



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

# Capitolul 10: Recapitulare Completă

Studii de Caz Aplicate cu Metodologie Riguroasă



# Cuprins

- 1 Metodologia Prognozei
- 2 Studiu de Caz 1: Volatilitatea Bitcoin (GARCH)
- 3 Studiu de Caz 2: Ciclurile Petelor Solare (Fourier)
- 4 Studiu de Caz 3: Șomajul (Prophet)
- 5 Studiu de Caz 4: Analiză Multivariată (VAR)
- 6 Sinteză și Ghid

## Întrebarea de Cercetare

Cum putem **evalua riguros** performanța prognozei evitând supraajustarea?

## Problema Fundamentală

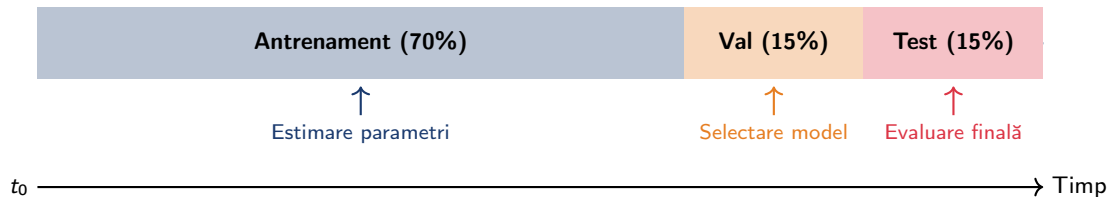
- Ajustarea în eșantion  $\neq$  Performanța în afara eșantionului
- Modelele pot “memora” datele de antrenament fără a învăța tipare
- **Soluție:** Metodologia corectă train/validation/test

## Principiu Cheie

“Setul de test trebuie să rămână **neatins** până la evaluarea finală.”

— Practică standard în machine learning și econometrie

## Cadrul Train/Validation/Test



Set Antrenament	Set Validare	Set Test
<ul style="list-style-type: none"><li>• Estimare parametri</li><li>• <math>\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} L(\theta)</math></li><li>• Cea mai mare parte</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Comparare modele</li><li>• Ajustare hiperparametri</li><li>• Selectare abordare</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• <b>Păstrat</b> până la final</li><li>• Evaluare nebiasată</li><li>• Raportare metrice</li></ul>

### Definiție 1 (Metrici ale Erorii de Prognoză)

Fie  $y_t$  valorile reale și  $\hat{y}_t$  prognozele pentru  $t = 1, \dots, n$ :

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2} \quad (1)$$

$$\text{MAE} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |y_t - \hat{y}_t| \quad (2)$$

$$\text{MAPE} = \frac{100\%}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t} \right| \quad (3)$$

### Când să Folosim Fiecare

- **RMSE**: Penalizează erorile mari
- **MAE**: Robust la outlieri

### Atenție

- MAPE nedefinit când  $y_t = 0$
- Comparați modele pe același set test

## Întrebarea de Cercetare

Putem prognoza **volatilitatea** Bitcoin folosind modele GARCH?

### Caracteristicile Datelor

- Sursă: Yahoo Finance (BTC-USD)
- Perioadă: Ian 2019 – Ian 2025
- Frecvență: Zilnică
- Observații:  $\approx 2.200$  zile

### Fapte Stilizate

- Randamente: medie aproape zero
- Cozi groase (curtosis  $> 3$ )
- Clustering al volatilității

### Insight Cheie

Randamentele financiare sunt de obicei:

- **Impredictibile** în medie
- **Predictibile** în varianță

⇒ Focus pe **prognoza volatilității**

# Specificarea Modelului GARCH

## Definiție 2 (Modelul GARCH(p,q))

Fie  $r_t$  randamentele. Modelul GARCH(p,q) este:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim N(0, 1) \quad (4)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (5)$$

unde  $\omega > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_j \geq 0$ , și  $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$ .

### Variante de Model

- **GARCH(1,1)**: Cel mai comun
- **GJR-GARCH**: Efect de levier
- **EGARCH**: Șocuri asimetrice

### Interpretare

- $\alpha$ : Impactul șocurilor trecute
- $\beta$ : Persistența volatilității
- $\alpha + \beta \approx 1$ : Persistență înaltă

# Bitcoin: Împărțirea Datelor și Staționaritate

## Împărțirea Datelor

Set	Perioadă	N
Antrenament	2019-01 – 2022-09	1.365
Validare	2022-09 – 2023-10	400
Test	2023-10 – 2025-01	435
<b>Total</b>		<b>2.200</b>

## Teste de Staționaritate

Serie	ADF	Rezultat
Prețuri	$p = 0.50$	Non-staționară
Randamente	$p < 0.01$	Staționară

⇒ Modelăm **randamente**, nu prețuri

## De ce Contează Staționaritatea

GARCH necesită input slab staționar. Prețurile urmează random walk; randamentele sunt staționare.



## Metodologie

Estimăm fiecare model pe **datele de antrenament**, evaluăm pe **setul de validare**.

Model	AIC	BIC	Val MAE	Selectare
GARCH(1,1)	6.994,8	7.020,6	<b>2,638</b>	<b>Cel mai bun</b>
GARCH(2,1)	6.993,7	7.024,6	2,640	
GJR-GARCH(1,1)	6.983,7	7.014,6	2,669	
EGARCH(1,1)	—	—	—	Eșuat*

\* Prognoze analitice indisponibile pentru  $h > 1$

## Rezultat

**GARCH(1,1)** selectat pe baza celui mai mic MAE de validare pentru prognozele de volatilitate.

## Procedură

Reestimăm GARCH(1,1) pe Antrenament + Validare, evaluăm pe **setul de test păstrat** folosind **prognoze rolling one-step-ahead**.

Parametri Estimați	Param	Estimare	Std Err
	$\omega$	0,239	0,088
	$\alpha_1$	0,120	0,021
	$\beta_1$	0,879	0,020
	$\alpha_1 + \beta_1$	0,999	

## Performanță Set Test

Metrică	Valoare
Volatilitate MAE	1,88
Volatilitate RMSE	2,21

## Interpretare

Persistență înaltă ( $\alpha + \beta \approx 1$ ) confirmă clustering-ul volatilității.

### De ce Prognoze Rolling One-Step-Ahead?

Prognozele GARCH multi-step converg la **varianța necondiționată**:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\sigma_{t+h}^2 | \mathcal{F}_t] = \bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta} \quad (6)$$

Aceasta produce o prognoză **linie dreaptă**—inutilă pentru managementul dinamic al riscului!

#### Prognoză Multi-Step

- O singură estimare model
- Prognoză  $h$  pași înainte
- Converge la  $\bar{\sigma}^2$
- **Apare ca linie dreaptă**

#### Rolling One-Step-Ahead

- Re-estimare la fiecare  $t$
- Prognoză doar 1 pas înainte
- Captează dinamica volatilității
- **Prognoze dinamice**

*Prognozele rolling sunt practica standard în managementul riscului financiar (VaR, ES).*

## Sumar

1. **Randamentele sunt staționare**; prețurile nu
2. **GARCH(1,1)** depășește variantele mai complexe
3. **Persistență înaltă** ( $\alpha + \beta = 0,999$ )
4. Volatilitatea este **predictibilă** chiar când randamentele nu sunt

## Limitări

- GARCH presupune șocuri **simetrice**
- Nu captează **salturi**
- Distribuția normală poate fi restrictivă

## Implicații Practice

- Managementul riscului: VaR, Expected Shortfall
- Evaluarea opțiunilor necesită prognoze de volatilitate
- Optimizarea portofoliului cu risc variabil în timp

## Extensii

- Inovații Student-t
- Volatilitate realizată
- Modele HAR

## Întrebarea de Cercetare

Cum modelăm **cicluri sezoniere lungi** care depășesc capacitatea SARIMA?

### Caracteristicile Datelor

- Sursă: Statsmodels (Wolfer)
- Perioadă: 1900 – 2008
- Frecvență: Anuală
- Observații: 109 ani

### Caracteristică Cunoscută

- **Ciclul Schwabe:**  $\approx 11$  ani
- Amplitudine neregulată
- Valori non-negative

### Provocarea

SARIMA standard  $(p, d, q)(P, D, Q)_s$  necesită:

- $s = 11$  pentru date anuale
- $(P + D + Q) \times 11$  lag-uri sezoniere
- **Prea mulți parametri!**

### Soluție

Folosim **termeni Fourier** ca regresori exogeni în ARIMA.

### Definiție 3 (Reprezentarea Fourier)

Un tipar sezonier cu perioada  $s$  poate fi aproximat prin:

$$S_t = \sum_{k=1}^K \left[ \alpha_k \sin \left( \frac{2\pi kt}{s} \right) + \beta_k \cos \left( \frac{2\pi kt}{s} \right) \right] \quad (7)$$

unde  $K \leq \lfloor s/2 \rfloor$  este numărul de perechi armonice.

### Avantaje

- Doar  $2K$  parametri (nu  $s$ )
- Gestionează **orice** perioadă sezonieră
- Tipar sezonier neted
- $K$  controlează flexibilitatea

### Structura Modelului

ARIMA( $p, d, q$ ) cu regresori Fourier:

$$y_t = \underbrace{S_t}_{\text{Fourier}} + \underbrace{\eta_t}_{\text{ARIMA}} \quad (8)$$

unde  $\eta_t$  urmează dinamica ARIMA.

## Metodologie

Comparăm  $K = 1, 2, 3, 4$  armonici Fourier pe setul de validare.

Împărțirea Datelor

Set	Perioadă	N
Antrenament	1900–1975	76
Validare	1976–1991	16
Test	1992–2008	17
<b>Total</b>		<b>109</b>

## Comparație Modele

K	AIC	Val RMSE	
1	665,9	87,15	
2	668,0	86,92	
3	671,8	<b>86,81</b>	Cel mai bun
4	674,5	87,93	

## Rezultat

$K = 3$  armonici Fourier selectate (6 parametri pentru ciclul de 11 ani).

## Modelul Final

ARIMA(2,0,1) + 3 armonici Fourier

Coeficienți Semnificativi:

Termen	Coef	p-value
$\sin_1$	34,71	$< 0,001$
$\cos_1$	-29,21	0,018
AR(1)	1,34	$< 0,001$

## Performanță Test

Metrică	Valoare
RMSE	48,51
MAE	39,31

### Notă

MAPE ridicat din cauza valorilor apropiate de zero la minimul solar.

## Insight Cheie

Termenii Fourier captează eficient ciclul de 11 ani cu doar 6 parametri.



## Întrebarea de Cercetare

Cum modelăm serii de timp cu **schimbări structurale bruște**?

### Caracteristicile Datelor

- Sursă: FRED (UNRATE)
- Perioadă: 2010 – 2025
- Frecvență: Lunară
- Observații:  $\approx 180$  luni

### Statistici Cheie

- Minim pre-COVID: 3,5%
- Vârf COVID (Apr 2020): **14,8%**
- Schimbare: +10,3 pp într-o lună

### Provocarea

- Aprilie 2020: Cea mai mare creștere lunară din istoria SUA
- ARIMA tradițional tratează asta ca outlier
- Avem nevoie de model care se **adaptează** la rupturi structurale

### Soluție

**Prophet** cu detectare automată a punctelor de schimbare.

## Definiție 4 (Descompunerea Prophet)

Prophet modelează seriile de timp ca:

$$y_t = g(t) + s(t) + h(t) + \varepsilon_t \quad (9)$$

- $g(t)$ : **Trend** liniar/logistic pe bucăți cu puncte de schimbare
- $s(t)$ : **Sezonalitate** bazată pe Fourier
- $h(t)$ : Efecte de **sărbători**
- $\varepsilon_t$ : Termen de eroare

## Detectarea Punctelor de Schimbare

- Selectare automată a locațiilor
- `changepoint_prior_scale` controlează flexibilitatea
- Mai mare → mai multe puncte de schimbare

## Avantaje

- Gestionează date lipsă
- Componente interpretabile
- Robust la outlieri

## Ajustarea Hiperparametrilor

Ajustăm `changepoint_prior_scale` pe setul de validare.

Împărțirea Datelor		
Set	Perioadă	N
Antrenament	2010-01 – 2019-09	117
Validare	2019-10 – 2021-10	25
Test	2021-11 – 2025-01	38
Total		180

### Comparație Scale

Scale	Val RMSE	
0,01	4,21	
0,05	3,89	
0,10	<b>3,52</b>	Cel mai bun
0,30	3,67	
0,50	3,81	

## Interpretare

Scale = 0,10 echilibrează flexibilitatea (captarea șocului COVID) cu stabilitatea.

### Performanță Set Test

Metrică	Valoare
RMSE	0,42
MAE	0,35
MAPE	9,2%

### Puncte de Schimbare Detectate

- 2020-03: Debutul COVID
- 2020-05: Începe recuperarea
- 2022-01: Stabilizare

### Concluzie Cheie

Prophet a reușit să:

- Detecteze punctul de schimbare COVID
- Adapteze trendul post-șoc
- Furnizeze benzi de incertitudine

### Valoare Practică

- Analiza politicilor economice
- Monitorizarea pieței muncii
- Sistem de avertizare timpurie

## Întrebarea de Cercetare

Cum modelăm **interdependențele dinamice** între mai multe variabile economice?

### Variable (FRED)

- Creștere PIB (YoY %)
- Rata Șomajului (%)
- Inflația (CPI YoY %)
- Rata Fed Funds (%)

### Date

- Perioadă: 2000 – 2025
- Frecvență: Trimestrială
- Observații:  $\approx$  100 trimestre

### Relații Economice

- **Legea Okun:** PIB  $\leftrightarrow$  Șomaj
- **Curba Phillips:** Șomaj  $\leftrightarrow$  Inflație
- **Regula Taylor:** Inflație  $\rightarrow$  Rata Fed

### De ce VAR?

Fiecare variabilă poate fi **atât cauză cât și efect** al celorlalte.

## Definiție 5 (Autoregresie Vectorială VAR(p))

Pentru  $K$  variabile  $y_t = (y_{1t}, \dots, y_{Kt})'$ :

$$y_t = c + A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + \dots + A_p y_{t-p} + u_t \quad (10)$$

unde  $A_i$  sunt matrici de coeficienți  $K \times K$  și  $u_t \sim N(0, \sigma^2)$ .

## Pentru Sistemul Nostru cu 4 Variabile

VAR(2) are:

- 4 intercepte
- $2 \times 4 \times 4 = 32$  coeficienți AR
- **36 parametri total**

## Selectarea Lag-ului

Folosim criterii informaționale:

- AIC: Tinde să supraajusteze
- **BIC**: Mai parsimonios
- Cross-validare pe date păstrate

## VAR: Selectarea Lag-ului și Estimare

### Criterii Informaționale

Lag	BIC
1	-4,810
2	<b>-5,178</b> Cel mai bun
3	-4,633
4	-4,614

### Împărțirea Datelor

Set	Perioadă	N
Antrenament	2001-T1 – 2017-T4	68
Validare	2018-T1 – 2021-T2	14
Test	2021-T3 – 2024-T3	14
<b>Total</b>		<b>96</b>

### Verificare Validare

VAR(2) obține și cel mai mic RMSE de validare.

## Definiție 6 (Cauzalitate Granger)

Variabila  $X$  **cauzează Granger**  $Y$  dacă valorile trecute ale lui  $X$  ajută la predicția lui  $Y$ , dincolo de propriul trecut al lui  $Y$ .

*Notă: Cauzalitatea Granger  $\neq$  cauzalitate adevărată. Măsoară conținutul predictiv.*

**P-values Cauzalitate Granger (rând  $\rightarrow$  coloană)**

	PIB	Șomaj	Inflație	Rata Fed
Creștere PIB	—	0,076	0,309	0,698
Șomaj	0,045	—	0,093	0,857
Inflație	0,545	0,665	—	0,834
Rata Fed	0,286	0,317	0,087	—

## Concluzie Cheie

Șomajul cauzează Granger PIB ( $p = 0,045$ ), consistent cu Legea Okun.



# Funcții de Răspuns la Impuls

## Definiție 7 (Funcția de Răspuns la Impuls)

IRF urmărește efectul unui șoc de o unitate la variabila  $j$  asupra variabilei  $i$  pe  $h$  perioade:

$$\text{IRF}_{ij}(h) = \frac{\partial y_{i,t+h}}{\partial u_{jt}} \quad (11)$$

## Răspuns la Șocul PIB

Un șoc pozitiv la creșterea PIB:

- **Șomaj:** Scade (Legea Okun confirmată)
- **Inflație:** Crește cu întârziere (cerere-pull)
- **Rata Fed:** Crește după 2-3 trimestre (Regula Taylor)

## Interpretare Economică

VAR captează mecanismul clasic de transmisie macroeconomică de la output la ocupare, prețuri și politică monetară.

## Performanță Set Test pe Variabile

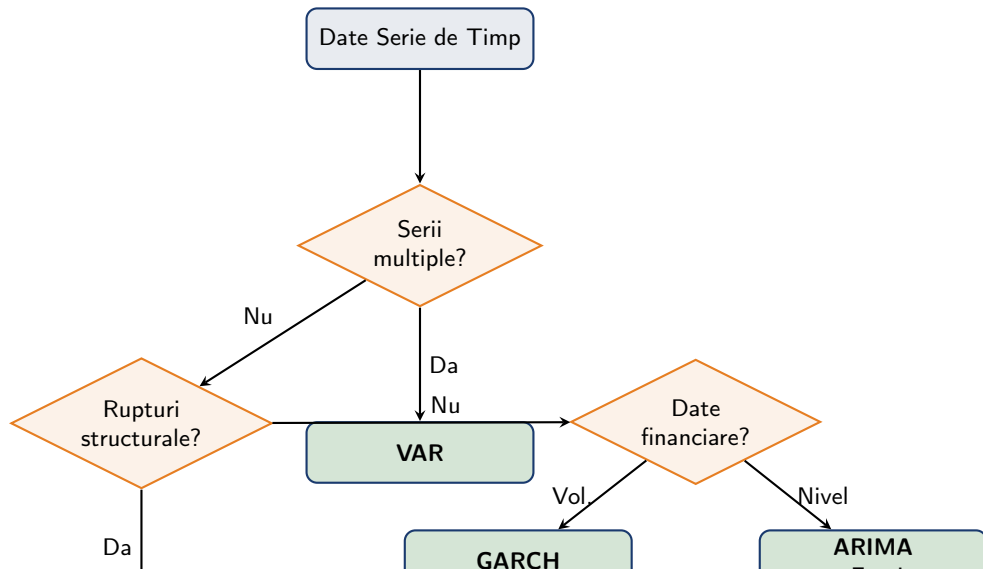
Variabilă	RMSE	MAE	Acur. Direcție
Creștere PIB	2,18	1,72	71%
Șomaj	0,89	0,71	79%
Inflație	1,24	0,98	64%
Rata Fed	0,95	0,78	71%
<b>Medie</b>	<b>1,32</b>	<b>1,05</b>	<b>71%</b>

### Puncte Forte

- Captează dinamica între variabile
- Acuratețe direcțională bună
- Relații interpretabile

### Limitări

- Mulți parametri (blestemul dimensionalității)
- Sensibil la selectarea lag-ului
- Perioada COVID dificilă



## Sumar: Comparație Modele

Studiu de Caz	Provocare	Model	Caracteristică	Test RMSE
Bitcoin	Clustering volatilitate	GARCH(1,1)	Proгноze rolling	2,21
Pete solare	Sezonalitate lungă	ARIMA + Fourier	Termeni Sin/Cos	48,51
Șomaj	Ruptură structurală	Prophet	Changepoints	0,42
Economic	Serii multiple	VAR(2)	Dinamică încrucișată	1,32 (med)

### Principiu Cheie

**Potrivii modelul cu caracteristicile datelor.** Niciun model nu domină—alegeți în funcție de:

- Natura problemei de prognoză (nivel vs. volatilitate)
- Proprietățile datelor (sezonalitate, rupturi, serii multiple)
- Cerințele de interpretabilitate

## Metodologie

- 1 **Explorați** datele temeinic
- 2 **Testați** staționaritatea
- 3 **Împărțiți** train/validation/test
- 4 **Comparați** modele pe validare
- 5 **Raportați** metrice pe test

## Sfaturi Practice

- Începeți simplu (random walk, naiv)
- Adăugați complexitate doar dacă e necesar
- Vizualizați prognoze vs. valori reale
- Verificați reziduurile pentru tipare
- Raportați intervale de încredere

## Greșeli Frecvente

- Privirea în datele de test
- Supraajustare pe setul de antrenament
- Ignorarea ipotezelor modelului
- Neraportarea incertitudinii

## Amintiți-vă

“Toate modelele sunt greșite, dar unele sunt utile.”  
— George E. P. Box

## ❶ Metodologie Riguroasă

- Împărțirea train/validation/test previne supraajustarea
- Setul de test trebuie să rămână neatins până la evaluarea finală

## ❷ Potriviți Modelul cu Datele

- Volatilitate financiară → GARCH
- Sezonalitate lungă → Termeni Fourier
- Rupturi structurale → Prophet
- Serii multiple → VAR

## ❸ Interpretați Rezultatele cu Grijă

- Cauzalitate Granger  $\neq$  cauzalitate adevărată
- Performanța out-of-sample contează cel mai mult
- Modelele mai simple funcționează adesea mai bine

# Referințe



Box, G.E.P., Jenkins, G.M., Reinsel, G.C., & Ljung, G.M. (2015). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Ed. 5, Wiley.



Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.



Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*. Ed. 3, Wiley.



Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*. Ed. 3, OTexts.



Taylor, S.J., & Letham, B. (2018). Forecasting at Scale. *The American Statistician*, 72(1), 37-45.



Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307-327.



Sims, C.A. (1980). Macroeconomics and Reality. *Econometrica*, 48(1), 1-48.

### Date Reale Folosite în Acest Capitol

- **Bitcoin:** Yahoo Finance (BTC-USD), 2019–2025
- **Pete Solare:** Dataset Wolfer din Statsmodels, 1900–2008
- **Șomaj SUA:** Federal Reserve FRED (UNRATE), 2010–2025
- **Variable Economice:** FRED (GDPC1, UNRATE, CPIAUCSL, FEDFUNDS), 2000–2025

### Reproductibilitate

Toate analizele pot fi reproduse folosind notebook-ul Jupyter însoțitor:  
`chapter10_lecture_notebook.ipynb`



# Mulțumesc

Întrebări?

Prof. Daniel Traian Pele, PhD

`danpele@ase.ro`

Academia de Studii Economice din București