Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

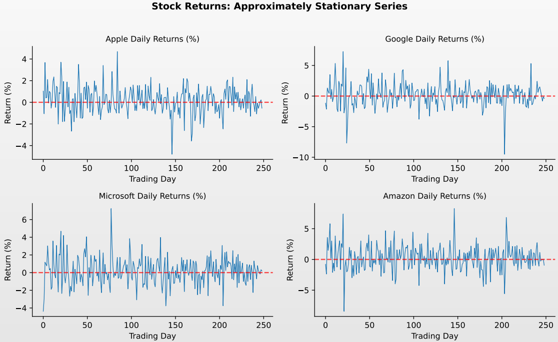
Capitolul 2: Modele ARMA

Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

Structura Cursului

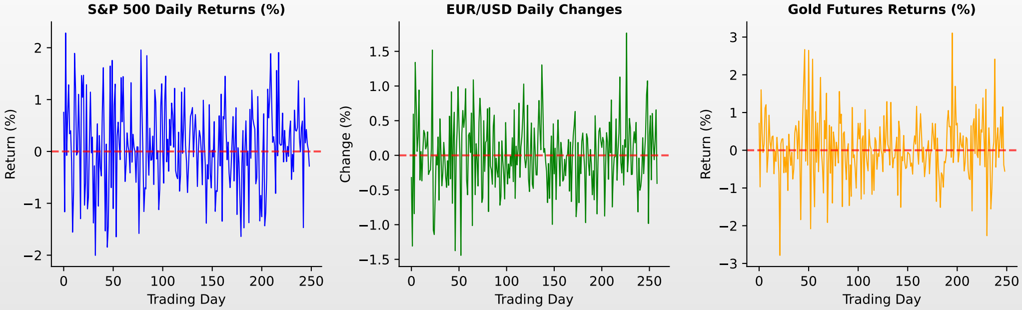
Exemplu Motivațional: Procese Staționare



- **Procese AR**: Valoarea curentă depinde de valorile trecute — comportament de revenire la medie
- **Procese MA**: Valoarea curentă depinde de șocurile trecute — memorie scurtă
- **ARMA**: Combină ambele mecanisme pentru modelare flexibilă

TSA_ch2_motivation

Aplicații Practice ale ARMA

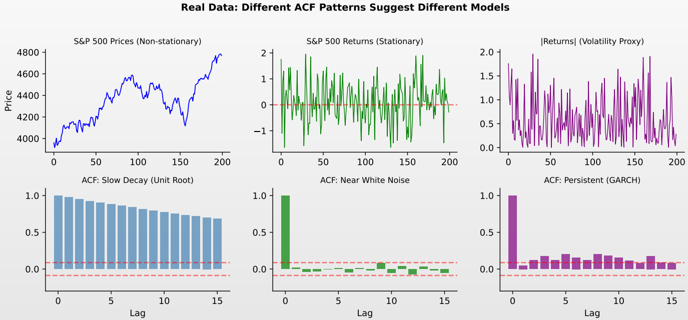


Observație Cheie

Multe serii economice și financiare devin staționare după transformări simple (randamente, rate de creștere, abateri de la trend) — perfecte pentru modelarea ARMA!

TSA_ch2_motivation

Identificarea Modelului prin Tipare ACF



ACF Dezvăluie Structura Modelului

Diferite modele ARMA produc tipare ACF distincte — putem identifica modelul examinând datele!

TSA_ch2_motivation

Recapitulare: Staționaritatea

Din Capitolul 1: Un proces $\{X_t\}$ este **slab staționar** dacă:

1. $\mathbb{E}[X_t] = \mu$ (medie constantă)
2. $\text{Var}(X_t) = \sigma^2 < \infty$ (varianță constantă, finită)
3. $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$ (covarianța depinde doar de lag-ul h)

De ce contează staționaritatea pentru ARMA:

- Modelele ARMA presupun că procesul subiacent este staționar
- Datele nestaționare trebuie diferențiate mai întâi (ARIMA)
- Staționaritatea asigură parametri stabili ai modelului

Astăzi: Construim modele pentru serii de timp staționare folosind valori trecute și erori trecute.

Operatorul Lag (Operatorul de Întârziere)

Definiție 1 (Operatorul Lag)

Operatorul lag L (sau operatorul de întârziere B) deplasează o serie de timp înapoi cu o perioadă:

$$LX_t = X_{t-1}$$

Proprietăți:

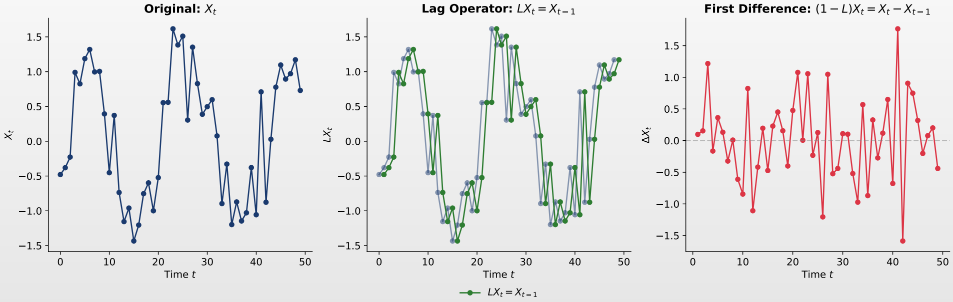
- $L^k X_t = X_{t-k}$ (deplasare înapoi cu k perioade)
- $L^0 X_t = X_t$ (identitate)
- $(1 - L)X_t = X_t - X_{t-1} = \Delta X_t$ (prima diferență)
- $(1 - L)^d X_t = \Delta^d X_t$ (diferența de ordin d)

Polinoame Lag:

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p$$
$$\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q$$

TSA_ch2_lag_operator

Operatorul Lag: Ilustrație Vizuală



Observație cheie: Operatorul lag este fundamentul notației modelelor ARMA

TSA_ch2_lag_operator

Procesul de Zgomot Alb

Definiție 2 (Zgomot Alb)

Un proces $\{\varepsilon_t\}$ este **zgomot alb**, notat $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, dacă:

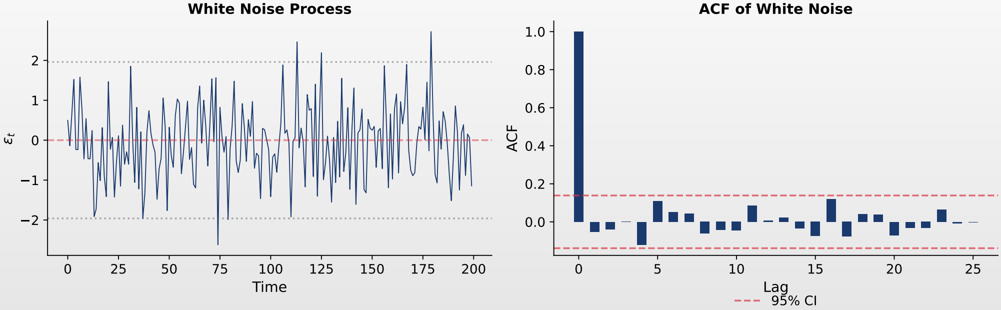
1. $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$ pentru toți t
2. $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$ pentru toți t
3. $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ pentru toți $t \neq s$

Proprietăți:

- Zgomotul alb este "blocul de construcție" al modelelor ARMA
- ACF: $\rho(0) = 1$, $\rho(h) = 0$ pentru $h \neq 0$
- PACF: același tipar
- **Zgomot alb Gaussian:** adițional $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

Notă: Zgomotul alb *nu* este predictibil — este pur aleatoriu.

Zgomot Alb: Ilustrare Vizuală



Caracteristici Cheie

Stânga: Seria fluctuează aleatoriu în jurul mediei zero, fără tipare. **Dreapta**: ACF arată doar un vârf la lag 0; toate celelalte autocorelații sunt în intervalul de încredere — nicio structură de prezis.

TSA_ch2_white_noise

Modelul AR(1): Definiție

Definiție 3 (Proces AR(1))

Un **proces autoregresiv de ordin 1** este:

$$X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

unde $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ și $|\phi| < 1$ pentru staționaritate.

Interpretare:

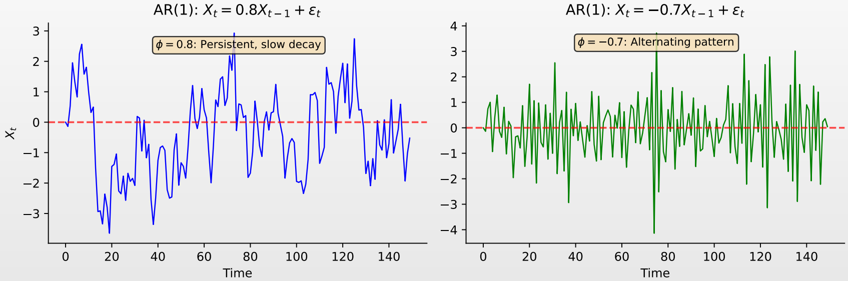
- c: constantă (interceptul)
- ϕ: coeficient autoregresiv — măsoară persistența
- ε_t: inovație (șoc impredictibil)

Folosind operatorul lag:

$$(1 - \phi L)X_t = c + \varepsilon_t$$

$$\phi(L)X_t = c + \varepsilon_t \quad \text{unde } \phi(L) = 1 - \phi L$$

AR(1): Ilustrație Vizuală



- ϕ **pozitiv (ex. 0.8)**: Fluctuații persistente, netede
  - Valorile tind să rămână pe aceeași parte a mediei
  - Revenire graduală la medie — aspect de "trend"
- ϕ **negativ (ex. -0.8)**: Comportament oscilant
  - Valorile alternează în jurul mediei
  - Schimbări rapide de semn — aspect "agitat"
- $|\phi|$ mai mare $\Rightarrow$ revenire mai lentă la medie, persistență mai mare

Condiția de Staționaritate AR(1)

Pentru ca AR(1) să fie staționar: $|\phi| < 1$

Intuiție:

- Dacă $|\phi| < 1$: șocurile se diminuează în timp $\rightarrow$ staționar
- Dacă $|\phi| = 1$: mers aleatoriu $\rightarrow$ nestaționar (rădăcină unitate)
- Dacă $|\phi| > 1$: proces exploziv $\rightarrow$ nestaționar

Ecuația caracteristică:

$$\phi(z) = 1 - \phi z = 0 \implies z = \frac{1}{\phi}$$

Staționaritatea necesită ca rădăcina $z = 1/\phi$ să se afle **în afără cercului unitate**, adică $|z| > 1$, ceea ce înseamnă $|\phi| < 1$.

Proprietățile AR(1)

Pentru un AR(1) staționar cu $|\phi| < 1$:

Media:

$$\mu = \mathbb{E}[X_t] = \frac{c}{1-\phi}$$

Varianța:

$$\gamma(0) = \mathrm{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$$

Autocovarianța:

$$\gamma(h) = \phi^h \gamma(0) = \frac{\phi^h \sigma^2}{1-\phi^2}$$

Autocorelația (ACF):

$$\rho(h) = \phi^h$$

Observație cheie: ACF scade exponențial la rata ϕ

TSA_ch2_ar1

Demonstrație: Media AR(1)

Afirmație: Pentru AR(1): $X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$, media este $\mu = \frac{c}{1-\phi}$

Demonstrație: Luăm speranța ambelor părți:

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t] = c + \phi \mathbb{E}[X_{t-1}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t]$$

Prin staționaritate, $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_{t-1}] = \mu$, și $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$:

$$\mu = c + \phi\mu$$

Rezolvând pentru μ:

$$\mu - \phi\mu = c \implies \mu(1-\phi) = c \implies \boxed{\mu = \frac{c}{1-\phi}}$$

Cerință

Aceasta necesită $\phi \neq 1$. Dacă $\phi = 1$ (rădăcină unitară), media este nedefinită.

Demonstrație: Varianța AR(1)

Afirmație: $\text{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$

Demonstrație: FSPG presupunem $c = 0$ (proces centrat). Luăm varianța din $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$:

$$\text{Var}(X_t) = \text{Var}(\phi X_{t-1} + \varepsilon_t) = \phi^2 \text{Var}(X_{t-1}) + \text{Var}(\varepsilon_t) + 2\phi \text{Cov}(X_{t-1}, \varepsilon_t)$$

Deoarece ε_t este independent de X_{t-1}, $\text{Cov}(X_{t-1}, \varepsilon_t) = 0$:

$$\gamma(0) = \phi^2 \gamma(0) + \sigma^2$$

Prin staționaritate, $\text{Var}(X_t) = \text{Var}(X_{t-1}) = \gamma(0)$:

$$\gamma(0) - \phi^2 \gamma(0) = \sigma^2 \implies \gamma(0)(1 - \phi^2) = \sigma^2 \implies \boxed{\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}}$$

Notă

Necesită $|\phi| < 1$ pentru varianță pozitivă. Când $|\phi| \to 1$, varianța $\to \infty$.

Demonstrație: Funcția de Autocorelație AR(1)

Afirmație: $\rho(h) = \phi^h$ pentru $h \geq 0$

Demonstrație: Mai întâi, găsim autocovarianța $\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t-h})$.
Înmulțim $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$ cu X_{t-h} și luăm speranța:

$$\mathbb{E}[X_t X_{t-h}] = \phi \mathbb{E}[X_{t-1} X_{t-h}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-h}]$$

Pentru $h \geq 1$: $\mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-h}] = 0$ (șocul viitor necorelat cu valorile trecute)

$$\gamma(h) = \phi \gamma(h-1)$$

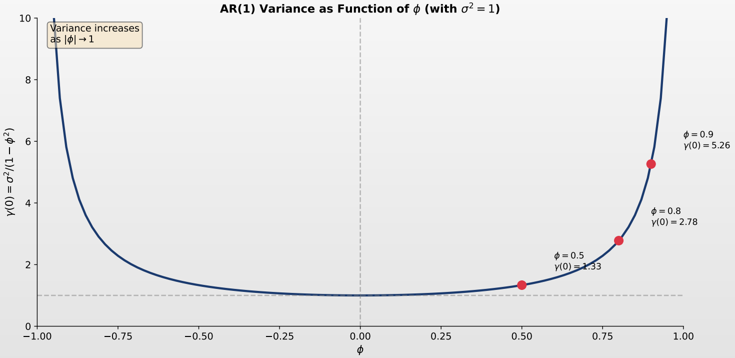
Aceasta este o relație recursivă! Pornind de la $\gamma(0)$:

$$\gamma(1) = \phi\gamma(0), \quad \gamma(2) = \phi\gamma(1) = \phi^2\gamma(0), \quad \ldots \quad \boxed{\gamma(h) = \phi^h \gamma(0)}$$

ACF este:

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \frac{\phi^h \gamma(0)}{\gamma(0)} = \boxed{\phi^h}$$

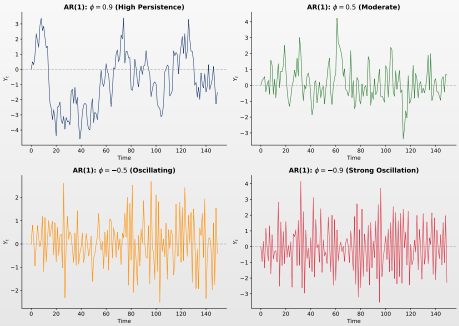
Varianța AR(1) ca Funcție de ϕ



Observație cheie: Pe măsură ce $|\phi| \to 1$, varianța explodează $\to$ nestaționaritate

TSA_ch2_ar1

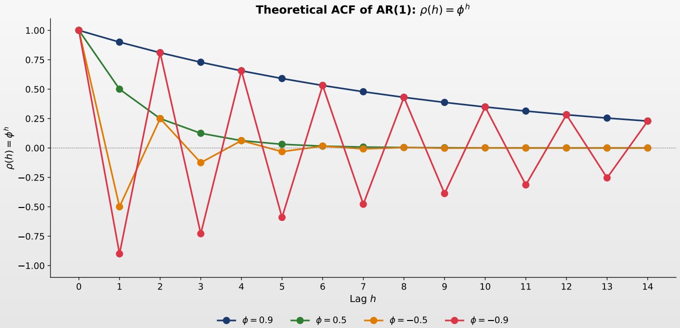
Simulări AR(1): Efectul lui ϕ



- Valori diferite ale lui ϕ produc comportamente distincte: $|\phi|$ mai mare înseamnă mai multă persistență
- ϕ pozitiv creează tipare netede, de trend; ϕ negativ creează oscilații
- Pe măsură ce $|\phi| \to 1$, procesul devine mai persistent și se apropie de nestaționaritate

TSA_ch2_ar1_simulation

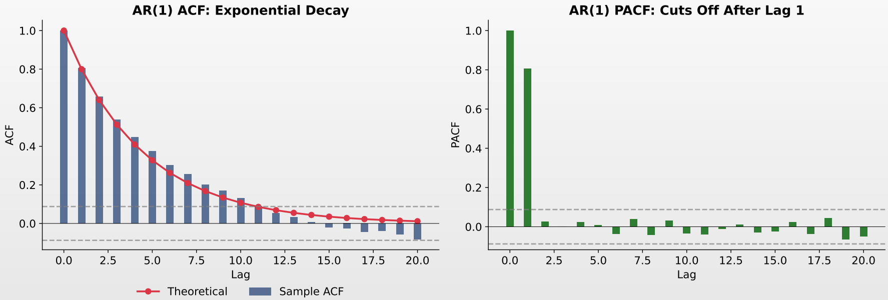
ACF Teoretic AR(1)



Tipar: $\rho(h) = \phi^h$ — descreștere exponențială (sau alternantă pentru $\phi < 0$)

TSA_ch2_ar1

ACF și PACF AR(1): Teorie vs Eșantion



- **ACF**: Descreștere exponențială la rata ϕ – formula teoretică: $\rho(h) = \phi^h$
- **PACF**: Un singur vârf la lag 1, apoi se întrerupe – aceasta identifică AR(1)
- Estimările din eșantion (bare) fluctuează în jurul valorilor teoretice; folosiți benzile de încredere

TSA_ch2_ar1

Tipare ACF și PACF AR(1)

ACF al AR(1):

- Scade exponențial: $\rho(h) = \phi^h$
- Dacă $\phi > 0$: toate pozitive, descreștere graduală
- Dacă $\phi < 0$: semne alternante, descreștere în magnitudine

PACF al AR(1):

- **Se întrerupe după lag 1**
- $\pi_1 = \phi$, $\pi_k = 0$ pentru $k > 1$

	ACF	**PACF**
AR(1)	Descreștere exponențială	Se întrerupe la lag 1

Acesta este tiparul cheie de identificare pentru AR(1)!

Modelul AR(p): Forma Generală

Definiție 4 (Proces AR(p))

Un **proces autoregresiv de ordin p** este:

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

Folosind operatorul lag:

$$\phi(L)X_t = c + \varepsilon_t$$

unde $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p$

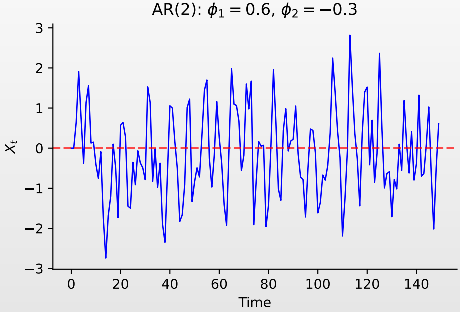
Condiție de staționaritate:

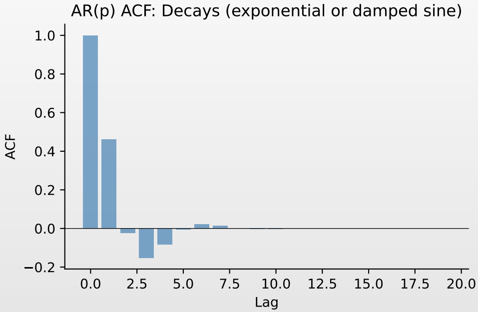
- Toate rădăcinile lui $\phi(z) = 0$ trebuie să se afle **în afără** cercului unitate
- Echivalent: toate rădăcinile au modul > 1

Tiparul PACF:

- PACF se întrerupe după lag p
- ACF scade (exponențial sau cu oscilații amortizate)

AR(p): Ilustrație Vizuală



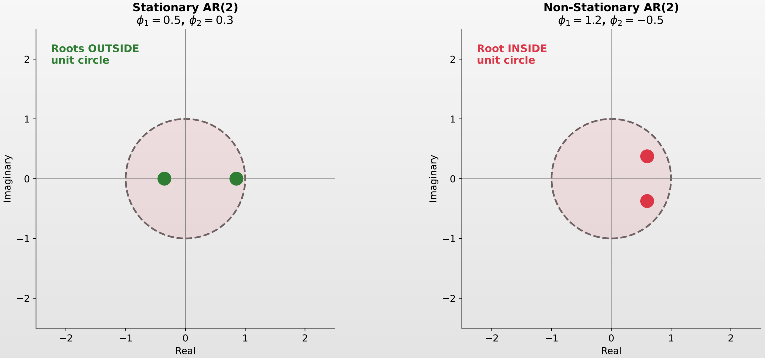


Caracteristici AR(2)

AR(2) poate prezentă comportament pseudo-ciclic când rădăcinile sunt complexe conjugate. ACF arată descreștere sinusoidală amortizată; PACF se întrerupe după lag 2 — tiparul cheie de identificare.

TSA_ch2_ar2

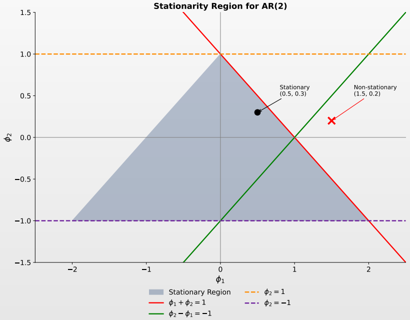
Staționaritatea AR(2): Vizualizarea Cercului Unitate



Regulă: Toate rădăcinile lui $\phi(z) = 0$ trebuie să se afle **în afără** cercului unitate umbrit

TSA_ch2_stationarity

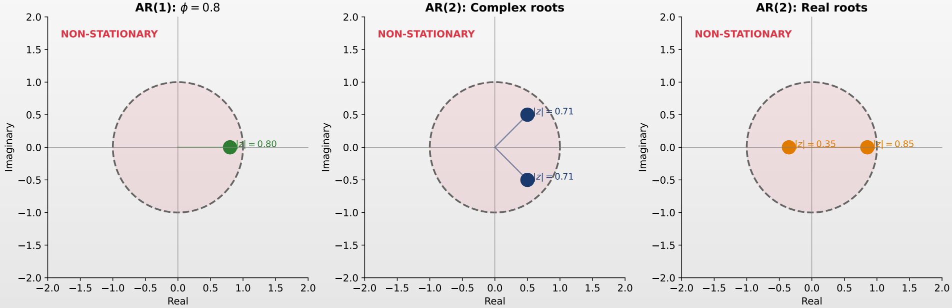
Triunghiul de Staționaritate AR(2)



- Regiunea triunghiulară definește toate combinațiile de parametri AR(2) staționari
- Granițe: $\phi_1 + \phi_2 < 1$, $\phi_2 - \phi_1 < 1$ și $|\phi_2| < 1$
- Punctele din afară acestei regiuni duc la procese nestaționare sau explozive

TSA_ch2_stationarity

Rădăcinile Polinomului Caracteristic



TSA_ch2_stationarity

Modelul AR(2)

Definiție 5 (Proces AR(2))

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

Condiții de staționaritate pentru AR(2):

1. $\phi_1 + \phi_2 < 1$
2. $\phi_2 - \phi_1 < 1$
3. $|\phi_2| < 1$

Comportamentul ACF depinde de rădăcini:

- **Rădăcini reale:** amestec de două descreșteri exponențiale
- **Rădăcini complexe:** tipar sinusoidal amortizat (pseudo-cicluri)

PACF: Se întrerupe după lag 2 ($\pi_k = 0$ pentru $k > 2$)

TSA_ch2_ar2

Quiz: Staționaritate AR

Întrebare

Pentru ce valoare a lui ϕ este procesul AR(1) $X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$ staționar?

(A) $\phi = 1.2$

(B) $\phi = 1.0$

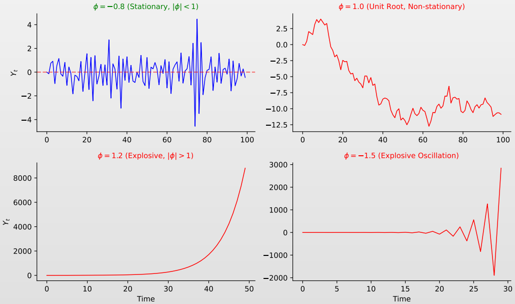
(C) $\phi = -0.8$

(D) $\phi = -1.5$

Quiz: Staționaritate AR – Răspuns

Răspuns Corect: (C) $\phi = -0.8$

AR(1) este staționar dacă și numai dacă $|\phi| < 1$. Doar $|-0.8| = 0.8 < 1$.



TSA_ch2_ar1

Modelul MA(1): Definiție

Definiție 6 (Proces MA(1))

Un **proces de medie mobilă de ordin 1** este:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

unde $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$.

Interpretare:

- μ: media procesului
- θ: coeficient MA — măsoară impactul șocului trecut
- Valoarea curentă depinde de șocul curent și unul trecut

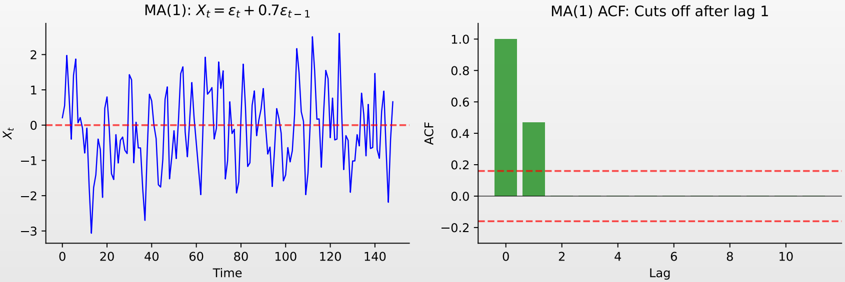
Folosind operatorul lag:

$$X_t = \mu + \theta(L)\varepsilon_t$$

unde $\theta(L) = 1 + \theta L$

Proprietate cheie: Procesele MA sunt **întotdeauna staționare** pentru orice θ finit

MA(1): Ilustrație Vizuală



- **Panoul stâng**: Serie MA(1) — mai puțin persistentă decât AR(1), revenire rapidă la medie
- **Panoul drept**: ACF arată **întrerupere caracteristică după lag 1**
  - Doar $\rho(1) \neq 0$; toate lagurile superioare sunt zero
  - Această întrerupere bruscă este identificatorul cheie pentru modele MA
- PACF descreștere exponențială (tipar opus față de AR)

TSA_ch2_ma1

Proprietățile MA(1)

Pentru MA(1): $X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$

Media:

$$\mathbb{E}[X_t] = \mu$$

Varianța:

$$\gamma(0) = \text{Var}(X_t) = \sigma^2(1 + \theta^2)$$

Autocovarianța:

$$\gamma(1) = \theta\sigma^2, \quad \gamma(h) = 0 \text{ pentru } h > 1$$

Autocorelația (ACF):

$$\rho(1) = \frac{\theta}{1 + \theta^2}, \quad \rho(h) = 0 \text{ pentru } h > 1$$

Observație cheie: ACF **se întrerupe** după lag 1

TSA_ch2_ma1

Demonstrație: Varianța și Autocovarianța MA(1)

Punct de plecare: $X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$ (presupunând $\mu = 0$)

Varianța:

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= \text{Var}(X_t) = \text{Var}(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}) \\ &= \text{Var}(\varepsilon_t) + \theta^2\text{Var}(\varepsilon_{t-1}) + 2\theta\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) \\ &= \sigma^2 + \theta^2\sigma^2 + 0 = \boxed{\sigma^2(1+\theta^2)}\end{aligned}$$

Autocovarianța la lag 1:

$$\begin{aligned}\gamma(1) &= \text{Cov}(X_t, X_{t-1}) = \text{Cov}(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2}) \\ &= \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) + \theta\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-2}) + \theta\text{Cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) + \theta^2\text{Cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}) \\ &= 0 + 0 + \theta\sigma^2 + 0 = \boxed{\theta\sigma^2}\end{aligned}$$

Autocovarianța la lag $h \geq 2$: Niciun termen ε comun $\Rightarrow \gamma(h) = 0$

Demonstrație: Maximul ACF pentru MA(1)

Afirmație: $|\rho(1)| \leq 0.5$ pentru orice valoare a lui θ

Demonstrație: ACF la lag 1 este:

$$\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{\theta\sigma^2}{\sigma^2(1+\theta^2)} = \frac{\theta}{1+\theta^2}$$

Pentru a găsi maximul, derivăm în raport cu θ și egalăm cu zero:

$$\frac{d\rho(1)}{d\theta} = \frac{(1+\theta^2) - \theta(2\theta)}{(1+\theta^2)^2} = \frac{1-\theta^2}{(1+\theta^2)^2} = 0$$

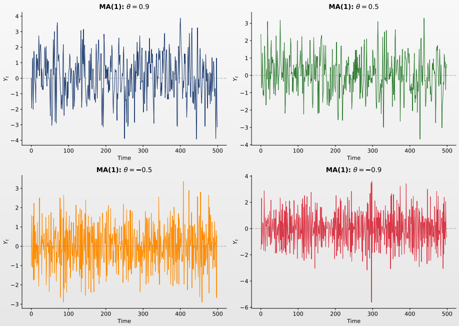
Soluție: $\theta = \pm 1$. La aceste valori:

$$\rho(1)\big|_{\theta=1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad \rho(1)\big|_{\theta=-1} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

Implicație

Dacă estimați $|\hat{\rho}(1)| > 0.5$ din date, procesul **nu** este MA(1).

Simulări MA(1): Efectul lui θ



- MA(1) este întotdeauna staționar indiferent de θ – memorie finită de doar un lag
- θ pozitiv netezește seria; θ negativ creează fluctuații mai rapide
- Spre deosebire de AR(1), șocurile MA(1) afectează procesul doar pentru o perioadă

TSA_ch2_ma1

Tipare ACF și PACF MA(1)

ACF al MA(1):

- **Se întrerupe după lag 1**
- $\rho(1) = \frac{\theta}{1+\theta^2}$, $\rho(h) = 0$ pentru $h > 1$
- Notă: $|\rho(1)| \leq 0.5$ întotdeauna (maxim la $\theta = \pm 1$)

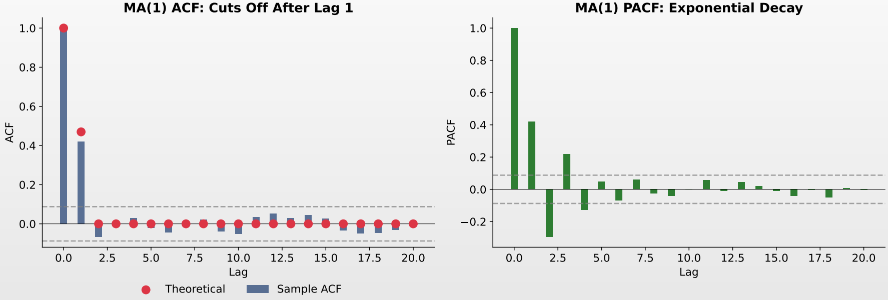
PACF al MA(1):

- Scade exponențial (sau cu semne alternante)
- *Nu* se întrerupe

	ACF	**PACF**
MA(1)	Se întrerupe la lag 1	Descreștere exponențială

Acesta este tiparul opus față de AR(1)!

ACF și PACF MA(1): Comparăție Vizuală



- **ACF**: Un singur vârf la lag 1, apoi se întrerupe imediat – semnătura cheie MA(1)
- **PACF**: Descreștere exponențială – tipar opus față de AR(1)
- Această inversare a tiparelor ACF/PACF distinge procesele MA de cele AR

TSA_ch2_ma1

Invertibilitatea Modelelor MA

Definiție 7 (Invertibilitate)

Un proces MA este **invertibil** dacă poate fi scris ca un proces AR infinit:

$$X_t = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j (X_{t-j} - \mu) + \varepsilon_t$$

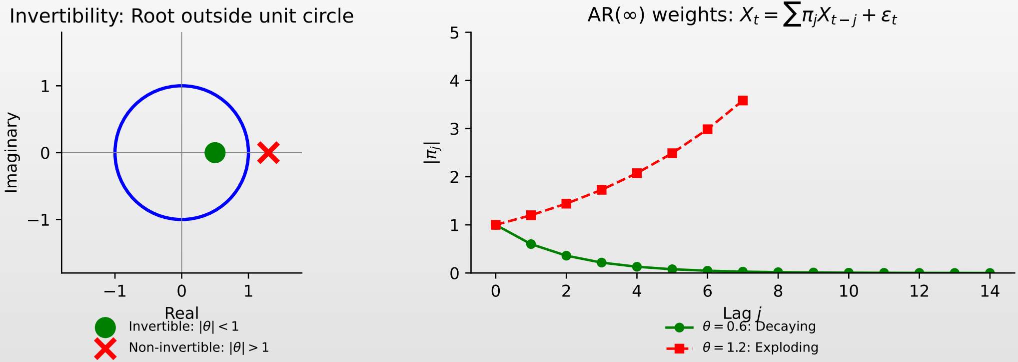
Pentru MA(1): Invertibil dacă $|\theta| < 1$
Pentru MA(q): Toate rădăcinile lui $\theta(z) = 0$ trebuie să se afle în afără cercului unitate

De ce contează invertibilitatea:

- Asigură reprezentare unică
- Necesară pentru prognoză și estimare
- Creează corespondență: AR(∞) $\leftrightarrow$ MA(q)

Notă: Staționaritatea este pentru AR, Invertibilitatea este pentru MA

Invertibilitate: Ilustrație Vizuală



Stânga: invertibilitatea necesită rădăcini în afară cercului unitate. Dreapta: ponderile AR(∞) scad doar când $|\theta| < 1$.

TSA_ch2_ma1

Modelul MA(q): Forma Generală

Definiție 8 (Proces MA(q))

Un **proces de medie mobilă de ordin q** este:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Folosind operatorul lag:

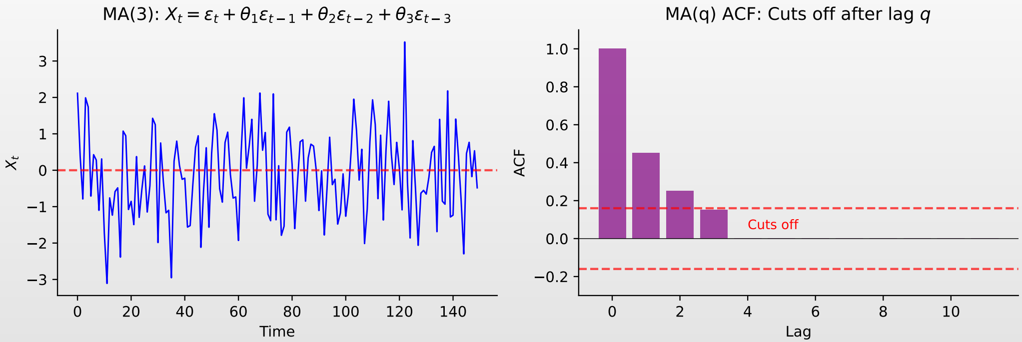
$$X_t = \mu + \theta(L)\varepsilon_t$$

unde $\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q$

Proprietăți:

- Întotdeauna staționar (varianță finită)
- ACF se întrerupe după lag q: $\rho(h) = 0$ pentru $h > q$
- PACF scade gradual
- Invertibil dacă toate rădăcinile lui $\theta(z) = 0$ se află în afără cercului unitate

MA(q): Ilustrație Vizuală



Proces MA(3). Semnătura cheie: ACF se întrerupe după lag q (aici, lag 3).

TSA_ch2_acf_pacf_patterns

Quiz: Recunoașterea Tiparelor ACF/PACF

Întrebare

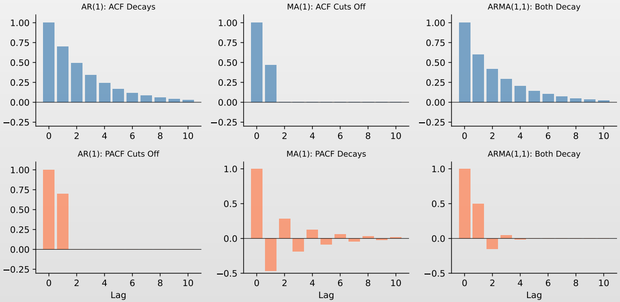
Observați: ACF are vârf la lag 1, apoi se întrerupe. PACF scade gradual. Ce model?

(A) AR(1)
(B) MA(1)
(C) ARMA(1,1)
(D) Zgomot alb

Quiz: Recunoașterea Tiparelor ACF/PACF – Răspuns

Răspuns Corect: (B) MA(1)

ACF se întrerupe → proces MA; PACF scade → confirmă MA(1)



TSA_ch2_ma1

Quiz: Invertibilitate MA

Întrebare

Este MA(1) $X_t = \varepsilon_t + 1.5\varepsilon_{t-1}$ invertibil?

(A) Da, procesele MA sunt întotdeauna invertibile

(B) Da, deoarece $1.5 > 0$

(C) Nu, deoarece $|\theta| = 1.5 > 1$

(D) Nu, procesele MA nu sunt niciodată invertibile

Quiz: Invertibilitate MA

Întrebare

Este MA(1) $X_t = \varepsilon_t + 1.5\varepsilon_{t-1}$ invertibil?

(A) Da, procesele MA sunt întotdeauna invertibile

(B) Da, deoarece $1.5 > 0$

(C) Nu, deoarece $|\theta| = 1.5 > 1$

(D) Nu, procesele MA nu sunt niciodată invertibile

Răspuns: (C)

Invertibilitatea necesită $|\theta| < 1$. Aici $|\theta| = 1.5 > 1$, deci nu este invertibil.

Modelul ARMA(p,q): Definiție

Definiție 9 (Proces ARMA(p,q))

Un **proces autoregresiv de medie mobilă** de ordin (p,q) este:

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Formă compactă folosind operatorii lag:

$$\phi(L)(X_t - \mu) = \theta(L)\varepsilon_t$$

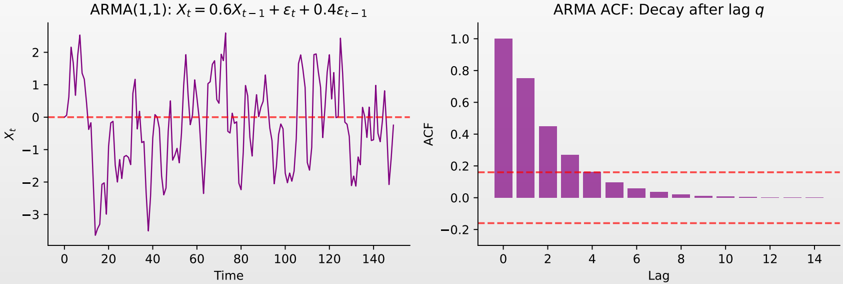
sau echivalent:

$$\phi(L)X_t = c + \theta(L)\varepsilon_t$$

unde $\mu = \frac{c}{1-\phi_1-\cdots-\phi_p}$

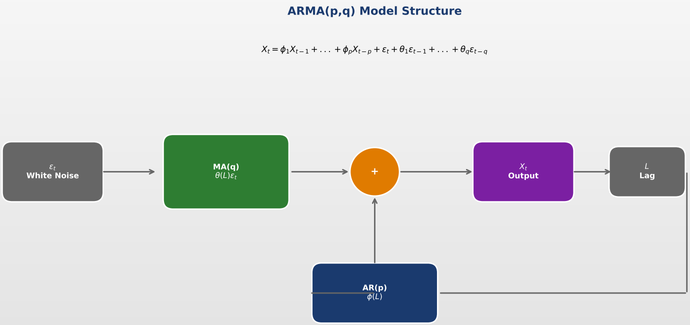
Idee cheie: Combină componentele AR și MA pentru modelare mai flexibilă

ARMA: Ilustrație Vizuală



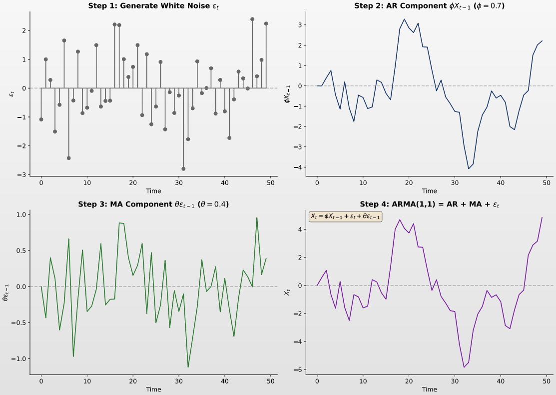
- **ARMA(1,1) combină** persistența AR cu răspunsul la șocuri MA
- **Tipar ACF**: Descreștere după primul lag (nu întrerupere bruscă ca MA pur)
  - Primul lag influențat atât de ϕ cât și de θ
  - Lagurile următoare descresc geometric ca AR
- **Tipar PACF**: De asemenea descreștere (nu întrerupere bruscă ca AR pur)
- Nici ACF nici PACF nu se întrerup — identificator cheie pentru modele mixte

Structura Modelului ARMA



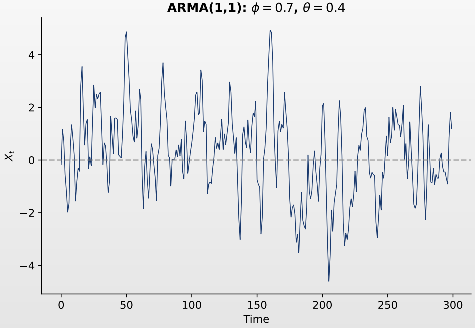
TSA_ch2_arma

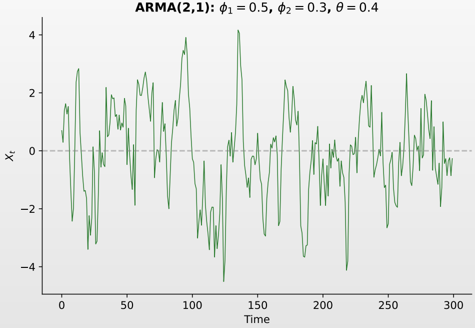
Cum Funcționează Simularea ARMA



TSA_ch2_arma

Exemple ARMA





TSA_ch2_arma

Modelul ARMA(1,1)

Definiție 10 (Proces ARMA(1,1))

$$X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

Proprietăți (presupunând staționaritate și invertibilitate):

- Media: $\mu = \frac{c}{1-\phi}$
- Varianța: $\gamma(0) = \frac{(1+2\phi\theta+\theta^2)\sigma^2}{1-\phi^2}$

ACF:

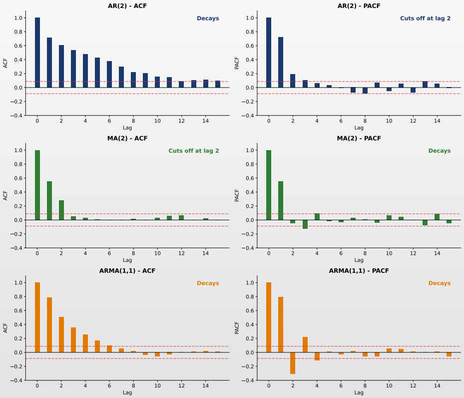
$$\rho(1) = \frac{(1+\phi\theta)(\phi+\theta)}{1+2\phi\theta+\theta^2}$$

$$\rho(h) = \phi \cdot \rho(h-1) \quad \text{pentru } h \geq 2$$

Tipar: ACF scade exponențial după lag 1 (ca AR), dar punctul de pornire depinde atât de ϕ cât și de θ

TSA_ch2_arma

Tipare ACF/PACF: AR vs MA vs ARMA



TSA_ch2_acf_pacf_patterns

Tipare ACF și PACF ARMA

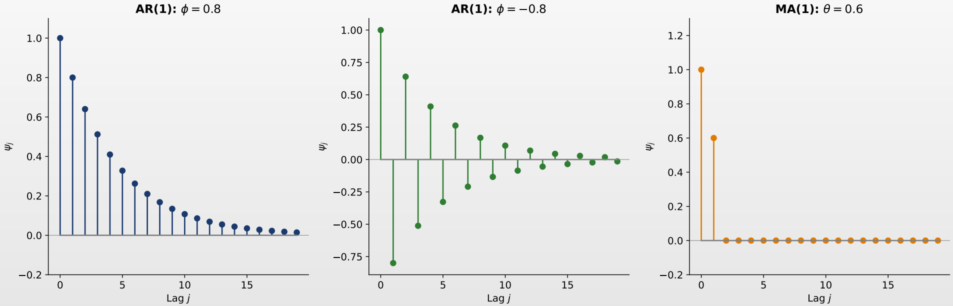
Model	ACF	PACF
AR(p)	Scade (exp./amortizat)	Se întrerupe la lag p
MA(q)	Se întrerupe la lag q	Scade (exp./amortizat)
ARMA(p,q)	Scade după lag $q-p$	Scade după lag $p-q$

Regula cheie de identificare:

- **PACF se întrerupe** $\rightarrow$ proces AR (ordin = lag-ul de întrerupere)
- **ACF se întrerupe** $\rightarrow$ proces MA (ordin = lag-ul de întrerupere)
- **Ambele scad** $\rightarrow$ proces ARMA

Atenție: În practică, ACF/PACF din eșantion sunt zgomotoase; folosiți benzile de încredere

Funcții de Răspuns la Impuls



Interpretare: Arată cum se propagă un șoc unitar prin sistem în timp

TSA_ch2_arma

Rezumat Staționaritate și Invertibilitate

Pentru ca ARMA(p,q) să fie bine comportat:

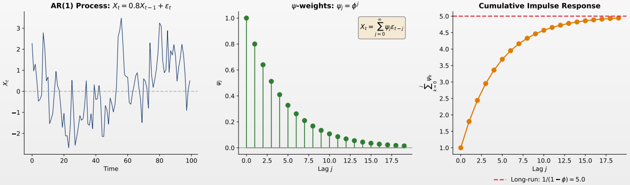
Condiție	Cerință
Staționaritate	Rădăcinile lui $\phi(z) = 0$ în afără cercului unitate
Invertibilitate	Rădăcinile lui $\theta(z) = 0$ în afără cercului unitate

Implicații:

- **Staționaritate:** Se poate scrie ca MA(∞): $X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$
- **Invertibilitate:** Se poate scrie ca AR(∞): $X_t = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j (X_{t-j} - \mu) + \varepsilon_t$

Reprezentăre cauzală: X_t depinde doar de șocurile *trecute* (nu viitoare)

Teorema de Descompunere a lui Wold



Orice proces staționar poate fi scris ca MA(∞): $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$

TSA_ch2_arma

Quiz: Reprezentarea ARMA

Întrebare

Forma compactă $\phi(L)X_t = \theta(L)\varepsilon_t$ reprezintă ce model?

(A) Model AR pur

(B) Model MA pur

(C) Model ARMA

(D) Niciunul de mai sus

Quiz: Reprezentarea ARMA

Întrebare

Forma compactă $\phi(L)X_t = \theta(L)\varepsilon_t$ reprezintă ce model?

(A) Model AR pur

(B) Model MA pur

(C) Model ARMA

(D) Niciunul de mai sus

Răspuns: (C) Model ARMA

$\phi(L)$ este polinomul AR, $\theta(L)$ este polinomul MA $\rightarrow$ ARMA(p,q)

Quiz: Operatorul Lag

Întrebare

Ce este $(1 - L)^2 X_t$?

(A) $X_t - X_{t-1}$

(B) $X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$

(C) $X_t + X_{t-1} + X_{t-2}$

(D) $X_t - X_{t-2}$

Quiz: Operatorul Lag

Întrebare

Ce este $(1 - L)^2 X_t$?

(A) $X_t - X_{t-1}$

(B) $X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$

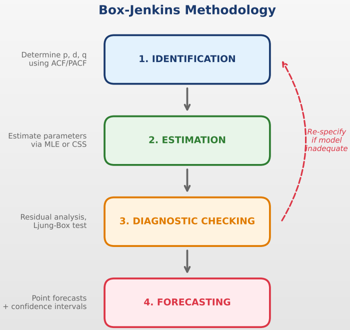
(C) $X_t + X_{t-1} + X_{t-2}$

(D) $X_t - X_{t-2}$

Răspuns: (B)

$(1 - L)^2 = 1 - 2L + L^2$, deci $(1 - L)^2 X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$

Metodologia Box-Jenkins



TSA_ch2_case_study

Tabel Rezumat pentru Identificarea Modelului

model_identificÃćÈŻion_table.pdf

Sfat practic: Începeți simplu (p, q mici), creșteți dacă diagnosticele eșuează

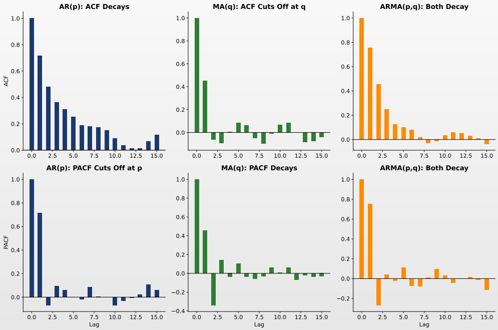
TSA_ch2_acf_pacf_patterns

Reguli de Identificare ACF/PACF

Tipare teoretice pentru procese staționare:

Model	Tipar ACF	Tipar PACF
AR(1)	Descreștere exponențială	Vârf la lag 1, apoi 0
AR(2)	Exponențială/sinusoidă amortizată	Vârfuri la lag-uri 1-2, apoi 0
AR(p)	Scade gradual	Se întrerupe după lag p
MA(1)	Vârf la lag 1, apoi 0	Descreștere exponențială
MA(2)	Vârfuri la lag-uri 1-2, apoi 0	Exponențială/sinusoidă amortizată
MA(q)	Se întrerupe după lag q	Scade gradual
ARMA(p,q)	Scade	Scade

Tipare ACF/PACF: Ghid Vizual



- **AR**: ACF scade, PACF se întrerupe – folosiți PACF pentru a identifica ordinul p
- **MA**: ACF se întrerupe, PACF scade – folosiți ACF pentru a identifica ordinul q
- **ARMA**: Ambele scad – necesită criterii informaționale pentru selecția modelului

TSA_ch2_acf_pacf_patterns

Criterii Informaționale

Scop: Echilibrează calitatea potrivirii față de complexitatea modelului

Criteriul Informațional Akaike (AIC):

$$\text{AIC} = -2\ln(\hat{L}) + 2k$$

Criteriul Informațional Bayesian (BIC/SBC):

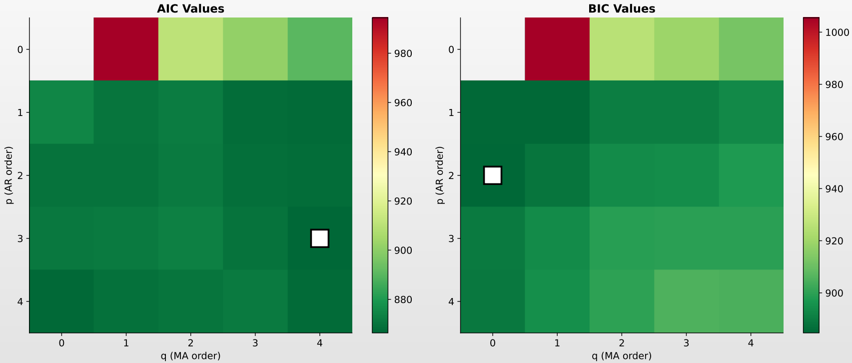
$$\text{BIC} = -2\ln(\hat{L}) + k\ln(n)$$

unde $\hat{L}$ = verosimilitate maximizată, k = număr de parametri, n = dimensiune eșantion

Utilizare:

- Valori mai mici sunt mai bune
- BIC penalizează complexitatea mai puternic decât AIC
- AIC tinde să aleagă modele mai mari; BIC mai simplu
- Comparăți modele potrivite pe *aceleași date*

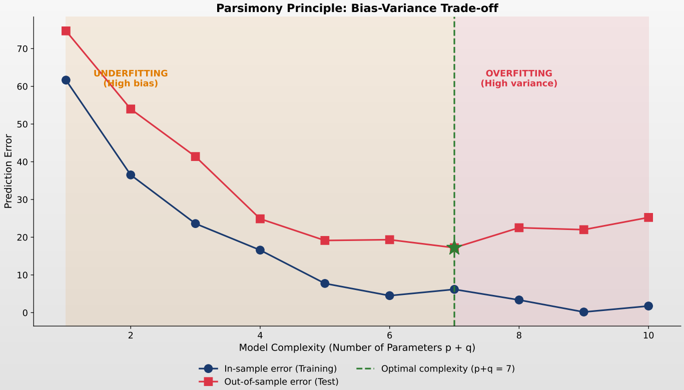
AIC vs BIC: Selecția Modelului



Notă: Pătratul alb marchează cel mai bun model; valorile mai mici (verde) sunt mai bune

TSA_ch2_model_selection

Principiul Parcimoniei: Compromisul Bias-Varianță



TSA_ch2_model_selection

Selecția Automată a Modelului

Abordarea căutării pe grilă:

1. Potriviți ARMA(p,q) pentru $p = 0, 1, \ldots, p_{max}$ și $q = 0, 1, \ldots, q_{max}$
2. Selectați modelul cu cel mai mic AIC sau BIC
3. Verificați cu teste de diagnostic

În Python (statsmodels):

- `pm.auto_arima()` din pachetul `pmdarima`
- Testează automat staționaritatea, caută peste ordine
- Returnează cel mai bun model după AIC/BIC

Atenție:

- Selecția automată este un punct de pornire, nu răspunsul final
- Verificați întotdeauna diagnosticele
- Considerați cunoștințele de domeniu

Quiz: Criterii Informaționale

Întrebare

Comparând ARMA(1,1) vs ARMA(2,1) folosind BIC, care este corect?

(A) BIC mai mic înseamnă întotdeauna prognoze mai bune

(B) BIC penalizează complexitatea mai puțin decât AIC

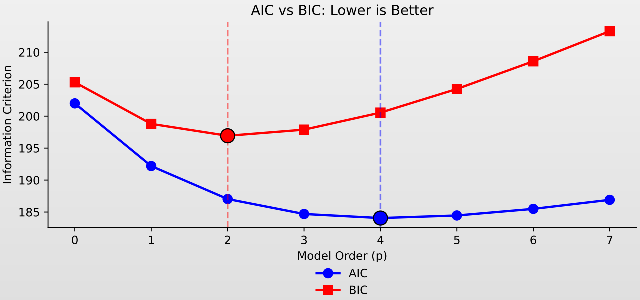
(C) Modelul cu BIC mai mic este preferat

(D) BIC poate compară doar modele cu același număr de parametri

Quiz: Criterii Informaționale – Răspuns

Răspuns Corect: (C) Modelul cu BIC mai mic este preferat

BIC mai mic indică un compromis mai bun între potrivire și complexitate. BIC penalizează complexitatea *mai mult* decât AIC.



TSA_ch2_model_selection

Prezentare Generală a Metodelor de Eștimare

Trei abordări principale:

1. Metoda Momentelor / Yule-Walker (doar AR)

- Potrivește autocorelațiile din eșantion la valorile teoretice
- Simplă, formă închisă pentru modele AR
- Nu este eficientă pentru componentele MA

2. Eștimarea prin Maximum de Verosimilitate (MLE)

- Cea mai comună abordare
- Necesită ipoteză distribuțională (de obicei Gaussiană)
- Eficientă și consistentă

3. Cele Mai Mici Pătrate Condiționate

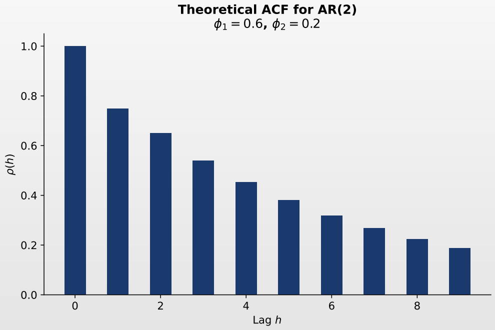
- Minimizează suma pătratelor reziduurilor
- Condiționare pe observațiile inițiale
- Computațional mai simplă decât MLE exact

Comparăția Metodelor de Eștimare

eÈŹtimation_comparison.pdf

TSA_ch2_estimation

Ecuațiile Yule-Walker pentru AR(p)



Yule-Walker Equations

$$\rho(1) = \phi_1 + \phi_2\rho(1)$$

$$\rho(2) = \phi_1\rho(1) + \phi_2$$

Matrix form: $R \cdot \phi = \rho$

R = autocorrelation matrix

Solution: $\hat{\phi} = R^{-1}\rho$

TSA_ch2_estimation

Ecuațiile Yule-Walker: Forma Matriceală

Pentru AR(p): $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$

Ecuațiile Yule-Walker:

$$\rho(k) = \phi_1 \rho(k-1) + \phi_2 \rho(k-2) + \cdots + \phi_p \rho(k-p)$$

pentru $k = 1, 2, \ldots, p$

Forma matriceală:

$$\begin{pmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \cdots & \rho(p-1) \\ \rho(1) & \rho(0) & \cdots & \rho(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(p-1) & \rho(p-2) & \cdots & \rho(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(p) \end{pmatrix}$$

Eștimare: Înlocuiți $\rho(k)$ cu autocorelațiile din eșantion $\hat{\rho}(k)$

Demonstrație: Ecuațiile Yule-Walker

Scop: Derivarea relației $\rho(k) = \phi_1\rho(k-1) + \cdots + \phi_p\rho(k-p)$

Demonstrație: Pornim de la AR(p): $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$
Înmulțim ambele părți cu X_{t-k} și luăm speranța:

$$\mathbb{E}[X_t X_{t-k}] = \phi_1 \mathbb{E}[X_{t-1}X_{t-k}] + \cdots + \phi_p \mathbb{E}[X_{t-p}X_{t-k}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-k}]$$

Pentru $k \geq 1$: $\mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-k}] = 0$ (șocul viitor necorelat cu trecutul)
Folosind $\gamma(k) = \mathbb{E}[X_t X_{t-k}]$ (presupunând medie zero):

$$\gamma(k) = \phi_1\gamma(k-1) + \phi_2\gamma(k-2) + \cdots + \phi_p\gamma(k-p)$$

Împărțind la $\gamma(0)$:

$$\boxed{\rho(k) = \phi_1\rho(k-1) + \phi_2\rho(k-2) + \cdots + \phi_p\rho(k-p)}$$

Cazul Special AR(1)

$\rho(k) = \phi_1\rho(k-1) = \phi_1^k$ (folosind $\rho(0) = 1$)

Eștimarea prin Maximum de Verosimilitate

Presupunând erori Gaussiene: $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

Log-verosimilitatea pentru ARMA(p,q):

$$\ell(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2$$

unde ε_t sunt inovațiile calculate recursiv.

Procedura de eștimare:

1. Inițializare: folosiți metoda momentelor sau OLS pentru valori de pornire
2. Optimizare: metode numerice (de ex., BFGS, Newton-Raphson)
3. Iterare până la convergență

În practică: Folosiți `statsmodels.tsa.arima.model.ARIMA`

Erori Standard și Inferență

Distribuția asimptotică a MLE:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \xrightarrow{d} N\left(\boldsymbol{\theta}_0, \frac{1}{n}\mathrm{I}(\boldsymbol{\theta}_0)^{-1}\right)$$

unde $\mathrm{I}(\boldsymbol{\theta})$ este matricea informației Fisher.

Erori standard: Rădăcina pătrată a diagonalei lui $\frac{1}{n}\hat{\mathrm{I}}^{-1}$

Testarea ipotezelor:

- $H_0 : \phi_j = 0$ (sau $\theta_j = 0$)
- Statistică de test: $z = \frac{\hat{\phi}_j}{SE(\hat{\phi}_j)} \sim N(0, 1)$ asimptotic
- Respingeți dacă $|z| > 1.96$ la nivel de 5%

Interval de încredere: $\hat{\phi}_j \pm 1.96 \cdot SE(\hat{\phi}_j)$

Analiza Reziduurilor

Dacă modelul este corect specificăt, reziduurile ar trebui să fie zgomot alb:

1. Reprezentăți grafic reziduurile în timp

- Ar trebui să fluctueze în jurul lui zero
- Fără tipare sau trenduri evidente
- Varianță constantă (fără heteroscedasticitate)

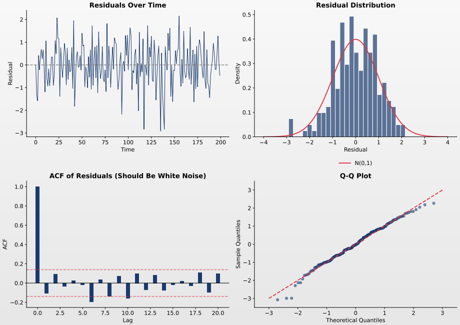
2. Verificați ACF reziduurilor

- Toate corelațiile ar trebui să fie în benzile de încredere
- Fără vârfuri semnificâtive $\rightarrow$ zgomot alb

3. Verificați histograma / graficul Q-Q

- Ar trebui să fie aproximativ normale (dacă presupunem Gaussian)
- Cozi groase sugerează erori non-normale

Diagnosticarea Reziduurilor: Exemplu



- **Graficul reziduurilor**: Ar trebui să arate dispersie aleatorie în jurul lui zero cu varianță constantă
- **ACF reziduurilor**: Fără vârfuri semnificâtive indică zgomot alb (potrivire bună)
- **Graficul Q-Q**: Punctele pe linia diagonală indică reziduuri distribuite normal

TSA_ch2_diagnostics

Testul Ljung-Box

Definiție 11 (Testul Ljung-Box)

Testează dacă reziduurile sunt distribuite independent (fără autocorelație).

Statistică de test:

$$Q(m) = n(n+2)\sum_{k=1}^{m}\frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k}$$

Ipoteze:

- H_0: Reziduurile sunt zgomot alb (fără autocorelație până la lag m)
- H_1: Reziduurile sunt autocorelate

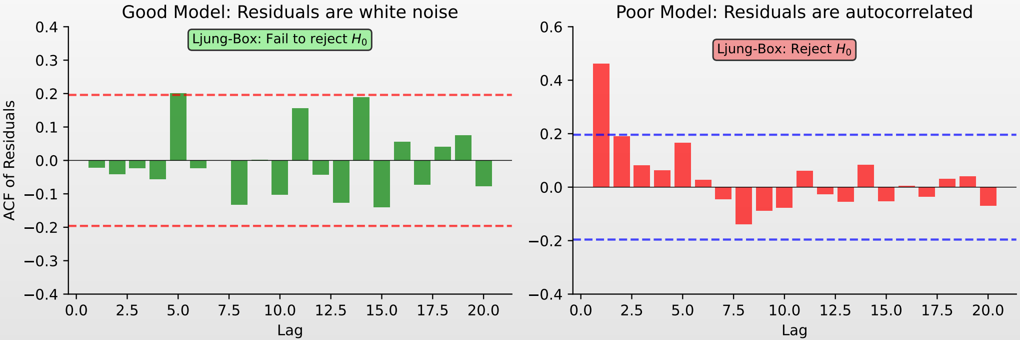
Distribuție: Sub H_0, $Q(m) \sim \chi^2(m-p-q)$ aproximativ

Decizie:

- p-value $> 0.05 \rightarrow$ nu respingem $H_0 \rightarrow$ reziduurile arată ca zgomot alb (bine!)
- p-value $< 0.05 \rightarrow$ autocorelație semnificâtivă rămâne $\rightarrow$ model inadecvat

TSA_ch2_diagnostics

Testul Ljung-Box: Ilustrație Vizuală



Stânga: Model bun – reziduurile sunt zgomot alb (fără ACF semnificâțiv). Dreapta: Model slab – reziduurile arată autocorelație.

TSA_ch2_diagnostics

Lista de Verificare Diagnostic

Un model ARMA bun ar trebui să satisfacă:

1. **Staționaritate:** Rădăcinile AR în afără cercului unitate
   ✓ Verificați cu `arroots`
2. **Invertibilitate:** Rădăcinile MA în afără cercului unitate
   ✓ Verificați cu `maroots`
3. **Reziduuri zgomot alb:** Fără ACF semnificâtiv
   ✓ Grafic ACF, testul Ljung-Box
4. **Reziduuri normale:** (dacă presupunem)
   ✓ Grafic Q-Q, testul Jarque-Bera
5. **Fără heteroscedasticitate:** Variantă constantă
   ✓ Reprezentăți reziduurile, testul ARCH
6. **Simplu:** Cel mai mic AIC/BIC dîntre modelele adecvate

Dacă diagnosticele eșuează: Reveniți la identificare, încercați ordine diferite

Quiz: Testul Ljung-Box

Întrebare

După potrivirea unui model ARMA, rulați testul Ljung-Box pe reziduuri și obțineți p-value $= 0.03$. Ce înseamnă asta?

(A) Modelul este adecvat, reziduurile sunt zgomot alb

(B) Modelul este inadecvat, reziduurile au autocorelație

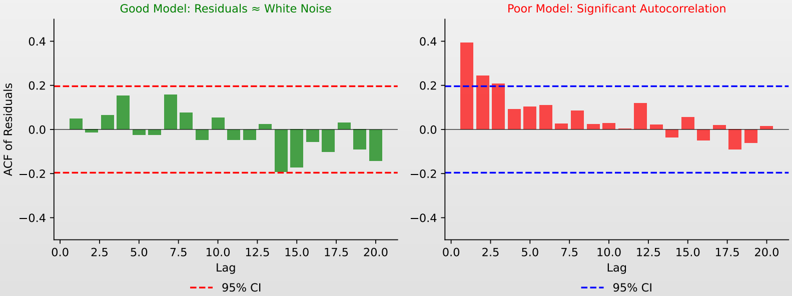
(C) Trebuie să creșteți dimensiunea eșantionului

(D) Testul este neconcludent

Quiz: Testul Ljung-Box – Răspuns

Răspuns Corect: (B) Modelul este inadecvat

p-value < 0.05 respinge H_0 (zgomot alb), indicând autocorelație reziduală rămasă.



TSA_ch2_diagnostics

Prognoze Punctuale

Prognoză optimă: Speranța condiționată minimizează MSE

$$\hat{X}_{n+h|n} = \mathbb{E}[X_{n+h}|X_n, X_{n-1}, \ldots]$$

Pentru AR(1): $X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$

$$\hat{X}_{n+1|n} = c + \phi X_n$$
$$\hat{X}_{n+2|n} = c + \phi \hat{X}_{n+1|n} = c(1 + \phi) + \phi^2 X_n$$
$$\hat{X}_{n+h|n} = \mu + \phi^h (X_n - \mu)$$

Proprietate cheie: Prognozele converg la media μ când $h \to \infty$

Pentru MA(1): $X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$

$$\hat{X}_{n+1|n} = \mu + \theta \varepsilon_n$$
$$\hat{X}_{n+h|n} = \mu \quad \text{pentru } h > 1$$

Incertitudinea Prognozei

Eroarea de prognoză:

$$e_{n+h|n} = X_{n+h} - \hat{X}_{n+h|n}$$

Eroarea medie pătratică de prognoză (MSFE):

$$\text{MSFE}(h) = \mathbb{E}[e_{n+h|n}^2] = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2$$

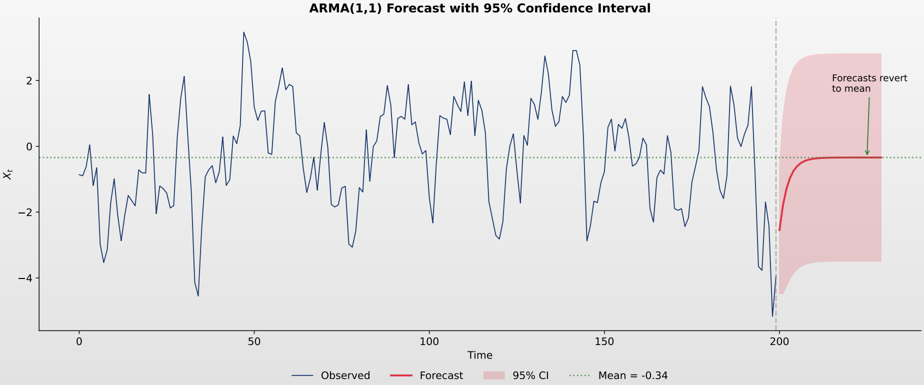
unde ψ_j sunt coeficienții MA(∞).

Pentru AR(1): $\psi_j = \phi^j$

$$\text{MSFE}(h) = \sigma^2 \frac{1-\phi^{2h}}{1-\phi^2} \to \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} = \text{Var}(X_t)$$

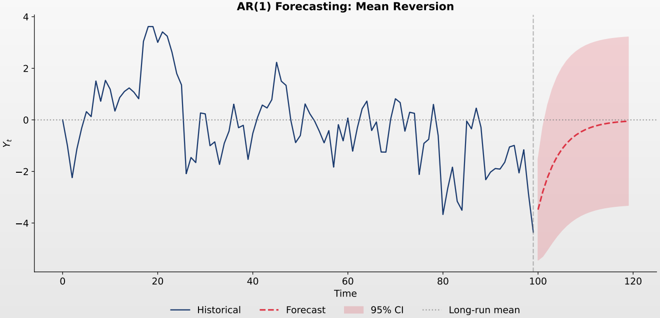
Observație cheie: Incertitudinea prognozei crește cu orizontul, ajungând eventual la varianța necondiționată

Prognoză ARMA cu Intervale de Încredere



TSA_ch2_forecasting

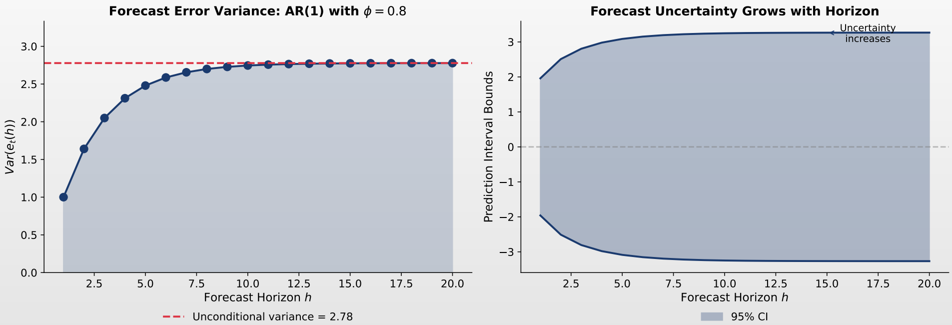
Prognoză AR(1): Revenirea la Medie



- Prognozele converg la media necondiționată μ pe măsură ce orizontul crește
- Rata de convergență depinde de $|\phi|$: valori mai mari înseamnă revenire mai lentă
- Intervalele de încredere se lărgesc cu orizontul, ajungând eventual la varianța necondiționată

TSA_ch2_forecasting

Varianța Erorii de Prognoză în Funcție de Orizont



TSA_ch2_forecasting

Intervale de Încredere pentru Prognoze

Presupunând erori Gaussiene:

$$X_{n+h}|X_n, \ldots \sim N\left(\hat{X}_{n+h|n}, \text{MSFE}(h)\right)$$

Interval de încredere $(1-\alpha)$**:**

$$\hat{X}_{n+h|n} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\text{MSFE}(h)}$$

unde $z_{\alpha/2} = 1.96$ pentru IC 95%.

Proprietăți:

- Intervalele se lărgesc pe măsură ce orizontul crește
- În cele din urmă converg la intervalul necondiționat: $\mu \pm z_{\alpha/2}\sigma_X$
- Lățimea depinde de parametrii modelului (coeficienți AR, etc.)

În Python: `model.get_forecast(h).conf_int()`

Evaluarea Prognozei

Testare în afără eșantionului:

1. Împărțiți datele: set de antrenare (potriviți modelul) și set de test (evaluați)
2. Generați prognoze pentru perioadă de test
3. Comparăți prognozele cu valorile reale

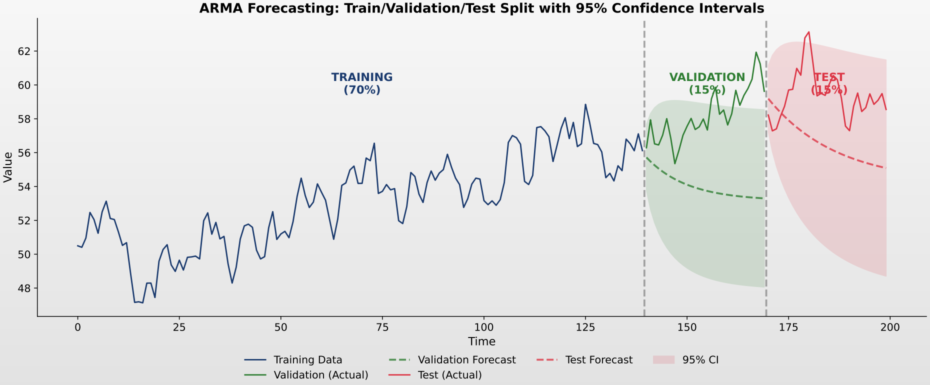
Metrici (din Capitolul 1):

- $\text{MAE} = \frac{1}{n}\sum |e_t|$
- $\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum e_t^2}$
- $\text{MAPE} = \frac{100}{n}\sum \left|\frac{e_t}{X_t}\right|$

Fereastră mobilă/în expansiune:

- Re-eștimați modelul pe măsură ce sosesc date noi
- Evaluare mai realistă a performanței prognozei

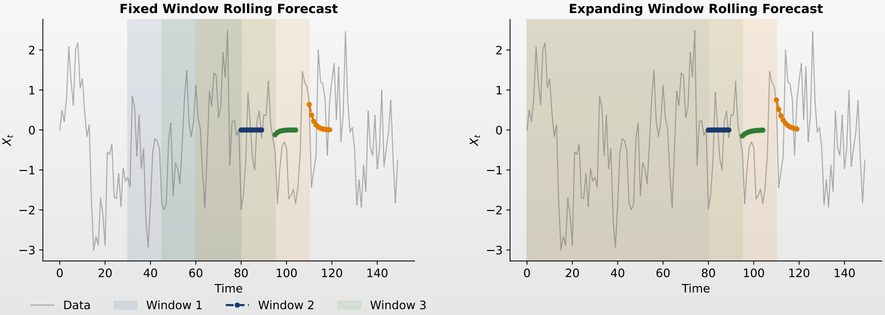
Exemplu de Prognoză Train/Validare/Test



Bună Practică

Evaluați întotdeauna prognozele pe date nevăzute. Folosiți setul de antrenare pentru estimare, setul de validare pentru selecția modelului și setul de test pentru evaluarea finală.

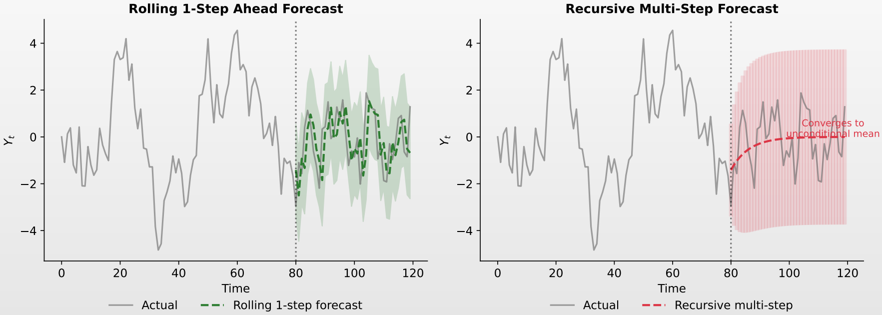
Prognoză cu Fereastră Mobilă (Rolling Forecast)



Metodologia Rolling Forecast

- **Fereastră fixă:** Re-eștimare model folosind cele mai recente w observații
- **Fereastră expansivă:** Folosește toate datele disponibile până la origine
- Generează prognoză 1-pas înainte, mută fereastra, repetă

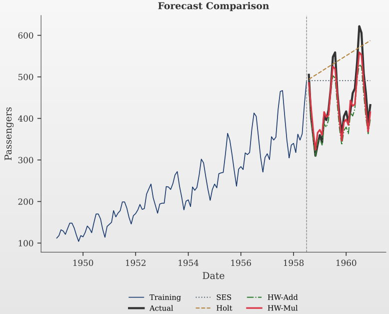
Rolling vs Prognoză Multi-Pas

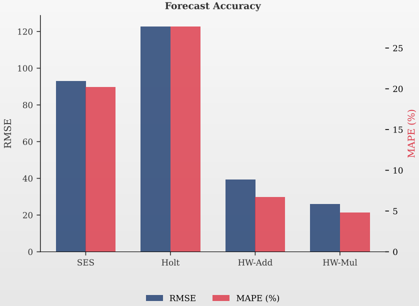


Diferențe Cheie

- **Rolling 1-pas:** Mai precis, necesită re-eștimare frecventă
- **Multi-pas direct:** Eștimare model separat pentru fiecare orizont h
- **Multi-pas recursiv:** Iterează prognoze 1-pas (acumulare erori)

Aplicație cu Date Reale: Comparăție Prognoze





Considerații Practice

- Datele reale prezintă adesea nestaționaritate, rupturi structurale
- Comparăți mai multe modele: ARMA, netezire exponențială, naive
- Folosiți validare încrucișată sau evaluare rolling pentru robustețe

Quiz: Proprietățile Prognozei

Întrebare

Pentru un model AR(1) staționar, ce se întâmplă cu prognozele când orizontul $h \to \infty$?

(A) Prognozele cresc nelimitat

(B) Prognozele oscilează la nesfârșit

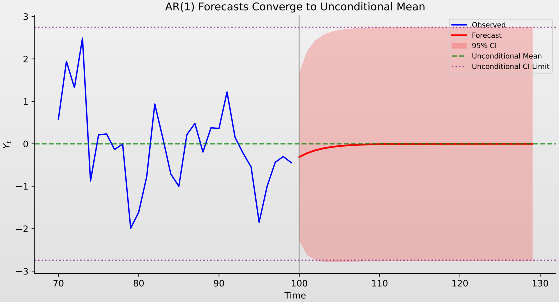
(C) Prognozele converg la media necondiționată μ

(D) Prognozele devin mai precise

Quiz: Proprietățile Prognozei – Răspuns

Răspuns Corect: (C) Prognozele converg la μ

$\hat{X}_{n+h|n} = \mu + \phi^h(X_n - \mu) \to \mu$ când $h \to \infty$ (deoarece $|\phi| < 1$)



TSA_ch2_forecasting

Implementare Python: Potrivirea ARMA

Folosind statsmodels:

```
from statsmodels.tsa.arima.model import ARIMA

# Potrivire ARMA(2,1) -- notă:  ARIMA(p,d,q) cu d=0
model = ARIMA(data, order=(2, 0, 1))
results = model.fit()

# Rezumat
print(results.summary())

# Prognoză
forecast = results.get_forecast(steps=10)
print(forecast.predicted_mean)
print(forecast.conf_int())
```

Notă: ARIMA cu $d = 0$ este echivalent cu ARMA

Python: Selecția Modelului cu pmdarima

Selecție automată ARIMA:

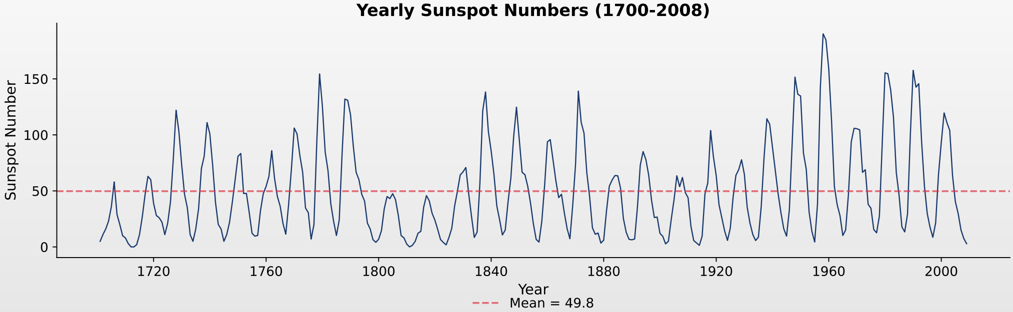
```
import pmdarima as pm

# Auto ARIMA cu criteriul AIC
model = pm.auto_arima(data,
              start_p=0, max_p=5,
              start_q=0, max_q=5,
              d=0, # Fără diferențiere pentru date staționare
              seasonal=False,
              information_criterion='aic',
              trace=True)

print(model.summary())
```

Rezultat: Cel mai bun ordin al modelului și parametrii potriviți

Rezumat Flux de Lucru

1. **Pregătirea datelor**
   - Verificați valori lipsă, valori aberante
   - Transformați dacă este necesar (log, diferențiere)
2. **Verificarea staționarității**
   - Inspecție vizuală: grafic temporal, ACF
   - Teste formale: ADF, KPSS
   - Diferențiați dacă este nestaționar
3. **Identificarea modelului**
   - Tipare ACF/PACF
   - Căutare pe grilă cu criterii informaționale
4. **Estimare și diagnosticare**
   - Potriviți modelul, verificăți semnificația
   - Analiză reziduală, testul Ljung-Box
5. **Prognoză**
   - Prognoze punctuale cu intervale de încredere
   - Validare în afără eșantionului

Studiu de Caz: Petele Solare (Sunspots)

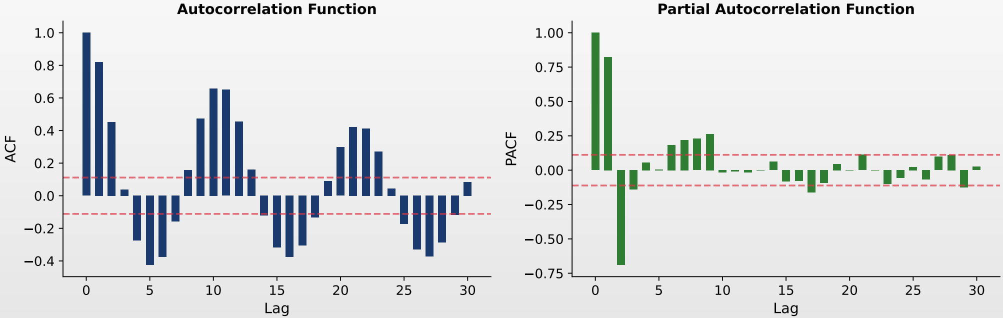


Descrierea Datelor

Numărul anual de pete solare (1700–2008): Set de date clasic în analiza seriilor de timp. Serie staționară cu cicluri de aproximativ 11 ani. Vom aplica metodologia Box-Jenkins completă.

TSA_ch2_case_study

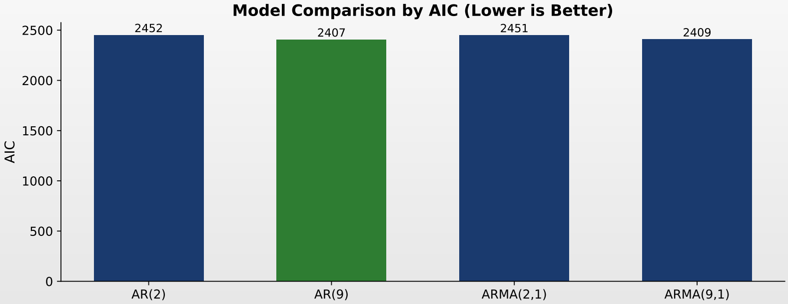
Pasul 1: Analiza ACF/PACF



Identificare

- **ACF**: Descreștere lentă, sinusoidală — sugerează AR
- **PACF**: Vârfuri semnificâțive la lag-urile 1, 2, 9 — sugerează AR(9) sau AR(2)
- Seria pare staționară (nu necesită diferențiere, $d = 0$)

Pasul 2: Compararea Modelelor

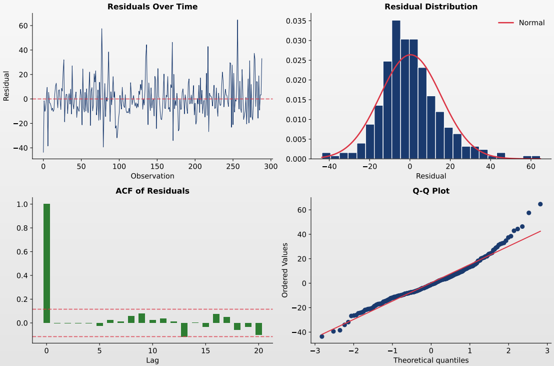


Selecția Modelului

Comparăm mai multe modele cândidate folosind criteriul AIC. Modelul **AR(9)** are cel mai mic AIC, capturând ciclul solar de 11 ani.

TSA_ch2_case_study

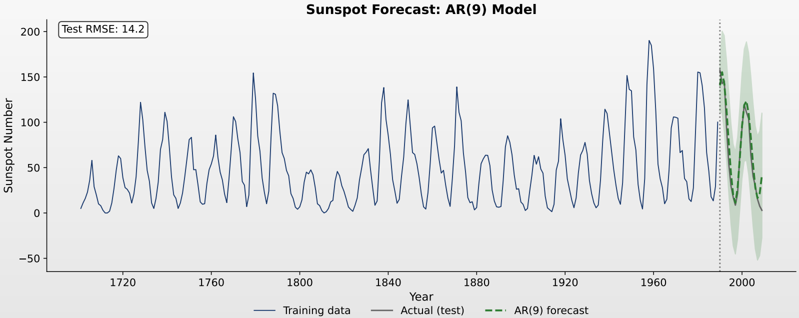
Pasul 3: Verificarea Diagnostică



Diagnostice AR(9)

Reziduurile seamănă cu zgomot alb: medie zero, varianță constantă, ACF fără structură semnificativă, distribuție aproximativ normală.

Pasul 4: Prognoză



Rezultate

- Modelul AR(9) captează natura ciclică a petelor solare
- Intervalele de încredere de 95% acoperă majoritatea valorilor reale
- RMSE pe setul de test: aproximativ 30 (rezonabil pentru această serie volatilă)

Concluzii Cheie

1. **Modele AR(p):** Valoarea curentă depinde de p valori trecute
   - Staționaritate: rădăcinile lui $\phi(z)$ în afără cercului unitate
   - PACF se întrerupe la lag p
2. **Modele MA(q):** Valoarea curentă depinde de q șocuri trecute
   - Întotdeauna staționar; invertibilitate: rădăcinile lui $\theta(z)$ în afără cercului unitate
   - ACF se întrerupe la lag q
3. **ARMA(p,q):** Combină AR și MA pentru modelare flexibilă
   - Atât ACF cât și PACF scad
4. **Box-Jenkins:** Identificare $\rightarrow$ Eștimare $\rightarrow$ Diagnosticare $\rightarrow$ Prognoză
5. **Diagnosticare:** Reziduurile trebuie să fie zgomot alb
6. **Prognoze:** Converg la medie; incertitudinea crește cu orizontul

Previzualizare Capitolul Următor

Capitolul 3: ARIMA și Modele Sezoniere

- ARIMA(p,d,q): Modele integrate pentru date nestaționare
- ARIMA Sezonier: SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)$_s$
- Diferențiere sezonieră
- Aplicații practice cu tipare sezoniere

Lectură:

- Hyndman & Athanasopoulos, *Forecasting: Principles and Practice*, Cap. 9
- Box, Jenkins, Reinsel & Ljung, *Time Series Analysis*, Cap. 3-4

Referințe

- Box, G.E.P., Jenkins, G.M., Reinsel, G.C., & Ljung, G.M. (2015). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. 5th ed., Wiley.
- Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
- Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*. 3rd ed., OTexts. https://otexts.com/fpp3/
- Brockwell, P.J., & Davis, R.A. (2016). *Introduction to Time Series and Forecasting*. 3rd ed., Springer.
- Shumway, R.H., & Stoffer, D.S. (2017). *Time Series Analysis and Its Applicâțions*. 4th ed., Springer.

Surse de Date și Software

Pachete Software:

- `statsmodels` – Modele statistice pentru Python, inclusiv ARIMA
- `pmdarima` – Selecție automată ARIMA pentru Python
- `scipy` – Optimizare și funcții statistice
- `numpy`, `pandas` – Manipulare date
- `matplotlib` – Vizualizare

Date și Exemple:

- Serii de timp simulate pentru ilustrații
- Exemple bazate pe Hyndman & Athanasopoulos (2021)