



# Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

## Capitolul 6: Modele VAR și Cauzalitate Granger



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

## Obiective de învățare

La finalul acestui capitol, veți fi capabili să:

1. Înțelegeți **motivația** pentru analiza multivariată a seriilor de timp
2. Specificați și estimați modele **VAR(p)** (Vector Autoregresiv)
3. Aplicați teste de **cauzalitate Granger**
4. Interpretați **funcțiile de răspuns la impuls (IRF)**
5. Efectuați **descompunerea varianței erorii de prognoză (FEVD)**
6. Selectați ordinul optimal al lag-urilor folosind criterii informaționale
7. Implementați analiza VAR în **Python**

## Cuprins

### Fundamente

- Motivație
- Introducere în seriile de timp multivariate
- Vector Autoregresiv (VAR)
- Cauzalitate Granger
- Funcții de răspuns la impuls
- Descompunerea varianței erorii de prognoză

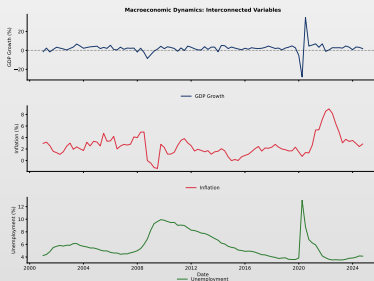
### Aplicații

- Diagnosticarea VAR
- Prognoza VAR
- Exemplu practic
- Studiu de caz: PIB și Șomaj
- Rezumat și Quiz

## Exemplu motivant: Dinamica macroeconomică

### Observații

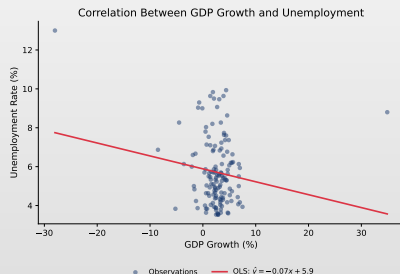
- ▣ Variabilele economice sunt **interconectate**: PIB afectează șomajul, inflația afectează ratele dobânzii
- ▣ Schimbările într-o variabilă se **propagă** prin sistem
- ▣ Înțelegerea acestor dinamici necesită analiză **multivariată**



## Principiu: variabilele interacționează

### Exemple

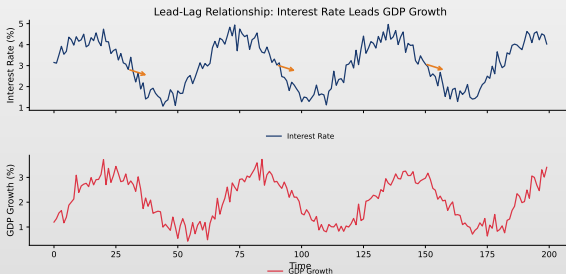
- **Legea lui Okun:** PIB  $\uparrow \Rightarrow$  șomaj  $\downarrow$
- **Regula Taylor:** Inflație  $\uparrow \Rightarrow$  dobândă  $\uparrow$
- **Curba Phillips:** Compromis șomaj-inflație



## Relații de avans-întârziere

### Observații

- ▣ Unele variabile **preced** altele: creșterea PIB prezice scăderea șomajului
  - ▶ Corelația încrucișată relevă **sincronizarea** relațiilor
  - ▶ Corelație maximă la lag-ul 4: PIB-ul precede șomajul cu  $\sim 4$  trimestre



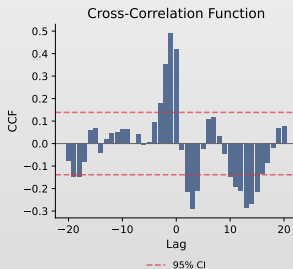
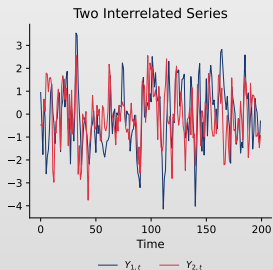
## De ce modelele univariate nu sunt suficiente

### Problema

- ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) tratează fiecare variabilă **izolat**
- Ignoră **interacțiunile** și **efectele de retroacțiune**

### Exemple

- PIB–Șomaj, Dobândă–Inflație, Acțiuni–Volum, Curs–Balanță comercială



#### Univariate AR(1)

$$Y_{1,t} = \phi_1 Y_{1,t-1} + \varepsilon_t$$

→ Ignores  $Y_2$

#### VAR(1)

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{A}\mathbf{Y}_{t-1} + \varepsilon_t$$

→ Captures all cross-dynamics

## Ce vom învăța astăzi

### Concepte fundamentale

1. **Modele VAR:** Cum să modelăm mai multe serii de timp împreună
2. **Cauzalitate Granger:** Ajută  $X$  la prezicerea lui  $Y$ ?
3. **Funcții de răspuns la impuls:** Cum se propagă șocurile?
4. **Descompunerea varianței:** Ce determină fiecare variabilă?

### Exemplu recurent: Creșterea PIB și șomajul

- $Y_{1t}$ : **Creșterea PIB** și  $Y_{2t}$ : **Rata șomajului** (*Legea lui Okun*)
- Întrebare centrală: Cauzează PIB-ul șomajul, sau invers, sau ambele?

### Aplicații

- Politică macroeconomică
- Piețe financiare
- Ciclul de afaceri
- Managementul riscului



## Notăția seriilor de timp multivariate

### Vector de variabile

- $Y_t = (Y_{1t}, Y_{2t}, \dots, Y_{Kt})'$ 
  - ▶ Vector  $K \times 1$  de serii de timp
- Exemplu cu  $K = 2$ :

$$Y_t = \begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Creștere PIB}_t \\ \text{Șomaj}_t \end{pmatrix}$$

### Întrebări fundamentale

1. Ajută  $Y_1$  la prezicerea lui  $Y_2$ ? (Cauzalitate Granger)
2. Cum afectează șocurile în  $Y_1$  pe  $Y_2$ ? (Răspunsuri la impuls)
3. Ce proporție din varianța lui  $Y_2$  se datorează lui  $Y_1$ ? (Descompunerea varianței)

## Staționaritate multivariată

### Definiție: Staționaritate slabă

- ▣ O serie de timp  $K$ -dimensională  $Y_t$  este **slab staționară** dacă:
  - ▶  $\mathbb{E}[Y_t] = \mu$  (vector de medie constant)
  - ▶  $\text{Cov}(Y_t, Y_{t-h}) = \Gamma(h)$  depinde doar de  $h$ , nu de  $t$

### Matricea de autocovarianță

- ▣ **Formula:**  $\Gamma(h) = \mathbb{E}[(Y_t - \mu)(Y_{t-h} - \mu)'] = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(h) & \gamma_{12}(h) \\ \gamma_{21}(h) & \gamma_{22}(h) \end{pmatrix}$
- ▣ **Proprietate:**  $\Gamma(-h) = \Gamma(h)'$  (transpusa, nu egală!)

## Proprietăți ale covarianței încrucișate

### Funcția de covarianță încrucișată

- Pentru variabilele  $Y_{it}$  și  $Y_{jt}$ :  $\gamma_{ij}(h) = \text{Cov}(Y_{it}, Y_{j,t-h}) = \mathbb{E}[(Y_{it} - \mu_i)(Y_{j,t-h} - \mu_j)]$

### Diferența față de cazul univariat

- În general:  $\gamma_{ij}(h) \neq \gamma_{ij}(-h)$
- Dar:  $\gamma_{ij}(h) = \gamma_{ji}(-h)$
- Matricea de covarianță încrucișată **nu este simetrică** pentru  $h \neq 0$

### Exemplu

- Dacă  $Y_1$  precede  $Y_2$ :
  - ▶  $\gamma_{12}(h) > 0$  pentru  $h > 0$
  - ▶  $\gamma_{12}(h) \approx 0$  pentru  $h < 0$

## Matricea funcției de corelație

### Definiție

- Matricea de autocorelație la lag-ul  $h$ :

$$R(h) = D^{-1}\Gamma(h)D^{-1}$$

- $D = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_K)$  și  $\sigma_i = \sqrt{\gamma_{ii}(0)}$

### Pentru cazul bivariat

- Matricea:  $R(h) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(h) & \rho_{12}(h) \\ \rho_{21}(h) & \rho_{22}(h) \end{pmatrix}$ , unde  $\rho_{ij}(h) = \frac{\gamma_{ij}(h)}{\sigma_i \sigma_j}$
- Interpretare:
  - ▶ Diagonale: ACF (Autocorrelation Function) obișnuite
  - ▶ Extra-diagonale: corelații încrucișate

## Portret de cercetător: Sims & Granger



Christopher Sims (\*1942)

Premiul Nobel 2011

 [Wikipedia \(en\)](#)



Clive Granger (1934–2009)

Premiul Nobel 2003

 [Wikipedia \(en\)](#)

### Biografie

- **Christopher Sims**: econometrist american la Princeton
- Premiul Nobel (2011) „pentru cercetări empirice privind cauza și efectul în macroeconomie”
- **Clive Granger**: economist britanic-american la UC San Diego
- Premiul Nobel (2003) „pentru metode de analiză a seriilor economice cu tendințe comune (cointegrare)”

### Contribuții principale

- **Modele VAR** (Sims, 1980) — vectori autoregresivi pentru macroeconomie
- **Cauzalitatea Granger** (Granger, 1969) — concept de cauzalitate predictivă
- **Funcții impuls-răspuns** și identificarea VAR structural
- **Cointegrarea** (Granger, 1981) — relații de echilibru pe termen lung

## Modelul VAR(p)

### Definiție

- Un model **VAR(p)** pentru  $K$  variabile:

$$Y_t = c + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \cdots + A_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

- $Y_t$ : vector  $K \times 1$  de variabile endogene
- $c$ : vector  $K \times 1$  de constante
- $A_i$ : matrice de coeficienți  $K \times K$
- $\varepsilon_t$ : vector  $K \times 1$  de termeni de eroare cu  $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$ ,  $\mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_t'] = \Sigma$

## VAR(1) cu două variabile

## VAR(1) bivariat

- Forma matriceală:

$$\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

## Ecuatie cu ecuație

- Ecuatia 1:**  $Y_{1t} = c_1 + a_{11} Y_{1,t-1} + a_{12} Y_{2,t-1} + \varepsilon_{1t}$
- Ecuatia 2:**  $Y_{2t} = c_2 + a_{21} Y_{1,t-1} + a_{22} Y_{2,t-1} + \varepsilon_{2t}$
- Esential:** Fiecare ecuație include lag-uri ale **tuturor** variabilelor!

## Exemplu numeric: VAR(1)

## Model VAR(1) specific

- Exemplu numeric:

$$\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

## Interpretarea coeficienților

- $a_{11} = 0.7$ : Creștere de 1 în  $Y_1$  la  $t-1 \Rightarrow Y_1$  la  $t$  crește cu 0.7
- $a_{12} = 0.2$ : Creștere de 1 în  $Y_2$  la  $t-1 \Rightarrow Y_1$  la  $t$  crește cu 0.2
- $a_{21} = -0.1$ : Creștere de 1 în  $Y_1$  la  $t-1 \Rightarrow Y_2$  la  $t$  **scade** cu 0.1
- $a_{22} = 0.6$ : Creștere de 1 în  $Y_2$  la  $t-1 \Rightarrow Y_2$  la  $t$  crește cu 0.6



## VAR(2): dinamică de ordin superior

### Specificația VAR(2)

- Forma generală:  $Y_t = c + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$
- Pentru  $K = 2$ ,  $p = 2$ : fiecare ecuație are  $1 + pK = 5$  parametri, total  $K(1 + pK) = 10$

### Dezvoltat

- Ecuațiile individuale:

$$Y_{1t} = c_1 + a_{11}^{(1)} Y_{1,t-1} + a_{12}^{(1)} Y_{2,t-1} + a_{11}^{(2)} Y_{1,t-2} + a_{12}^{(2)} Y_{2,t-2} + \varepsilon_{1t}$$

$$Y_{2t} = c_2 + a_{21}^{(1)} Y_{1,t-1} + a_{22}^{(1)} Y_{2,t-1} + a_{21}^{(2)} Y_{1,t-2} + a_{22}^{(2)} Y_{2,t-2} + \varepsilon_{2t}$$

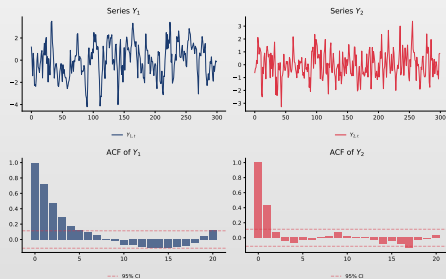
### Blestemul dimensionalității

- VAR( $p$ ) cu  $K$  variabile are  $K + pK^2$  parametri; cu  $K = 5$ ,  $p = 4$ :  $5 + 4 \times 25 = 105$  parametri!

## Proces VAR simulat

### Observații

- Proces VAR(1) bivariat simulat — interdependența dintre serii
- Fiecare variabilă răspunde la propriul trecut și trecutul celeilalte variabile
- Dinamica încrucișată vizibilă



## Forma companion

### Conversia VAR(p) la VAR(1)

- Orice VAR(p) poate fi scris ca VAR(1) în **forma companion**:  $\xi_t = A\xi_{t-1} + v_t$

### Pentru VAR(2)

- Forma:** 
$$\underbrace{\begin{pmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \end{pmatrix}}_{\xi_t} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ I_K & 0 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} Y_{t-1} \\ Y_{t-2} \end{pmatrix}}_{\xi_{t-1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_t}$$
- Dimensiune:** A este  $Kp \times Kp$

### Produsul Kronecker $\otimes$

- Dacă A este  $m \times n$  și B este  $p \times q$ , atunci  $A \otimes B$  este matricea  $mp \times nq$ :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

- Utilizare:**  $\text{vec}(\Sigma_Y) = (I_{K^2} - A \otimes A)^{-1} \text{vec}(\Sigma_\varepsilon)$  — matricea de covarianță a VAR staționar

## Staționaritatea VAR

### Condiția de stabilitate

- VAR(p) este **stabil** (staționar) dacă toate rădăcinile lui:

$$\det(I_K - A_1 z - A_2 z^2 - \dots - A_p z^p) = 0$$

- Se află **în afara** cercului unitate (adică  $|z| > 1$ )

### Pentru VAR(1)

- Modelul este stabil dacă toate **valorile proprii** ale lui  $A_1$  sunt mai mici decât 1 în valoare absolută
- Exemplu: Pentru  $A_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$ , valorile proprii sunt  $\lambda_1 \approx 0.54$  și  $\lambda_2 \approx 0.26$ 
  - ▶ Ambele  $< 1$  ➤ stabil!

## Condiția de stabilitate: exemplu numeric

$$\text{Pentru } A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

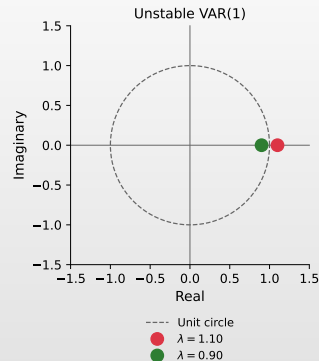
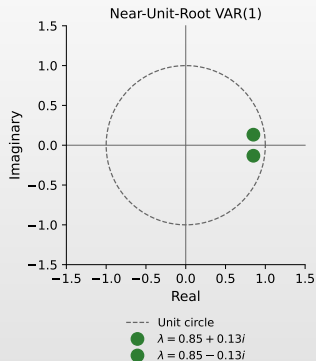
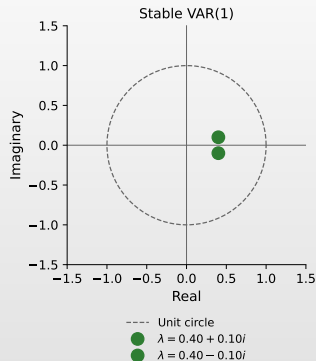
▣ Polinomul caracteristic:  $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} 0.7 - \lambda & 0.2 \\ -0.1 & 0.6 - \lambda \end{pmatrix} = (0.7 - \lambda)(0.6 - \lambda) + 0.02 = 0 \implies \lambda^2 - 1.3\lambda + 0.44 = 0$$

## Soluție

$$\text{▣ } \lambda = \frac{1.3 \pm \sqrt{1.69 - 1.76}}{2} = 0.65 \pm 0.132i, \quad |\lambda| = \sqrt{0.65^2 + 0.132^2} = \sqrt{0.44} = 0.663 < 1 \quad \checkmark \text{ Stabil!}$$

## Condiția de stabilitate: interpretare vizuală



## Media unui VAR staționar

### Media necondiționată

- Pentru un VAR(1) staționar:  $Y_t = c + AY_{t-1} + \varepsilon_t$
- Luând medii:  $\mathbb{E}[Y_t] = c + A\mathbb{E}[Y_{t-1}]$
- Deoarece  $\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[Y_{t-1}] = \mu$  (staționaritate):

$$\mu = c + A\mu \quad \Rightarrow \quad \mu = (I_K - A)^{-1}c$$

### Exemplu

- Dacă  $c = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix}$  și  $A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$ :  

$$\mu = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.2 \\ 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix} = \frac{1}{0.14} \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ -0.1 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.86 \\ 0.29 \end{pmatrix}$$

## Structura covarianței pentru VAR(1)

### Matricea varianță-covarianță $\Gamma(0)$

- Pentru VAR(1), varianța satisface **ecuația discretă Lyapunov**:  $\Gamma(0) = A\Gamma(0)A' + \Sigma$

### Autocovarianța la lag-ul $h$

- Formula:  $\Gamma(h) = A^h\Gamma(0)$ ,  $h \geq 0$
- Autocovarianțele scad geometric cu valorile proprii ale lui  $A$

### Rezolvarea ecuației Lyapunov

- Se rezolvă prin vectorizare:  $\text{vec}(\Gamma(0)) = (I_{K^2} - A \otimes A)^{-1}\text{vec}(\Sigma)$
- $\otimes$  denotă produsul Kronecker



## Estimarea VAR

### Estimarea OLS

- Fiecare ecuație poate fi estimată prin **OLS** (Ordinary Least Squares – metoda celor mai mici pătrate) **separat**:

$$\hat{A} = \left( \sum_{t=1}^T Y_{t-1} Y'_{t-1} \right)^{-1} \left( \sum_{t=1}^T Y_{t-1} Y'_t \right)$$

- Eficientă deoarece toate ecuațiile au **aceiași regresori**

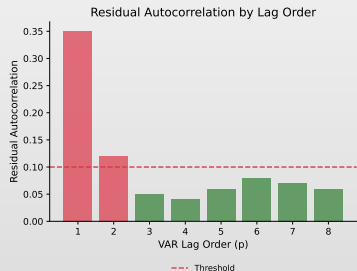
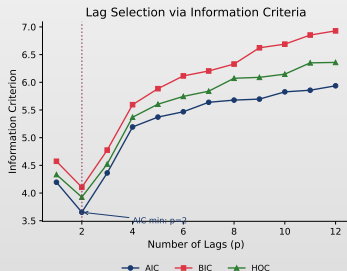
### Matricea de covarianță

- Estimatorul:  $\hat{\Sigma} = \frac{1}{T-Kp-1} \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}'_t$
- Erorile  $\varepsilon_{1t}$  și  $\varepsilon_{2t}$  pot fi **corelate contemporan**

## Selecția lag-ului: exemplu

### Observații

- Date reale SUA (FRED — Federal Reserve Economic Data): PIB și Șomaj,  $T = 140$  trimestre
- Criterii informaționale: AIC (Akaike Information Criterion) și BIC (Bayesian Information Criterion) pentru lag  $p = 1, \dots, 10$  (pot sugera ordine diferite)
- Interpretare: valori mici = ajustare mai bună; ambele selectează  $p = 2$



## Selecția ordinului lag-ului

### Criterii informaționale

- ▣ Alegem  $p$  care minimizează:

$$AIC(p) = \ln |\hat{\Sigma}_p| + \frac{2pK^2}{T}$$

$$BIC(p) = \ln |\hat{\Sigma}_p| + \frac{pK^2 \ln T}{T}$$

$$HQ(p) = \ln |\hat{\Sigma}_p| + \frac{2pK^2 \ln \ln T}{T} \quad (\text{Hannan-Quinn})$$

- ▣ **unde:**  $\hat{\Sigma}_p$  = matricea de covarianță a reziduurilor,  $K$  = nr. variabile,  $p$  = nr. lag-uri,  $T$  = dimensiunea eșantionului

### Îndrumări

- ▣ Comportamentul criteriilor:
  - ▶ AIC tinde să selecteze modele **mai mari** (mai bune pentru prognoză)
  - ▶ BIC tinde să selecteze modele **mai mici** (selecție consistentă)
- ▣ Începeți cu o  $p$  bazat pe frecvența datelor (ex. 4 pentru trimestrial, 12 pentru lunar)

## Modele VAR restricționate

### De ce restricționăm?

- ▣ Modelele VAR complete pot fi **supraparametrizate**:
  - ▶ Mulți coeficienți pot fi ne semnificativi
  - ▶ Prognoze slabe
  - ▶ Pierdere de grade de libertate

### Restricții comune

- ▣ **Restricții de zero**: Setăm coeficienți mici la zero
- ▣ **Exogenitate de bloc**: Unele variabile nu afectează altele
- ▣ **Excluderea lag-urilor**: Excludem anumite lag-uri

### Testarea restricțiilor

- ▣ Folosim testul raportului de verosimilitate (LR — Likelihood Ratio):
- ▣  $LR = T(\ln |\hat{\Sigma}_R| - \ln |\hat{\Sigma}_U|) \sim \chi_r^2$ , unde  $r$  = numărul de restricții

## Ce este cauzalitatea Granger?

Clive Granger (1969, premiul Nobel 2003)

- ▣ “X **cauzează Granger** pe Y” dacă valorile trecute ale lui X ajută la prezicerea lui Y
- ▣ Criteriul esențial: **dincolo de** ce pot prezice valorile trecute ale lui Y singure

**Distincție importantă: Cauzalitate Granger  $\neq$  cauzalitate reală**

- ▣ Cauzalitatea Granger este despre **conținut predictiv**
- ▣ NU implică cauzare economică/structurală
- ▣ “X cauzează Granger pe Y” înseamnă: X conține informații utile pentru prognoza lui Y

## Definiție formală

### Cauzalitate Granger

- $X$  **nu cauzează Granger** pe  $Y$  dacă:  
$$\mathbb{E}[Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots] = \mathbb{E}[Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots]$$
- Adăugarea istoricului lui  $X$  nu îmbunătățește predicția lui  $Y$

### În contextul VAR

- VAR(1):  $Y_{1t} = c_1 + a_{11}Y_{1,t-1} + a_{12}Y_{2,t-1} + \varepsilon_{1t}$ 
  - ▶  $Y_2$  **nu cauzează Granger** pe  $Y_1$  dacă  $a_{12} = 0$
- VAR(p): nu cauzează dacă  $a_{12}^{(1)} = a_{12}^{(2)} = \dots = a_{12}^{(p)} = 0$

## Testarea cauzalității Granger

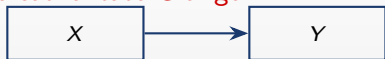
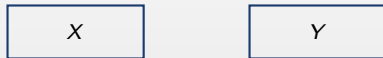
### Ipotezele testului

- $H_0$ :  $Y_2$  **nu** cauzează Granger pe  $Y_1$ 
  - ▶  $a_{12}^{(1)} = a_{12}^{(2)} = \dots = a_{12}^{(p)} = 0$
- $H_1$ : Cel puțin un  $a_{12}^{(i)} \neq 0$ 
  - ▶ Există cauzalitate Granger

### Statistica testului: Testul Wald

- **Formula:**  $F = \frac{(RSS_R - RSS_U)/p}{RSS_U/(T - 2p - 1)} \sim F_{p, T - 2p - 1}$
- $RSS_R$  (Residual Sum of Squares): suma pătratelor reziduurilor din modelul restricționat (fără lag-urile lui  $Y_2$ )
- $RSS_U$ : suma pătratelor reziduurilor din modelul nerestricționat (VAR complet)

## Tipuri de cauzalitate Granger

Unidirecțională:  $X \succ Y$ Unidirecțională:  $Y \succ X$ Bidirecțională:  $X \succ Y$ 

Fără cauzalitate

## Exemple economice

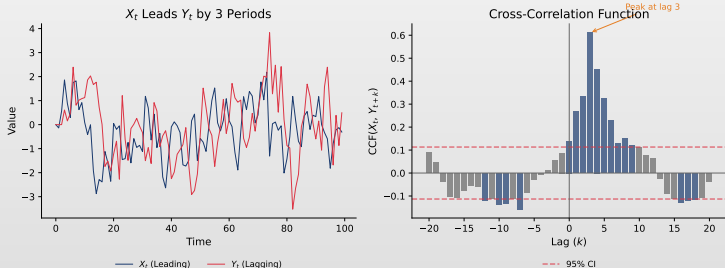
- ▣ Masa monetară  $\succ$  Producție? (viziunea monetaristă)
- ▣ Prețurile acțiunilor  $\succ$  Volumul tranzacționat (bidirecțională)
- ▣ Vremea  $\succ$  Recolta (unidirecțională, evident)



## Corelație încrucișată: ilustrare vizuală

### Interpretare

- Stânga: două serii înrudite; Dreapta: CCF (Cross-Correlation Function — funcția de corelație încrucișată)
- CCF relevă că  $X$  precede  $Y$  (corelații semnificative la lag-uri pozitive)



## Funcția de corelație încrucișată

### Definiție 1 (Funcția de corelație încrucișată)

- Corelația încrucișată între  $X_t$  și  $Y_t$  la lag-ul  $k$ :

$$\rho_{XY}(k) = \frac{\gamma_{XY}(k)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\text{Cov}(X_t, Y_{t+k})}{\sqrt{\text{Var}(X_t)\text{Var}(Y_t)}}$$

### Interpretare

- $\rho_{XY}(k) > 0$  la  $k > 0$ :  $X$  este corelat pozitiv cu  $Y$  viitor ( $X$  poate precede  $Y$ )
- $\rho_{XY}(k) > 0$  la  $k < 0$ :  $X$  este corelat pozitiv cu  $Y$  trecut ( $Y$  poate precede  $X$ )

### Notă

- Spre deosebire de ACF, corelația încrucișată **nu este simetrică**:  $\rho_{XY}(k) \neq \rho_{XY}(-k)$  în general

## Cauzalitate Granger: considerații practice

### Capcane comune

1. **Variabile omise:** O a treia variabilă  $Z$  poate cauza atât  $X$  cât și  $Y$
2. **Nestaționaritate:** Testul necesită date staționare (sau cointegrare)
3. **Selecția lag-ului:** Rezultatele pot fi sensibile la  $p$
4. **Mărimea eșantionului:** Necesită suficiente observații

### Bune practici

- ☐ Pregătirea datelor: testați pentru rădăcini unitare; folosiți criterii multiple pentru selecția lag-ului
- ☐ Robustețe: verificați la diferite ordine ale lag-ului; raportați rezultatele pentru ambele direcții

## Test cauzalitate Granger: exemplu numeric

Testare: Cauzează creșterea masei monetare Granger producția?

- Model nerestricționat (VAR cu 2 lag-uri):

$$\Delta Y_t = c + \alpha_1 \Delta Y_{t-1} + \alpha_2 \Delta Y_{t-2} + \beta_1 \Delta M_{t-1} + \beta_2 \Delta M_{t-2} + \varepsilon_t$$

- Model restricționat ( $H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$ ):

$$\Delta Y_t = c + \alpha_1 \Delta Y_{t-1} + \alpha_2 \Delta Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

### Calculul testului

- $T = 100$ ,  $RSS_U = 45.2$ ,  $RSS_R = 52.8$ :

$$F = \frac{(52.8 - 45.2)/2}{45.2/(100 - 5)} = \frac{3.8}{0.476} = 7.98$$

- $F_{0.05}(2, 95) = 3.09 \prec$  **Respingem  $H_0$ : Banii cauzează Granger producția!**

## Procedura Toda-Yamamoto

### Problema cu datele nestăționare

- ▣ Testul Granger standard are **distribuții non-standard** când:
  - ▶ Variabilele au rădăcini unitare
  - ▶ Variabilele sunt cointegrate

### Soluția Toda-Yamamoto (1995)

1. Determinăm ordinul maxim de integrare  $d_{max}$
2. Estimăm  $VAR(p + d_{max})$  în **niveluri**
3. Testăm restricții doar pe primele  $p$  lag-uri
4. Lag-urile suplimentare  $d_{max}$  **nu sunt** testate (doar pentru distribuția corectă)

### Avantaj

- ▣ Testul Wald are distribuție asimptotică  $\chi^2$  indiferent de cointegrare!

## Cauzalitate instantanee

### Definiție

- ▣  $X$  **cauzează instantaneu** pe  $Y$  dacă:
  - ▶  $\mathbb{E}[Y_t | \Omega_{t-1}, X_t] \neq \mathbb{E}[Y_t | \Omega_{t-1}]$
  - ▶  $\Omega_{t-1}$ : toate informațiile trecute

### Testarea în VAR

- ▣ Testăm  $\sigma_{12} \neq 0$  în  $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$
- ▣  $\sigma_{12} = 0 \succ$  fără cauzalitate instantanee

### Interpretare

- ▣ Cauze posibile: **șocuri comune** sau **agregarea datelor**
- ▣ Nu neapărat efecte contemporane reale

## Cauzalitate Granger în sisteme multiple

### Testul exogenității de bloc

- ▣ Într-un VAR cu  $K > 2$  variabile, testăm dacă un **grup** de variabile cauzează Granger un alt grup
- ▣ Exemplu: Cauzează variabilele financiare (rate ale dobânzii, prețuri acțiuni) Granger variabilele reale (PIB, șomaj)?

### Statistica testului

- ▣  $\chi^2 = T \left( \ln |\hat{\Sigma}_R| - \ln |\hat{\Sigma}_U| \right) \sim \chi^2_{K_1 \cdot K_2 \cdot p}$
- ▣ unde  $K_1$  = variabile “cauzate”,  $K_2$  = variabile “cauzatoare”

## Ce sunt funcțiile de răspuns la impuls?

### Definiție

#### ▣ Funcție de Răspuns la Impuls (IRF)

- ▶ Efectul unui șoc punctual la o variabilă
- ▶ Asupra valorilor curente și viitoare ale tuturor variabilelor

### Întrebarea la care răspund IRF-urile

- ▣ “Dacă apare un șoc de 1 unitate la  $Y_1$  astăzi, ce se întâmplă cu  $Y_1$  și  $Y_2$  în următoarele  $h$  perioade?”

### Reprezentarea $MA(\infty)$

- ▣ Un  $VAR(p)$  stabil:  $Y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i \epsilon_{t-i}$
- ▣  $\Phi_i = \text{răspunsurile la impuls la orizontul } i$



## Calculul IRF pentru VAR(1)

Pentru VAR(1):  $Y_t = c + AY_{t-1} + \varepsilon_t$

▣ Matricele de răspuns la impuls sunt:

$$\Phi_0 = I_K, \quad \Phi_1 = A, \quad \Phi_2 = A^2, \quad \dots, \quad \Phi_h = A^h$$

### Interpretare

- ▣  $[\Phi_h]_{ij}$ : Efectul asupra lui  $Y_i$  la  $t + h$ 
  - ▶ Al unui șoc unitar la  $Y_j$  la momentul  $t$
- ▣ VAR stabil:  $\Phi_h \rightarrow 0$  când  $h \rightarrow \infty$ 
  - ▶ Șocurile dispar în timp

## Calculul IRF pentru VAR(p) general

### Formula recursivă pentru VAR(p)

- Pentru  $Y_t = c + A_1 Y_{t-1} + \dots + A_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$ :

$$\Phi_h = \sum_{j=1}^{\min(h,p)} A_j \Phi_{h-j}, \quad h = 1, 2, 3, \dots$$

- Cu  $\Phi_0 = I_K$  și  $\Phi_h = 0$  pentru  $h < 0$

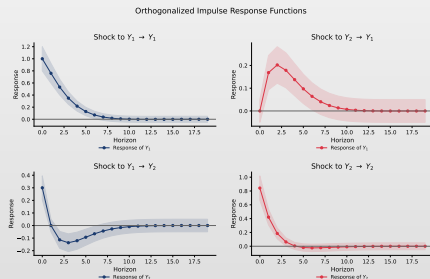
### Exemplu: IRF pentru VAR(2)

- $\Phi_0 = I_K$
- $\Phi_1 = A_1 \Phi_0 = A_1$
- $\Phi_2 = A_1 \Phi_1 + A_2 \Phi_0 = A_1^2 + A_2$
- $\Phi_3 = A_1 \Phi_2 + A_2 \Phi_1 = A_1(A_1^2 + A_2) + A_2 A_1$

## Funcții de răspuns la impuls: exemplu

### Observații

- ▣ Răspunsul fiecărei variabile la un șoc unitar
- ▣ Zonele umbrite = intervale de încredere
- ▣ VAR stabil: răspunsurile converg la zero



## IRF ortogonalizate

### Problema: Erori corelate

- $\Sigma$  nu este diagonală
  - ▶ Șocurile  $\varepsilon_{1t}$  și  $\varepsilon_{2t}$  sunt corelate
  - ▶ Un șoc la “ $Y_1$ ” implică și un șoc la “ $Y_2$ ”

### Soluție: Descompunerea Cholesky

- Factorizare:  $\Sigma = PP'$  (P: inferior triunghiulară)
- Șocuri ortogonalizate:  $u_t = P^{-1}\varepsilon_t$  cu  $\mathbb{E}[u_t u_t'] = I$
- IRF ortogonalizate:  $\Theta_h = \Phi_h P$

### Ordinea contează!

- De la “cea mai exogenă” la “cea mai endogenă”
  - ▶ Rezultatele depind de ordinea variabilelor

## Descompunerea Cholesky: Cum funcționează

### Exemplu numeric

- ▣ Fie matricea de covarianță a reziduurilor VAR:  $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

- ▣ Factorul Cholesky P (inferior triunghiular) cu  $\Sigma = PP'$ :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow PP' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \Sigma \checkmark$$

### Interpretare: Ce implică ordinea

- ▣  $P_{21} = 1 \neq 0$ : Un șoc unitar la  $Y_1$  are **efect imediat asupra**  $Y_2$  (impact = 1)
- ▣  $P_{12} = 0$ : Un șoc la  $Y_2$  **nu afectează contemporan** pe  $Y_1$
- ▣  $Y_1$  este “mai exogenă” — afectează  $Y_2$  instantaneu, dar nu și invers

### Inversarea ordinii ( $Y_2$ primul)

- ▣ Schimbarea ordinii variabilelor dă un P diferit și IRF-uri diferite
- ▣ **Teoria economică** trebuie să ghideze ordinea — ex., PIB înainte de șomaj (legea lui Okun: șomajul afectează PIB-ul, PIB-ul afectează șomajul)

## Exemplu numeric IRF

Pentru  $A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$

- ▣ Calculul matricelor IRF:

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_1 = A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 = A^2 = \begin{pmatrix} 0.47 & 0.26 \\ -0.13 & 0.34 \end{pmatrix}$$

### Interpretare

- ▣  $[\Phi_2]_{12} = 0.26$ : Un șoc unitar la  $Y_2$  crește  $Y_1$  cu 0.26 după 2 perioade
- ▣  $[\Phi_2]_{21} = -0.13$ : Un șoc unitar la  $Y_1$  **scade**  $Y_2$  cu 0.13 după 2 perioade

## Răspunsuri la impuls cumulative

### Definiție

- ▣ **IRF cumulativ** până la orizontul  $H$ :  $\Psi_H = \sum_{h=0}^H \Phi_h$
- ▣ Măsoară **efectul total acumulat** al unui șoc

### Multiplicatorul pe termen lung

- ▣ Pentru VAR stabil:  $\Psi_\infty = (I_K - A_1 - A_2 - \dots - A_p)^{-1}$
- ▣ Aceasta dă **efectul permanent** al unui șoc punctual

### Când să folosim

- ▣ IRF cumulative sunt utile când ne interesează impactul total (ex. pierderea cumulată de PIB după un șoc)

## Intervale de încredere pentru IRF

### Surse de incertitudine

- IRF sunt funcții de parametri estimați  $\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_p$
- Prin urmare, au **incertitudine de eșantionare**

### Metode pentru benzi de încredere

1. **Asimptotice:** Folosim metoda delta pentru a deriva erorile standard
2. **Monte Carlo:** Simulăm din distribuția asimptotică a lui  $\hat{A}$
3. **Bootstrap:** Reeșantionăm reziduurile și reestimăm VAR

### Procedura Bootstrap

1. Estimăm VAR, salvăm reziduurile  $\{\hat{\varepsilon}_t\}$
2. Extragem cu înlocuire pentru a crea  $\{\hat{\varepsilon}_t^*\}$
3. Generăm eșantion bootstrap folosind VAR estimat
4. Reestimăm și calculăm IRF
5. Repetăm de  $B$  ori; folosim percentilele pentru IC (intervale de încredere)



## VAR structural (SVAR)

### Motivație

- Șocurile VAR standard  $\varepsilon_t$  sunt inovații de **formă redusă**  $\succ$  combinații liniare de șocuri structurale
- Vrem să identificăm **șocuri structurale** semnificative economic

### Forma structurală

- Modelul structural:

$$B_0 Y_t = \Gamma_0 + B_1 Y_{t-1} + \cdots + B_p Y_{t-p} + u_t$$

- $u_t$  sunt **șocuri structurale** cu  $\mathbb{E}[u_t u_t'] = I_K$

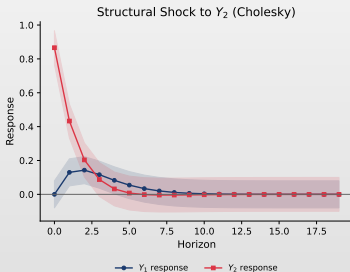
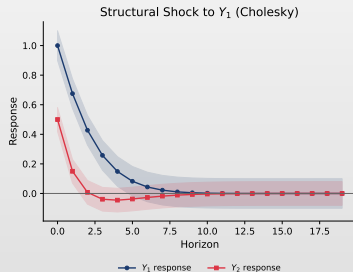
### Relația cu forma redusă

- $\varepsilon_t = B_0^{-1} u_t \quad \succ \quad \Sigma = B_0^{-1} (B_0^{-1})'$

## Exemplu IRF structural

### Observații

- IRF structurale (Cholesky) — ordinea variabilelor afectează interpretarea
- Restricții contemporane: prima variabilă reacționează doar la propriile șocuri



## Identificare în SVAR

### Problema identificării

- ▣  $\Sigma$  are  $K(K + 1)/2$  elemente unice, dar  $B_0^{-1}$  are  $K^2$  elemente
- ▣ Avem nevoie de  $K(K - 1)/2$  restricții suplimentare!

### Scheme comune de identificare

1. **Restricții pe termen scurt:** Efecte de impact zero (Cholesky)
2. **Restricții pe termen lung:** Efecte zero pe termen lung (Blanchard-Quah)
3. **Restricții de semn:** Constrângeri de inegalitate pe IRF
4. **Instrumente externe:** Folosim informații din afară

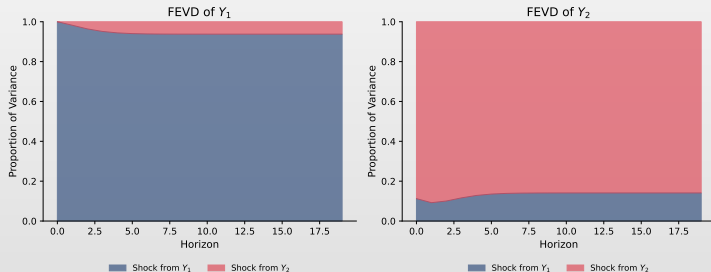
### Exemplu: Ordonare Cholesky (recursivă)

- ▣ Pentru  $K = 2$ :  $B_0^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$
- ▣ Variabila 1 nu răspunde la șocul 2 contemporan

## FEVD: Exemplu

### Observații

- Proporția varianței prognozei atribuibilă fiecărui șoc structural
- Dinamica temporală: orizonturi scurte — șocuri proprii domină; efectele încrucișate cresc în timp



## Descompunerea varianței

### Întrebare

- Ce proporție din varianța erorii de prognoză a lui  $Y_i$  la orizontul  $h$  se datorează șocurilor la  $Y_j$ ?

### Formula FEVD

$$\text{FEVD}_{ij}(h) = \frac{\sum_{s=0}^{h-1} [\Theta_s]_{ij}^2}{\sum_{s=0}^{h-1} \sum_{k=1}^K [\Theta_s]_{ik}^2}$$

- Dă **procentul** din varianța prognozei la  $h$  pași a lui  $Y_i$  explicat de șocurile la  $Y_j$

### Proprietăți

- $0 \leq \text{FEVD}_{ij}(h) \leq 1$
- $\sum_{j=1}^K \text{FEVD}_{ij}(h) = 1$  (suma la 100%)
- La  $h = 1$ : Șocurile proprii domină (prin construcția Cholesky)

## FEVD: Exemplu numeric

## Calculul FEVD pentru VAR bivariat

☐ Folosind IRF ortogonalizate  $\Theta_h$ , FEVD la orizontul  $H$ :

$$\text{FEVD}_{11}(H) = \frac{\sum_{h=0}^{H-1} \theta_{11}^2(h)}{\sum_{h=0}^{H-1} [\theta_{11}^2(h) + \theta_{12}^2(h)]}$$

## Exemplu de calcul

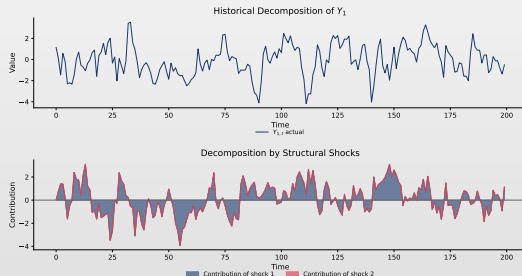
$h$	$\theta_{11}(h)$	$\theta_{12}(h)$	$\theta_{11}^2(h)$	$\theta_{12}^2(h)$
0	1.00	0.00	1.00	0.00
1	0.70	0.20	0.49	0.04
2	0.47	0.26	0.22	0.07

☐  $\text{FEVD}_{11}(3) = \frac{1.00+0.49+0.22}{1.00+0.49+0.22+0.00+0.04+0.07} = \frac{1.71}{1.82} = 94\%$

## Descompunerea istorică: Exemplu

### Observații

- Contribuții structurale: fiecare culoare = un șoc diferit, stivuite însumează abaterea de la medie
- Utilitate: identifică șocurile din episoadele istorice



## Descompunerea istorică

### Definiție

- ▣ **Descompunerea istorică** descompune fiecare valoare observată în contribuții de la fiecare șoc structural:

$$Y_{it} - \bar{Y}_i = \sum_{j=1}^K \sum_{s=0}^{t-1} \theta_{ij}(s) \cdot u_{j,t-s}$$

### Aplicație

- ▣ “Cât din scăderea PIB din 2008 s-a datorat șocurilor financiare vs. șocurilor petroliere?”
  - ▶ Atribuire mișcările istorice unor șocuri identificate specifice
  - ▶ Util pentru analiza politicilor și interpretarea narativă



## Diagnosticarea reziduurilor

### Ce trebuie verificat

- După estimarea VAR, verificăm că reziduurile  $\hat{e}_t$  se comportă ca zgomot alb:
  - ▶ Fără corelație serială
  - ▶ Varianță constantă (homoscedasticitate)
  - ▶ Normalitate (pentru inferență)

### De ce contează

- Reziduuri autocorelate  $\succ$  estimări ineficiente
- Heteroscedasticitate  $\succ$  erori standard invalide
- Non-normalitate  $\succ$  inferența poate fi nesigură

## Testarea corelației seriale

### Testul Portmanteau (Ljung-Box)

- ▣ Statistica de test:  $Q_h = T(T+2) \sum_{j=1}^h \frac{1}{T-j} \text{tr}(\hat{C}_j' \hat{C}_0^{-1} \hat{C}_j \hat{C}_0^{-1})$
- ▣  $\hat{C}_j = \frac{1}{T} \sum_{t=j+1}^T \hat{e}_t \hat{e}_{t-j}'$ . Sub  $H_0$ :  $Q_h \sim \chi_{K^2(h-p)}^2$

### Testul LM (Lagrange Multiplier) Breusch-Godfrey

- ▣ Regresăm  $\hat{e}_t$  pe  $\hat{e}_{t-1}, \dots, \hat{e}_{t-h}$  și regresorii originali
- ▣  $LM = T \cdot R^2 \sim \chi_{K^2h}^2$  sub  $H_0$

### Dacă este respins

- ▣ Creșterea ordinului lag-ului  $p$  sau adăugarea de variabile suplimentare

## Testarea heteroscedasticității

### Testul ARCH-LM (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity)

- ▣ Testează pentru heteroscedasticitate condiționată autoregresivă:

$$\hat{\varepsilon}_{it}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}_{i,t-1}^2 + \cdots + \alpha_q \hat{\varepsilon}_{i,t-q}^2 + v_t$$

- ▣  $H_0: \alpha_1 = \cdots = \alpha_q = 0$  (homoscedasticitate)
- ▣  $LM = TR^2 \sim \chi_q^2$

### Versiunea multivariată

- ▣ Testăm toate ecuațiile împreună folosind:

$$\text{vech}(\hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t') = c + \sum_{j=1}^q B_j \text{vech}(\hat{\varepsilon}_{t-j} \hat{\varepsilon}_{t-j}') + v_t$$

## Testarea normalității

### Testul JB — Jarque-Bera (univariat)

$$JB = \frac{T}{6} \left( S^2 + \frac{(K-3)^2}{4} \right) \sim \chi^2_2$$

- ▣ unde  $S$  = asimetrie,  $K$  = curtoză

### Normalitate multivariată (Doornik-Hansen)

- ▣ Transformăm reziduurile și testăm asimetria și curtoza comune:

$$DH = s_1'(\Omega^{-1/2})'(\Omega^{-1/2})s_1 + s_2'(\Omega^{-1/2})'(\Omega^{-1/2})s_2 \sim \chi^2_{2K}$$

### Notă

- ▣ Normalitatea este adesea respinsă în datele financiare

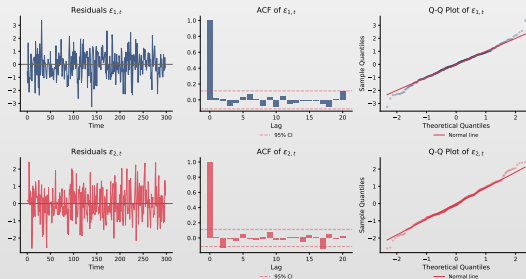
Analiza și Diagnosticarea Sistemelor de Timpuri  
▣ Luăm în considerare criterii standard robuste dacă non-normalitatea este severă



## Grafic rezumat diagnostic

### Observații

- ACF reziduurilor nu prezintă autocorelație semnificativă
- Histograma aproximează distribuția normală
- Q-Q plot urmează linia de 45°



## Proгноze punctuale din VAR

### Proгноză iterativă

- ▣ Pentru VAR(1):  $Y_t = c + AY_{t-1} + \varepsilon_t$
- ▣ **Proгноză la 1 pas:**  $\hat{Y}_{T+1|T} = c + AY_T$
- ▣ **Proгноză la 2 pași:**  $\hat{Y}_{T+2|T} = c + A\hat{Y}_{T+1|T}$
- ▣ **Proгноză la  $h$  pași:**  $\hat{Y}_{T+h|T} = c + A\hat{Y}_{T+h-1|T}$

### Formula directă

- ▣  $\hat{Y}_{T+h|T} = (I + A + A^2 + \dots + A^{h-1})c + A^h Y_T$
- ▣ Pentru VAR stabil: converge la  $\mu = (I - A)^{-1}c$  când  $h \rightarrow \infty$

## Eroarea de prognoză și MSE

Eroarea de prognoză la  $h$  pași

$$\square \mathbf{e}_{T+h|T} = \mathbf{Y}_{T+h} - \hat{\mathbf{Y}}_{T+h|T} = \sum_{j=0}^{h-1} \mathbf{A}^j \boldsymbol{\epsilon}_{T+h-j}$$

Matricea MSE (Mean Squared Error — eroarea medie pătratică)

$$\square \text{MSE}(\hat{\mathbf{Y}}_{T+h|T}) = \mathbb{E}[\mathbf{e}_{T+h|T} \mathbf{e}_{T+h|T}'] = \sum_{j=0}^{h-1} \mathbf{A}^j \boldsymbol{\Sigma} (\mathbf{A}^j)'$$

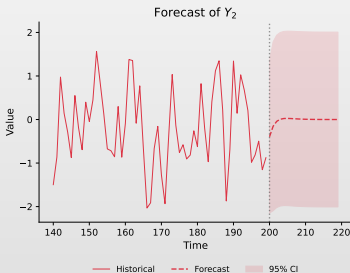
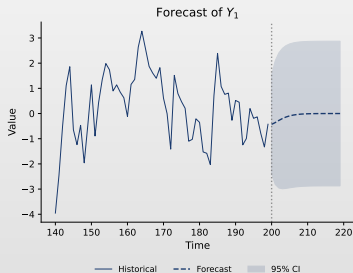
De reținut

- MSE crește cu orizontul  $h$
- Pentru VAR stabil: MSE converge la varianța necondiționată  $\boldsymbol{\Gamma}(0)$
- Prognoze pe termen lung  $\succ$  media necondiționată cu incertitudine  $= \boldsymbol{\Gamma}(0)$

## Proгноze VAR: Exemplu

### Observații

- Proгноze punctuale: linie continuă dincolo de date, converg la media necondiționată
- Intervale de încredere: se largesc cu orizontul de prognoză





## Intervale de încredere pentru prognoză

### Construirea intervalelor

- Pentru erori distribuite normal, IC  $(1 - \alpha)$ :  $\hat{Y}_{i,T+h|T} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{[\text{MSE}(\hat{Y}_{T+h|T})]_{ii}}$

### Regiuni de încredere comune

- Pentru mai multe variabile, folosim elipsoizi:

$$(Y_{T+h} - \hat{Y}_{T+h|T})' [\text{MSE}(\hat{Y}_{T+h|T})]^{-1} (Y_{T+h} - \hat{Y}_{T+h|T}) \leq \chi_{K,\alpha}^2$$

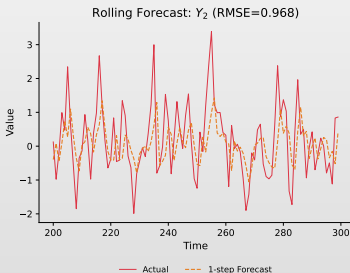
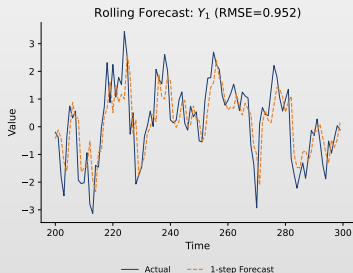
### Notă

- Acestea presupun parametri cunoscuți
- Metodele bootstrap țin cont de incertitudinea parametrilor

## Evaluare out-of-sample: VAR vs. AR

### Metodologie generală

- Train / Test Split: împărțim datele antrenare + test; estimăm pe train, evaluăm pe test
- De ce VAR vs. AR? AR ignoră celelalte variabile; VAR exploatează interdependențele
- Metrică: RMSE (Root Mean Squared Error) =  $\sqrt{\frac{1}{h} \sum e_i^2}$



## Evaluarea prognozei

### Evaluare out-of-sample

- ▣ Împărțim datele: eșantion de estimare (1 la  $T_1$ ) și eșantion de testare ( $T_1 + 1$  la  $T$ )
- ▣ Erorile de prognoză:  $e_{t+h} = Y_{t+h} - \hat{Y}_{t+h|t}$

### Metrice comune

- ▣ **RMSE**:  $\sqrt{\frac{1}{n} \sum e_{t+h}^2}$     **MAE** (Mean Absolute Error):  $\frac{1}{n} \sum |e_{t+h}|$     **MAPE** (Mean Absolute Percentage Error):  $\frac{100}{n} \sum \left| \frac{e_{t+h}}{Y_{t+h}} \right|$

### Testul Diebold-Mariano

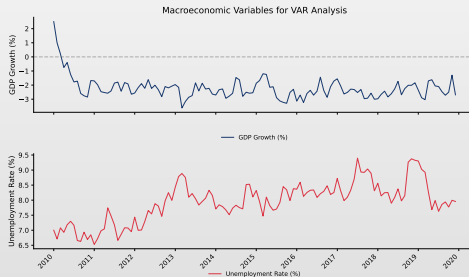
- ▣ Testează dacă prognozele VAR sunt semnificativ mai bune decât alternativa:  

$$DM = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\hat{\sigma}_d^2/n}} \sim N(0, 1), \text{ unde } d_t = L(e_{1t}) - L(e_{2t})$$

## PIB și șomaj: Date trimestriale

### Observații

- Creșterea PIB și rata șomajului: Legea lui Okun, tipare ciclice comune
- Sistem bivariat ideal pentru analiză VAR + cauzalitate Granger



## Exemplu: PIB și șomaj

### Legea lui Okun

- Există o relație negativă între creșterea PIB și șomaj:

$$\Delta U_t \approx -\beta(\Delta Y_t - \bar{g})$$

- $\bar{g}$  = creșterea tendențială a PIB,  $\beta \approx 0.4$

### Întrebări pentru analiza VAR

1. Cauzează creșterea PIB Granger modificările șomajului?
2. Cauzează șomajul Granger creșterea PIB?
3. Cum se propagă șocurile între variabile?

## Rezultate VAR estimate

### Observații

- Coeficienți estimați cu erori standard și statistici  $t$
- Selecția modelului: criterii informaționale (AIC, BIC) și diagnostic reziduuri



## Fluxul de lucru VAR

### Etapele analizei VAR

1. **Pregătirea datelor:** Verificăm staționaritatea (teste de rădăcină unitară); transformăm dacă este necesar (diferențe, logaritmi)
2. **Selecția lag-ului:** Folosim criteriile AIC, BIC, HQ; verificăm autocorelația reziduurilor
3. **Estimare:** OLS ecuație cu ecuație; verificăm stabilitatea (valori proprii)
4. **Analiză:** Teste de cauzalitate Granger; funcții de răspuns la impuls; descompunerea varianței
5. **Prognoză:** Prognoze punctuale și intervale de încredere

## Rezultate cauzalitate Granger

### Rezultatele testului: PIB și șomaj

Ipoteza nulă	Statistica F	df	p-valoare	Decizie
PIB $\nrightarrow$ Șomaj	8.42	(2, 95)	0.0004	Respingem
Șomaj $\nrightarrow$ PIB	2.15	(2, 95)	0.1220	Nu respingem

### Interpretare

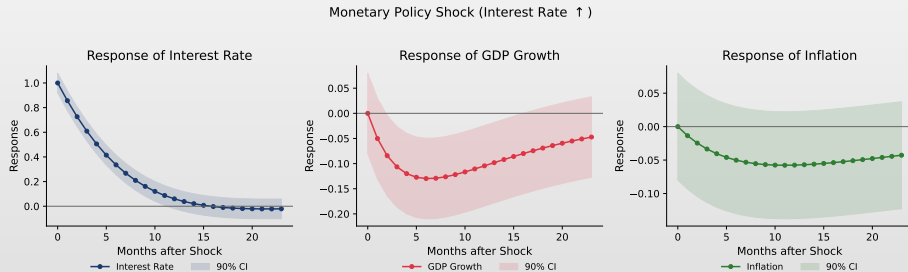
- ▣ Creșterea PIB cauzează Granger șomajul (în acord cu Legea lui Okun)
- ▣ Șomajul nu cauzează semnificativ Granger PIB (în acest eșantion)
- ▣ Pe date reale, cauzalitatea poate fi **bidirecțională** (a se vedea studiul de caz)



## VAR politică monetară: IRF

### Observații

- Șoc monetar contracționist: creșterea ratei dobânzii
- Răspunsul variabilelor: producția — efect maxim la 4–6 trim.; inflația — răspuns mai lent



## Exemplu: Analiza politicii monetare

### VAR cu trei variabile

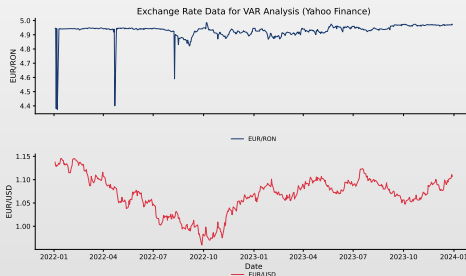
- ▣ Studiem mecanismul de transmisie monetară cu:
  - ▶  $Y_1$ : Gap-ul de producție (devierea PIB de la trend)
  - ▶  $Y_2$ : Rata inflației
  - ▶  $Y_3$ : Rata dobânzii (instrument de politică)

### Întrebări

1. Cum afectează un șoc al ratei dobânzii producția și inflația?
2. Cât timp trece până se simte efectul maxim?
3. Ce fracțiune din varianța producției se datorează șocurilor monetare?

## Date

- Date reale SUA (FRED, 1990–2024): Creștere PIB și Rata Șomajului ( $T = 140$  trimestre)
- Corelație negativă vizibilă între serii (Legea lui Okun); dinamică bidirecțională



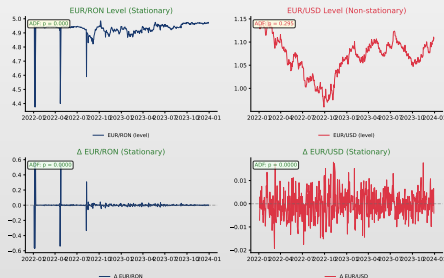
[Q](#) [TSA](#) [ch6](#) [case](#) [raw](#) [data](#)



## Pasul 1: Analiză preliminară

### Rezultate

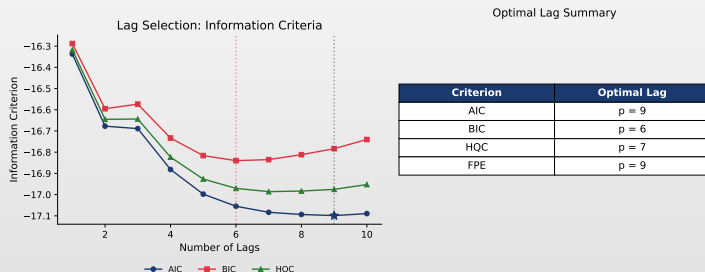
- PIB: ACF scade rapid  $\succ$  staționar; Șomaj: ACF persistent (ADF — Augmented Dickey-Fuller:  $p = 0.02$ )
- Corelație negativă PIB-Șomaj ( $\rho = -0.17$ ); cross-corelație sugerează relații bidirecționale



## Pasul 2: Selecția ordinului VAR

### Rezultate

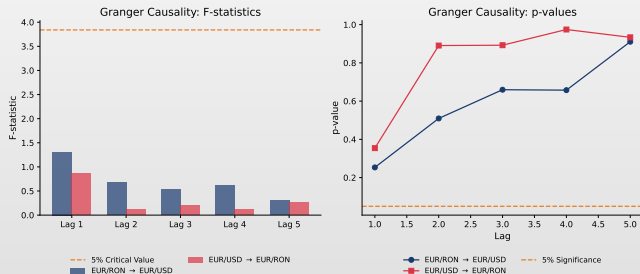
- Criteriile AIC și BIC sugerează VAR(2); compromis între complexitate și ajustare



## Pasul 3: Testul Granger de cauzalitate

### Rezultate

- PIB  $\rightarrow$  Șomaj:  $F = 17.35$ ,  $p < 0.001$   $\rightarrow$  PIB “cauzează Granger” Șomajul
- Șomaj  $\rightarrow$  PIB:  $F = 38.93$ ,  $p < 0.001$   $\rightarrow$  cauzalitate bidirecțională (Legea lui Okun)

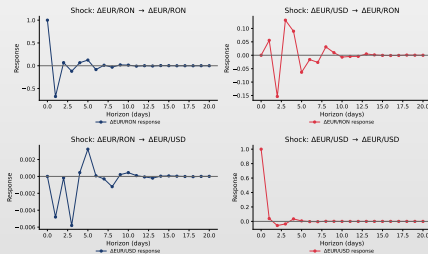


## Pasul 4: Funcții de răspuns la impuls (IRF)

### Rezultate IRF

- Șoc PIB  $\rightarrow$  efect negativ persistent asupra șomajului (Legea lui Okun,  $>20$  trim.)
- Șoc Șomaj  $\rightarrow$  efect pozitiv de scurtă durată asupra PIB (recuperare, 2–3 trim.)

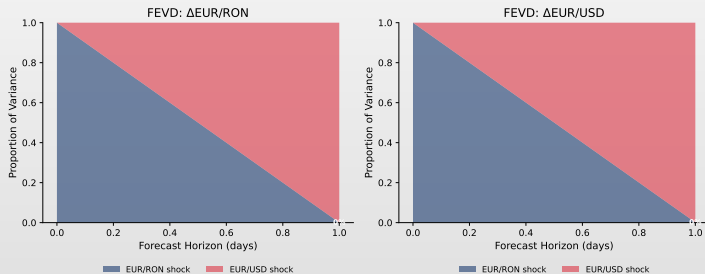
Impulse Response Functions (Real VAR)



## Pasul 5: Descompunerea varianței (FEVD)

### Rezultate FEVD

- PIB: ~65% din varianță explicată de propriile șocuri, ~35% de șocurile Șomaj
- Șomaj: dominat de șocurile PIB (~65% la  $h = 1$ , crescând la ~92% la  $h = 20$ )

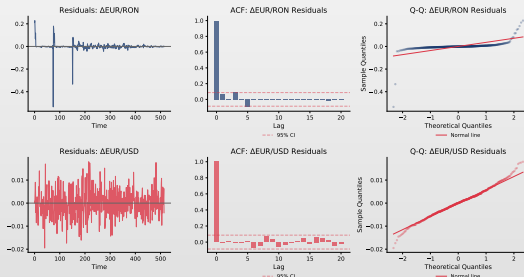




## Pasul 6: Diagnosticarea reziduurilor

### Diagnostic

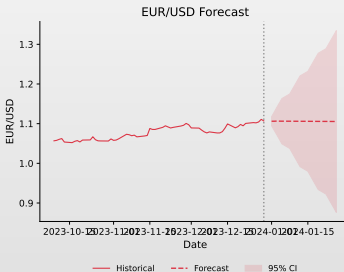
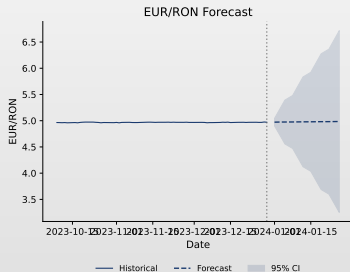
- Reziduurile nu prezintă autocorelație semnificativă (ACF în limite)
- Non-normalitate semnificativă (JB respins) > datorită valorilor extreme COVID-19



## Pasul 7: Prognoza VAR

### Rezultate prognoză

- Prognoză pe 12 trimestre; VAR captează interdependențele dintre serii
- Prognozele converg spre valorile de echilibru pe termen lung

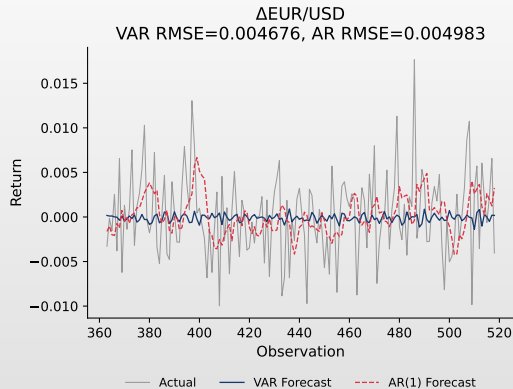
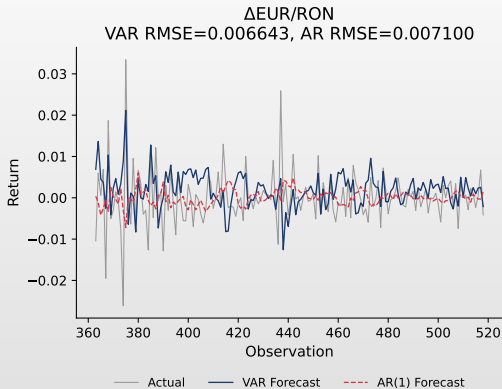


## Pasul 8: Rolling forecast – VAR vs AR

### Procedura

- ▣ Train/Test recursiv:  $W = 80$ , re-estimare la fiecare pas; modele AR(2) vs VAR(2)
- ▣ RMSE expanding:  $RMSE_t = \sqrt{\frac{1}{t} \sum_{s=1}^t e_s^2}$ ; intervale de încredere 95%
- ▣ Rezultate mixte:
  - ▶ Șomaj — VAR -10% RMSE față de AR (informația din PIB ajută)
  - ▶ PIB — VAR +6% RMSE față de AR (informația din șomaj nu aduce beneficii)

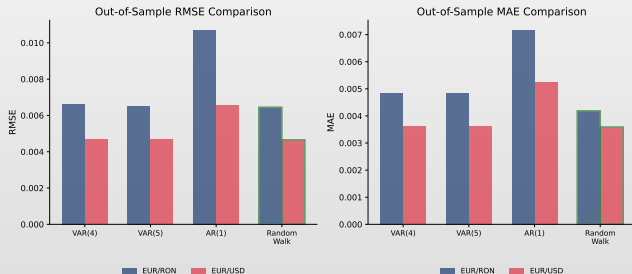
## Pasul 8: Rolling forecast – VAR vs AR



## Pasul 9: Comparație out-of-sample – AR vs VAR

### Metodologie

- Prognoză recursivă: estimare pe  $[1, \dots, t]$ , prognoză  $\hat{y}_{t+1|t}$
- RMSE:  $RMSE_t = \sqrt{\frac{1}{t} \sum_{s=1}^t e_s^2}$
- VAR reduce RMSE pentru Șomaj ( $\sim 10\%$ ), nu și pentru PIB



## Exercițiu AI: Gândire critică

Prompt de testat în ChatGPT / Claude / Copilot

“Descarcă de pe FRED: rata trimestrială de creștere a PIB real SUA (A191RL1Q225SBEA) și rata lunară a șomajului (UNRATE, agregată trimestrial) din 2000-Q1 până în 2024-Q4 (100 observații). Testează cauzalitatea Granger în ambele direcții, estimează un model VAR și calculează funcțiile impuls-răspuns ortogonalizate. Vreau cod Python complet.”

**Exercițiu:**

1. Rulați prompt-ul într-un LLM (Large Language Model) la alegere și analizați critic răspunsul.
2. Testează staționaritatea fiecărei variabile înainte de a estima VAR?
3. Cum selectează ordinul lag-urilor? Compară AIC, BIC, HQ?
4. Funcțiile impuls-răspuns sunt ortogonalizate? Discută ordonarea Cholesky?
5. Verifică condiția de stabilitate (valorile proprii în interiorul cercului unitate)?

☐ **Atenție:** Codul generat de AI poate rula fără erori și arăta profesional. *Asta nu înseamnă că e corect.*

## Concluzii

### Modele VAR

- ▣ Modelează **mai multe** serii de timp împreună
- ▣ Fiecare variabilă depinde de propriile lag-uri ȘI lag-urile altor variabile
- ▣ Estimare prin OLS ecuație cu ecuație; necesită staționaritate

### Cauzalitate Granger

- ▣ Testează dacă  $X$  ajută la prezicerea lui  $Y$  dincolo de istoricul propriu al lui  $Y$
- ▣ **Nu** este la fel cu cauzalitatea reală; test  $F$  asupra restricțiilor coeficienților

### IRF și FEVD

- ▣ IRF: Cum se propagă șocurile prin sistem
- ▣ FEVD: Ce proporție din varianță se datorează fiecărui șoc
- ▣ Ambele depind de ordonarea variabilelor (descompunerea Cholesky)

## Lista de verificare pentru selecția modelului VAR

### Înainte de estimare

- ☐ Testați pentru rădăcini unitare în fiecare variabilă
- ☐ Aduceți seria la forma staționară dacă este necesar (diferențe, logaritmi)
- ☐ Verificați pentru valori extreme și rupturi structurale

### Specificarea modelului

- ☐ Selectați ordinul lag-ului folosind AIC/BIC
- ☐ Estimați VAR prin OLS
- ☐ Verificați stabilitatea (valori proprii în interiorul cercului unitate)

### După estimare

- ☐ Testați reziduurile pentru autocorelație
- ☐ Testați pentru efecte ARCH
- ☐ Testați pentru normalitate
- ☐ Calculați IRF, FEVD, teste Granger



## Greșeli comune de evitat

### Capcane în analiza VAR

1. **Ignorarea nestăționarității:** Testați întotdeauna mai întâi pentru rădăcini unitare
2. **Supraajustare:** Prea multe lag-uri  $\succ$  prognoze slabe
3. **Ordonare greșită:** Rezultatele Cholesky depind de ordinea variabilelor
4. **Confundarea corelației cu cauzalitatea:** Cauzalitate Granger  $\neq$  cauzalitate reală
5. **Ignorarea incertitudinii parametrilor:** Folosiți IC bootstrap pentru IRF
6. **Eșantioane mici:** VAR necesită multe observații ( $T > 50$ )

## Ce urmează?

### Subiecte pentru studiu aprofundat

- ▣ **Cointegrare:** Relații pe termen lung între variabile nestaționare
- ▣ **VECM** (Vector Error Correction Model): Modele cu corecția erorii pentru sisteme cointegrate
- ▣ **VAR Structural:** Impunerea restricțiilor din teoria economică
- ▣ **Panel VAR:** VAR pentru date panel
- ▣ **VAR Bayesian:** Distribuții prior de shrinkage pentru sisteme de dimensiuni mari

Întrebări?

## Întrebarea 1

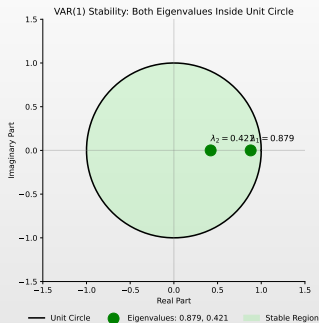
### Întrebare

☐ Pentru un model VAR(1) cu matricea de coeficienți  $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$ , este modelul stabil?

### Variante de răspuns

- (A) Da, deoarece toate elementele diagonale sunt mai mici decât 1
- (B) Da, deoarece toate valorile proprii sunt în interiorul cercului unitate
- (C) Nu, deoarece suma coeficienților depășește 1
- (D) Nu poate fi determinat fără a cunoaște  $\Sigma$

## Întrebarea 1: Răspuns



Răspuns: (B)

□  $\lambda_1 = 0.879, \lambda_2 = 0.421 \succ$  ambele  $|\lambda| < 1 \succ$  stabil!

## Întrebarea 2

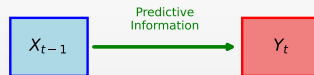
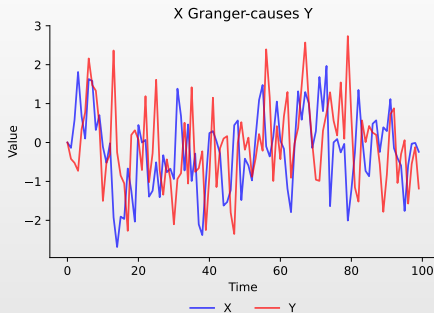
### Întrebare

- ☐ Dacă  $X$  cauzează Granger pe  $Y$  la nivelul de semnificație de 5%, care dintre următoarele afirmații este ADEVĂRATĂ?

### Variante de răspuns

- (A)  $X$  este cauza economică a lui  $Y$
- (B) Valorile trecute ale lui  $X$  conțin informații utile pentru prezicerea lui  $Y$
- (C)  $Y$  nu poate cauza Granger pe  $X$
- (D) Corelația între  $X$  și  $Y$  este pozitivă

## Întrebarea 2: Răspuns



*Past X helps predict Y  
(beyond Y's own past)*

Răspuns: (B)

- ▣ Cauzalitate Granger = conținut predictiv, nu cauzare economică reală
- ▣ X trecut ajută la prezicerea lui Y

## Întrebarea 3

### Întrebare

☐ Într-un VAR cu IRF identificate Cholesky, ce determină ordinea variabilelor?

### Variante de răspuns

- (A) Magnitudinea răspunsurilor la impuls
- (B) Viteza cu care șocurile dispar
- (C) Care variabile pot răspunde contemporan la care șocuri
- (D) Numărul de lag-uri în VAR

### Întrebarea 3: Răspuns

Ordering: (GDP, Interest Rate)



GDP shock → IR responds at  $t=0$   
IR shock → GDP responds at  $t=1$

Ordering: (Interest Rate, GDP)



IR shock → GDP responds at  $t=0$   
GDP shock → IR responds at  $t=1$

Răspuns: (C)

- ☐ Ordonarea determină care variabile răspund imediat la care șocuri



## Întrebarea 4

### Întrebare

- ☐ Pentru un VAR(1) bivariat, câți parametri trebuie estimați (excluzând matricea de covarianță a erorilor)?

### Variante de răspuns

- (A) 4
- (B) 6
- (C) 8
- (D) 10

## Întrebarea 4: Răspuns

Răspuns: (B)

- ▣  $K + K^2 = 2 + 4 = 6$  parametri (vezi detalii mai jos)

Numărare detaliată

- ▣ VAR(1) cu  $K = 2$  variabile:

$$\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{2 \text{ param}} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{4 \text{ param}} \begin{pmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

- ▣ Constant c:  $K = 2$ ; matrice A:  $K^2 = 4$ ; total: 6 parametri

Formula generală

- ▣ VAR( $p$ ) cu  $K$  variabile:  $K + pK^2$  parametri (excluzând  $\Sigma$ )

## Întrebarea 5

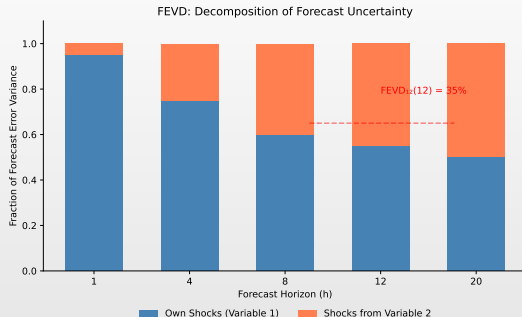
### Întrebare

▣ Ce înseamnă  $FEVD_{12}(h) = 0.35$ ?

### Variante de răspuns

- (A) 35% din varianța totală a variabilei 1 este explicată de variabila 2
- (B) 35% din varianța erorii de prognoză la  $h$  pași a variabilei 1 se datorează șocurilor la variabila 2
- (C) Corelația între variabilele 1 și 2 la lag-ul  $h$  este 0.35
- (D) Variabila 2 explică 35% din răspunsul la impuls al variabilei 1

## Întrebarea 5: Răspuns



Răspuns: (B)

- ☐ 35% din varianța erorii de prognoză la  $h$  pași a variabilei 1 se datorează șocurilor de la variabila 2

## Formule principale – Rezumat

### Model VAR(p)

- ▣  $Y_t = c + \sum_{i=1}^p A_i Y_{t-i} + \varepsilon_t$
- ▣  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ , i.i.d.

### Cauzalitate Granger

- ▣  $H_0$ :  $X$  nu cauzează Granger  $Y$
- ▣ Test F sau Wald pe coeficienții lag-urilor lui  $X$

### Selecția lag-urilor

- ▣  $AIC = \ln |\hat{\Sigma}| + \frac{2pK^2}{T}$
- ▣  $BIC = \ln |\hat{\Sigma}| + \frac{pK^2 \ln T}{T}$

### Funcții răspuns la impuls

- ▣  $Y_{t+h} = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i \varepsilon_{t+h-i}$
- ▣  $\Phi_i$  = multiplicatori la orizontul  $i$

### FEVD

- ▣  $FEVD_{jk}(h) = \frac{\sum_{i=0}^{h-1} (e_j' \Phi_i P e_k)^2}{\sum_{i=0}^{h-1} e_j' \Phi_i \Sigma \Phi_i' e_j}$
- ▣ Contribuția șocului  $k$  la varianța lui  $j$

### Staționaritate VAR

- ▣ Toate valorile proprii ale  $A$  în interiorul cercului unitate

## Bibliografie I

### Lucrări fundamentale VAR și cauzalitate

- ▣ Sims, C.A. (1980). Macroeconomics and Reality, *Econometrica*, 48(1), 1–48.
- ▣ Granger, C.W.J. (1969). Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-Spectral Methods, *Econometrica*, 37(3), 424–438.
- ▣ Toda, H.Y., & Yamamoto, T. (1995). Statistical Inference in Vector Autoregressions with Possibly Integrated Processes, *Journal of Econometrics*, 66(1-2), 225–250.

### Manuale VAR

- ▣ Lütkepohl, H. (2005). *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer.
- ▣ Kilian, L., & Lütkepohl, H. (2017). *Structural Vector Autoregressive Analysis*, Cambridge University Press.

## Bibliografie II

### Funcții impuls-răspuns și descompunere varianță

- ▣ Pesaran, H.H., & Shin, Y. (1998). Generalized Impulse Response Analysis in Linear Multivariate Models, *Economics Letters*, 58(1), 17–29.
- ▣ Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- ▣ Tsay, R.S. (2014). *Multivariate Time Series Analysis with R and Financial Applications*, Wiley.

### Resurse online și cod

- ▣ **Quantlet:** <https://quantlet.com> > Platformă de cod pentru metode cantitative
- ▣ **Quantinar:** <https://quantinar.com> > Platformă de învățare pentru metode cantitative
- ▣ **GitHub TSA:** [https://github.com/QuantLet/TSA/tree/main/TSA\\_ch6](https://github.com/QuantLet/TSA/tree/main/TSA_ch6) > Cod Python pentru acest capitol

# Vă Mulțumim!

## Întrebări?

Materialele cursului sunt disponibile la: <https://danpele.github.io/Time-Series-Analysis/>



Quantlet



Quantinar