



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 2: Modele ARMA

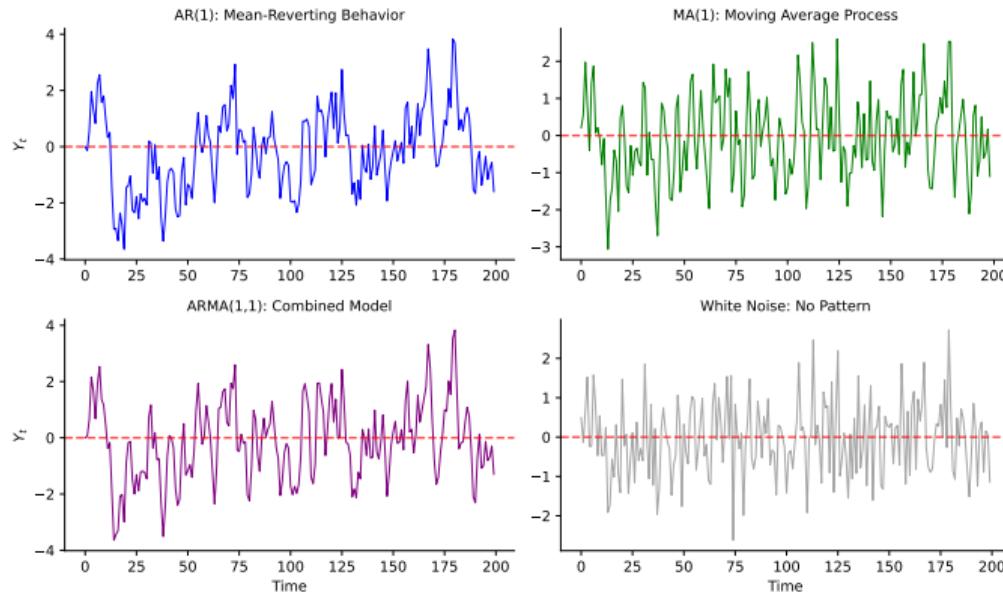
Serii de Timp Staționare



Structura Cursului

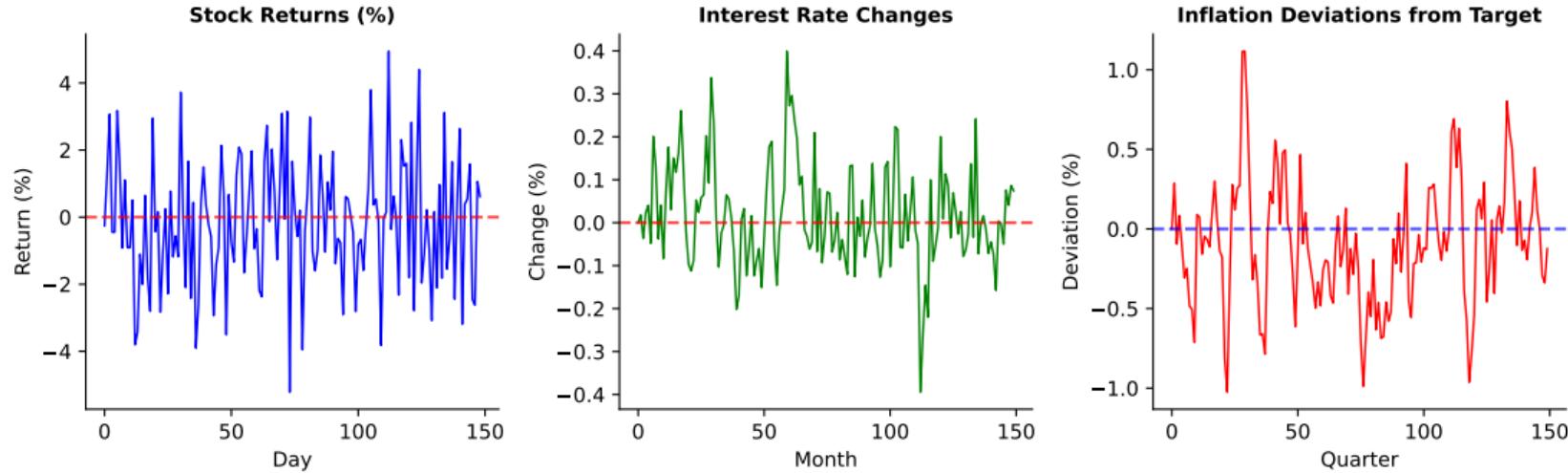
- 1 Introducere și Operatorul Lag
- 2 Modele Autoregresive (AR)
- 3 Modele de Medie Mobilă (MA)
- 4 Modele ARMA
- 5 Identificarea Modelului
- 6 Estimarea Parametrilor
- 7 Diagnosticarea Modelului
- 8 Prognoza cu ARMA
- 9 Implementare Practică
- 10 Rezumat

Exemplu Motivațional: Procese Staționare



- **Procese AR:** Valoarea curentă depinde de valorile trecute — comportament de revenire la medie
- **Procese MA:** Valoarea curentă depinde de řocurile trecute — memorie scurtă
- **ARMA:** Combină ambele mecanisme pentru modelare flexibilă

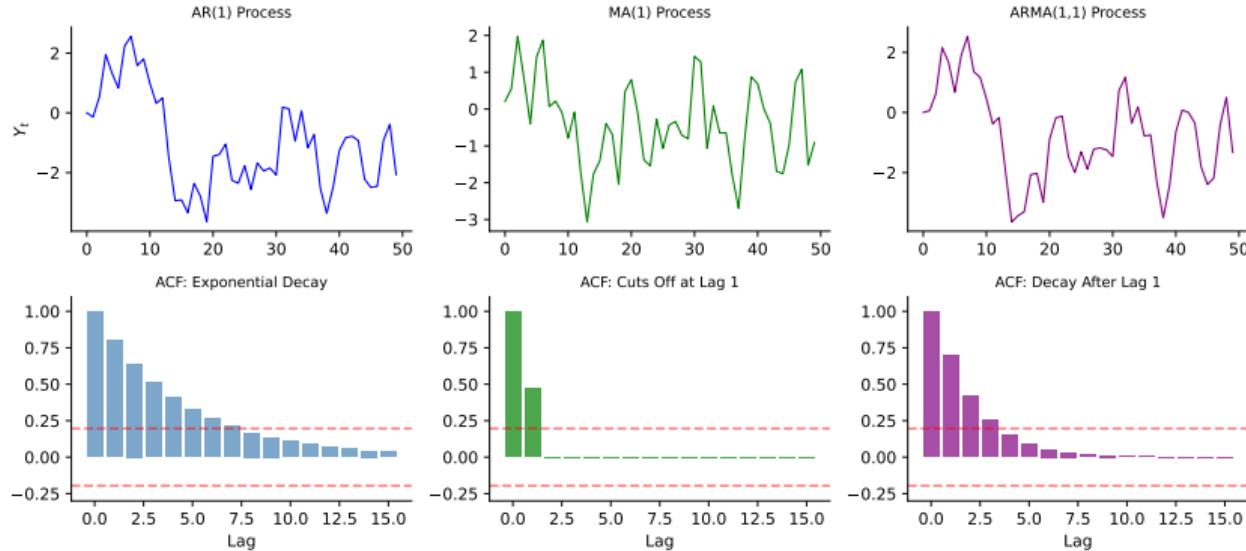
Aplicații Practice ale ARMA



Observație Cheie

Multe serii economice și financiare devin staționare după transformări simple (randamente, rate de creștere, abateri de la trend) — perfecte pentru modelarea ARMA!

Identificarea Modelului prin Tipare ACF



ACF Dezvăluie Structura Modelului

Diferite modele ARMA produc tipare ACF distincte — putem identifica modelul examinând datele!

Recapitulare: Staționaritatea

Din Capitolul 1: Un proces $\{X_t\}$ este **slab staționar** dacă:

- ① $\mathbb{E}[X_t] = \mu$ (medie constantă)
- ② $\text{Var}(X_t) = \sigma^2 < \infty$ (varianță constantă, finită)
- ③ $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$ (covarianța depinde doar de lag-ul h)

De ce contează staționaritatea pentru ARMA:

- Modelele ARMA presupun că procesul subiacent este staționar
- Datele nestaționare trebuie diferențiate mai întâi (ARIMA)
- Staționaritatea asigură parametri stabili ai modelului

Astăzi: Construim modele pentru serii de timp staționare folosind valori trecute și erori trecute.

Operatorul Lag (Operatorul de Întârziere)

Definiție 1 (Operatorul Lag)

Operatorul lag L (sau operatorul de întârziere B) deplasează o serie de timp înapoi cu o perioadă:

$$LX_t = X_{t-1}$$

Proprietăți:

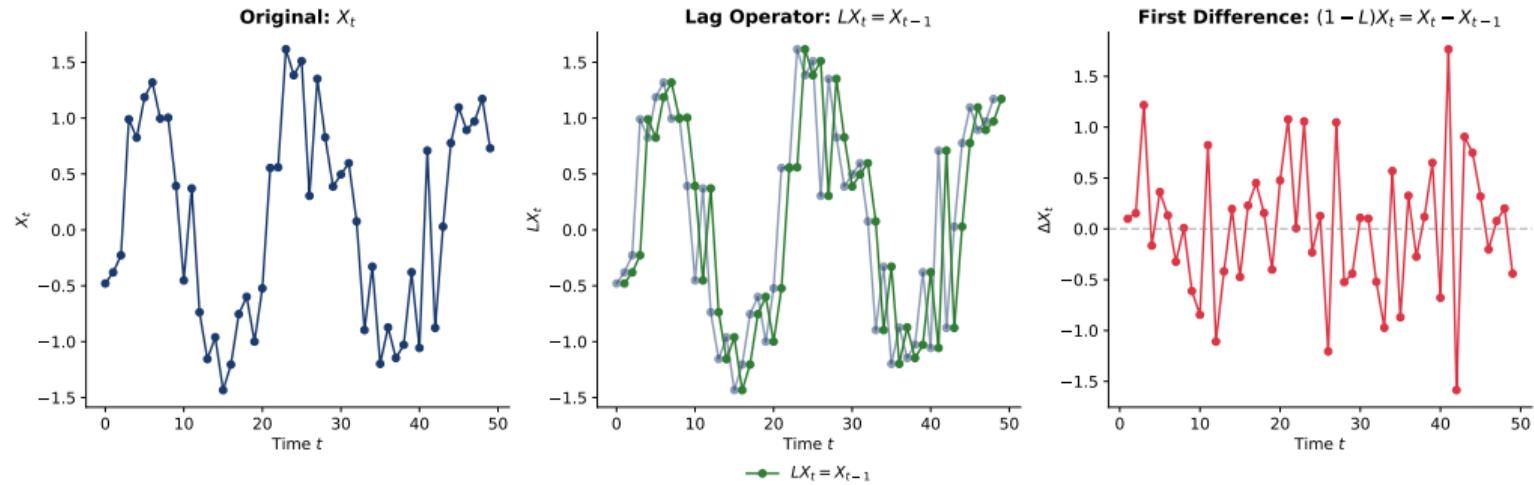
- $L^k X_t = X_{t-k}$ (deplasare înapoi cu k perioade)
- $L^0 X_t = X_t$ (identitate)
- $(1 - L)X_t = X_t - X_{t-1} = \Delta X_t$ (prima diferență)
- $(1 - L)^d X_t = \Delta^d X_t$ (diferență de ordin d)

Polinoame Lag:

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p$$

$$\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q$$

Operatorul Lag: Ilustrație Vizuală



Observație cheie: Operatorul lag este fundamentalul notației modelelor ARMA

Definiție 2 (Zgomot Alb)

Un proces $\{\varepsilon_t\}$ este **zgomot alb**, notat $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, dacă:

- ❶ $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$ pentru toți t
- ❷ $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$ pentru toți t
- ❸ $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ pentru toți $t \neq s$

Proprietăți:

- Zgomotul alb este “blocul de construcție” al modelelor ARMA
- ACF: $\rho(0) = 1$, $\rho(h) = 0$ pentru $h \neq 0$
- PACF: același tipar
- **Zgomot alb Gaussian**: adițional $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

Notă: Zgomotul alb *nu* este predictibil — este pur aleatoriu.

Definiție 3 (Proces AR(1))

Un proces autoregresiv de ordin 1 este:

$$X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

unde $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ și $|\phi| < 1$ pentru staționaritate.

Interpretare:

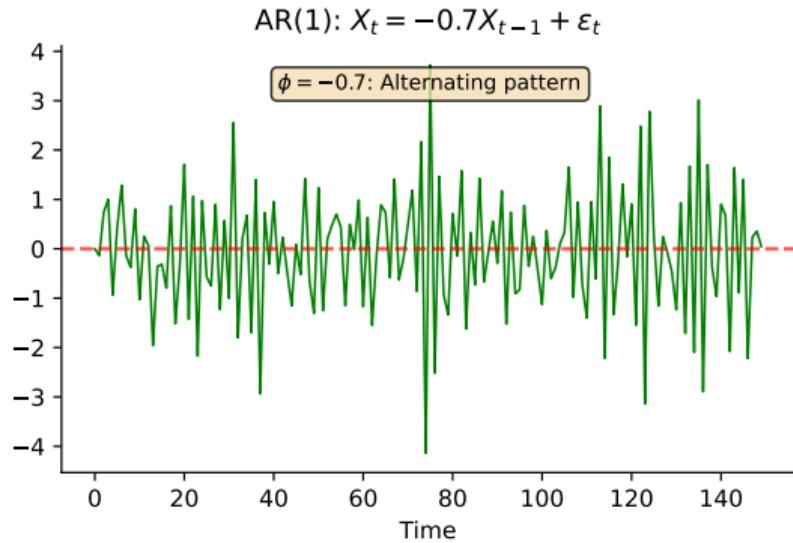
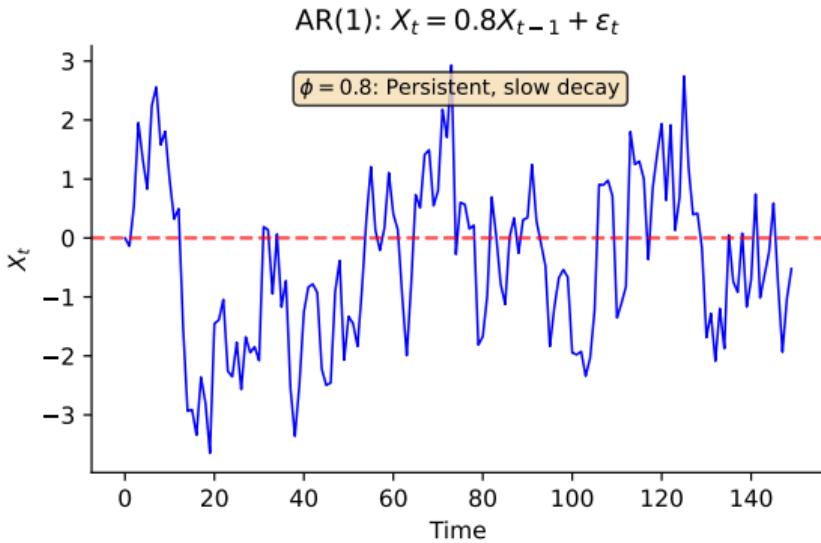
- c : constantă (interceptul)
- ϕ : coeficient autoregresiv — măsoară persistența
- ε_t : inovație (șoc impredictibil)

Folosind operatorul lag:

$$(1 - \phi L)X_t = c + \varepsilon_t$$

$$\phi(L)X_t = c + \varepsilon_t \quad \text{unde } \phi(L) = 1 - \phi L$$

AR(1): Ilustrație Vizuală



Stânga: ϕ pozitiv creează tipare persistente, netede. Dreapta: ϕ negativ creează comportament oscilant în jurul mediei.

Condiția de Staționaritate AR(1)

Pentru ca AR(1) să fie staționar: $|\phi| < 1$

Intuitie:

- Dacă $|\phi| < 1$: șocurile se diminuează în timp → staționar
- Dacă $|\phi| = 1$: mers aleatoriu → nestaționar (rădăcină unitate)
- Dacă $|\phi| > 1$: proces exploziv → nestaționar

Ecuația caracteristică:

$$\phi(z) = 1 - \phi z = 0 \implies z = \frac{1}{\phi}$$

Staționaritatea necesită ca rădăcina $z = 1/\phi$ să se afle **în afara cercului unitate**, adică $|z| > 1$, ceea ce înseamnă $|\phi| < 1$.

Proprietățile AR(1)

Pentru un AR(1) staționar cu $|\phi| < 1$:

Media:

$$\mu = \mathbb{E}[X_t] = \frac{c}{1 - \phi}$$

Varianța:

$$\gamma(0) = \text{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}$$

Autocovarianța:

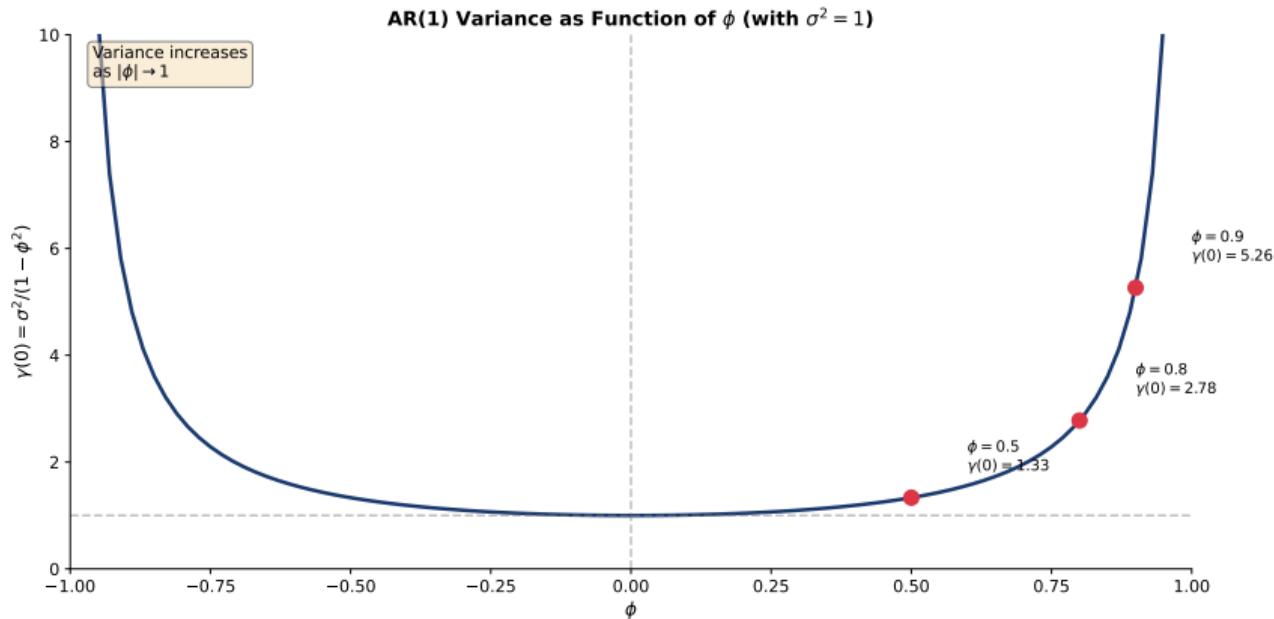
$$\gamma(h) = \phi^h \gamma(0) = \frac{\phi^h \sigma^2}{1 - \phi^2}$$

Autocorelația (ACF):

$$\rho(h) = \phi^h$$

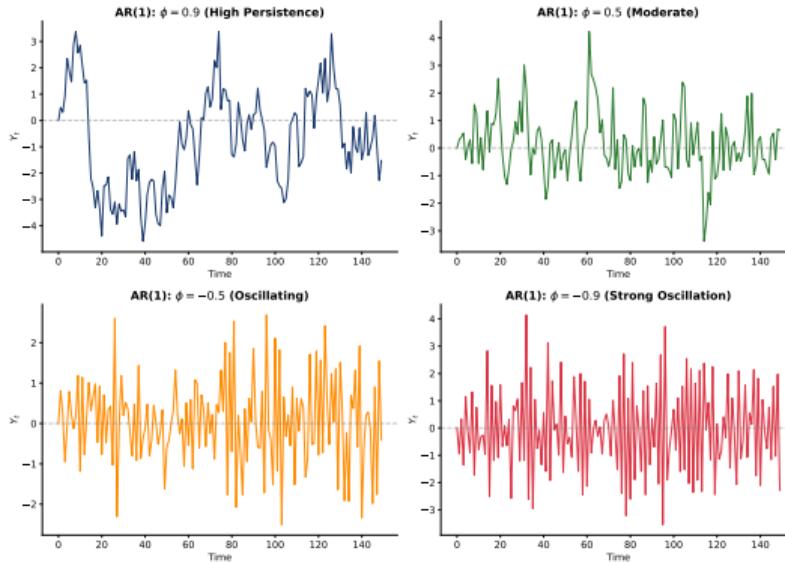
Observație cheie: ACF scade exponențial la rata ϕ

Varianța AR(1) ca Funcție de ϕ



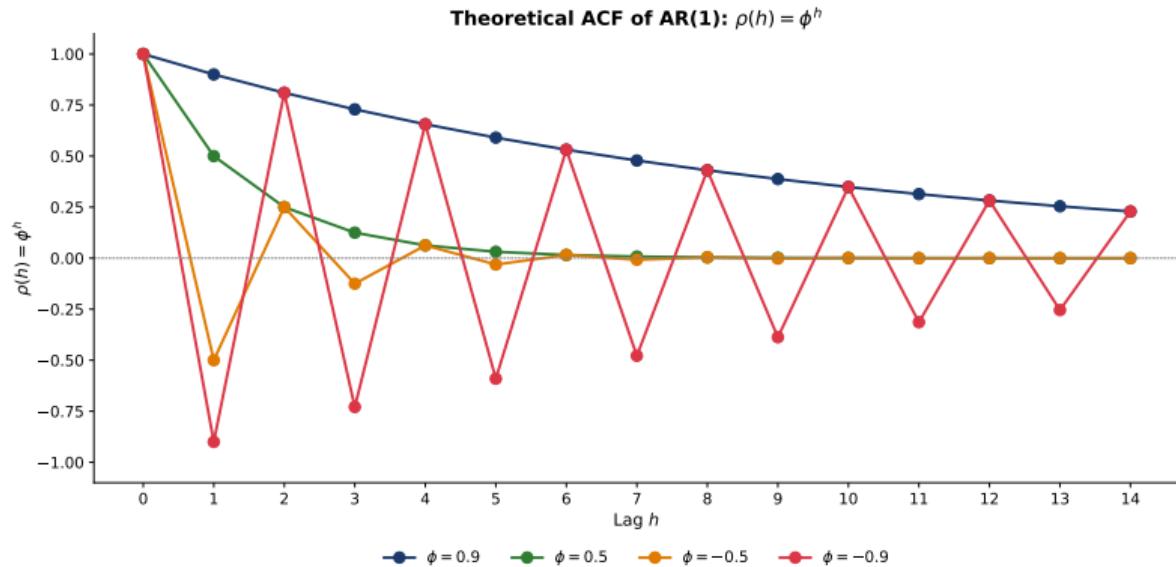
Observație cheie: Pe măsură ce $|\phi| \rightarrow 1$, varianța explodează \rightarrow nestaționaritate

Simulații AR(1): Efectul lui ϕ



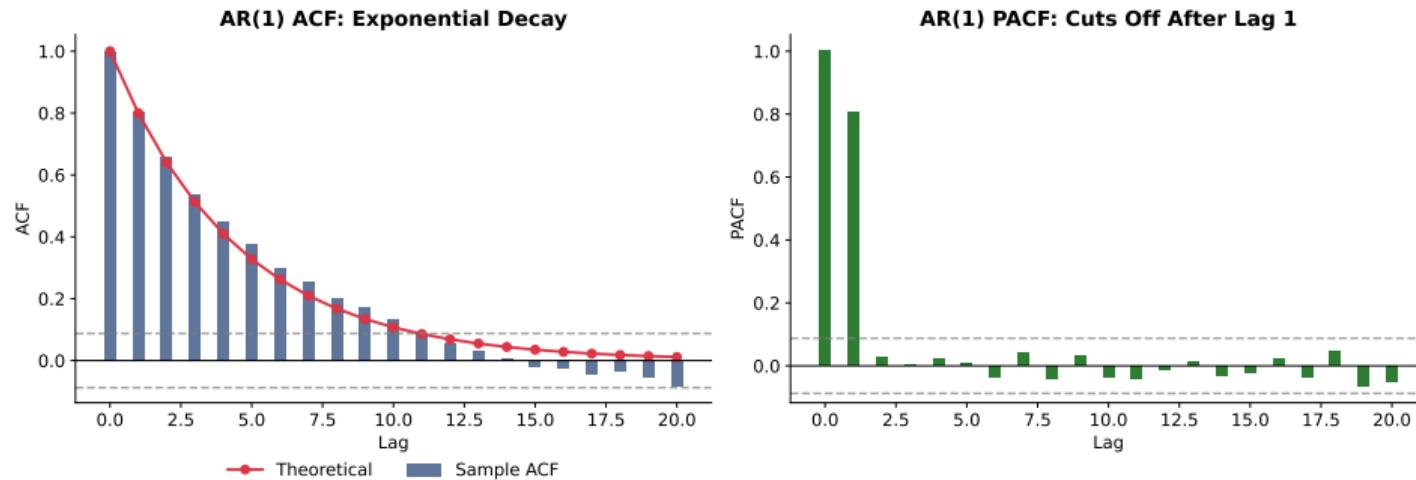
- Valori diferite ale lui ϕ produc comportamente distincte: $|\phi|$ mai mare înseamnă mai multă persistență
- ϕ pozitiv creează tipare netede, de trend; ϕ negativ creează oscilații
- Pe măsură ce $|\phi| \rightarrow 1$, procesul devine mai persistent și se apropie de nestaționaritate

ACF Teoretic AR(1)



Tipar: $\rho(h) = \phi^h$ — descreștere exponențială (sau alternantă pentru $\phi < 0$)

ACF și PACF AR(1): Teorie vs Eșantion



- **ACF:** Descreștere exponențială la rata ϕ – formula teoretică: $\rho(h) = \phi^h$
- **PACF:** Un singur vârf la lag 1, apoi se întrerupe – aceasta identifică AR(1)
- Estimările din eșantion (bare) fluctuează în jurul valorilor teoretice; folosiți benzile de încredere

Tipare ACF și PACF AR(1)

ACF al AR(1):

- Scade exponential: $\rho(h) = \phi^h$
- Dacă $\phi > 0$: toate pozitive, descreștere graduală
- Dacă $\phi < 0$: semne alternante, descreștere în magnitudine

PACF al AR(1):

- Se întrerupe după lag 1
- $\pi_1 = \phi, \pi_k = 0$ pentru $k > 1$

	ACF	PACF
AR(1)	Descreștere exponențială	Se întrerupe la lag 1

Acesta este tiparul cheie de identificare pentru AR(1)!

Definiție 4 (Proces AR(p))

Un proces autoregresiv de ordin p este:

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

Folosind operatorul lag:

$$\phi(L)X_t = c + \varepsilon_t$$

unde $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p$

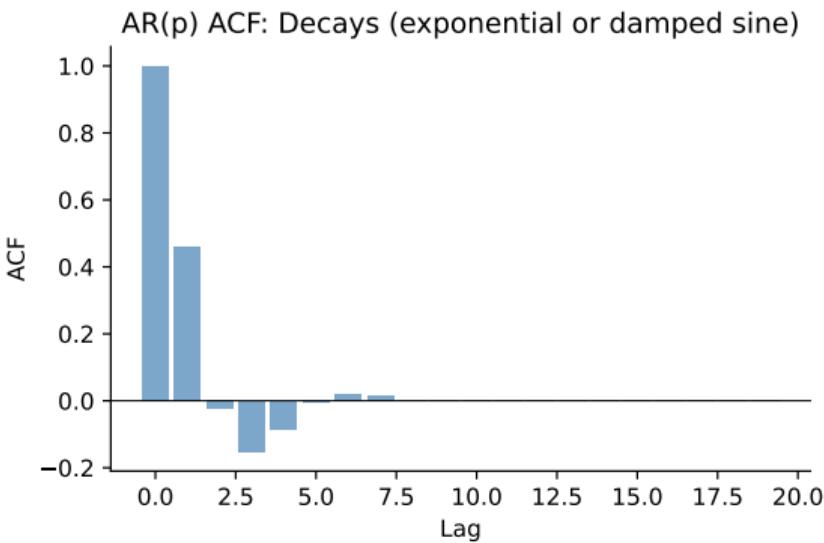
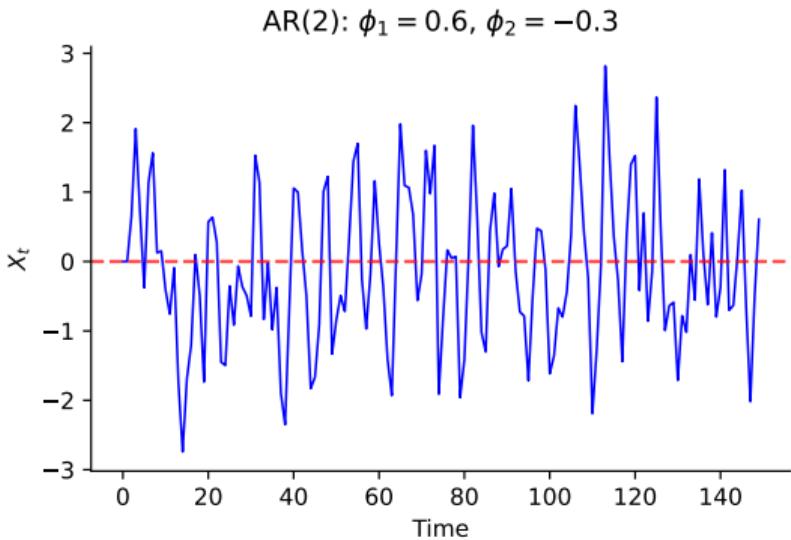
Condiție de staționaritate:

- Toate rădăcinile lui $\phi(z) = 0$ trebuie să se afle **în afara** cercului unitate
- Echivalent: toate rădăcinile au modul > 1

Tiparul PACF:

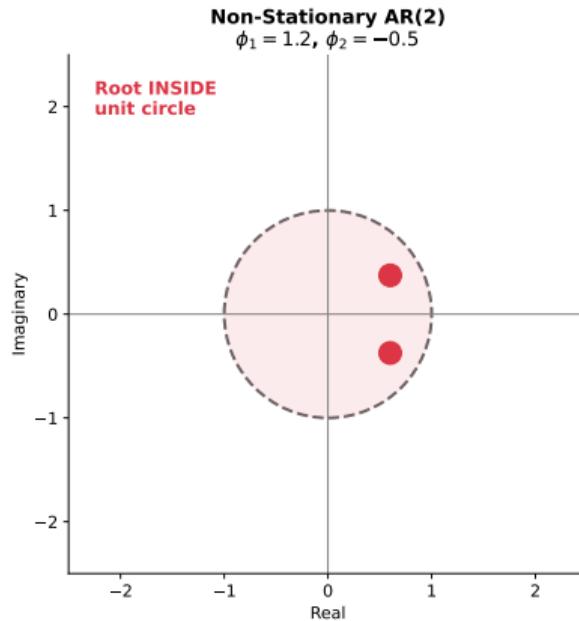
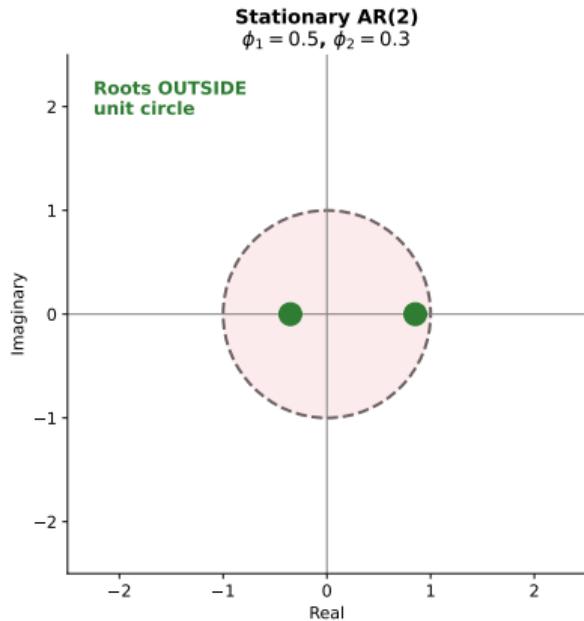
- PACF se întrerupe după lag p
- ACF scade (exponențial sau cu oscilații amortizate)

AR(p): Ilustrație Vizuală



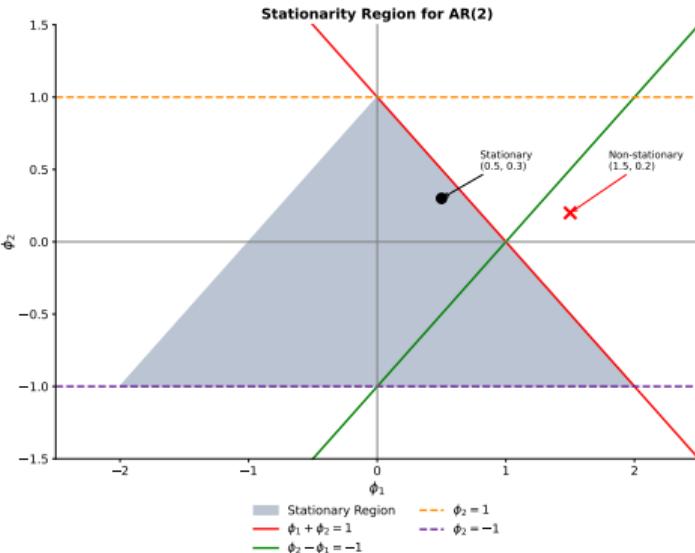
AR(2) poate prezenta comportament ciclic. ACF arată tiparul de descreștere amortizată caracteristic proceselor AR.

Stationaritatea AR(2): Vizualizarea Cercului Unitate



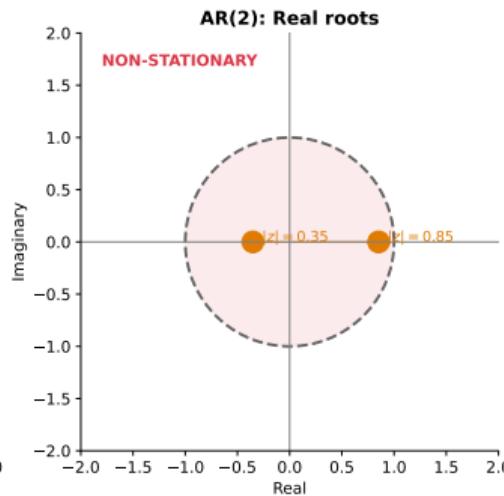
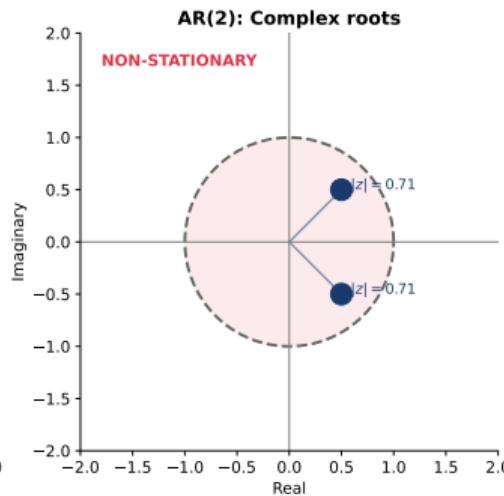
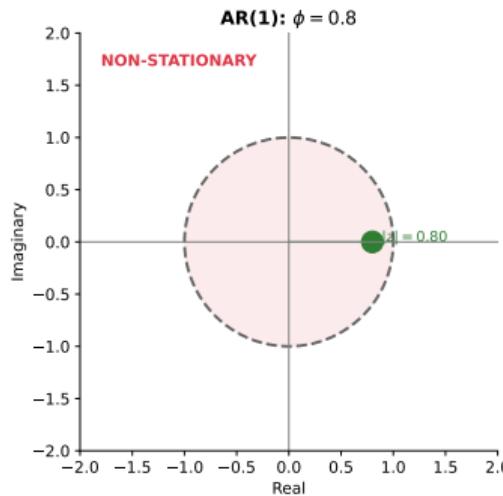
Regulă: Toate rădăcinile lui $\phi(z) = 0$ trebuie să se afle în afara cercului unitate umbrit

Triunghiul de Staționaritate AR(2)



- Regiunea triunghiulară definește toate combinațiile de parametri AR(2) staționari
- Granițe: $\phi_1 + \phi_2 < 1$, $\phi_2 - \phi_1 < 1$ și $|\phi_2| < 1$
- Punctele din afara acestei regiuni duc la procese nestaționare sau explosive

Rădăcinile Polinomului Caracteristic



Definiție 5 (Proces AR(2))

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

Condiții de staționaritate pentru AR(2):

- ① $\phi_1 + \phi_2 < 1$
- ② $\phi_2 - \phi_1 < 1$
- ③ $|\phi_2| < 1$

Comportamentul ACF depinde de rădăcini:

- **Rădăcini reale:** amestec de două descreșteri exponențiale
- **Rădăcini complexe:** tipar sinusoidal amortizat (pseudo-cicluri)

PACF: Se întrerupe după lag 2 ($\pi_k = 0$ pentru $k > 2$)

Întrebare

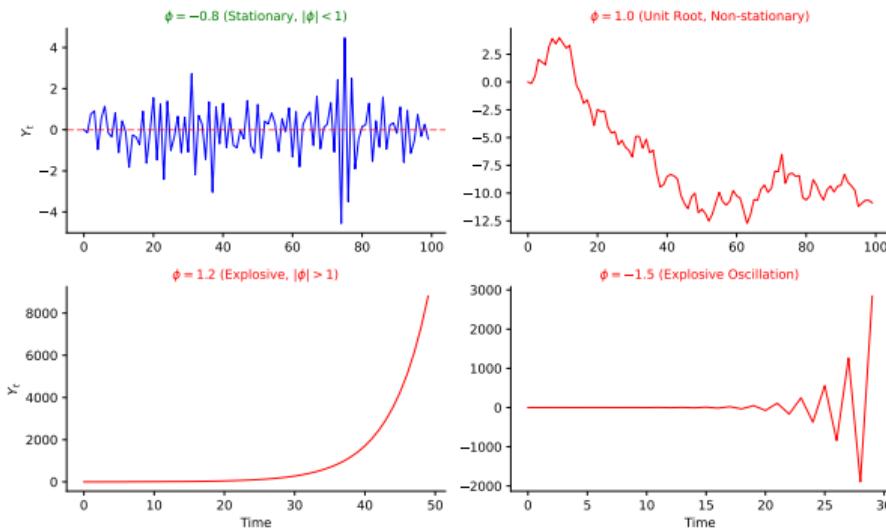
Pentru ce valoare a lui ϕ este procesul AR(1) $X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$ staționar?

- A $\phi = 1.2$
- B $\phi = 1.0$
- C $\phi = -0.8$
- D $\phi = -1.5$

Quiz: Staționaritate AR – Răspuns

Răspuns Corect: (C) $\phi = -0.8$

AR(1) este staționar dacă și numai dacă $|\phi| < 1$. Doar $|-0.8| = 0.8 < 1$.



Modelul MA(1): Definiție

Definiție 6 (Proces MA(1))

Un proces de medie mobilă de ordin 1 este:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

unde $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$.

Interpretare:

- μ : media procesului
- θ : coeficient MA — măsoară impactul şocului trecut
- Valoarea curentă depinde de şocul curent și unul trecut

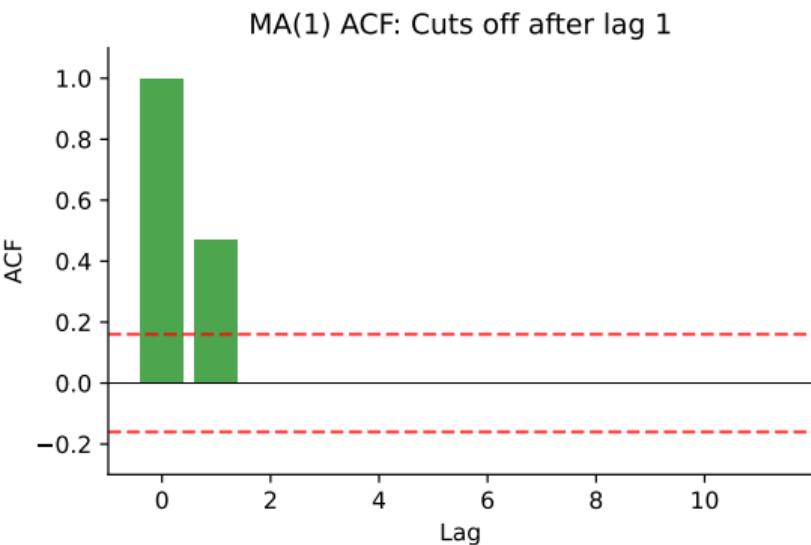
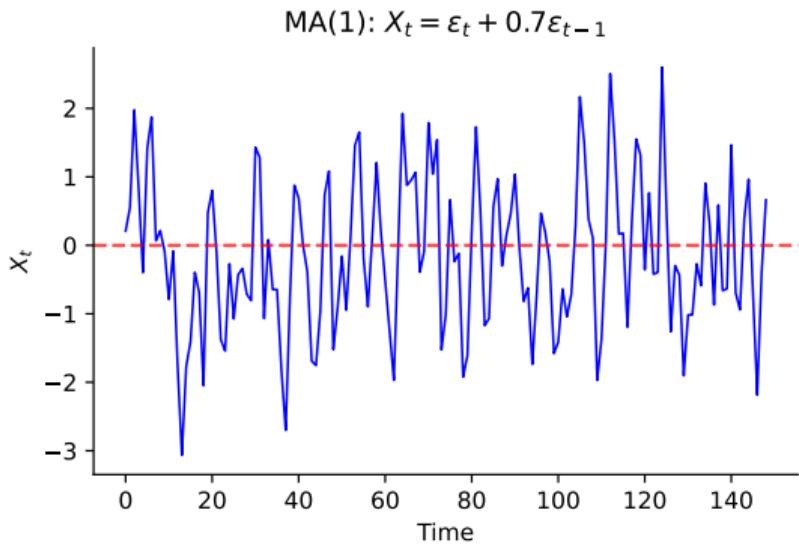
Folosind operatorul lag:

$$X_t = \mu + \theta(L)\varepsilon_t$$

unde $\theta(L) = 1 + \theta L$

Proprietate cheie: Procesele MA sunt **întotdeauna staționare** pentru orice θ finit

MA(1): Ilustrație Vizuală



Procesul MA(1) în stânga. ACF în dreapta arată îintreruperea caracteristică după lag 1.

Proprietățile MA(1)

Pentru MA(1): $X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$

Media:

$$\mathbb{E}[X_t] = \mu$$

Varianța:

$$\gamma(0) = \text{Var}(X_t) = \sigma^2(1 + \theta^2)$$

Autocovarianța:

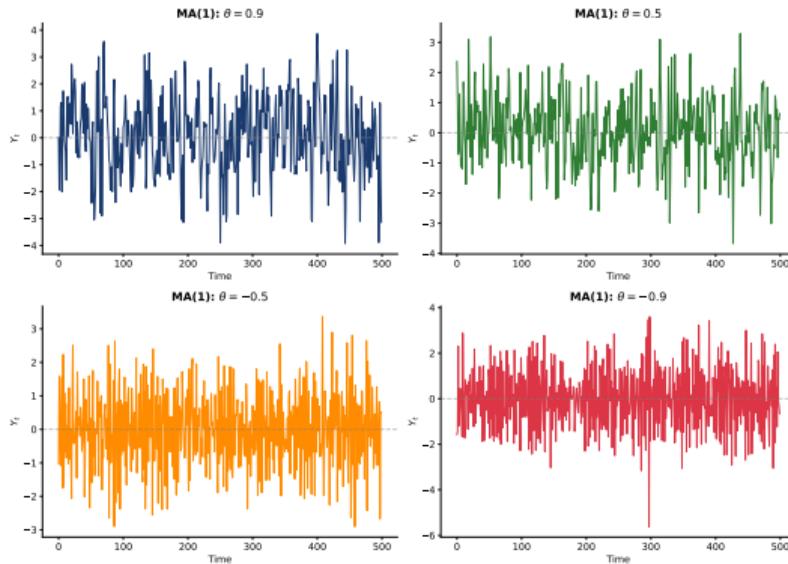
$$\gamma(1) = \theta\sigma^2, \quad \gamma(h) = 0 \text{ pentru } h > 1$$

Autocorelația (ACF):

$$\rho(1) = \frac{\theta}{1 + \theta^2}, \quad \rho(h) = 0 \text{ pentru } h > 1$$

Observație cheie: ACF se întrerupe după lag 1

Simulări MA(1): Efectul lui θ



- MA(1) este întotdeauna staționar indiferent de θ – memorie finită de doar un lag
- θ pozitiv netezește seria; θ negativ creează fluctuații mai rapide
- Spre deosebire de AR(1), řocurile MA(1) afectează procesul doar pentru o perioadă

Tipare ACF și PACF MA(1)

ACF al MA(1):

- Se întrerupe după lag 1
- $\rho(1) = \frac{\theta}{1+\theta^2}$, $\rho(h) = 0$ pentru $h > 1$
- Notă: $|\rho(1)| \leq 0.5$ întotdeauna (maxim la $\theta = \pm 1$)

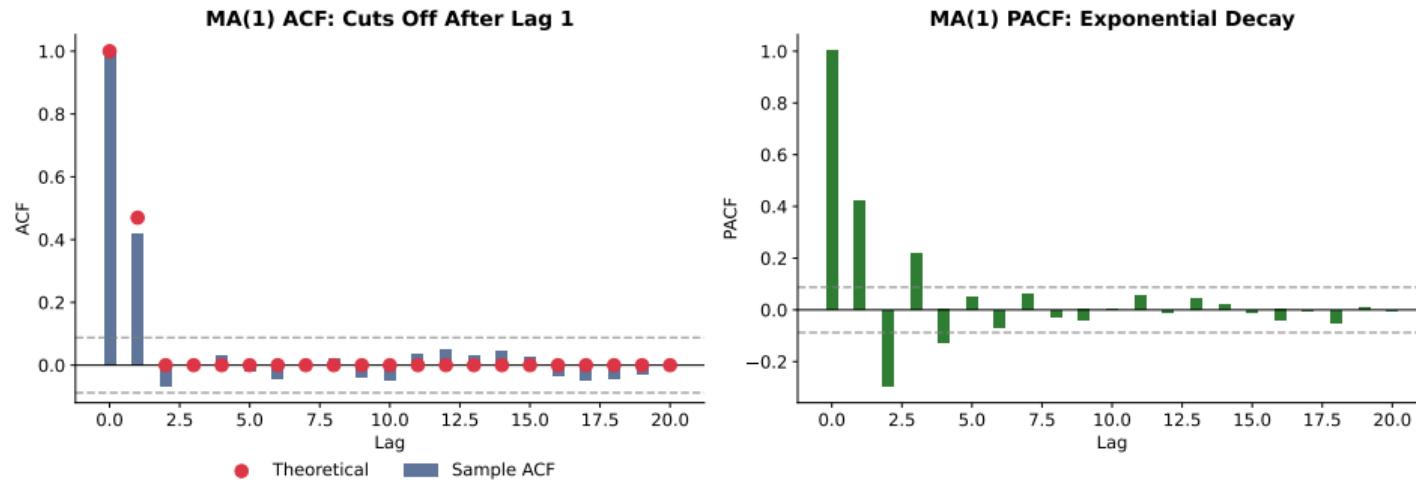
PACF al MA(1):

- Scade exponential (sau cu semne alternante)
- Nu se întrerupe

	ACF	PACF
MA(1)	Se întrerupe la lag 1	Descreștere exponențială

Acesta este tiparul opus față de AR(1)!

ACF și PACF MA(1): Comparație Vizuală



- **ACF:** Un singur vârf la lag 1, apoi se întrerupe imediat – semnătura cheie MA(1)
- **PACF:** Descreștere exponentomială – tipar opus față de AR(1)
- Această inversare a tiparelor ACF/PACF distinge procesele MA de cele AR

Definiție 7 (Invertibilitate)

Un proces MA este **invertibil** dacă poate fi scris ca un proces AR infinit:

$$X_t = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j (X_{t-j} - \mu) + \varepsilon_t$$

Pentru MA(1): Invertibil dacă $|\theta| < 1$

Pentru MA(q): Toate rădăcinile lui $\theta(z) = 0$ trebuie să se afle în afara cercului unitate

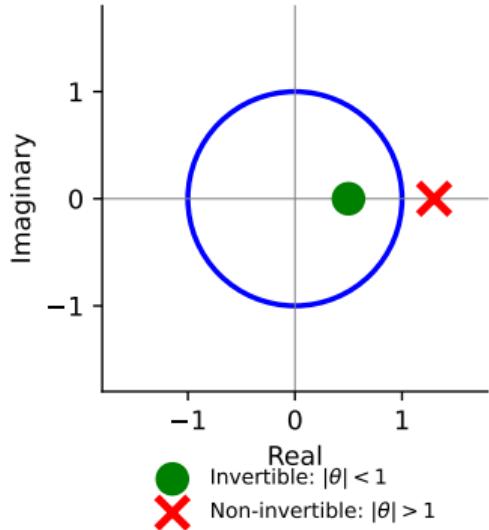
De ce contează invertibilitatea:

- Asigură reprezentare unică
- Necesară pentru prognoză și estimare
- Creează corespondență: $AR(\infty) \leftrightarrow MA(q)$

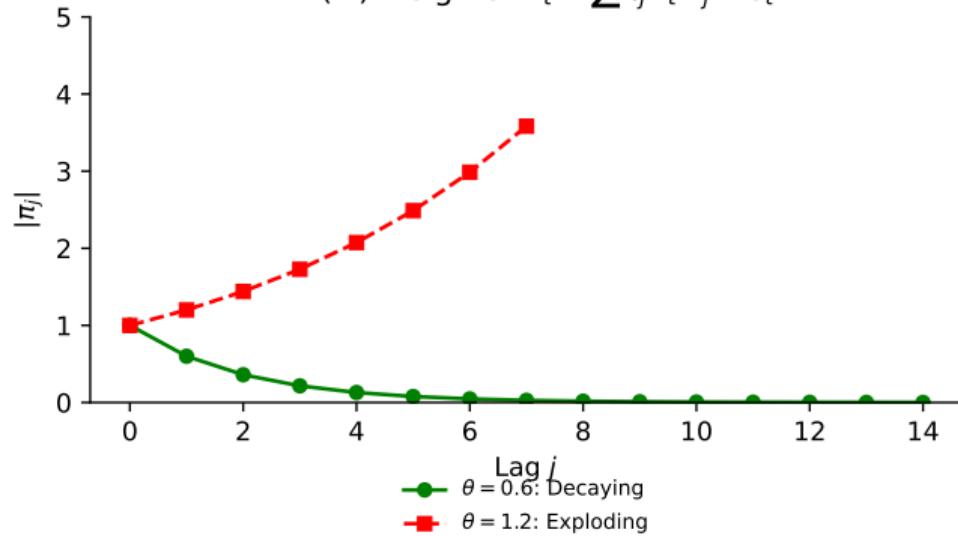
Notă: Staționaritatea este pentru AR, Invertibilitatea este pentru MA

Invertibilitate: Ilustrație Vizuală

Invertibility: Root outside unit circle



AR(∞) weights: $X_t = \sum \pi_j X_{t-j} + \varepsilon_t$



Stânga: invertibilitatea necesită rădăcini în afara cercului unitate. Dreapta: ponderile AR(∞) scad doar când $|\theta| < 1$.

Definiție 8 (Proces MA(q))

Un proces de medie mobilă de ordin q este:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Folosind operatorul lag:

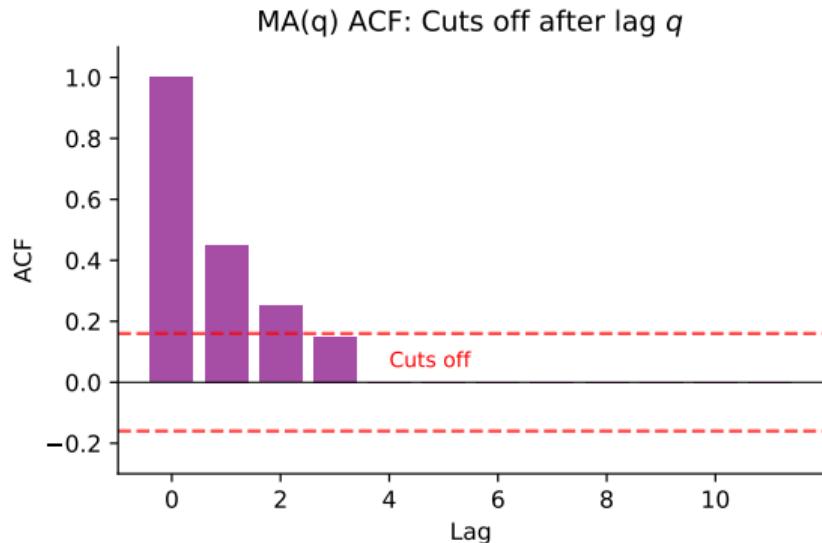
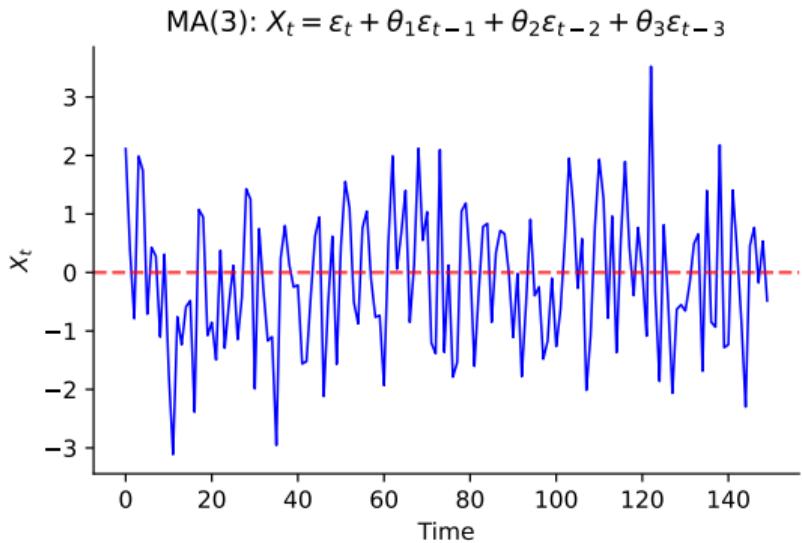
$$X_t = \mu + \theta(L) \varepsilon_t$$

unde $\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q$

Proprietăți:

- Întotdeauna staționar (varianță finită)
- ACF se întrerupe după lag q : $\rho(h) = 0$ pentru $h > q$
- PACF scade gradual
- Invertibil dacă toate rădăcinile lui $\theta(z) = 0$ se află în afara cercului unitate

MA(q): Ilustrație Vizuală



Proces MA(3). Semnătura cheie: ACF se întrerupe după lag q (aici, lag 3).

Întrebare

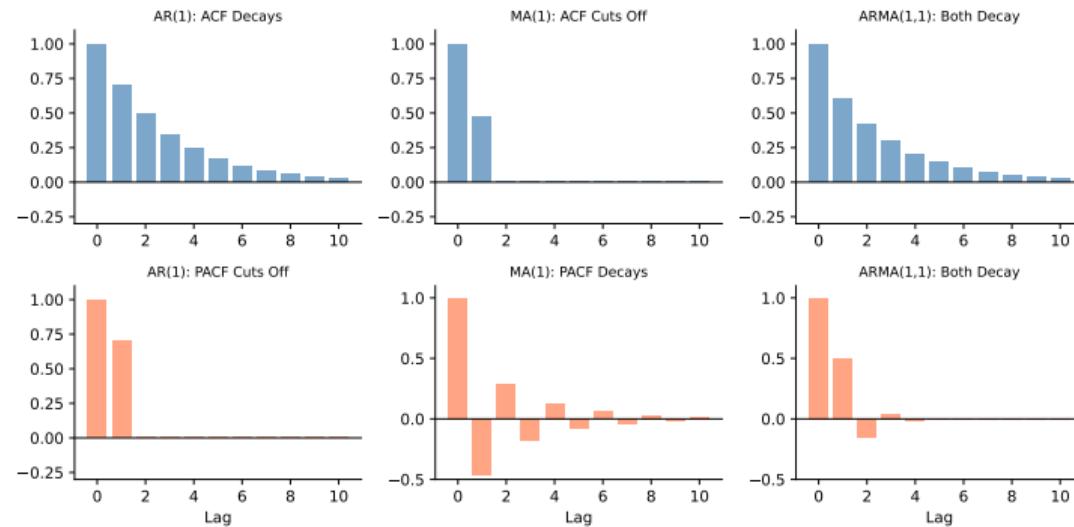
Observați: ACF are vârf la lag 1, apoi se întrerupe. PACF scade gradual. Ce model?

- A AR(1)
- B MA(1)
- C ARMA(1,1)
- D Zgomot alb

Quiz: Recunoașterea Tiparelor ACF/PACF – Răspuns

Răspuns Corect: (B) MA(1)

ACF se întrerupe → proces MA; PACF scade → confirmă MA(1)



Întrebare

Este MA(1) $X_t = \varepsilon_t + 1.5\varepsilon_{t-1}$ invertibil?

- A Da, procesele MA sunt întotdeauna invertibile
- B Da, deoarece $1.5 > 0$
- C Nu, deoarece $|\theta| = 1.5 > 1$
- D Nu, procesele MA nu sunt niciodată invertibile

Quiz: Invertibilitate MA

Întrebare

Este MA(1) $X_t = \varepsilon_t + 1.5\varepsilon_{t-1}$ invertibil?

- A Da, procesele MA sunt întotdeauna invertibile
- B Da, deoarece $1.5 > 0$
- C Nu, deoarece $|\theta| = 1.5 > 1$
- D Nu, procesele MA nu sunt niciodată invertibile

Răspuns: (C)

Invertibilitatea necesită $|\theta| < 1$. Aici $|\theta| = 1.5 > 1$, deci nu este invertibil.

Modelul ARMA(p,q): Definiție

Definiție 9 (Proces ARMA(p,q))

Un proces autoregresiv de medie mobilă de ordin (p,q) este:

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Formă compactă folosind operatorii lag:

$$\phi(L)(X_t - \mu) = \theta(L)\varepsilon_t$$

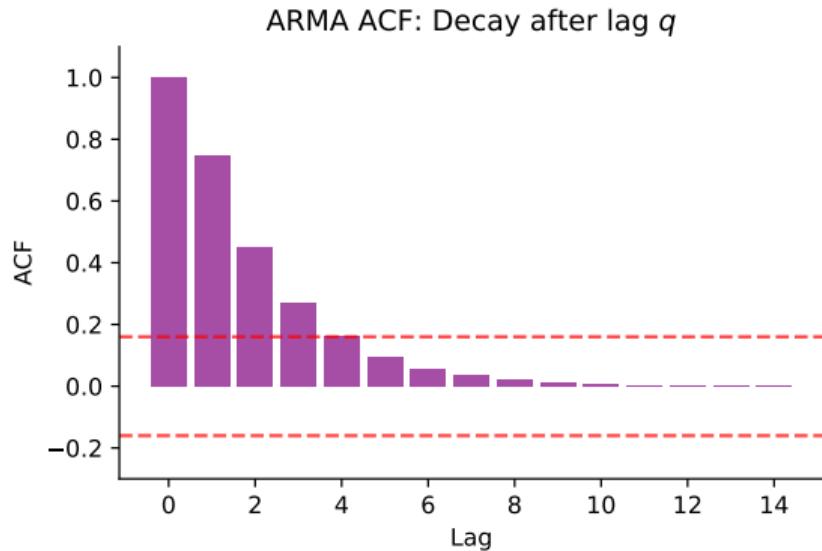
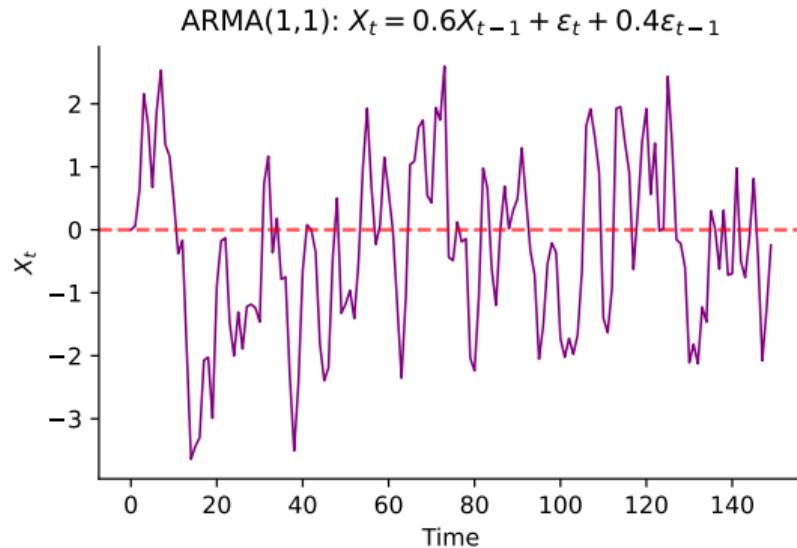
sau echivalent:

$$\phi(L)X_t = c + \theta(L)\varepsilon_t$$

$$\text{unde } \mu = \frac{c}{1-\phi_1-\cdots-\phi_p}$$

Idee cheie: Combină componentele AR și MA pentru modelare mai flexibilă

ARMA: Ilustrație Vizuală

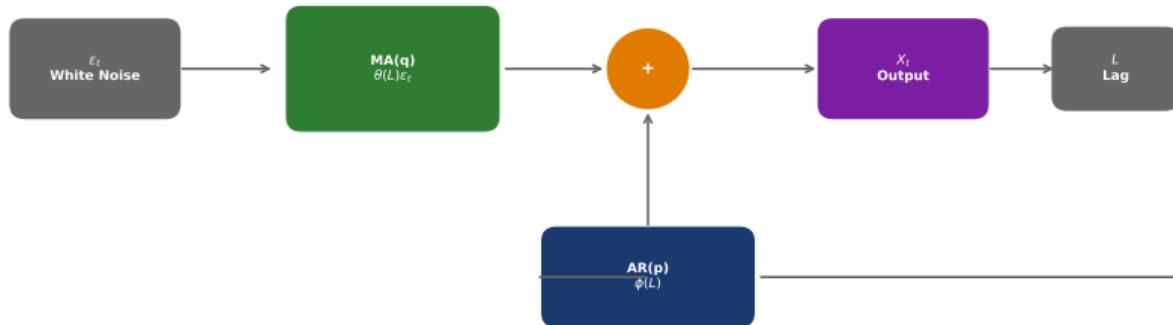


Proces ARMA(1,1). ACF arată descreștere după lag-ul inițial, combinând caracteristicile AR și MA.

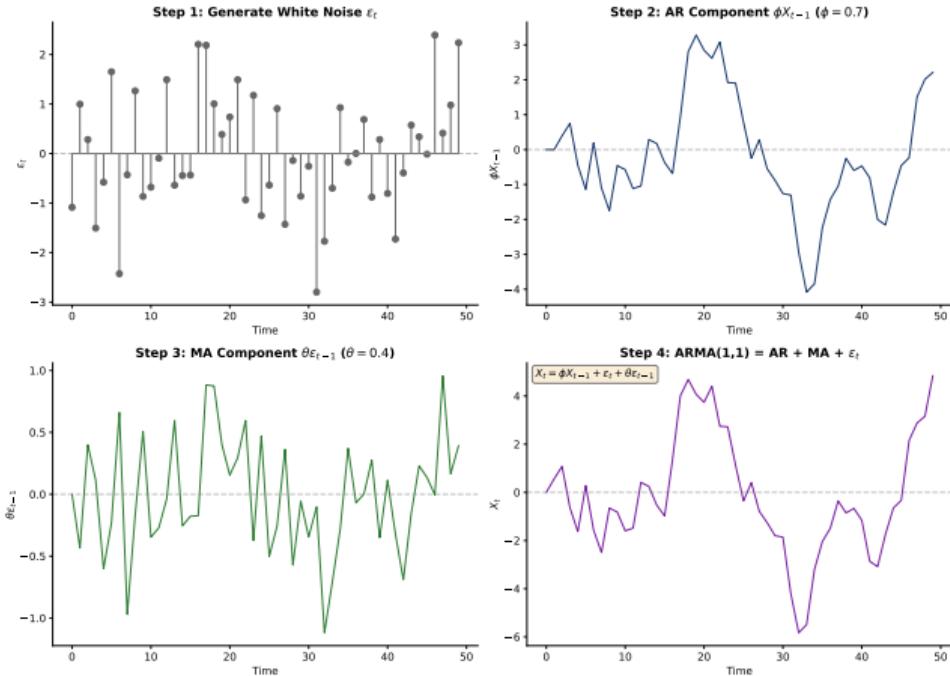
Structura Modelului ARMA

ARMA(p,q) Model Structure

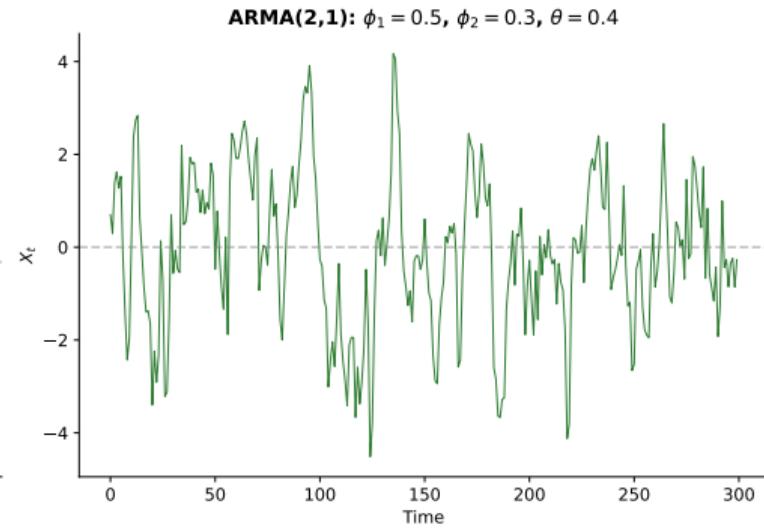
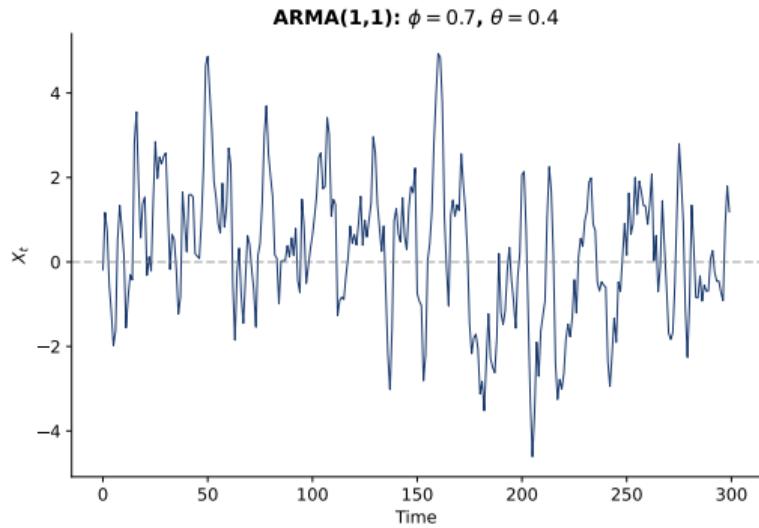
$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$



Cum Funcționează Simularea ARMA



Exemple ARMA



Definiție 10 (Proces ARMA(1,1))

$$X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

Proprietăți (presupunând staționaritate și invertibilitate):

- Media: $\mu = \frac{c}{1-\phi}$
- Varianța: $\gamma(0) = \frac{(1+2\phi\theta+\theta^2)\sigma^2}{1-\phi^2}$

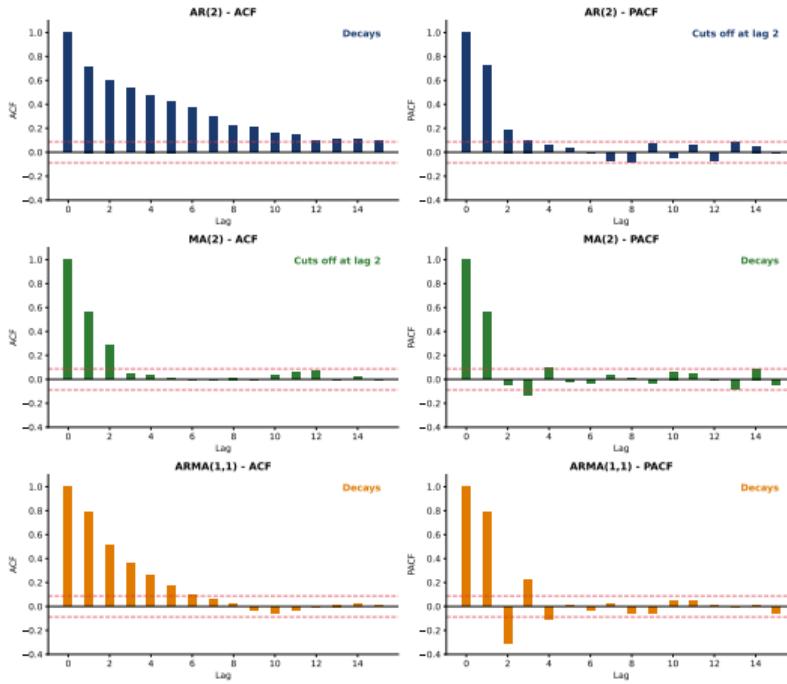
ACF:

$$\rho(1) = \frac{(1 + \phi\theta)(\phi + \theta)}{1 + 2\phi\theta + \theta^2}$$

$$\rho(h) = \phi \cdot \rho(h-1) \quad \text{pentru } h \geq 2$$

Tipar: ACF scade exponential după lag 1 (ca AR), dar punctul de pornire depinde atât de ϕ cât și de θ

Tipare ACF/PACF: AR vs MA vs ARMA



Tipare ACF și PACF ARMA

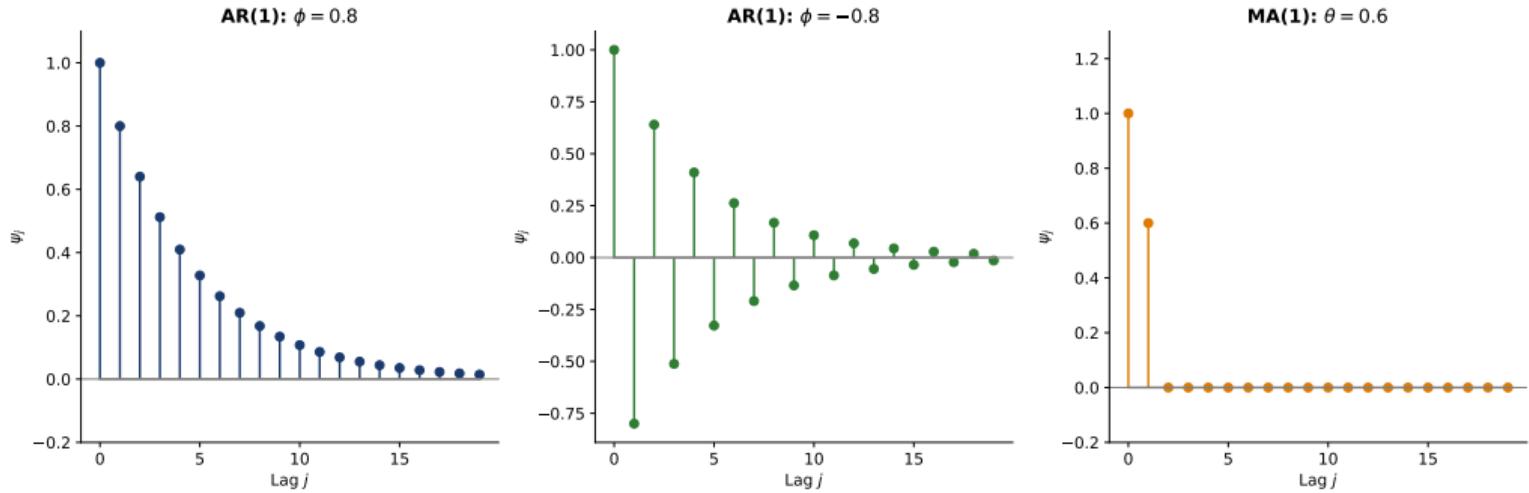
Model	ACF	PACF
AR(p)	Scade (exp./amortizat)	Se întrerupe la lag p
MA(q)	Se întrerupe la lag q	Scade (exp./amortizat)
ARMA(p,q)	Scade după lag $q - p$	Scade după lag $p - q$

Regula cheie de identificare:

- **PACF se întrerupe** → proces AR (ordin = lag-ul de întrerupere)
- **ACF se întrerupe** → proces MA (ordin = lag-ul de întrerupere)
- **Ambele scad** → proces ARMA

Atenție: În practică, ACF/PACF din eșantion sunt zgomotoase; folosiți benzile de încredere

Functii de Răspuns la Impuls



Interpretare: Arată cum se propagă un şoc unitar prin sistem în timp

Rezumat Staționaritate și Invertibilitate

Pentru ca ARMA(p,q) să fie bine comportat:

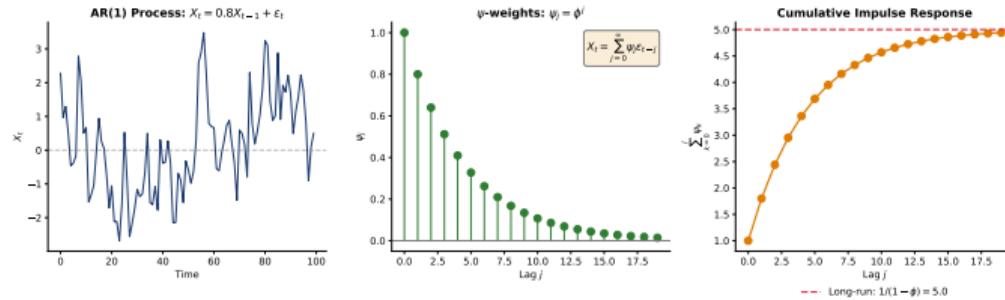
Condiție	Cerință
Staționaritate	Rădăcinile lui $\phi(z) = 0$ în afara cercului unitate
Invertibilitate	Rădăcinile lui $\theta(z) = 0$ în afara cercului unitate

Implicații:

- **Staționaritate:** Se poate scrie ca MA(∞): $X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$
- **Invertibilitate:** Se poate scrie ca AR(∞): $X_t = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j (X_{t-j} - \mu) + \varepsilon_t$

Reprezentare cauzală: X_t depinde doar de řocurile *trecute* (nu viitoare)

Teorema de Descompunere a lui Wold



Orice proces staționar poate fi scris ca MA(∞): $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$

Întrebare

Forma compactă $\phi(L)X_t = \theta(L)\varepsilon_t$ reprezintă ce model?

- A Model AR pur
- B Model MA pur
- C Model ARMA
- D Niciunul de mai sus

Quiz: Reprezentarea ARMA

Întrebare

Forma compactă $\phi(L)X_t = \theta(L)\varepsilon_t$ reprezintă ce model?

- A Model AR pur
- B Model MA pur
- C Model ARMA
- D Niciunul de mai sus

Răspuns: (C) Model ARMA

$\phi(L)$ este polinomul AR, $\theta(L)$ este polinomul MA \rightarrow ARMA(p,q)

Întrebare

Ce este $(1 - L)^2 X_t$?

- A $X_t - X_{t-1}$
- B $X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$
- C $X_t + X_{t-1} + X_{t-2}$
- D $X_t - X_{t-2}$

Quiz: Operatorul Lag

Întrebare

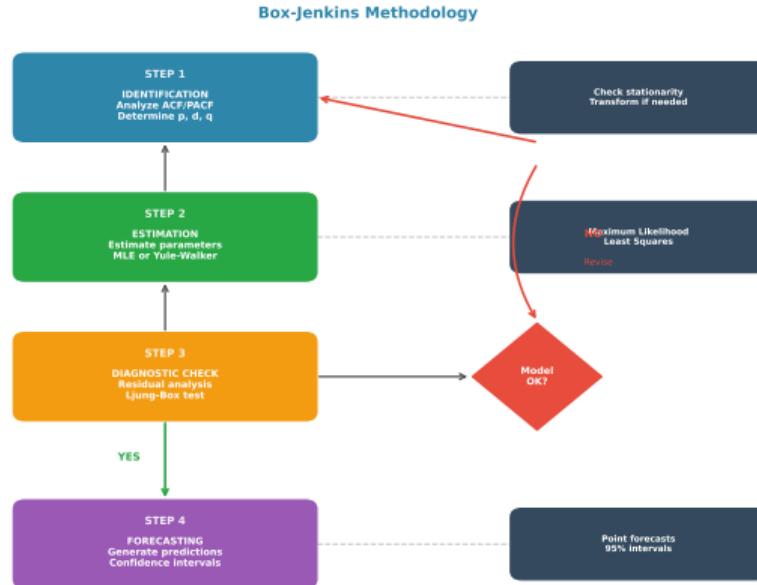
Ce este $(1 - L)^2 X_t$?

- A $X_t - X_{t-1}$
- B $X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$
- C $X_t + X_{t-1} + X_{t-2}$
- D $X_t - X_{t-2}$

Răspuns: (B)

$$(1 - L)^2 = 1 - 2L + L^2, \text{ deci } (1 - L)^2 X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$$

Metodologia Box-Jenkins



Tabel Rezumat pentru Identificarea Modelului

Model Identification: ACF/PACF Patterns

Model	ACF Pattern	PACF Pattern
AR(p)	Exponential decay or damped oscillation	Cuts off after lag p
MA(q)	Cuts off after lag q	Exponential decay or damped oscillation
ARMA(p,q)	Exponential decay after lag q-p	Exponential decay after lag p-q

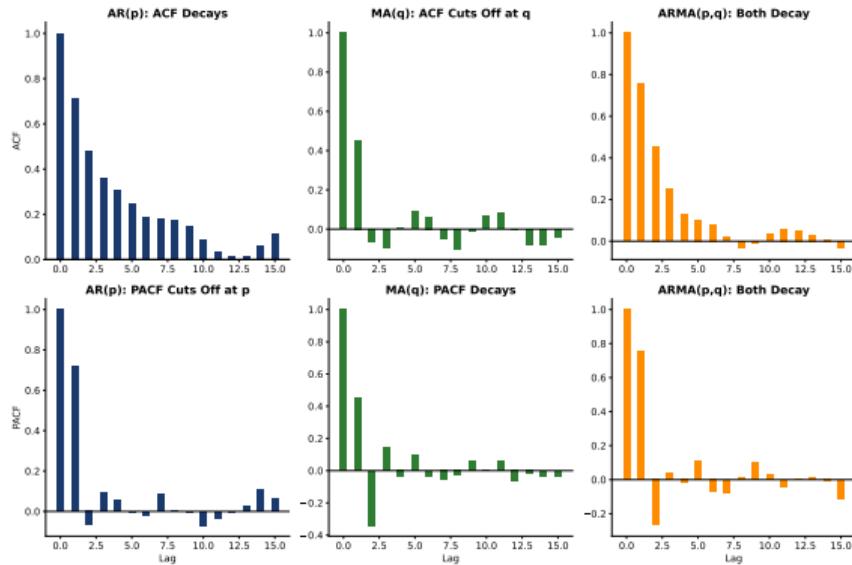
Sfat practic: Începeți simplu (p, q mici), creșteți dacă diagnosticele eșuează

Reguli de Identificare ACF/PACF

Tipare teoretice pentru procese staționare:

Model	Tipar ACF	Tipar PACF
AR(1)	Descreștere exponențială	Vârf la lag 1, apoi 0
AR(2)	Exponențială/sinusoidă amortizată	Vârfuri la lag-uri 1-2, apoi 0
AR(p)	Scade gradual	Se întrerupe după lag p
MA(1)	Vârf la lag 1, apoi 0	Descreștere exponențială
MA(2)	Vârfuri la lag-uri 1-2, apoi 0	Exponențială/sinusoidă amortizată
MA(q)	Se întrerupe după lag q	Scade gradual
ARMA(p,q)	Scade	Scade

Tipare ACF/PACF: Ghid Vizual



- **AR**: ACF scade, PACF se întrerupe – folosiți PACF pentru a identifica ordinul p
- **MA**: ACF se întrerupe, PACF scade – folosiți ACF pentru a identifica ordinul q
- **ARMA**: Ambele scad – necesită criterii informaționale pentru selectia modelului

Criterii Informaționale

Scop: Echilibrează calitatea potrivirii față de complexitatea modelului

Criteriu Informațional Akaike (AIC):

$$AIC = -2 \ln(\hat{L}) + 2k$$

Criteriu Informațional Bayesian (BIC/SBC):

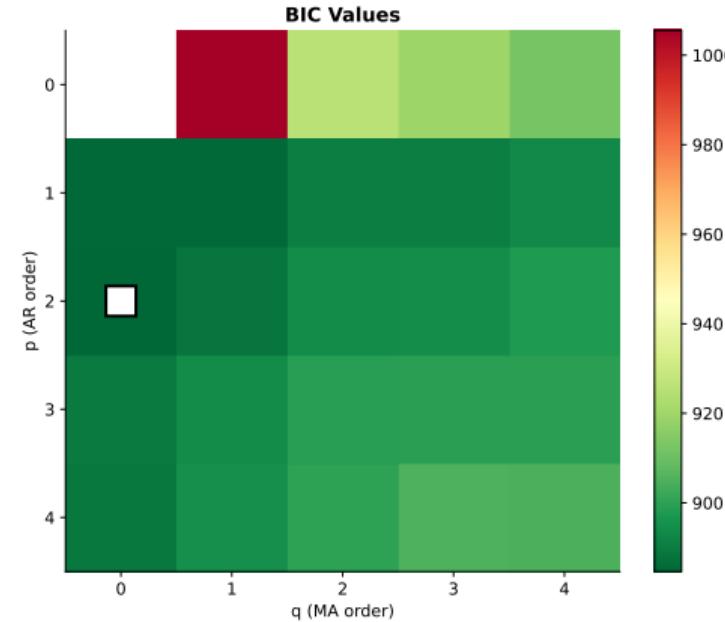
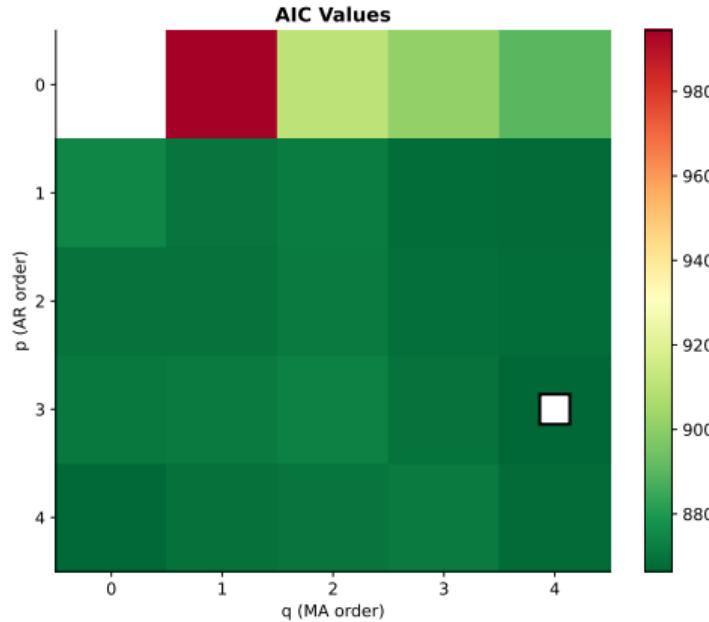
$$BIC = -2 \ln(\hat{L}) + k \ln(n)$$

unde \hat{L} = verosimilitate maximizată, k = număr de parametri, n = dimensiune eșantion

Utilizare:

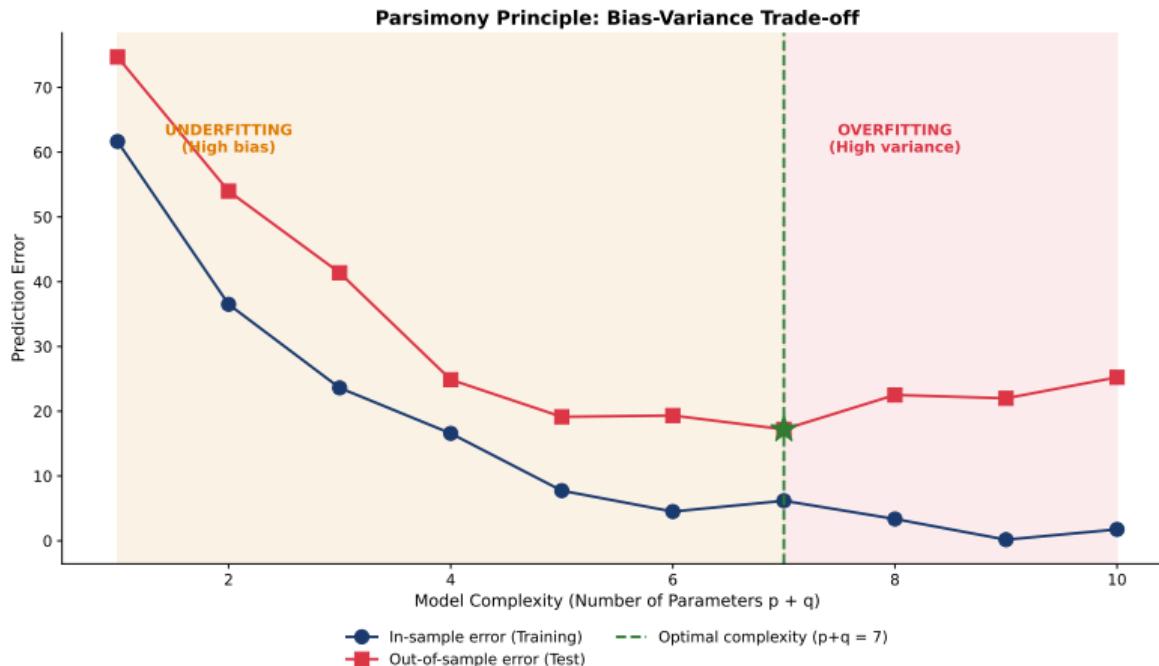
- Valori mai mici sunt mai bune
- BIC penalizează complexitatea mai puternic decât AIC
- AIC tinde să aleagă modele mai mari; BIC mai simplu
- Comparați modelele potrivite pe *aceleași date*

AIC vs BIC: Selecția Modelului



Notă: Pătratul alb marchează cel mai bun model; valorile mai mici (verde) sunt mai bune

Principiul Parcimoniei: Compromisul Bias-Varianță



Abordarea căutării pe grilă:

- ① Potriviti ARMA(p,q) pentru $p = 0, 1, \dots, p_{max}$ și $q = 0, 1, \dots, q_{max}$
- ② Selectati modelul cu cel mai mic AIC sau BIC
- ③ Verificați cu teste de diagnostic

În Python (statsmodels):

- pm.auto_arima() din pachetul pmdarima
- Testează automat staționaritatea, căută peste ordine
- Returnează cel mai bun model după AIC/BIC

Atenție:

- Selecția automată este un punct de pornire, nu răspunsul final
- Verificați întotdeauna diagnosticele
- Considerați cunoștințele de domeniu

Întrebare

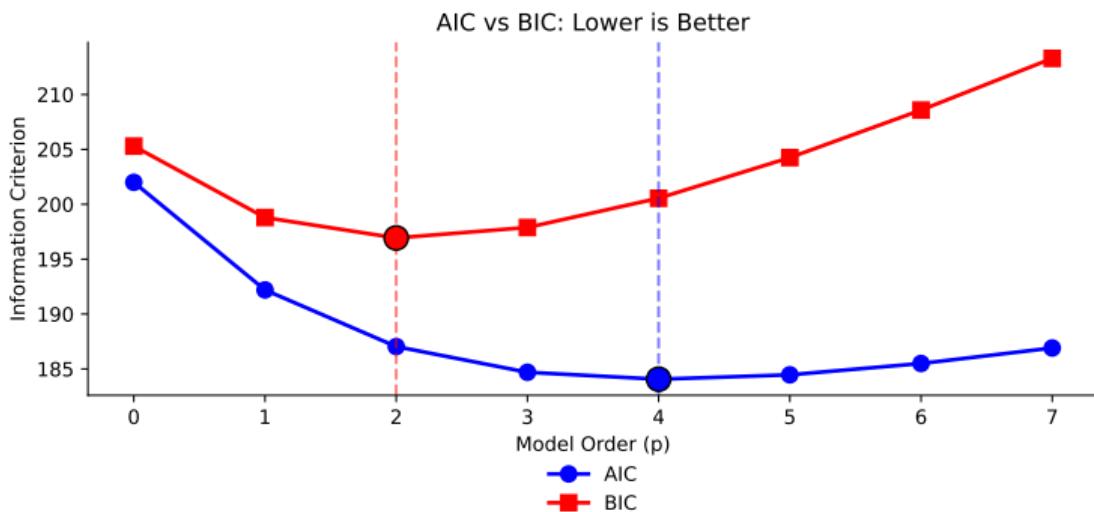
Comparând ARMA(1,1) vs ARMA(2,1) folosind BIC, care este corect?

- A BIC mai mic înseamnă întotdeauna prognoze mai bune
- B BIC penalizează complexitatea mai puțin decât AIC
- C Modelul cu BIC mai mic este preferat
- D BIC poate compara doar modele cu același număr de parametri

Quiz: Criterii Informaționale – Răspuns

Răspuns Corect: (C) Modelul cu BIC mai mic este preferat

BIC mai mic indică un compromis mai bun între potrivire și complexitate. BIC penalizează complexitatea *mai mult* decât AIC.



Trei abordări principale:

1. Metoda Momentelor / Yule-Walker (doar AR)

- Potrivește autocorelațiile din eșantion la valorile teoretice
- Simplă, formă închisă pentru modele AR
- Nu este eficientă pentru componente MA

2. Estimarea prin Maximum de Verosimilitate (MLE)

- Cea mai comună abordare
- Necesită ipoteză distribuțională (de obicei Gaussiană)
- Eficientă și consistentă

3. Cele Mai Mici Pătrate Condiționate

- Minimizează suma pătratelor reziduurilor
- Condiționare pe observațiile inițiale
- Computațional mai simplă decât MLE exact

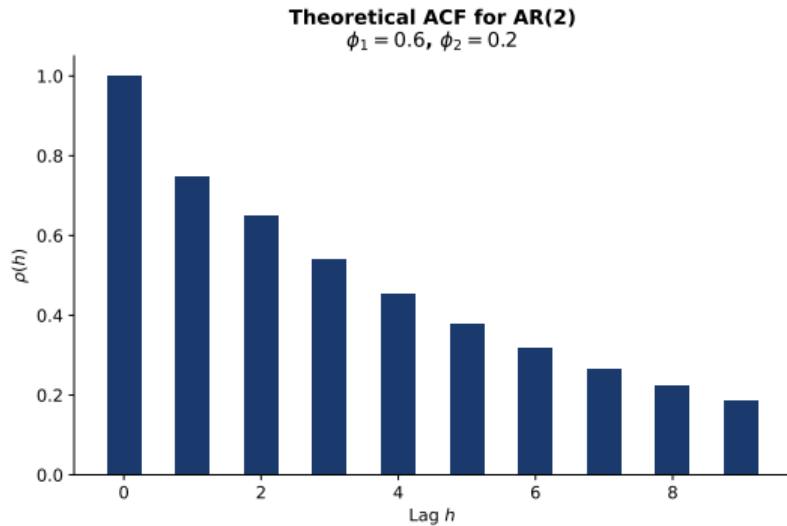
Comparația Metodelor de Estimare

ARMA Parameter Estimation Methods

Yule-Walker	Maximum Likelihood	Conditional LS
<p>Pros:</p> <ul style="list-style-type: none">+ Simple computation+ Closed-form solution <p>Cons:</p> <ul style="list-style-type: none">- AR only- Less efficient	<p>Pros:</p> <ul style="list-style-type: none">+ Most efficient+ Works for ARMA <p>Cons:</p> <ul style="list-style-type: none">- Iterative- Local optima risk	<p>Pros:</p> <ul style="list-style-type: none">+ Simple to implement+ Fast computation <p>Cons:</p> <ul style="list-style-type: none">- Biased for small n- Ignores initial values

Recommendation: Use MLE for final estimation,
Yule-Walker for initial values

Ecuatiile Yule-Walker pentru AR(p)



Yule-Walker Equations

$$\rho(1) = \phi_1 + \phi_2 \rho(1)$$

$$\rho(2) = \phi_1 \rho(1) + \phi_2$$

Matrix form: $R \cdot \phi = \rho$

R = autocorrelation matrix

Solution: $\hat{\phi} = R^{-1}\rho$

Ecuatiile Yule-Walker: Forma Matriceala

Pentru AR(p): $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$

Ecuatiile Yule-Walker:

$$\rho(k) = \phi_1 \rho(k-1) + \phi_2 \rho(k-2) + \cdots + \phi_p \rho(k-p)$$

pentru $k = 1, 2, \dots, p$

Forma matriceala:

$$\begin{pmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \cdots & \rho(p-1) \\ \rho(1) & \rho(0) & \cdots & \rho(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(p-1) & \rho(p-2) & \cdots & \rho(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(p) \end{pmatrix}$$

Estimare: Înlocuiți $\rho(k)$ cu autocorelațiile din eșantion $\hat{\rho}(k)$

Estimarea prin Maximum de Verosimilitate

Presupunând erori Gaussiene: $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

Log-verosimilitatea pentru ARMA(p,q):

$$\ell(\phi, \theta, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2$$

unde ε_t sunt inovațiile calculate recursiv.

Procedura de estimare:

- 1 Initializare: folosiți metoda momentelor sau OLS pentru valori de pornire
- 2 Optimizare: metode numerice (de ex., BFGS, Newton-Raphson)
- 3 Iterare până la convergență

În practică: Folosiți statsmodels.tsa.arima.model.ARIMA

Distribuția asimptotică a MLE:

$$\hat{\theta} \xrightarrow{d} N\left(\theta_0, \frac{1}{n} I(\theta_0)^{-1}\right)$$

unde $I(\theta)$ este matricea informației Fisher.

Erori standard: Rădăcina pătrată a diagonalei lui $\frac{1}{n} \hat{I}^{-1}$

Testarea ipotezelor:

- $H_0 : \phi_j = 0$ (sau $\theta_j = 0$)
- Statistica de test: $z = \frac{\hat{\phi}_j}{SE(\hat{\phi}_j)} \sim N(0, 1)$ asimptotic
- Respingeți dacă $|z| > 1.96$ la nivel de 5%

Interval de încredere: $\hat{\phi}_j \pm 1.96 \cdot SE(\hat{\phi}_j)$

Dacă modelul este corect specificat, reziduurile ar trebui să fie zgomot alb:

1. Reprezentați grafic reziduurile în timp

- Ar trebui să fluctueze în jurul lui zero
- Fără tipare sau tenduri evidente
- Varianță constantă (fără heteroscedasticitate)

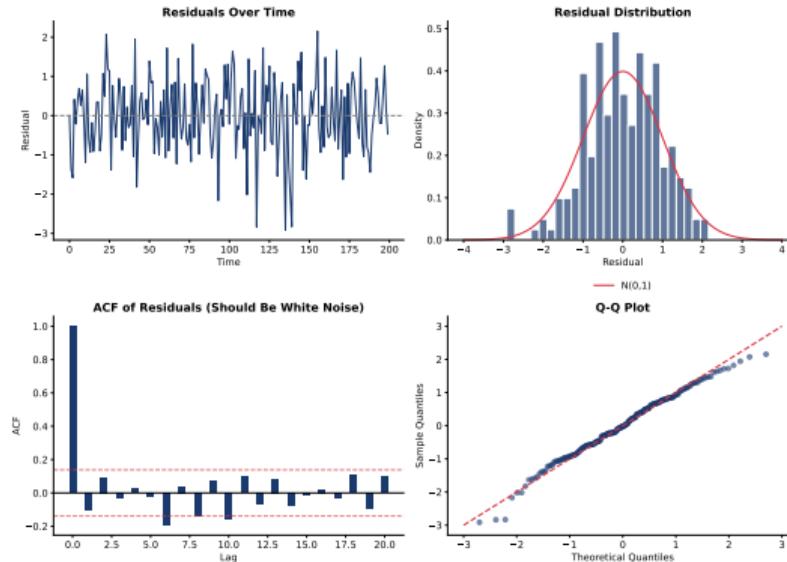
2. Verificați ACF reziduurilor

- Toate corelațiile ar trebui să fie în benzile de încredere
- Fără vârfuri semnificative → zgomot alb

3. Verificați histograma / graficul Q-Q

- Ar trebui să fie aproximativ normale (dacă presupunem Gaussian)
- Cozi groase sugerează erori non-normale

Diagnosticarea Reziduurilor: Exemplu



- **Graficul reziduurilor:** Ar trebui să arate dispersie aleatorie în jurul lui zero cu varianță constantă
- **ACF reziduurilor:** Fără vârfuri semnificative indică zgomot alb (potrivire bună)
- **Graficul Q-Q:** Punctele pe linia diagonală indică reziduuri distribuite normal

Definiție 11 (Testul Ljung-Box)

Testează dacă reziduurile sunt distribuite independent (fără autocorelație).

Statistica de test:

$$Q(m) = n(n + 2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{\rho}_k^2}{n - k}$$

Ipoteze:

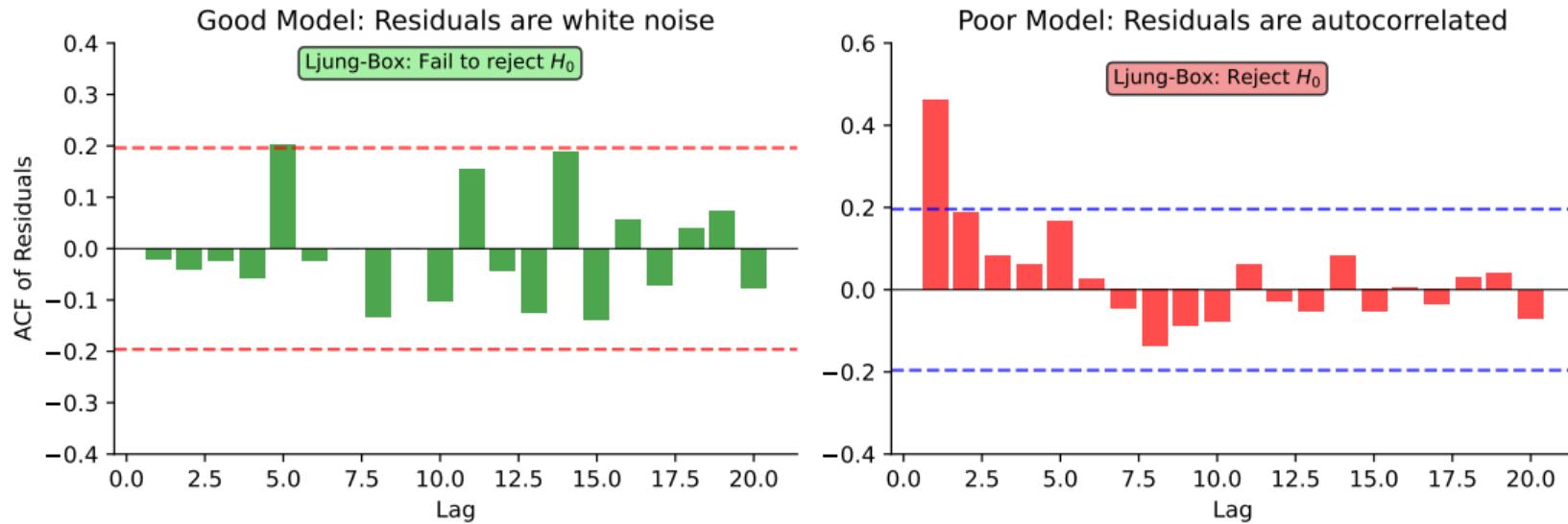
- H_0 : Reziduurile sunt zgomot alb (fără autocorelație până la lag m)
- H_1 : Reziduurile sunt autocorelate

Distribuție: Sub H_0 , $Q(m) \sim \chi^2(m - p - q)$ aproximativ

Decizie:

- p-value $> 0.05 \rightarrow$ nu respingem $H_0 \rightarrow$ reziduurile arată ca zgomot alb (bine!)
- p-value $< 0.05 \rightarrow$ autocorelație semnificativă rămâne \rightarrow model inadecvat

Testul Ljung-Box: Ilustrație Vizuală



Stânga: Model bun – reziduurile sunt zgomot alb (fără ACF semnificativ). Dreapta: Model slab – reziduurile arată autocorelație.

Lista de Verificare Diagnostic

Un model ARMA bun ar trebui să satisfacă:

- ① **Staționaritate:** Rădăcinile AR în afara cercului unitate
✓ Verificați cu arroots
- ② **Invertibilitate:** Rădăcinile MA în afara cercului unitate
✓ Verificați cu maroots
- ③ **Reziduuri zgomot alb:** Fără ACF semnificativ
✓ Grafic ACF, testul Ljung-Box
- ④ **Reziduuri normale:** (dacă presupunem)
✓ Grafic Q-Q, testul Jarque-Bera
- ⑤ **Fără heteroscedasticitate:** Varianță constantă
✓ Reprezentați reziduurile, testul ARCH
- ⑥ **Simplu:** Cel mai mic AIC/BIC dintre modelele adecvate

Dacă diagnosticele eşuează: Reveniți la identificare, încercați ordine diferite

Întrebare

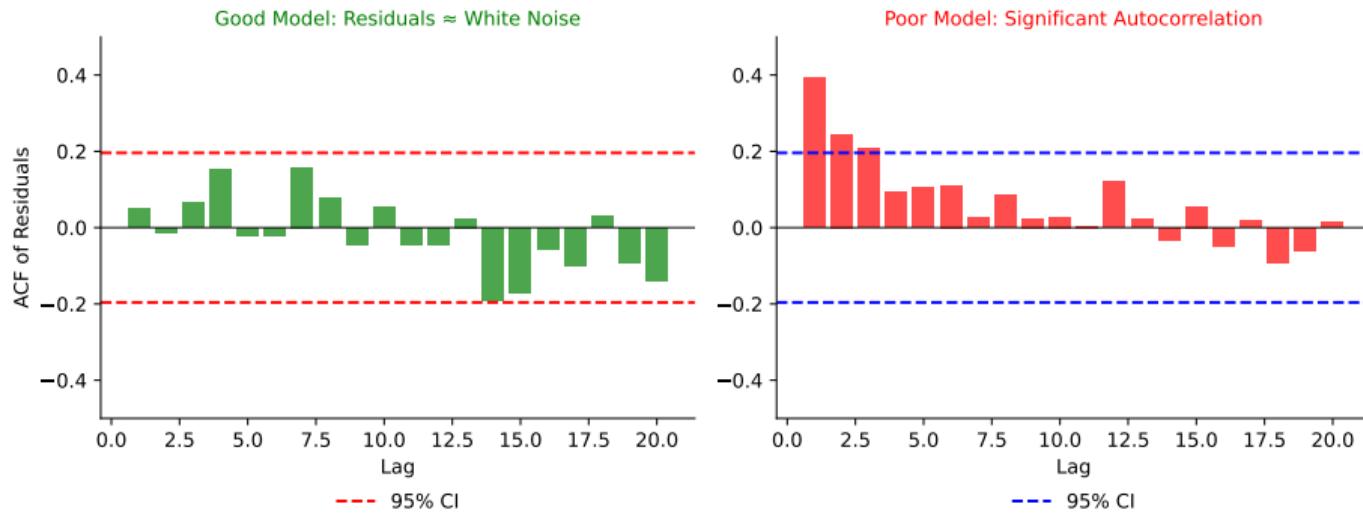
După potrivirea unui model ARMA, rulați testul Ljung-Box pe reziduuri și obțineți p-value = 0.03. Ce înseamnă asta?

- A Modelul este adekvat, reziduurile sunt zgomot alb
- B Modelul este inadecvat, reziduurile au autocorelație
- C Trebuie să creșteți dimensiunea eșantionului
- D Testul este neconcludent

Quiz: Testul Ljung-Box – Răspuns

Răspuns Corect: (B) Modelul este inadecvat

p-value < 0.05 respinge H_0 (zgomot alb), indicând autocorelație reziduală rămasă.



Prognoze Punctuale

Prognoza optimă: Speranța condiționată minimizează MSE

$$\hat{X}_{n+h|n} = \mathbb{E}[X_{n+h}|X_n, X_{n-1}, \dots]$$

Pentru AR(1): $X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$

$$\hat{X}_{n+1|n} = c + \phi X_n$$

$$\hat{X}_{n+2|n} = c + \phi \hat{X}_{n+1|n} = c(1 + \phi) + \phi^2 X_n$$

$$\hat{X}_{n+h|n} = \mu + \phi^h (X_n - \mu)$$

Proprietate cheie: Prognozele converg la media μ când $h \rightarrow \infty$

Pentru MA(1): $X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$

$$\hat{X}_{n+1|n} = \mu + \theta \varepsilon_n$$

$$\hat{X}_{n+h|n} = \mu \quad \text{pentru } h > 1$$

Incertitudinea Prognozei

Eroarea de prognoză:

$$e_{n+h|n} = X_{n+h} - \hat{X}_{n+h|n}$$

Eroarea medie pătratică de prognoză (MSFE):

$$\text{MSFE}(h) = \mathbb{E}[e_{n+h|n}^2] = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2$$

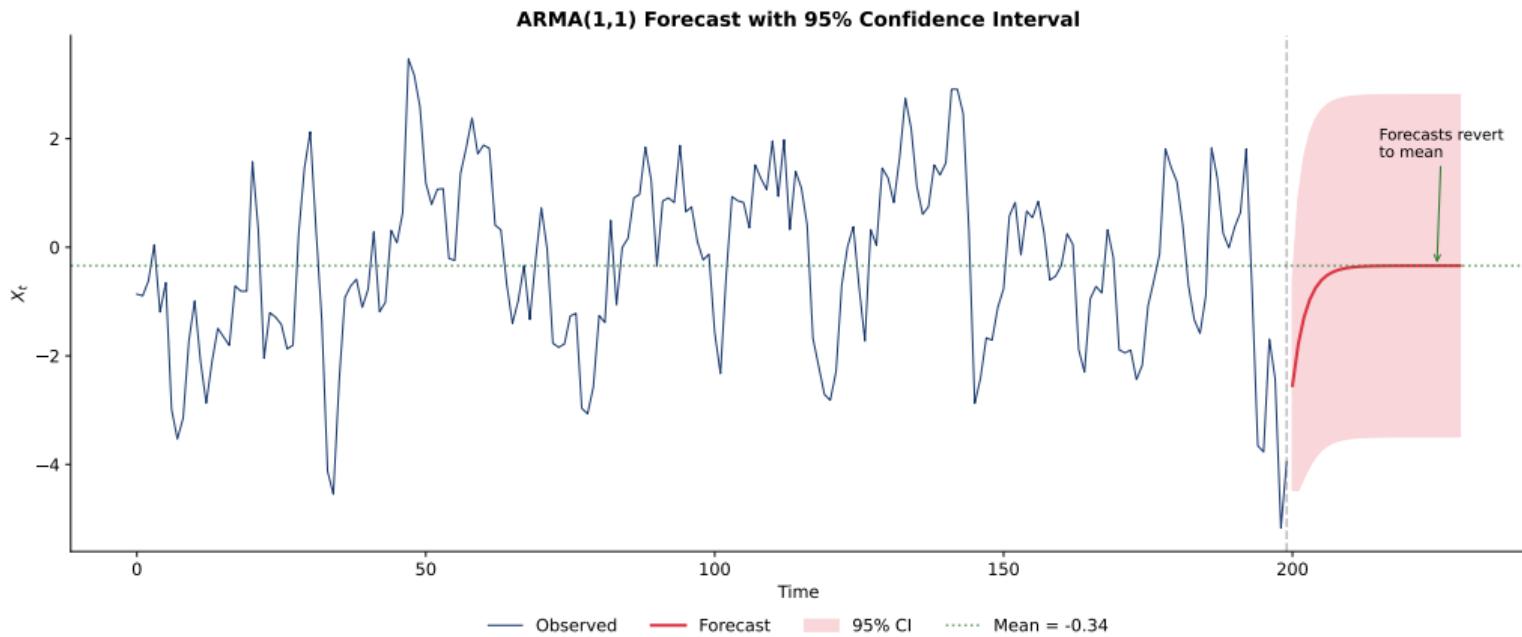
unde ψ_j sunt coeficienții MA(∞).

Pentru AR(1): $\psi_j = \phi^j$

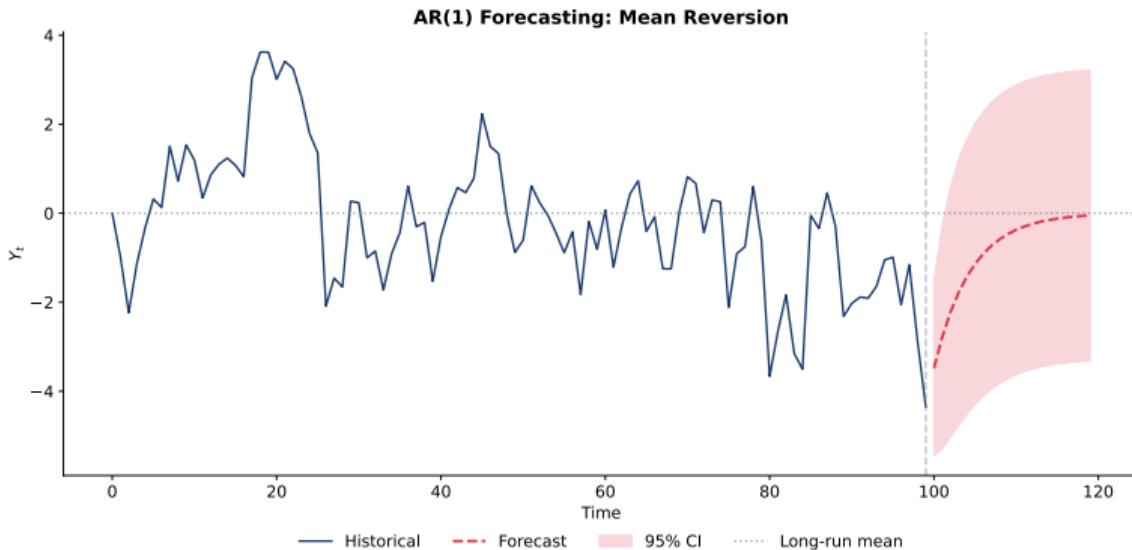
$$\text{MSFE}(h) = \sigma^2 \frac{1 - \phi^{2h}}{1 - \phi^2} \rightarrow \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2} = \text{Var}(X_t)$$

Observație cheie: Incertitudinea prognozei crește cu orizontul, ajungând eventual la varianța necondiționată

Prognoza ARMA cu Intervale de Încredere

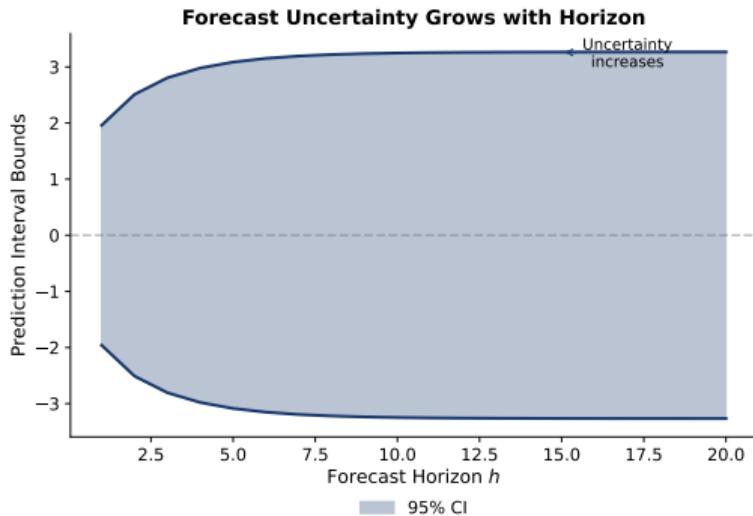
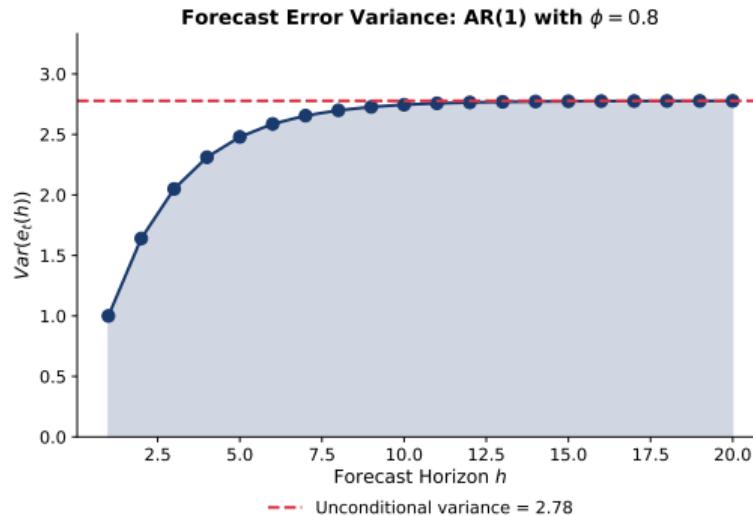


Prognoza AR(1): Revenirea la Medie



- Prognozele converg la media necondiționată μ pe măsură ce orizontul crește
- Rata de convergență depinde de $|\phi|$: valori mai mari înseamnă revenire mai lentă
- Intervalele de încredere se largesc cu orizontul, ajungând eventual la varianța necondiționată

Varianța Erorii de Prognoză în Funcție de Orizont



Intervale de Încredere pentru Prognoze

Presupunând erori Gaussiene:

$$X_{n+h}|X_n, \dots \sim N\left(\hat{X}_{n+h|n}, \text{MSFE}(h)\right)$$

Interval de încredere $(1 - \alpha)$:

$$\hat{X}_{n+h|n} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\text{MSFE}(h)}$$

unde $z_{\alpha/2} = 1.96$ pentru IC 95%.

Proprietăți:

- Intervalele se largesc pe măsură ce orizontul crește
- În cele din urmă converg la intervalul necondiționat: $\mu \pm z_{\alpha/2}\sigma_x$
- Lățimea depinde de parametrii modelului (coeficienți AR, etc.)

În Python: `model.get_forecast(h).conf_int()`

Evaluarea Prognozei

Testare în afara eșantionului:

- ① Împărțiți datele: set de antrenare (potriviti modelul) și set de test (evaluați)
- ② Generați prognoze pentru perioada de test
- ③ Comparați prognozele cu valorile reale

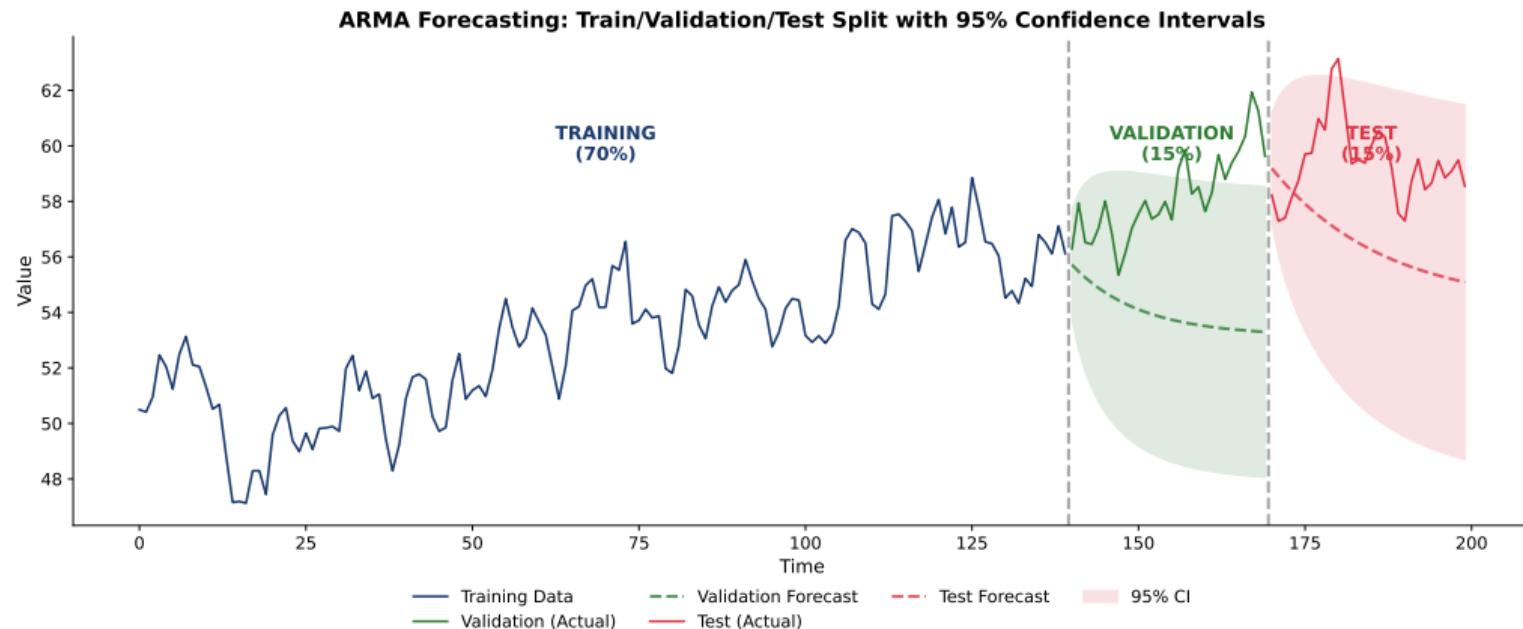
Metrici (din Capitolul 1):

- MAE = $\frac{1}{n} \sum |e_t|$
- RMSE = $\sqrt{\frac{1}{n} \sum e_t^2}$
- MAPE = $\frac{100}{n} \sum \left| \frac{e_t}{X_t} \right|$

Fereastră mobilă/în expansiune:

- Re-estimați modelul pe măsură ce sosesc date noi
- Evaluare mai realistă a performanței prognozei

Exemplu de Prognoză Train/Validare/Test



Întrebare

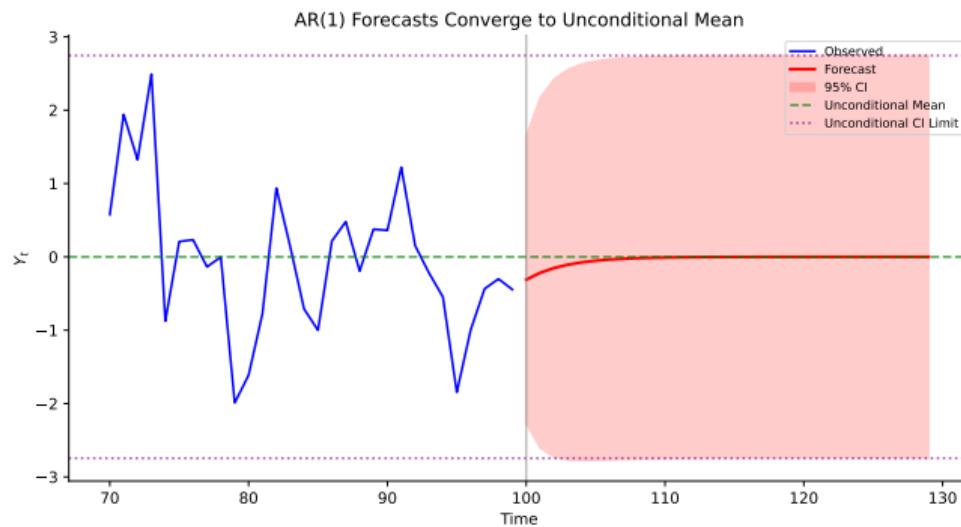
Pentru un model AR(1) staționar, ce se întâmplă cu prognozele când orizontul $h \rightarrow \infty$?

- A Prognozele cresc nelimitat
- B Prognozele oscilează la nesfârșit
- C Prognozele converg la media necondiționată μ
- D Prognozele devin mai precise

Quiz: Proprietățile Prognozei – Răspuns

Răspuns Corect: (C) Prognozele converg la μ

$$\hat{X}_{n+h|n} = \mu + \phi^h(X_n - \mu) \rightarrow \mu \text{ când } h \rightarrow \infty \text{ (deoarece } |\phi| < 1\text{)}$$



Implementare Python: Potrivirea ARMA

Folosind statsmodels:

```
from statsmodels.tsa.arima.model import ARIMA

# Potrivire ARMA(2,1) -- notă: ARIMA(p,d,q) cu d=0
model = ARIMA(data, order=(2, 0, 1))
results = model.fit()

# Rezumat
print(results.summary())

# Prognoza
forecast = results.get_forecast(steps=10)
print(forecast.predicted_mean)
print(forecast.conf_int())
```

Notă: ARIMA cu $d = 0$ este echivalent cu ARMA

Python: Selectia Modelului cu pmdarima

Selectie automată ARIMA:

```
import pmdarima as pm

# Auto ARIMA cu criteriul AIC
model = pm.auto_arima(data,
                       start_p=0, max_p=5,
                       start_q=0, max_q=5,
                       d=0, # Fără diferențiere pentru date staționare
                       seasonal=False,
                       information_criterion='aic',
                       trace=True)

print(model.summary())
```

Rezultat: Cel mai bun ordin al modelului și parametrii potriviti

1 Pregătirea datelor

- Verificați valori lipsă, valori aberante
- Transformați dacă este necesar (log, diferențiere)

2 Verificarea staționarității

- Inspectie vizuală: grafic temporal, ACF
- Teste formale: ADF, KPSS
- Diferențiați dacă este nestaționar

3 Identificarea modelului

- Tipare ACF/PACF
- Căutare pe grilă cu criterii informaționale

4 Estimare și diagnosticare

- Potriviri modelul, verificați semnificația
- Analiză reziduală, testul Ljung-Box

5 Prognoza

- Prognoze punctuale cu intervale de încredere
- Validare în afara eșantionului

- ❶ **Modele AR(p):** Valoarea curentă depinde de p valori trecute
 - Staționaritate: rădăcinile lui $\phi(z)$ în afara cercului unitate
 - PACF se întrerupe la lag p
- ❷ **Modele MA(q):** Valoarea curentă depinde de q șocuri trecute
 - Întotdeauna staționar; invertibilitate: rădăcinile lui $\theta(z)$ în afara cercului unitate
 - ACF se întrerupe la lag q
- ❸ **ARMA(p,q):** Combină AR și MA pentru modelare flexibilă
 - Atât ACF cât și PACF scad
- ❹ **Box-Jenkins:** Identificare → Estimare → Diagnosticare → Prognoză
- ❺ **Diagnosticare:** Reziduurile trebuie să fie zgomot alb
- ❻ **Prognoze:** Converg la medie; incertitudinea crește cu orizontul

Capitolul 3: ARIMA și Modele Sezoniere

- ARIMA(p,d,q): Modele integrate pentru date nestaționare
- ARIMA Sezonier: SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_s
- Diferențiere sezonieră
- Aplicații practice cu tipare sezoniere

Lectură:

- Hyndman & Athanasopoulos, *Forecasting: Principles and Practice*, Cap. 9
- Box, Jenkins, Reinsel & Ljung, *Time Series Analysis*, Cap. 3-4

Referințe

-  Box, G.E.P., Jenkins, G.M., Reinsel, G.C., & Ljung, G.M. (2015). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. 5th ed., Wiley.
-  Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
-  Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*. 3rd ed., OTexts. <https://otexts.com/fpp3/>
-  Brockwell, P.J., & Davis, R.A. (2016). *Introduction to Time Series and Forecasting*. 3rd ed., Springer.
-  Shumway, R.H., & Stoffer, D.S. (2017). *Time Series Analysis and Its Applications*. 4th ed., Springer.

Pachete Software:

- statsmodels – Modele statistice pentru Python, inclusiv ARIMA
- pmdarima – Selecție automată ARIMA pentru Python
- scipy – Optimizare și funcții statistice
- numpy, pandas – Manipulare date
- matplotlib – Vizualizare

Date și Exemple:

- Serii de timp simulate pentru ilustrații
- Exemple bazate pe Hyndman & Athanasopoulos (2021)