



Analiza și Prognoză Seriilor de Timp

# Capitolul 6: Modele VAR & Cauzalitate Granger

Serii de Timp Multivariate



# Cuprins

- 1 Introducere în seriile de timp multivariate
- 2 Vector Autoregresiv (VAR)
- 3 Cauzalitate Granger
- 4 Funcții de răspuns la impuls
- 5 Descompunerea varianței erorii de prognoză
- 6 Diagnosticarea VAR
- 7 Prognoză VAR
- 8 Exemplu practic
- 9 Sumar
- 10 Studiu de caz: PIB și Inflație

La finalul acestui capitol, veți fi capabili să:

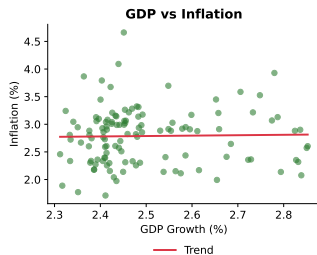
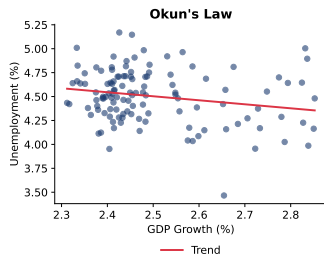
1. Înțelegeți **motivația** pentru analiza multivariată a seriilor de timp
2. Specificați și estimați modele **VAR(p)**
3. Aplicați teste de **cauzalitate Granger**
4. Interpretați **funcțiile de răspuns la impuls (IRF)**
5. Efectuați **descompunerea varianței erorii de prognoză (FEVD)**
6. Selectați ordinul optimal al lag-urilor folosind criterii informaționale
7. Implementați analiza VAR în **Python**

## Exemplu motivațional: Dinamică macroeconomică



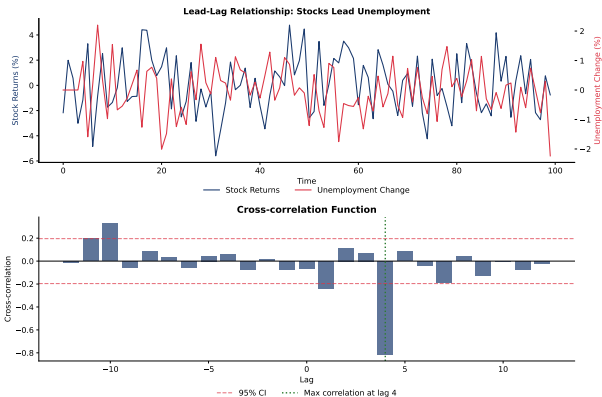
- Variabilele economice sunt **interconectate**: PIB afectează șomajul, inflația afectează ratele dobânzilor
- Modificările unei variabile se **propagă** prin sistem
- Înțelegerea acestor dinamici necesită analiza **multivariată**

# Ideea cheie: Variabilele interacționează



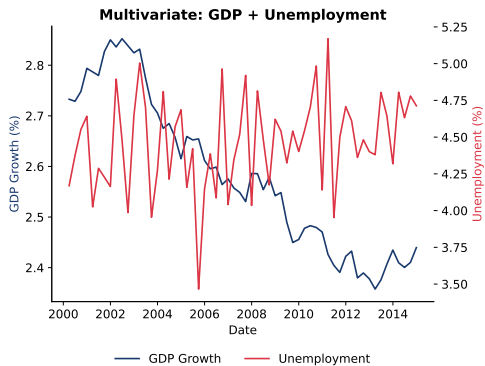
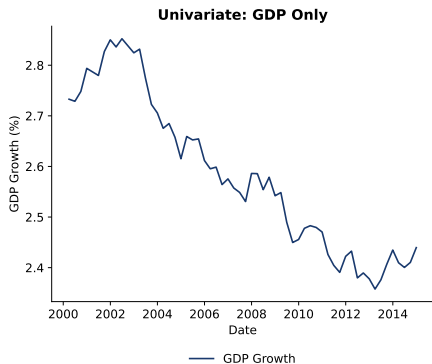
- **Legea lui Okun:** Creștere PIB mai mare  $\Rightarrow$  șomaj mai mic
- **Regula Taylor:** Inflație mai mare  $\Rightarrow$  rate ale dobânzii mai mari
- **Curba Phillips:** Compromis șomaj-inflație

# Relații de avans-întârziere



- Unele variabile **preced** altele: piața bursieră prezice activitatea economică
- Corelația încrucișată relevă **sincronizarea** relațiilor
- Corelație maximă la lag-ul 4: piața bursieră precede șomajul cu ~4 luni

## De ce modelele univariate nu sunt suficiente



### Problema

Modelele ARIMA tratează fiecare variabilă **izolat**—ignorând informații valoroase din alte variabile!

### Soluția

Modelele **VAR** captează dinamică comună și efectele de feedback dintre mai multe serii de timp.

## Concepte fundamentale

- ❶ **Modele VAR:** Cum să modelăm mai multe serii de timp împreună
- ❷ **Cauzalitate Granger:** Ajută  $X$  la prezicerea lui  $Y$ ?
- ❸ **Funcții de răspuns la impuls:** Cum se propagă șocurile?
- ❹ **Descompunerea varianței:** Ce determină fiecare variabilă?

## Aplicații

- Analiza politicii macroeconomice (efectele politicii monetare)
- Dinamică piețelor financiare (relații acțiuni-obligațiuni)
- Analiza ciclului de afaceri (indicatori avansați)
- Managementul riscului (transmisia volatilității)



# De ce analiza multivariată?

## Limitările modelelor univariate

- Modelele ARIMA tratează fiecare variabilă **izolat**
- Ignoră potențialele **interacțiuni** între variabile
- Nu pot captura **efectele de feedback**

## Exemple economice de interdependență

- PIB și șomaj (legea lui Okun)
- Rate ale dobânzii și inflație (regula Taylor)
- Prețuri acțiuni și volum tranzacționat
- Cursuri de schimb și balanță comercială

### Vector de variabile

Fie  $Y_t = (Y_{1t}, Y_{2t}, \dots, Y_{Kt})'$  un vector  $K \times 1$  de serii de timp.

Exemplu cu  $K = 2$ :

$$Y_t = \begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Creștere PIB}_t \\ \text{Inflație}_t \end{pmatrix}$$

### Întrebări cheie

- 1 Ajută  $Y_1$  la prezicerea lui  $Y_2$ ? (Cauzalitate Granger)
- 2 Cum afectează șocurile în  $Y_1$  pe  $Y_2$ ? (Răspunsuri la impuls)
- 3 Ce proporție din varianța lui  $Y_2$  se datorează lui  $Y_1$ ? (Descompunerea varianței)

## Definiție: Staționaritate slabă

O serie de timp  $K$ -dimensională  $Y_t$  este **slab staționară** dacă:

- 1  $\mathbb{E}[Y_t] = \mu$  (vector de medie constant)
- 2  $\text{Cov}(Y_t, Y_{t-h}) = \Gamma(h)$  depinde doar de  $h$ , nu de  $t$

## Matricea de autocovarianță

$$\Gamma(h) = \mathbb{E}[(Y_t - \mu)(Y_{t-h} - \mu)'] = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(h) & \gamma_{12}(h) \\ \gamma_{21}(h) & \gamma_{22}(h) \end{pmatrix}$$

Notă:  $\Gamma(-h) = \Gamma(h)'$  (transpusa, nu egală!)

### Funcția de covarianță încrucișată

Pentru variabilele  $Y_{it}$  și  $Y_{jt}$ :

$$\gamma_{ij}(h) = \text{Cov}(Y_{it}, Y_{j,t-h}) = \mathbb{E}[(Y_{it} - \mu_i)(Y_{j,t-h} - \mu_j)]$$

### Diferența cheie față de cazul univariat

- În general:  $\gamma_{ij}(h) \neq \gamma_{ij}(-h)$
- Dar:  $\gamma_{ij}(h) = \gamma_{ji}(-h)$
- Matricea de covarianță încrucișată **nu este simetrică** pentru  $h \neq 0$

### Exemplu

Dacă  $Y_1$  precede  $Y_2$ :  $\gamma_{12}(h) > 0$  pentru  $h > 0$  dar  $\gamma_{12}(h) \approx 0$  pentru  $h < 0$

## Matricea funcției de corelație

### Definiție

**Matricea de autocorelație** la lag-ul  $h$ :

$$R(h) = D^{-1}\Gamma(h)D^{-1}$$

unde  $D = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_K)$  și  $\sigma_i = \sqrt{\gamma_{ii}(0)}$

### Pentru cazul bivariat

$$R(h) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(h) & \rho_{12}(h) \\ \rho_{21}(h) & \rho_{22}(h) \end{pmatrix}$$

unde  $\rho_{ij}(h) = \frac{\gamma_{ij}(h)}{\sigma_i \sigma_j}$

Elementele diagonale: ACF obișnuite; Extra-diagonale: corelații încrucișate

## Definiție

Un model **VAR(p)** pentru  $K$  variabile:

$$Y_t = c + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \cdots + A_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

unde:

- $Y_t$ : vector  $K \times 1$  de variabile endogene
- $c$ : vector  $K \times 1$  de constante
- $A_i$ : matrice de coeficienți  $K \times K$
- $\varepsilon_t$ : vector  $K \times 1$  de termeni de eroare cu  $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$ ,  $\mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_t'] = \Sigma$

## VAR(1) cu două variabile

### VAR(1) bivariat

$$\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

### Ecuatie cu ecuație

$$Y_{1t} = c_1 + a_{11} Y_{1,t-1} + a_{12} Y_{2,t-1} + \varepsilon_{1t}$$

$$Y_{2t} = c_2 + a_{21} Y_{1,t-1} + a_{22} Y_{2,t-1} + \varepsilon_{2t}$$

**Ideea cheie:** Fiecare ecuație include lag-uri ale **tuturor** variabilelor!

## Exemplu numeric: VAR(1)

### Model VAR(1) specific

$$\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

### Interpretarea coeficienților

- $a_{11} = 0.7$ : O creștere de 1 unitate în  $Y_1$  la  $t - 1$  crește  $Y_1$  la  $t$  cu 0.7
- $a_{12} = 0.2$ : O creștere de 1 unitate în  $Y_2$  la  $t - 1$  crește  $Y_1$  la  $t$  cu 0.2
- $a_{21} = -0.1$ : O creștere de 1 unitate în  $Y_1$  la  $t - 1$  **scade**  $Y_2$  la  $t$  cu 0.1
- $a_{22} = 0.6$ : O creștere de 1 unitate în  $Y_2$  la  $t - 1$  crește  $Y_2$  la  $t$  cu 0.6



## VAR(2): Dinamică de ordin superior

### Specificația VAR(2)

$$Y_t = c + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

Pentru  $K = 2$ , modelul complet are  $2 + 2 \times 4 + 2 \times 4 = 18$  parametri!

### Dezvoltat

$$Y_{1t} = c_1 + a_{11}^{(1)} Y_{1,t-1} + a_{12}^{(1)} Y_{2,t-1} + a_{11}^{(2)} Y_{1,t-2} + a_{12}^{(2)} Y_{2,t-2} + \varepsilon_{1t}$$

$$Y_{2t} = c_2 + a_{21}^{(1)} Y_{1,t-1} + a_{22}^{(1)} Y_{2,t-1} + a_{21}^{(2)} Y_{1,t-2} + a_{22}^{(2)} Y_{2,t-2} + \varepsilon_{2t}$$

### Blestemul dimensionalității

VAR( $p$ ) cu  $K$  variabile are  $K + pK^2$  parametri. Cu  $K = 5$ ,  $p = 4$ :  $5 + 4 \times 25 = 105$  parametri!

## Forma companion

### Conversia VAR(p) la VAR(1)

Orice VAR(p) poate fi scris ca VAR(1) în **forma companion**:

$$\xi_t = A\xi_{t-1} + v_t$$

### Pentru VAR(2)

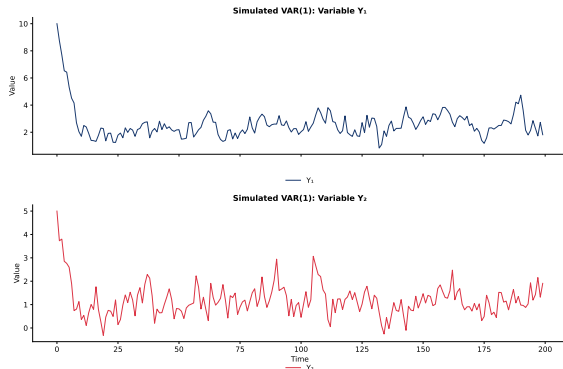
$$\underbrace{\begin{pmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \end{pmatrix}}_{\xi_t} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ I_K & 0 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} Y_{t-1} \\ Y_{t-2} \end{pmatrix}}_{\xi_{t-1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_t}$$

Matricea companion A este  $Kp \times Kp$ .

### De ce este utilă?

Staționaritatea, prognoză și IRF sunt mai ușor de analizat în forma companion.

# Proces VAR simulat



- Două serii simulate dintr-un proces VAR(1) bivariat prezentând interdependența
- Fiecare variabilă răspunde atât la propriul trecut cât și la trecutul celeilalte variabile
- Observați cum seriile se mișcă împreună datorită dinamicii încrucișate

## Condiția de stabilitate

VAR(p) este **stabil** (staționar) dacă toate rădăcinile lui:

$$\det(I_K - A_1 z - A_2 z^2 - \dots - A_p z^p) = 0$$

se află **în afără** cercului unitate (adică  $|z| > 1$ ).

## Pentru VAR(1)

Modelul este stabil dacă toate **valorile proprii** ale lui  $A_1$  sunt mai mici decât 1 în valoare absolută.

Exemplu: Pentru  $A_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$ , valorile proprii sunt  $\lambda_1 = 0.6$  și  $\lambda_2 = 0.2$ .

Ambele  $< 1 \Rightarrow$  stabil!

## Calculul valorilor proprii: Exemplu

$$\text{Pentru } A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Polinomul caracteristic:  $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} 0.7 - \lambda & 0.2 \\ -0.1 & 0.6 - \lambda \end{pmatrix} = (0.7 - \lambda)(0.6 - \lambda) + 0.02 = 0$$

$$\lambda^2 - 1.3\lambda + 0.44 = 0$$

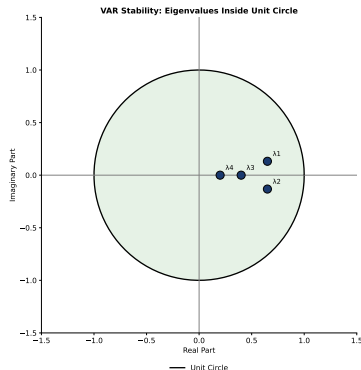
### Soluție

Folosind formula de gradul 2:

$$\lambda = \frac{1.3 \pm \sqrt{1.69 - 1.76}}{2} = \frac{1.3 \pm \sqrt{-0.07}}{2} = 0.65 \pm 0.132i$$

$$|\lambda| = \sqrt{0.65^2 + 0.132^2} = \sqrt{0.44} = 0.663 < 1 \quad \checkmark \text{ Stabil!}$$

## Condiția de stabilitate: Interpretare vizuală



- Valorile proprii ale matricei companion trebuie să fie în interiorul cercului unitate
- Valorile proprii complexe vin în perechi conjugate
- Dacă vreo valoare proprie este în afără cercului, VAR este exploziv (nestaționar)

## Media unui VAR staționar

### Media necondiționată

Pentru un VAR(1) staționar:  $Y_t = c + AY_{t-1} + \varepsilon_t$

Luând medii:

$$\mathbb{E}[Y_t] = c + A\mathbb{E}[Y_{t-1}]$$

Deoarece  $\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[Y_{t-1}] = \mu$  (staționaritate):

$$\mu = c + A\mu \quad \Rightarrow \quad \mu = (I_K - A)^{-1}c$$

### Exemplu

Dacă  $c = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix}$  și  $A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$ :

$$\mu = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.2 \\ 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

## Structura covarianței pentru VAR(1)

### Matricea varianță-covarianță $\Gamma(0)$

Pentru VAR(1), varianța satisface **ecuația discretă Lyapunov**:

$$\Gamma(0) = A\Gamma(0)A' + \Sigma$$

### Autocovarianța la lag-ul $h$

$$\Gamma(h) = A^h\Gamma(0), \quad h \geq 0$$

Aceasta arată că autocovarianțele scad geometric cu valorile proprii ale lui  $A$ .

### Rezolvarea ecuației Lyapunov

Se poate rezolvă prin vectorizare:

$$\text{vec}(\Gamma(0)) = (I_{K^2} - A \otimes A)^{-1} \text{vec}(\Sigma)$$

unde  $\otimes$  denotă produsul Kronecker.



### Estimarea OLS

Fiecare ecuație poate fi estimată prin **OLS separat**:

$$\hat{A} = \left( \sum_{t=1}^T Y_{t-1} Y'_{t-1} \right)^{-1} \left( \sum_{t=1}^T Y_{t-1} Y'_t \right)$$

Aceasta este eficientă deoarece toate ecuațiile au **aceiași regresori**.

### Matricea de covarianță

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T - Kp - 1} \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}'_t$$

Erorile  $\varepsilon_{1t}$  și  $\varepsilon_{2t}$  pot fi **corelate contemporan**.

## Selecția ordinului lag-ului

### Criterii informaționale

Alegem  $p$  care minimizează:

$$\text{AIC}(p) = \ln |\hat{\Sigma}_p| + \frac{2pK^2}{T}$$

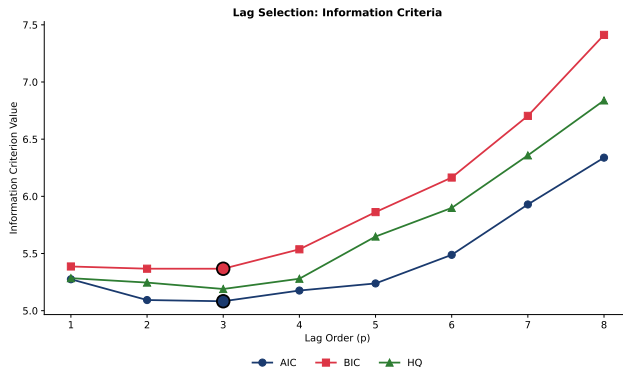
$$\text{BIC}(p) = \ln |\hat{\Sigma}_p| + \frac{pK^2 \ln T}{T}$$

$$\text{HQ}(p) = \ln |\hat{\Sigma}_p| + \frac{2pK^2 \ln \ln T}{T}$$

### Îndrumări

- AIC tinde să selecteze modele **mai mari** (mai bune pentru prognoză)
- BIC tinde să selecteze modele **mai mici** (selecție consistentă)
- Începeți cu  $p_{\max}$  maxim bazat pe frecvența datelor (ex. 4 pentru trimestrial, 12 pentru lunar)

## Selecția lag-ului: Exemplu



- Valorile criteriilor informaționale pentru diferite ordine ale lag-ului
- AIC și BIC pot sugera lag-uri optime diferite
- Valori mai mici indică o potrivire mai bună a modelului (penalizată de complexitate)

## De ce restricționăm?

Modelele VAR complete pot fi **supraparametrizate**:

- Mulți coeficienți pot fi ne semnificativi
- Prognoze slabe
- Pierdere de grade de libertate

## Restricții comune

- **Restricții de zero**: Setăm coeficienți mici la zero
- **Exogenitate de bloc**: Unele variabile nu afectează altele
- **Excluderea lag-urilor**: Excludem anumite lag-uri

## Testarea restricțiilor

Folosim testul raportului de verosimilitate:  $LR = T(\ln |\hat{\Sigma}_R| - \ln |\hat{\Sigma}_U|) \sim \chi_r^2$   
unde  $r$  = numărul de restricții

# Ce este cauzalitatea Granger?

Clive Granger (1969, Premiul Nobel 2003)

“**X cauzează Granger** pe **Y**” dacă valorile trecute ale lui **X** ajută la prezicerea lui **Y**, **dincolo de** ce pot prezice valorile trecute ale lui **Y** singure.

## Distincție importantă

**Cauzalitate Granger  $\neq$  Cauzalitate reală**

- Cauzalitatea Granger este despre **conținut predictiv**
- NU implică cauzare economică/structurală
- “X cauzează Granger pe Y” înseamnă: X conține informații utile pentru prognoză lui Y

## Definiție formală

### Cauzalitate Granger

$X$  nu cauzează Granger pe  $Y$  dacă:

$$\mathbb{E}[Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots] = \mathbb{E}[Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots]$$

Cu alte cuvinte: adăugarea istoricului lui  $X$  nu îmbunătățește predicția lui  $Y$ .

### În contextul VAR

Pentru VAR(1):  $Y_{1t} = c_1 + a_{11} Y_{1,t-1} + a_{12} Y_{2,t-1} + \varepsilon_{1t}$

$Y_2$  nu cauzează Granger pe  $Y_1$  dacă  $a_{12} = 0$ .

Pentru VAR(p):  $Y_2$  nu cauzează Granger pe  $Y_1$  dacă  $a_{12}^{(1)} = a_{12}^{(2)} = \dots = a_{12}^{(p)} = 0$ .

# Testarea cauzalității Granger

## Ipotezele testului

$H_0$ :  $Y_2$  **nu** cauzează Granger pe  $Y_1$

$$H_0 : a_{12}^{(1)} = a_{12}^{(2)} = \dots = a_{12}^{(p)} = 0$$

$H_1$ : Cel puțin un  $a_{12}^{(i)} \neq 0$  (există cauzalitate Granger)

## Statistica testului: Testul Wald

$$F = \frac{(RSS_R - RSS_U)/p}{RSS_U/(T - 2p - 1)} \sim F_{p, T-2p-1}$$

unde:

- $RSS_R$ : Suma pătratelor reziduurilor din modelul restricționat (fără lag-urile lui  $Y_2$ )
- $RSS_U$ : Suma pătratelor reziduurilor din modelul nerestricționat (VAR complet)

## Tipuri de cauzalitate Granger



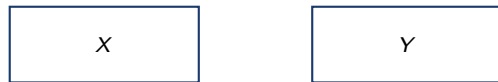
Unidirecțională:  $X \rightarrow Y$



Bidirecțională:  $X \leftrightarrow Y$



Unidirecțională:  $Y \rightarrow X$



Fără cauzalitate

### Exemple economice

- Masa monetară  $\rightarrow$  Producție? (viziunea monetaristă)
- Prețurile acțiunilor  $\leftrightarrow$  Volumul tranzacționat (bidirecțională)
- Vremea  $\rightarrow$  Recolta (unidirecțională, evident)



# Funcția de corelație încrucișată

## Definiție 1 (Funcția de corelație încrucișată)

**Corelația încrucișată** între  $X_t$  și  $Y_t$  la lag-ul  $k$  este:

$$\rho_{XY}(k) = \frac{\gamma_{XY}(k)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\text{Cov}(X_t, Y_{t+k})}{\sqrt{\text{Var}(X_t)\text{Var}(Y_t)}}$$

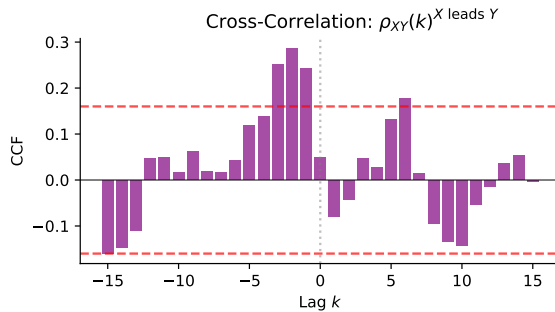
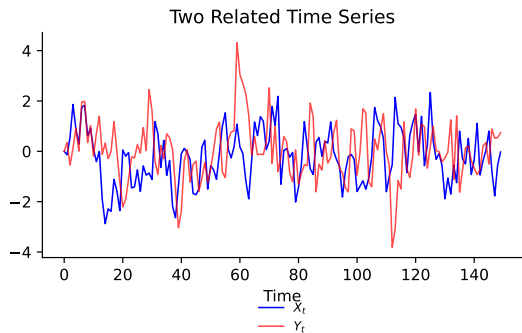
## Interpretare

- $\rho_{XY}(k) > 0$  la  $k > 0$ :  $X$  este corelat pozitiv cu  $Y$  viitor ( $X$  poate precede  $Y$ )
- $\rho_{XY}(k) > 0$  la  $k < 0$ :  $X$  este corelat pozitiv cu  $Y$  trecut ( $Y$  poate precede  $X$ )

## Notă

Spre deosebire de ACF, corelația încrucișată **nu este simetrică**:  $\rho_{XY}(k) \neq \rho_{XY}(-k)$  în general.

## Corelație încrucișată: Ilustrare vizuală



Stânga: două serii înrudite. Dreapta: CCF relevă că  $X$  precede  $Y$  (corelații semnificative la lag-uri pozitive).

### Capcane comune

- ❶ **Variabile omise:** O a treia variabilă  $Z$  poate cauza atât  $X$  cât și  $Y$
- ❷ **Nestaționaritate:** Testul necesită date staționare (sau cointegrare)
- ❸ **Selecția lag-ului:** Rezultatele pot fi sensibile la  $p$
- ❹ **Mărimea eșantionului:** Necesită suficiente observații

### Bune practici

- Testați mai întâi pentru rădăcini unitare
- Folosiți criterii multiple pentru selecția lag-ului
- Verificați robustețea la diferite ordine ale lag-ului
- Raportați rezultatele pentru ambele direcții

## Test cauzalitate Granger: Exemplu numeric

Testare: Cauzează creșterea masei monetare Granger producția?

**Model nerestricționat** (VAR cu 2 lag-uri):

$$\Delta Y_t = c + \alpha_1 \Delta Y_{t-1} + \alpha_2 \Delta Y_{t-2} + \beta_1 \Delta M_{t-1} + \beta_2 \Delta M_{t-2} + \varepsilon_t$$

**Model restricționat** ( $H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$ ):

$$\Delta Y_t = c + \alpha_1 \Delta Y_{t-1} + \alpha_2 \Delta Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

Calculul testului

Cu  $T = 100$ ,  $RSS_U = 45.2$ ,  $RSS_R = 52.8$ :

$$F = \frac{(52.8 - 45.2)/2}{45.2/(100 - 5)} = \frac{3.8}{0.476} = 7.98$$

$F_{0.05}(2, 95) = 3.09 \Rightarrow$  **Respingem**  $H_0$ : Banii cauzează Granger producția!

## Problema cu datele nestaționare

Testul Granger standard are **distribuții non-standard** când:

- Variabilele au rădăcini unitare
- Variabilele sunt cointegrate

## Soluția Toda-Yamamoto (1995)

- 1 Determinăm ordinul maxim de integrare  $d_{max}$
- 2 Eștimăm  $VAR(p + d_{max})$  în **niveluri**
- 3 Testăm restricții doar pe primele  $p$  lag-uri
- 4 Lag-urile suplimentare  $d_{max}$  **nu sunt** testate (doar pentru distribuția corectă)

## Avantaj

Testul Wald are distribuție asimptotică  $\chi^2$  indiferent de cointegrare!

# Cauzalitate instantanee

## Definiție

$X$  **cauzează instantaneu** pe  $Y$  dacă:

$$\mathbb{E}[Y_t | \Omega_{t-1}, X_t] \neq \mathbb{E}[Y_t | \Omega_{t-1}]$$

unde  $\Omega_{t-1}$  conține toate informațiile trecute.

## Testarea în VAR

Testăm dacă  $\sigma_{12} \neq 0$  în matricea de covarianță:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

Dacă  $\sigma_{12} = 0$ : nu există cauzalitate instantanee

## Interpretare

Cauzalitatea instantanee reflectă adesea **șocuri comune** sau **agregarea datelor**, nu efecte contemporane reale.

# Cauzalitate Granger în sisteme multiple

## Testul exogenității de bloc

Într-un VAR cu  $K > 2$  variabile, testăm dacă un **grup** de variabile cauzează Granger un alt grup.

Exemplu: Cauzează variabilele financiare (rate ale dobânzii, prețuri acțiuni) Granger variabilele reale (PIB, șomaj)?

## Statistica testului

$$\chi^2 = T \cdot K_1 \cdot p \cdot \left( \ln |\hat{\Sigma}_R| - \ln |\hat{\Sigma}_U| \right) \sim \chi^2_{K_1 \cdot K_2 \cdot p}$$

unde  $K_1$  = numărul de variabile “cauzate”,  $K_2$  = numărul de variabile “cauzatoare”

## Ce sunt funcțiile de răspuns la impuls?

### Definiție

O **Funcție de Răspuns la Impuls (IRF)** trasează efectul unui șoc punctual la o variabilă asupra valorilor curente și viitoare ale tuturor variabilelor.

### Întrebarea la care răspund IRF-urile

“Dacă există un șoc neașteptat de 1 unitate la  $Y_1$  astăzi, ce se întâmplă cu  $Y_1$  și  $Y_2$  în următoarele  $h$  perioade?”

### Reprezentarea $MA(\infty)$

Un  $VAR(p)$  stabil poate fi scris ca:

$$Y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i \varepsilon_{t-i}$$

Matricele  $\Phi_i$  sunt **răspunsurile la impuls** la orizontul  $i$ .



## Calculul IRF pentru VAR(1)

Pentru VAR(1):  $Y_t = c + AY_{t-1} + \varepsilon_t$

Matricele de răspuns la impuls sunt:

$$\Phi_0 = I_K, \quad \Phi_1 = A, \quad \Phi_2 = A^2, \quad \dots, \quad \Phi_h = A^h$$

### Interpretare

$[\Phi_h]_{ij}$  = Efectul asupra lui  $Y_i$  la momentul  $t + h$  al unui șoc unitar la  $Y_j$  la momentul  $t$

Pentru VAR stabil:  $\Phi_h \rightarrow 0$  când  $h \rightarrow \infty$  (șocurile dispar)

## Calculul IRF pentru VAR(p) general

### Formula recursivă pentru VAR(p)

Pentru  $Y_t = c + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \dots + A_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$ :

$$\Phi_h = \sum_{j=1}^{\min(h,p)} A_j \Phi_{h-j}, \quad h = 1, 2, 3, \dots$$

cu  $\Phi_0 = I_K$  și  $\Phi_h = 0$  pentru  $h < 0$ .

### Exemplu: IRF pentru VAR(2)

- $\Phi_0 = I_K$
- $\Phi_1 = A_1 \Phi_0 = A_1$
- $\Phi_2 = A_1 \Phi_1 + A_2 \Phi_0 = A_1^2 + A_2$
- $\Phi_3 = A_1 \Phi_2 + A_2 \Phi_1 = A_1(A_1^2 + A_2) + A_2 A_1$

## IRF ortogonalizate

### Problema: Erori corelate

Dacă  $\Sigma$  nu este diagonală, șocurile  $\varepsilon_{1t}$  și  $\varepsilon_{2t}$  sunt corelate.  
Un șoc la “ $Y_1$ ” implică și un șoc la “ $Y_2$ ”.

### Soluție: Descompunerea Cholesky

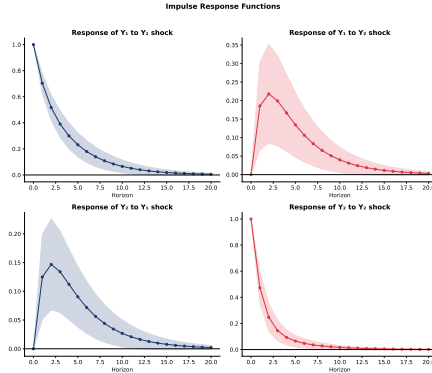
Factorizăm  $\Sigma = PP'$  unde  $P$  este inferior triunghiulară.  
Definim șocuri ortogonalizate:  $u_t = P^{-1}\varepsilon_t$  cu  $\mathbb{E}[u_t u_t'] = I$

IRF ortogonalizate:  $\Theta_h = \Phi_h P$

### Ordinea contează!

Cholesky presupune variabilele ordonate de la “cea mai exogenă” la “cea mai endogenă”. Rezultatele depind de această ordine.

# Funcții de răspuns la impuls: Exemplu



- IRF arată cum răspunde fiecare variabilă la un șoc unitar în timp
- Zonele umbrite reprezintă intervale de încredere (incertitudine în estimări)
- Pentru modele VAR stabile, răspunsurile converg la zero pe măsură ce orizontul crește

Pentru  $A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_1 = A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_2 = A^2 = \begin{pmatrix} 0.47 & 0.26 \\ -0.13 & 0.34 \end{pmatrix}$$

### Interpretare

- $[\Phi_2]_{12} = 0.26$ : Un șoc unitar la  $Y_2$  crește  $Y_1$  cu 0.26 după 2 perioade
- $[\Phi_2]_{21} = -0.13$ : Un șoc unitar la  $Y_1$  **scade**  $Y_2$  cu 0.13 după 2 perioade

## Răspunsuri la impuls cumulative

### Definiție

**IRF cumulativ** până la orizontul  $H$ :

$$\Psi_H = \sum_{h=0}^H \Phi_h$$

Măsoară **efectul total acumulat** al unui șoc.

### Multiplicatorul pe termen lung

Pentru VAR stabil:  $\Psi_{\infty} = (I_K - A_1 - A_2 - \dots - A_p)^{-1}$

Aceasta dă **efectul permanent** al unui șoc punctual.

### Când să folosim

IRF cumulative sunt utile când ne interesează impactul total (ex. pierderea cumulată de PIB după un șoc).

# Intervale de încredere pentru IRF

## Surse de incertitudine

IRF sunt funcții de parametrii estimați  $\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_p$ , deci au **incertitudine de eșantionare**.

## Metode pentru benzi de încredere

- 1 **Asimptotice**: Folosim metoda delta pentru a deriva erorile standard
- 2 **Monte Carlo**: Simulăm din distribuția asimptotică a lui  $\hat{A}$
- 3 **Bootstrap**: Reeșantionăm reziduurile și reestimăm VAR

## Procedura Bootstrap

- 1 Eștimăm VAR, salvăm reziduurile  $\{\hat{e}_t\}$
- 2 Extragem cu înlocuire pentru a crea  $\{\hat{e}_t^*\}$
- 3 Generăm eșantion bootstrap folosind VAR estimat
- 4 Reestimăm și calculăm IRF
- 5 Repetăm de  $B$  ori; folosim percentilele pentru IC

# VAR Structural (SVAR)

## Motivație

Șocurile VAR standard  $\varepsilon_t$  sunt inovații de **formă redusă**—combinații liniare de șocuri structurale.

Vrem să identificăm **șocuri structurale** semnificative economic.

## Forma structurală

$$B_0 Y_t = \Gamma_0 + B_1 Y_{t-1} + \cdots + B_p Y_{t-p} + u_t$$

unde  $u_t$  sunt **șocuri structurale** cu  $\mathbb{E}[u_t u_t'] = I_K$

## Relația cu forma redusă

$$\varepsilon_t = B_0^{-1} u_t \quad \Rightarrow \quad \Sigma = B_0^{-1} (B_0^{-1})'$$



## Problema identificării

$\Sigma$  are  $K(K + 1)/2$  elemente unice, dar  $B_0^{-1}$  are  $K^2$  elemente.

Avem nevoie de  $K(K - 1)/2$  restricții suplimentare!

## Scheme comune de identificare

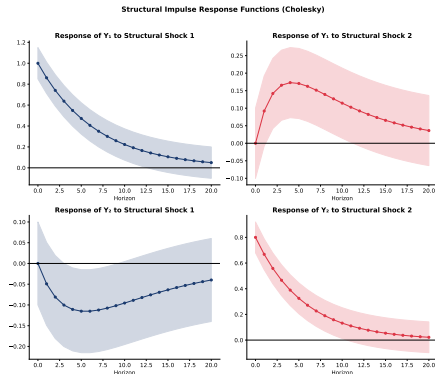
- 1 **Restricții pe termen scurt:** Efecte de impact zero (Cholesky)
- 2 **Restricții pe termen lung:** Efecte zero pe termen lung (Blanchard-Quah)
- 3 **Restricții de semn:** Constrângeri de inegalitate pe IRF
- 4 **Instrumente externe:** Folosim informații din afară

## Exemplu: Ordonare Cholesky (recursivă)

Pentru  $K = 2$ :  $B_0^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

Variabila 1 nu răspunde la șocul 2 contemporan.

# Exemplu IRF structural



- IRF structurale bazate pe identificare Cholesky
- Ordinea variabilelor afectează interpretarea șocurilor
- Prima variabilă răspunde doar la propriile șocuri contemporan

### Întrebare

Ce proporție din varianța erorii de prognoză a lui  $Y_i$  la orizontul  $h$  se datorează șocurilor la  $Y_j$ ?

### Formula FEVD

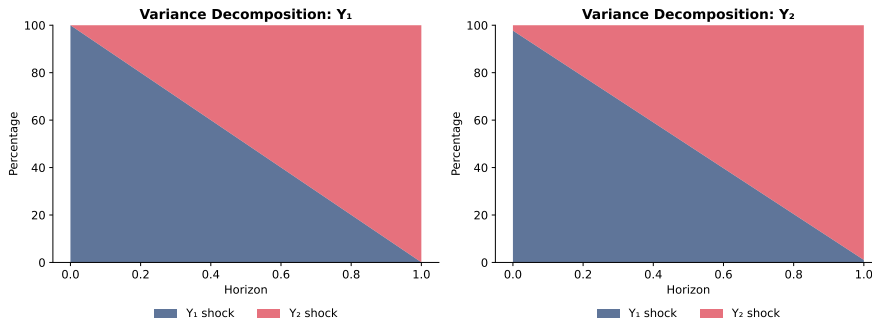
$$\text{FEVD}_{ij}(h) = \frac{\sum_{s=0}^{h-1} [\Theta_s]_{ij}^2}{\sum_{s=0}^{h-1} \sum_{k=1}^K [\Theta_s]_{ik}^2}$$

Aceasta dă **procentul** din varianța prognozei la  $h$  pași a lui  $Y_i$  explicat de șocurile la  $Y_j$ .

### Proprietăți

- $0 \leq \text{FEVD}_{ij}(h) \leq 1$
- $\sum_{j=1}^K \text{FEVD}_{ij}(h) = 1$  (suma la 100%)
- La  $h = 1$ : Șocurile proprii domină (prin construcția Cholesky)

## Forecast Error Variance Decomposition



- FEVD arată proporția din varianța prognozei atribuibilă fiecărui șoc
- La orizonturi scurte, șocurile proprii domină; efectele încrucișate cresc în timp
- Util pentru înțelegerea importanței relative a diferitelor șocuri în sistem

### Calculul FEVD pentru VAR bivariat

Folosind IRF ortogonalizate  $\Theta_h$ , FEVD la orizontul  $H$ :

$$\text{FEVD}_{11}(H) = \frac{\sum_{h=0}^{H-1} \theta_{11}^2(h)}{\sum_{h=0}^{H-1} [\theta_{11}^2(h) + \theta_{12}^2(h)]}$$

### Exemplu de calcul

$h$	$\theta_{11}(h)$	$\theta_{12}(h)$	$\theta_{11}^2(h)$	$\theta_{12}^2(h)$
0	1.00	0.00	1.00	0.00
1	0.70	0.20	0.49	0.04
2	0.47	0.26	0.22	0.07

$$\text{FEVD}_{11}(3) = \frac{1.00+0.49+0.22}{1.00+0.49+0.22+0.00+0.04+0.07} = \frac{1.71}{1.82} = 94\%$$

## Definiție

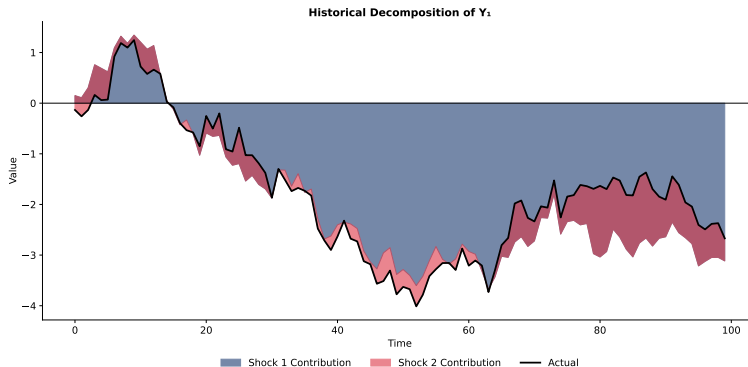
**Descompunerea istorică** descompune fiecare valoare observată în contribuții de la fiecare șoc structural:

$$Y_{it} - \bar{Y}_i = \sum_{j=1}^K \sum_{s=0}^{t-1} \theta_{ij}(s) \cdot u_{j,t-s}$$

## Aplicație

- “Cât din scăderea PIB din 2008 s-a datorat șocurilor financiare vs. șocurilor petroliere?”
- Atribuire mișcările istorice unor șocuri identificate specifice
- Util pentru analiza politicilor și interpretarea narativă

## Descompunerea istorică: Exemplu



- Fiecare culoare reprezintă contribuția unui șoc structural diferit
- Contribuțiile stivuite însumează abaterea reală observată de la medie
- Ajută la identificarea șocurilor care au determinat episoadele istorice

### Ce trebuie verificat

După estimarea VAR, verificăm că reziduurile  $\hat{\varepsilon}_t$  se comportă ca zgomot alb:

- 1 Fără corelație serială
- 2 Varianță constantă (homoscedasticitate)
- 3 Normalitate (pentru inferență)

### De ce contează

- Reziduuri autocorelate  $\Rightarrow$  estimări ineficiente
- Heteroscedasticitate  $\Rightarrow$  erori standard invalide
- Non-normalitate  $\Rightarrow$  inferența poate fi nesigură



### Testul Portmanteau (Ljung-Box)

$$Q_h = T(T+2) \sum_{j=1}^h \frac{1}{T-j} \text{tr}(\hat{C}_j' \hat{C}_0^{-1} \hat{C}_j \hat{C}_0^{-1})$$

unde  $\hat{C}_j = \frac{1}{T} \sum_{t=j+1}^T \hat{\epsilon}_t \hat{\epsilon}_{t-j}'$

Sub  $H_0$  (fără autocorelație):  $Q_h \sim \chi_{K^2(h-p)}^2$

### Testul LM Breusch-Godfrey

- 1 Regresăm  $\hat{\epsilon}_t$  pe  $\hat{\epsilon}_{t-1}, \dots, \hat{\epsilon}_{t-h}$  și regresorii originali
- 2  $LM = T \cdot R^2 \sim \chi_{K^2 h}^2$  sub  $H_0$

Dacă este respins

Luați în considerare creșterea ordinului lag-ului  $p$  sau adăugarea de variabile suplimentare.

# Testarea heteroscedasticității

## Testul ARCH-LM

Testează pentru heteroscedasticitate condiționată autoregresivă în reziduuri:

$$\hat{\varepsilon}_{it}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}_{i,t-1}^2 + \cdots + \alpha_q \hat{\varepsilon}_{i,t-q}^2 + v_t$$

$H_0: \alpha_1 = \cdots = \alpha_q = 0$  (homoscedasticitate)

$$LM = TR^2 \sim \chi_q^2$$

## Versiunea multivariată

Testăm toate ecuațiile împreună folosind:

$$\text{vech}(\hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t') = c + \sum_{j=1}^q B_j \text{vech}(\hat{\varepsilon}_{t-j} \hat{\varepsilon}_{t-j}') + v_t$$

# Testarea normalității

## Testul Jarque-Bera (univariat)

$$JB = \frac{T}{6} \left( S^2 + \frac{(K - 3)^2}{4} \right) \sim \chi^2_2$$

unde  $S$  = asimetrie,  $K$  = curtoză

## Normalitate multivariată (Doornik-Hansen)

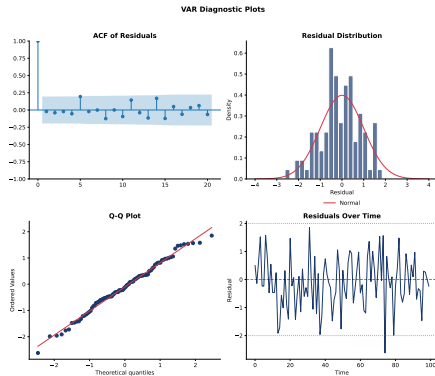
Transformăm reziduurile și testăm asimetria și curtoza comune:

$$DH = s_1'(\Omega^{-1/2})'(\Omega^{-1/2})s_1 + s_2'(\Omega^{-1/2})'(\Omega^{-1/2})s_2 \sim \chi^2_{2K}$$

## Notă

Normalitatea este adesea respinsă în datele financiare. Luați în considerare erori standard robuste dacă non-normalitatea este severă.

# Grafic rezumat diagnostic



- ACF reziduurilor nu ar trebui să arate autocorelație semnificativă
- Histograma ar trebui să aproximeze distribuția normală
- Graficul Q-Q ar trebui să urmeze linia de 45 de grade

## Prognoze punctuale din VAR

### Prognoză iterativă

Pentru VAR(1):  $Y_t = c + AY_{t-1} + \varepsilon_t$

**Prognoză la 1 pas:**  $\hat{Y}_{T+1|T} = c + AY_T$

**Prognoză la 2 pași:**  $\hat{Y}_{T+2|T} = c + A\hat{Y}_{T+1|T}$

**Prognoză la  $h$  pași:**  $\hat{Y}_{T+h|T} = c + A\hat{Y}_{T+h-1|T}$

### Formula directă

$$\hat{Y}_{T+h|T} = (I + A + A^2 + \dots + A^{h-1})c + A^h Y_T$$

Pentru VAR stabil: converge la  $\mu = (I - A)^{-1}c$  când  $h \rightarrow \infty$

### Eroarea de prognoză la $h$ pași

$$e_{T+h|T} = Y_{T+h} - \hat{Y}_{T+h|T} = \sum_{j=0}^{h-1} A^j \varepsilon_{T+h-j}$$

### Matricea erorii medii pătratice

$$\text{MSE}(\hat{Y}_{T+h|T}) = \mathbb{E}[e_{T+h|T} e'_{T+h|T}] = \sum_{j=0}^{h-1} A^j \Sigma (A^j)'$$

### Ideea cheie

- MSE crește cu orizontul  $h$
- Pentru VAR stabil: MSE converge la varianța necondiționată  $\Gamma(0)$
- Prognoze pe termen lung  $\rightarrow$  media necondiționată cu incertitudine  $= \Gamma(0)$

## Intervale de încredere pentru prognoză

### Construirea intervalelor

Pentru erori distribuite normal, interval de încredere  $(1 - \alpha)$ :

$$\hat{Y}_{i,T+h|T} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{[\text{MSE}(\hat{Y}_{T+h|T})]_{ii}}$$

### Regiuni de încredere comune

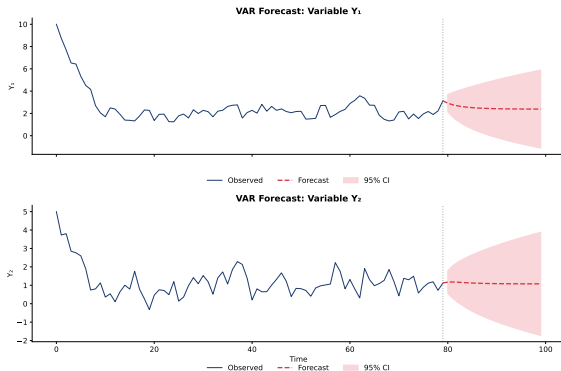
Pentru mai multe variabile, folosim elipsoizi:

$$(Y_{T+h} - \hat{Y}_{T+h|T})' [\text{MSE}(\hat{Y}_{T+h|T})]^{-1} (Y_{T+h} - \hat{Y}_{T+h|T}) \leq \chi_{K,\alpha}^2$$

### Notă

Acestea presupun parametri cunoscuți. Metodele bootstrap țin cont de incertitudinea parametrilor.

# Proгноze VAR: Exemplu



- Prognozele punctuale sunt arătate ca linie continuă dincolo de datele observate
- Benzile de încredere se lărgesc pe măsură ce orizontul de prognoză crește
- Prognozele converg la media necondiționată pentru orizonturi lungi



## Evaluare out-of-sample

Împărțim datele: eșantion de estimare (1 la  $T_1$ ) și eșantion de testare ( $T_1 + 1$  la  $T$ ). Calculăm erorile de prognoză:

$$e_{t+h} = Y_{t+h} - \hat{Y}_{t+h|t}$$

## Metrice comune

• RMSE:  $\sqrt{\frac{1}{n} \sum e_{t+h}^2}$     MAE:  $\frac{1}{n} \sum |e_{t+h}|$     MAPE:  $\frac{100}{n} \sum \left| \frac{e_{t+h}}{Y_{t+h}} \right|$

## Testul Diebold-Mariano

Testează dacă prognozele VAR sunt semnificativ mai bune decât alternativa:  $DM = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\hat{\sigma}_d^2/n}} \sim N(0, 1)$  unde

$d_t = L(e_{1t}) - L(e_{2t})$  este diferențiala de pierdere.

### Legea lui Okun

Există o relație negativă între creșterea PIB și șomaj:

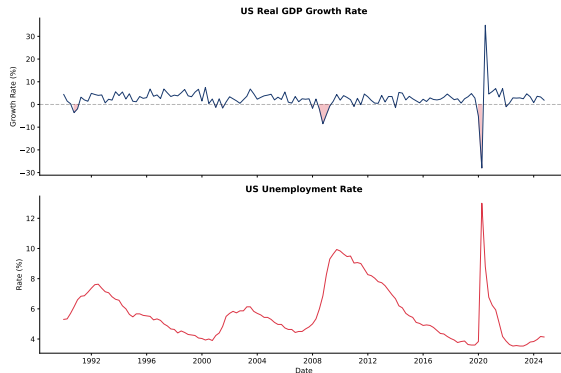
$$\Delta U_t \approx -\beta(\Delta Y_t - \bar{g})$$

unde  $\bar{g}$  este creșterea tendențială a PIB și  $\beta \approx 0.4$ .

### Întrebări pentru analiza VAR

- 1 Cauzează creșterea PIB Granger modificările șomajului?
- 2 Cauzează șomajul Granger creșterea PIB?
- 3 Cum se propagă șocurile între variabile?

## PIB și șomaj: Date



- Creșterea PIB și rata șomajului prezintă o corelație negativă clară (Legea lui Okun)
- Ambele serii prezintă tipare ciclice legate de fluctuațiile ciclului de afaceri
- Acest sistem bivariat este ideal pentru analiza VAR și testarea cauzalității Granger

## ❶ Pregătirea datelor

- Verificăm staționaritatea (teste de rădăcină unitară)
- Transformăm dacă este necesar (diferențe, logaritmi)

## ❷ Selecția lag-ului

- Folosim criteriile AIC, BIC, HQ
- Verificăm autocorelația reziduurilor

## ❸ Estimare

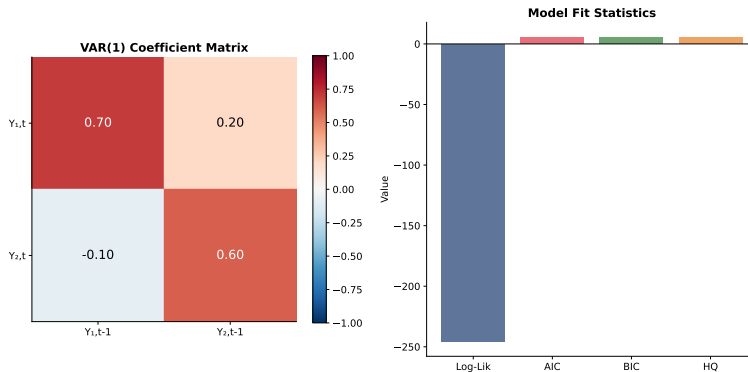
- OLS ecuație cu ecuație
- Verificăm stabilitatea (valori proprii)

## ❹ Analiză

- Teste de cauzalitate Granger
- Funcții de răspuns la impuls
- Descompunerea varianței

## ❺ Prognoză

## Rezultate VAR estimate



- Coeficienți estimați cu erori standard și statistici t
- Valorile criteriilor informaționale pentru compararea modelelor
- Rezumat diagnostic model (teste reziduuri)

### Rezultatele testului: PIB și șomaj

Ipoteza nulă	Statistica F	df	p-valoare	Decizie
PIB $\nrightarrow$ Șomaj	8.42	(2, 95)	0.0004	Respingem
Șomaj $\nrightarrow$ PIB	2.15	(2, 95)	0.1220	Nu respingem

### Interpretare

- Creșterea PIB cauzează Granger șomajul (în acord cu Legea lui Okun)
- Șomajul nu cauzează semnificativ Granger PIB
- Evidență de cauzalitate **unidirecțională**: PIB  $\rightarrow$  Șomaj

## VAR în Python (statsmodels)

```
from statsmodels.tsa.api import VAR
from statsmodels.tsa.stattools import grangercausalitytests

# Ajustăm modelul VAR
model = VAR(data)
results = model.fit(maxlags=4, ic='aic')

# Testul cauzalității Granger
granger_test = grangercausalitytests(data[['Y1', 'Y2']],
                                     maxlag=4)

# Funcții de răspuns la impuls
irf = results.irf(periods=20)
irf.plot()

# Descompunerea varianței
fevd = results.fevd(periods=20)
fevd.plot()
```

## VAR în R (pachetul vars)

```
library(vars)

# Selectăm ordinul optim al lag-ului
lag_select <- VARselect(data, lag.max = 8)
print(lag_select$selection)

# Ajustăm modelul VAR
var_model <- VAR(data, p = 2, type = "const")
summary(var_model)

# Testul cauzalității Granger
causality(var_model, cause = "GDP")

# Funcții de răspuns la impuls
irf_results <- irf(var_model, n.ahead = 20, boot = TRUE)
plot(irf_results)

# Descompunerea varianței erorii de prognoză
fevd_results <- fevd(var_model, n.ahead = 20)
plot(fevd_results)
```



### VAR cu trei variabile

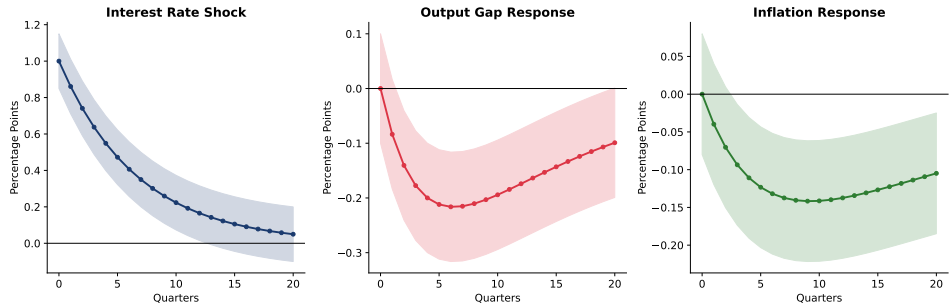
Studiem mecanismul de transmisie monetară cu:

- $Y_1$ : Gap-ul de producție (devierea PIB de la trend)
- $Y_2$ : Rata inflației
- $Y_3$ : Rata dobânzii (instrument de politică)

### Întrebări cheie

- ❶ Cum afectează un șoc al ratei dobânzii producția și inflația?
- ❷ Cât timp trece până se simte efectul maxim?
- ❸ Ce fracțiune din varianța producției se datorează șocurilor monetare?

## Monetary Policy Transmission: Response to 1pp Interest Rate Shock



- Șoc de politică monetară contracționistă (creșterea ratei dobânzii)
- Producția scade cu efect maxim după 4-6 trimestre ("întârzieri lungi și variabile")
- Inflația răspunde mai încet, scăzând după producție

## Modele VAR

- Modelează **mai multe** serii de timp împreună
- Fiecare variabilă depinde de propriile lag-uri ȘI lag-urile altor variabile
- Eștimate prin OLS ecuație cu ecuație; necesită staționaritate

## Cauzalitate Granger

- Testează dacă  $X$  ajută la prezicerea lui  $Y$  dincolo de istoricul propriu al lui  $Y$
- **Nu** este la fel cu cauzalitatea reală; test  $F$  asupra restricțiilor coeficienților

## IRF și FEVD

- IRF: Cum se propagă șocurile prin sistem
- FEVD: Ce proporție din varianță se datorează fiecărui șoc
- Ambele depind de ordonarea variabilelor (descompunerea Cholesky)

# Lista de verificare pentru selecția modelului VAR

## Înainte de estimare

- ☐ Testați pentru rădăcini unitare în fiecare variabilă
- ☐ Transformați la staționar dacă este necesar (diferențe, logaritmi)
- ☐ Verificați pentru valori extreme și rupturi structurale

## Specificarea modelului

- ☐ Selectați ordinul lag-ului folosind AIC/BIC
- ☐ Estimați VAR prin OLS
- ☐ Verificați stabilitatea (valori proprii în interiorul cercului unitate)

## După estimare

- ☐ Testați reziduurile pentru autocorelație
- ☐ Testați pentru efecte ARCH
- ☐ Testați pentru normalitate
- ☐ Calculați IRF, FEVD, teste Granger

### Capcane în analiza VAR

- ❶ **Ignorarea nestaționarității:** Testați întotdeauna mai întâi pentru rădăcini unitare
- ❷ **Supraajustare:** Prea multe lag-uri  $\Rightarrow$  prognoze slabe
- ❸ **Ordonare greșită:** Rezultatele Cholesky depind de ordinea variabilelor
- ❹ **Confundarea corelației cu cauzalitatea:** Cauzalitate Granger  $\neq$  cauzalitate reală
- ❺ **Ignorarea incertitudinii parametrilor:** Folosiți IC bootstrap pentru IRF
- ❻ **Eșantioane mici:** VAR necesită multe observații ( $T > 50$ )

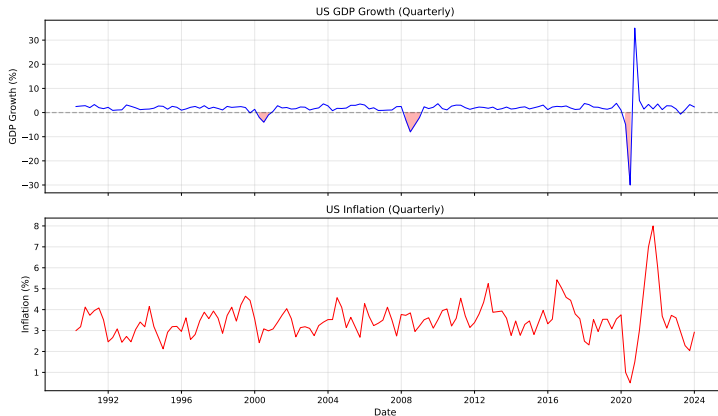
## Ce urmează?

### Subiecte pentru studiu aprofundat

- **Cointegrare:** Relații pe termen lung între variabile nestaționare
- **VECM:** Modele cu corecția erorii pentru sisteme cointegrate
- **VAR Structural:** Impunerea restricțiilor din teoria economică
- **Panel VAR:** VAR pentru date panel
- **VAR Bayesian:** Distribuții prior de shrinkage pentru sisteme de dimensiuni mari

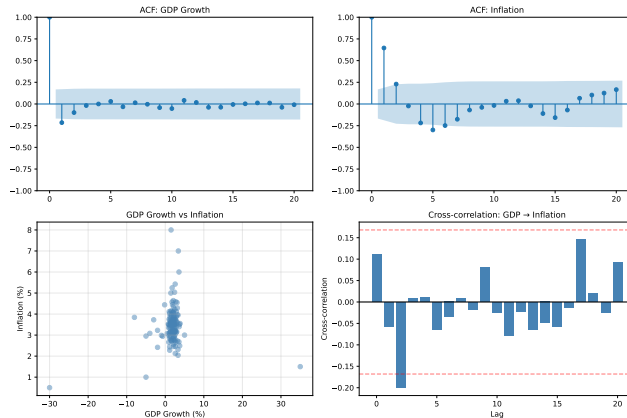
Întrebări?

# Studiu de caz: Relația dintre PIB și Inflație



- Date trimestriale SUA: Creștere PIB și Inflație (1990-2023)
- Recesiuni vizibile: 2000, 2008 (criză financiară), 2020 (COVID-19)
- Inflație post-COVID ridicată (2021-2022)

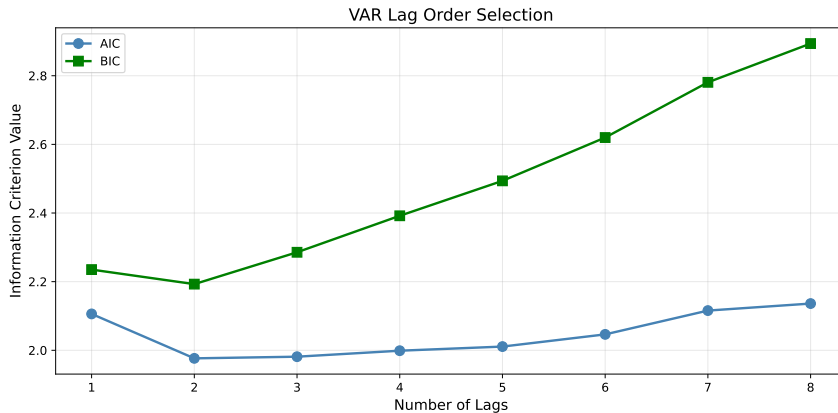
## Pasul 1: Analiză preliminară



- ACF indică staționaritate pentru ambele serii
- Corelație pozitivă între PIB și Inflație (curba Phillips)
- Cross-corelație sugerează relații dinamice bidirecționale

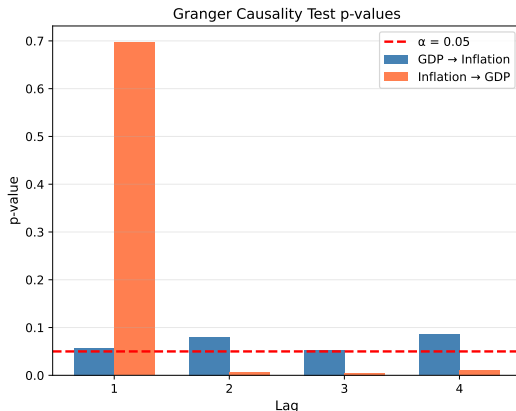


## Pasul 2: Selecția ordinului VAR



- Criteriile AIC și BIC sugerează VAR(2)
- Compromis între complexitate și ajustare
- Ordinul 2 captează dinamica trimestrială

### Pasul 3: Testul Granger de cauzalitate



#### Interpretation

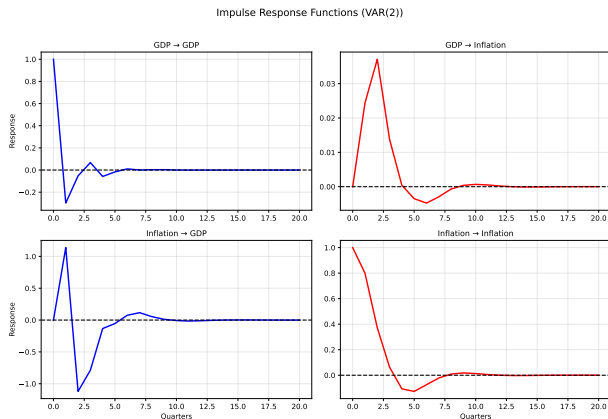
Granger Causality Results (lag=2):

GDP → Inflation:  $p = 0.0799$   
Not significant at 5%

Inflation → GDP:  $p = 0.0072$   
Significant at 5%

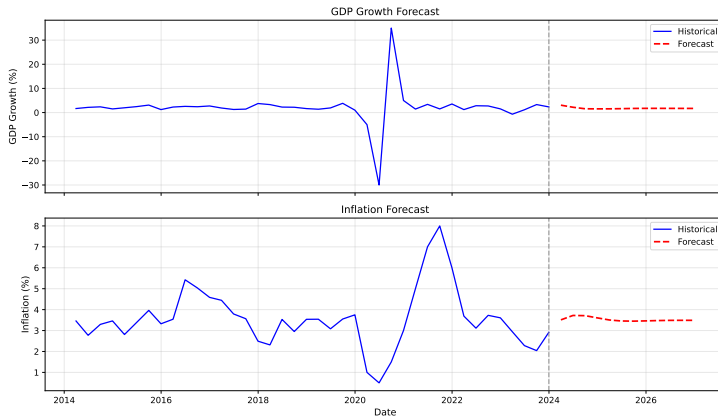
- PIB → Inflație: Semnificativ ( $p < 0.05$ ) — PIB “cauzează Granger” Inflația
- Inflație → PIB: Semnificativ — cauzalitate bidirecțională
- Confirmare a relației dinamice dintre variabilele macroeconomice

## Pasul 4: Funcții de răspuns la impuls (IRF)



- Șoc PIB → efect pozitiv persistent asupra inflației
- Șoc Inflație → efect negativ asupra creșterii PIB
- Efectele se disipează după aproximativ 8-10 trimestre

## Pasul 5: Prognoză VAR



- Prognoză pe 12 trimestre pentru ambele variabile simultan
- VAR captează interdependențele dintre serii
- Prognozele converg spre valorile de echilibru pe termen lung

## Întrebarea 1

### Întrebare

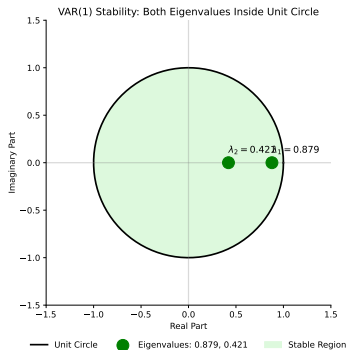
Pentru un model VAR(1) cu matricea de coeficienți  $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$ , este modelul stabil?

- ☐ A Da, deoarece toate elementele diagonale sunt mai mici decât 1
- ☐ B Da, deoarece toate valorile proprii sunt în interiorul cercului unitate
- ☐ C Nu, deoarece suma coeficienților depășește 1
- ☐ D Nu poate fi determinat fără a cunoaște  $\Sigma$

## Întrebarea 1: Răspuns

Răspuns corect: (B) Valori proprii în interiorul cercului unitate

$\lambda_1 = 0.879$ ,  $\lambda_2 = 0.421$  — ambele  $|\lambda| < 1 \Rightarrow$  Stabil!



### Întrebare

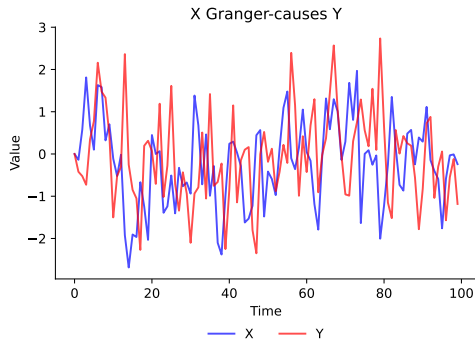
Dacă  $X$  cauzează Granger pe  $Y$  la nivelul de semnificație de 5%, care dintre următoarele afirmații este ADEVĂRATĂ?

- ☐ A  $X$  este cauza economică a lui  $Y$
- ☐ B Valorile trecute ale lui  $X$  conțin informații utile pentru prezicerea lui  $Y$
- ☐ C  $Y$  nu poate cauza Granger pe  $X$
- ☐ D Corelația între  $X$  și  $Y$  este pozitivă

## Întrebarea 2: Răspuns

Răspuns corect: (B) Informație predictivă

Cauzalitate Granger = conținut predictiv, nu cauzare economică reală. X trecut ajută la prezicerea lui Y.



*Past X helps predict Y  
(beyond Y's own past)*



### Întrebare

Într-un VAR cu IRF identificate Cholesky, ce determină ordinea variabilelor?

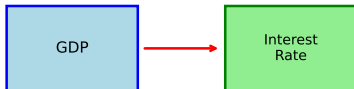
- ☐ A Magnitudinea răspunsurilor la impuls
- ☐ B Viteza cu care șocurile dispar
- ☐ C Care variabile pot răspunde contemporan la care șocuri
- ☐ D Numărul de lag-uri în VAR

## Întrebarea 3: Răspuns

Răspuns corect: (C) Răspunsuri contemporane

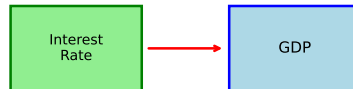
Ordonarea determină care variabile răspund imediat la care șocuri.

**Ordering: (GDP, Interest Rate)**



GDP shock → IR responds at  $t=0$   
IR shock → GDP responds at  $t=1$

**Ordering: (Interest Rate, GDP)**



IR shock → GDP responds at  $t=0$   
GDP shock → IR responds at  $t=1$

### Întrebare

Pentru un VAR(1) bivariat, câți parametri trebuie estimați (excluzând matricea de covarianță a erorilor)?

- ☐ A 4
- ☐ B 6
- ☐ C 8
- ☐ D 10

## Întrebarea 4: Răspuns

Răspuns corect: (B) 6 parametri

### Numărare detaliată

VAR(1) cu  $K = 2$  variabile:

$$\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{2 \text{ param}} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{4 \text{ param}} \begin{pmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

- Vectorul constant  $c$ :  $K = 2$  parametri
- Matricea de coeficienți  $A$ :  $K^2 = 4$  parametri
- Total:  $K + K^2 = 2 + 4 = 6$  parametri

### Formula generală

VAR( $p$ ) cu  $K$  variabile:  $K + pK^2$  parametri (excluzând  $\Sigma$ )

### Întrebare

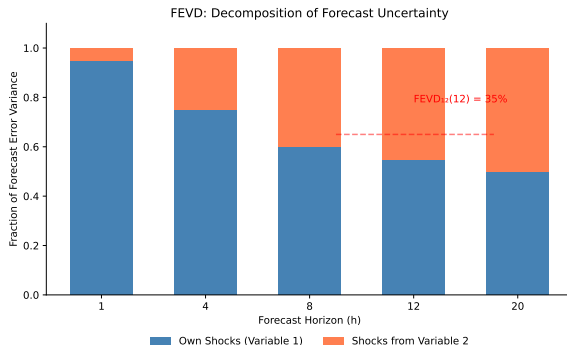
Ce înseamnă  $FEVD_{12}(h) = 0.35$ ?

- ☐ A 35% din varianța totală a variabilei 1 este explicată de variabila 2
- ☐ B 35% din varianța erorii de prognoză la  $h$  pași a variabilei 1 se datorează șocurilor la variabila 2
- ☐ C Corelația între variabilele 1 și 2 la lag-ul  $h$  este 0.35
- ☐ D Variabila 2 explică 35% din răspunsul la impuls al variabilei 1

## Întrebarea 5: Răspuns

Răspuns corect: (B) Descompunerea varianței erorii de prognoză

35% din varianța erorii de prognoză la  $h$  pași a variabilei 1 se datorează șocurilor de la variabila 2.



## Model VAR(p)

$$Y_t = c + \sum_{i=1}^p A_i Y_{t-i} + \varepsilon_t$$

$\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ , i.i.d.

## Funcții Răspuns la Impuls

$$Y_{t+h} = \sum_{i=0}^{\infty} i \varepsilon_{t+h-i}$$

$i$  = multiplicatori la orizontul  $i$

## Cauzalitate Granger

$H_0$ :  $X$  nu cauzează Granger  $Y$

Test F sau Wald pe coeficienții lag-urilor lui  $X$

## FEVD

$$FEVD_{jk}(h) = \frac{\sum_{i=0}^{h-1} (e'_j i P e_k)^2}{\sum_{i=0}^{h-1} e'_j i \Sigma_i' e_j}$$

Contribuția șocului  $k$  la varianța lui  $j$

## Selecția Lag-urilor

$$AIC = \ln |\hat{\Sigma}| + \frac{2pK^2}{T}$$

$$BIC = \ln |\hat{\Sigma}| + \frac{pK^2 \ln T}{T}$$

## Staționaritate VAR

Toate valorile proprii ale  $A$  în interiorul cercului unitate

## Referințe



Lütkepohl, H. (2005). *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer.



Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.



Sims, C.A. (1980). Macroeconomics and Reality. *Econometrica*, 48(1), 1-48.



Granger, C.W.J. (1969). Investigating Causal Relations by Econometric Models. *Econometrica*, 37(3), 424-438.



Toda, H.Y. & Yamamoto, T. (1995). Statistical Inference în Vector Autoregressions with Possibly Integrated Processes. *Journal of Econometrics*, 66(1-2), 225-250.