Analiza și Prognoza seriilor de timp

Capitolul 6: Modele VAR și Cauzalitate Granger

Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

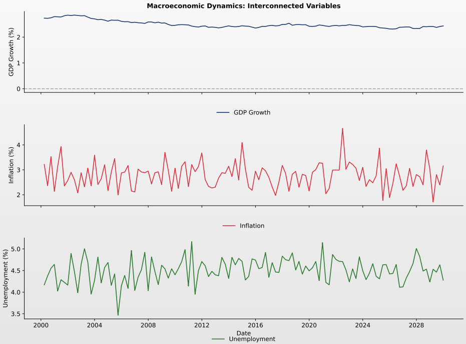
Cuprins

Obiective de învățare

La finalul acestui capitol, veți fi capabili să:

1. Înțelegeți **motivația** pentru analiza multivariată a seriilor de timp
2. Specificați și estimați modele **VAR(p)**
3. Aplicați teste de **cauzalitate Granger**
4. Interpretați **funcțiile de răspuns la impuls (IRF)**
5. Efectuați **descompunerea varianței erorii de prognoză (FEVD)**
6. Selectați ordinul optimal al lag-urilor folosind criterii informaționale
7. Implementați analiza VAR în **Python**

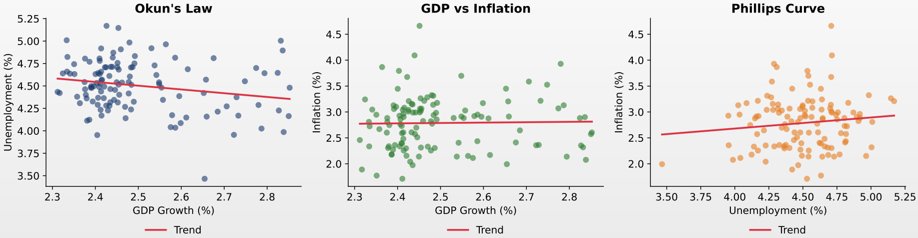
Exemplu motivațional: Dinamică macroeconomică



- Variabilele economice sunt **interconectate**: PIB afectează șomajul, inflația afectează ratele dobânzilor
- Modificările unei variabile se **propagă** prin sistem
- Înțelegerea acestor dinamici necesită analiza **multivariată**

TSA_charts/ch5_motivation_econ

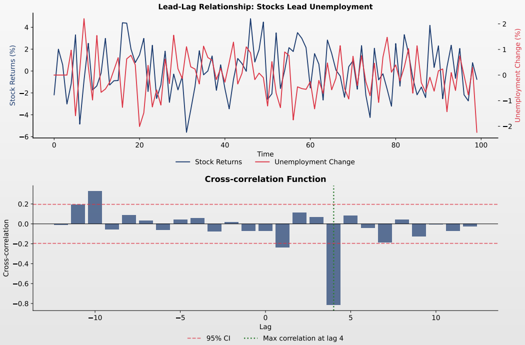
Ideea cheie: Variabilele interacționează



- **Legea lui Okun**: Creștere PIB mai mare ⇒ șomaj mai mic
- **Regula Taylor**: Inflație mai mare ⇒ rate ale dobânzii mai mari
- **Curba Phillips**: Compromis șomaj-inflație

TSA_charts/ch5_motivation_scatter

Relații de avans-întârziere



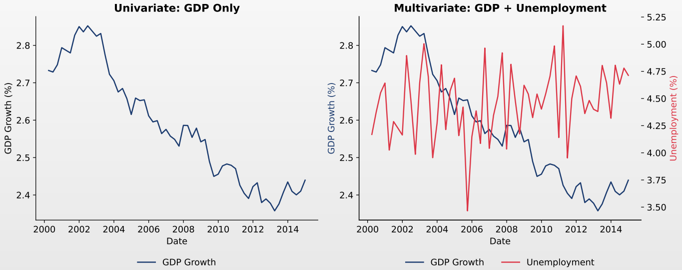
- Unele variabile **preced** altele: piața bursieră prezice activitatea economică
- Corelația încrucișată relevă **sincronizarea** relațiilor
- Corelație maximă la lag-ul 4: piața bursieră precede șomajul cu ∼4 luni

TSA_charts/ch5_motivation_leadlag

De ce modelele univariate nu sunt suficiente

Problema

Modelele ARIMA tratează fiecare variabilă **izolat**—ignorând informații valoroase din alte variabile!



TSA_charts/ch5_motivation_univariate

Ce vom învăța astăzi

Concepte fundamentale

1. **Modele VAR**: Cum să modelăm mai multe serii de timp împreună
2. **Cauzalitate Granger**: Ajută X la prezicerea lui Y?
3. **Funcții de răspuns la impuls**: Cum se propagă șocurile?
4. **Descompunerea varianței**: Ce determină fiecare variabilă?

Aplicații

- Analiza politicii macroeconomice (efectele politicii monetare)
- Dinamică piețelor financiare (relații acțiuni-obligațiuni)
- Analiza ciclului de afaceri (indicători avansați)
- Managementul riscului (transmisia volatilității)

De ce analiza multivariată?

Limitările modelelor univariate

- Modelele ARIMA tratează fiecare variabilă **izolat**
- Ignoră potențialele **interacțiuni** între variabile
- Nu pot captura **efectele de feedback**

Exemple economice de interdependență

- PIB și șomaj (legea lui Okun)
- Rate ale dobânzii și inflație (regula Taylor)
- Prețuri acțiuni și volum tranzacționat
- Cursuri de schimb și balanță comercială

Notația seriilor de timp multivariate

Vector de variabile

Fie $\mathbf{Y}_t = (Y_{1t}, Y_{2t}, \ldots, Y_{Kt})'$ un vector $K \times 1$ de serii de timp.

Exemplu cu $K = 2$:

$$\mathbf{Y}_t = \begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Creștere PIB}_t \\ \text{Inflație}_t \end{pmatrix}$$

Întrebări cheie

1. Ajută Y_1 la prezicerea lui Y_2? (Cauzalitate Granger)
2. Cum afectează șocurile în Y_1 pe Y_2? (Răspunsuri la impuls)
3. Ce proporție din varianța lui Y_2 se datorează lui Y_1? (Descompunerea varianței)

Staționaritate multivariată

Definiție: Staționaritate slabă

O serie de timp K-dimensională Y_t este **slab staționară** dacă:

1. $\mathbb{E}[\mathrm{Y}_t] = \boldsymbol{\mu}$ (vector de medie constant)
2. $\mathrm{Cov}(\mathrm{Y}_t, \mathrm{Y}_{t-h}) = \boldsymbol{\Gamma}(h)$ depinde doar de h, nu de t

Matricea de autocovarianță

$$\boldsymbol{\Gamma}(h) = \mathbb{E}[(\mathrm{Y}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathrm{Y}_{t-h} - \boldsymbol{\mu})'] = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(h) & \gamma_{12}(h) \\ \gamma_{21}(h) & \gamma_{22}(h) \end{pmatrix}$$

Notă: $\boldsymbol{\Gamma}(-h) = \boldsymbol{\Gamma}(h)'$ (transpusa, nu egală!)

Proprietăți ale covarianței încrucișate

Funcția de covarianță încrucișată

Pentru variabilele Y_{it} și Y_{jt}:

$$\gamma_{ij}(h) = \text{Cov}(Y_{it}, Y_{j,t-h}) = \mathbb{E}[(Y_{it} - \mu_i)(Y_{j,t-h} - \mu_j)]$$

Diferența cheie față de cazul univariat

- În general: $\gamma_{ij}(h) \neq \gamma_{ij}(-h)$
- Dar: $\gamma_{ij}(h) = \gamma_{ji}(-h)$
- Matricea de covarianță încrucișată **nu este simetrică** pentru $h \neq 0$

Exemplu

Dacă Y_1 precede Y_2: $\gamma_{12}(h) > 0$ pentru $h > 0$ dar $\gamma_{12}(h) \approx 0$ pentru $h < 0$

Matricea funcției de corelație

Definiție

Matricea de autocorelație la lag-ul h:

$$\mathrm{R}(h) = \mathrm{D}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}(h)\mathrm{D}^{-1}$$

unde $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_K)$ și $\sigma_i = \sqrt{\gamma_{ii}(0)}$

Pentru cazul bivariat

$$\mathrm{R}(h) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(h) & \rho_{12}(h) \\ \rho_{21}(h) & \rho_{22}(h) \end{pmatrix}$$

unde $\rho_{ij}(h) = \frac{\gamma_{ij}(h)}{\sigma_i \sigma_j}$

Elementele diagonale: ACF obișnuite; Extra-diagonale: corelații încrucișate

Modelul VAR(p)

Definiție

Un model **VAR(p)** pentru K variabile:

$$\mathrm{Y}_t = \mathrm{c} + \mathrm{A}_1\mathrm{Y}_{t-1} + \mathrm{A}_2\mathrm{Y}_{t-2} + \cdots + \mathrm{A}_p\mathrm{Y}_{t-p} + \varepsilon_t$$

unde:

- Y_t: vector $K \times 1$ de variabile endogene
- c: vector $K \times 1$ de constante
- A_i: matrice de coeficienți $K \times K$
- ε_t: vector $K \times 1$ de termeni de eroare cu $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$, $\mathbb{E}[\varepsilon_t\varepsilon_t'] = \mathbf{\Sigma}$

VAR(1) cu două variabile

VAR(1) bivariat

$$\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

Ecuație cu ecuație

$$Y_{1t} = c_1 + a_{11} Y_{1,t-1} + a_{12} Y_{2,t-1} + \varepsilon_{1t}$$
$$Y_{2t} = c_2 + a_{21} Y_{1,t-1} + a_{22} Y_{2,t-1} + \varepsilon_{2t}$$

Ideea cheie: Fiecare ecuație include lag-uri ale **tuturor** variabilelor!

Exemplu numeric: VAR(1)

Model VAR(1) specific

$$\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

Interpretarea coeficienților

- $a_{11} = 0.7$: O creștere de 1 unitate în Y_1 la $t-1$ crește Y_1 la t cu 0.7
- $a_{12} = 0.2$: O creștere de 1 unitate în Y_2 la $t-1$ crește Y_1 la t cu 0.2
- $a_{21} = -0.1$: O creștere de 1 unitate în Y_1 la $t-1$ **scade** Y_2 la t cu 0.1
- $a_{22} = 0.6$: O creștere de 1 unitate în Y_2 la $t-1$ crește Y_2 la t cu 0.6

VAR(2): Dinamică de ordin superior

Specificația VAR(2)

$$\mathrm{Y}_t = \mathrm{c} + \mathrm{A}_1\mathrm{Y}_{t-1} + \mathrm{A}_2\mathrm{Y}_{t-2} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

Pentru $K = 2$, modelul complet are $K(1 + pK) = 2(1 + 2 \cdot 2) = 10$ parametri per ecuație, $2 \times 10 = 20$ total (cu Σ: $+3$).

Dezvoltat

$$Y_{1t} = c_1 + a_{11}^{(1)} Y_{1,t-1} + a_{12}^{(1)} Y_{2,t-1} + a_{11}^{(2)} Y_{1,t-2} + a_{12}^{(2)} Y_{2,t-2} + \varepsilon_{1t}$$
$$Y_{2t} = c_2 + a_{21}^{(1)} Y_{1,t-1} + a_{22}^{(1)} Y_{2,t-1} + a_{21}^{(2)} Y_{1,t-2} + a_{22}^{(2)} Y_{2,t-2} + \varepsilon_{2t}$$

Blestemul dimensionalității

VAR(p) cu K variabile are $K + pK^2$ parametri. Cu $K = 5$, $p = 4$: $5 + 4 \times 25 = 105$ parametri!

Forma companion

Conversia VAR(p) la VAR(1)

Orice VAR(p) poate fi scris ca VAR(1) în **forma companion**:

$$\xi_t = A\xi_{t-1} + v_t$$

Pentru VAR(2)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \end{pmatrix}}_{\xi_t} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ I_K & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} Y_{t-1} \\ Y_{t-2} \end{pmatrix}}_{\xi_{t-1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_t}$$

Matricea companion A este $Kp \times Kp$.

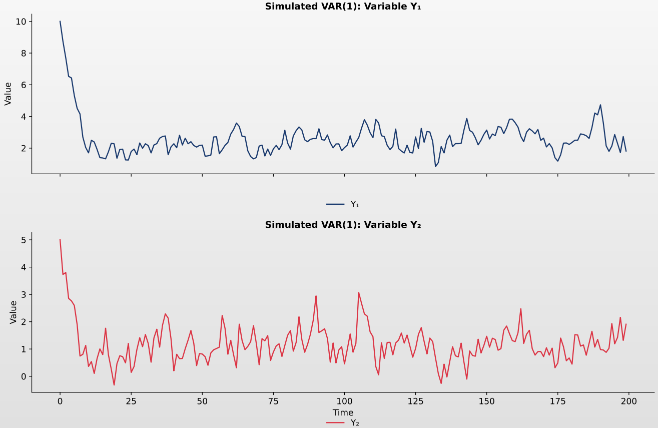
De ce este utilă?

Staționaritatea, prognoză și IRF sunt mai ușor de analizat în forma companion.

Proces VAR simulat

Observații

Două serii simulate dintr-un proces VAR(1) bivariat prezentând interdependența Fiecare variabilă răspunde atât la propriul trecut cât și la trecutul celeilalte variabile Observați cum seriile se mișcă împreună datorită dinamicii încrucișate



TSA_charts/ch5_var_simulation

Staționaritatea VAR

Condiția de stabilitate

VAR(p) este **stabil** (staționar) dacă toate rădăcinile lui:

$$\det(I_K - A_1 z - A_2 z^2 - \cdots - A_p z^p) = 0$$

se află **în afară** cercului unitate (adică $|z| > 1$).

Pentru VAR(1)

Modelul este stabil dacă toate **valorile proprii** ale lui A_1 sunt mai mici decât 1 în valoare absolută.

Exemplu: Pentru $A_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$, valorile proprii sunt $\lambda_1 = 0.6$ și $\lambda_2 = 0.2$.

Ambele $< 1 \Rightarrow$ stabil!

Calculul valorilor proprii: Exemplu

Pentru $A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$

Polinomul caracteristic: $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} 0.7-\lambda & 0.2 \\ -0.1 & 0.6-\lambda \end{pmatrix} = (0.7-\lambda)(0.6-\lambda) + 0.02 = 0$$

$$\lambda^2 - 1.3\lambda + 0.44 = 0$$

Soluție

Folosind formula de gradul 2:

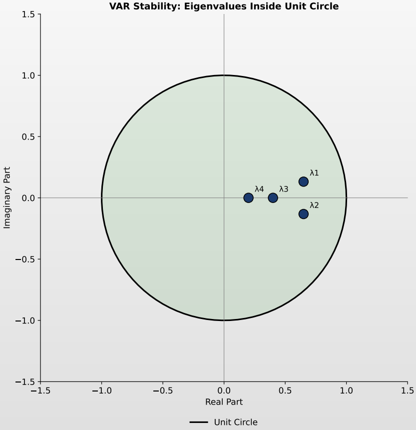
$$\lambda = \frac{1.3 \pm \sqrt{1.69 - 1.76}}{2} = \frac{1.3 \pm \sqrt{-0.07}}{2} = 0.65 \pm 0.132i$$

$|\lambda| = \sqrt{0.65^2 + 0.132^2} = \sqrt{0.44} = 0.663 < 1 \quad \checkmark$ Stabil!

Condiția de stabilitate: interpretare vizuală

Observații

Valorile proprii ale matricei companion trebuie să fie în interiorul cercului unitate Valorile proprii complexe vin în perechi conjugate Dacă vreo valoare proprie este în afără cercului, VAR este exploziv (nestaționar)



TSA_charts/ch5_stability_roots

Media unui VAR staționar

Media necondiționată

Pentru un VAR(1) staționar: $Y_t = c + AY_{t-1} + \varepsilon_t$
Luând medii:

$$\mathbb{E}[Y_t] = c + A\mathbb{E}[Y_{t-1}]$$

Deoarece $\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[Y_{t-1}] = \boldsymbol{\mu}$ (staționaritate):

$$\boldsymbol{\mu} = c + A\boldsymbol{\mu} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\mu} = (I_K - A)^{-1}c$$

Exemplu

Dacă $c = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.2 \\ 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

Structura covarianței pentru VAR(1)

Matricea varianță-covarianță $\boldsymbol{\Gamma}(0)$

Pentru VAR(1), varianța satisface **ecuația discretă Lyapunov**:

$$\boldsymbol{\Gamma}(0) = \mathrm{A}\boldsymbol{\Gamma}(0)\mathrm{A}' + \boldsymbol{\Sigma}$$

Autocovarianța la lag-ul h

$$\boldsymbol{\Gamma}(h) = \mathrm{A}^h\boldsymbol{\Gamma}(0), \quad h \geq 0$$

Aceasta arată că autocovarianțele scad geometric cu valorile proprii ale lui A.

Rezolvarea ecuației Lyapunov

Se poate rezolva prin vectorizare:

$$\mathrm{vec}(\boldsymbol{\Gamma}(0)) = (\mathrm{I}_{K^2} - \mathrm{A} \otimes \mathrm{A})^{-1}\mathrm{vec}(\boldsymbol{\Sigma})$$

unde $\otimes$ denotă produsul Kronecker.

Estimarea VAR

Estimarea OLS

Fiecare ecuație poate fi estimată prin **OLS separat**:

$$\hat{\mathrm{A}} = \left(\sum_{t=1}^{T} \mathrm{Y}_{t-1} \mathrm{Y}_{t-1}' \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^{T} \mathrm{Y}_{t-1} \mathrm{Y}_{t}' \right)$$

Aceasta este eficientă deoarece toate ecuațiile au **aceiași regresori**.

Matricea de covarianță

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T - Kp - 1} \sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t'$$

Erorile ε_{1t} și ε_{2t} pot fi **corelate contemporan**.

Selecția ordinului lag-ului

Criterii informaționale

Alegem p care minimizează:

$$\text{AIC}(p) = \ln|\hat{\Sigma}_p| + \frac{2pK^2}{T}$$

$$\text{BIC}(p) = \ln|\hat{\Sigma}_p| + \frac{pK^2 \ln T}{T}$$

$$\text{HQ}(p) = \ln|\hat{\Sigma}_p| + \frac{2pK^2 \ln\ln T}{T}$$

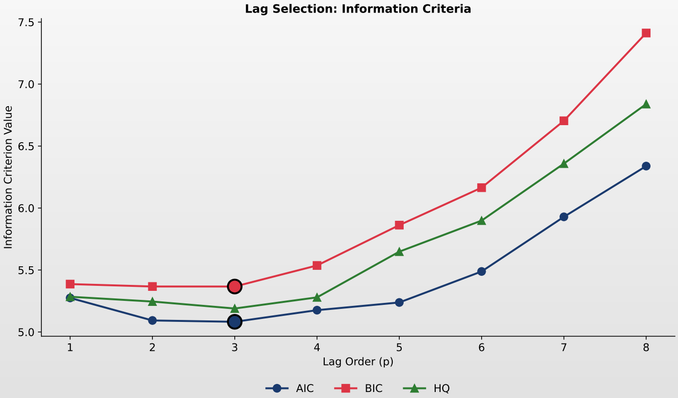
Îndrumări

- AIC tinde să selecteze modele **mai mari** (mai bune pentru prognoză)
- BIC tinde să selecteze modele **mai mici** (selecție consistentă)
- Începeți cu p_{max} maxim bazat pe frecvența datelor (ex. 4 pentru trimestrial, 12 pentru lunar)

Selecția lag-ului: Exemplu

Observații

Valorile criteriilor informaționale pentru diferite ordine ale lag-ului AIC și BIC pot sugera lag-uri optime diferite Valori mai mici indică o ajustare mai bună a modelului (penalizată de complexitate)



TSA_charts/ch5_lag_selection

Modele VAR restricționate

De ce restricționăm?

Modelele VAR complete pot fi **supraparametrizate**:

- Mulți coeficienți pot fi nesemnificativi
- Prognoze slabe
- Pierdere de grade de libertate

Restricții comune

- **Restricții de zero**: Setăm coeficienți mici la zero
- **Exogenitate de bloc**: Unele variabile nu afectează altele
- **Excluderea lag-urilor**: Excludem anumite lag-uri

Testarea restricțiilor

Folosim testul raportului de verosimilitate: $LR = T(\ln|\hat{\Sigma}_R| - \ln|\hat{\Sigma}_U|) \sim \chi^2_r$
unde r = numărul de restricții

Ce este cauzalitatea Granger?

Clive Granger (1969, Premiul Nobel 2003)

"X **cauzează Granger** pe Y" dacă valorile trecute ale lui X ajută la prezicerea lui Y, **dincolo de** ce pot prezice valorile trecute ale lui Y singure.

Distincție importantă

Cauzalitate Granger $\neq$ Cauzalitate reală

- Cauzalitatea Granger este despre **conținut predictiv**
- NU implică cauzare economică/structurală
- "X cauzează Granger pe Y" înseamnă: X conține informații utile pentru prognoza lui Y

Definiție formală

Cauzalitate Granger

X **nu cauzează Granger** pe Y dacă:

$$\mathbb{E}[Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \mathbb{E}[Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots]$$

Cu alte cuvinte: adăugarea istoricului lui X nu îmbunătățește predicția lui Y.

În contextul VAR

Pentru VAR(1): $Y_{1t} = c_1 + a_{11} Y_{1,t-1} + a_{12} Y_{2,t-1} + \varepsilon_{1t}$

Y_2 **nu** cauzează Granger pe Y_1 dacă $a_{12} = 0$.

Pentru VAR(p): Y_2 nu cauzează Granger pe Y_1 dacă $a_{12}^{(1)} = a_{12}^{(2)} = \cdots = a_{12}^{(p)} = 0$.

Testarea cauzalității Granger

Ipotezele testului

H_0: Y_2 **nu** cauzează Granger pe Y_1

$$H_0 : a_{12}^{(1)} = a_{12}^{(2)} = \cdots = a_{12}^{(p)} = 0$$

H_1: Cel puțin un $a_{12}^{(i)} \neq 0$ (există cauzalitate Granger)

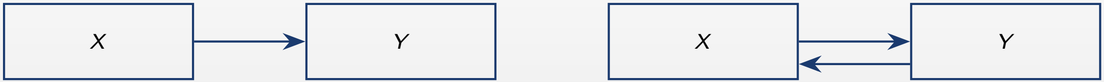
Statistica testului: Testul Wald

$$F = \frac{(RSS_R - RSS_U)/p}{RSS_U/(T - 2p - 1)} \sim F_{p,T-2p-1}$$

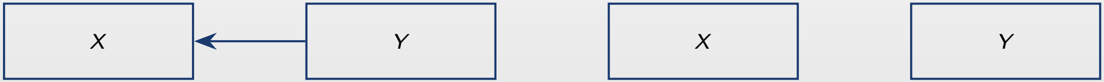
unde:

- RSS_R: Suma pătratelor reziduurilor din modelul restricționat (fără lag-urile lui Y_2)
- RSS_U: Suma pătratelor reziduurilor din modelul nerestricționat (VAR complet)

Tipuri de cauzalitate Granger



Unidirecțională: $X \to Y$ Bidirecțională: $X \leftrightarrow Y$



Unidirecțională: $Y \to X$ Fără cauzalitate

Exemple economice

- Masa monetară $\to$ Producție? (viziunea monetaristă)
- Prețurile acțiunilor $\leftrightarrow$ Volumul tranzacționat (bidirecțională)
- Vremea $\to$ Recolta (unidirecțională, evident)

Funcția de corelație încrucișată

Definiție 1 (Funcția de corelație încrucișată)

Corelația încrucișată între X_t și Y_t la lag-ul k este:

$$\rho_{XY}(k) = \frac{\gamma_{XY}(k)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\text{Cov}(X_t, Y_{t+k})}{\sqrt{\text{Var}(X_t)\text{Var}(Y_t)}}$$

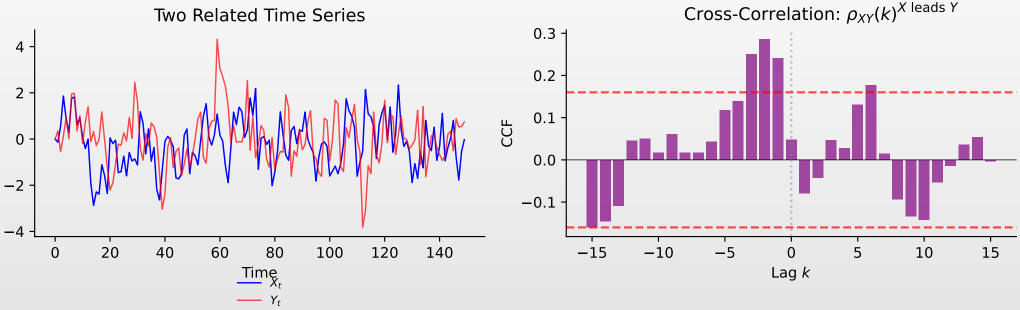
Interpretare

- $\rho_{XY}(k) > 0$ la $k > 0$: X este corelat pozitiv cu Y viitor (X poate precede Y)
- $\rho_{XY}(k) > 0$ la $k < 0$: X este corelat pozitiv cu Y trecut (Y poate precede X)

Notă

Spre deosebire de ACF, corelația încrucișată **nu este simetrică**: $\rho_{XY}(k) \neq \rho_{XY}(-k)$ în general.

Corelație încrucișată: Ilustrare vizuală



Stânga: două serii înrudite. Dreapta: CCF relevă că X precede Y (corelații semnificative la lag-uri pozitive).

TSA_charts/ch5_def_ccf

Cauzalitate Granger: considerații practice

Capcane comune

1. **Variabile omise**: O a treia variabilă Z poate cauza atât X cât și Y
2. **Nestaționaritate**: Testul necesită date staționare (sau cointegrare)
3. **Selecția lag-ului**: Rezultatele pot fi sensibile la p
4. **Mărimea eșantionului**: Necesită suficiente observații

Bune practici

- Testați mai întâi pentru rădăcini unitare
- Folosiți criterii multiple pentru selecția lag-ului
- Verificați robustețea la diferite ordine ale lag-ului
- Raportați rezultatele pentru ambele direcții

Test cauzalitate Granger: Exemplu numeric

Testare: Cauzează creșterea masei monetare Granger producția?

Model nerestricționat (VAR cu 2 lag-uri):

$$\Delta Y_t = c + \alpha_1 \Delta Y_{t-1} + \alpha_2 \Delta Y_{t-2} + \beta_1 \Delta M_{t-1} + \beta_2 \Delta M_{t-2} + \varepsilon_t$$

Model restricționat (H_0: $\beta_1 = \beta_2 = 0$):

$$\Delta Y_t = c + \alpha_1 \Delta Y_{t-1} + \alpha_2 \Delta Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

Calculul testului

Cu $T = 100$, $RSS_U = 45.2$, $RSS_R = 52.8$:

$$F = \frac{(52.8 - 45.2)/2}{45.2/(100-5)} = \frac{3.8}{0.476} = 7.98$$

$F_{0.05}(2, 95) = 3.09 \Rightarrow$ **Respingem** H_0: Banii cauzează Granger producția!

Procedura Toda-Yamamoto

Problema cu datele nestaționare

Testul Granger standard are **distribuții non-standard** când:

- Variabilele au rădăcini unitare
- Variabilele sunt cointegrate

Soluția Toda-Yamamoto (1995)

1. Determinăm ordinul maxim de integrare d_{max}
2. Estimăm VAR($p + d_{max}$) în **niveluri**
3. Testăm restricții doar pe primele p lag-uri
4. Lag-urile suplimentare d_{max} **nu sunt** testate (doar pentru distribuția corectă)

Avantaj

Testul Wald are distribuție asimptotică χ^2 indiferent de cointegrare!

Cauzalitate instantanee

Definiție

X **cauzează instantaneu** pe Y dacă:

$$\mathbb{E}[Y_t|\Omega_{t-1}, X_t] \neq \mathbb{E}[Y_t|\Omega_{t-1}]$$

unde Ω_{t-1} conține toate informațiile trecute.

Testarea în VAR

Testăm dacă $\sigma_{12} \neq 0$ în matricea de covarianță:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

Dacă $\sigma_{12} = 0$: nu există cauzalitate instantanee

Interpretare

Cauzalitatea instantanee reflectă adesea **șocuri comune** sau **agregarea datelor**, nu efecte contemporane reale.

Cauzalitate Granger în sisteme multiple

Testul exogenității de bloc

Într-un VAR cu $K > 2$ variabile, testăm dacă un **grup** de variabile cauzează Granger un alt grup.

Exemplu: Cauzează variabilele financiare (rate ale dobânzii, prețuri acțiuni) Granger variabilele reale (PIB, șomaj)?

Statistica testului

$$\chi^2 = T \cdot K_1 \cdot p \cdot \left(\ln |\hat{\Sigma}_R| - \ln |\hat{\Sigma}_U| \right) \sim \chi^2_{K_1 \cdot K_2 \cdot p}$$

unde K_1 = numărul de variabile "cauzate", K_2 = numărul de variabile "cauzatoare"

Ce sunt funcțiile de răspuns la impuls?

Definiție

O **Funcție de Răspuns la Impuls (IRF)** trasează efectul unui șoc punctual la o variabilă asupra valorilor curente și viitoare ale tuturor variabilelor.

Întrebarea la care răspund IRF-urile

"Dacă există un șoc neașteptat de 1 unitate la Y_1 astăzi, ce se întâmplă cu Y_1 și Y_2 în următoarele h perioade?"

Reprezentarea MA(∞)

Un VAR(p) stabil poate fi scris ca:

$$\mathrm{Y}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\Phi}_i \varepsilon_{t-i}$$

Matricele $\boldsymbol{\Phi}_i$ sunt **răspunsurile la impuls** la orizontul i.

Calculul IRF pentru VAR(1)

Pentru VAR(1): $\mathrm{Y}_t = \mathrm{c} + \mathrm{A}\mathrm{Y}_{t-1} + \varepsilon_t$

Matricele de răspuns la impuls sunt:

$$\Phi_0 = \mathrm{I}_K, \quad \Phi_1 = \mathrm{A}, \quad \Phi_2 = \mathrm{A}^2, \quad \ldots, \quad \Phi_h = \mathrm{A}^h$$

Interpretare

$[\Phi_h]_{ij}$ = Efectul asupra lui Y_i la momentul $t+h$ al unui șoc unitar la Y_j la momentul t

Pentru VAR stabil: $\Phi_h \to 0$ când $h \to \infty$ (șocurile dispar)

Calculul IRF pentru VAR(p) general

Formula recursivă pentru VAR(p)

Pentru $Y_t = c + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \cdots + A_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$:

$$\boldsymbol{\Phi}_h = \sum_{j=1}^{\min(h,p)} A_j \boldsymbol{\Phi}_{h-j}, \quad h = 1, 2, 3, \ldots$$

cu $\boldsymbol{\Phi}_0 = I_K$ și $\boldsymbol{\Phi}_h = 0$ pentru $h < 0$.

Exemplu: IRF pentru VAR(2)

- $\boldsymbol{\Phi}_0 = I_K$
- $\boldsymbol{\Phi}_1 = A_1 \boldsymbol{\Phi}_0 = A_1$
- $\boldsymbol{\Phi}_2 = A_1 \boldsymbol{\Phi}_1 + A_2 \boldsymbol{\Phi}_0 = A_1^2 + A_2$
- $\boldsymbol{\Phi}_3 = A_1 \boldsymbol{\Phi}_2 + A_2 \boldsymbol{\Phi}_1 = A_1(A_1^2 + A_2) + A_2 A_1$

IRF ortogonalizate

Problema: Erori corelate

Dacă $\boldsymbol{\Sigma}$ nu este diagonală, șocurile ε_{1t} și ε_{2t} sunt corelate.
Un șoc la "Y_1" implică și un șoc la "Y_2".

Soluție: Descompunerea Cholesky

Factorizăm $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{PP}'$ unde P este inferior triunghiulară.
Definim șocuri ortogonalizate: $\mathrm{u}_t = \mathrm{P}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t$ cu $\mathbb{E}[\mathrm{u}_t\mathrm{u}_t'] = \mathrm{I}$

IRF ortogonalizate: $\boldsymbol{\Theta}_h = \boldsymbol{\Phi}_h\mathrm{P}$

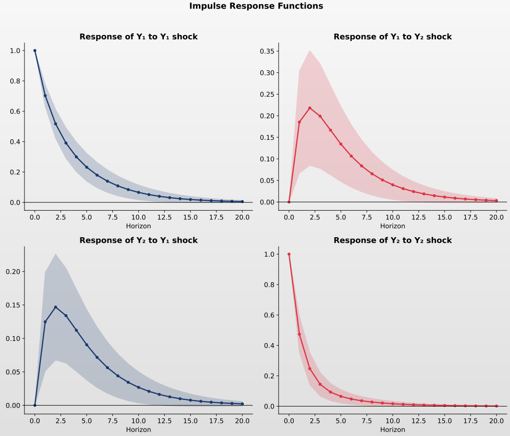
Ordinea contează!

Cholesky presupune variabilele ordonate de la "cea mai exogenă" la "cea mai endogenă". Rezultatele depind de această ordine.

Funcții de răspuns la impuls: Exemplu

Observații

IRF arată cum răspunde fiecare variabilă la un șoc unitar în timp Zonele umbrite reprezintă intervale de încredere (incertitudine în estimări) Pentru modele VAR stabile, răspunsurile converg la zero pe măsură ce orizontul crește.



TSA_charts/ch5_irf

Exemplu numeric IRF

Pentru $A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_1 = A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_2 = A^2 = \begin{pmatrix} 0.47 & 0.26 \\ -0.13 & 0.34 \end{pmatrix}$$

Interpretare

- $[\Phi_2]_{12} = 0.26$: Un șoc unitar la Y_2 crește Y_1 cu 0.26 după 2 perioade
- $[\Phi_2]_{21} = -0.13$: Un șoc unitar la Y_1 **scade** Y_2 cu 0.13 după 2 perioade

Răspunsuri la impuls cumulative

Definiție

IRF cumulativ până la orizontul H:

$$\mathbf{\Psi}_H = \sum_{h=0}^{H} \mathbf{\Phi}_h$$

Măsoară **efectul total acumulat** al unui șoc.

Multiplicatorul pe termen lung

Pentru VAR stabil: $\mathbf{\Psi}_\infty = (\mathbf{I}_K - \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 - \cdots - \mathbf{A}_p)^{-1}$

Aceasta dă **efectul permanent** al unui șoc punctual.

Când să folosim

IRF cumulative sunt utile când ne interesează impactul total (ex. pierderea cumulată de PIB după un șoc).

Intervale de încredere pentru IRF

Surse de incertitudine

IRF sunt funcții de parametrii estimați $\hat{A}_1, \ldots, \hat{A}_p$, deci au **incertitudine de eșantionare**.

Metode pentru benzi de încredere

1. **Asimptotice**: Folosim metoda delta pentru a deriva erorile standard
2. **Monte Carlo**: Simulăm din distribuția asimptotică a lui $\hat{A}$
3. **Bootstrap**: Reeșantionăm reziduurile și reestimăm VAR

Procedura Bootstrap

1. Estimăm VAR, salvăm reziduurile $\{\hat{\varepsilon}_t\}$
2. Extragem cu înlocuire pentru a crea $\{\hat{\varepsilon}_t^*\}$
3. Generăm eșantion bootstrap folosind VAR estimat
4. Reestimăm și calculăm IRF
5. Repetăm de B ori; folosim percentilele pentru IC

VAR Structural (SVAR)

Motivație

Șocurile VAR standard ε_t sunt inovații de **formă redusă**—combinații liniare de șocuri structurale.

Vrem să identificăm **șocuri structurale** semnificative economic.

Forma structurală

$$\mathrm{B}_0\mathrm{Y}_t = \boldsymbol{\Gamma}_0 + \mathrm{B}_1\mathrm{Y}_{t-1} + \cdots + \mathrm{B}_p\mathrm{Y}_{t-p} + \mathrm{u}_t$$

unde u_t sunt **șocuri structurale** cu $\mathbb{E}[\mathrm{u}_t\mathrm{u}_t'] = \mathrm{I}_K$

Relația cu forma redusă

$\varepsilon_t = \mathrm{B}_\mathbf{0}^{-\mathbf{1}}\mathrm{u}_t \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{B}_\mathbf{0}^{-\mathbf{1}}(\mathrm{B}_\mathbf{0}^{-\mathbf{1}})'$

Identificare în SVAR

Problema identificării

Σ are $K(K+1)/2$ elemente unice, dar B_0^{-1} are K^2 elemente.

Avem nevoie de $K(K-1)/2$ restricții suplimentare!

Scheme comune de identificare

1. **Restricții pe termen scurt**: Efecte de impact zero (Cholesky)
2. **Restricții pe termen lung**: Efecte zero pe termen lung (Blanchard-Quah)
3. **Restricții de semn**: Constrângeri de inegalitate pe IRF
4. **Instrumente externe**: Folosim informații din afară

Exemplu: Ordonare Cholesky (recursivă)

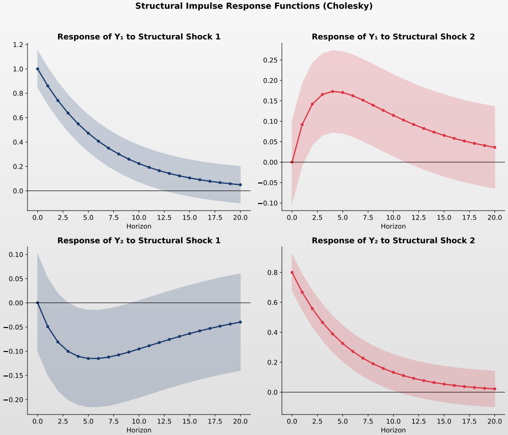
Pentru $K=2$: $B_0^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

Variabila 1 nu răspunde la șocul 2 contemporan.

Exemplu IRF structural

Observații

IRF structurale bazate pe identificare Cholesky Ordinea variabilelor afectează interpretarea șocurilor Prima variabilă răspunde doar la propriile șocuri contemporan



TSA_charts/ch5_structural_irf

Descompunerea varianței

Întrebare

Ce proporție din varianța erorii de prognoză a lui Y_i la orizontul h se datorează șocurilor la Y_j?

Formula FEVD

$$\text{FEVD}_{ij}(h) = \frac{\sum_{s=0}^{h-1} [\Theta_s]_{ij}^2}{\sum_{s=0}^{h-1} \sum_{k=1}^{K} [\Theta_s]_{ik}^2}$$

Aceasta dă **procentul** din varianța prognozei la h pași a lui Y_i explicat de șocurile la Y_j.

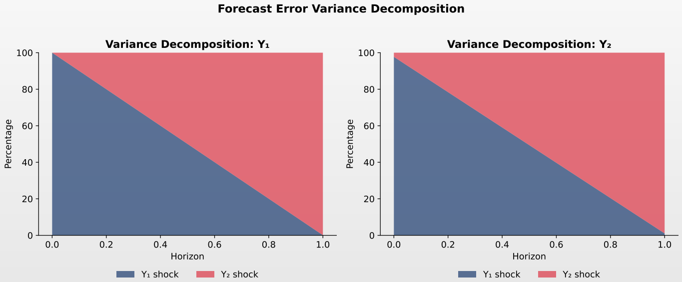
Proprietăți

- $0 \leq \text{FEVD}_{ij}(h) \leq 1$
- $\sum_{j=1}^{K} \text{FEVD}_{ij}(h) = 1$ (suma la 100%)
- La $h = 1$: Șocurile proprii domină (prin construcția Cholesky)

FEVD: Exemplu

Observații

FEVD arată proporția din varianța prognozei atribuibilă fiecărui șoc La orizonturi scurte, șocurile proprii domină; efectele încrucișate cresc în timp Util pentru înțelegerea importanței relative a diferitelor șocuri în sistem



TSA_charts/ch5_fevd

FEVD: Exemplu numeric

Calculul FEVD pentru VAR bivariat

Folosind IRF ortogonalizate Θ_h, FEVD la orizontul H:

$$\text{FEVD}_{11}(H) = \frac{\sum_{h=0}^{H-1} \theta_{11}^2(h)}{\sum_{h=0}^{H-1} [\theta_{11}^2(h) + \theta_{12}^2(h)]}$$

Exemplu de calcul

h	$\theta_{11}(h)$	$\theta_{12}(h)$	$\theta_{11}^2(h)$	$\theta_{12}^2(h)$
0	1.00	0.00	1.00	0.00
1	0.70	0.20	0.49	0.04
2	0.47	0.26	0.22	0.07

$$\text{FEVD}_{11}(3) = \frac{1.00+0.49+0.22}{1.00+0.49+0.22+0.00+0.04+0.07} = \frac{1.71}{1.82} = 94\%$$

Descompunerea istorică

Definiție

Descompunerea istorică descompune fiecare valoare observată în contribuții de la fiecare șoc structural:

$$Y_{it} - \bar{Y}_i = \sum_{j=1}^{K} \sum_{s=0}^{t-1} \theta_{ij}(s) \cdot u_{j,t-s}$$

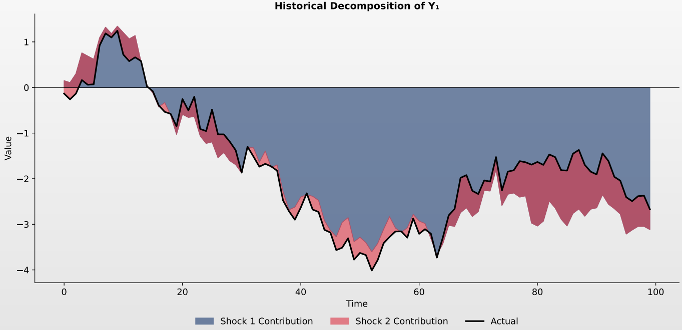
Aplicație

- "Cât din scăderea PIB din 2008 s-a datorat șocurilor financiare vs. șocurilor petroliere?"
- Atribuie mișcările istorice unor șocuri identificate specifice
- Util pentru analiza politicilor și interpretarea narativă

Descompunerea istorică: Exemplu

Observații

Fiecare culoare reprezintă contribuția unui șoc structural diferit
Contribuțiile stivuite însumează abaterea reală observată de la medie
Ajută la identificarea șocurilor care au determinat episoadele istorice



TSA_charts/ch5_historical_decomp

Diagnosticarea reziduurilor

Ce trebuie verificat

După estimarea VAR, verificăm că reziduurile $\hat{\varepsilon}_t$ se comportă ca zgomot alb:

1. Fără corelație serială
2. Varianță constantă (homoscedasticitate)
3. Normalitate (pentru inferență)

De ce contează

- Reziduuri autocorelate $\Rightarrow$ estimări ineficiente
- Heteroscedasticitate $\Rightarrow$ erori standard invalide
- Non-normalitate $\Rightarrow$ inferența poate fi nesigură

Testarea corelației seriale

Testul Portmanteau (Ljung-Box)

$$Q_h = T(T+2)\sum_{j=1}^{h} \frac{1}{T-j}\text{tr}(\hat{C}_j'\hat{C}_0^{-1}\hat{C}_j\hat{C}_0^{-1})$$

unde $\hat{C}_j = \frac{1}{T}\sum_{t=j+1}^{T} \hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_{t-j}'$
Sub H_0 (fără autocorelație): $Q_h \sim \chi^2_{K^2(h-p)}$

Testul LM Breusch-Godfrey

1. Regresăm $\hat{\varepsilon}_t$ pe $\hat{\varepsilon}_{t-1}, \ldots, \hat{\varepsilon}_{t-h}$ și regresorii originali
2. $LM = T \cdot R^2 \sim \chi^2_{K^2 h}$ sub H_0

Dacă este respins

Luați în considerare creșterea ordinului lag-ului p sau adăugarea de variabile suplimentare.

Testarea heteroscedasticității

Testul ARCH-LM

Testează pentru heteroscedasticitate condiționată autoregresivă în reziduuri:

$$\hat{\varepsilon}_{it}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}_{i,t-1}^2 + \cdots + \alpha_q \hat{\varepsilon}_{i,t-q}^2 + v_t$$

H_0: $\alpha_1 = \cdots = \alpha_q = 0$ (homoscedasticitate)
$LM = TR^2 \sim \chi_q^2$

Versiunea multivariată

Testăm toate ecuațiile împreună folosind:

$$\text{vech}(\hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t') = \text{c} + \sum_{j=1}^{q} \text{B}_j \text{vech}(\hat{\varepsilon}_{t-j} \hat{\varepsilon}_{t-j}') + \text{v}_t$$

Testarea normalității

Testul Jarque-Bera (univariat)

$$JB = \frac{T}{6}\left(S^2 + \frac{(K-3)^2}{4}\right) \sim \chi^2_2$$

unde S = asimetrie, K = curtoză

Normalitate multivariată (Doornik-Hansen)

Transformăm reziduurile și testăm asimetria și curtoza comune:

$$DH = s_1'(\Omega^{-1/2})'(\Omega^{-1/2})s_1 + s_2'(\Omega^{-1/2})'(\Omega^{-1/2})s_2 \sim \chi^2_{2K}$$

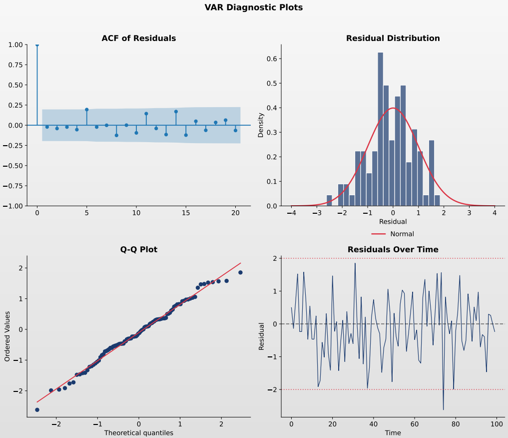
Notă

Normalitatea este adesea respinsă în datele financiare. Luați în considerare erori standard robuste dacă non-normalitatea este severă.

Grafic rezumat diagnostic

Observații

ACF reziduurilor nu ar trebui să arate autocorelație semnificativă Histograma ar trebui să aproximeze distribuția normală Graficul Q-Q ar trebui să urmeze linia de 45 de grade



TSA_charts/ch5_diagnostics

Prognoze punctuale din VAR

Prognoză iterativă

Pentru VAR(1): $Y_t = c + AY_{t-1} + \varepsilon_t$

Prognoză la 1 pas: $\hat{Y}_{T+1|T} = c + AY_T$
Prognoză la 2 pași: $\hat{Y}_{T+2|T} = c + A\hat{Y}_{T+1|T}$
Prognoză la h pași: $\hat{Y}_{T+h|T} = c + A\hat{Y}_{T+h-1|T}$

Formula directă

$$\hat{Y}_{T+h|T} = (I + A + A^2 + \cdots + A^{h-1})c + A^h Y_T$$

Pentru VAR stabil: converge la $\mu = (I - A)^{-1}c$ când $h \to \infty$

Eroarea de prognoză și MSE

Eroarea de prognoză la h pași

$$\mathbf{e}_{T+h|T} = \mathbf{Y}_{T+h} - \hat{\mathbf{Y}}_{T+h|T} = \sum_{j=0}^{h-1} \mathbf{A}^j \boldsymbol{\varepsilon}_{T+h-j}$$

Matricea erorii medii pătratice

$$\text{MSE}(\hat{\mathbf{Y}}_{T+h|T}) = \mathbb{E}[\mathbf{e}_{T+h|T}\mathbf{e}'_{T+h|T}] = \sum_{j=0}^{h-1} \mathbf{A}^j \boldsymbol{\Sigma} (\mathbf{A}^j)'$$

Ideea cheie

- MSE crește cu orizontul h
- Pentru VAR stabil: MSE converge la varianța necondiționată $\boldsymbol{\Gamma}(0)$
- Prognoze pe termen lung $\to$ media necondiționată cu incertitudine $= \boldsymbol{\Gamma}(0)$

Intervale de încredere pentru prognoză

Construirea intervalelor

Pentru erori distribuite normal, interval de încredere $(1-\alpha)$:

$$\hat{Y}_{i,T+h|T} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{[\mathrm{MSE}(\hat{Y}_{T+h|T})]_{ii}}$$

Regiuni de încredere comune

Pentru mai multe variabile, folosim elipsoizi:

$$(Y_{T+h} - \hat{Y}_{T+h|T})'[\mathrm{MSE}(\hat{Y}_{T+h|T})]^{-1}(Y_{T+h} - \hat{Y}_{T+h|T}) \leq \chi^2_{K,\alpha}$$

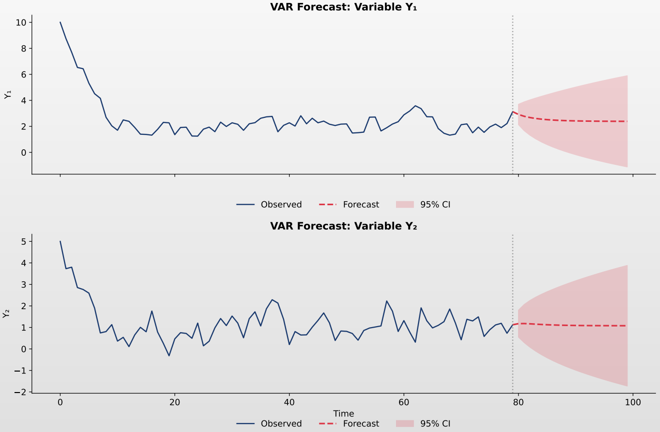
Notă

Acestea presupun parametri cunoscuți. Metodele bootstrap țin cont de incertitudinea parametrilor.

Prognoze VAR: Exemplu

Observații

Prognozele punctuale sunt arătate ca linie continuă dincolo de datele observate. Intervalele de încredere se lărgesc pe măsură ce orizontul de prognoză crește. Prognozele converg la media necondiționată pentru orizonturi lungi.



TSA_charts/ch5_var_forecast

Evaluarea prognozei

Evaluare out-of-sample

Împărțim datele: eșantion de estimare (1 la T_1) și eșantion de testare ($T_1 + 1$ la T). Calculăm erorile de prognoză: $e_{t+h} = Y_{t+h} - \hat{Y}_{t+h|t}$

Metrici comune

- **RMSE**: $\sqrt{\frac{1}{n}\sum e_{t+h}^2}$ **MAE**: $\frac{1}{n}\sum |e_{t+h}|$ **MAPE**: $\frac{100}{n}\sum \left|\frac{e_{t+h}}{Y_{t+h}}\right|$

Testul Diebold-Mariano

Testează dacă prognozele VAR sunt semnificativ mai bune decât alternativa: $DM = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\hat{\sigma}_d^2/n}} \sim N(0,1)$ unde $d_t = L(e_{1t}) - L(e_{2t})$ este diferențiala de pierdere.

Exemplu: PIB și șomaj

Legea lui Okun

Există o relație negativă între creșterea PIB și șomaj:

$$\Delta U_t \approx -\beta(\Delta Y_t - \bar{g})$$

unde $\bar{g}$ este creșterea tendențială a PIB și $\beta \approx 0.4$.

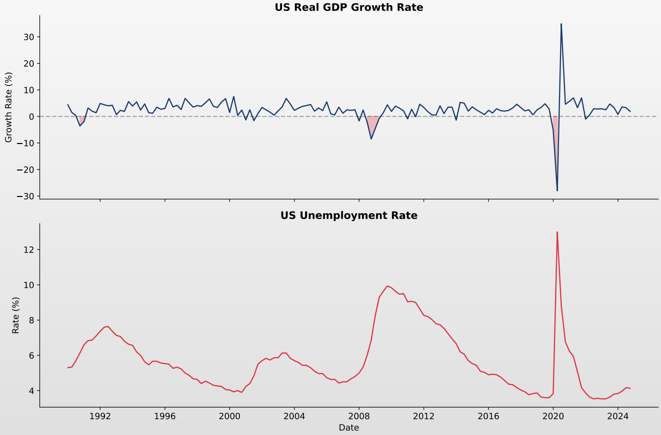
Întrebări pentru analiza VAR

1. Cauzează creșterea PIB Granger modificările șomajului?
2. Cauzează șomajul Granger creșterea PIB?
3. Cum se propagă șocurile între variabile?

PIB și șomaj: Date

Observații

Creșterea PIB și rata șomajului prezintă o corelație negativă clară (Legea lui Okun) Ambele serii prezintă tipare ciclice legate de fluctuațiile ciclului de afaceri Acest sistem bivariat este ideal pentru analiza VAR și testarea cauzalității Granger



TSA_charts/ch5_gdp_unemployment

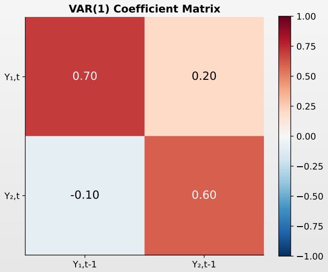
Fluxul de lucru VAR

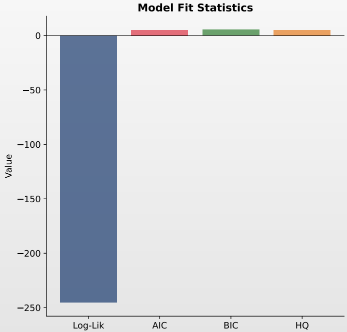
1. **Pregătirea datelor**
   - Verificăm staționaritatea (teste de rădăcină unitară)
   - Transformăm dacă este necesar (diferențe, logaritmi)
2. **Selecția lag-ului**
   - Folosim criteriile AIC, BIC, HQ
   - Verificăm autocorelația reziduurilor
3. **Estimare**
   - OLS ecuație cu ecuație
   - Verificăm stabilitatea (valori proprii)
4. **Analiză**
   - Teste de cauzalitate Granger
   - Funcții de răspuns la impuls
   - Descompunerea varianței
5. **Prognoză**

Rezultate VAR estimate

Observații

Coeficienți estimați cu erori standard și statistici t Valorile criteriilor informaționale pentru compararea modelelor Rezumat diagnostic model (teste reziduuri)





TSA_charts/ch5_var_results

Rezultate cauzalitate Granger

Rezultatele testului: PIB și șomaj

Ipoteza nulă	Statistica F	df	p-valoare	Decizie
PIB $\not\to$ Șomaj	8.42	(2, 95)	0.0004	Respingem
Șomaj $\not\to$ PIB	2.15	(2, 95)	0.1220	Nu respingem

Interpretare

- Creșterea PIB cauzează Granger șomajul (în acord cu Legea lui Okun)
- Șomajul nu cauzează semnificativ Granger PIB
- Evidență de cauzalitate **unidirecțională**: PIB $\to$ Șomaj

implementare Python

VAR în Python (statsmodels)

```
from statsmodels.tsa.api import VAR
from statsmodels.tsa.stattools import grangercausalitytests

# Ajustăm modelul VAR
model = VAR(data)
results = model.fit(maxlags=4, ic='aic')

# Testul cauzalității Granger
granger_test = grangercausalitytests(data[['Y1', 'Y2']],
                                      maxlag=4)
# Funcții de răspuns la impuls
irf = results.irf(periods=20)
irf.plot()

# Descompunerea varianței
fevd = results.fevd(periods=20)
fevd.plot()
```

Implementare R

VAR în R (pachetul vars)

```
library(vars)

# Selectăm ordinul optim al lag-ului
lag_select <- VARselect(data, lag.max = 8)
print(lag_select$selection)

# Ajustăm modelul VAR
var_model <- VAR(data, p = 2, type = "const")
summary(var_model)

# Testul cauzalității Granger
causality(var_model, cause = "GDP")

# Funcții de răspuns la impuls
irf_results <- irf(var_model, n.ahead = 20, boot = TRUE)
plot(irf_results)

# Descompunerea varianței erorii de prognoză
fevd_results <- fevd(var_model, n.ahead = 20)
plot(fevd_results)
```

Exemplu: Analiza politicii monetare

VAR cu trei variabile

studiem mecanismul de transmisie monetară cu:

- Y_1: Gap-ul de producție (devierea PIB de la trend)
- Y_2: Rata inflației
- Y_3: Rata dobânzii (instrument de politică)

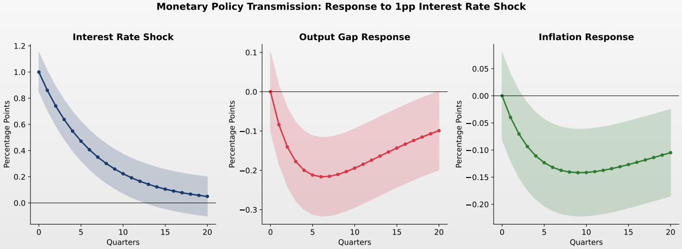
Întrebări cheie

1. Cum afectează un șoc al ratei dobânzii producția și inflația?
2. Cât timp trece până se simte efectul maxim?
3. Ce fracțiune din varianța producției se datorează șocurilor monetare?

VAR politică monetară: IRF

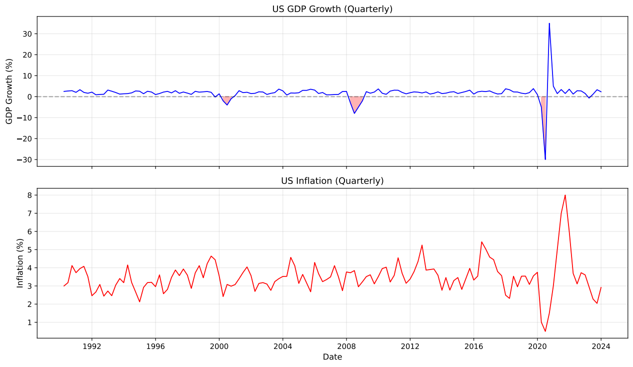
Observații

Șoc de politică monetară contracționistă (creșterea ratei dobânzii) Producția scade cu efect maxim după 4-6 trimestre ("întârzieri lungi și variabile") Inflația răspunde mai încet, scăzând după producție



TSA_charts/ch5_monetary_irf

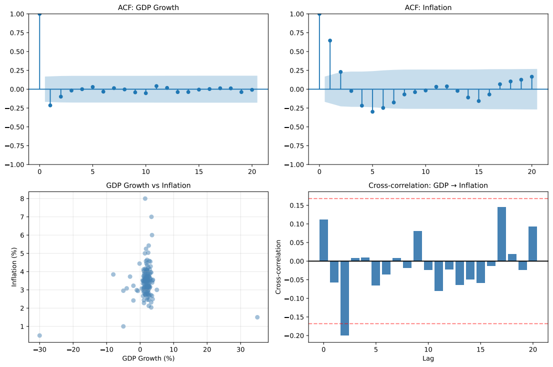
Studiu de caz: Relația dintre PIB și Inflație



- Date trimestriale SUA: Creștere PIB și Inflație (1990-2023)
- Recesiuni vizibile: 2000, 2008 (criză financiară), 2020 (COVID-19)
- Inflație post-COVID ridicată (2021-2022)

TSA_ch6_case_raw_data

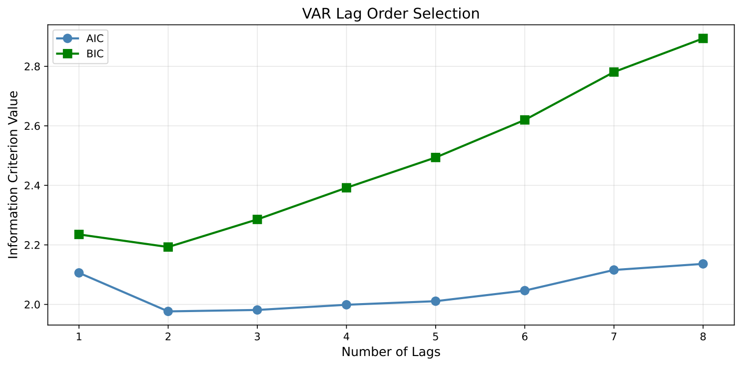
Pasul 1: Analiză preliminară



- ACF indică staționaritate pentru ambele serii
- Corelație pozitivă între PIB și Inflație (curba Phillips)
- Cross-corelație sugerează relații dinamice bidirecționale

TSA_ch6_case_stationarity

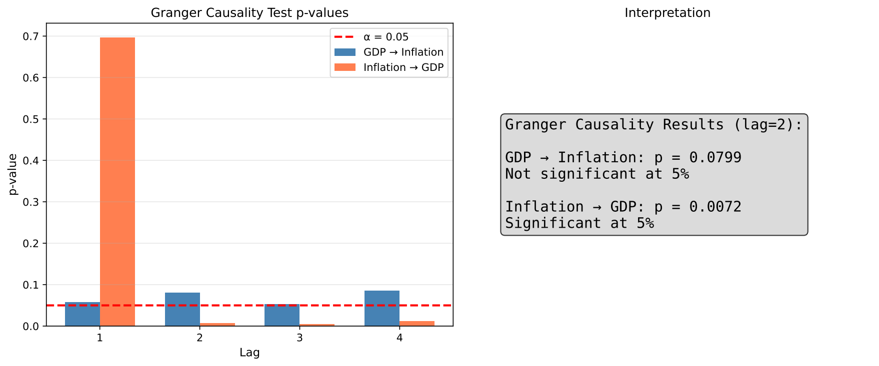
Pasul 2: Selecția ordinului VAR



- Criteriile AIC și BIC sugerează VAR(2)
- Compromis între complexitate și ajustare
- Ordinul 2 captează dinamica trimestrială

TSA_ch6_case_lag_selection

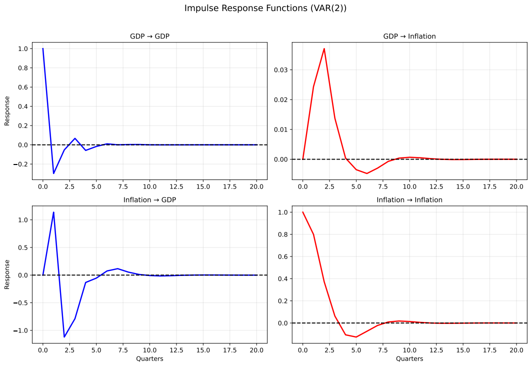
Pasul 3: Testul Granger de cauzalitate



- PIB → Inflație: Semnificativ ($p < 0.05$) — PIB "cauzează Granger" Inflația
- Inflație → PIB: Semnificativ — cauzalitate bidirecțională
- Confirmare a relației dinamice dintre variabilele macroeconomice

TSA_ch6_case_granger

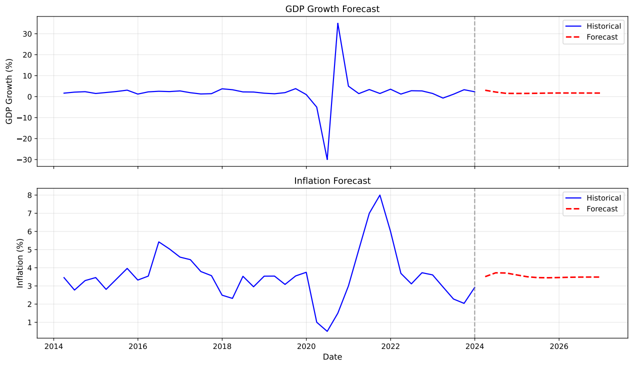
Pasul 4: Funcții de răspuns la impuls (IRF)



- Șoc PIB → efect pozitiv persistent asupra inflației
- Șoc Inflație → efect negativ asupra creșterii PIB
- Efectele se disipează după aproximativ 8-10 trimestre

TSA_ch6_case_irf

Pasul 5: Prognoza VAR



- Prognoză pe 12 trimestre pentru ambele variabile simultan
- VAR captează interdependențele dintre serii
- Prognozele converg spre valorile de echilibru pe termen lung

TSA_ch6_case_forecast

Concluzii cheie

Modele VAR

- Modelează **mai multe** serii de timp împreună
- Fiecare variabilă depinde de propriile lag-uri ȘI lag-urile altor variabile
- Eștimate prin OLS ecuație cu ecuație; necesită staționaritate

Cauzalitate Granger

- Testează dacă X ajută la prezicerea lui Y dincolo de istoricul propriu al lui Y
- **Nu** este la fel cu cauzalitatea reală; test F asupra restricțiilor coeficienților

IRF și FEVD

- IRF: Cum se propagă șocurile prin sistem
- FEVD: Ce proporție din varianță se datorează fiecărui șoc
- Ambele depind de ordonarea variabilelor (descompunerea Cholesky)

Lista de verificăre pentru selecția modelului VAR

Înainte de estimare

- ☐ Testați pentru rădăcini unitare în fiecare variabilă
- ☐ Transformați la staționar dacă este necesar (diferențe, logaritmi)
- ☐ Verificați pentru valori extreme și rupturi structurale

Specificarea modelului

- ☐ Selectați ordinul lag-ului folosind AIC/BIC
- ☐ Estimați VAR prin OLS
- ☐ Verificați stabilitatea (valori proprii în interiorul cercului unitate)

După estimare

- ☐ Testați reziduurile pentru autocorelație
- ☐ Testați pentru efecte ARCH
- ☐ Testați pentru normalitate
- ☐ Calculați IRF, FEVD, teste Granger

Greșeli comune de evitat

Capcane în analiza VAR

1. **Ignorarea nestaționarității**: Testați întotdeauna mai întâi pentru rădăcini unitare
2. **Supraajustare**: Prea multe lag-uri $\Rightarrow$ prognoze slabe
3. **Ordonare greșită**: Rezultatele Cholesky depind de ordinea variabilelor
4. **Confundarea corelației cu cauzalitatea**: Cauzalitate Granger $\neq$ cauzalitate reală
5. **Ignorarea incertitudinii parametrilor**: Folosiți IC bootstrap pentru IRF
6. **Eșantioane mici**: VAR necesită multe observații ($T > 50$)

Ce urmează?

Subiecte pentru studiu aprofundat

- **Cointegrare**: Relații pe termen lung între variabile nestaționare
- **VECM**: Modele cu corecția erorii pentru sisteme cointegrate
- **VAR Structural**: Impunerea restricțiilor din teoria economică
- **Panel VAR**: VAR pentru date panel
- **VAR Bayesian**: Distribuții prior de shrinkage pentru sisteme de dimensiuni mari

Întrebări?

Întrebarea 1

Întrebare

Pentru un model VAR(1) cu matricea de coeficienți $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$, este modelul stabil?

(A) Da, deoarece toate elementele diagonale sunt mai mici decât 1

(B) Da, deoarece toate valorile proprii sunt în interiorul cercului unitate

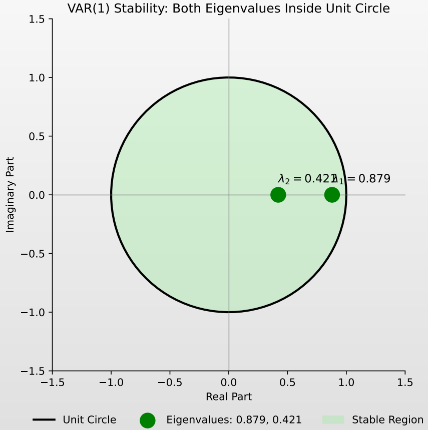
(C) Nu, deoarece suma coeficienților depășește 1

(D) Nu poate fi determinat fără a cunoaște $\boldsymbol{\Sigma}$

Întrebarea 1: Răspuns

Răspuns corect: (B) Valori proprii în interiorul cercului unitate

$\lambda_1 = 0.879$, $\lambda_2 = 0.421$ — ambele $|\lambda| < 1 \Rightarrow$ Stabil!



TSA_charts/ch5_quiz1_var_stability

Întrebarea 2

Întrebare

Dacă X cauzează Granger pe Y la nivelul de semnificație de 5%, care dintre următoarele afirmații este ADEVĂRATĂ?

(A) X este cauza economică a lui Y

(B) Valorile trecute ale lui X conțin informații utile pentru prezicerea lui Y

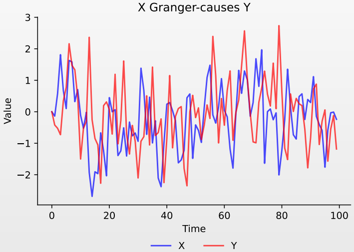
(C) Y nu poate cauza Granger pe X

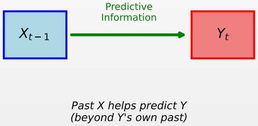
(D) Corelația între X și Y este pozitivă

Întrebarea 2: Răspuns

Răspuns corect: (B) Informație predictivă

Cauzalitate Granger = conținut predictiv, nu cauzare economică reală. X trecut ajută la prezicerea lui Y.





TSA_charts/ch5_quiz2_granger_causality

Întrebarea 3

Întrebare

Într-un VAR cu IRF identificate Cholesky, ce determină ordinea variabilelor?

(A) Magnitudinea răspunsurilor la impuls

(B) Viteza cu care șocurile dispar

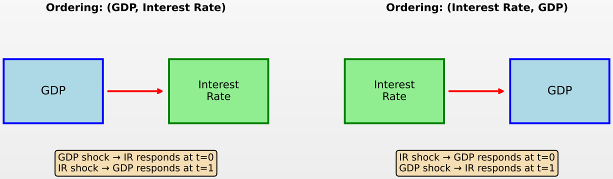
(C) Care variabile pot răspunde contemporan la care șocuri

(D) Numărul de lag-uri în VAR

Întrebarea 3: Răspuns

Răspuns corect: (C) Răspunsuri contemporane

Ordonarea determină care variabile răspund imediat la care șocuri.



TSA_charts/ch5_quiz3_cholesky_ordering

Întrebarea 4

Întrebare

Pentru un VAR(1) bivariat, câți parametri trebuie estimați (excluzând matricea de covarianță a erorilor)?

(A) 4

(B) 6

(C) 8

(D) 10

Întrebarea 4: Răspuns

Răspuns corect: (B) 6 parametri

Numărare detaliată

VAR(1) cu $K = 2$ variabile:

$$\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{\text{2 param}} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\text{4 param}} \begin{pmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

- Vectorul constant c: $K = 2$ parametri
- Matricea de coeficienți A: $K^2 = 4$ parametri
- Total: $K + K^2 = 2 + 4 = 6$ parametri

Formula generală

VAR(p) cu K variabile: $K + pK^2$ parametri (excluzând $\boldsymbol{\Sigma}$)

Întrebarea 5

Întrebare

Ce înseamnă $\text{FEVD}_{12}(h) = 0.35$?

(A) 35% din varianța totală a variabilei 1 este explicată de variabila 2

(B) 35% din varianța erorii de prognoză la h pași a variabilei 1 se datorează șocurilor la variabila 2

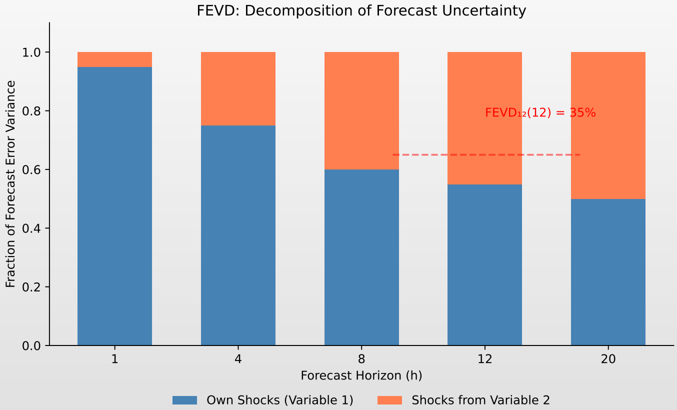
(C) Corelația între variabilele 1 și 2 la lag-ul h este 0.35

(D) Variabila 2 explică 35% din răspunsul la impuls al variabilei 1

Întrebarea 5: Răspuns

Răspuns corect: (B) Descompunerea varianței erorii de prognoză

35% din varianța erorii de prognoză la h pași a variabilei 1 se datorează șocurilor de la variabila 2.



TSA_charts/ch5_quiz5_fevd

Formule cheie – Rezumat

Model VAR(p)

$Y_t = c + \sum_{i=1}^{p} A_i Y_{t-i} + \varepsilon_t$

$\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$, i.i.d.

Cauzalitate Granger

H_0: X nu cauzează Granger Y

Test F sau Wald pe coeficienții lag-urilor lui X

Selecția Lag-urilor

$\text{AIC} = \ln |\hat{\Sigma}| + \frac{2pK^2}{T}$

$\text{BIC} = \ln |\hat{\Sigma}| + \frac{pK^2 \ln T}{T}$

Funcții Răspuns la Impuls

$Y_{t+h} = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i \varepsilon_{t+h-i}$

Φ_i = multiplicatori la orizontul i

FEVD

$\text{FEVD}_{jk}(h) = \frac{\sum_{i=0}^{h-1} (e_j' \Phi_i P e_k)^2}{\sum_{i=0}^{h-1} e_j' \Phi_i \Sigma \Phi_i' e_j}$

Contribuția șocului k la varianța lui j

Staționaritate VAR

Toate valorile proprii ale A în interiorul cercului unitate

Bibliografie I

Manuale fundamentale

- Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*, 3rd ed., OTexts.
- Shumway, R.H., & Stoffer, D.S. (2017). *Time Series Analysis and Its Applications*, 4th ed., Springer.
- Brockwell, P.J., & Davis, R.A. (2016). *Introduction to Time Series and Forecasting*, 3rd ed., Springer.

Serii de timp financiare

- Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*, 3rd ed., Wiley.
- Franke, J., Härdle, W.K., & Hafner, C.M. (2019). *Statistics of Financial Markets*, 4th ed., Springer.

Bibliografie II

Abordari moderne si Machine Learning

- Nielsen, A. (2019). *Practical Time Series Analysis*, O'Reilly Media.
- Petropoulos, F., et al. (2022). *Forecasting: Theory and Practice*, International Journal of Forecasting.
- Makridakis, S., Spiliotis, E., & Assimakopoulos, V. (2020). The M4 Competition, International Journal of Forecasting.

Resurse online si cod

- **Quantlet**: `https://quantlet.com` — Repository de cod pentru statistica
- **Quantinar**: `https://quantinar.com` — Platforma de invatare metode cantitative
- **GitHub TSA**: `https://github.com/QuantLet/TSA` — Cod Python pentru acest curs