



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

## Capitolul 5: Modele de Volatilitate

ARCH, GARCH, EGARCH, TGARCH



# Cuprins

- 1 Introducere în Modelarea Volatilității
- 2 Modelul ARCH
- 3 Modelul GARCH
- 4 Modele GARCH Asimetrice
- 5 Selectarea și Diagnosticarea Modelelor
- 6 Prognoza Volatilității
- 7 Implementare în Python
- 8 Studiu de Caz: S&P 500
- 9 Rezumat

La finalul acestui capitol, veți fi capabili să:

1. Înțelegeți **volatility clustering** și faptele stilizate ale randamentelor financiare
2. Estimați și interpretați modele **ARCH** și **GARCH**
3. Aplicați modele asimetrice (**EGARCH**, **GJR-GARCH**) pentru efectul de levier
4. Efectuați diagnosticarea și selectarea modelelor
5. Prognozați volatilitatea și calculați **Value at Risk (VaR)**

## Competențe Practice

- Implementare Python cu pachetul `arch`
- Interpretarea parametrilor și a persistenței volatilității
- Calculul VaR pentru managementul riscului

# De ce Modelăm Volatilitatea?

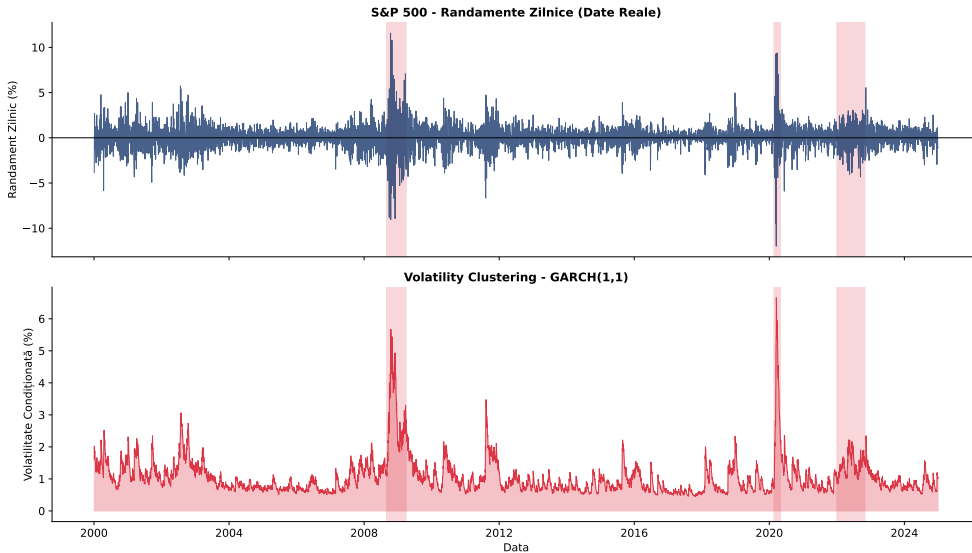
## Observații Empirice în Seriile Financiare

- Randamentele financiare prezintă **volatility clustering** — perioadele de volatilitate ridicată tind să fie urmate de perioade de volatilitate ridicată
- Distribuția randamentelor are **cozi groase** (leptokurtosis)
- Corelația randamentelor este aproape zero, dar corelația pătratelor este semnificativă
- Volatilitatea răspunde **asimetric** la șocuri (leverage effect)

## Limitarea Modelelor ARIMA

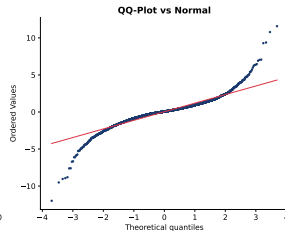
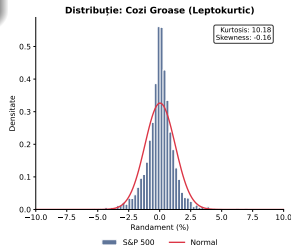
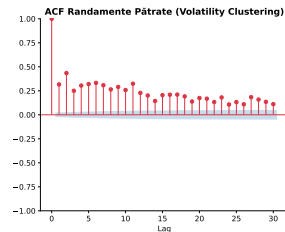
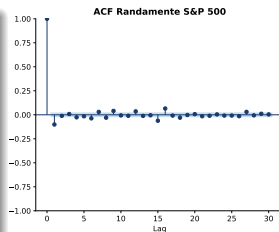
Modelele ARIMA presupun **varianță constantă** (homoscedasticitate), ceea ce nu este realist pentru seriile financiare!

# Volatility Clustering



## Proprietăți Observate

- 1 Absența autocorrelației în randamente
- 2 Autocorrelație semnificativă în  $r_t^2$  și  $|r_t|$
- 3 Cozi groase (kurtosis  $> 3$ )
- 4 Leverage effect — corelație negativă între randamente și volatilitate
- 5 Volatility clustering



## Definiție 1 (Varianță Condiționată)

Fie  $\{r_t\}$  o serie de randamente. **Varianța condiționată** la momentul  $t$  este:

$$\sigma_t^2 = \text{Var}(r_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}[(r_t - \mu_t)^2 | \mathcal{F}_{t-1}]$$

unde  $\mathcal{F}_{t-1}$  reprezintă informația disponibilă până la momentul  $t - 1$ .

## Modelul General

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \text{i.i.d.}(0, 1)$$

unde:

- $\mu_t$  = media condiționată (poate fi modelată ARMA)
- $\sigma_t^2$  = varianța condiționată (modelată ARCH/GARCH)
- $z_t$  = inovații standardizate (Normal, Student-t, GED)

## Modelul ARCH(q) — Engle (1982)

### Definitie 2 (ARCH(q))

Modelul **Autoregressive Conditional Heteroskedasticity** de ordin  $q$ :

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \text{i.i.d.}(0, 1)$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2$$

### Restricții pentru Stationaritate

- $\omega > 0$  (varianța de bază pozitivă)
- $\alpha_i \geq 0$  pentru  $i = 1, \dots, q$  (non-negativitate)
- $\sum_{i=1}^q \alpha_i < 1$  (stationaritate)

### Observatie 1

Robert Engle a primit **Premiul Nobel pentru Economie** în 2003 pentru dezvoltarea modelului ARCH!



## Proprietăți ale Modelului ARCH(1)

$$\text{ARCH}(1): \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

- **Varianța necondiționată:**  $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \frac{\omega}{1 - \alpha_1}$  (dacă  $\alpha_1 < 1$ )
- **Kurtosis:**  $\kappa = 3 \cdot \frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2}$  (dacă  $\alpha_1^2 < 1/3$ )
- Kurtosis  $> 3$  pentru  $\alpha_1 > 0 \Rightarrow$  **cozi groase!**

### Exemplu Numeric

Dacă  $\omega = 0.0001$  și  $\alpha_1 = 0.3$ :

- **Varianța necondiționată:**  $\sigma^2 = \frac{0.0001}{1-0.3} = 0.000143$
- **Kurtosis:**  $\kappa = 3 \cdot \frac{1-0.09}{1-0.27} = 3.74 > 3$

## Testul Engle pentru Efecte ARCH

### Procedură:

- 1 Estimează modelul pentru medie și obține reziduurile  $\hat{\varepsilon}_t$
- 2 Calculează  $\hat{\varepsilon}_t^2$
- 3 Regresează  $\hat{\varepsilon}_t^2$  pe lag-urile sale:

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \cdots + \beta_q \hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + u_t$$

- 4 Calculează statistica  $LM = T \cdot R^2 \sim \chi^2(q)$

### Ipoteze

- $H_0$ : Nu există efecte ARCH ( $\alpha_1 = \cdots = \alpha_q = 0$ )
- $H_1$ : Există efecte ARCH (cel puțin un  $\alpha_i \neq 0$ )

### Probleme Practice

- ❶ **Ordine mare** — de obicei sunt necesare multe lag-uri ( $q$  mare)
- ❷ **Mulți parametri** — dificultăți de estimare
- ❸ **Restricții de non-negativitate** — greu de impus pentru  $q$  mare
- ❹ **Nu capturează persistența** — volatilitatea observată este foarte persistentă

### Soluția

**Modelul GARCH** — introduce lag-uri ale varianței condiționate pentru a captura persistența cu mai puțini parametri!

## Modelul GARCH(p,q) — Bollerslev (1986)

### Definitie 3 (GARCH(p,q))

Modelul **Generalized ARCH**:

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \text{i.i.d.}(0, 1)$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

### Interpretare

- $\omega$  = nivel de bază al volatilității
- $\alpha_i$  = reacția la șocuri recente (news coefficients)
- $\beta_j$  = persistența volatilității (memory)
- $\alpha + \beta$  = persistența totală

# Modelul GARCH(1,1)

## Cel Mai Popular Model de Volatilitate

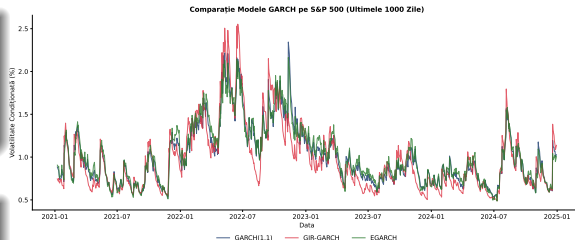
$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

### Restricții

- $\omega > 0$
- $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$
- $\alpha + \beta < 1$  (stationaritate)

### Proprietăți

- Varianța necondiționată:  $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$
- Half-life:  $HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha + \beta)}$



## GARCH(1,1) ca ARMA pentru $\varepsilon_t^2$

### Reprezentare ARMA(1,1)

Definim  $\nu_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$  (șocul varianței). Atunci:

$$\varepsilon_t^2 = \omega + (\alpha + \beta)\varepsilon_{t-1}^2 + \nu_t - \beta\nu_{t-1}$$

Aceasta este un **ARMA(1,1)** pentru  $\varepsilon_t^2$ !

### Implicații

- ACF al  $\varepsilon_t^2$  decade exponențial (ca ARMA)
- Persistența este dată de  $\alpha + \beta$
- PACF poate ajuta la identificarea ordinului

## Metoda Verosimilității Maxime (MLE)

Funcția de log-verosimilitate (distribuție normală):

$$\ell(\theta) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[ \ln(\sigma_t^2) + \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} \right]$$

## Distribuții Alternative pentru $z_t$

- **Student-t:** capturează cozile groase

$$f(z; \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{(\nu-2)\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{z^2}{\nu-2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

- **GED (Generalized Error Distribution):** flexibilitate pentru kurtosis
- **Skewed Student-t:** asimetrie și cozi groase

## Valori Tipice pentru GARCH(1,1)

Serie	$\alpha$	$\beta$	$\alpha + \beta$
S&P 500 zilnic	0.05–0.10	0.85–0.95	0.95–0.99
EUR/USD zilnic	0.03–0.08	0.90–0.95	0.95–0.99
Bitcoin zilnic	0.10–0.20	0.75–0.85	0.90–0.98
Obligațiuni	0.02–0.05	0.90–0.97	0.95–0.99

### Observații

- $\alpha + \beta$  aproape de 1  $\Rightarrow$  **volatilitate foarte persistentă**
- $\alpha$  mic,  $\beta$  mare  $\Rightarrow$  reacție lentă la șocuri, memorie lungă
- Bitcoin:  $\alpha$  mai mare  $\Rightarrow$  reacție mai rapidă la news



## Definitie 4 (IGARCH(1,1))

Când  $\alpha + \beta = 1$ :

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + (1 - \alpha) \sigma_{t-1}^2$$

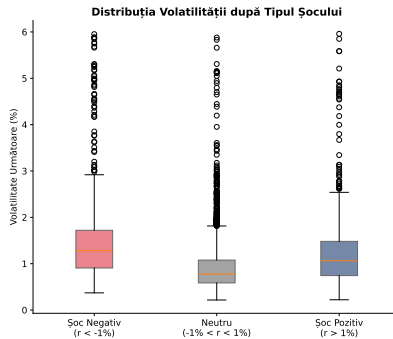
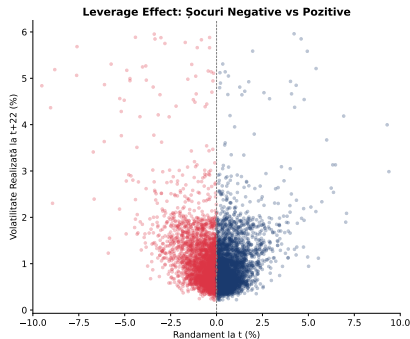
## Proprietăți

- Varianța necondiționată nu există (infinită)
- Șocurile au efect **permanent** asupra volatilității
- Folosit pentru serii cu persistență extremă
- Util pentru **RiskMetrics** (J.P. Morgan):  $\alpha = 0.06$ ,  $\beta = 0.94$

## Observatie 2

IGARCH este analog cu o rădăcină unitară în varianță!

# Leverage Effect



## Definiție

**Leverage effect:** Șocurile negative (scăderi de preț) tind să crească volatilitatea **mai mult** decât șocurile pozitive de aceeași magnitudine.

## Problema GARCH Standard

GARCH( $p, q$ ) derinde de  $\sigma^2$  — deci tratează șocurile pozitive și negative simetric

### Definitie 5 (EGARCH(1,1))

**Exponential GARCH:**

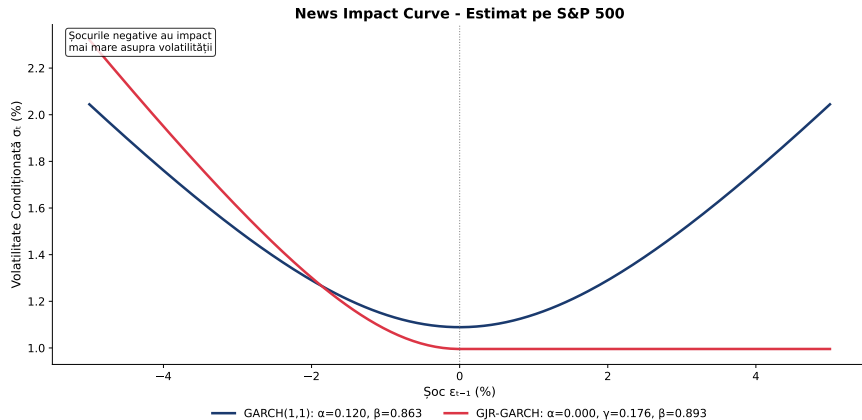
$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \alpha (|z_{t-1}| - \mathbb{E}[|z_{t-1}|]) + \gamma z_{t-1} + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2)$$

unde  $z_t = \varepsilon_t / \sigma_t$ .

### Avantaje EGARCH

- Nu necesită restricții de non-negativitate — modelează  $\ln(\sigma_t^2)$
- Captură leverage effect prin parametrul  $\gamma$ 
  - $\gamma < 0$ : șocuri negative  $\Rightarrow$  volatilitate mai mare
  - $\gamma = 0$ : efect simetric (ca GARCH)
- Persistența este dată de  $\beta$

# News Impact Curve — EGARCH



## Interpretare

**News Impact Curve:** arată cum volatilitatea viitoare  $\sigma_{t+1}^2$  depinde de șocul curent  $\varepsilon_t$ , menținând  $\sigma_t^2$  constant.

# Modelul GJR-GARCH (TGARCH)

## Definitie 6 (GJR-GARCH(1,1))

Glosten, Jagannathan & Runkle (1993):

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 \cdot I_{t-1} + \beta \sigma_{t-1}^2$$

$$\text{unde } I_{t-1} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \varepsilon_{t-1} < 0 \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

## Interpretare

- Șocuri pozitive ( $\varepsilon_{t-1} > 0$ ): impact =  $\alpha$
- Șocuri negative ( $\varepsilon_{t-1} < 0$ ): impact =  $\alpha + \gamma$
- Leverage effect prezent dacă  $\gamma > 0$

## Stationaritate

$$\alpha + \gamma/2 + \beta < 1$$

## Definitie 7 (TGARCH(1,1))

Zakoian (1994) — modelează deviația standard:

$$\sigma_t = \omega + \alpha^+ \varepsilon_{t-1}^+ + \alpha^- \varepsilon_{t-1}^- + \beta \sigma_{t-1}$$

unde  $\varepsilon_t^+ = \max(\varepsilon_t, 0)$  și  $\varepsilon_t^- = \max(-\varepsilon_t, 0)$ .

## Comparație Modele Asimetrice

Model	Specificație	Leverage
GARCH	$\sigma_t^2$	Nu
EGARCH	$\ln(\sigma_t^2)$	Da ( $\gamma < 0$ )
GJR-GARCH	$\sigma_t^2$ cu indicator	Da ( $\gamma > 0$ )
TGARCH	$\sigma_t$	Da ( $\alpha^- > \alpha^+$ )

### Criterii Informaționale

- **AIC** =  $-2\ell + 2k$
- **BIC** =  $-2\ell + k \ln(T)$
- **HQIC** =  $-2\ell + 2k \ln(\ln(T))$

unde  $\ell$  = log-verosimilitate maximizată,  $k$  = nr. parametri.

### Recomandări Practice

- GARCH(1,1) este suficient în **90% din cazuri**
- Verifică dacă modelul asimetric îmbunătățește semnificativ fit-ul
- Alege distribuția inovațiilor care minimizează AIC/BIC

## Reziduuri Standardizate

$$\hat{z}_t = \frac{\hat{\varepsilon}_t}{\hat{\sigma}_t}$$

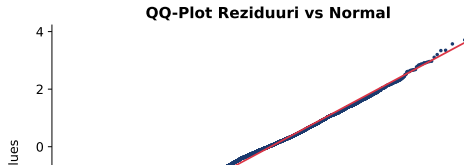
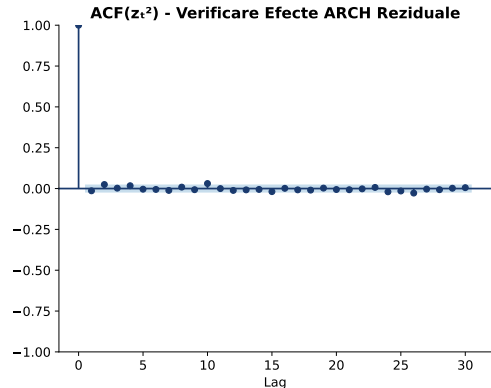
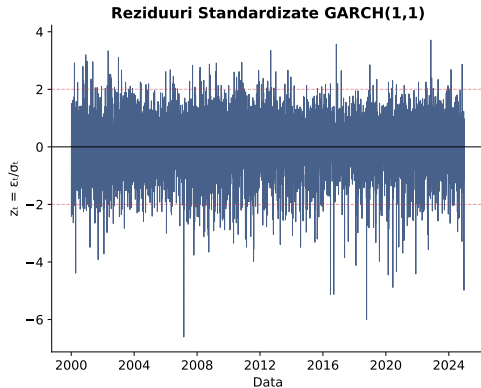
Dacă modelul este corect specificat,  $\hat{z}_t$  ar trebui să fie i.i.d.(0,1).

## Verificări Diagnostic

- ❶ **Ljung-Box pe  $\hat{z}_t$** : verifică absența autocorelației în medie
- ❷ **Ljung-Box pe  $\hat{z}_t^2$** : verifică absența efectelor ARCH reziduale
- ❸ **Test ARCH-LM pe  $\hat{z}_t$** : confirmare absență heteroscedasticitate
- ❹ **Histogramă + QQ-plot**: verifică distribuția asumată



# Exemplu Diagnostic



## Prognoza cu GARCH(1,1)

### Prognoză Un Pas Înainte

$$\hat{\sigma}_{T+1}^2 = \omega + \alpha \varepsilon_T^2 + \beta \sigma_T^2$$

### Prognoză Multi-Pas

Pentru  $h > 1$ :

$$\mathbb{E}_T[\sigma_{T+h}^2] = \bar{\sigma}^2 + (\alpha + \beta)^{h-1}(\sigma_{T+1}^2 - \bar{\sigma}^2)$$

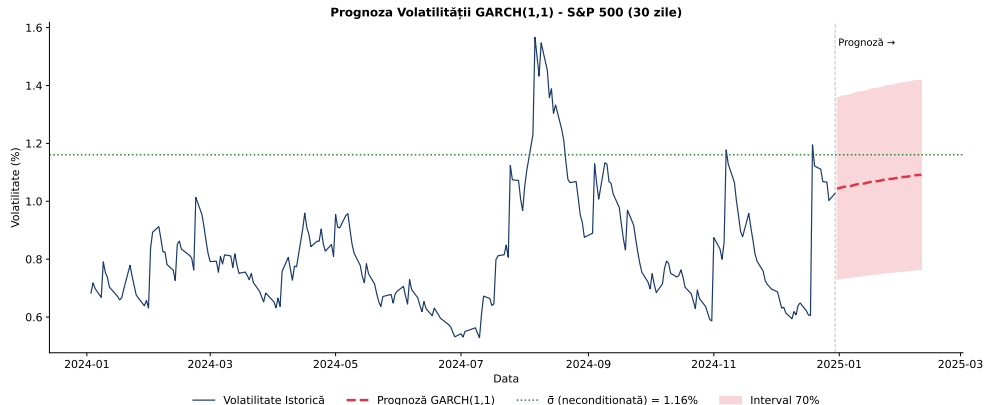
unde  $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$  = varianța necondiționată.

### Convergență

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{E}_T[\sigma_{T+h}^2] = \bar{\sigma}^2$$

Prognoza converge către varianța necondiționată!

# Prognoza Volatilității — Vizualizare



- Prognoza converge exponențial către  $\bar{\sigma}^2$
- Viteza de convergență depinde de  $\alpha + \beta$
- Cu cât  $\alpha + \beta$  mai aproape de 1, cu atât convergența mai lentă

## Value at Risk (VaR)

$$\text{VaR}_\alpha = -\mu_{T+1} + z_\alpha \cdot \sigma_{T+1}$$

Probabilitatea de a pierde mai mult decât VaR este  $\alpha$  (ex: 1%, 5%).

## Expected Shortfall

$$\text{ES}_\alpha = \mathbb{E}[-r_{T+1} | r_{T+1} < -\text{VaR}_\alpha]$$

## Alte Aplicații

- Prețul opțiunilor
- Hedging dinamic
- Alocarea portofoliului
- Stress testing
- Analiza scenariilor

### Calculul VaR pentru un Portofoliu

**Date:** Portofoliu de **1.000.000 EUR**, volatilitate prognozată  $\hat{\sigma}_{T+1} = 1.5\%$

### VaR cu Distribuție Normală

Nivel	$z_{\alpha}$	VaR (%)	VaR (EUR)
95% (1 zi)	1.645	2.47%	24.675
99% (1 zi)	2.326	3.49%	34.890
99% (10 zile)	$2.326 \cdot \sqrt{10}$	11.03%	110.314

### Scalare pentru Perioade Mai Lungi

$$\text{VaR}_{h \text{ zile}} = \text{VaR}_{1 \text{ zi}} \cdot \sqrt{h}$$

Această regulă presupune randamente i.i.d. — o aproximare pentru orizonturi scurte.

### De ce Student-t?

- Distribuția normală **subestimează** riscul de coadă
- Randamentele financiare au **cozi groase** (kurtosis  $> 3$ )
- Student-t cu  $\nu$  grade de libertate capturează mai bine extremele

### Comparație VaR 99% (1 zi) pentru $\sigma = 1.5\%$ , Portofoliu = 1M EUR

Distribuție	Cuantilă	VaR (EUR)
Normal	2.326	34.890
Student-t ( $\nu = 10$ )	2.764	41.460
Student-t ( $\nu = 6$ )	3.143	47.145
Student-t ( $\nu = 4$ )	3.747	56.205

### Observație

Cu  $\nu = 6$  (tipic pentru acțiuni), VaR este cu **35% mai mare** decât cel normal!

### Procedura de Calcul VaR

- 1 Estimează modelul GARCH(1,1) cu distribuție Student-t
- 2 Obține prognoza volatilității:  $\hat{\sigma}_{T+1}$
- 3 Calculează VaR:  $\text{VaR}_\alpha = t_\alpha(\nu) \cdot \hat{\sigma}_{T+1} \cdot \sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}}$

### Exemplu: S&P 500

- Parametri estimați:  $\alpha = 0.088$ ,  $\beta = 0.900$ ,  $\nu = 6.4$
- Volatilitate prognozată:  $\hat{\sigma}_{T+1} = 1.2\%$
- Portofoliu: 10.000.000 EUR

**VaR 99% (1 zi):**

$$\text{VaR} = 3.05 \times 0.012 \times 10.000.000 = \mathbf{366.000 \text{ EUR}}$$

### Instalare și Import

```
pip install arch
```

```
import numpy as np
import pandas as pd
from arch import arch_model
from arch.univariate import GARCH, EGARCH, ConstantMean
```

### Estimare GARCH(1,1)

```
# Presupunem returns = seria de randamente (%)
model = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, q=1,
                   dist='normal')
results = model.fit(dispatch='off')
print(results.summary())
```



## EGARCH

```
model_egarch = arch_model(returns, vol='EGARCH', p=1, q=1)
res_egarch = model_egarch.fit(dispatch='off')
```

## GJR-GARCH

```
model_gjr = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, o=1, q=1)
res_gjr = model_gjr.fit(dispatch='off')
```

## Distribuții Alternative

```
# Student-t
```

```
model_t = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, q=1,
                     dist='t')
```

```
# Skewed Student-t
```

```
model_skewt = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, q=1,
                        dist='skewt')
```

# Proгноză și Diagnostic

## Proгноză Volatilitate

```
# Proгноză 10 pași înainte
forecasts = results.forecast(horizon=10)
volatility_forecast = np.sqrt(forecasts.variance.values[-1, :])
```

## Reziduuri Standardizate

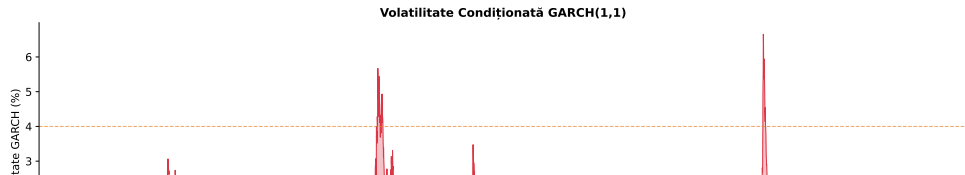
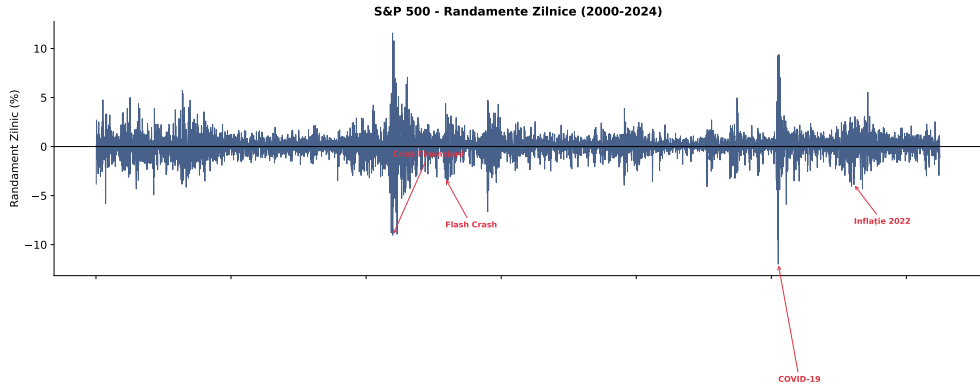
```
std_resid = results.std_resid

# Test Ljung-Box
from statsmodels.stats.diagnostic import acorr_ljungbox
lb_test = acorr_ljungbox(std_resid**2, lags=10)
```

## VaR Calculat

```
sigma_forecast = np.sqrt(forecasts.variance.values[-1, 0])
VaR_95 = 1.645 * sigma_forecast # pentru alpha = 5%
```

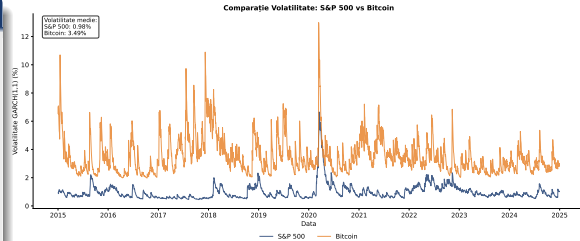
# Analiza Volatilității S&P 500



# Estimare GARCH(1,1) — S&P 500

## Rezultate Estimare

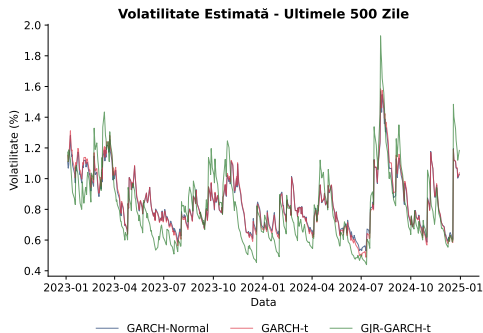
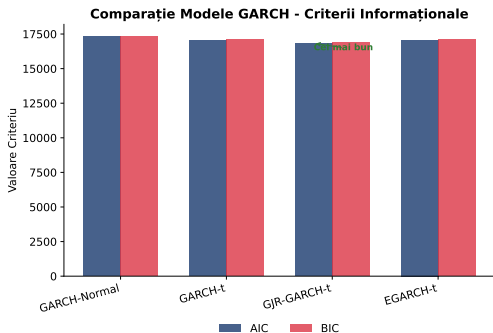
Parametru	Valoare
$\omega$	0.0108
$\alpha$	0.0883
$\beta$	0.9002
$\alpha + \beta$	0.9885
$\nu$ (Student-t df)	6.42



## Interpretare

- Volatilitate foarte persistentă
- Half-life  $\approx$  60 zile
- Cozi groase (Student-t)

# Comparație GARCH vs EGARCH — S&P 500



## Leverage Effect Confirmat

EGARCH:  $\gamma = -0.12$  (semnificativ negativ)  $\Rightarrow$  șocurile negative amplifică volatilitatea mai mult decât cele pozitive

## Modele de Volatilitate

- **ARCH(q):**  $\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$
- **GARCH(1,1):**  $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$
- **EGARCH:**  $\ln(\sigma_t^2) = \omega + \alpha(|z_{t-1}| - \mathbb{E}[|z|]) + \gamma z_{t-1} + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2)$
- **GJR-GARCH:**  $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 I_{t-1} + \beta \sigma_{t-1}^2$

## Proprietăți și Măsuri

- **Varianță necondiționată:**  $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$
- **Half-life:**  $HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha + \beta)}$
- **VaR:**  $\text{VaR}_\alpha = z_\alpha \cdot \sigma_{T+1}$
- **Stationaritate:**  $\alpha + \beta < 1$

## Test ARCH-LM

$LM = T \cdot R^2 \sim \chi^2(q)$  unde  $R^2$  provine din regresia  $\hat{\varepsilon}_t^2$  pe lag-urile sale

### Concepte Cheie

- **ARCH( $q$ )**: varianța condiționată depinde de pătratele erorilor trecute
- **GARCH( $p, q$ )**: adaugă lag-uri ale varianței pentru persistență
- **EGARCH**: permite leverage effect, fără restricții de pozitivitate
- **GJR-GARCH/TGARCH**: captură asimetria cu variabile indicator






### Aplicații

- Măsurarea și prognoza riscului (VaR, ES)
- Prețul derivatelor
- Managementul portofoliului

### Sfat Practic

Începe cu GARCH(1,1), verifică leverage effect, alege distribuția inovațiilor care minimizează AIC/BIC!

## Referințe

-  Engle, R.F. (1982). *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*. *Econometrica*, 50(4), 987-1007.
-  Bollerslev, T. (1986). *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307-327.
-  Nelson, D.B. (1991). *Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach*. *Econometrica*, 59(2), 347-370.
-  Glosten, L.R., Jagannathan, R., & Runkle, D.E. (1993). *On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks*. *The Journal of Finance*, 48(5), 1779-1801.
-  Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*. 3rd Edition, Wiley.