Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 1: Introducere în Serii de Timp

Fundamente și Concepte

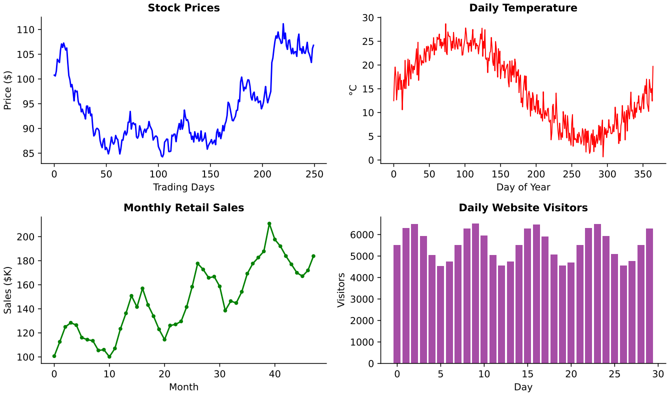
Obiective de Învățare

La sfârșitul acestui capitol, veți fi capabili să:

1. **Definiți** seriile de timp și să le distingeți de datele transversale și de panel
2. **Descompuneți** seriile de timp în componente de trend, sezonalitate și reziduuri
3. **Aplicați** netezirea exponențială (SES, Holt, Holt-Winters, ETS)
4. **Evaluați** prognozele folosind MAE, RMSE, MAPE; separări train/validare/test
5. **Modelați** sezonalitatea folosind variabile dummy sau termeni Fourier
6. **Gestionați** trendul și sezonalitatea prin detrendare și ajustare
7. **Înțelegeți** procesele stocastice și staționaritatea
8. **Calculați** ACF/PACF și efectuați teste de staționaritate (ADF, KPSS)

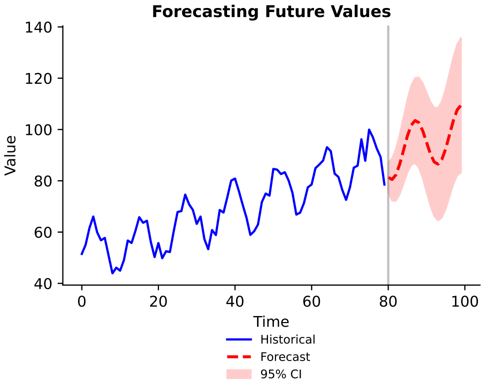
Structura Capitolului

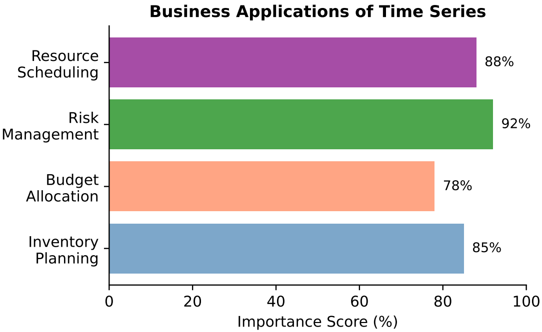
Seriile de Timp Sunt Pretutindeni



- **Finanțe**: Prețuri de acțiuni, cursuri de schimb, volume de tranzacționare
- **Economie**: PIB, șomaj, rate ale inflației
- **Afaceri**: Vânzări, trafic web, cererea clienților
- **Știință**: Temperatură, niveluri de poluare, indicatori vitali ai pacienților

De Ce Studiem Seriile de Timp?

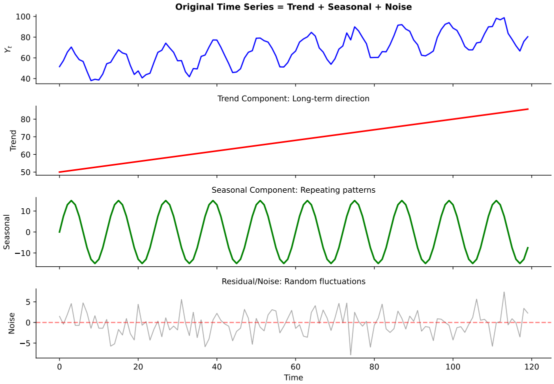




Obiectivul Principal: Prognoza

Folosiți tiparele istorice pentru a prezice valorile viitoare — esențial pentru planificarea afacerilor, gestionarea riscurilor și deciziile de politică.

Înțelegerea Structurii Seriilor de Timp



Descompunere

Orice serie de timp poate fi descompusă în componente interpretabile: trend, sezonalitate și zgomot.

Definiția unei Serii de Timp

Definiție 1 (Serie de Timp)

O **serie de timp** este o secvență de observații $\{X_t\}$ indexate după timp:

$$\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$$

unde $\mathcal{T}$ este un set de indici reprezentând puncte temporale.

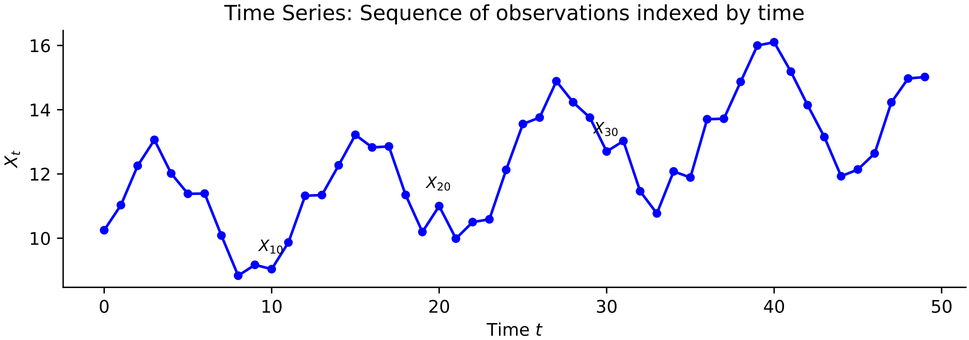
Caracteristici cheie:

- **Ordonate**: Observațiile au o ordine temporală naturală
- **Dependente**: Observațiile consecutive sunt de obicei corelate
- **Discrete** sau **Continue**: Indexul temporal poate fi discret $(t = 1, 2, 3, \ldots)$ sau continuu

Notație:

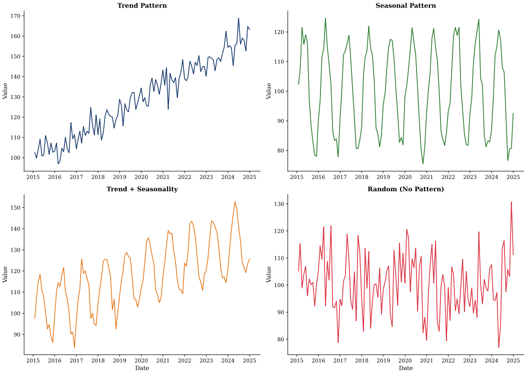
- X_t = observația la momentul t
- $\{X_t\}_{t=1}^{T}$ = serie de timp finită cu T observații

Serie de Timp: Ilustrație Vizuală



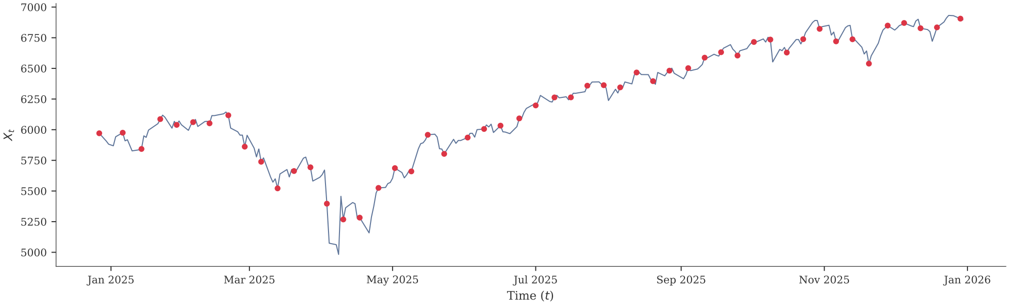
Fiecare punct X_t reprezintă o observație la momentul t. Secvența este ordonată și observațiile consecutive sunt de obicei corelate.

Tipare Comune în Seriile de Timp



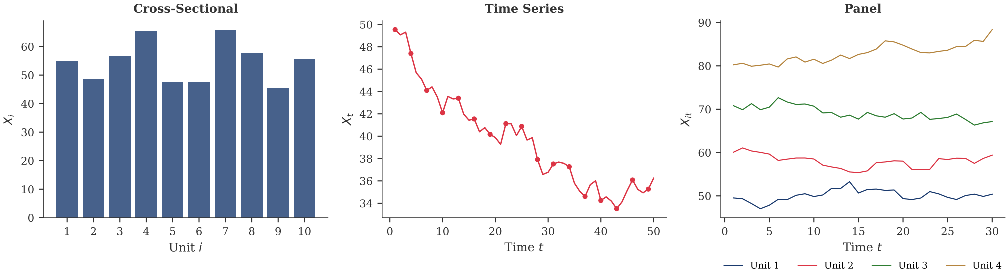
- **Trend**: Creștere sau scădere pe termen lung a datelor
- **Sezonalitate**: Tipare periodice regulate (de ex., lunar, trimestrial)
- **Aleatoriu**: Niciun tipar sistematic – fluctuații imprevizibile

Serie de Timp: Definiție Vizuală



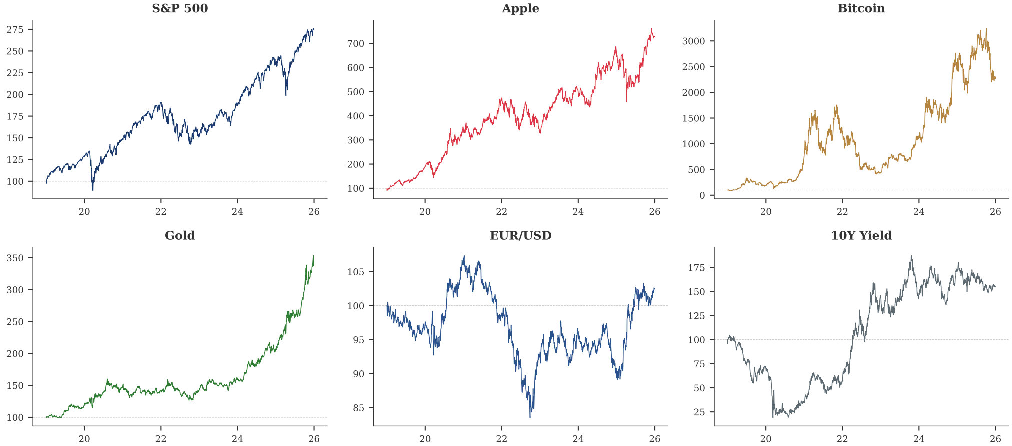
Fiecare punct X_t reprezintă o măsurătoare la momentul discret t. Date: S&P 500 (2024).

Tipuri de Date: Comparație



Tip de Date	**Unități (N)**	**Timp (T)**	**Exemplu**
Transversale	Multe	1	Sondaj pe 1000 gospodării
Serie de timp	1	Multe	Prețuri zilnice S&P 500
Panel	Multe	Multe	PIB pentru 50 țări, 20 ani

Exemple de Date de Tip Serie de Timp



Date financiare reale de la Yahoo Finance (2019–2025). Normalizate la baza 100.

De Ce Descompunem o Serie de Timp?

Descompunerea separă o serie de timp în componente interpretabile:

Obiective:

- Înțelegerea tiparelor subiacente
- Eliminarea sezonalității pentru modelare
- Identificarea direcției trendului
- Izolarea fluctuațiilor neregulate
- Îmbunătățirea acurateței prognozei

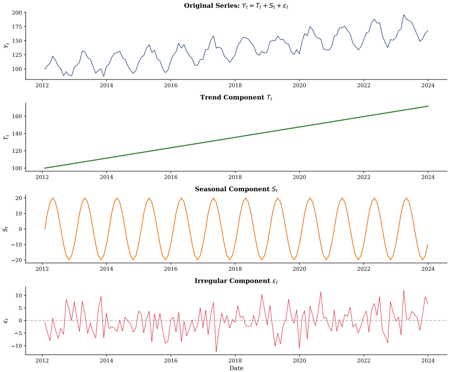
Componente:

- T_t = **Trend**: Mișcare pe termen lung
- S_t = **Sezonalitate**: Tipar periodic regulat
- C_t = **Ciclic**: Fluctuații ale ciclului de afaceri
- ε_t = **Rezidual**: Zgomot aleatoriu

Modele Clasice de Descompunere

- **Aditiv**: $X_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$
- **Multiplicativ**: $X_t = T_t \times S_t \times \varepsilon_t$

Descompunerea Seriilor de Timp: Exemplu Vizual



- **Original**: Seria de timp observată cu toate componentele
- **Trend**: Mișcarea subiacentă pe termen lung extrasă prin netezire
- **Sezonalitate**: Tiparul periodic regulat care se repetă la fiecare ciclu
- **Rezidual**: Zgomotul aleatoriu după eliminarea trendului și sezonalității

Componenta Ciclică

Componenta ciclică C_t: Fluctuații pe termen mediu (2–10 ani)

Caracteristici:

- Fluctuații ale ciclului de afaceri
- Nicio perioadă fixă (spre deosebire de sezonalitate)
- Durata variază: 2–10 ani
- Amplitudinea variază în timp

Exemple:

- Expansiuni/recesiuni economice
- Cicluri de credit
- Cicluri imobiliare
- Cicluri ale prețurilor materiilor prime

Notă Practică

Adesea combinată cu trendul ca componentă **trend-ciclu** deoarece:

- Dificil de separat de trend cu date scurte
- Multe metode de descompunere estimează $T_t + C_t$ împreună

Modelul de Descompunere Aditivă

$$X_t = T_t + S_t + \varepsilon_t \quad (1)$$

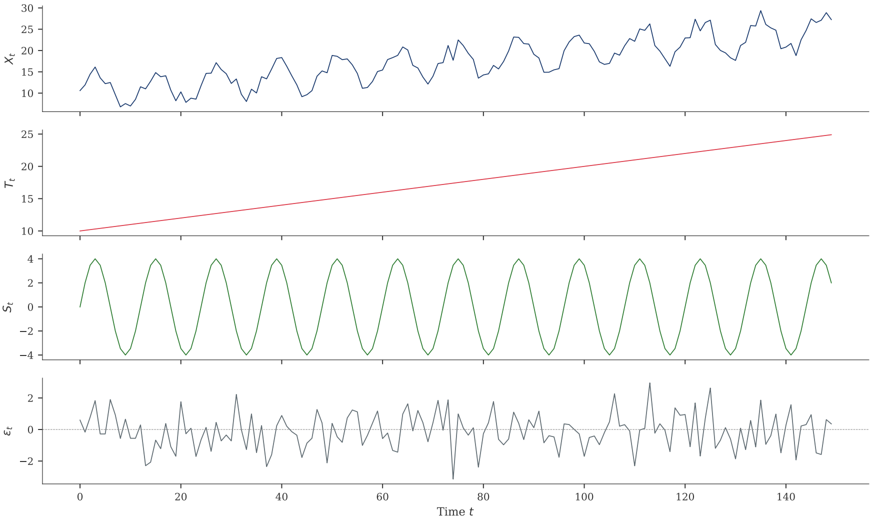
Când se utilizează:

- Fluctuațiile sezoniere sunt **constante** în timp
- Varianța seriei este **stabilă**

Proprietăți:

- $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$ (reziduuri cu medie zero)
- $\sum_{j=1}^{s} S_j = 0$ (sezonalitatea însumează la zero)
- Unitățile lui S_t sunt aceleași cu ale lui X_t

Descompunere Aditivă: Vizualizare



Modelul de Descompunere Multiplicativă

$$X_t = T_t \times S_t \times \varepsilon_t \tag{2}$$

Când se utilizează:

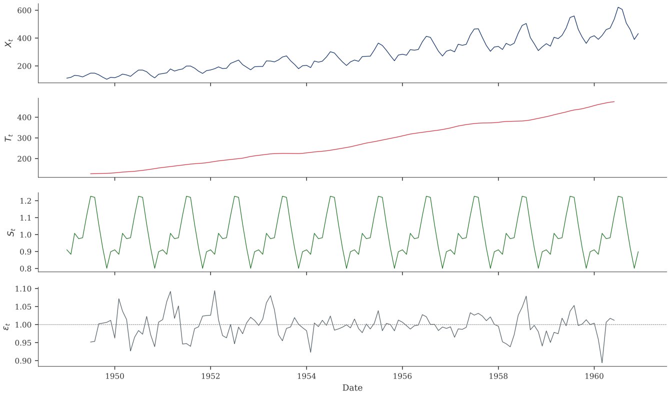
- Fluctuațiile sezoniere **cresc** odată cu nivelul seriei
- Varianța **crește** în timp

Proprietăți:

- $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 1$ (reziduuri centrate la 1)
- $\frac{1}{s} \sum S_j = 1$ (media sezonalității este 1)
- S_t este un raport (adimensional)

Sfat: Transformarea logaritmică convertește la modelul aditiv.

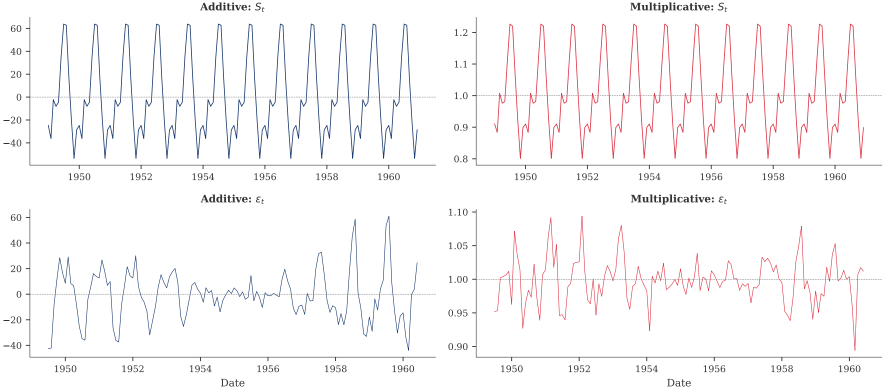
Descompunere Multiplicativă: Date Reale



Exemplu

Setul clasic Box-Jenkins pentru pasageri aerieni (1949–1960). Amplitudinea sezonieră crește cu nivelul.

Aditivă vs Multiplicativă: Comparație



Diferența cheie: În modelul multiplicativ, componenta sezonală este un *raport* (centrat la 1), în timp ce în modelul aditiv este în *unități absolute* (centrat la 0).

Estimarea Trendului: Media Mobilă

Definiție 2 (Media Mobilă Centrată)

Media mobilă centrată de ordin $2q + 1$ este:

$$\hat{T}_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^{q} X_{t+j}$$

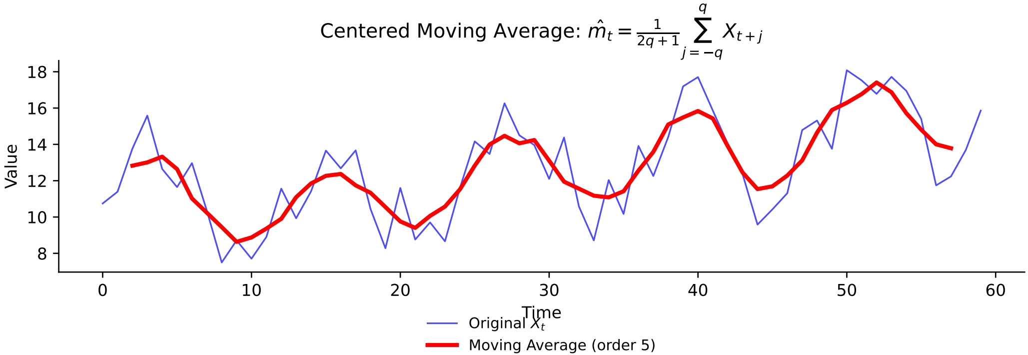
Pentru date sezoniere:

- Dacă perioada s este **impară**: medie simplă pe s observații
- Dacă perioada s este **pară** (de ex., 12): se folosește MA $2 \times s$ cu ponderi înjumătățite la capete

Proprietăți:

- Netezește fluctuațiile sezoniere și aleatorii
- Fereastră mai mare $\Rightarrow$ trend mai neted
- Compromis: pierdere de date la capete

Media Mobilă Centrată: Ilustrație Vizuală



Media mobilă netezește fluctuațiile pe termen scurt, dezvăluind trendul subiacent.

Algoritmul Descompunerii Clasice

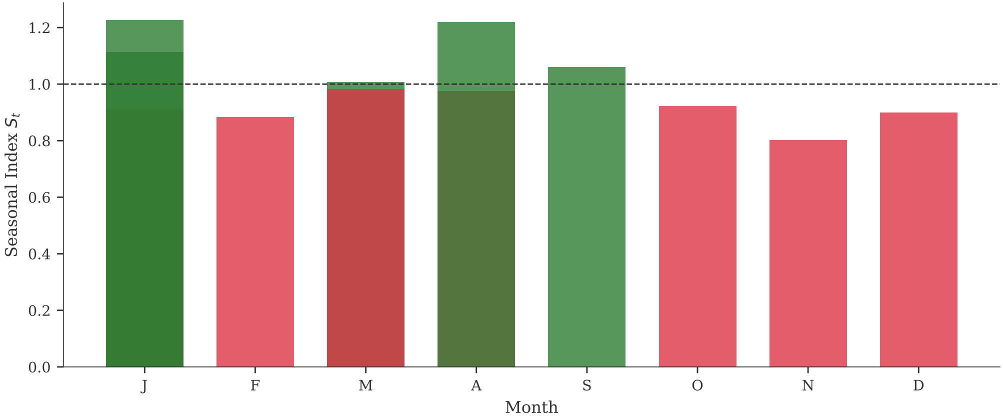
Pași pentru Descompunerea Multiplicativă:

1. **Estimarea Trendului**: $\hat{T}_t = MA_s(X_t)$
2. **Detrendare**: $D_t = X_t / \hat{T}_t$
3. **Estimarea Sezonalității**: Media D_t pentru fiecare sezon j

$$\hat{S}_j = \text{media}(D_t \text{ pentru toate } t \text{ din sezonul } j)$$

4. **Normalizare**: Scalare astfel încât $\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s} \hat{S}_j = 1$
5. **Calculul Reziduurilor**: $\hat{\varepsilon}_t = X_t / (\hat{T}_t \times \hat{S}_t)$

Indici Sezonieri: Interpretare



Interpretare: $S_t > 1$ înseamnă activitate peste medie; $S_t < 1$ înseamnă sub medie. Datele aeriene arată vârf de călătorii în iulie–august.

Descompunerea STL: O Abordare Modernă

Definiție 3 (STL - Descompunere Sezonieră-Trend folosind LOESS)

STL folosește regresia ponderată local (LOESS) pentru a estima componentele:

$$X_t = T_t + S_t + R_t$$

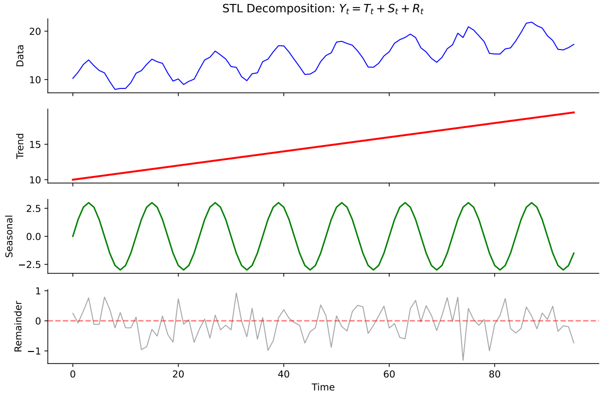
Avantaje față de descompunerea clasică:

- Gestionează **orice perioadă sezonieră** (nu doar 4 sau 12)
- Componenta sezonieră poate **să se schimbe în timp**
- **Robust** la valori aberante (cu opțiunea robust=True)
- Oferă estimări **netede** ale trendului

Parametri cheie:

- `period`: Perioada sezonieră (de ex., 12 pentru lunar)
- `seasonal`: Fereastră pentru netezirea sezonieră (întreg impar)
- `robust`: Folosește ajustare robustă pentru a reduce ponderea valorilor aberante

Descompunerea STL: Ilustrație Vizuală



Observație Cheie

STL separă seria în trend, sezonalitate și rest folosind LOESS.

Netezirea Exponențială: Prezentare Generală

Metodele de **netezire exponențială** produc prognoze bazate pe medii ponderate ale observațiilor trecute, cu ponderi care scad exponențial.

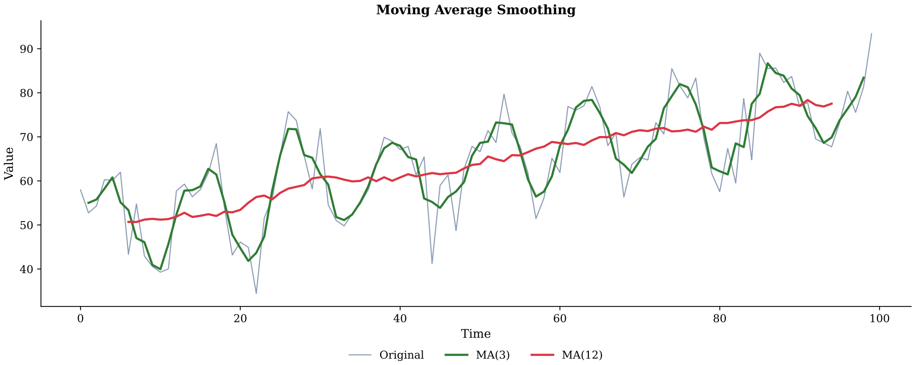
De Ce Netezire Exponențială?

- Metode de prognoză simple dar eficiente
- Observațiile mai recente primesc ponderi mai mari
- Gestionează trendul și sezonalitatea
- Baza pentru modelele ETS

Trei metode principale:

1. **Netezire Exponențială Simplă (SES)**: Doar nivel
2. **Metoda Holt**: Nivel + Trend
3. **Holt-Winters**: Nivel + Trend + Sezonalitate

Netezirea cu Media Mobilă



- **Fereastră mică** (de ex., 5): Receptivă la schimbări dar zgomotoasă
- **Fereastră mare** (de ex., 30): Mai netedă dar mai lentă în reacție
- Compromis între reducerea zgomotului și întârzierea în detectarea schimbărilor

Netezirea Exponențială Simplă (SES)

Prognoză: $\hat{X}_{t+1|t} = \alpha X_t + (1-\alpha)\hat{X}_{t|t-1}$

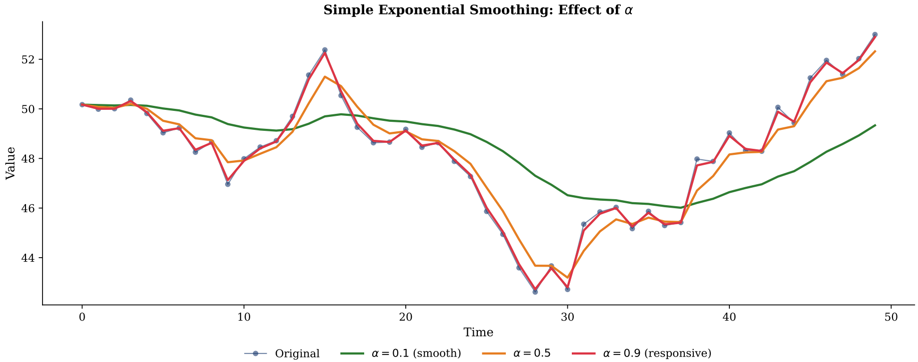
unde $\alpha \in (0,1)$ este **parametrul de netezire**.

Cum funcționează:

- Ponderile scad exponențial în trecut
- α mare: receptiv la schimbările recente
- α mic: prognoze mai netede, mai stabile

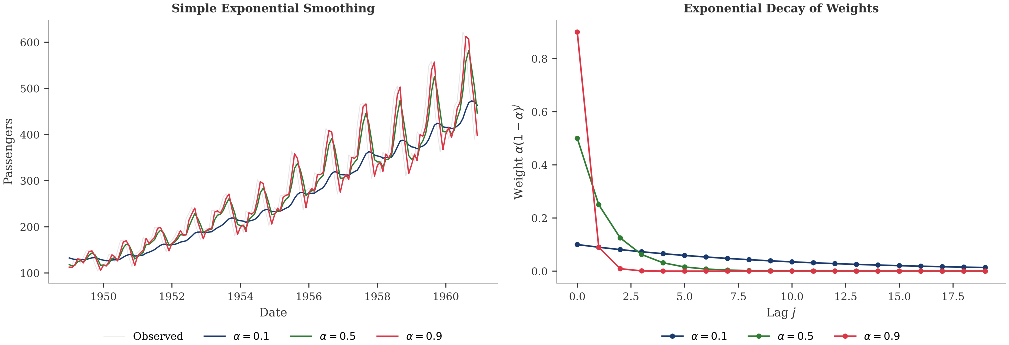
Forma de nivel: $\ell_t = \alpha X_t + (1-\alpha)\ell_{t-1}$

Netezirea Exponențială: Efectul lui Alpha



- α **mic** (de ex., 0.1): Mai multă pondere pe trecut – mai neted, adaptare mai lentă
- α **mare** (de ex., 0.9): Mai multă pondere pe recent – receptiv, mai volatil
- Alegeți α în funcție de cât de rapid se schimbă procesul subiacent

Netezirea Exponențială Simplă: Efectul lui α



Un α mai mic produce prognoze mai netede; un α mai mare urmează datele mai îndeaproape.

Metoda Holt cu Trend Liniar

Extinde SES pentru a captura **trendul liniar** folosind două ecuații:

Nivel: $\ell_t = \alpha X_t + (1-\alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1})$

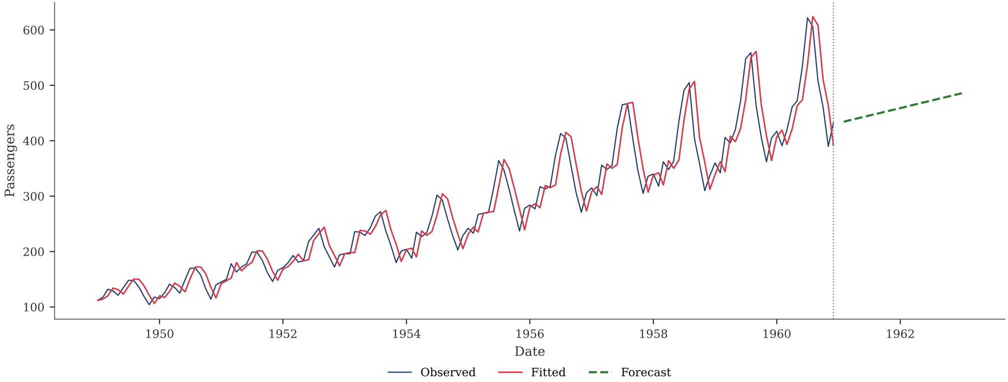
Trend: $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1-\beta^*)b_{t-1}$

Prognoză: $\hat{X}_{t+h|t} = \ell_t + h \cdot b_t$

Parametri:

- $\alpha \in (0,1)$: Parametru de netezire pentru nivel
- $\beta^* \in (0,1)$: Parametru de netezire pentru trend
- ℓ_t: Nivelul estimat la momentul t
- b_t: Trendul (panta) estimat la momentul t

Metoda Holt: Vizualizare



Metoda Holt captează atât nivelul cât și trendul, proiectându-le în orizontul de prognoză.

Metoda Sezonieră Holt-Winters

Extinde metoda Holt pentru a include **sezonalitatea** cu trei ecuații:

Nivel: $\ell_t = \alpha(X_t - S_{t-s}) + (1-\alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1})$

Trend: $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1-\beta^*)b_{t-1}$

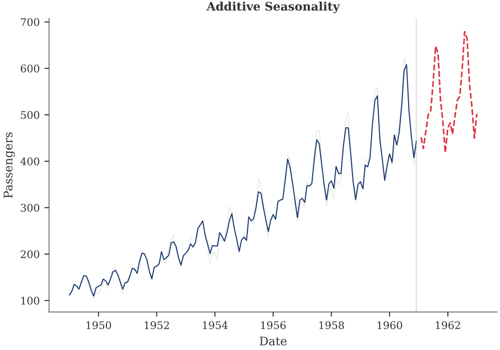
Sezonalitate: $S_t = \gamma(X_t - \ell_t) + (1-\gamma)S_{t-s}$

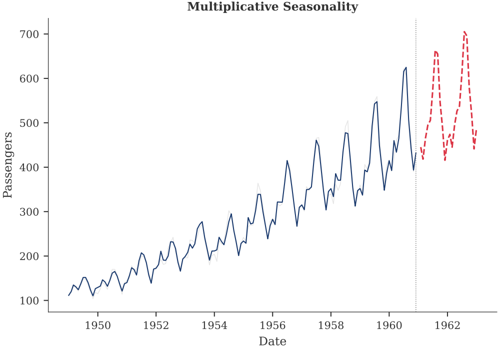
Prognoză: $\hat{X}_{t+h|t} = \ell_t + h \cdot b_t + S_{t+h-s(k+1)}$

Parametri:

- α: Netezire nivel
- β^*: Netezire trend
- γ: Netezire sezonalitate
- s: Perioada sezonieră (de ex., 12 pentru lunar)

Holt-Winters: Captarea Sezonalității





Holt-Winters descompune seria și produce prognoze sezoniere.

Cadrul ETS: Eroare-Trend-Sezonalitate

Definiție 4 (Modele ETS)

Cadrul **ETS** generalizează netezirea exponențială cu structură explicită de eroare:

$$\text{ETS}(E, T, S)$$

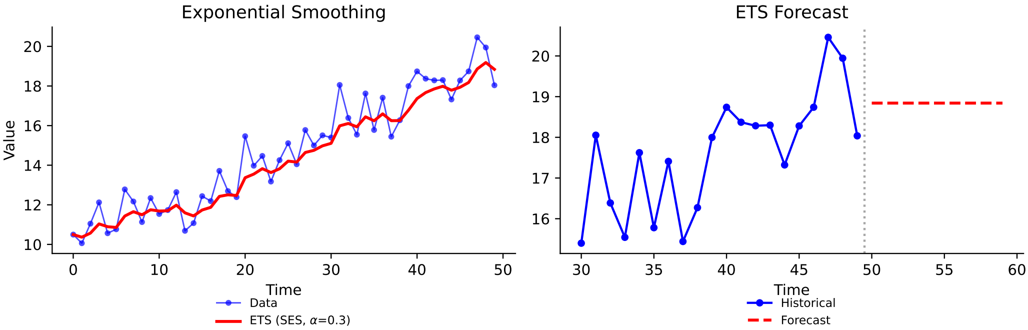
unde fiecare componentă poate fi:

Componentă	**N**	**A**	**M**
Eroare (E)	–	Aditivă	Multiplicativă
Trend (T)	Niciunul	Aditiv	Multiplicativ
Sezonalitate (S)	Niciuna	Aditivă	Multiplicativă

Exemple:

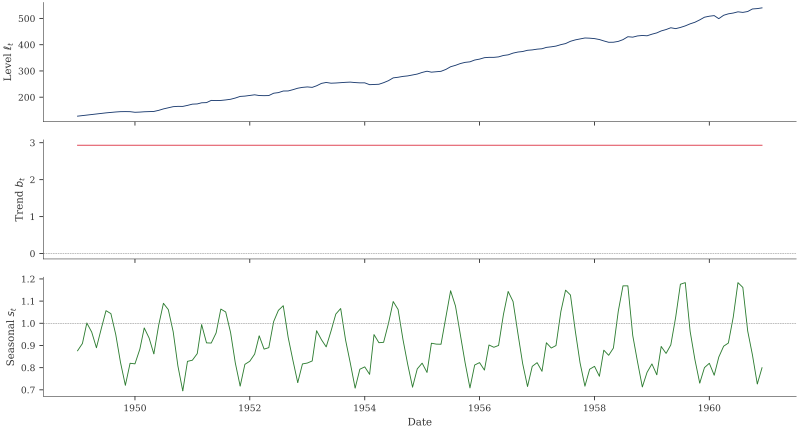
- ETS(A,N,N) = Netezire Exponențială Simplă
- ETS(A,A,N) = Metoda Liniară Holt
- ETS(A,A,A) = Holt-Winters Aditivă
- ETS(M,A,M) = Erori multiplicative, trend aditiv, sezonalitate multiplicativă

ETS: Ilustrație Netezire Exponențială



Modelele ETS folosesc observații ponderate exponențial pentru prognoză. Ponderile scad pe măsură ce observațiile devin mai vechi.

Selecția Modelului ETS



Cadrul ETS oferă o modalitate sistematică de a alege cel mai bun model folosind AIC/BIC.

Metode cu Trend Amortizat

Introduce **parametrul de amortizare** $\phi \in (0, 1)$ pentru a preveni supra-proiecția:

Nivel: $\ell_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})$

Trend: $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)\phi b_{t-1}$

Prognoză: $\hat{X}_{t+h|t} = \ell_t + \phi \frac{1-\phi^h}{1-\phi} b_t$

Observație cheie:

- Când $h \to \infty$: prognoza $\to \ell_t + \frac{\phi}{1-\phi} b_t$ (constantă)
- Previne extrapolarea nerealistă pe termen lung
- Adesea cel mai bun pentru orizonturi de prognoză mai lungi

Metrici de Acuratețe a Prognozei

Eroarea de Prognoză: $e_t = X_t - \hat{X}_t$ (real minus prezis)

Dependente de Scară:

- $\text{MAE} = \frac{1}{n} \sum |e_t|$
- $\text{MSE} = \frac{1}{n} \sum e_t^2$
- $\text{RMSE} = \sqrt{\text{MSE}}$

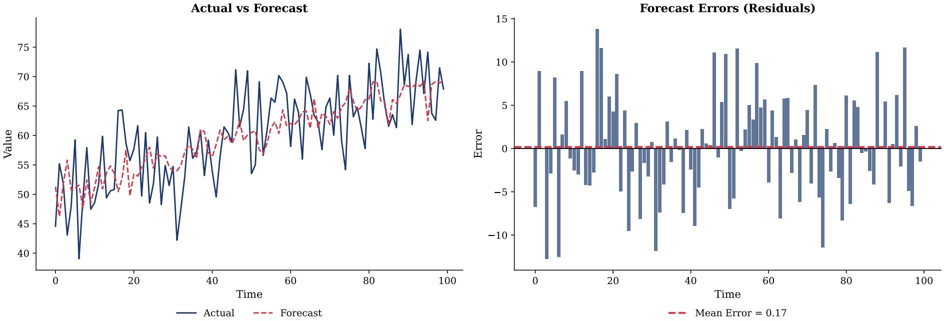
Independente de Scară:

- $\text{MAPE} = \frac{100}{n} \sum \left| \frac{e_t}{X_t} \right|$
- sMAPE (simetric)

Pe care să o folosim?

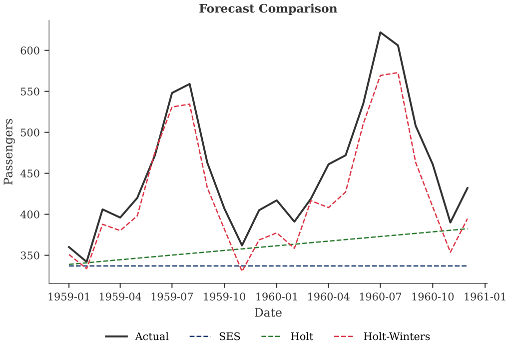
- Aceeași serie: RMSE, MAE
- Comparație între serii: MAPE, sMAPE

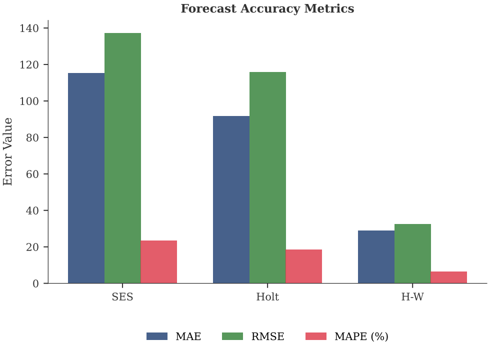
Evaluarea Prognozei: Exemplu Vizual



- **Sus**: Valori reale vs. valori prognozate – evaluare vizuală a potrivirii
- **Jos**: Reziduurile ar trebui să fie centrate în jurul lui zero fără tipar
- Prognozele bune au reziduuri mici, aleatorii cu varianță constantă

Compararea Metodelor de Prognoză





Stânga: Compararea prognozelor SES, Holt și Holt-Winters. **Dreapta:** Metrici de eroare pentru fiecare metodă.

Diagnosticarea Reziduurilor

Prognozele bune ar trebui să aibă reziduuri care sunt:

1. **Medie zero**: $\mathbb{E}[e_t] = 0$ (nebiasate)
2. **Necorelate**: $\text{Cov}(e_t, e_{t-k}) = 0$ pentru $k \neq 0$
3. **Variantă constantă**: $\text{Var}(e_t) = \sigma^2$ (homoscedastice)
4. **Distribuite normal**: $e_t \sim N(0, \sigma^2)$ (pentru intervale de predicție)

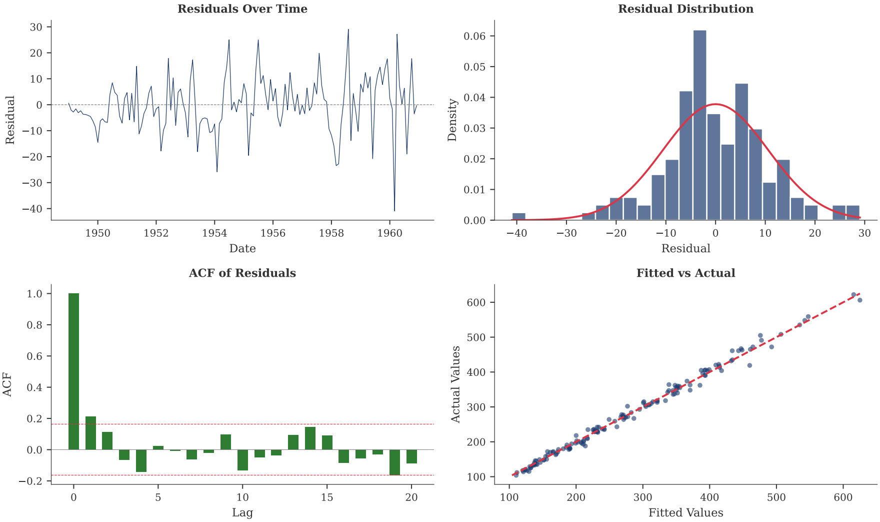
Teste de diagnostic:

- **Testul Ljung-Box**: Testează autocorelația în reziduuri

$$Q = T(T+2) \sum_{k=1}^{h} \frac{\hat{\rho}_k^2}{T-k} \sim \chi_h^2$$

- **Testul Jarque-Bera**: Testează normalitatea

Diagnosticarea Reziduurilor: Vizualizare

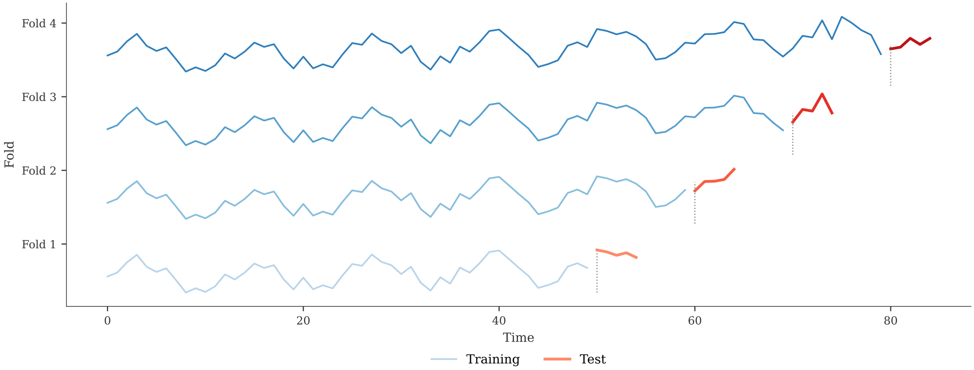


Validarea Încrucișată pentru Serii de Timp

CV standard nu funcționează pentru serii de timp (dependență temporală).

CV cu Origine Mobilă: Ferestre în expansiune

1. Antrenare pe $\{X_1, \ldots, X_t\}$, prognoză $\hat{X}_{t+h}$
2. Incrementare t, repetare



Separarea Train / Validare / Test

Separare în trei părți pentru dezvoltarea modelului:

Set de Antrenare

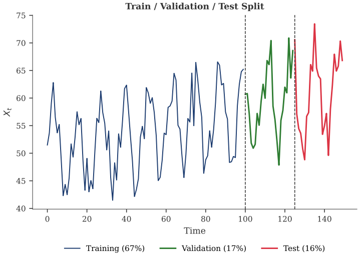
- Potrivirea parametrilor modelului
- Cea mai mare porțiune (60–80%)
- Folosit pentru estimare

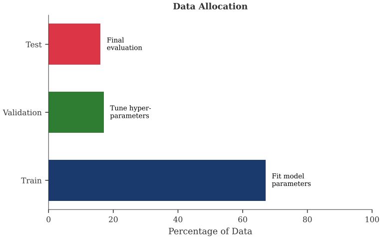
Set de Validare

- Ajustarea hiperparametrilor
- Compararea modelelor
- Selectarea celei mai bune abordări

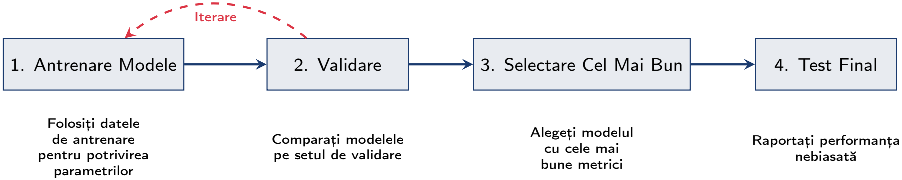
Set de Test

- Doar evaluare finală
- Niciodată folosit pentru ajustare
- Performanță nebiasată





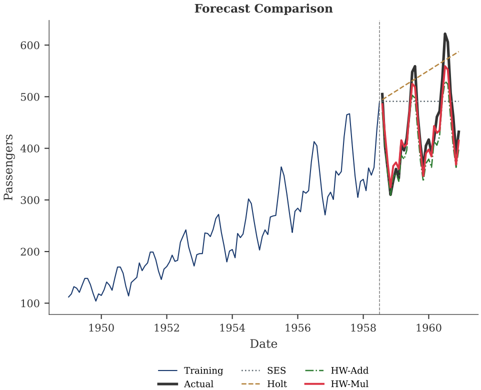
Fluxul de Lucru pentru Dezvoltarea Modelului

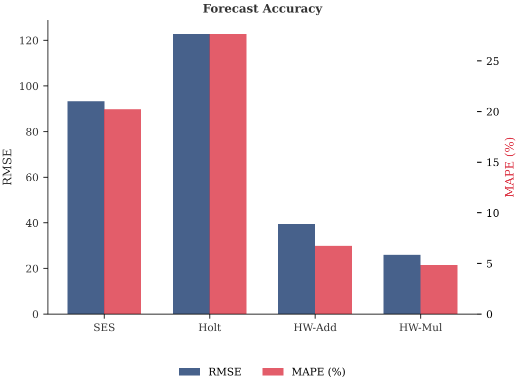


Regulă Critică

Niciodată nu folosiți setul de test pentru selecția modelului! Aceasta cauzează *scurgere de date* și estimări excesiv de optimiste ale performanței.

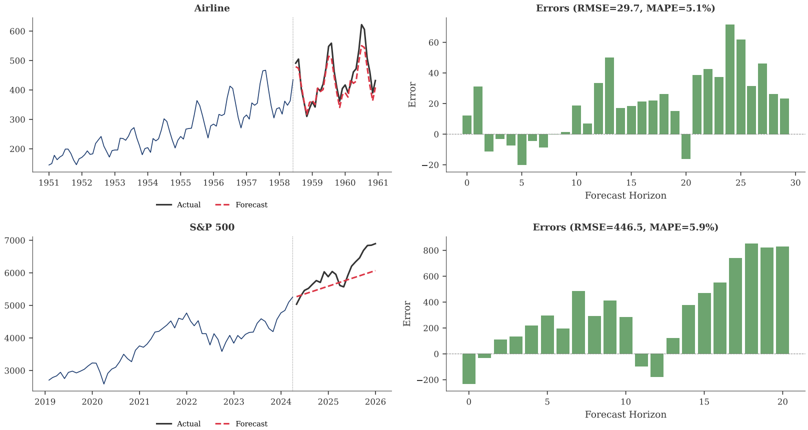
Date Reale: Compararea Prognozelor





Date pasageri aerieni: Holt-Winters Multiplicativ performează cel mai bine pentru date sezoniere.

Performanța Prognozei pe Diferite Seturi de Date



Serii diferite necesită modele diferite. Datele sezoniere au nevoie de metode sezoniere.

Modelarea Sezonalității: Două Abordări

1. Variabile Dummy:

$X_t = \mu + \sum_{j=1}^{s-1} \gamma_j D_{jt} + \varepsilon_t$

- $D_{jt} = 1$ dacă t în sezonul j
- $s - 1$ parametri
- Orice tipar sezonier

2. Termeni Fourier:

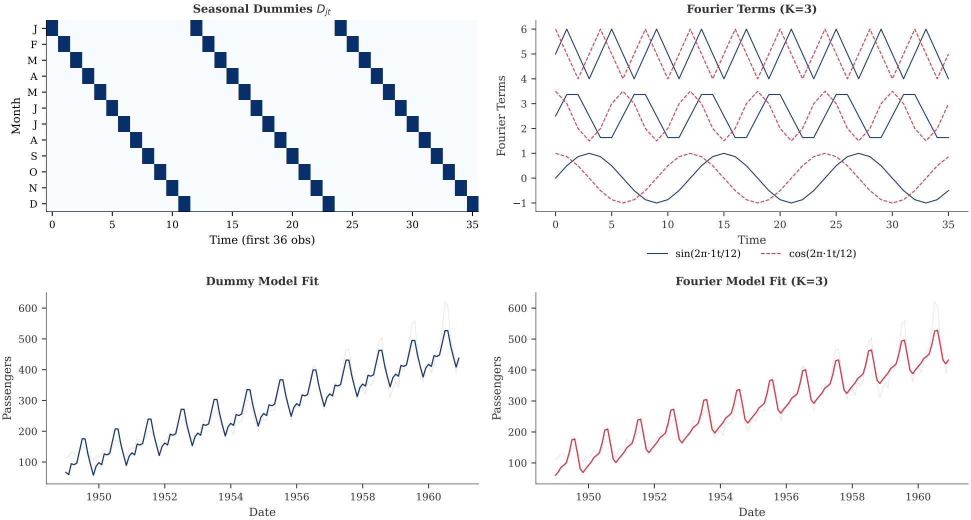
$X_t = \mu + \sum_{k=1}^{K} [\alpha_k \sin(\cdot) + \beta_k \cos(\cdot)]$

- Funcții sinusoidale
- $2K$ parametri
- Tipare netede

Compromis

Dummy: orice tipar, mai mulți parametri. Fourier: neted, mai puțini parametri.

Variabile Dummy vs Termeni Fourier



Alegerea între Dummy și Fourier

Criteriu	Dummy	Fourier
Parametri (lunar)	11	$2K$ (adesea 4–6)
Tipar sezonier	Orice formă	Neted/sinusoidal
Interpretare	Directă (efecte lunare)	Componente de frecvență
Sezoane de înaltă frecvență	Mulți parametri	Eficient
Sezonalitate multiplă	Complex	Ușor (adăugare termeni)

Ghiduri:

- Folosiți **dummy** când tiparul sezonier este neregulat sau aveți nevoie de coeficienți interpretabili
- Folosiți **Fourier** pentru tipare netede, sezonalitate de înaltă frecvență (zilnică, orară) sau perioade sezoniere multiple
- **Termenii Fourier** sunt folosiți în modelele TBATS și Facebook Prophet

De Ce Eliminăm Trendul și Sezonalitatea?

Înainte de modelare, adesea trebuie să facem seria staționară:

Motive pentru detrendare:

- Cerința de staționaritate
- Focus pe fluctuații
- Evitarea regresiei false
- Permiterea inferenței valide

Motive pentru desezonalizare:

- Dezvăluirea trendului subiacent
- Comparare între sezoane
- Simplificarea modelării
- Focus pe componenta neregulată

Important

După modelarea seriei detrendate/desezonalizate, trebuie să **inversăm transformarea** pentru prognoză.

Metode de Eliminare a Trendului

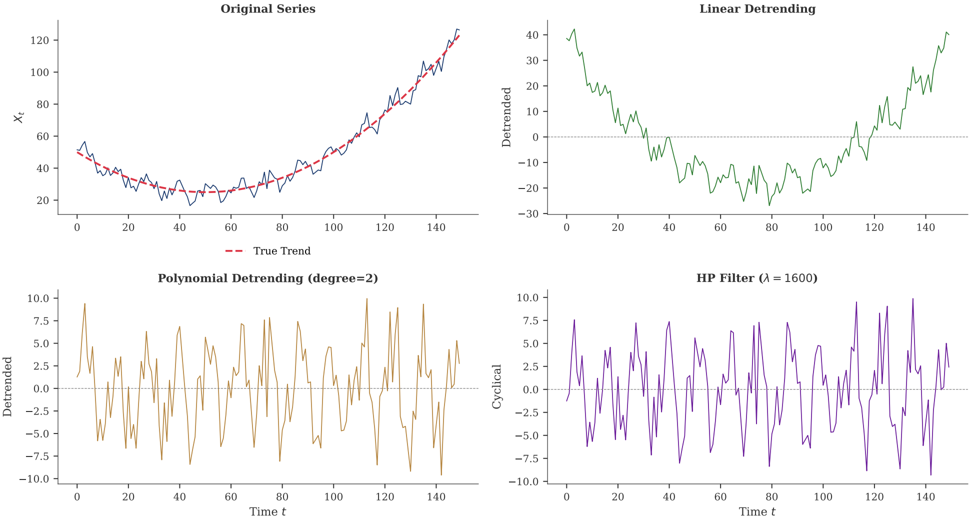
Șase abordări comune de detrendare:

1. **Diferențiere**: $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$
2. **Regresie liniară**: Potrivire $\hat{T}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t$
3. **Polinomială**: Potrivire polinom de ordin superior
4. **Filtru HP**: Echilibru între potrivire și netezime
5. **Media mobilă**: $\hat{T}_t = MA_q(X_t)$
6. **LOESS**: Regresie polinomială locală

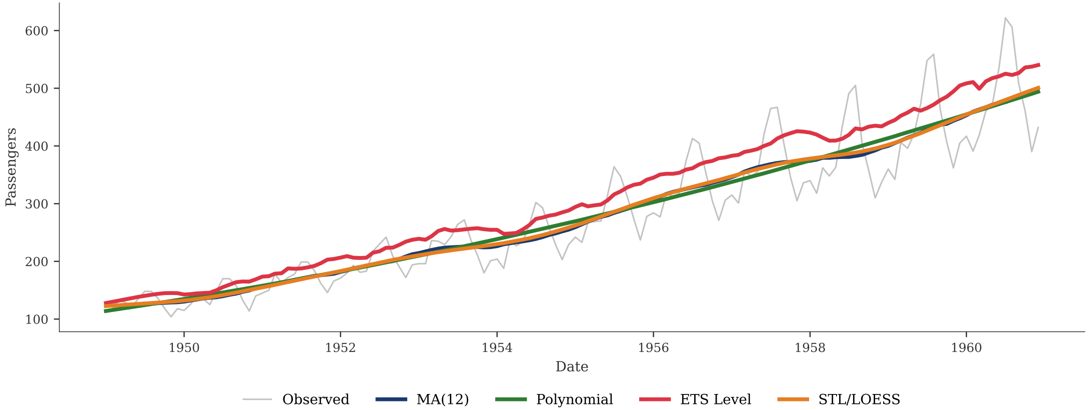
Alegerea depinde de:

- Natura trendului (determinist vs stocastic)
- Scopul (prognoză vs analiză)

Metode de Detrendare: Comparație



Estimarea Trendului: Abordări Multiple



Metodele diferite captează trendul la niveluri variate de netezime.

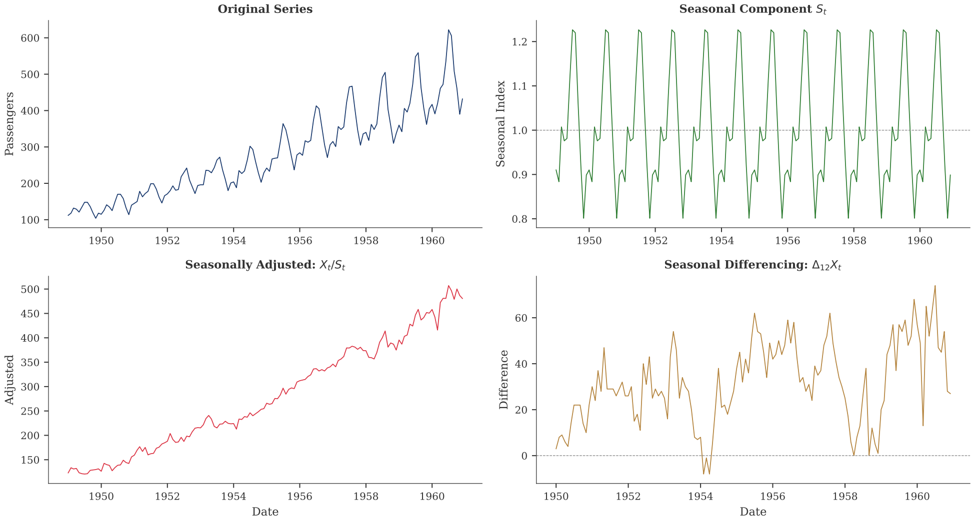
Metode de Eliminare a Sezonalității

Patru abordări pentru eliminarea sezonalității:

1. **Diferențiere sezonieră**: $\Delta_s X_t = X_t - X_{t-s}$
2. **Împărțire** (multiplicativ): $X_t^{adj} = X_t / \hat{S}_t$
3. **Scădere** (aditiv): $X_t^{adj} = X_t - \hat{S}_t$
4. **X-13ARIMA-SEATS**: Metodă statistică guvernamentală

Perioada sezonieră s: Lunar $\Rightarrow s = 12$; Trimestrial $\Rightarrow s = 4$

Ajustare Sezonieră: Vizualizare



Trend Determinist vs Stocastic

Trend Determinist:

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$$

- Trendul este o funcție de timp
- Detrendare prin regresie
- ε_t este staționar

Trend Stocastic:

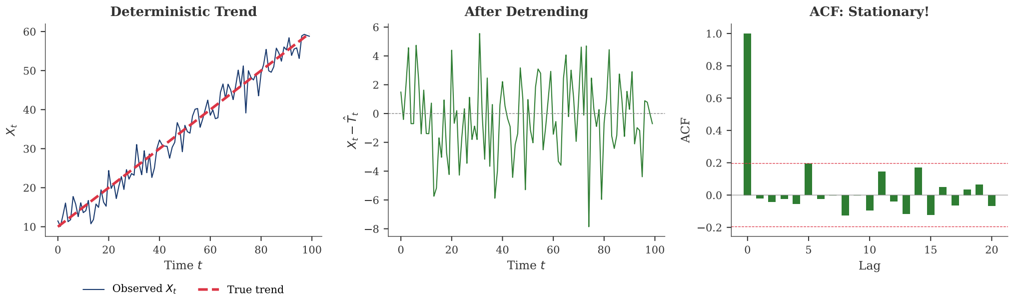
$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Componentă de mers aleatoriu
- Detrendare prin diferențiere
- ΔX_t este staționar

Metoda Greșită = Probleme

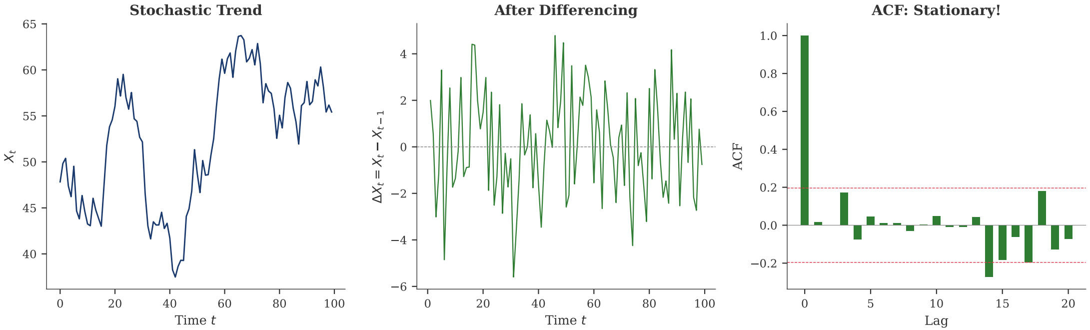
- Diferențierea trendului determinist $\Rightarrow$ supra-diferențiere
- Regresie pe trend stocastic $\Rightarrow$ regresie falsă

Exemplu: Trend Determinist



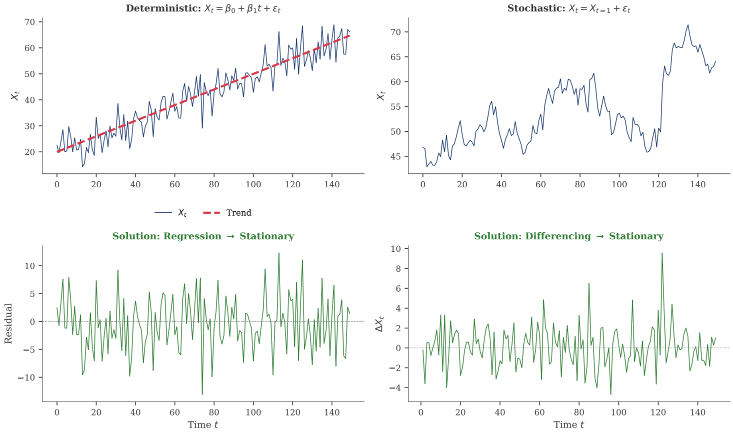
Cheie: Folosiți regresia pentru a elimina trendul → reziduurile sunt staționare (ACF scade rapid).

Exemplu: Trend Stocastic (Mers Aleatoriu)



Cheie: Folosiți diferențierea pentru a elimina trendul → diferențele sunt staționare (zgomot alb).

Comparație Alăturată



Rețineți: Determinist → regresie. Stocastic → diferențiere.

Proces Stocastic: Definiție

Definiție 5 (Proces Stocastic)

Un **proces stocastic** este o colecție de variabile aleatoare indexate după timp:

$$\{X_t(\omega) : t \in \mathcal{T}, \omega \in \Omega\}$$

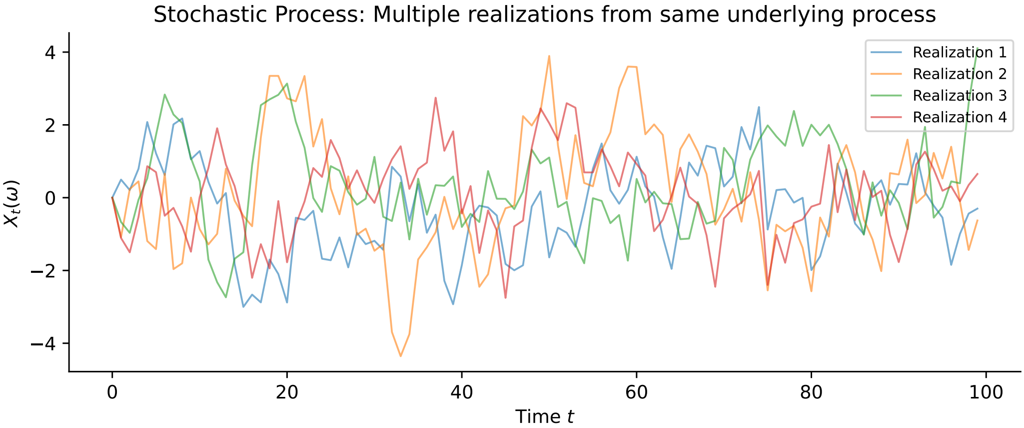
unde Ω este spațiul de selecție al rezultatelor posibile.

Două perspective:

- ω **fix**: O *realizare* sau *traiectorie de selecție* $\{X_t(\omega)\}_{t\in\mathcal{T}}$
- t **fix**: O *variabilă aleatoare* X_t cu distribuția $F_t(x)$

Observație cheie: O serie de timp pe care o observăm este **o realizare** a procesului stocastic subiacent. Folosim această singură realizare pentru a deduce proprietățile procesului.

Proces Stocastic: Ilustrație Vizuală



Fiecare linie este o realizare diferită din același proces stocastic subiacent. Observăm doar o realizare dar vrem să înțelegem procesul.

Momentele unui Proces Stocastic

Primele două momente caracterizează proprietățile slabe:

Funcția de Medie: $\mu_t = \mathbb{E}[X_t]$

Funcția de Autocovarianță (ACVF):

$$\gamma(t, s) = \mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \mathbb{E}[(X_t - \mu_t)(X_s - \mu_s)]$$

Funcția de Autocorelație (ACF):

$$\rho(t, s) = \frac{\gamma(t, s)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_t) \cdot \mathrm{Var}(X_s)}}$$

Proprietăți: $\rho(t, s) \in [-1, 1]$ și $\rho(t, t) = 1$

De Ce Contează Staționaritatea

Staționaritatea este o ipoteză fundamentală pentru analiza seriilor de timp:

Fără Staționaritate:

- Media, varianța se schimbă în timp
- Trecutul poate să nu prezică viitorul
- Metodele standard eșuează
- Corelații false

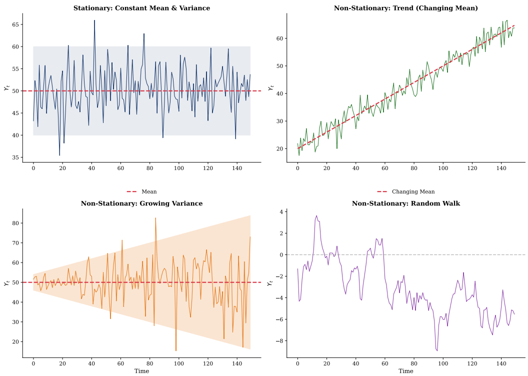
Cu Staționaritate:

- Proprietăți statistice constante
- Putem estima din o singură realizare
- Inferență validă posibilă
- Modelele sunt semnificative

Principiu Cheie

Majoritatea modelelor de serii de timp (ARMA, ARIMA, etc.) necesită staționaritate. Seriile nestaționare trebuie transformate (de ex., diferențiere) înainte de modelare.

Staționar vs Nestaționar: Comparație Vizuală



- **Staționar**: Medie și varianță constante – fluctuează în jurul unui nivel fix
- **Nestaționar**: Media și/sau varianța se schimbă în timp
- Inspecția vizuală este primul pas; testele formale (ADF, KPSS) confirmă

Staționaritate Strictă

Definiție 6 (Staționaritate Strictă (Puternică))

Un proces $\{X_t\}$ este **strict staționar** dacă pentru toți k, toți $t_1, \ldots, t_k$ și toți h:

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \ldots, X_{t_k+h})$$

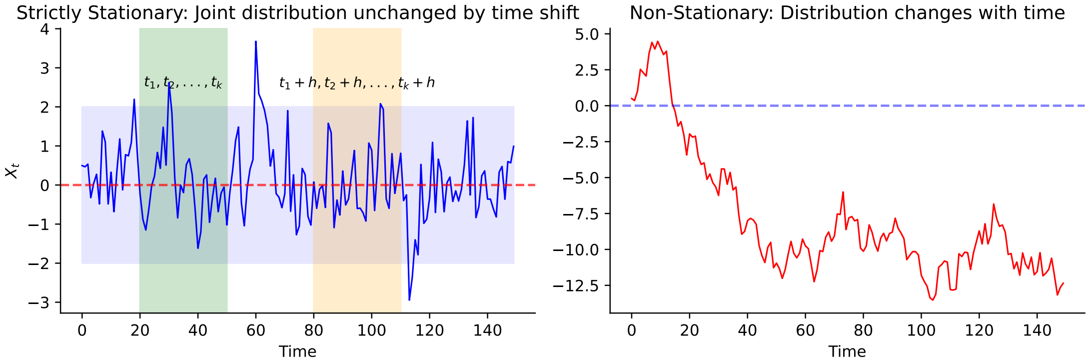
Interpretare: Distribuția comună a oricărei colecții de observații este **invariantă la deplasări temporale**.

Implicații:

- Toate distribuțiile marginale $F_{X_t}(x)$ sunt identice
- $\mathbb{E}[X_t] = \mu$ (medie constantă)
- $\text{Var}(X_t) = \sigma^2$ (varianță constantă)
- Distribuțiile comune depind doar de *diferențele* temporale

Notă: Staționaritatea strictă este o condiție puternică, adesea impractică de verificat.

Staționaritate Strictă: Ilustrație Vizuală



Staționar: oricare două ferestre au aceeași distribuție comună. Nestaționar: distribuția se schimbă în timp.

Staționaritate Slabă (de Covarianță)

Definiție 7 (Staționaritate Slabă)

Un proces $\{X_t\}$ este **slab staționar** (sau staționar de covarianță) dacă:

1. $\mathbb{E}[X_t] = \mu$ (medie constantă)
2. $\text{Var}(X_t) = \sigma^2 < \infty$ (varianță constantă, finită)
3. $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$ (covarianța depinde doar de lag-ul h)

Proprietate cheie: Autocovarianța este o funcție doar de lag:

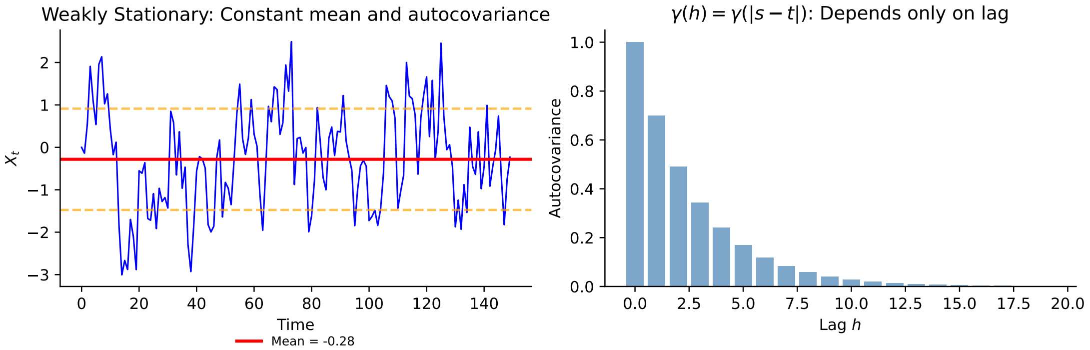
$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \mathbb{E}[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)]$$

Funcția de autocorelație:

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t+h})}{\text{Var}(X_t)}$$

Notă: $\rho(0) = 1$ și $\rho(h) = \rho(-h)$ (simetrie)

Staționaritate Slabă: Ilustrație Vizuală



Stânga: medie și varianță constante. Dreapta: autocovarianța depinde doar de lag-ul h, nu de timpul t.

Proprietățile Funcției de Autocovarianță

Pentru un proces slab staționar, ACVF $\gamma(h)$ satisface:

1. **Simetrie:** $\gamma(h) = \gamma(-h)$
2. **Maxim la zero:** $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$
3. **Definit nenegativ**

Implicație: Nu orice funcție poate fi o funcție de autocovarianță.

Procesul de Zgomot Alb

Definiție 8 (Zgomot Alb)

Un proces $\{\varepsilon_t\}$ este **zgomot alb**, notat $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, dacă:

1. $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$ pentru toți t
2. $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$ pentru toți t
3. $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ pentru $t \neq s$

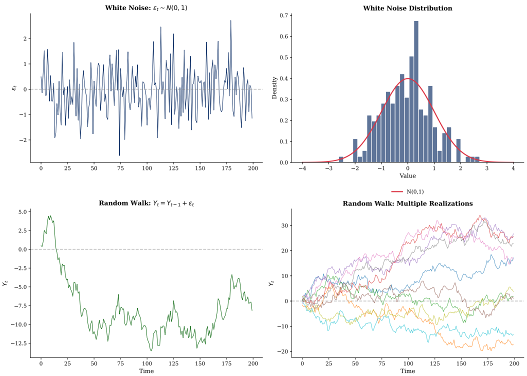
ACF al Zgomotului Alb:

$$\rho(h) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } h = 0 \\ 0 & \text{dacă } h \neq 0 \end{cases}$$

Tipuri:

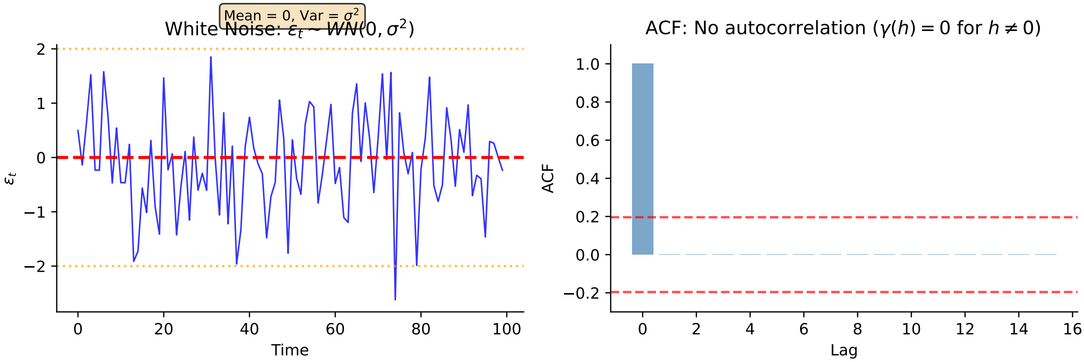
- **Zgomot alb slab**: Necorelat (condițiile de mai sus)
- **Zgomot alb puternic**: Independent și identic distribuit (i.i.d.)
- **Zgomot alb Gaussian**: $\varepsilon_t \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$

Zgomot Alb vs Mers Aleatoriu: Comparație



- **Zgomot alb**: Fluctuează în jurul lui zero – staționar, varianță constantă
- **Mers aleatoriu**: Suma cumulativă a zgomotului alb – rătăcește, nestaționar
- Mersul aleatoriu este cel mai simplu proces nestaționar (rădăcină unitate)

Zgomot Alb: Ilustrație Vizuală



Stânga: zgomotul alb fluctuează în jurul lui zero cu varianță constantă. Dreapta: ACF arată nicio autocorelație (toate zero după lag 0).

Procesul de Mers Aleatoriu

Definiție: $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$ unde $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, $X_0 = 0$

Forma explicită: $X_t = \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$

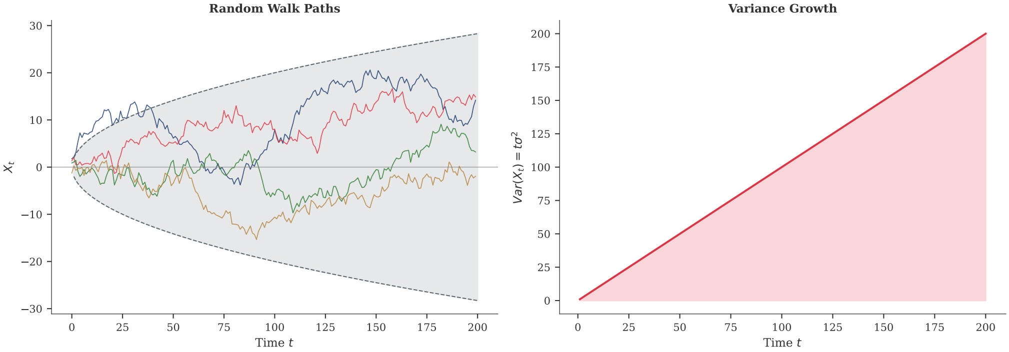
Proprietăți:

- $\mathbb{E}[X_t] = 0$ (medie constantă)
- $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$ (varianța crește în timp!)
- $\text{Cov}(X_t, X_s) = \min(t, s) \cdot \sigma^2$

Nestaționar!

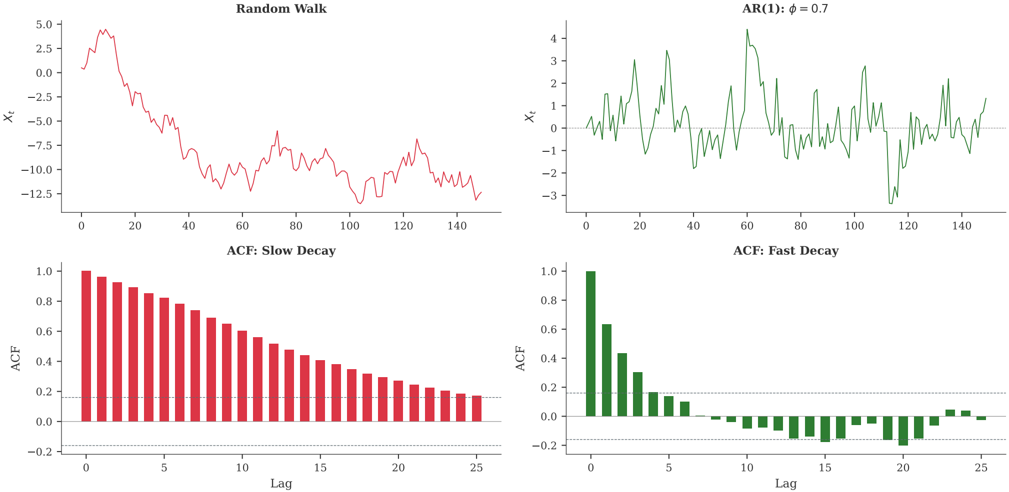
Mersul aleatoriu **nu este staționar** deoarece varianța depinde de t.

Mers Aleatoriu: Vizualizare



Stânga: Traiectorii multiple divergă în timp. **Dreapta:** Varianța crește liniar: $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$.

Staționar vs Nestaționar: Comparație



Diagnostic cheie: ACF al procesului staționar scade rapid; ACF al mersului aleatoriu scade foarte lent.

Funcția de Autocorelație din Eșantion

ACF din eșantion la lag-ul h:

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\sum_{t=1}^{T-h}(x_t - \bar{x})(x_{t+h} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2}$$

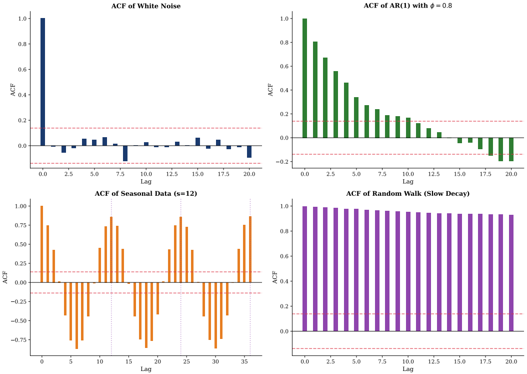
Proprietăți:

- $\hat{\rho}(0) = 1$ întotdeauna
- $|\hat{\rho}(h)| \leq 1$

Test de semnificație: Sub zgomot alb, $\hat{\rho}(h) \approx N(0, 1/T)$

Limite 95%: $\pm 1.96/\sqrt{T}$

Tipare ACF pentru Diferite Procese



- **Zgomot alb**: ACF scade la zero imediat (nicio dependență)
- **AR(1)**: ACF scade exponențial – indică structură autoregresivă
- **Sezonier**: ACF arată vârfuri la lag-uri sezoniere (de ex., 12, 24 pentru lunar)
- **Mers aleatoriu**: ACF scade foarte lent – semn de nestaționaritate

Funcția de Autocorelație Parțială (PACF)

PACF ϕ_{hh}: Corelația dintre X_t și X_{t+h} după eliminarea efectului liniar al $X_{t+1}, \ldots, X_{t+h-1}$.

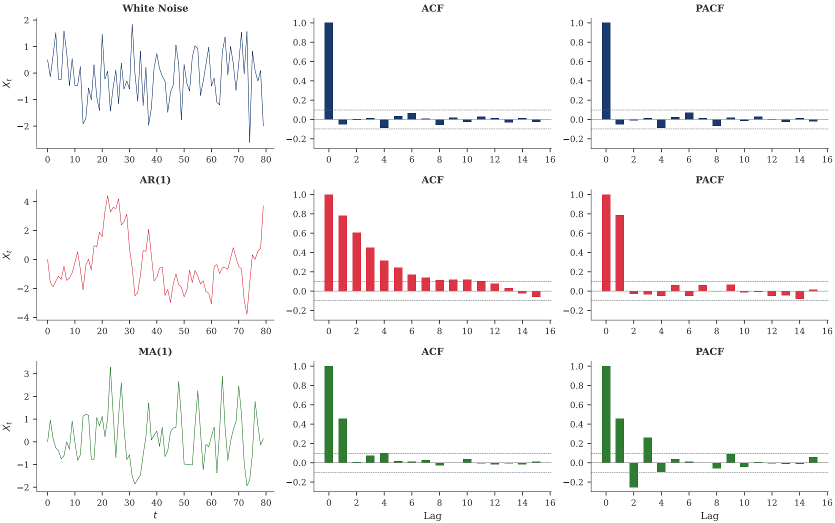
Interpretare:

- $\phi_{11} = \rho(1)$ (același ca ACF la lag 1)
- $\phi_{22} =$ corelația lui X_t, X_{t+2} controlând pentru X_{t+1}
- Măsoară dependența *directă* la lag-ul h

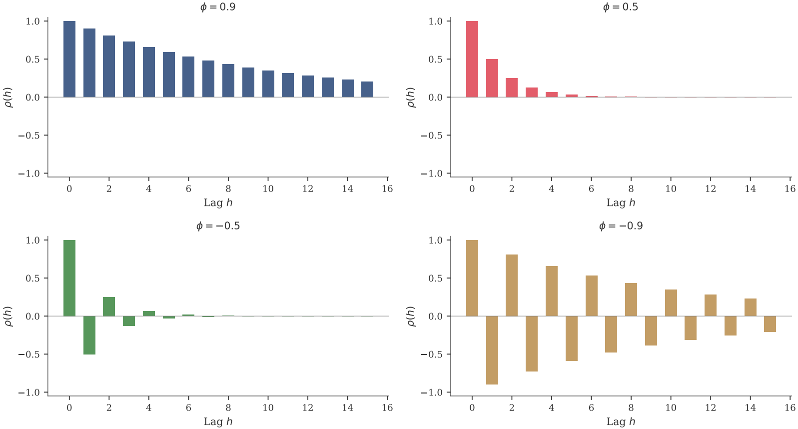
Aplicație cheie: Identificarea ordinului AR

- Pentru AR(p): PACF **se întrerupe** după lag-ul p
- Pentru MA(q): ACF **se întrerupe** după lag-ul q

Tipare ACF și PACF



ACF Teoretic pentru AR(1)



Pentru AR(1): $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$, ACF teoretic este $\rho(h) = \phi^h$.

Operatorul Lag

Definiție 9 (Operatorul Lag)

Operatorul lag (sau operatorul de întârziere) L este definit prin:

$$LX_t = X_{t-1}$$

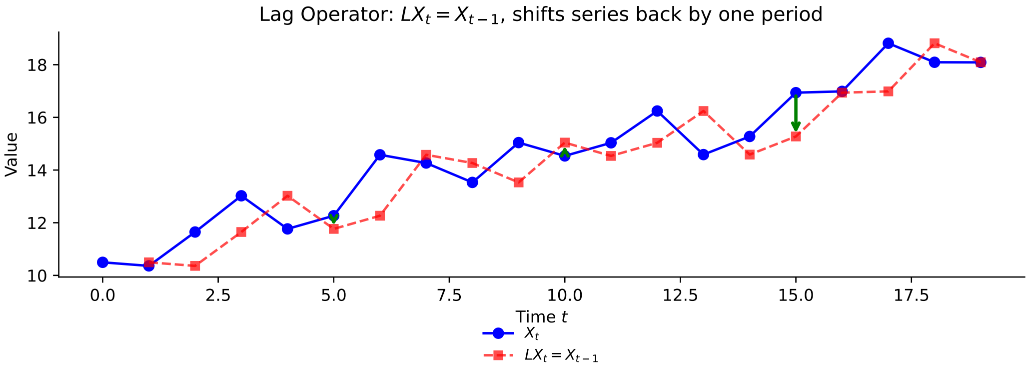
Proprietăți:

- $L^k X_t = X_{t-k}$ (întârziere cu k perioade)
- $L^0 = I$ (identitate)
- $(1 - \phi L)X_t = X_t - \phi X_{t-1}$

Exemple:

- AR(1): $(1 - \phi L)X_t = \varepsilon_t$
- MA(1): $X_t = (1 + \theta L)\varepsilon_t$
- AR(p): $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p)X_t = \varepsilon_t$

Operatorul Lag: Ilustrație Vizuală



Operatorul lag L deplasează fiecare observație înapoi cu o perioadă de timp: $LX_t = X_{t-1}$.

Diferențierea

Prima diferență: $\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = (1 - L)X_t$

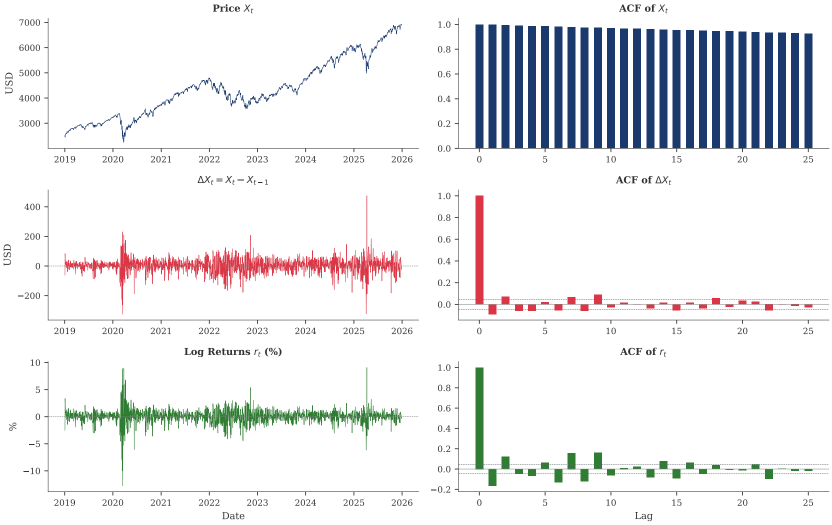
De ce diferențiem?

- Elimină trendul și rădăcina unitate
- Mers aleatoriu: $\Delta X_t = \varepsilon_t$ (zgomot alb)

Proces integrat: $X_t \sim I(d)$ dacă $\Delta^d X_t$ este staționar

- $I(0)$: Staționar (nu necesită diferențiere)
- $I(1)$: Necesită o diferențiere
- $I(2)$: Necesită două diferențieri

Efectul Diferențierii: S&P 500



Testul Augmented Dickey-Fuller (ADF)

Model: $\Delta X_t = \alpha + \gamma X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \delta_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t$

Ipoteze:

- H_0: $\gamma = 0$ (rădăcină unitate)
- H_1: $\gamma < 0$ (staționar)

Decizie:

- $\tau <$ valoare critică $\Rightarrow$ Respingem H_0 $\Rightarrow$ Staționar
- $\tau \geq$ valoare critică $\Rightarrow$ Nestaționar

Valori critice: distribuția Dickey-Fuller (nu normală)

Statistica de test:

$$\tau = \frac{\hat{\gamma}}{SE(\hat{\gamma})}$$

Testul KPSS

Model: $X_t = \xi t + r_t + \varepsilon_t$ unde $r_t = r_{t-1} + u_t$

Ipoteze (opuse față de ADF):

- H_0: $\sigma_u^2 = 0$ (staționar)
- H_1: $\sigma_u^2 > 0$ (rădăcină unitate)

Statistica de test:

$$LM = \frac{\sum_{t=1}^{T} S_t^2}{T^2 \hat{\sigma}^2}$$

unde $S_t = \sum_{i=1}^{t} \hat{e}_i$

Decizie:

- $LM >$ valoare critică $\Rightarrow$ Respingem H_0 $\Rightarrow$ Nestaționar
- $LM \leq$ valoare critică $\Rightarrow$ Staționar

Notă: KPSS complementează ADF—folosiți ambele pentru concluzii robuste.

Folosirea ADF și KPSS Împreună

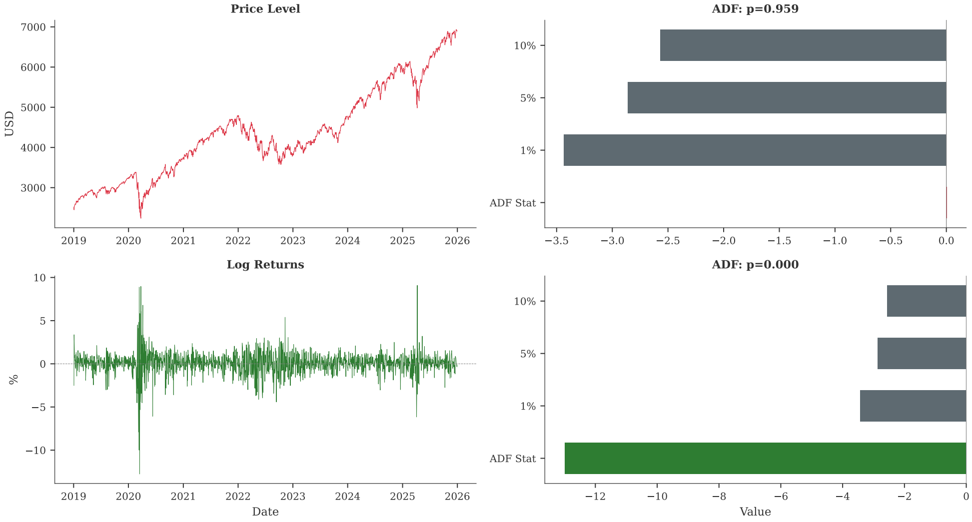
Testare confirmatorie pentru concluzii robuste:

ADF	KPSS	Concluzie
Respingem H_0	Nu respingem H_0	Staționar
Nu respingem H_0	Respingem H_0	Rădăcină Unitate
Respingem H_0	Respingem H_0	Neconcludent
Nu respingem H_0	Nu respingem H_0	Neconcludent

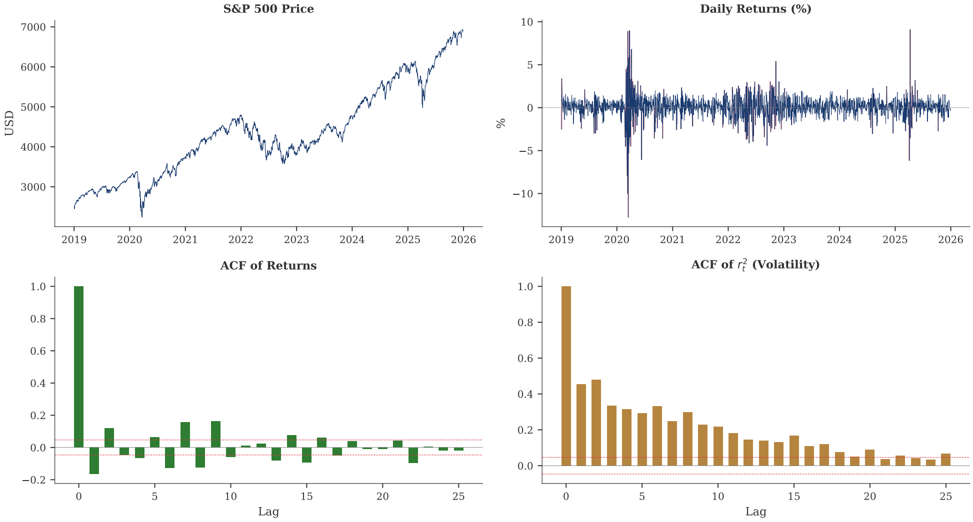
Flux de lucru recomandat:

1. Rulați testul ADF (nulă = rădăcină unitate)
2. Rulați testul KPSS (nulă = staționar)
3. Dacă rezultatele coincid, procedați cu încredere
4. Dacă neconcludent, considerați teste alternative (PP, DF-GLS)

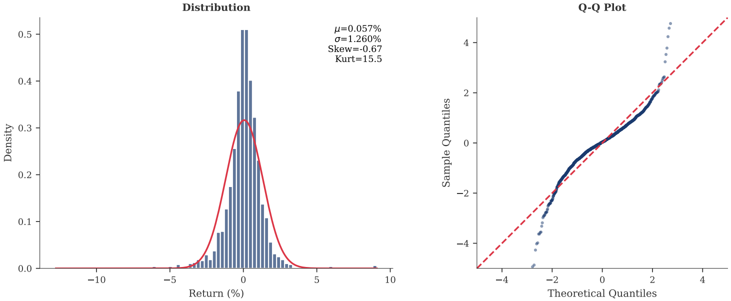
Testul ADF: Vizualizare cu S&P 500



Analiza S&P 500: Prezentare Generală



Fapte Stilizate ale Randamentelor Financiare



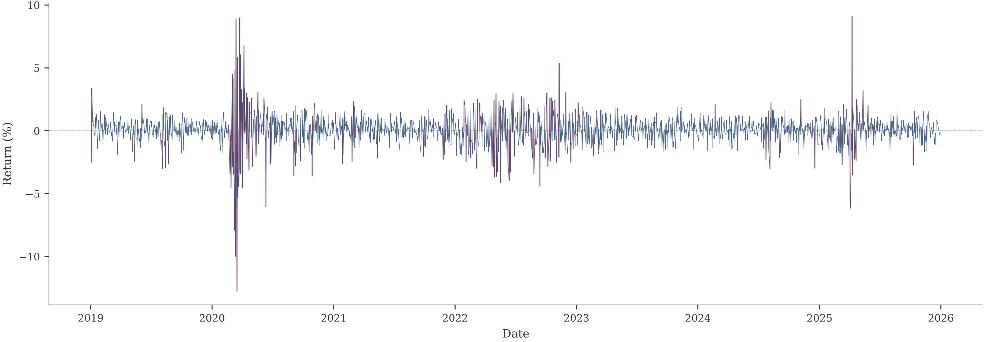
Proprietăți observate:

- Asimetrie negativă (coadă stângă)
- Kurtoză excesivă ($\gg 3$)
- Cozi groase (heavy tails)

Implicații:

- Distribuția normală inadecvată
- Evenimente extreme mai probabile
- Necesită distribuție Student-t sau similară

Gruparea Volatilității



Fapt Stilizat

Randamentele mari (pozitive sau negative) tind să fie urmate de randamente mari. Această **grupare a volatilității** motivează modelele ARCH/GARCH (capitolele viitoare).

Concluzii Cheie

1. **Serie de timp** = observații indexate după timp cu dependență temporală
2. **Descompunere**: Aditivă $X_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$ sau Multiplicativă
3. **Netezire Exponențială**: SES (nivel), Holt (trend), Holt-Winters (sezonier)
4. **Evaluare Prognoză**: MAE, RMSE, MAPE; folosiți separări train/validare/test
5. **Modelarea Sezonalității**: Variabile dummy (orice tipar) sau termeni Fourier (neted)
6. **Gestionarea Trendului**: Diferențiere (stocastic) sau regresie (determinist)
7. **Staționaritate**: Media, varianța, autocovarianța constante în timp
8. **ACF/PACF**: Esențiale pentru identificarea structurii de dependență
9. **Teste rădăcină unitate**: ADF (H_0: rădăcină unitate) vs KPSS (H_0: staționar)

Formule Importante I

Descompunere

Aditivă: $X_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$ Multiplicativă: $X_t = T_t \times S_t \times \varepsilon_t$

Netezire Exponențială Simplă (SES)

$\hat{X}_{t+1|t} = \alpha X_t + (1-\alpha)\hat{X}_{t|t-1}$ unde $\alpha \in (0,1)$

Trend Liniar Holt

$\ell_t = \alpha X_t + (1-\alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1})$ $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1-\beta^*)b_{t-1}$

Holt-Winters Aditivă

$\ell_t = \alpha(X_t - S_{t-s}) + (1-\alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1})$ $S_t = \gamma(X_t - \ell_t) + (1-\gamma)S_{t-s}$

Formule Importante II

Media Mobilă (Estimare Trend)

$\hat{T}_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^{q} X_{t+j}$

Autocovarianță și Autocorelație

$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) \qquad \rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$

Mers Aleatoriu

$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \quad \Rightarrow \quad \text{Var}(X_t) = t\sigma^2$ (nestaționar)

Diferențiere

$\Delta X_t = (1 - L)X_t = X_t - X_{t-1}$

Previzualizare Capitolul Următor

Capitolul 2: Modele ARMA

- Modele Autoregresive (AR)
- Modele de Medie Mobilă (MA)
- Modele ARMA combinate
- Identificarea modelului folosind ACF/PACF
- Estimarea parametrilor
- Diagnosticarea modelului
- Prognoza

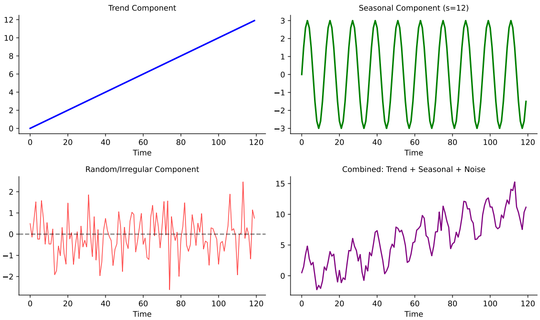
Întrebarea Quiz 1

Întrebare

O serie de timp Y_t arată mișcare ascendentă de-a lungul anilor plus tipare repetitive în fiecare trimestru. Ce componente sunt prezente?

- A Doar trend
- B Doar sezonalitate
- C Trend și Sezonalitate
- D Doar zgomot aleatoriu

Întrebarea Quiz 1: Răspuns



Răspuns Corect: (C) Trend și Sezonalitate

Mișcare ascendentă = Trend; Tipare trimestriale = Sezonalitate (s=4)

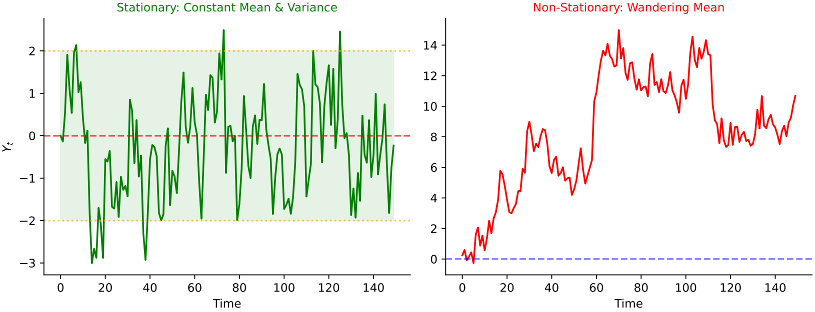
Întrebarea Quiz 2

Întrebare

Care dintre următoarele este o caracteristică a unei serii de timp staționare?

- A. Media se schimbă în timp
- B. Varianța crește în timp
- C. Medie și varianță constante în timp
- D. Conține o componentă de trend

Întrebarea Quiz 2: Răspuns



Răspuns Corect: (C) Medie și varianță constante în timp

Staționaritatea necesită: medie constantă, varianță constantă și autocovarianța depinde doar de lag.

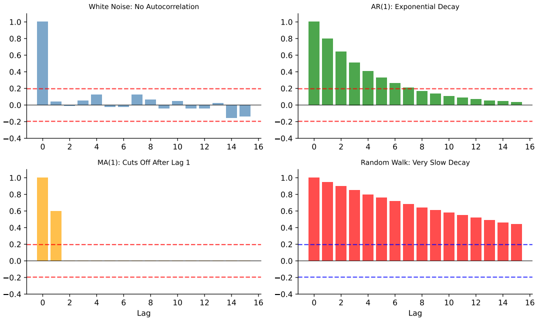
Întrebarea Quiz 3

Întrebare

Pentru un proces de zgomot alb, cum arată ACF la lag-uri $k > 0$?

- A. Descreștere exponențială
- B. Toate valorile semnificative și pozitive
- C. Toate valorile aproximativ zero (în interiorul benzilor de încredere)
- D. Alternare pozitiv și negativ

Întrebarea Quiz 3: Răspuns



Răspuns Corect: (C) Aproximativ zero în interiorul benzilor de încredere

Zgomotul alb nu are autocorelație: $\rho_k = 0$ pentru toți $k \neq 0$.

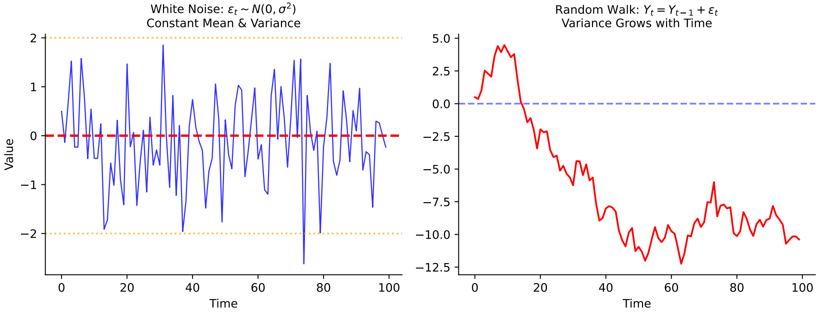
Întrebarea Quiz 4

Întrebare

Care este diferența cheie între zgomotul alb și mersul aleatoriu?

- A Zgomotul alb are trend, mersul aleatoriu nu
- B Mersul aleatoriu este suma cumulativă a zgomotului alb
- C Ambele sunt procese staționare
- D Zgomotul alb are varianță mai mare

Întrebarea Quiz 4: Răspuns



Răspuns Corect: (B) Mers aleatoriu = suma cumulativă a zgomotului alb

$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t = \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$ unde ε_t este zgomot alb.

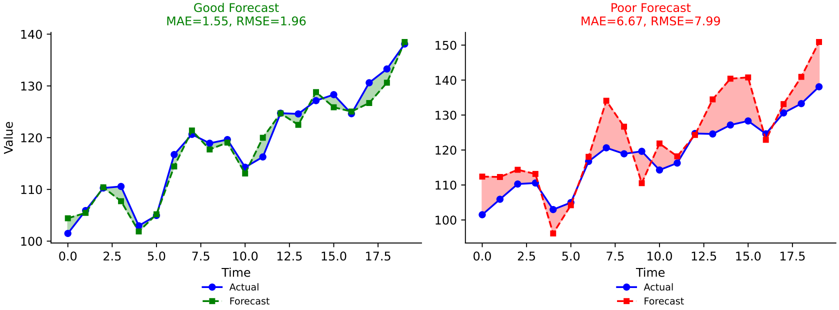
Întrebarea Quiz 5

Întrebare

Care metrică de eroare a prognozei este cea mai sensibilă la erori mari (valori aberante)?

- A. MAE (Eroarea Medie Absolută)
- B. RMSE (Rădăcina Erorii Medii Pătratice)
- C. MAPE (Eroarea Medie Absolută Procentuală)
- D. Toate sunt la fel de sensibile

Întrebarea Quiz 5: Răspuns



Răspuns Corect: (B) RMSE

RMSE ridică la pătrat erorile, deci erorile mari au impact disproporționat: $\sqrt{\frac{1}{n}\sum e_t^2}$

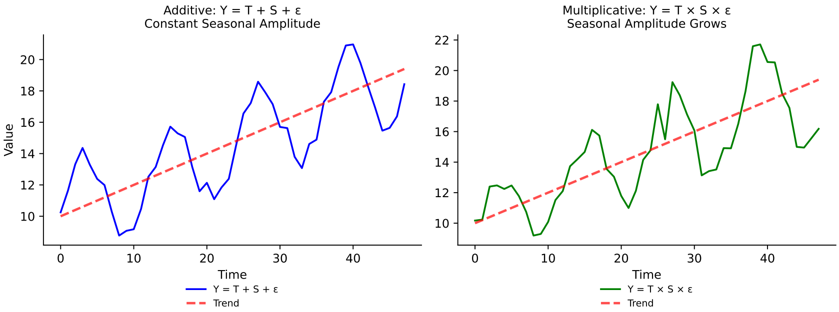
Întrebarea Quiz 6

Întrebare

Când ar trebui să folosiți descompunerea multiplicativă în loc de cea aditivă?

- A. Când seria nu are trend
- B. Când amplitudinea sezonieră este constantă
- C. Când amplitudinea sezonieră crește odată cu nivelul seriei
- D. Când seria este staționară

Întrebarea Quiz 6: Răspuns



Răspuns Corect: (C) Amplitudinea sezonieră crește odată cu nivelul

Multiplicativă: $Y_t = T_t \times S_t \times \varepsilon_t$ — oscilațiile sezoniere proporționale cu trendul.

Referințe

Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*. 3rd ed., OTexts.

Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.

Box, G.E.P., Jenkins, G.M., Reinsel, G.C., & Ljung, G.M. (2015). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. 5th ed., Wiley.

Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*. 3rd ed., Wiley.

Cleveland, R.B., Cleveland, W.S., McRae, J.E., & Terpenning, I. (1990). STL: A Seasonal-Trend Decomposition. *Journal of Official Statistics*, 6(1), 3-73.

Surse de Date

Date Reale Utilizate în Acest Capitol

- **Pasageri Aviație**: Set de date clasic Box-Jenkins, 1949–1960
- **S&P 500**: Yahoo Finance (SPY), date istorice
- **Pete Solare**: Set de date Statsmodels, observații lunare

Software și Instrumente

- **Python**: statsmodels, pandas, matplotlib, yfinance
- **R**: pachetele forecast, tseries
- **Surse de Date**: Yahoo Finance, FRED Economic Data

Vă Mulțumesc!

Întrebări?

Grafice generate folosind Python (statsmodels, matplotlib)

Materiale curs disponibile la: `https://github.com/danpele/Time-Series-Analysis`