteză**: H_0: Rădăcină unitate
- **Rezultat**: Stat. ADF: -1.23
  - Val. critică: -2.89
  - Nu respingem H_0

Testul KPSS

- **Ipoteză**: H_0: Staționară
- **Rezultat**: Stat. KPSS: 0.89
  - Val. critică: 0.46
  - Respingem H_0

Concluzie: Ambele teste concordă

- Seria PIB este **nestaționară** $\Rightarrow$ necesită diferențiere

Diferențierea: obținerea staționarității

După diferențiere

- **Teste**: Ambele confirmă staționaritate
  - ADF: -4.56 ($p < 0.01$)
  - KPSS: 0.21 ($p > 0.10$)

Concluzie

- **PIB nivel**: nestaționar
- **ΔPIB**: staționar
  - Folosim ΔPIB_t pentru modelare

Rezultat final

- PIB-ul necesită o diferențiere pentru a deveni staționar

Exercițiu AI: Gândire critică

Prompt de testat în ChatGPT / Claude / Copilot

"Folosind yfinance, descarcă cursul zilnic EUR/RON (EURRON=X) din 2020-01-01 până în 2024-12-31 (aprox. 1.250 observații). Testează dacă seria este staționară folosind testele ADF și KPSS. Ajustează un model adecvat și prognozează cursul pentru următoarele 5 zile lucrătoare. Evaluează fiabilitatea prognozei."

Exercițiu:

1. Rulați prompt-ul într-un LLM (Large Language Model) la alegere și analizați critic răspunsul.
2. Descărcați date reale EUR/RON și reproduceți analiza. Rezultatele coincid?
3. Testul ADF e specificat corect (trend, lag-uri)? Ce se schimbă dacă modificați opțiunile?
4. Comparați prognoza modelului AI cu un benchmark naiv ($\hat{X}_{t+1} = X_t$).
5. Dacă seria e un mers aleatoriu, are sens să ajustăm un model ARMA?

☐ **Atenție**: Un RMSE (Root Mean Squared Error) mic și coeficienți semnificativi *nu garantează* o prognoză utilă.

Concluzii principale

Rezumat

- **Proces stochastic**: colecție de variabile aleatoare indexate în timp
- **Staționaritate slabă**: medie, varianță, autocovarianță constante
- **Zgomot alb**: $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$
  - Staționar, ACF $= 0$ pentru $h \neq 0$
- **Mers aleator**: $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$
  - Nestaționar, $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$
- **ACF/PACF**: instrumente esențiale pentru identificarea structurii
- **Diferențierea**: transformă serii nestaționare în staționare
- **Teste rădăcină unitate**:
  - ADF (H_0: rădăcină unitate) vs KPSS (H_0: staționar)

Formule importante

Staționaritate slabă

- **Momente constante**:
  - $\mathbb{E}[X_t] = \mu$ (medie constantă)
  - $\text{Var}(X_t) = \sigma^2$ (varianță constantă)
- **Autocovarianță**: $\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h})$
- **Autocorelație**: $\rho(h) = \gamma(h)/\gamma(0)$

Operatorul lag

- **Lag**: $LX_t = X_{t-1}$
- **Diferență**: $\Delta X_t = (1 - L)X_t$

Zgomot alb (WN)

- **Model**: $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$
- **ACF**: $\rho(h) = 0$ pentru $h \neq 0$

Mers aleator (RW)

- **Model**: $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$
- **Varianță**: $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$ (crește)

Ce urmează

Capitolul 2: Modele ARMA

- **AR(p)**: Modele Autoregresive
- **MA(q)**: Modele Medie Mobilă
- **ARMA(p, q)**: Modele combinate
- **Identificare**: Cu ACF/PACF

Ce vom învăța

- **Estimare**: Parametrii modelului
- **Diagnostic**: Verificarea modelului
- **Prognoză**: Intervale de încredere
- **Selecție**: AIC (Akaike Information Criterion), BIC (Bayesian Information Criterion)

Întrebarea 1

Întrebare

- Care sunt cele trei condiții pentru staționaritatea slabă (în covarianță)?

Variante de răspuns

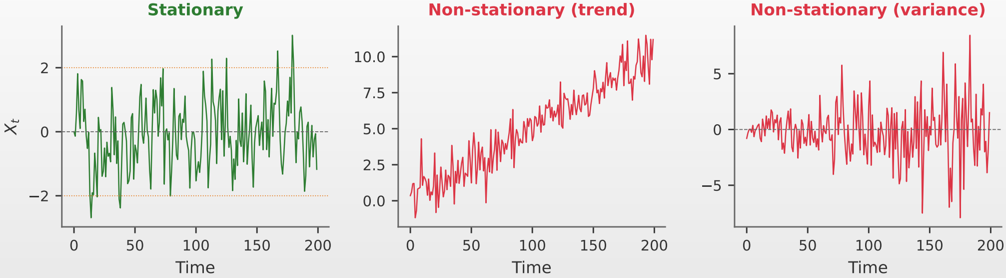
(A) Media zero, varianța infinită, covarianță dependentă de timp

(B) Media constantă, varianța constantă, autocovarianța depinde doar de lag

(C) Distribuție normală, independență, varianță unitară

(D) Trend liniar, sezonalitate constantă, reziduuri albe

Întrebarea 1: Răspuns



Răspuns: (B)

- $\mathbb{E}[X_t] = \mu$, $\text{Var}(X_t) = \sigma^2$, $\gamma(t, s) = \gamma(|t - s|)$

TSA_ch1_stationarity

Întrebarea 2

Întrebare

- Care este ipoteza nulă (H_0) în testul ADF (Augmented Dickey-Fuller)?

Variante de răspuns

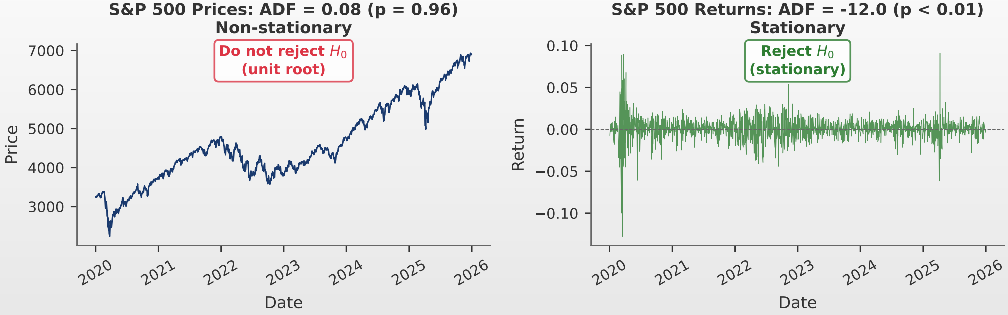
(A) Seria este staționară

(B) Seria are rădăcină unitate (este nestaționară)

(C) Seria nu are autocorelație

(D) Seria are distribuție normală

Întrebarea 2: Răspuns



Răspuns: (B)

- H_0: rădăcină unitate; $\tau <$ val. critică $\Rightarrow$ staționară

TSA_ch1_unit_root_tests

Întrebarea 3

Întrebare

- Care este ipoteza nulă (H_0) în testul KPSS?

Variante de răspuns

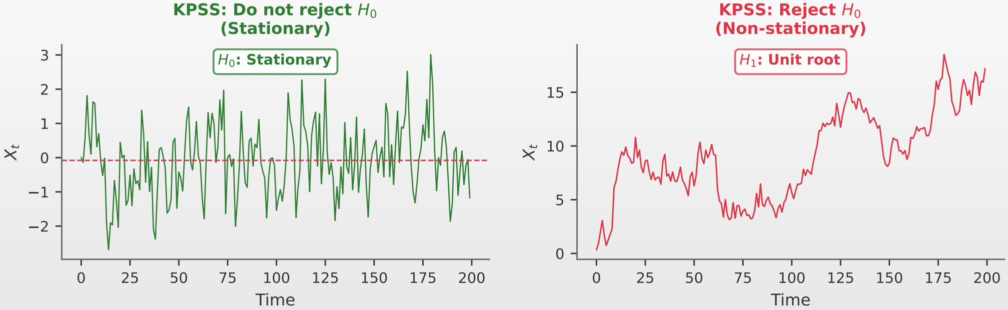
(A) Seria are rădăcină unitate (nestaționară)

(B) Seria este staționară

(C) Seria este un mers aleatoriu

(D) Seria are trend determinist

Întrebarea 3: Răspuns



Răspuns: (B)

- KPSS: H_0 staționară (opus ADF). Folosiți ambele teste.

TSA_ch1_unit_root_tests

Întrebarea 4

Întrebare

- Care este proprietatea fundamentală a varianței unui mers aleatoriu $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$?

Variante de răspuns

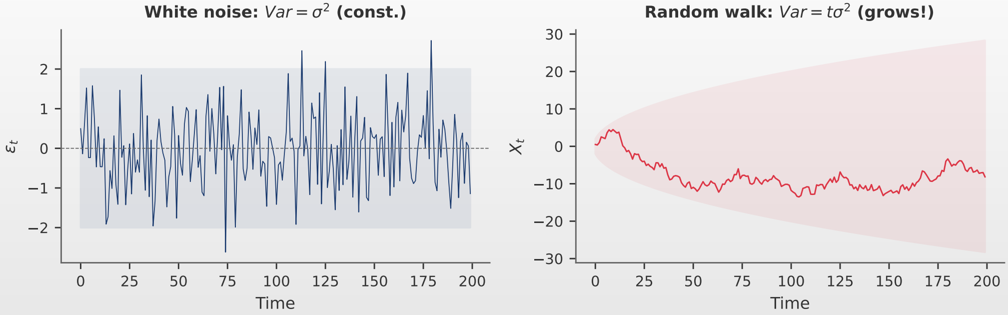
(A) Varianța este constantă: $\text{Var}(X_t) = \sigma^2$

(B) Varianța crește liniar cu timpul: $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$

(C) Varianța scade cu timpul

(D) Varianța este zero

Întrebarea 4: Răspuns



Răspuns: (B)

- $\mathrm{Var}(X_t) = t\sigma^2$ crește liniar $\Rightarrow$ nestaționar

TSA_ch1_random_walk

Întrebarea 5

Întrebare

- Cum arată ACF-ul unui mers aleatoriu (serie nestaționară cu rădăcină unitate)?

Variante de răspuns

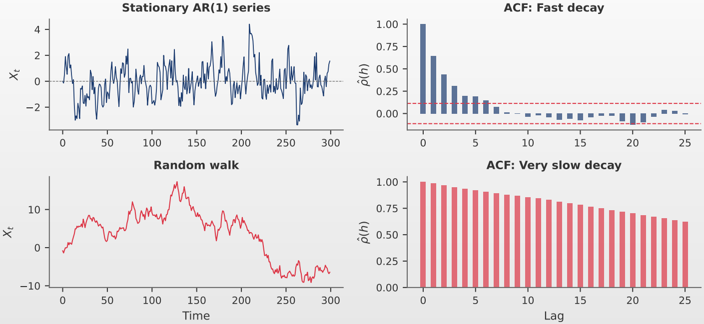
(A) Toate valorile sunt zero după lag 0

(B) Scade exponențial rapid

(C) Scade foarte lent (persistență ridicată)

(D) Oscilează între pozitiv și negativ

Întrebarea 5: Răspuns



Răspuns: (C)

- ACF $\approx$ 1 pentru multe lag-uri, scădere lentă $\Rightarrow$ test ADF

TSA_ch1_random_walk

Întrebarea 6

Întrebare

- Cum obținem randamente staționare dintr-o serie de prețuri financiare P_t?

Variante de răspuns

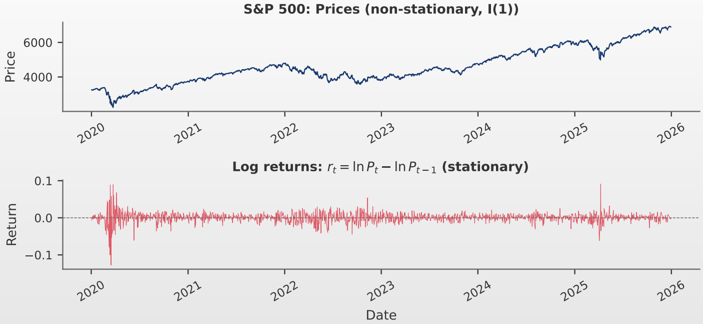
(A) Diferențiere simplă: $\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$

(B) Logaritmare apoi diferențiere: $r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}$

(C) Doar logaritmare: $\ln P_t$

(D) Standardizare: $(P_t - \bar{P})/s_P$

Întrebarea 6: Răspuns



Răspuns: (B)

- Randamente log: $r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}$
- Mai întâi ln (stabilizează varianța), apoi Δ (elimină trendul) $\Rightarrow$ serie staționară

TSA_ch1_operators

Procese local staționare

TSA_ch1_locally_stationary

Definiție 13 (Proces local staționar (Dahlhaus, 1997))

Un proces $\{X_{t,T}\}_{t=1,\dots,T}$ este **local staționar** dacă, la fiecare timp rescalat $u = t/T \in [0,1]$, admite o reprezentare spectrală variabilă în timp:

$$X_{t,T} = \int_{-\pi}^{\pi} A\left(\tfrac{t}{T}, \omega\right) \, e^{i\omega t} \, d\xi(\omega)$$

unde $A(u, \omega)$ este **funcția de transfer variabilă în timp**, iar $\xi(\omega)$ este un proces cu incrementuri ortogonale.

Contrast cu staționaritatea globală

- **Staționar global**: densitate spectrală $f(\omega)$ – constantă în timp
- **Local staționar**: densitate spectrală $f(u, \omega)$ – variază neted cu $u = t/T$
- Intuiție: procesul "arată" staționar în vecinătăți mici de timp

Aplicații

- Randamente financiare cu **regimuri de volatilitate** variabile (ex. pre/post-criză)
- Serii macroeconomice cu **rupturi structurale** (schimbări de politică monetară)
- Semnale EEG/ECG cu structură spectrală nestabilă

Analiza wavelet

TSA_ch1_wavelets

Transformata wavelet continuă (CWT)

Fie $\psi(t)$ un **wavelet-mamă** cu $\int \psi(t)\, dt = 0$. Transformata wavelet a seriei $X(t)$:

$$W_X(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\, \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt$$

unde $a > 0 =$ **scală** (frecvență inversă), $b =$ **localizare temporală**, $\psi^* =$ conjugata complexă.

Transformata wavelet discretă (DWT)

- **Algoritmul Mallat**: descompunere piramidală cu filtre trece-jos/trece-sus
- **Analiză multirezoluție** (MRA): $X(t) = \sum_j D_j(t) + S_J(t)$, unde $D_j =$ detalii la scala j, $S_J =$ aproximare

Wavelet-uri uzuale și avantaje

- Wavelet-uri: **Haar** (discontinuu, simplu), **Daubechies** (db4, compact), **Morlet** (complex, bun pt. frecvențe)
- **Avantaj principal** față de Fourier: localizare *simultană* timp-frecvență (principiul Heisenberg)
- Fourier: rezoluție perfectă în frecvență, zero în timp; wavelets: compromis adaptiv

Spectrograma și scalograma

TSA_ch1_spectrogram

Transformata Fourier de scurtă durată (STFT)

Cu o fereastră $w(t)$ de lungime fixă:

$$S(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\, w(t - \tau)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

Spectrograma: $|S(\tau, \omega)|^2$ – reprezentare timp-frecvență cu *rezoluție fixă*.

Scalograma

- **Scalograma**: $|W_X(a, b)|^2$ – reprezentare timp-scală cu *rezoluție adaptivă*
- Frecvențe înalte $\Rightarrow$ fereastră temporală **îngustă**, rezoluție temporală bună
- Frecvențe joase $\Rightarrow$ fereastră temporală **largă**, rezoluție în frecvență bună

Compromisul rezoluție timp–frecvență

- **STFT**: fereastră fixă $\Rightarrow$ rezoluție uniformă (aceeași Δt, $\Delta\omega$ peste tot)
- **Wavelets**: fereastră adaptivă $\Rightarrow$ Δt mică la frecvențe înalte, $\Delta\omega$ mică la frecvențe joase
- Planul timp-frecvență: STFT $\rightarrow$ *dale rectangulare egale*; wavelets $\rightarrow$ *dale adaptive* (înguste sus, largi jos)

Aplicații wavelet în econometrie

TSA_ch1_wavelet_coherence

Coerența wavelet

- Măsoară **co-mișcarea** a două serii la diferite scale temporale și perioade
- Analog al corelației clasice, dar *localizat* în timp și frecvență
- Aplicații: relația prețuri petrol – piețe bursiere, sincronizarea ciclurilor economice

Descompunerea varianței wavelet

- Varianța totală se descompune pe scale: $\text{Var}(X) = \sum_{j=1}^{J} \nu_j^2$
- Scala j corespunde fluctuațiilor cu perioade $\approx [2^j, 2^{j+1})$
- Identifică ce orizonturi temporale contribuie cel mai mult la variabilitatea seriei

Pachete software

- **Python**: `pywt` (PyWavelets) – DWT, CWT, familii wavelet
- **R**: `WaveletComp` – coerență wavelet, scalograme, teste de semnificație
- **R**: `wavelets` – DWT, MODWT, analiză multirezoluție

Referințe: Gençay, R., Selçuk, F. & Whitcher, B. (2002). *An Introduction to Wavelets and Other Filtering Methods in Finance and*

Bibliografie I

Manuale fundamentale

- Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*, 3rd ed., OTexts.
- Shumway, R.H., & Stoffer, D.S. (2017). *Time Series Analysis and Its Applications*, 4th ed., Springer.

Referințe clasice

- Wold, H. (1938). *A Study in the Analysis of Stationary Time Series*, Almqvist & Wiksell.
- Bartlett, M.S. (1946). On the Theoretical Specification and Sampling Properties of Autocorrelated Time-Series, *JRSS Supplement*, 8(1), 27–41.
- Box, G.E.P., & Jenkins, G.M. (1970). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden-Day.

Bibliografie II

Teste de staționaritate

- Dickey, D.A., & Fuller, W.A. (1979). Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root, *JASA*, 74(366), 427–431.
- Kwiatkowski, D., et al. (1992). Testing the Null Hypothesis of Stationarity, *Journal of Econometrics*, 54(1–3), 159–178.

Resurse online și cod

- **Quantlet**: `https://quantlet.com` – Platformă de cod pentru metode cantitative
- **Quantinar**: `https://quantinar.com` – Platformă de învățare pentru metode cantitative
- **GitHub TSA**: `https://github.com/QuantLet/TSA/tree/main/TSA_ch1` – Cod Python pentru acest capitol

Bibliografie III

Procese local staționare și analiză wavelet

- Dahlhaus, R. (1997). Fitting Time Series Models to Nonstationary Processes, *The Annals of Statistics*, 25(1), 1–37.
- Percival, D.B., & Walden, A.T. (2000). *Wavelet Methods for Time Series Analysis*, Cambridge University Press.
- Gençay, R., Selçuk, F., & Whitcher, B. (2002). *An Introduction to Wavelets and Other Filtering Methods in Finance and Economics*, Academic Press.
- Rua, A., & Nunes, L.C. (2009). International Comovement of Stock Market Returns: A Wavelet Analysis, *Journal of Empirical Finance*, 16(4), 632–639.

Vă Mulțumim!

Întrebări?

Materialele cursului sunt disponibile la: https://danpele.github.io/Time-Series-Analysis/

Quantlet Quantinar