Capitolul 5: Modele VAR & Cauzalitate Granger

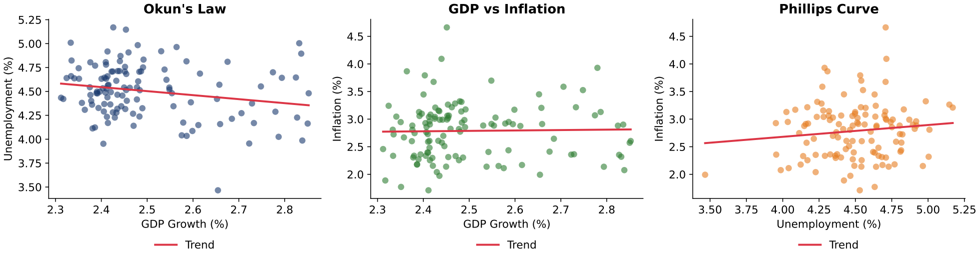
Serii de Timp Multivariate

Cuprins

Exemplu motivațional: Dinamica macroeconomică

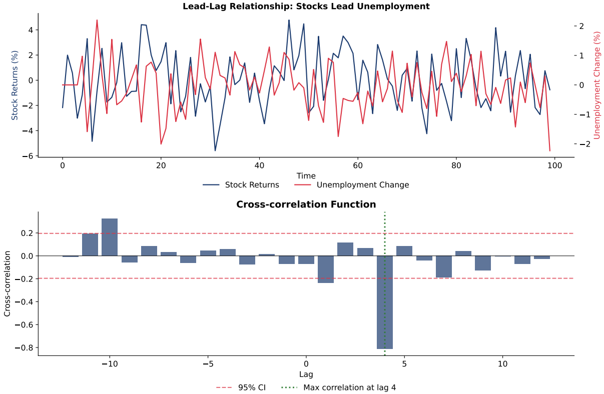
- Variabilele economice sunt **interconectate**: PIB afectează șomajul, inflația afectează ratele dobânzilor
- Modificările unei variabile se **propagă** prin sistem
- Înțelegerea acestor dinamici necesită analiza **multivariată**

Ideea cheie: Variabilele interacționează



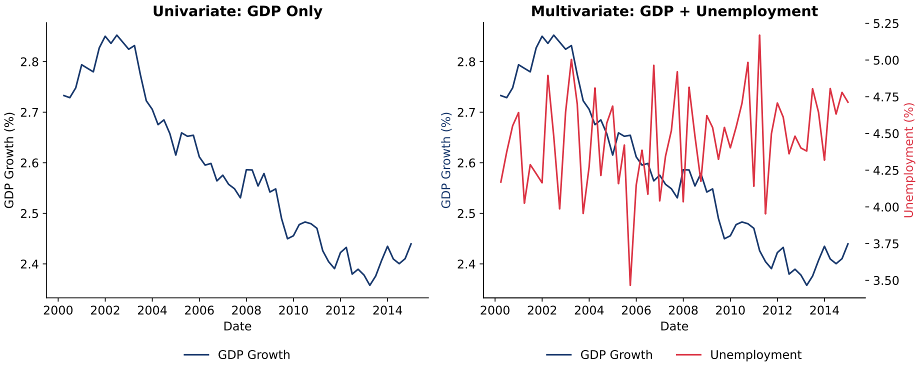
- **Legea lui Okun**: Creștere PIB mai mare ⇒ șomaj mai mic
- **Regula Taylor**: Inflație mai mare ⇒ rate ale dobânzii mai mari
- **Curba Phillips**: Compromis șomaj-inflație

Relații de avans-întârziere



- Unele variabile **preced** altele: piața bursieră prezice activitatea economică
- Corelația încrucișată relevă **sincronizarea** relațiilor
- Corelație maximă la lag-ul 4: piața bursieră precede șomajul cu $\sim$4 luni

De ce modelele univariate nu sunt suficiente



Problema

Modelele ARIMA tratează fiecare variabilă **izolat**—ignorând informații valoroase din alte variabile!

Soluția

Modelele VAR captează dinamica comună și efectele de feedback dintre mai multe serii de timp.

Ce vom învăța astăzi

Concepte fundamentale

1. **Modele VAR**: Cum să modelăm mai multe serii de timp împreună
2. **Cauzalitate Granger**: Ajută X la prezicerea lui Y?
3. **Funcții de răspuns la impuls**: Cum se propagă șocurile?
4. **Descompunerea varianței**: Ce determină fiecare variabilă?

Aplicații

- Analiza politicii macroeconomice (efectele politicii monetare)
- Dinamica piețelor financiare (relații acțiuni-obligațiuni)
- Analiza ciclului de afaceri (indicatori avansați)
- Managementul riscului (transmisia volatilității)

De ce analiza multivariată?

Limitările modelelor univariate

- Modelele ARIMA tratează fiecare variabilă **izolat**
- Ignoră potențialele **interacțiuni** între variabile
- Nu pot captura **efectele de feedback**

Exemple economice de interdependență

- PIB și șomaj (legea lui Okun)
- Rate ale dobânzii și inflație (regula Taylor)
- Prețuri acțiuni și volum tranzacționat
- Cursuri de schimb și balanță comercială

Notația seriilor de timp multivariate

Vector de variabile

Fie $\mathrm{Y}_t = (Y_{1t}, Y_{2t}, \ldots, Y_{Kt})'$ un vector $K \times 1$ de serii de timp.

Exemplu cu $K = 2$:

$$\mathrm{Y}_t = \begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Creștere PIB}_t \\ \text{Inflație}_t \end{pmatrix}$$

Întrebări cheie

1. Ajută Y_1 la prezicerea lui Y_2? (Cauzalitate Granger)
2. Cum afectează șocurile în Y_1 pe Y_2? (Răspunsuri la impuls)
3. Ce proporție din varianța lui Y_2 se datorează lui Y_1? (Descompunerea varianței)

Staționaritate multivariată

Definiție: Staționaritate slabă

O serie de timp K-dimensională Y_t este **slab staționară** dacă:

1. $\mathbb{E}[\mathrm{Y}_t] = \boldsymbol{\mu}$ (vector de medie constant)
2. $\mathrm{Cov}(\mathrm{Y}_t, \mathrm{Y}_{t-h}) = \boldsymbol{\Gamma}(h)$ depinde doar de h, nu de t

Matricea de autocovarianță

$$\boldsymbol{\Gamma}(h) = \mathbb{E}[(\mathrm{Y}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathrm{Y}_{t-h} - \boldsymbol{\mu})'] = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(h) & \gamma_{12}(h) \\ \gamma_{21}(h) & \gamma_{22}(h) \end{pmatrix}$$

Notă: $\boldsymbol{\Gamma}(-h) = \boldsymbol{\Gamma}(h)'$ (transpusa, nu egală!)

Proprietăți ale covarianței încrucișate

Funcția de covarianță încrucișată

Pentru variabilele Y_{it} și Y_{jt}:

$$\gamma_{ij}(h) = \text{Cov}(Y_{it}, Y_{j,t-h}) = \mathbb{E}[(Y_{it} - \mu_i)(Y_{j,t-h} - \mu_j)]$$

Diferența cheie față de cazul univariat

- În general: $\gamma_{ij}(h) \neq \gamma_{ij}(-h)$
- Dar: $\gamma_{ij}(h) = \gamma_{ji}(-h)$
- Matricea de covarianță încrucișată **nu este simetrică** pentru $h \neq 0$

Exemplu

Dacă Y_1 precede Y_2: $\gamma_{12}(h) > 0$ pentru $h > 0$ dar $\gamma_{12}(h) \approx 0$ pentru $h < 0$

Matricea funcției de corelație

Definiție

Matricea de autocorelație la lag-ul h:

$$\mathrm{R}(h) = \mathrm{D}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}(h)\mathrm{D}^{-1}$$

unde $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_K)$ și $\sigma_i = \sqrt{\gamma_{ii}(0)}$

Pentru cazul bivariat

$$\mathrm{R}(h) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(h) & \rho_{12}(h) \\ \rho_{21}(h) & \rho_{22}(h) \end{pmatrix}$$

unde $\rho_{ij}(h) = \frac{\gamma_{ij}(h)}{\sigma_i \sigma_j}$

Elementele diagonale: ACF obișnuite; Extra-diagonale: corelații încrucișate

Modelul VAR(p)

Definiție

Un model **VAR(p)** pentru K variabile:

$$\mathrm{Y}_t = \mathrm{c} + \mathrm{A}_1\mathrm{Y}_{t-1} + \mathrm{A}_2\mathrm{Y}_{t-2} + \cdots + \mathrm{A}_p\mathrm{Y}_{t-p} + \varepsilon_t$$

unde:

- Y_t: vector $K \times 1$ de variabile endogene
- c: vector $K \times 1$ de constante
- A_i: matrice de coeficienți $K \times K$
- ε_t: vector $K \times 1$ de termeni de eroare cu $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$, $\mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_t'] = \boldsymbol{\Sigma}$

VAR(1) cu două variabile

VAR(1) bivariat

$$\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

Ecuație cu ecuație

$$Y_{1t} = c_1 + a_{11} Y_{1,t-1} + a_{12} Y_{2,t-1} + \varepsilon_{1t}$$
$$Y_{2t} = c_2 + a_{21} Y_{1,t-1} + a_{22} Y_{2,t-1} + \varepsilon_{2t}$$

Ideea cheie: Fiecare ecuație include lag-uri ale **tuturor** variabilelor!

Exemplu numeric: VAR(1)

Model VAR(1) specific

$$\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

Interpretarea coeficienților

- $a_{11} = 0.7$: O creștere de 1 unitate în Y_1 la $t-1$ crește Y_1 la t cu 0.7
- $a_{12} = 0.2$: O creștere de 1 unitate în Y_2 la $t-1$ crește Y_1 la t cu 0.2
- $a_{21} = -0.1$: O creștere de 1 unitate în Y_1 la $t-1$ **scade** Y_2 la t cu 0.1
- $a_{22} = 0.6$: O creștere de 1 unitate în Y_2 la $t-1$ crește Y_2 la t cu 0.6

VAR(2): Dinamica de ordin superior

Specificația VAR(2)

$$\mathrm{Y}_t = \mathrm{c} + \mathrm{A}_1\mathrm{Y}_{t-1} + \mathrm{A}_2\mathrm{Y}_{t-2} + \varepsilon_t$$

Pentru $K = 2$, modelul complet are $2 + 2 \times 4 + 2 \times 4 = 18$ parametri!

Dezvoltat

$$Y_{1t} = c_1 + a_{11}^{(1)} Y_{1,t-1} + a_{12}^{(1)} Y_{2,t-1} + a_{11}^{(2)} Y_{1,t-2} + a_{12}^{(2)} Y_{2,t-2} + \varepsilon_{1t}$$
$$Y_{2t} = c_2 + a_{21}^{(1)} Y_{1,t-1} + a_{22}^{(1)} Y_{2,t-1} + a_{21}^{(2)} Y_{1,t-2} + a_{22}^{(2)} Y_{2,t-2} + \varepsilon_{2t}$$

Blestemul dimensionalității

VAR(p) cu K variabile are $K + pK^2$ parametri. Cu $K = 5$, $p = 4$: $5 + 4 \times 25 = 105$ parametri!

Forma companion

Conversia VAR(p) la VAR(1)

Orice VAR(p) poate fi scris ca VAR(1) în **forma companion**:

$$\xi_t = A\xi_{t-1} + v_t$$

Pentru VAR(2)

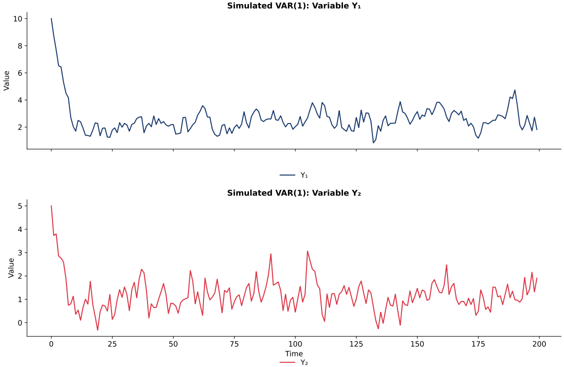
$$\underbrace{\begin{pmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \end{pmatrix}}_{\xi_t} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ I_K & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} Y_{t-1} \\ Y_{t-2} \end{pmatrix}}_{\xi_{t-1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_t}$$

Matricea companion A este $Kp \times Kp$.

De ce este utilă?

Staționaritatea, prognoza și IRF sunt mai ușor de analizat în forma companion.

Proces VAR simulat



- Două serii simulate dintr-un proces VAR(1) bivariat prezentând interdependența
- Fiecare variabilă răspunde atât la propriul trecut cât și la trecutul celeilalte variabile
- Observați cum seriile se mișcă împreună datorită dinamicii încrucișate

Staționaritatea VAR

Condiția de stabilitate

VAR(p) este **stabil** (staționar) dacă toate rădăcinile lui:

$$\det(I_K - A_1 z - A_2 z^2 - \cdots - A_p z^p) = 0$$

se află **în afara** cercului unitate (adică $|z| > 1$).

Pentru VAR(1)

Modelul este stabil dacă toate **valorile proprii** ale lui A_1 sunt mai mici decât 1 în valoare absolută.

Exemplu: Pentru $A_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$, valorile proprii sunt $\lambda_1 = 0.6$ și $\lambda_2 = 0.2$.
Ambele $< 1 \Rightarrow$ stabil!

Calculul valorilor proprii: Exemplu

Pentru $A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$

Polinomul caracteristic: $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} 0.7 - \lambda & 0.2 \\ -0.1 & 0.6 - \lambda \end{pmatrix} = (0.7 - \lambda)(0.6 - \lambda) + 0.02 = 0$$

$$\lambda^2 - 1.3\lambda + 0.44 = 0$$

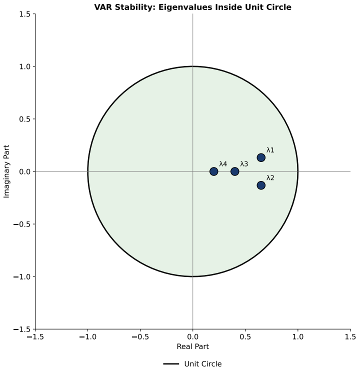
Soluție

Folosind formula de gradul 2:

$$\lambda = \frac{1.3 \pm \sqrt{1.69 - 1.76}}{2} = \frac{1.3 \pm \sqrt{-0.07}}{2} = 0.65 \pm 0.132i$$

$|\lambda| = \sqrt{0.65^2 + 0.132^2} = \sqrt{0.44} = 0.663 < 1 \quad \checkmark$ Stabil!

Condiția de stabilitate: Interpretare vizuală



- Valorile proprii ale matricei companion trebuie să fie în interiorul cercului unitate
- Valorile proprii complexe vin în perechi conjugate
- Dacă vreo valoare proprie este în afara cercului, VAR este exploziv (nestaționar)

Media unui VAR staționar

Media necondiționată

Pentru un VAR(1) staționar: $\mathrm{Y}_t = \mathrm{c} + \mathrm{A}\mathrm{Y}_{t-1} + \varepsilon_t$
Luând medii:

$$\mathbb{E}[\mathrm{Y}_t] = \mathrm{c} + \mathrm{A}\mathbb{E}[\mathrm{Y}_{t-1}]$$

Deoarece $\mathbb{E}[\mathrm{Y}_t] = \mathbb{E}[\mathrm{Y}_{t-1}] = \boldsymbol{\mu}$ (staționaritate):

$$\boldsymbol{\mu} = \mathrm{c} + \mathrm{A}\boldsymbol{\mu} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\mu} = (\mathrm{I}_K - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{c}$$

Exemplu

Dacă $\mathrm{c} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix}$ și $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.2 \\ 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

Structura covarianței pentru VAR(1)

Matricea varianță-covarianță $\boldsymbol{\Gamma}(0)$

Pentru VAR(1), varianța satisface **ecuația discretă Lyapunov**:

$$\boldsymbol{\Gamma}(0) = \mathrm{A}\boldsymbol{\Gamma}(0)\mathrm{A}' + \boldsymbol{\Sigma}$$

Autocovarianța la lag-ul h

$$\boldsymbol{\Gamma}(h) = \mathrm{A}^h\boldsymbol{\Gamma}(0), \quad h \geq 0$$

Aceasta arată că autocovarianțele scad geometric cu valorile proprii ale lui A.

Rezolvarea ecuației Lyapunov

Se poate rezolva prin vectorizare:

$$\mathrm{vec}(\boldsymbol{\Gamma}(0)) = (\mathrm{I}_{K^2} - \mathrm{A} \otimes \mathrm{A})^{-1}\mathrm{vec}(\boldsymbol{\Sigma})$$

unde $\otimes$ denotă produsul Kronecker.

Estimarea VAR

Estimarea OLS

Fiecare ecuație poate fi estimată prin **OLS separat**:

$$\hat{A} = \left(\sum_{t=1}^{T} Y_{t-1} Y_{t-1}' \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^{T} Y_{t-1} Y_t' \right)$$

Aceasta este eficientă deoarece toate ecuațiile au **aceiași regresori**.

Matricea de covarianță

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T - Kp - 1} \sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t'$$

Erorile ε_{1t} și ε_{2t} pot fi **corelate contemporan**.

Selecția ordinului lag-ului

Criterii informaționale

Alegem p care minimizează:

$$\text{AIC}(p) = \ln|\hat{\Sigma}_p| + \frac{2pK^2}{T}$$

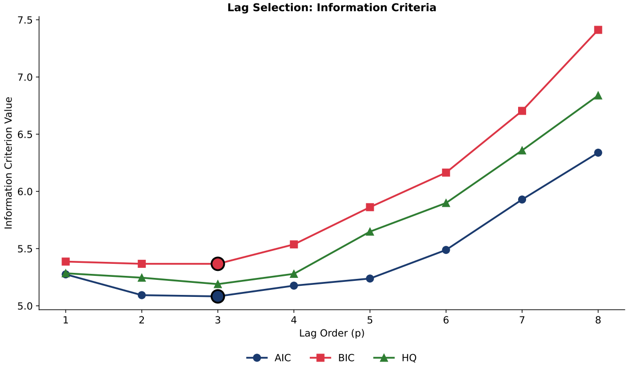
$$\text{BIC}(p) = \ln|\hat{\Sigma}_p| + \frac{pK^2 \ln T}{T}$$

$$\text{HQ}(p) = \ln|\hat{\Sigma}_p| + \frac{2pK^2 \ln\ln T}{T}$$

Îndrumări

- AIC tinde să selecteze modele **mai mari** (mai bune pentru prognoză)
- BIC tinde să selecteze modele **mai mici** (selecție consistentă)
- Începeți cu p_{max} maxim bazat pe frecvența datelor (ex. 4 pentru trimestrial, 12 pentru lunar)

Selecția lag-ului: Exemplu



- Valorile criteriilor informaționale pentru diferite ordine ale lag-ului
- AIC și BIC pot sugera lag-uri optime diferite
- Valori mai mici indică o potrivire mai bună a modelului (penalizată de complexitate)

Modele VAR restricționate

De ce restricționăm?

Modelele VAR complete pot fi **supraparametrizate**:

- Mulți coeficienți pot fi nesemnificativi
- Prognoze slabe
- Pierdere de grade de libertate

Restricții comune

- **Restricții de zero**: Setăm coeficienți mici la zero
- **Exogenitate de bloc**: Unele variabile nu afectează altele
- **Excluderea lag-urilor**: Excludem anumite lag-uri

Testarea restricțiilor

Folosim testul raportului de verosimilitate: $LR = T(\ln|\hat{\Sigma}_R| - \ln|\hat{\Sigma}_U|) \sim \chi^2_r$
unde r = numărul de restricții

Ce este cauzalitatea Granger?

Clive Granger (1969, Premiul Nobel 2003)

"X **cauzează Granger** pe Y" dacă valorile trecute ale lui X ajută la prezicerea lui Y, **dincolo de** ce pot prezice valorile trecute ale lui Y singure.

Distincție importantă

Cauzalitate Granger $\neq$ **Cauzalitate reală**

- Cauzalitatea Granger este despre **conținut predictiv**
- NU implică cauzare economică/structurală
- "X cauzează Granger pe Y" înseamnă: X conține informații utile pentru prognoza lui Y

Definiție formală

Cauzalitate Granger

X **nu cauzează Granger** pe Y dacă:

$$\mathbb{E}[Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \mathbb{E}[Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots]$$

Cu alte cuvinte: adăugarea istoricului lui X nu îmbunătățește predicția lui Y.

În contextul VAR

Pentru VAR(1): $Y_{1t} = c_1 + a_{11} Y_{1,t-1} + a_{12} Y_{2,t-1} + \varepsilon_{1t}$

Y_2 **nu** cauzează Granger pe Y_1 dacă $a_{12} = 0$.

Pentru VAR(p): Y_2 nu cauzează Granger pe Y_1 dacă $a_{12}^{(1)} = a_{12}^{(2)} = \cdots = a_{12}^{(p)} = 0$.

Testarea cauzalității Granger

Ipotezele testului

H_0: Y_2 **nu** cauzează Granger pe Y_1

$$H_0 : a_{12}^{(1)} = a_{12}^{(2)} = \cdots = a_{12}^{(p)} = 0$$

H_1: Cel puțin un $a_{12}^{(i)} \neq 0$ (există cauzalitate Granger)

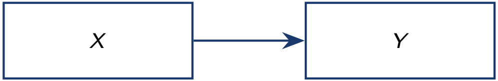
Statistica testului: Testul Wald

$$F = \frac{(RSS_R - RSS_U)/p}{RSS_U/(T - 2p - 1)} \sim F_{p,T-2p-1}$$

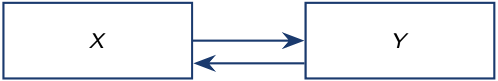
unde:

- RSS_R: Suma pătratelor reziduurilor din modelul restricționat (fără lag-urile lui Y_2)
- RSS_U: Suma pătratelor reziduurilor din modelul nerestricționat (VAR complet)

Tipuri de cauzalitate Granger



Unidirecțională: $X \to Y$



Bidirecțională: $X \leftrightarrow Y$

Unidirecțională: $Y \to X$

Fără cauzalitate

Exemple economice

- Masa monetară $\to$ Producție? (viziunea monetaristă)
- Prețurile acțiunilor $\leftrightarrow$ Volumul tranzacționat (bidirecțională)
- Vremea $\to$ Recolta (unidirecțională, evident)

Funcția de corelație încrucișată

Definiție 1 (Funcția de corelație încrucișată)

Corelația încrucișată între X_t și Y_t la lag-ul k este:

$$\rho_{XY}(k) = \frac{\gamma_{XY}(k)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\text{Cov}(X_t, Y_{t+k})}{\sqrt{\text{Var}(X_t)\text{Var}(Y_t)}}$$

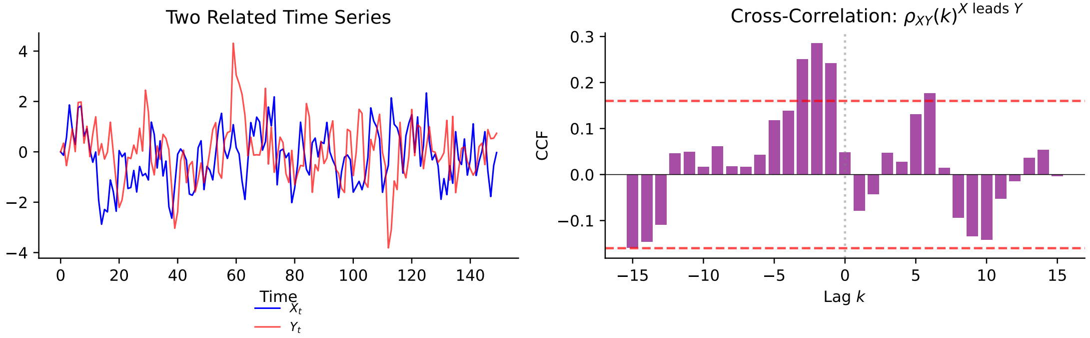
Interpretare

- $\rho_{XY}(k) > 0$ la $k > 0$: X este corelat pozitiv cu Y viitor (X poate precede Y)
- $\rho_{XY}(k) > 0$ la $k < 0$: X este corelat pozitiv cu Y trecut (Y poate precede X)

Notă

Spre deosebire de ACF, corelația încrucișată **nu este simetrică**: $\rho_{XY}(k) \neq \rho_{XY}(-k)$ în general.

Corelație încrucișată: Ilustrare vizuală



Stânga: două serii înrudite. Dreapta: CCF relevă că X precede Y (corelații semnificative la lag-uri pozitive).

Cauzalitate Granger: Considerații practice

Capcane comune

1. **Variabile omise**: O a treia variabilă Z poate cauza atât X cât și Y
2. **Nestaționaritate**: Testul necesită date staționare (sau cointegrare)
3. **Selecția lag-ului**: Rezultatele pot fi sensibile la p
4. **Mărimea eșantionului**: Necesită suficiente observații

Bune practici

- Testați mai întâi pentru rădăcini unitare
- Folosiți criterii multiple pentru selecția lag-ului
- Verificați robustețea la diferite ordine ale lag-ului
- Raportați rezultatele pentru ambele direcții

Test cauzalitate Granger: Exemplu numeric

Testare: Cauzează creșterea masei monetare Granger producția?

Model nerestricționat (VAR cu 2 lag-uri):

$$\Delta Y_t = c + \alpha_1 \Delta Y_{t-1} + \alpha_2 \Delta Y_{t-2} + \beta_1 \Delta M_{t-1} + \beta_2 \Delta M_{t-2} + \varepsilon_t$$

Model restricționat (H_0: $\beta_1 = \beta_2 = 0$):

$$\Delta Y_t = c + \alpha_1 \Delta Y_{t-1} + \alpha_2 \Delta Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

Calculul testului

Cu $T = 100$, $RSS_U = 45.2$, $RSS_R = 52.8$:

$$F = \frac{(52.8 - 45.2)/2}{45.2/(100 - 5)} = \frac{3.8}{0.476} = 7.98$$

$F_{0.05}(2, 95) = 3.09 \Rightarrow$ **Respingem** H_0: Banii cauzează Granger producția!

Procedura Toda-Yamamoto

Problema cu datele nestaționare

Testul Granger standard are **distribuții non-standard** când:

- Variabilele au rădăcini unitare
- Variabilele sunt cointegrate

Soluția Toda-Yamamoto (1995)

1. Determinăm ordinul maxim de integrare d_{max}
2. Estimăm VAR($p + d_{max}$) în **niveluri**
3. Testăm restricții doar pe primele p lag-uri
4. Lag-urile suplimentare d_{max} **nu sunt** testate (doar pentru distribuția corectă)

Avantaj

Testul Wald are distribuție asimptotică χ^2 indiferent de cointegrare!

Cauzalitate instantanee

Definiție

X **cauzează instantaneu** pe Y dacă:

$$\mathbb{E}[Y_t|\Omega_{t-1}, X_t] \neq \mathbb{E}[Y_t|\Omega_{t-1}]$$

unde Ω_{t-1} conține toate informațiile trecute.

Testarea în VAR

Testăm dacă $\sigma_{12} \neq 0$ în matricea de covarianță:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

Dacă $\sigma_{12} = 0$: nu există cauzalitate instantanee

Interpretare

Cauzalitatea instantanee reflectă adesea **șocuri comune** sau **agregarea datelor**, nu efecte contemporane reale.

Cauzalitate Granger în sisteme multiple

Testul exogenității de bloc

Într-un VAR cu $K > 2$ variabile, testăm dacă un **grup** de variabile cauzează Granger un alt grup.

Exemplu: Cauzează variabilele financiare (rate ale dobânzii, prețuri acțiuni) Granger variabilele reale (PIB, șomaj)?

Statistica testului

$$\chi^2 = T \cdot K_1 \cdot p \cdot \left(\ln |\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_R| - \ln |\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_U| \right) \sim \chi^2_{K_1 \cdot K_2 \cdot p}$$

unde K_1 = numărul de variabile "cauzate", K_2 = numărul de variabile "cauzatoare"

Ce sunt funcțiile de răspuns la impuls?

Definiție

O **Funcție de Răspuns la Impuls (IRF)** trasează efectul unui șoc punctual la o variabilă asupra valorilor curente și viitoare ale tuturor variabilelor.

Întrebarea la care răspund IRF-urile

"Dacă există un șoc neașteptat de 1 unitate la Y_1 astăzi, ce se întâmplă cu Y_1 și Y_2 în următoarele h perioade?"

Reprezentarea MA(∞)

Un VAR(p) stabil poate fi scris ca:

$$\mathrm{Y}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\Phi}_i \boldsymbol{\varepsilon}_{t-i}$$

Matricele $\boldsymbol{\Phi}_i$ sunt **răspunsurile la impuls** la orizontul i.

Calculul IRF pentru VAR(1)

Pentru VAR(1): $Y_t = c + AY_{t-1} + \varepsilon_t$

Matricele de răspuns la impuls sunt:

$$\mathbf{\Phi}_0 = I_K, \quad \mathbf{\Phi}_1 = A, \quad \mathbf{\Phi}_2 = A^2, \quad \ldots, \quad \mathbf{\Phi}_h = A^h$$

Interpretare

$[\mathbf{\Phi}_h]_{ij}$ = Efectul asupra lui Y_i la momentul $t + h$ al unui șoc unitar la Y_j la momentul t

Pentru VAR stabil: $\mathbf{\Phi}_h \to 0$ când $h \to \infty$ (șocurile dispar)

Calculul IRF pentru VAR(p) general

Formula recursivă pentru VAR(p)

Pentru $\mathrm{Y}_t = \mathrm{c} + \mathrm{A}_1\mathrm{Y}_{t-1} + \mathrm{A}_2\mathrm{Y}_{t-2} + \cdots + \mathrm{A}_p\mathrm{Y}_{t-p} + \varepsilon_t$:

$$\mathbf{\Phi}_h = \sum_{j=1}^{\min(h,p)} \mathrm{A}_j \mathbf{\Phi}_{h-j}, \quad h = 1, 2, 3, \ldots$$

cu $\mathbf{\Phi}_0 = \mathrm{I}_K$ și $\mathbf{\Phi}_h = 0$ pentru $h < 0$.

Exemplu: IRF pentru VAR(2)

- $\mathbf{\Phi}_0 = \mathrm{I}_K$
- $\mathbf{\Phi}_1 = \mathrm{A}_1\mathbf{\Phi}_0 = \mathrm{A}_1$
- $\mathbf{\Phi}_2 = \mathrm{A}_1\mathbf{\Phi}_1 + \mathrm{A}_2\mathbf{\Phi}_0 = \mathrm{A}_1^2 + \mathrm{A}_2$
- $\mathbf{\Phi}_3 = \mathrm{A}_1\mathbf{\Phi}_2 + \mathrm{A}_2\mathbf{\Phi}_1 = \mathrm{A}_1(\mathrm{A}_1^2 + \mathrm{A}_2) + \mathrm{A}_2\mathrm{A}_1$

IRF ortogonalizate

Problema: Erori corelate

Dacă $\boldsymbol{\Sigma}$ nu este diagonală, șocurile ε_{1t} și ε_{2t} sunt corelate.
Un șoc la "Y_1" implică și un șoc la "Y_2".

Soluție: Descompunerea Cholesky

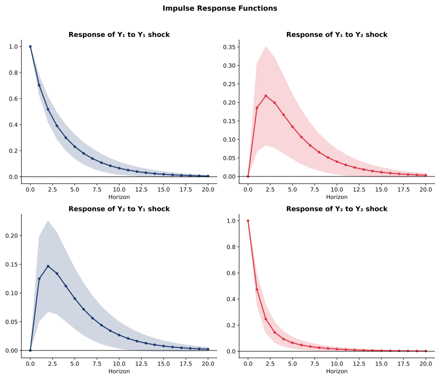
Factorizăm $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{PP}'$ unde P este inferior triunghiulară.
Definim șocuri ortogonalizate: $\mathrm{u}_t = \mathrm{P}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t$ cu $\mathbb{E}[\mathrm{u}_t\mathrm{u}_t'] = \mathrm{I}$

IRF ortogonalizate: $\boldsymbol{\Theta}_h = \boldsymbol{\Phi}_h\mathrm{P}$

Ordinea contează!

Cholesky presupune variabilele ordonate de la "cea mai exogenă" la "cea mai endogenă". Rezultatele depind de această ordine.

Funcții de răspuns la impuls: Exemplu



- IRF arată cum răspunde fiecare variabilă la un șoc unitar în timp
- Zonele umbrite reprezintă intervale de încredere (incertitudine în estimări)
- Pentru modele VAR stabile, răspunsurile converg la zero pe măsură ce orizontul crește

Exemplu numeric IRF

Pentru $A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_1 = A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_2 = A^2 = \begin{pmatrix} 0.47 & 0.26 \\ -0.13 & 0.34 \end{pmatrix}$$

Interpretare

- $[\Phi_2]_{12} = 0.26$: Un șoc unitar la Y_2 crește Y_1 cu 0.26 după 2 perioade
- $[\Phi_2]_{21} = -0.13$: Un șoc unitar la Y_1 **scade** Y_2 cu 0.13 după 2 perioade

Răspunsuri la impuls cumulative

Definiție

IRF cumulativ până la orizontul H:

$$\boldsymbol{\Psi}_H = \sum_{h=0}^{H} \boldsymbol{\Phi}_h$$

Măsoară **efectul total acumulat** al unui șoc.

Multiplicatorul pe termen lung

Pentru VAR stabil: $\boldsymbol{\Psi}_\infty = (\mathbf{I}_K - \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 - \cdots - \mathbf{A}_p)^{-1}$

Aceasta dă **efectul permanent** al unui șoc punctual.

Când să folosim

IRF cumulative sunt utile când ne interesează impactul total (ex. pierderea cumulată de PIB după un șoc).

Intervale de încredere pentru IRF

Surse de incertitudine

IRF sunt funcții de parametrii estimați $\hat{A}_1, \ldots, \hat{A}_p$, deci au **incertitudine de eșantionare**.

Metode pentru benzi de încredere

1. **Asimptotice**: Folosim metoda delta pentru a deriva erorile standard
2. **Monte Carlo**: Simulăm din distribuția asimptotică a lui $\hat{A}$
3. **Bootstrap**: Reeșantionăm reziduurile și reestimăm VAR

Procedura Bootstrap

1. Estimăm VAR, salvăm reziduurile $\{\hat{\varepsilon}_t\}$
2. Extragem cu înlocuire pentru a crea $\{\hat{\varepsilon}_t^*\}$
3. Generăm eșantion bootstrap folosind VAR estimat
4. Reestimăm și calculăm IRF
5. Repetăm de B ori; folosim percentilele pentru IC

VAR Structural (SVAR)

Motivație

Șocurile VAR standard ε_t sunt inovații de **formă redusă**—combinații liniare de șocuri structurale.

Vrem să identificăm **șocuri structurale** semnificative economic.

Forma structurală

$$\mathrm{B}_0 \mathrm{Y}_t = \boldsymbol{\Gamma}_0 + \mathrm{B}_1 \mathrm{Y}_{t-1} + \cdots + \mathrm{B}_p \mathrm{Y}_{t-p} + \mathrm{u}_t$$

unde u_t sunt **șocuri structurale** cu $\mathbb{E}[\mathrm{u}_t \mathrm{u}_t'] = \mathrm{I}_K$

Relația cu forma redusă

$\varepsilon_t = \mathrm{B}_{\mathbf{0}}^{-\mathbf{1}} \mathrm{u}_t \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{B}_{\mathbf{0}}^{-\mathbf{1}} (\mathrm{B}_{\mathbf{0}}^{-\mathbf{1}})'$

Identificare în SVAR

Problema identificării

Σ are $K(K+1)/2$ elemente unice, dar B_0^{-1} are K^2 elemente.

Avem nevoie de $K(K-1)/2$ restricții suplimentare!

Scheme comune de identificare

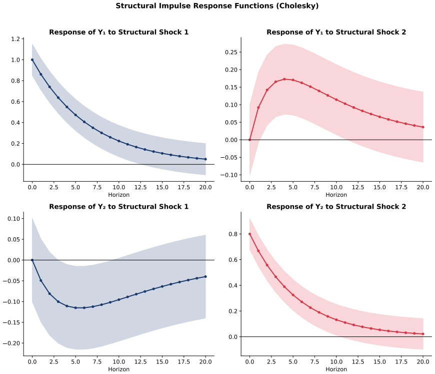
1. **Restricții pe termen scurt**: Efecte de impact zero (Cholesky)
2. **Restricții pe termen lung**: Efecte zero pe termen lung (Blanchard-Quah)
3. **Restricții de semn**: Constrângeri de inegalitate pe IRF
4. **Instrumente externe**: Folosim informații din afară

Exemplu: Ordonare Cholesky (recursivă)

Pentru $K = 2$: $\mathrm{B}_0^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

Variabila 1 nu răspunde la șocul 2 contemporan.

Exemplu IRF structural



- IRF structurale bazate pe identificare Cholesky
- Ordinea variabilelor afectează interpretarea șocurilor
- Prima variabilă răspunde doar la propriile șocuri contemporan

Descompunerea varianței

Întrebare

Ce proporție din varianța erorii de prognoză a lui Y_i la orizontul h se datorează șocurilor la Y_j?

Formula FEVD

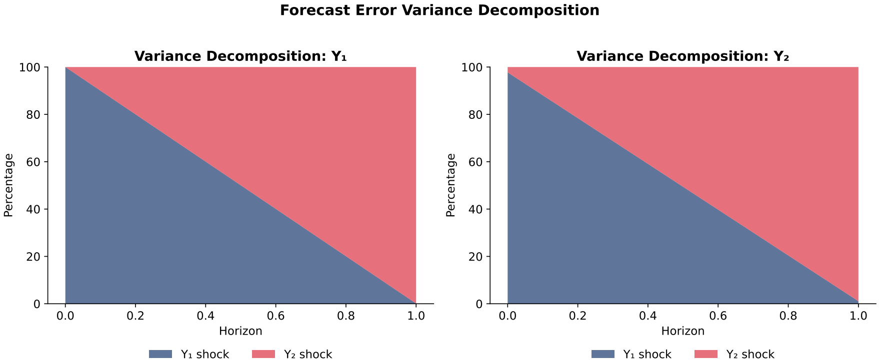
$$\text{FEVD}_{ij}(h) = \frac{\sum_{s=0}^{h-1} [\boldsymbol{\Theta}_s]_{ij}^2}{\sum_{s=0}^{h-1} \sum_{k=1}^{K} [\boldsymbol{\Theta}_s]_{ik}^2}$$

Aceasta dă **procentul** din varianța prognozei la h pași a lui Y_i explicat de șocurile la Y_j.

Proprietăți

- $0 \leq \text{FEVD}_{ij}(h) \leq 1$
- $\sum_{j=1}^{K} \text{FEVD}_{ij}(h) = 1$ (suma la 100%)
- La $h = 1$: Șocurile proprii domină (prin construcția Cholesky)

FEVD: Exemplu



- FEVD arată proporția din varianța prognozei atribuibilă fiecărui șoc
- La orizonturi scurte, șocurile proprii domină; efectele încrucișate cresc în timp
- Util pentru înțelegerea importanței relative a diferitelor șocuri în sistem

FEVD: Exemplu numeric

Calculul FEVD pentru VAR bivariat

Folosind IRF ortogonalizate $\mathbf{\Theta}_h$, FEVD la orizontul H:

$$\text{FEVD}_{11}(H) = \frac{\sum_{h=0}^{H-1} \theta_{11}^2(h)}{\sum_{h=0}^{H-1} [\theta_{11}^2(h) + \theta_{12}^2(h)]}$$

Exemplu de calcul

h	$\theta_{11}(h)$	$\theta_{12}(h)$	$\theta_{11}^2(h)$	$\theta_{12}^2(h)$
0	1.00	0.00	1.00	0.00
1	0.70	0.20	0.49	0.04
2	0.47	0.26	0.22	0.07

$\text{FEVD}_{11}(3) = \frac{1.00+0.49+0.22}{1.00+0.49+0.22+0.00+0.04+0.07} = \frac{1.71}{1.82} = 94\%$

Descompunerea istorică

Definiție

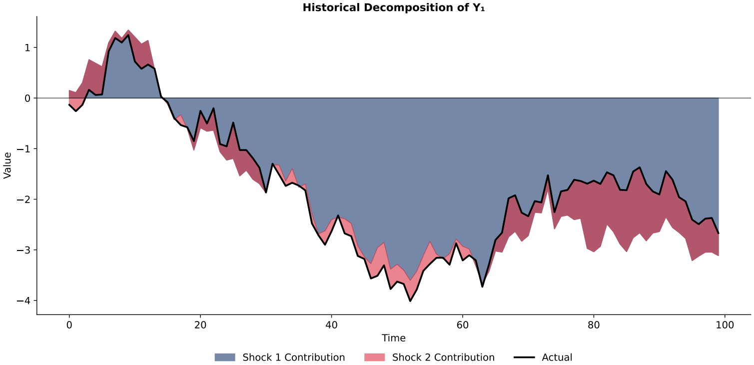
Descompunerea istorică descompune fiecare valoare observată în contribuții de la fiecare șoc structural:

$$Y_{it} - \bar{Y}_i = \sum_{j=1}^{K} \sum_{s=0}^{t-1} \theta_{ij}(s) \cdot u_{j,t-s}$$

Aplicație

- "Cât din scăderea PIB din 2008 s-a datorat șocurilor financiare vs. șocurilor petroliere?"
- Atribuie mișcările istorice unor șocuri identificate specifice
- Util pentru analiza politicilor și interpretarea narativă

Descompunerea istorică: Exemplu



- Fiecare culoare reprezintă contribuția unui șoc structural diferit
- Contribuțiile stivuite însumează abaterea reală observată de la medie
- Ajută la identificarea șocurilor care au determinat episoadele istorice

Diagnosticarea reziduurilor

Ce trebuie verificat

După estimarea VAR, verificăm că reziduurile $\hat{\varepsilon}_t$ se comportă ca zgomot alb:

1. Fără corelație serială
2. Varianță constantă (homoscedasticitate)
3. Normalitate (pentru inferență)

De ce contează

- Reziduuri autocorelate $\Rightarrow$ estimări ineficiente
- Heteroscedasticitate $\Rightarrow$ erori standard invalide
- Non-normalitate $\Rightarrow$ inferența poate fi nesigură

Testarea corelației seriale

Testul Portmanteau (Ljung-Box)

$$Q_h = T(T+2)\sum_{j=1}^{h}\frac{1}{T-j}\mathrm{tr}(\hat{C}_j'\hat{C}_0^{-1}\hat{C}_j\hat{C}_0^{-1})$$

unde $\hat{C}_j = \frac{1}{T}\sum_{t=j+1}^{T}\hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_{t-j}'$
Sub H_0 (fără autocorelație): $Q_h \sim \chi^2_{K^2(h-p)}$

Testul LM Breusch-Godfrey

1. Regresăm $\hat{\varepsilon}_t$ pe $\hat{\varepsilon}_{t-1},\ldots,\hat{\varepsilon}_{t-h}$ și regresorii originali
2. $LM = T\cdot R^2 \sim \chi^2_{K^2h}$ sub H_0

Dacă este respins

Luați în considerare creșterea ordinului lag-ului p sau adăugarea de variabile suplimentare.

Testarea heteroscedasticității

Testul ARCH-LM

Testează pentru heteroscedasticitate condiționată autoregresivă în reziduuri:

$$\hat{\varepsilon}_{it}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}_{i,t-1}^2 + \cdots + \alpha_q \hat{\varepsilon}_{i,t-q}^2 + v_t$$

H_0: $\alpha_1 = \cdots = \alpha_q = 0$ (homoscedasticitate)
$LM = TR^2 \sim \chi_q^2$

Versiunea multivariată

Testăm toate ecuațiile împreună folosind:

$$\text{vech}(\hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t') = \text{c} + \sum_{j=1}^{q} \text{B}_j \text{vech}(\hat{\varepsilon}_{t-j} \hat{\varepsilon}_{t-j}') + \text{v}_t$$

Testarea normalității

Testul Jarque-Bera (univariat)

$$JB = \frac{T}{6}\left(S^2 + \frac{(K-3)^2}{4}\right) \sim \chi^2_2$$

unde $S =$ asimetrie, $K =$ curtoză

Normalitate multivariată (Doornik-Hansen)

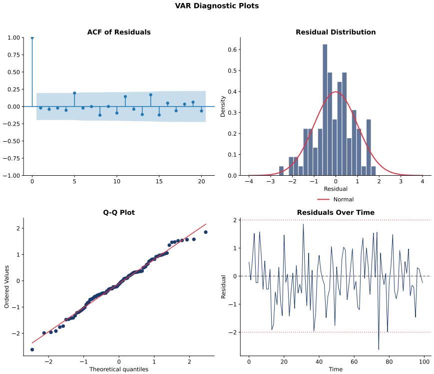
Transformăm reziduurile și testăm asimetria și curtoza comune:

$$DH = s_1'(\boldsymbol{\Omega}^{-1/2})'(\boldsymbol{\Omega}^{-1/2})s_1 + s_2'(\boldsymbol{\Omega}^{-1/2})'(\boldsymbol{\Omega}^{-1/2})s_2 \sim \chi^2_{2K}$$

Notă

Normalitatea este adesea respinsă în datele financiare. Luați în considerare erori standard robuste dacă non-normalitatea este severă.

Grafic rezumat diagnostic



- ACF reziduurilor nu ar trebui să arate autocorelație semnificativă
- Histograma ar trebui să aproximeze distribuția normală
- Graficul Q-Q ar trebui să urmeze linia de 45 de grade

Prognoze punctuale din VAR

Prognoza iterativă

Pentru VAR(1): $\mathrm{Y}_t = \mathrm{c} + \mathrm{A}\mathrm{Y}_{t-1} + \varepsilon_t$

Prognoza la 1 pas: $\hat{\mathrm{Y}}_{T+1|T} = \mathrm{c} + \mathrm{A}\mathrm{Y}_T$
Prognoza la 2 pași: $\hat{\mathrm{Y}}_{T+2|T} = \mathrm{c} + \mathrm{A}\hat{\mathrm{Y}}_{T+1|T}$
Prognoza la h pași: $\hat{\mathrm{Y}}_{T+h|T} = \mathrm{c} + \mathrm{A}\hat{\mathrm{Y}}_{T+h-1|T}$

Formula directă

$$\hat{\mathrm{Y}}_{T+h|T} = (\mathrm{I} + \mathrm{A} + \mathrm{A}^2 + \cdots + \mathrm{A}^{h-1})\mathrm{c} + \mathrm{A}^h\mathrm{Y}_T$$

Pentru VAR stabil: converge la $\boldsymbol{\mu} = (\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{c}$ când $h \to \infty$

Eroarea de prognoză și MSE

Eroarea de prognoză la h pași

$$\mathrm{e}_{T+h|T} = \mathrm{Y}_{T+h} - \hat{\mathrm{Y}}_{T+h|T} = \sum_{j=0}^{h-1} \mathrm{A}^j \varepsilon_{T+h-j}$$

Matricea erorii medii pătratice

$$\mathrm{MSE}(\hat{\mathrm{Y}}_{T+h|T}) = \mathbb{E}[\mathrm{e}_{T+h|T}\mathrm{e}'_{T+h|T}] = \sum_{j=0}^{h-1} \mathrm{A}^j \boldsymbol{\Sigma} (\mathrm{A}^j)'$$

Ideea cheie

- MSE crește cu orizontul h
- Pentru VAR stabil: MSE converge la varianța necondiționată $\boldsymbol{\Gamma}(0)$
- Prognoze pe termen lung $\to$ media necondiționată cu incertitudine $= \boldsymbol{\Gamma}(0)$

Intervale de încredere pentru prognoză

Construirea intervalelor

Pentru erori distribuite normal, interval de încredere $(1-\alpha)$:

$$\hat{Y}_{i,T+h|T} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{[\text{MSE}(\hat{\mathrm{Y}}_{T+h|T})]_{ii}}$$

Regiuni de încredere comune

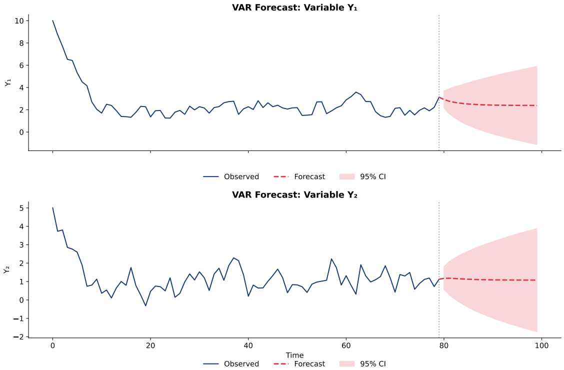
Pentru mai multe variabile, folosim elipsoizi:

$$(\mathrm{Y}_{T+h} - \hat{\mathrm{Y}}_{T+h|T})'[\text{MSE}(\hat{\mathrm{Y}}_{T+h|T})]^{-1}(\mathrm{Y}_{T+h} - \hat{\mathrm{Y}}_{T+h|T}) \leq \chi^2_{K,\alpha}$$

Notă

Acestea presupun parametri cunoscuți. Metodele bootstrap țin cont de incertitudinea parametrilor.

Prognoze VAR: Exemplu



- Prognozele punctuale sunt arătate ca linie continuă dincolo de datele observate
- Benzile de încredere se lărgesc pe măsură ce orizontul de prognoză crește
- Prognozele converg la media necondiționată pentru orizonturi lungi

Evaluarea prognozei

Evaluare out-of-sample

Împărțim datele: eșantion de estimare (1 la T_1) și eșantion de testare ($T_1 + 1$ la T). Calculăm erorile de prognoză: $e_{t+h} = Y_{t+h} - \hat{Y}_{t+h|t}$

Metrici comune

- **RMSE**: $\sqrt{\frac{1}{n} \sum e_{t+h}^2}$ **MAE**: $\frac{1}{n} \sum |e_{t+h}|$ **MAPE**: $\frac{100}{n} \sum \left| \frac{e_{t+h}}{Y_{t+h}} \right|$

Testul Diebold-Mariano

Testează dacă prognozele VAR sunt semnificativ mai bune decât alternativa: $DM = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\hat{\sigma}_d^2/n}} \sim N(0, 1)$ unde

$d_t = L(e_{1t}) - L(e_{2t})$ este diferențiala de pierdere.

Exemplu: PIB și șomaj

Legea lui Okun

Există o relație negativă între creșterea PIB și șomaj:

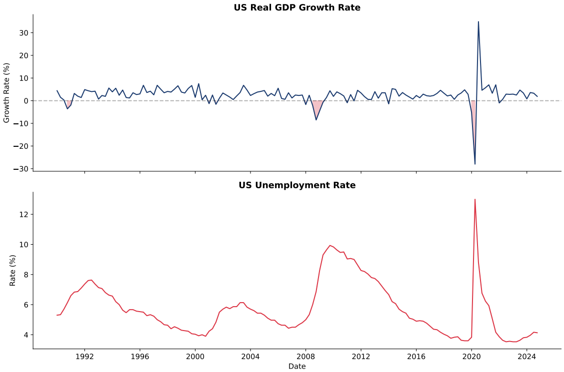
$$\Delta U_t \approx -\beta(\Delta Y_t - \bar{g})$$

unde $\bar{g}$ este creșterea tendențială a PIB și $\beta \approx 0.4$.

Întrebări pentru analiza VAR

1. Cauzează creșterea PIB Granger modificările șomajului?
2. Cauzează șomajul Granger creșterea PIB?
3. Cum se propagă șocurile între variabile?

PIB și șomaj: Date

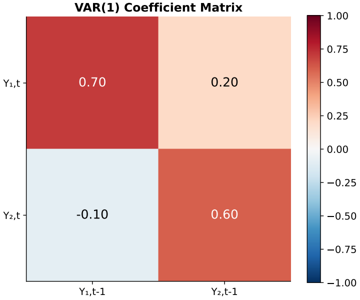


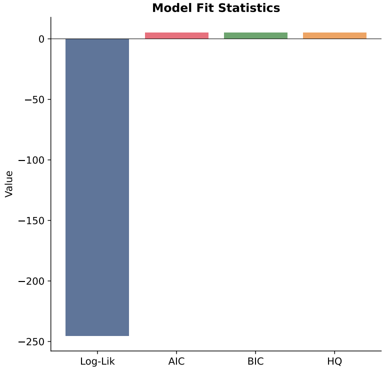
- Creșterea PIB și rata șomajului prezintă o corelație negativă clară (Legea lui Okun)
- Ambele serii prezintă tipare ciclice legate de fluctuațiile ciclului de afaceri
- Acest sistem bivariat este ideal pentru analiza VAR și testarea cauzalității Granger

Fluxul de lucru VAR

1. **Pregătirea datelor**
   - Verificăm staționaritatea (teste de rădăcină unitară)
   - Transformăm dacă este necesar (diferențe, logaritmi)
2. **Selecția lag-ului**
   - Folosim criteriile AIC, BIC, HQ
   - Verificăm autocorelația reziduurilor
3. **Estimare**
   - OLS ecuație cu ecuație
   - Verificăm stabilitatea (valori proprii)
4. **Analiză**
   - Teste de cauzalitate Granger
   - Funcții de răspuns la impuls
   - Descompunerea varianței
5. **Prognoză**

Rezultate VAR estimate





- Coeficienți estimați cu erori standard și statistici t
- Valorile criteriilor informaționale pentru compararea modelelor
- Rezumat diagnostic model (teste reziduuri)

Rezultate cauzalitate Granger

Rezultatele testului: PIB și șomaj

Ipoteza nulă	Statistica F	df	p-valoare	Decizie
PIB $\not\to$ Șomaj	8.42	(2, 95)	0.0004	Respingem
Șomaj $\not\to$ PIB	2.15	(2, 95)	0.1220	Nu respingem

Interpretare

- Creșterea PIB cauzează Granger șomajul (în acord cu Legea lui Okun)
- Șomajul nu cauzează semnificativ Granger PIB
- Evidență de cauzalitate **unidirecțională**: PIB $\to$ Șomaj

Implementare Python

VAR în Python (statsmodels)

```
from statsmodels.tsa.api import VAR
from statsmodels.tsa.stattools import grangercausalitytests

# Ajustăm modelul VAR
model = VAR(data)
results = model.fit(maxlags=4, ic='aic')

# Testul cauzalității Granger
granger_test = grangercausalitytests(data[['Y1', 'Y2']],
                                      maxlag=4)
# Funcții de răspuns la impuls
irf = results.irf(periods=20)
irf.plot()

# Descompunerea varianței
fevd = results.fevd(periods=20)
fevd.plot()
```

Implementare R

VAR în R (pachetul vars)

```
library(vars)

# Selectăm ordinul optim al lag-ului
lag_select <- VARselect(data, lag.max = 8)
print(lag_select$selection)

# Ajustăm modelul VAR
var_model <- VAR(data, p = 2, type = "const")
summary(var_model)

# Testul cauzalității Granger
causality(var_model, cause = "GDP")

# Funcții de răspuns la impuls
irf_results <- irf(var_model, n.ahead = 20, boot = TRUE)
plot(irf_results)

# Descompunerea varianței erorii de prognoză
fevd_results <- fevd(var_model, n.ahead = 20)
plot(fevd_results)
```

Exemplu: Analiza politicii monetare

VAR cu trei variabile

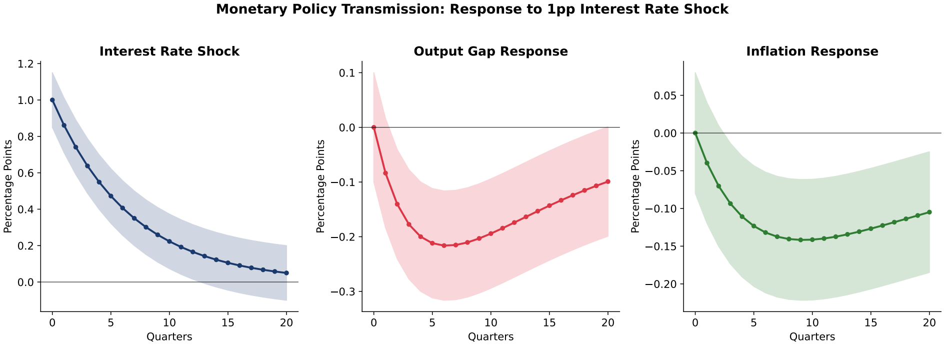
Studiem mecanismul de transmisie monetară cu:

- Y_1: Gap-ul de producție (devierea PIB de la trend)
- Y_2: Rata inflației
- Y_3: Rata dobânzii (instrument de politică)

Întrebări cheie

1. Cum afectează un șoc al ratei dobânzii producția și inflația?
2. Cât timp trece până se simte efectul maxim?
3. Ce fracțiune din varianța producției se datorează șocurilor monetare?

VAR politică monetară: IRF



- Șoc de politică monetară contracționistă (creșterea ratei dobânzii)
- Producția scade cu efect maxim după 4-6 trimestre ("întârzieri lungi și variabile")
- Inflația răspunde mai încet, scăzând după producție

Concluzii cheie

Modele VAR

- Modelează **mai multe** serii de timp împreună
- Fiecare variabilă depinde de propriile lag-uri ȘI lag-urile altor variabile
- Estimate prin OLS ecuație cu ecuație; necesită staționaritate

Cauzalitate Granger

- Testează dacă X ajută la prezicerea lui Y dincolo de istoricul propriu al lui Y
- **Nu** este la fel cu cauzalitatea reală; test F asupra restricțiilor coeficienților

IRF și FEVD

- IRF: Cum se propagă șocurile prin sistem
- FEVD: Ce proporție din varianță se datorează fiecărui șoc
- Ambele depind de ordonarea variabilelor (descompunerea Cholesky)

Lista de verificare pentru selecția modelului VAR

Înainte de estimare

- ☐ Testați pentru rădăcini unitare în fiecare variabilă
- ☐ Transformați la staționar dacă este necesar (diferențe, logaritmi)
- ☐ Verificați pentru valori extreme și rupturi structurale

Specificarea modelului

- ☐ Selectați ordinul lag-ului folosind AIC/BIC
- ☐ Estimați VAR prin OLS
- ☐ Verificați stabilitatea (valori proprii în interiorul cercului unitate)

După estimare

- ☐ Testați reziduurile pentru autocorelație
- ☐ Testați pentru efecte ARCH
- ☐ Testați pentru normalitate
- ☐ Calculați IRF, FEVD, teste Granger

Greșeli comune de evitat

Capcane în analiza VAR

1. **Ignorarea nestaționarității**: Testați întotdeauna mai întâi pentru rădăcini unitare
2. **Supraajustare**: Prea multe lag-uri $\Rightarrow$ prognoze slabe
3. **Ordonare greșită**: Rezultatele Cholesky depind de ordinea variabilelor
4. **Confundarea corelației cu cauzalitatea**: Cauzalitate Granger $\neq$ cauzalitate reală
5. **Ignorarea incertitudinii parametrilor**: Folosiți IC bootstrap pentru IRF
6. **Eșantioane mici**: VAR necesită multe observații ($T > 50$)

Ce urmează?

Subiecte pentru studiu aprofundat

- **Cointegrare**: Relații pe termen lung între variabile nestaționare
- **VECM**: Modele cu corecția erorii pentru sisteme cointegrate
- **VAR Structural**: Impunerea restricțiilor din teoria economică
- **Panel VAR**: VAR pentru date panel
- **VAR Bayesian**: Distribuții prior de shrinkage pentru sisteme de dimensiuni mari

Întrebări?

Întrebarea 1

Întrebare

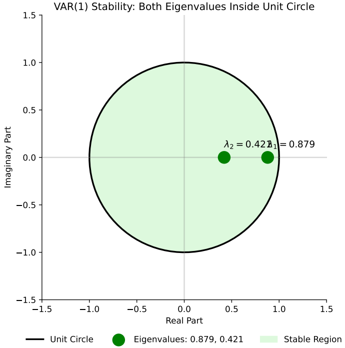
Pentru un model VAR(1) cu matricea de coeficienți $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$, este modelul stabil?

- A. Da, deoarece toate elementele diagonale sunt mai mici decât 1
- B. Da, deoarece toate valorile proprii sunt în interiorul cercului unitate
- C. Nu, deoarece suma coeficienților depășește 1
- D. Nu poate fi determinat fără a cunoaște $\boldsymbol{\Sigma}$

Întrebarea 1: Răspuns

Răspuns corect: (B) Valori proprii în interiorul cercului unitate

$\lambda_1 = 0.879$, $\lambda_2 = 0.421$ — ambele $|\lambda| < 1 \Rightarrow$ Stabil!



Întrebarea 2

Întrebare

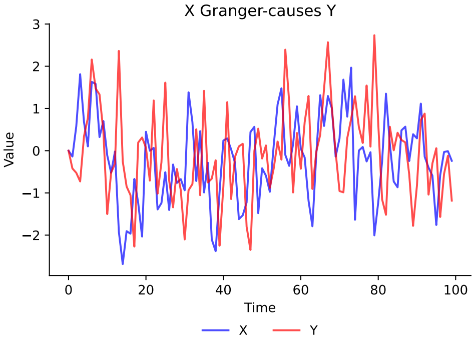
Dacă X cauzează Granger pe Y la nivelul de semnificație de 5%, care dintre următoarele afirmații este ADEVĂRATĂ?

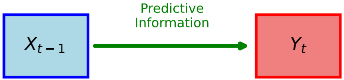
- **A** X este cauza economică a lui Y
- **B** Valorile trecute ale lui X conțin informații utile pentru prezicerea lui Y
- **C** Y nu poate cauza Granger pe X
- **D** Corelația între X și Y este pozitivă

Întrebarea 2: Răspuns

Răspuns corect: (B) Informație predictivă

Cauzalitate Granger = conținut predictiv, nu cauzare economică reală. X trecut ajută la prezicerea lui Y.





Past X helps predict Y (beyond Y's own past)

Întrebarea 3

Întrebare

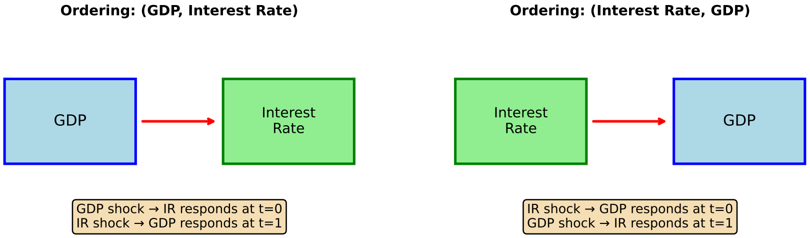
Într-un VAR cu IRF identificate Cholesky, ce determină ordinea variabilelor?

- A. Magnitudinea răspunsurilor la impuls
- B. Viteza cu care șocurile dispar
- C. Care variabile pot răspunde contemporan la care șocuri
- D. Numărul de lag-uri în VAR

Întrebarea 3: Răspuns

Răspuns corect: (C) Răspunsuri contemporane

Ordonarea determină care variabile răspund imediat la care șocuri.



Întrebarea 4

Întrebare

Pentru un VAR(1) bivariat, câți parametri trebuie estimați (excluzând matricea de covarianță a erorilor)?

- A. 4
- B. 6
- C. 8
- D. 10

Întrebarea 4: Răspuns

Răspuns corect: (B) 6 parametri

Numărare detaliată

VAR(1) cu $K = 2$ variabile:

$$\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{\text{2 param}} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\text{4 param}} \begin{pmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

- Vectorul constant c: $K = 2$ parametri
- Matricea de coeficienți A: $K^2 = 4$ parametri
- Total: $K + K^2 = 2 + 4 = 6$ parametri

Formula generală

VAR(p) cu K variabile: $K + pK^2$ parametri (excluzând $\boldsymbol{\Sigma}$)

Întrebarea 5

Întrebare

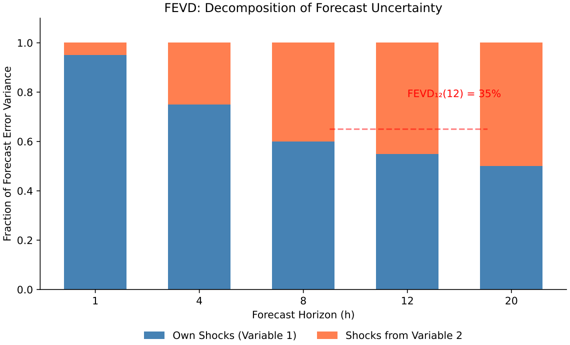
Ce înseamnă $\text{FEVD}_{12}(h) = 0.35$?

- **A** 35% din varianța totală a variabilei 1 este explicată de variabila 2
- **B** 35% din varianța erorii de prognoză la h pași a variabilei 1 se datorează șocurilor la variabila 2
- **C** Corelația între variabilele 1 și 2 la lag-ul h este 0.35
- **D** Variabila 2 explică 35% din răspunsul la impuls al variabilei 1

Întrebarea 5: Răspuns

Răspuns corect: (B) Descompunerea varianței erorii de prognoză

35% din varianța erorii de prognoză la h pași a variabilei 1 se datorează șocurilor de la variabila 2.



Referințe

- Lütkepohl, H. (2005). *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer.
- Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
- Sims, C.A. (1980). Macroeconomics and Reality. *Econometrica*, 48(1), 1-48.
- Granger, C.W.J. (1969). Investigating Causal Relations by Econometric Models. *Econometrica*, 37(3), 424-438.
- Toda, H.Y. & Yamamoto, T. (1995). Statistical Inference in Vector Autoregressions with Possibly Integrated Processes. *Journal of Econometrics*, 66(1-2), 225-250.