Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 4: Modele SARIMA

Seminar

Cuprins Seminar

Test 1: Diferențierea Sezonieră

Întrebare

Pentru date lunare cu sezonalitate anuală, ce face operatorul $(1 - L^{12})$?

- A) Ia 12 diferențe consecutive
- B) Calculează $Y_t - Y_{t-12}$
- C) Face media pe 12 luni
- D) Elimină primele 12 observații

Test 1: Diferențierea Sezonieră

Întrebare

Pentru date lunare cu sezonalitate anuală, ce face operatorul $(1 - L^{12})$?

- A) Ia 12 diferențe consecutive
- B) Calculează $Y_t - Y_{t-12}$
- C) Face media pe 12 luni
- D) Elimină primele 12 observații

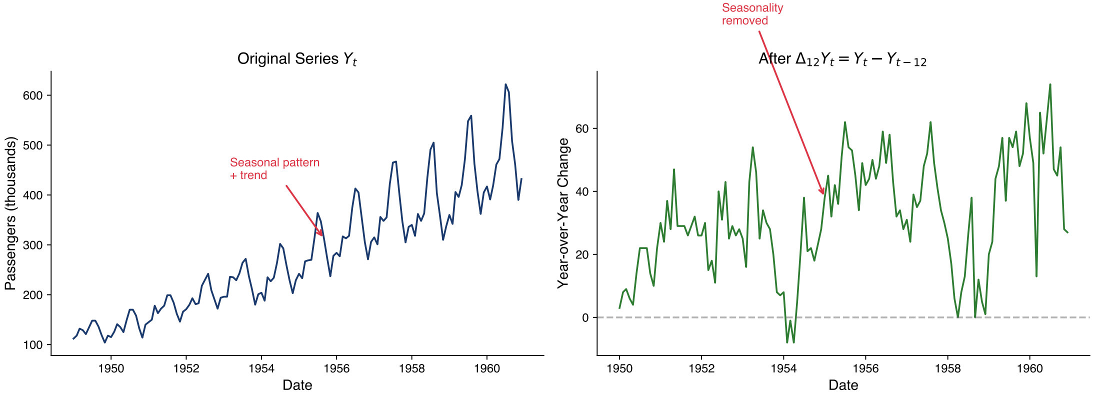
Răspuns: B – Calculează $Y_t - Y_{t-12}$

Operatorul de diferență sezonieră:

$$(1 - L^{12})Y_t = Y_t - L^{12}Y_t = Y_t - Y_{t-12}$$

Exemplu (vânzări ianuarie): $Y_{Ian2025} - Y_{Ian2024}$
Efect: Elimină modelul sezonier anual stabil
Notă: $(1 - L^s)$ pentru orice perioadă sezonieră s (trimestrial: $s = 4$, săptămânal: $s = 52$)

Vizual: Diferența Sezonieră



Diferențierea sezonieră elimină modelele anuale comparând aceleași perioade între ani.

Test 2: Notația SARIMA

Întrebare

Ce reprezintă SARIMA$(1,1,1) \times (1,1,1)_{12}$?

- A) 12 modele ARIMA diferite
- B) ARIMA cu 12 termeni AR și 12 termeni MA
- C) ARIMA(1,1,1) cu ARIMA(1,1,1) sezonier la perioada 12
- D) Un model care necesită 12 ani de date

Test 2: Răspuns

Răspuns: C – ARIMA(1,1,1) cu ARIMA(1,1,1) sezonier la perioada 12

SARIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ **Notation**

$$\phi(L)\Phi(L^s)(1-L)^d(1-L^s)^D Y_t = \theta(L)\Theta(L^s)\varepsilon_t$$

Regular (Non-Seasonal)

p	= AR order	(Number of AR lags)
d	= Differencing	(Regular differences)
q	= MA order	(Number of MA lags)

Seasonal

P	= Seasonal AR	(SAR lags at $s, 2s, \ldots$)
D	= Seasonal Diff	($(1-L^s)^D$)
Q	= Seasonal MA	(SMA lags at $s, 2s, \ldots$)
s	= Period	(Seasonal period)

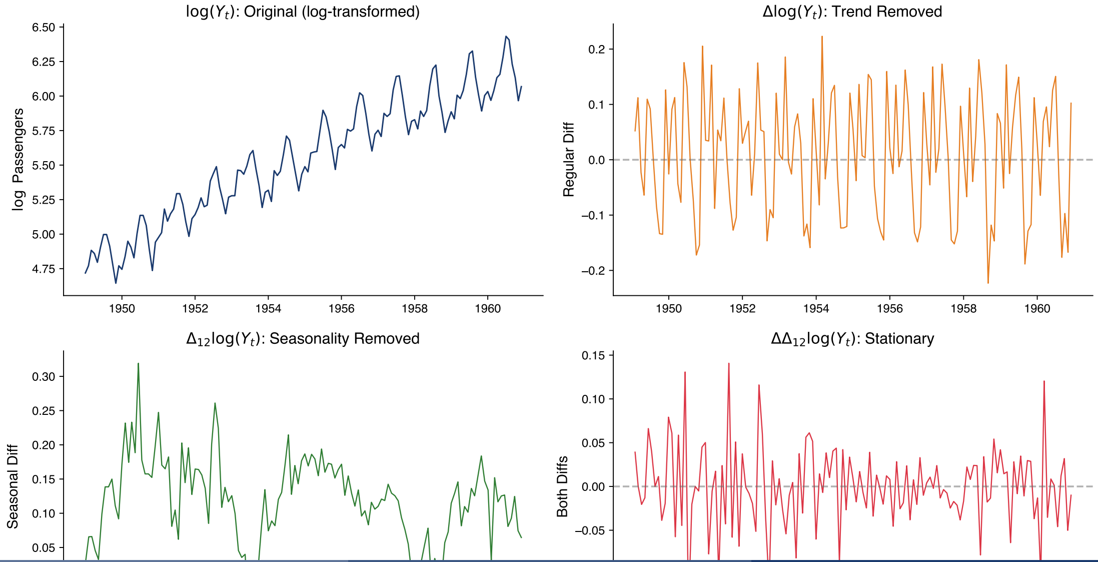
Example: SARIMA$(1, 1, 1) \times (0, 1, 1)_{12}$

Monthly data with: AR(1), MA(1), one regular diff,

one seasonal diff at lag 12, seasonal MA(1)

$$(1-\phi_1 L)(1-\Phi_1 L^{12})(1-L)(1-L^{12})Y_t = (1+\theta_1 L)(1+\Theta_1 L^{12})\varepsilon_t$$

Vizual: Structura Modelului SARIMA



Test 3: Modelul Airline

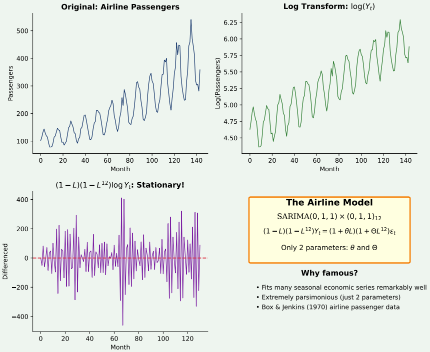
Întrebare

"Modelul airline" se referă la SARIMA$(0,1,1) \times (0,1,1)_{12}$. Câți parametri are (excluzând varianța)?

- A) 2 parametri
- B) 4 parametri
- C) 6 parametri
- D) 12 parametri

Test 3: Răspuns

Răspuns: A – 2 parametri (θ_1 și Θ_1)



Modelul airline: $(1-L)(1-L^{12})Y_t = (1+\theta_1 L)(1+\Theta_1 L^{12})\varepsilon_t$

Se potrivește remarcabil de bine pe multe serii economice sezoniere (Box & Jenkins, 1970)

Test 4: ACF-ul Datelor Sezoniere

Întrebare

Pentru date lunare cu sezonalitate puternică, unde vă așteptați să vedeți vârfuri ACF semnificative?

- A) Doar la lag 1
- B) Doar la lag 12
- C) La lag-urile 12, 24, 36, ...
- D) Distribuite aleatoriu

Test 4: ACF-ul Datelor Sezoniere

Întrebare

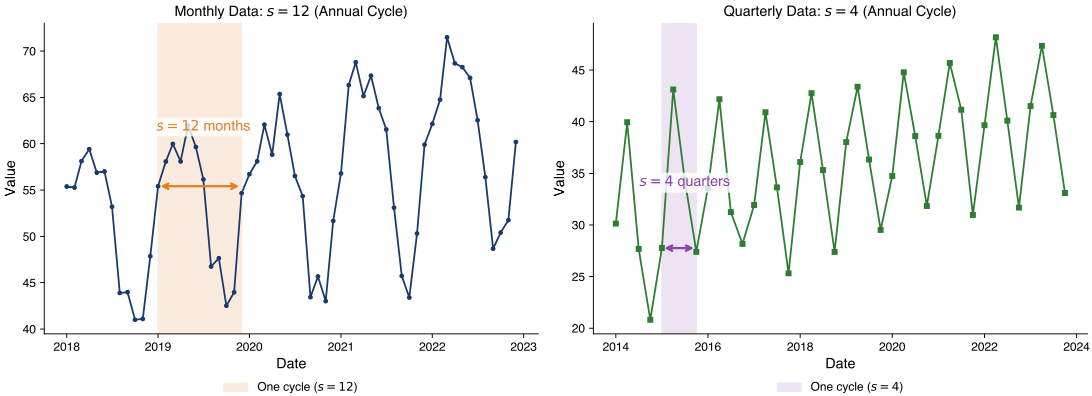
Pentru date lunare cu sezonalitate puternică, unde vă așteptați să vedeți vârfuri ACF semnificative?

- A) Doar la lag 1
- B) Doar la lag 12
- C) La lag-urile 12, 24, 36, ...
- D) Distribuite aleatoriu

Răspuns: C – La lag-urile 12, 24, 36, ...

Intuiție: Ianuarie 2024 este similar cu ianuarie 2023, 2022, etc.
Model ACF: Vârfuri la lag-urile $s, 2s, 3s, \ldots$ $(\rho_{12}, \rho_{24}, \rho_{36} \neq 0)$
Diagnostic: Descreștere lentă la lag-urile sezoniere $\Rightarrow D = 1$; Întrerupere după lag $s \Rightarrow Q = 1$

Vizual: Modele de Sezonalitate



Modelele sezoniere se repetă la intervale regulate (lunar, trimestrial, etc.) și pot fi aditive sau multiplicative.

Test 5: Structura Multiplicativă

Întrebare

În SARIMA, ce înseamnă “structură multiplicativă”?

- A) Amplitudinea sezonieră crește proporțional
- B) Polinoamele obișnuite și sezoniere sunt înmulțite
- C) Înmulțim datele cu factori sezonieri
- D) Modelul este estimat folosind înmulțirea

Test 5: Structura Multiplicativă

Întrebare

În SARIMA, ce înseamnă "structură multiplicativă"?

- A) Amplitudinea sezonieră crește proporțional
- B) Polinoamele obișnuite și sezoniere sunt înmulțite
- C) Înmulțim datele cu factori sezonieri
- D) Modelul este estimat folosind înmulțirea

Răspuns: B – Polinoamele obișnuite și sezoniere sunt înmulțite

SARIMA multiplicativ: $\phi(L)\Phi(L^s)(1-L)^d(1-L^s)^D Y_t = \theta(L)\Theta(L^s)\varepsilon_t$
Exemplu: $(1-\phi_1 L)(1-\Phi_1 L^{12}) = 1 - \phi_1 L - \Phi_1 L^{12} + \phi_1\Phi_1 L^{13}$
Termenul încrucișat $\phi_1\Phi_1 L^{13}$: Captează interacțiunea între dinamica pe termen scurt și lung

Test 6: Diferențierea Sezonieră vs Obișnuită

Întrebare

Când ați aplica atât diferențierea obișnuită ($d = 1$) cât și sezonieră ($D = 1$)?

- A) Când datele au doar un trend
- B) Când datele au doar sezonalitate
- C) Când datele au atât trend cât și nestaționaritate sezonieră
- D) Niciodată – se anulează reciproc

Test 6: Diferențierea Sezonieră vs Obișnuită

Întrebare

Când ați aplica atât diferențierea obișnuită ($d = 1$) cât și sezonieră ($D = 1$)?

- A) Când datele au doar un trend
- B) Când datele au doar sezonalitate
- C) Când datele au atât trend cât și nestaționaritate sezonieră
- D) Niciodată – se anulează reciproc

Răspuns: C – Atât trend cât și nestaționaritate sezonieră

Combinat: $W_t = (1 - L)(1 - L^{12})Y_t = Y_t - Y_{t-1} - Y_{t-12} + Y_{t-13}$
Când este necesar: ACF cu descreștere lentă la lag-urile 1,2,3... $\Rightarrow d = 1$; la lag-urile 12,24,36... $\Rightarrow D = 1$

Exemple: Pasageri aerieni, vânzări retail, cerere de energie

Test 7: Detectarea Sezonalității din ACF

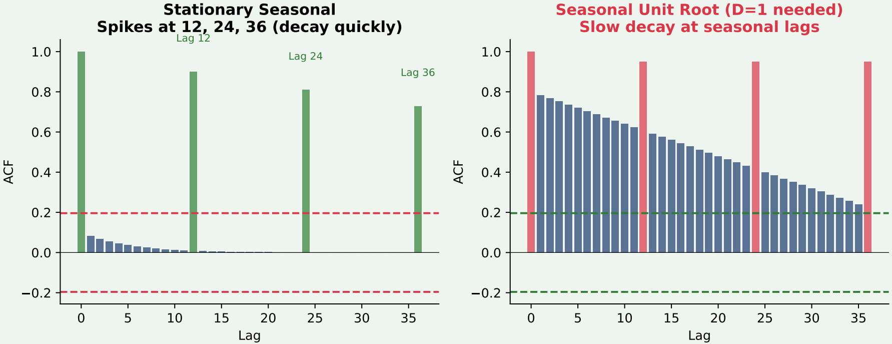
Întrebare

ACF-ul unei serii de timp lunare arată descreștere lentă la lag-urile 12, 24 și 36. Ce sugerează aceasta?

- A) Seria este staționară
- B) Seria necesită doar diferențierea obișnuită
- C) Seria are o rădăcină unitară sezonieră necesitând $D = 1$
- D) Seria este zgomot alb

Test 7: Răspuns

Răspuns: C – Rădăcină unitară sezonieră necesitând $D = 1$



Stânga: Sezonieră staționară (descreștere rapidă la lag-urile sezoniere)
Dreapta: Rădăcină unitară sezonieră (descreștere lentă $\Rightarrow$ necesită $D = 1$)

Test 8: Sezonalitate Multiplicativă vs Aditivă

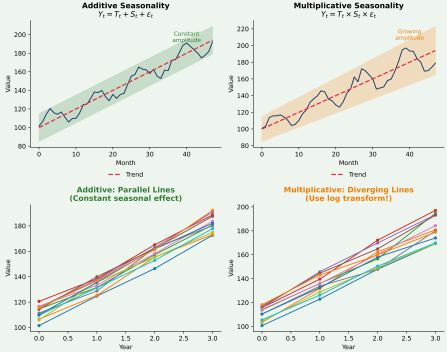
Întrebare

Dacă amplitudinea sezonieră a unei serii de timp crește proporțional cu nivelul, aceasta indică:

- A) Sezonalitate aditivă – folosiți $(1 - L^s)$
- B) Sezonalitate multiplicativă – folosiți transformarea log
- C) Fără sezonalitate prezentă
- D) Nevoie doar de diferențiere obișnuită

Test 8: Răspuns

Răspuns: B – Sezonalitate multiplicativă, folosiți transformarea log



Multiplicativă: Amplitudinea sezonieră crește cu nivelul (linii divergente)
Soluție: Aplicați transformarea log înainte de a ajusta SARIMA

Test 9: Graficul Subseriilor Sezoniere

Întrebare

Într-un grafic de subserii sezoniere, ce indică sezonalitatea multiplicativă?

- A) Liniile pentru fiecare lună sunt paralele
- B) Liniile pentru fiecare lună divergează (dispersia crește în timp)
- C) Toate lunile au aceeași medie
- D) Liniile sunt orizontale

Test 9: Graficul Subseriilor Sezoniere

Întrebare

Într-un grafic de subserii sezoniere, ce indică sezonalitatea multiplicativă?

- A) Liniile pentru fiecare lună sunt paralele
- B) Liniile pentru fiecare lună divergează (dispersia crește în timp)
- C) Toate lunile au aceeași medie
- D) Liniile sunt orizontale

Răspuns: B – Liniile divergează (dispersia crește în timp)

Graficul subseriilor: Grupează datele pe luni, reprezintă valorile fiecărei luni de-a lungul anilor
Paralele $\Rightarrow$ Aditivă; **Divergente** $\Rightarrow$ Multiplicativă; **Orizontale** $\Rightarrow$ Fără trend

Acțiune: Dacă multiplicativă, aplicați log înainte de a ajusta SARIMA

Test 10: Invertibilitatea în SARIMA

Întrebare

Pentru ca SARIMA$(0,1,1) \times (0,1,1)_{12}$ să fie invertibil, care condiție trebuie îndeplinită?

- A) $|\theta_1| < 1$ doar
- B) $|\Theta_1| < 1$ doar
- C) Atât $|\theta_1| < 1$ cât și $|\Theta_1| < 1$
- D) Nu există condiție de invertibilitate pentru modelele MA

Test 10: Invertibilitatea în SARIMA

Întrebare

Pentru ca SARIMA$(0,1,1) \times (0,1,1)_{12}$ să fie invertibil, care condiție trebuie îndeplinită?

- A) $|\theta_1| < 1$ doar
- B) $|\Theta_1| < 1$ doar
- C) Atât $|\theta_1| < 1$ cât și $|\Theta_1| < 1$
- D) Nu există condiție de invertibilitate pentru modelele MA

Răspuns: C – Atât $|\theta_1| < 1$ cât și $|\Theta_1| < 1$

Invertibilitate: Toate rădăcinile MA în afara cercului unitate
MA multiplicativ: $(1 + \theta_1 L)(1 + \Theta_1 L^{12})$
Rădăcini: Obișnuită $|z| = |-1/\theta_1| > 1 \Leftrightarrow |\theta_1| < 1$; Sezonieră $|\Theta_1| < 1$
Ambele condiții necesare pentru invertibilitate generală!

Test 11: Testul HEGY

Întrebare

Testul HEGY este folosit pentru:

- A) Estimarea parametrilor SARIMA
- B) Testarea rădăcinilor unitare la diferite frecvențe (trend și sezoniere)
- C) Verificarea normalității reziduurilor
- D) Compararea modelelor SARIMA folosind criterii informaționale

Test 11: Testul HEGY

Întrebare

Testul HEGY este folosit pentru:

- A) Estimarea parametrilor SARIMA
- B) Testarea rădăcinilor unitare la diferite frecvențe (trend și sezoniere)
- C) Verificarea normalității reziduurilor
- D) Compararea modelelor SARIMA folosind criterii informaționale

Răspuns: B – Testarea rădăcinilor unitare la diferite frecvențe

Testul HEGY (Hylleberg-Engle-Granger-Yoo, 1990):
Testează la: Frecvența zero ($\omega = 0$) $\Rightarrow d = 1$; Nyquist ($\omega = \pi$); Sezonieră $\Rightarrow D = 1$

Decizie: Respingeți toate $\Rightarrow$ variabile dummy sezoniere; Nu respingeți sezoniera $\Rightarrow$ diferențiere sezonieră

Test 12: Identificarea MA Sezonier

Întrebare

După aplicarea $(1-L)(1-L^{12})$, ACF arată un singur vârf semnificativ doar la lag 12 (fără vârf la lag 1). PACF descrește la lag-urile sezoniere. Aceasta sugerează:

A) $\text{SARIMA}(0,1,0)\times(0,1,1)_{12}$
B) $\text{SARIMA}(0,1,1)\times(0,1,0)_{12}$
C) $\text{SARIMA}(1,1,0)\times(1,1,0)_{12}$
D) $\text{SARIMA}(0,1,1)\times(0,1,1)_{12}$

Test 12: Identificarea MA Sezonier

Întrebare

După aplicarea $(1-L)(1-L^{12})$, ACF arată un singur vârf semnificativ doar la lag 12 (fără vârf la lag 1). PACF descrește la lag-urile sezoniere. Aceasta sugerează:

- A) $\text{SARIMA}(0,1,0) \times (0,1,1)_{12}$
- B) $\text{SARIMA}(0,1,1) \times (0,1,0)_{12}$
- C) $\text{SARIMA}(1,1,0) \times (1,1,0)_{12}$
- D) $\text{SARIMA}(0,1,1) \times (0,1,1)_{12}$

Răspuns: A – $\text{SARIMA}(0,1,0) \times (0,1,1)_{12}$

Model: Lag-uri obișnuite – fără vârfuri în ACF/PACF; Lag-uri sezoniere – ACF se anulează la s, PACF descrește
Interpretare: Fără MA obișnuit ($q = 0$); MA(1) sezonier indicat ($Q = 1$)
Model: $(1-L)(1-L^{12})Y_t = (1+\Theta_1 L^{12})\varepsilon_t$

Test 13: Supradiferențierea

Întrebare

După diferențiere, ACF arată un vârf negativ mare la lag 1 sau lag s. Aceasta indică de obicei:

- A) Modelul necesită mai mulți termeni AR
- B) Seria a fost supradiferențiată
- C) Seria este perfect staționară
- D) Prezența heteroscedasticității

Test 13: Supradiferențierea

Întrebare

După diferențiere, ACF arată un vârf negativ mare la lag 1 sau lag s. Aceasta indică de obicei:

A. Modelul necesită mai mulți termeni AR
B. Seria a fost supradiferențiată
C. Seria este perfect staționară
D. Prezența heteroscedasticității

Răspuns: B – Seria a fost supradiferențiată

Semnătură: ACF la lag $1 \approx -0.5 \Rightarrow$ supradif la d; ACF la lag $s \approx -0.5 \Rightarrow$ supradif la D
De ce? $\Delta^2 Y_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$ este MA(1) cu $\theta = -1$, dând $\rho_1 = -0.5$
Corecție: Reduceți d sau D cu unu și re-examinați ACF/PACF

Test 14: Orizontul de Prognoză

Întrebare

Pentru un model SARIMA cu $D = 1$, ce se întâmplă cu intervalele de încredere ale prognozei când orizontul $h \to \infty$?

A) Converg la o lățime fixă
B) Cresc fără limită
C) Se micșorează la zero
D) Oscilează sezonier

Test 14: Orizontul de Prognoză

Întrebare

Pentru un model SARIMA cu $D = 1$, ce se întâmplă cu intervalele de încredere ale prognozei când orizontul $h \to \infty$?

- A) Converg la o lățime fixă
- B) Cresc fără limită
- C) Se micșorează la zero
- D) Oscilează sezonier

Răspuns: B – Cresc fără limită

Proprietatea rădăcinii unitare: Orice rădăcină unitară cauzează varianță de prognoză nemărginită
Pentru SARIMA cu $D = 1$: $\text{Var}(\hat{Y}_{T+h} - Y_{T+h}) \to \infty$ când $h \to \infty$
Intuiție: Șocurile sezoniere se acumulează; prognozele pe termen lung au IC-uri largi

Test 15: Selectarea Perioadei Sezoniere

Întrebare

Aveți date zilnice care arată modele săptămânale clare. Ce perioadă sezonieră s ar trebui să folosiți într-un model SARIMA?

- A) $s = 12$ (lunar)
- B) $s = 7$ (săptămânal)
- C) $s = 365$ (anual)
- D) $s = 24$ (orar)

Test 15: Selectarea Perioadei Sezoniere

Întrebare

Aveți date zilnice care arată modele săptămânale clare. Ce perioadă sezonieră s ar trebui să folosiți într-un model SARIMA?

- A) $s = 12$ (lunar)
- B) $s = 7$ (săptămânal)
- C) $s = 365$ (anual)
- D) $s = 24$ (orar)

Răspuns: B – $s = 7$ (săptămânal)

Date	**Model**	**Perioada s**
Zilnice	Săptămânal	7
Lunare	Anual	12
Trimestriale	Anual	4

Regulă: $s =$ observații per ciclu al modelului dominant

Test 16: Componenta AR Sezonieră

Întrebare

În componenta sezonieră $\Phi(L^s) = 1 - \Phi_1 L^s$, ce ne spune coeficientul $\Phi_1 = 0.8$?

- A) 80% din valoarea perioadei curente vine din perioada anterioară
- B) Există 80% corelație între observațiile consecutive
- C) 80% din valoarea perioadei curente este explicată de aceeași perioadă din anul trecut
- D) Modelul sezonier explică 80% din varianță

Test 16: Componenta AR Sezonieră

Întrebare

În componenta sezonieră $\Phi(L^s) = 1 - \Phi_1 L^s$, ce ne spune coeficientul $\Phi_1 = 0.8$?

- A) 80% din valoarea perioadei curente vine din perioada anterioară
- B) Există 80% corelație între observațiile consecutive
- C) 80% din valoarea perioadei curente este explicată de aceeași perioadă din anul trecut
- D) Modelul sezonier explică 80% din varianță

Răspuns: C – 80% explicat de aceeași perioadă din anul trecut

SAR(1): $Y_t = \Phi_1 Y_{t-12} + \varepsilon_t$
Cu $\Phi_1 = 0.8$: $Y_{Ian2024} = 0.8 \cdot Y_{Ian2023} + \varepsilon_t$
Interpretare: Persistență sezonieră puternică – 80% explicat de aceeași lună din anul trecut

Staționaritate: Necesită $|\Phi_1| < 1$ (satisfăcută aici)

Test 17: Staționaritatea Sezonieră

Întrebare

Un proces sezonier cu $\Phi_1 = 1$ în SARIMA$(0,0,0) \times (1,0,0)_{12}$ este:

- A) Staționar
- B) Are o rădăcină unitară sezonieră (integrat sezonier)
- C) Exploziv
- D) Nedefinit

Test 17: Staționaritatea Sezonieră

Întrebare

Un proces sezonier cu $\Phi_1 = 1$ în $\text{SARIMA}(0,0,0) \times (1,0,0)_{12}$ este:

- A) Staționar
- B) Are o rădăcină unitară sezonieră (integrat sezonier)
- C) Exploziv
- D) Nedefinit

Răspuns: B – Are o rădăcină unitară sezonieră

Model: $Y_t = Y_{t-12} + \varepsilon_t$ (mers aleatoriu sezonier)
Proprietăți: Varianța crește cu timpul; fiecare lună urmează propriul său mers aleatoriu; necesită $D = 1$
Analogie: Ca mersul aleatoriu obișnuit dar la frecvența sezonieră

Test 18: Compararea Modelelor

Întrebare

Modelul A: SARIMA$(1,1,1) \times (1,1,1)_{12}$ are AIC $= 520$. Modelul B: SARIMA$(0,1,1) \times (0,1,1)_{12}$ are AIC $= 525$. Care afirmație este cea mai corectă?

- A) Modelul A este întotdeauna mai bun deoarece are AIC mai mic
- B) Modelul B ar trebui preferat datorită parcimoniei în ciuda AIC mai mare
- C) Diferența AIC de 5 sugerează că Modelul A este substanțial mai bun
- D) Nu putem compara modele cu ordine diferite

Test 18: Compararea Modelelor

Întrebare

Modelul A: SARIMA$(1,1,1) \times (1,1,1)_{12}$ are AIC $= 520$. Modelul B: SARIMA$(0,1,1) \times (0,1,1)_{12}$ are AIC $= 525$. Care afirmație este cea mai corectă?

- A) Modelul A este întotdeauna mai bun deoarece are AIC mai mic
- B) Modelul B ar trebui preferat datorită parcimoniei în ciuda AIC mai mare
- C) Diferența AIC de 5 sugerează că Modelul A este substanțial mai bun
- D) Nu putem compara modele cu ordine diferite

Răspuns: C – Diferența AIC de 5 sugerează că Modelul A este substanțial mai bun

Regulă empirică: ΔAIC < 2: echivalente; 2–10: anumite dovezi; > 10: dovezi puternice
Aici: ΔAIC $= 5$ sugerează Modelul A semnificativ mai bun
Întotdeauna: Verificați și diagnosticele reziduurilor și performanța prognozei!

Test 19: Modele Sezoniere în Reziduuri

Întrebare

După ajustarea unui model SARIMA, observați vârfuri ACF semnificative la lag-urile 12 și 24 în reziduuri. Ce indică aceasta?

- A) Modelul este corect specificat
- B) Componenta sezonieră este inadecvată
- C) Datele nu sunt sezoniere
- D) A apărut supraajustarea

Test 19: Modele Sezoniere în Reziduuri

Întrebare

După ajustarea unui model SARIMA, observați vârfuri ACF semnificative la lag-urile 12 și 24 în reziduuri. Ce indică aceasta?

- A) Modelul este corect specificat
- B) Componenta sezonieră este inadecvată
- C) Datele nu sunt sezoniere
- D) A apărut supraajustarea

Răspuns: B – Componenta sezonieră este inadecvată

Diagnostice: Reziduurile bune ar trebui să fie zgomot alb (fără ACF semnificativ)
ACF sezonier în reziduuri: Modelul nu a capturat structura sezonieră; încercați să creșteți P sau Q; verificați că D este corect
Acțiune: Încercați SARIMA cu ordin sezonier mai mare, verificați Ljung-Box la lag-urile sezoniere

Test 20: Prognoză Practică

Întrebare

Prognozați vânzări retail lunare cu SARIMA$(0,1,1) \times (0,1,1)_{12}$. Pentru prognoza la 13 luni înainte, care observații istorice sunt cele mai influente?

- A) Doar cea mai recentă observație
- B) Observația de aceeași lună din anul trecut
- C) Toate observațiile în mod egal
- D) Doar observațiile din aceeași lună din toți anii anteriori

Test 20: Prognoză Practică

Întrebare

Prognozați vânzări retail lunare cu SARIMA$(0,1,1) \times (0,1,1)_{12}$. Pentru prognoza la 13 luni înainte, care observații istorice sunt cele mai influente?

- A) Doar cea mai recentă observație
- B) Observația de aceeași lună din anul trecut
- C) Toate observațiile în mod egal
- D) Doar observațiile din aceeași lună din toți anii anteriori

Răspuns: B – Observația de aceeași lună din anul trecut

Pentru 13 luni înainte: Cea mai influentă este Y_{T-11} (aceeași lună anul trecut), de asemenea Y_T și Y_{T-12}
Intuiție: "Ianuarie viitor arată ca ianuarie trecut, ajustat pentru trendul recent"

Întrebări Adevărat/Fals (1-6)

Întrebare

Determinați dacă fiecare afirmație este Adevărată sau Falsă:

1. Perioada sezonieră s pentru date trimestriale cu modele anuale este $s = 4$.
2. Modelele SARIMA pot gestiona doar o singură frecvență sezonieră.
3. Dacă AIC selectează SARIMA$(1, 1, 1) \times (1, 1, 1)_{12}$ și BIC selectează modelul airline, BIC greșește întotdeauna.
4. Testul Kruskal-Wallis poate detecta sezonalitatea fără a presupune normalitate.
5. După ajustarea unui model SARIMA, reziduurile nu ar trebui să arate ACF semnificativ la lag-urile sezoniere.
6. Transformarea logaritmică convertește sezonalitatea multiplicativă în aditivă.

Răspunsul pe slide-ul următor...

Soluții Adevărat/Fals (1-6)

Răspunsuri

1. **ADEVĂRAT**: Datele trimestriale cu ciclu anual au $s = 4$ trimestre pe an.
2. **ADEVĂRAT**: SARIMA standard gestionează un s; sezonalități multiple necesită TBATS sau termeni Fourier.
3. **FALS**: BIC penalizează complexitatea mai mult; modelul mai simplu poate fi mai bun pentru interpretare/prognoză.
4. **ADEVĂRAT**: Kruskal-Wallis este neparametric, comparând distribuțiile între sezoane.
5. **ADEVĂRAT**: ACF-ul reziduurilor ar trebui să fie în limitele de încredere la TOATE lag-urile inclusiv cele sezoniere.
6. **ADEVĂRAT**: $\log(T \times S \times \varepsilon) = \log T + \log S + \log \varepsilon$ (formă aditivă).

Problema 1: Expandarea Diferenței Sezoniere

Exercițiu

Expandați complet $(1 - L)(1 - L^{12})Y_t$. Ce observații sunt implicate?

Problema 1: Expandarea Diferenței Sezoniere

Exercițiu

Expandați complet $(1 - L)(1 - L^{12})Y_t$. Ce observații sunt implicate?

Soluție

$(1 - L)(1 - L^{12}) = 1 - L - L^{12} + L^{13}$

Prin urmare: $(1 - L)(1 - L^{12})Y_t = Y_t - Y_{t-1} - Y_{t-12} + Y_{t-13}$

Interpretare: Aceasta este diferența diferențelor:

- Mai întâi diferența sezonieră: $Y_t - Y_{t-12}$ (anul acesta vs anul trecut)
- Apoi diferența obișnuită: $(Y_t - Y_{t-12}) - (Y_{t-1} - Y_{t-13})$

Problema 2: Expandarea Modelului Airline

Exercițiu

Scrieți ecuația completă pentru modelul airline SARIMA$(0,1,1) \times (0,1,1)_{12}$:
$(1-L)(1-L^{12})Y_t = (1+\theta_1 L)(1+\Theta_1 L^{12})\varepsilon_t$

Problema 2: Expandarea Modelului Airline

Exercițiu

Scrieți ecuația completă pentru modelul airline SARIMA$(0,1,1)\times(0,1,1)_{12}$:
$(1-L)(1-L^{12})Y_t = (1+\theta_1 L)(1+\Theta_1 L^{12})\varepsilon_t$

Soluție

Expandați partea MA: $(1+\theta_1 L)(1+\Theta_1 L^{12}) = 1+\theta_1 L + \Theta_1 L^{12} + \theta_1\Theta_1 L^{13}$

Modelul complet: $Y_t - Y_{t-1} - Y_{t-12} + Y_{t-13} = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \Theta_1\varepsilon_{t-12} + \theta_1\Theta_1\varepsilon_{t-13}$

Notă: Termenul încrucișat $\theta_1\Theta_1 L^{13}$ este interacțiunea multiplicativă între componentele MA obișnuite și sezoniere.

Problema 3: Numărarea Parametrilor

Exercițiu

Câți parametri (excluzând σ^2) sunt în SARIMA$(2, 1, 1) \times (1, 0, 1)_4$?

Problema 3: Numărarea Parametrilor

Exercițiu

Câți parametri (excluzând σ^2) sunt în SARIMA$(2,1,1) \times (1,0,1)_4$?

Soluție

- AR obișnuit($p = 2$): $\phi_1, \phi_2 \Rightarrow$ 2 parametri
- MA obișnuit($q = 1$): $\theta_1 \Rightarrow$ 1 parametru
- AR sezonier($P = 1$): $\Phi_1 \Rightarrow$ 1 parametru
- MA sezonier($Q = 1$): $\Theta_1 \Rightarrow$ 1 parametru

Total: 5 parametri

Notă: Ordinele de diferențiere ($d = 1$, $D = 0$) nu adaugă parametri – sunt transformări aplicate datelor.

Problema 4: Prognoza SARIMA

Exercițiu

Dat modelul airline cu $\theta_1 = -0.4$ și $\Theta_1 = -0.6$, și:

- $Y_T = 500$, $Y_{T-1} = 495$, $Y_{T-11} = 480$, $Y_{T-12} = 470$
- $\varepsilon_T = 5$, $\varepsilon_{T-11} = -3$, $\varepsilon_{T-12} = 2$

Prognozați Y_{T+1}.

Problema 4: Prognoza SARIMA

Exercițiu

Dat modelul airline cu $\theta_1 = -0.4$ și $\Theta_1 = -0.6$, și:

- $Y_T = 500,\ Y_{T-1} = 495,\ Y_{T-11} = 480,\ Y_{T-12} = 470$
- $\varepsilon_T = 5,\ \varepsilon_{T-11} = -3,\ \varepsilon_{T-12} = 2$

Prognozați Y_{T+1}.

Soluție

Din model: $Y_{T+1} = Y_T + Y_{T-11} - Y_{T-12} + \varepsilon_{T+1} + \theta_1\varepsilon_T + \Theta_1\varepsilon_{T-11} + \theta_1\Theta_1\varepsilon_{T-12}$

Setând $\mathbb{E}[\varepsilon_{T+1}] = 0$:

$\hat{Y}_{T+1} = 500 + 480 - 470 + 0 + (-0.4)(5) + (-0.6)(-3) + (-0.4)(-0.6)(2)$

$= 510 - 2 + 1.8 + 0.48 = 510.28$

Problema 5: Identificarea Perioadei Sezoniere

Exercițiu

Potriviți fiecare tip de date cu perioada sezonieră tipică s:

1. Date trimestriale de PIB
2. Vânzări retail lunare
3. Rezervări săptămânale la restaurante
4. Cerere zilnică de electricitate

Problema 5: Identificarea Perioadei Sezoniere

Exercițiu

Potriviți fiecare tip de date cu perioada sezonieră tipică s:

1. Date trimestriale de PIB
2. Vânzări retail lunare
3. Rezervări săptămânale la restaurante
4. Cerere zilnică de electricitate

Soluție

1. PIB trimestrial: $s = 4$ (ciclu anual pe 4 trimestre)
2. Vânzări retail lunare: $s = 12$ (ciclu anual pe 12 luni)
3. Rezervări săptămânale la restaurante: $s = 7$ (ciclu săptămânal) sau $s = 52$ (anual)
4. Cerere zilnică de electricitate: $s = 7$ (model săptămânal) sau $s = 365$ (anual)

Notă: Unele serii au modele sezoniere multiple (de ex., datele zilnice pot avea cicluri săptămânale ȘI anuale).

Exemplu: Analiza Vânzărilor Retail Lunare

Scenariu

Aveți 5 ani de date de vânzări retail lunare cu vârfuri clare în decembrie și scăderi în ianuarie. Construiți un model SARIMA potrivit.

Abordare Pas cu Pas

1. **Inspecție vizuală**: Graficul arată trend ascendent + vârfuri puternice în decembrie
2. **Perioada sezonieră**: Date lunare cu model anual $\Rightarrow s = 12$
3. **Transformare**: Considerați $\log(Y_t)$ dacă amplitudinea sezonieră crește cu nivelul
4. **Diferențiere**: Încercați $(1 - L)(1 - L^{12})Y_t$ – verificați ACF/PACF
5. **Selectarea modelului**: Începeți cu modelul airline, comparați prin AIC

Exemplu: Interpretarea ACF/PACF pentru Date Sezoniere

Modele Observate (după diferențiere)

- ACF: Semnificativ la lag-urile 1, 12; se anulează după lag 1 și lag 12
- PACF: Semnificativ la lag-urile 1, 12, 13; descrește la multiplii de 12

Interpretare

Componenta obișnuită: ACF se anulează la 1 $\Rightarrow$ MA(1)
Componenta sezonieră: ACF semnificativ doar la lag 12 $\Rightarrow$ MA(1) sezonier
Model sugerat: $\text{SARIMA}(0, d, 1) \times (0, D, 1)_{12}$ – modelul airline!

Verificare alternativă: Dacă PACF ar fi arătat anulare la lag-urile sezoniere în loc de ACF, considerați termeni AR sezonieri.

Exemplu: Implementare Python

Ajustarea SARIMA în Python

```
from statsmodels.tsa.statespace.sarimax import SARIMAX
import pmdarima as pm

# Ajustare manuală
model = SARIMAX(y, order=(0,1,1), seasonal_order=(0,1,1,12))
results = model.fit()
print(results.summary())

# Selecție automată
auto_model = pm.auto_arima(y, seasonal=True, m=12,
                           start_p=0, max_p=2,
                           start_q=0, max_q=2,
                           d=1, D=1,
                           trace=True)
```

Exemplu: Interpretarea Rezultatelor SARIMA

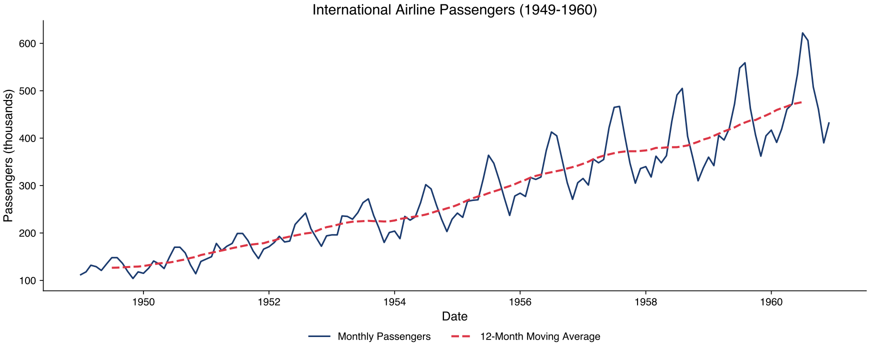
Rezultate Exemplu statsmodels

```
                          SARIMAX Results
==================================================================
Model:              SARIMAX(0,1,1)x(0,1,1,12)   AIC:     1348.52
                                                 BIC:     1358.21
==================================================================
                 coef    std err        z      P>|z|
------------------------------------------------------------------
ma.L1         -0.4018      0.072    -5.58      0.000
ma.S.L12      -0.5521      0.081    -6.82      0.000
sigma2      1254.3201    142.856     8.78      0.000
```

Interpretare

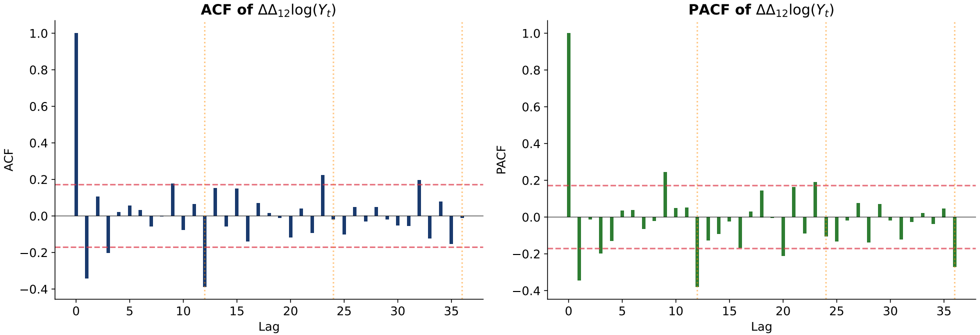
- $\hat{\theta}_1 = -0.40$: MA negativ înseamnă că șocurile pozitive reduc valoarea perioadei următoare
- $\hat{\Theta}_1 = -0.55$: Corelația pentru aceeași sezon este captată
- Ambii coeficienți semnificativi ($p < 0.001$); $|\theta|, |\Theta| < 1$ – invertibil

Studiu de Caz: Pasageri Aerieni (1949–1960)



- Set de date clasic Box-Jenkins: 144 observații lunare
- **Trend ascendent** clar și **model sezonier** (vârfuri vara)
- Amplitudinea sezonieră **crește cu nivelul** $\Rightarrow$ sezonalitate multiplicativă
- Sugerează: transformare logaritmică + modelare SARIMA

Analiza ACF/PACF După Diferențiere



- După $(1-L)(1-L^{12})\log(Y_t)$: seria pare staționară
- Vârf semnificativ la lag 1 în ACF $\Rightarrow$ componentă MA(1)
- Vârf semnificativ la lag 12 în ACF $\Rightarrow$ componentă MA(1) sezonieră
- Modelul sugerează: **SARIMA**$(0,1,1)(0,1,1)_{12}$ (modelul airline)

Rezultate Estimare SARIMA: Date Pasageri Aerieni

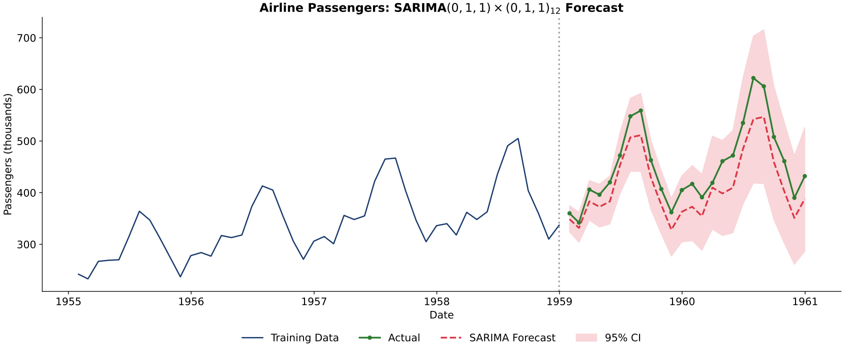
Model: SARIMA$(0,1,1)(0,1,1)_{12}$ pe log(Pasageri)

Parametru	Estimat	Eroare Std.	z-stat	valoare-p
θ_1 (MA.L1)	-0.4018	0.0896	-4.48	< 0.001
Θ_1 (MA.S.L12)	-0.5569	0.0731	-7.62	< 0.001
σ^2	0.00135	–	–	–

Statistici de Ajustare a Modelului

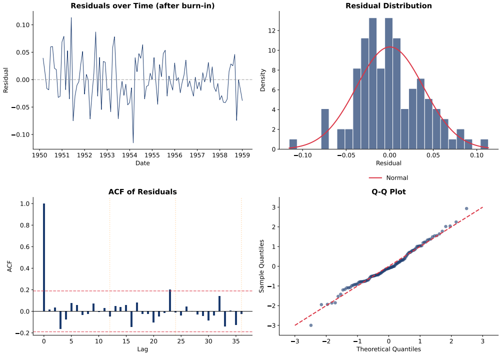
- Log-Verosimilitate: 244.70
- AIC: -483.40, BIC: -474.53
- Ambii coeficienți MA semnificativi și în limitele de invertibilitate

Prognoză: 24 Luni Înainte



- Prognozele captează atât trendul cât și modelul sezonier
- Intervalele de încredere de 95% se lărgesc pe orizontul de prognoză
- Vârfurile sezoniere (iulie-august) și scăderile (februarie) clar vizibile
- Modelul extrapolează cu succes modelul sezonier multiplicativ

Diagnostice Model



- Reziduurile par aleatoare fără modele sistematice
- Distribuție aproximativ normală (graficul Q-Q aproape de diagonală)
- ACF-ul reziduurilor în limitele de încredere – fără autocorelație semnificativă
- Testul Ljung-Box: $p > 0.05$ la toate lag-urile testate $\Rightarrow$ model adecvat

Discuție: Sezonalitate Deterministă vs Stochastică

Întrebare Cheie

Când ar trebui să folosiți variabile dummy sezoniere vs SARIMA pentru date sezoniere?

Considerații

Variabile dummy sezoniere (deterministe):

- Model fix, care se repetă în fiecare an
- Același efect decembrie în fiecare an
- Potrivite când sezonalitatea este stabilă

SARIMA (stochastic):

- Model sezonier în evoluție
- Decembrie anul acesta depinde de decembrie anul trecut
- Mai bun când amplitudinea sezonieră variază

Discuție: Transformarea Logaritmică

Întrebare Cheie

Când ar trebui să luați logaritmi înainte de a ajusta SARIMA?

Îndrumări

Folosiți transformarea log când:

- Fluctuațiile sezoniere cresc cu nivelul (sezonalitate multiplicativă)
- Varianța crește în timp
- Datele sunt strict pozitive (prețuri, vânzări, numărători)

Evitați log când:

- Modelul sezonier este aditiv (amplitudine constantă)
- Datele conțin zerouri sau negative
- Deja pe o scală de rate/proporții

Sfat: Comparați AIC-ul modelelor cu și fără transformare log.

Discuție: Sezonalități Multiple

Provocare

Datele zilnice de vânzări pot avea atât modele săptămânale (7 zile) cât și anuale (365 zile). Cum gestionați aceasta?

Abordări

1. **SARIMA imbricat**: Modelați la frecvența mai scurtă, includeți mai lungă ca exogenă
2. **Modele TBATS/BATS**: Gestionează explicit sezonalități multiple
3. **Termeni Fourier**: Adăugați termeni sin/cos pentru fiecare frecvență sezonieră
4. **Prophet/similare**: Instrumente moderne proiectate pentru sezonalități multiple

Notă: SARIMA standard gestionează doar o perioadă sezonieră. Pentru sezonalitate complexă, considerați metode specializate.

Discuție: Prognozarea Datelor Sezoniere

Întrebare Cheie

Care sunt provocările unice ale prognozării seriilor de timp sezoniere?

Provocări și Soluții

- **Orizontul contează**: Prognoza pe 12 luni înseamnă prezicerea unui ciclu complet
- **Incertitudinea crește**: Prognozele sezoniere compun incertitudinea obișnuită
- **Puncte de cotitură**: Captarea când sezoanele ating vârf/minim
- **Rupturi structurale**: COVID-19 a perturbat multe modele sezoniere

Bune practici:

- Folosiți validare încrucișată cu origine mobilă
- Comparați cu benchmark-ul naiv sezonier
- Raportați intervale de prognoză, mai ales la orizonturi sezoniere

Exerciții pentru Acasă

1. **Teoretic**: Arătați că $(1-L)(1-L^4)$ poate fi scris ca $(1-L-L^4+L^5)$ și explicați ce face această transformare datelor trimestriale cu sezonalitate anuală.

2. **Calcul**: Pentru SARIMA$(1,0,0)\times(1,0,0)_4$ cu $\phi_1=0.5$ și $\Phi_1=0.8$, scrieți polinomul AR complet și identificați toți coeficienții nenuli.

3. **Aplicat**: Descărcați datele lunare despre pasagerii aerieni și:
   - Reprezentați grafic seria și identificați trend/sezonalitate
   - Aplicați transformările potrivite
   - Ajustați modelul airline și interpretați coeficienții
   - Generați prognoze pe 24 de luni cu intervale de încredere

4. **Comparație**: Ajustați atât SARIMA$(0,1,1)\times(0,1,1)_{12}$ cât și SARIMA$(1,1,0)\times(1,1,0)_{12}$ pe datele despre pasagerii aerieni. Comparați folosind AIC, BIC și diagnosticele reziduurilor. Care este preferat?

Indicii pentru Soluții

Indicii

1. Expandați $(1-L)(1-L^4) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot L^4 - L \cdot 1 + L \cdot L^4 = 1 - L - L^4 + L^5$
2. Polinomul AR: $(1-\phi_1 L)(1-\Phi_1 L^4) = 1 - 0.5L - 0.8L^4 + 0.4L^5$
3. Pentru datele pasagerilor aerieni:
   - Folosiți transformarea log (sezonalitate multiplicativă)
   - Atât $d = 1$ cât și $D = 1$ sunt necesare
   - Estimări tipice: $\theta_1 \approx -0.4$, $\Theta_1 \approx -0.6$
4. Modelul airline bazat pe MA se potrivește de obicei mai bine decât modelul AR sezonier pur pentru aceste date (AIC mai mic).

Concluzii Cheie din Acest Seminar

Puncte Principale

1. Diferențierea sezonieră $(1 - L^s)$ elimină sezonalitatea stochastică
2. Notația SARIMA: $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ separă obișnuitul de sezonier
3. Modelul airline este surprinzător de eficient pentru multe seturi de date
4. Structura multiplicativă creează termeni de interacțiune
5. ACF/PACF arată modele atât la lag-urile obișnuite cât și la cele sezoniere
6. Transformarea log adesea necesară pentru sezonalitatea multiplicativă

Pașii Următori

Capitolul 5 va acoperi seriile de timp multivariate: modele VAR, cauzalitatea Granger și cointegrarea.