



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

# Capitolul 7: Cointegrare & VECM

Seminar



# Cuprins Seminar

- 1 Test de Recapitulare
- 2 Întrebări Adevărat/Fals
- 3 Probleme Practice
- 4 Exemple Rezolvate
- 5 Subiecte de Discuție
- 6 Exerciții pentru Studiu Individual

## Test 1: Definiția Cointegrării

### Întrebare

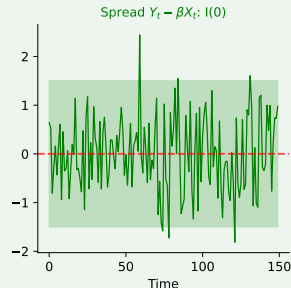
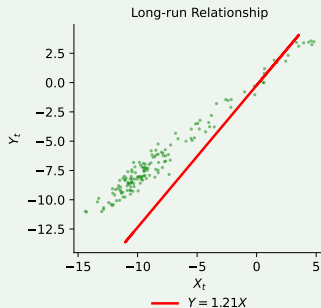
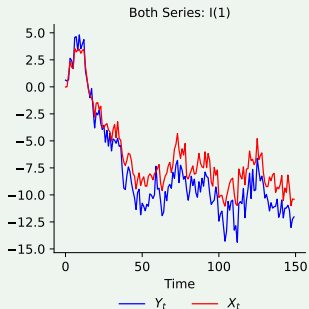
Două variabile  $I(1)$ ,  $X_t$  și  $Y_t$ , sunt cointegrate dacă:

- ☐ A) Ambele sunt staționare
- ☐ B) Suma lor este  $I(2)$
- ☐ C) O combinație liniară a lor este  $I(0)$
- ☐ D) Au aceeași medie

*Răspunsul pe slide-ul următor...*

## Test 1: Răspuns

Răspuns: C – O combinație liniară este  $I(0)$



**Cheie:**  $Y_t - \beta X_t \sim I(0)$  înseamnă că seriile au un trend stochastic comun. Combinația liniară (spread-ul) este staționară chiar dacă ambele serii sunt nestaționare.

### Întrebare

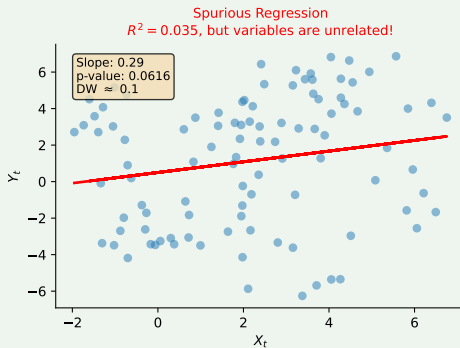
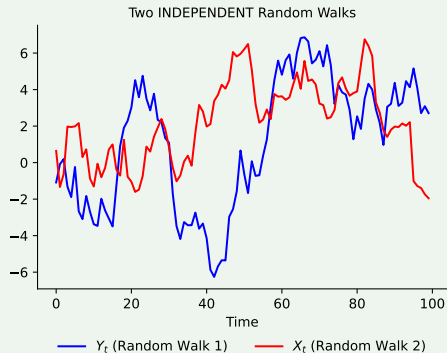
Când regresăm un mers aleator pe alt mers aleator independent, de obicei obținem:

- ☐ A)  $R^2$  mic și coeficienți nesemnificativi
- ☐ B)  $R^2$  mare și coeficienți semnificativi (fals!)
- ☐ C) Coeficienți zero
- ☐ D) Rezultate nedefinite

*Răspunsul pe slide-ul următor...*

## Test 2: Răspuns

Răspuns: B –  $R^2$  mare și coeficienți semnificativi (fals!)



**Granger-Newbold (1974):** Regresarea seriilor  $I(1)$  nerelaționate dă rezultate înșelătoare. Regulă: Dacă  $R^2 > DW$ , suspectați regresie falsă!

## Test 3: Testul Engle-Granger

### Întrebare

În metoda Engle-Granger în doi pași, ce testăm în pasul 2?

- A) Dacă variabilele originale sunt staționare
- B) Dacă reziduurile regresiei au rădăcină unitară
- C) Dacă coeficienții sunt semnificativi
- D) Dacă  $R^2$  este suficient de mare

*Răspunsul pe slide-ul următor...*

## Test 3: Răspuns

Răspuns: B – Dacă reziduurile au rădăcină unitară

**Pasul 1:** Rulăm OLS:  $Y_t = \alpha + \beta X_t + e_t$ , salvăm reziduurile  $\hat{e}_t$

**Pasul 2:** Test ADF pe reziduuri:  $\Delta \hat{e}_t = \rho \hat{e}_{t-1} + \dots$

- $H_0: \rho = 0$  (rădăcină unitară  $\Rightarrow$  fără cointegrare)
- $H_1: \rho < 0$  (staționar  $\Rightarrow$  cointegrare!)

**Important:** Folosiți valorile critice Engle-Granger, nu ADF standard!



## Test 4: Avantajul Testului Johansen

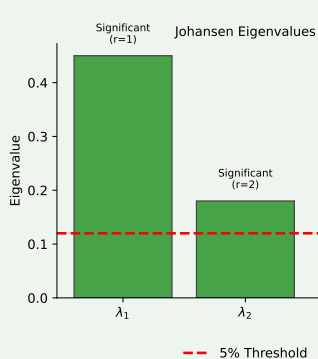
### Întrebare

Principalul avantaj al testului Johansen față de Engle-Granger este:

- ☐ A) Este mai simplu de calculat
- ☐ B) Poate detecta relații de cointegrare multiple
- ☐ C) Nu necesită date
- ☐ D) Găsește întotdeauna cointegrare

*Răspunsul pe slide-ul următor...*

### Răspuns: B – Poate detecta relații de cointegrare multiple



Johansen vs Engle-Granger

Method	Engle-Granger	Johansen
# of CI vectors	1 only	Multiple
Dep. variable	Required	Not needed
Estimation	Two-step	MLE
Efficiency	Lower	Higher

#### Avantaje Johansen:

- Testează pentru  $r = 0, 1, 2, \dots, k - 1$  vectori de cointegrare
- Verosimilitate maximă (mai eficient)
- Nu necesită alegerea variabilei dependente

### Întrebare

Într-un VECM cu  $k = 3$  variabile, dacă  $\text{rang}(\Pi) = 2$ , aceasta înseamnă:

- ☐ A) Fără cointegrare
- ☐ B) O relație de cointegrare
- ☐ C) Două relații de cointegrare
- ☐ D) Toate variabilele sunt staționare

*Răspunsul pe slide-ul următor...*

### Răspuns: C – Două relații de cointegrare

**Interpretarea rangului** pentru  $k$  variabile:

- $\text{rang}(\Pi) = 0$ : Fără cointegrare (folosiți VAR în diferențe)
- $0 < \text{rang}(\Pi) = r < k$ :  $r$  vectori de cointegrare (folosiți VECM)
- $\text{rang}(\Pi) = k$ : Toate variabilele sunt  $I(0)$  (folosiți VAR în niveluri)

**Cu  $k = 3$  și  $r = 2$ :**

- Două relații de echilibru
- Doar  $k - r = 1$  trend stochastic comun

### Întrebare

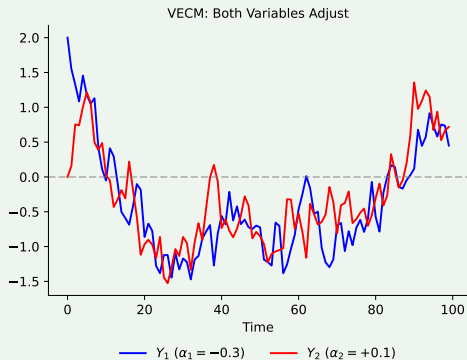
În ecuația VECM  $\Delta Y_t = c + \alpha\beta'Y_{t-1} + \dots$ , ce reprezintă  $\alpha$ ?

- A) Vectorii de cointegrare
- B) Coeficienții de ajustare (încărcare)
- C) Dinamica pe termen scurt
- D) Varianța erorilor

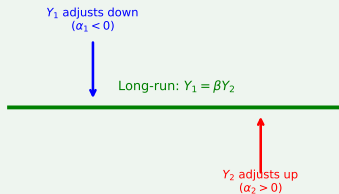
*Răspunsul pe slide-ul următor...*

## Test 6: Răspuns

### Răspuns: B – Coeficienții de ajustare (încărcare)



#### Error Correction Mechanism



$\Pi = \alpha\beta'$ :

- $\beta$  = vectorii de cointegrare (definesc echilibrul)
- $\alpha$  = vitezele de ajustare (cât de repede corectează fiecare variabilă)

## Test 7: Termenul de Corecție a Erorilor

### Întrebare

Dacă  $Y_t - \beta X_t$  este relația de cointegrare și acest termen este pozitiv, ce se întâmplă?

- ☐ A)  $Y$  este deasupra echilibrului;  $Y$  ar trebui să scadă (dacă  $\alpha < 0$ )
- ☐ B)  $Y$  este sub echilibru;  $Y$  ar trebui să crească
- ☐ C) Nimic, corecția erorilor nu afectează nivelurile
- ☐ D) Ambele variabile cresc

*Răspunsul pe slide-ul următor...*

## Test 7: Răspuns

Răspuns:  $A - Y$  deasupra echilibrului; scade dacă  $\alpha < 0$

Mecanismul de corecție a erorilor:

$$\Delta Y_t = \alpha(Y_{t-1} - \beta X_{t-1}) + \dots$$

- Dacă  $Y_{t-1} - \beta X_{t-1} > 0$ :  $Y$  este “prea sus”
- Cu  $\alpha < 0$ :  $\Delta Y_t < 0$  ( $Y$  scade spre echilibru)
- Aceasta este “corecția erorilor” care trage  $Y$  înapoi

**Convenție de semn:**  $\alpha$  ar trebui să fie negativ pentru ca variabila dependentă să se miște înapoi spre echilibru.



## Test 8: Exogenitate Slabă

### Întrebare

Dacă  $\alpha_2 = 0$  într-un VECM bivariat, aceasta înseamnă:

- ☐ A) Nu există cointegrare
- ☐ B) Variabila 2 nu se ajustează la dezechilibru (slab exogenă)
- ☐ C) Variabila 1 nu se ajustează
- ☐ D) Ambele variabile sunt staționare

*Răspunsul pe slide-ul următor...*

## Test 8: Răspuns

**Răspuns:** B – Variabila 2 este slab exogenă

**Exogenitate slabă:** Variabila nu răspunde la dezechilibru.

**Exemplu:** Ratele dobânzii

- Rata pe termen lung ( $R_t$ ) adesea slab exogenă ( $\alpha_R \approx 0$ )
- Rata pe termen scurt ( $r_t$ ) se ajustează la spread ( $\alpha_r < 0$ )
- Interpretare: Banca centrală ajustează rata scurtă pentru a menține structura termenelor

**Implicație:** Putem estima o singură ecuație pentru variabila care se ajustează.

### Întrebare

Testul trace Johansen cu  $H_0 : r \leq 1$  vs  $H_1 : r > 1$  testează dacă:

- ☐ A) Există exact un vector de cointegrare
- ☐ B) Există cel mult un vector de cointegrare
- ☐ C) Există mai mult de un vector de cointegrare
- ☐ D) Toate valorile proprii sunt zero

*Răspunsul pe slide-ul următor...*

## Test 9: Răspuns

Răspuns: B/C –  $H_0$ : cel mult 1;  $H_1$ : mai mult de 1

Procedura de testare secvențială:

- 1 Testăm  $H_0 : r = 0$  vs  $H_1 : r > 0$
- 2 Dacă respingem, testăm  $H_0 : r \leq 1$  vs  $H_1 : r > 1$
- 3 Continuăm până nu mai respingem...

Statistica trace:

$$\lambda_{\text{trace}}(r) = -T \sum_{i=r+1}^k \ln(1 - \hat{\lambda}_i)$$

Respingem  $H_0$  dacă statistica trace  $>$  valoarea critică.

## Test 10: VECM vs VAR în Diferențe

### Întrebare

Dacă variabilele sunt cointegrate, folosirea VAR în diferențe prime în loc de VECM:

- ☐ A) Dă rezultate identice
- ☐ B) Este mai eficientă
- ☐ C) Pierde informația pe termen lung (model greșit specificat)
- ☐ D) Este abordarea preferată

*Răspunsul pe slide-ul următor...*

## Test 10: Răspuns

Răspuns: C – Pierde informația pe termen lung

**Teorema Reprezentării Granger:** Dacă există cointegrare, reprezentarea VECM există și trebuie folosită.

	VAR( $\Delta$ )	VECM
Echilibru pe termen lung	Pierdut	Păstrat
Corecția erorilor	Nu	Da
Prognoze (termen lung)	Slabe	Mai bune

**Concluzie:** Diferențierea elimină relația pe termen lung pe care o reprezintă cointegrarea!

Determinați dacă fiecare afirmație este Adevărată sau Falsă:

- ❶ Cointegrarea necesită ca toate variabilele să fie  $I(1)$ .
- ❷ Vectorul de cointegrare este unic.
- ❸ Regresia falsă are statistică Durbin-Watson mică.
- ❹ În VECM, ambii coeficienți  $\alpha$  trebuie să fie nenuli.
- ❺ Testul Johansen necesită alegerea unei variabile dependente.
- ❻ Numărul de trenduri comune  $= k - r$ .

*Răspunsurile pe slide-ul următor...*

## Adevărat/Fals: Soluții

ADEVĂRAT

FALS

ADEVĂRAT

FALS

FALS

ADEVĂRAT

- 1 Cointegrarea necesită ca toate variabilele să fie  $I(1)$ .  
Cazul standard  $CI(1,1)$ : toate variabilele  $I(1)$ , combinația liniară  $I(0)$ .
- 2 Vectorul de cointegrare este unic.  
Unic doar până la înmulțirea cu un scalar. De obicei normalizat ( $\beta_1 = 1$ ).
- 3 Regresia falsă are statistică Durbin-Watson mică.  
 $DW \approx 0$  indică reziduuri puternic autocorelate (nestaționare).
- 4 În VECM, ambii coeficienți  $\alpha$  trebuie să fie nenuli.  
Unul poate fi zero (exogenitate slabă). Cel puțin unul trebuie să fie nenul.
- 5 Testul Johansen necesită alegerea unei variabile dependente.  
Asta e pentru Engle-Granger. Johansen tratează toate variabilele simetric.
- 6 Numărul de trenduri comune  $= k - r$ .  
 $k$  variabile,  $r$  relații de cointegrare  $\Rightarrow k - r$  trenduri stochastice comune.



## Problema 1: Identificarea Cointegrării

### Exercițiu

Aveți date trimestriale pentru consum ( $C_t$ ) și venit ( $Y_t$ ). Testele ADF arată că ambele sunt  $I(1)$ . Regresia  $C_t = 0.85Y_t + e_t$  dă reziduuri cu statistica ADF =  $-3.92$ . Valoarea critică Engle-Granger la 5% pentru 2 variabile este  $-3.34$ .

Sunt  $C_t$  și  $Y_t$  cointegrate?

*Răspunsul pe slide-ul următor...*

## Problema 1: Soluție

**Soluție:** Da, sunt cointegrate

**Test:**  $H_0$ : Fără cointegrare (reziduurile au rădăcină unitară)

**Statistica ADF:**  $-3.92$

**Valoarea critică (5%):**  $-3.34$

Deoarece  $-3.92 < -3.34$ , **respingem**  $H_0$  la nivelul de 5%.

**Concluzie:** Reziduurile sunt staționare  $\Rightarrow$  Există cointegrare!

**Interpretare:** Consumul și venitul au un trend comun. Vectorul de cointegrare este aproximativ  $(1, -0.85)$ , consistent cu ipoteza venitului permanent.

## Problema 2: Interpretarea VECM

### Exercițiu

Un VECM pentru rata pe termen scurt ( $r_t$ ) și rata pe termen lung ( $R_t$ ) dă:

$$\Delta r_t = 0.01 - 0.25(r_{t-1} - R_{t-1}) + \dots$$

$$\Delta R_t = 0.005 - 0.02(r_{t-1} - R_{t-1}) + \dots$$

Interpretați coeficienții de ajustare.

*Răspunsul pe slide-ul următor...*

## Problema 2: Soluție

### Soluție

**Termenul de corecție a erorilor:**  $(r_{t-1} - R_{t-1}) = \text{spread-ul}$

**Rata pe termen scurt** ( $\alpha_r = -0.25$ ):

- Când spread-ul este pozitiv (scurt > lung), rata scurtă scade
- 25% din dezechilibru este corectat per perioadă
- Rata scurtă se ajustează activ

**Rata pe termen lung** ( $\alpha_R = -0.02$ ):

- Coeficient de ajustare foarte mic
- Rata lungă este aproape slab exogenă
- Condușă mai mult de așteptări, nu de corecția erorilor

**Interpretare economică:** Banca centrală (rata scurtă) se ajustează pentru a menține curba randamentelor.

## Problema 3: Rezultatele Testului Johansen

### Exercițiu

Testul trace Johansen pentru 3 variabile dă:

$H_0$	Stat. Trace	VC 5%
$r = 0$	45.2	29.8
$r \leq 1$	18.1	15.5
$r \leq 2$	3.2	3.8

Care este rangul de cointegrare?

*Răspunsul pe slide-ul următor...*

## Problema 3: Soluție

Soluție: Rangul = 2

Testare secvențială:

- ❶  $H_0 : r = 0$ :  $45.2 > 29.8 \Rightarrow$  **Respingem** (cel puțin 1)
- ❷  $H_0 : r \leq 1$ :  $18.1 > 15.5 \Rightarrow$  **Respingem** (cel puțin 2)
- ❸  $H_0 : r \leq 2$ :  $3.2 < 3.8 \Rightarrow$  **Nu respingem**

Concluzie:  $r = 2$  relații de cointegrare

Implicații:

- Două relații de echilibru între 3 variabile
- Doar  $3 - 2 = 1$  trend stochastic comun
- Folosiți VECM cu 2 termeni de corecție a erorilor

## Exemplu: Structura la Termen a Ratelor Dobânzii

### Teoria Economică

Ipoteza aşteptărilor:  $R_t^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E_t[r_{t+i}] + \text{primă}$

Dacă prima este constantă  $\Rightarrow$  spread-ul ( $R_t - r_t$ ) ar trebui să fie staţionar.

### Constatări Tipice

- Ambele rate sunt  $I(1)$  (confirmat de ADF)
- Testul Johansen:  $r = 1$  vector de cointegrare
- Vector de cointegrare  $\approx (1, -1)$ : spread-ul este staţionar
- Rata scurtă se ajustează ( $\alpha_r < 0$ ), rata lungă slab exogenă

### Implicaţie de Politică

Banca centrală controlează rata scurtă; rata lungă este condusă de aşteptări.

# Exemplu: Paritatea Puterii de Cumpărare (PPP)

## Teoria PPP

$e_t = p_t - p_t^*$  (log curs de schimb = diferențialul de prețuri)

Cursul real de schimb:  $q_t = e_t - p_t + p_t^*$  ar trebui să fie staționar (PPP pe termen lung)

## Provocări Empirice

- Teste rădăcină unitară:  $e_t$ ,  $p_t$ ,  $p_t^*$  toate  $I(1)$
- Teste de cointegrare: Rezultate mixte în funcție de eșantion
- Timp de înjumătățire al deviațiilor PPP: 3-5 ani (ajustare lentă)
- Exogenitate slabă: Cursul de schimb adesea nu se ajustează

## Puzzle-ul PPP

Cursul real de schimb este foarte persistent—revenirea lentă la medie este greu de explicat cu modelele standard.



# Exemplu: Strategia Pairs Trading

## Ideea

Găsiți acțiuni cointegrate  $\Rightarrow$  tranzacționați spread-ul staționar

## Pași de Implementare

- ❶ **Identificați perechile:** Testați cointegrarea (ex., Coca-Cola & Pepsi)
- ❷ **Estimați spread-ul:**  $z_t = P_A - \beta P_B$
- ❸ **Reguli de tranzacționare:**
  - $z_t > \mu + 2\sigma$ : Vindeți A, Cumpărați B (spread prea larg)
  - $z_t < \mu - 2\sigma$ : Cumpărați A, Vindeți B (spread prea îngust)
  - leșiți când  $z_t \approx \mu$

## Riscuri

Cointegrarea se poate rupe; spread-ul poate să nu revină; costuri de tranzacție.

## Biblioteci Esențiale

```
from statsmodels.tsa.stattools import coint, adfuller  
from statsmodels.tsa.vector_ar.vecm import coint_johansen, VECM
```

## Flux de Lucru

- 1 Teste rădăcină unitară: `adfuller(serie)`
- 2 Engle-Granger: `coint(y, x)` returnează stat. test & p-value
- 3 Johansen: `coint_johansen(data, det_order, k_ar_diff)`
- 4 Estimare VECM: `model = VECM(data, k_ar_diff=2, coint_rank=1)`
- 5 Rezultate: `results = model.fit()`

## Notă

Exemple complete de lucru sunt furnizate în notebook-urile Jupyter.

### Întrebare Cheie

Două serii sunt puternic corelate. Sunt ele cointegrate?

### Răspuns: Nu neapărat!

- **Corelație:** Măsoară co-mișcarea (poate fi falsă pentru  $I(1)$ )
- **Cointegrare:** Necesită combinație liniară staționară

### Exemplu

Două mersuri aleatoare independente pot avea corelație  $> 0.9$  pur întâmplător (corelație falsă). Dar NU sunt cointegrate—spread-ul lor este tot  $I(1)$ .

**Cointegrarea** implică o relație de echilibru pe termen lung semnificativă.

### Întrebare Cheie

Testul Johansen are 5 cazuri pentru componentele deterministe. Pe care să îl alegem?

### Ghid

- ❶ **Fără constantă, fără trend:** Rar folosit (necesită date cu medie zero)
- ❷ **Constantă doar în EC:** Serii în nivel, fără drift
- ❸ **Constantă nerestricționată:** Cel mai comun pentru date economice
- ❹ **Trend în EC:** Seriile au trenduri deterministe
- ❺ **Trend nerestricționat:** Diferențe cu trend (necomun)

### Sfat Practic

Începeți cu Cazul 3 (constantă nerestricționată). Verificați sensibilitatea la specificație. Folosiți raționament economic: au nivelurile trenduri?

## Exerciții de Făcut Acasă

❶ **Teoretic:** Arătați că dacă  $Y_t$  și  $X_t$  sunt ambele mersuri aleatoare cu aceeași inovație, ele sunt cointegrate.

❷ **Calcul:** Având estimările VECM:

$$\Delta Y_t = 0.5 - 0.3(Y_{t-1} - 2X_{t-1}) + 0.2\Delta Y_{t-1}$$

$$\Delta X_t = 0.1 + 0.1(Y_{t-1} - 2X_{t-1}) + 0.4\Delta X_{t-1}$$

- Care este vectorul de cointegrare?
- Care variabilă se ajustează mai rapid?
- Care este relația de echilibru pe termen lung?

❸ **Aplicat:** Descărcați ratele trezoreriei la 10 ani și 3 luni:

- Testați pentru rădăcini unitare; Testați pentru cointegrare
- Estimați VECM; Interpretați coeficienții de ajustare

❹ **Gândire Critică:** De ce ar putea PPP să fie valabilă pe termen lung dar nu pe termen scurt?

## Indicii

- ❶ Dacă  $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$  și  $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$  (același șoc), atunci  $Y_t - X_t = Y_0 - X_0$  este constantă (staționară).
- ❷ Din VECM:
  - Vector de cointegrare:  $(1, -2)$  (normalizat pe  $Y$ )
  - $Y$  se ajustează mai rapid:  $|\alpha_Y| = 0.3 > |\alpha_X| = 0.1$
  - Termen lung:  $Y = 2X$  (când termenul EC = 0)
- ❸ Pentru ratele dobânzii:
  - Ambele sunt de obicei  $I(1)$ ; spread-ul de obicei staționar
  - Așteptați un vector de cointegrare cu  $(1, -1)$
  - Rata scurtă se ajustează de obicei; rata lungă adesea slab exogenă
- ❹ Deviații PPP: Costurile de transport, bunurile netranzactionate, prețurile rigide, tarifele, segmentarea pieței toate încetinesc ajustarea dar nu previn convergența pe termen lung.

# Concluzii Cheie din Acest Seminar

## Puncte Principale

- ❶ **Cointegrarea:** Variabile  $I(1)$  cu combinație liniară staționară
- ❷ **Regresia falsă:**  $R^2$  mare fără cointegrare este lipsit de sens
- ❸ **Engle-Granger:** Simplu, dar doar un vector de cointegrare
- ❹ **Johansen:** Vectori multipli, MLE, mai puternic

## Perspective VECM

- $\beta$  definește echilibrul;  $\alpha$  determină viteza de ajustare
- Exogenitate slabă ( $\alpha = 0$ ): Variabila nu răspunde la dezechilibru
- Folosiți întotdeauna VECM (nu VAR în diferențe) când există cointegrare

## Amintiți-vă

Cointegrarea este despre **echilibrul pe termen lung**, nu doar corelație!