



# Capitolul 2: Modele ARMA

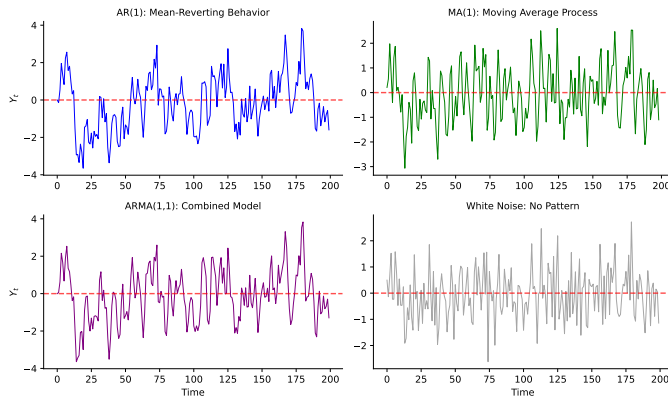
Serii de Timp Staționare



# Structura Cursului

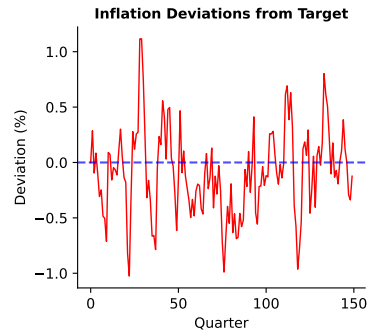
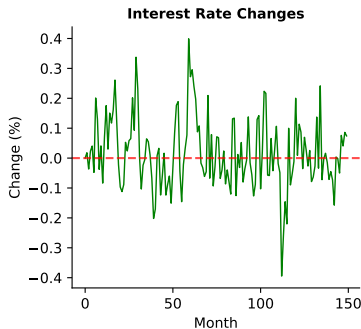
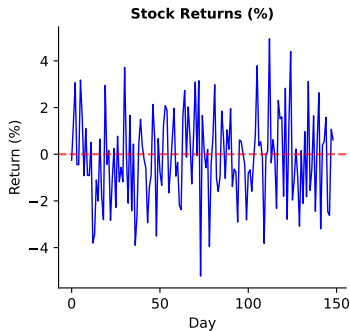
- 1 Introducere și Operatorul Lag
- 2 Modele Autoregresive (AR)
- 3 Modele de Medie Mobilă (MA)
- 4 Modele ARMA
- 5 Identificarea Modelului
- 6 Estimarea Parametrilor
- 7 Diagnosticarea Modelului
- 8 Prognoza cu ARMA
- 9 Implementare Practică
- 10 Rezumat

# Exemplu Motivațional: Procese Staționare



- **Procese AR:** Valoarea curentă depinde de valorile trecute — comportament de revenire la medie
- **Procese MA:** Valoarea curentă depinde de șocurile trecute — memorie scurtă
- **ARMA:** Combină ambele mecanisme pentru modelare flexibilă

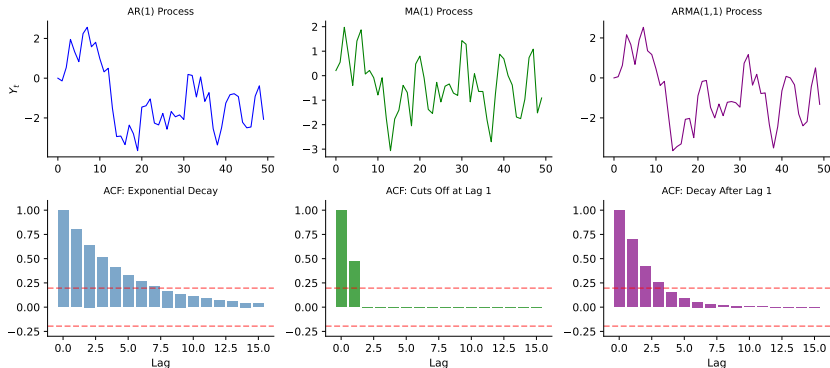
# Aplicații Practice ale ARMA



## Observație Cheie

Multe serii economice și financiare devin staționare după transformări simple (randamente, rate de creștere, abateri de la trend) — perfecte pentru modelarea ARMA!

# Identificarea Modelului prin Tipare ACF



## ACF Dezvăluie Structura Modelului

Diferite modele ARMA produc tipare ACF distincte — putem identifica modelul examinând datele!

## Recapitulare: Staționaritatea

**Din Capitolul 1:** Un proces  $\{X_t\}$  este **slab staționar** dacă:

- 1  $\mathbb{E}[X_t] = \mu$  (medie constantă)
- 2  $\text{Var}(X_t) = \sigma^2 < \infty$  (varianță constantă, finită)
- 3  $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$  (covarianța depinde doar de lag-ul  $h$ )

**De ce contează staționaritatea pentru ARMA:**

- Modelele ARMA presupun că procesul subiacent este staționar
- Datele nestaționare trebuie diferențiate mai întâi (ARIMA)
- Staționaritatea asigură parametri stabili ai modelului

**Astăzi:** Construim modele pentru serii de timp staționare folosind valori trecute și erori trecute.

# Operatorul Lag (Operatorul de Întârziere)

## Definiție 1 (Operatorul Lag)

Operatorul lag  $L$  (sau operatorul de întârziere  $B$ ) deplasează o serie de timp înapoi cu o perioadă:

$$LX_t = X_{t-1}$$

### Proprietăți:

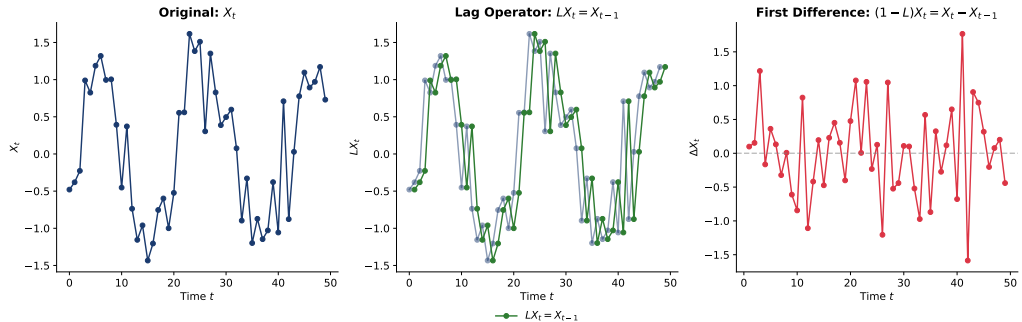
- $L^k X_t = X_{t-k}$  (deplasare înapoi cu  $k$  perioade)
- $L^0 X_t = X_t$  (identitate)
- $(1 - L)X_t = X_t - X_{t-1} = \Delta X_t$  (prima diferență)
- $(1 - L)^d X_t = \Delta^d X_t$  (diferența de ordin  $d$ )

### Polinoame Lag:

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p$$

$$\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q$$

# Operatorul Lag: Ilustrație Vizuală



**Observație cheie:** Operatorul lag este fundamentul notăției modelelor ARMA



## Definiție 2 (Zgomot Alb)

Un proces  $\{\varepsilon_t\}$  este **zgomot alb**, notat  $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ , dacă:

- ❶  $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$  pentru toți  $t$
- ❷  $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$  pentru toți  $t$
- ❸  $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$  pentru toți  $t \neq s$

### Proprietăți:

- Zgomotul alb este “blocul de construcție” al modelelor ARMA
- ACF:  $\rho(0) = 1$ ,  $\rho(h) = 0$  pentru  $h \neq 0$
- PACF: același tipar
- **Zgomot alb Gaussian:** adițional  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

**Notă:** Zgomotul alb *nu* este predictibil — este pur aleatoriu.

### Definiție 3 (Proces AR(1))

Un proces autoregresiv de ordin 1 este:

$$X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

unde  $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$  și  $|\phi| < 1$  pentru staționaritate.

**Interpretare:**

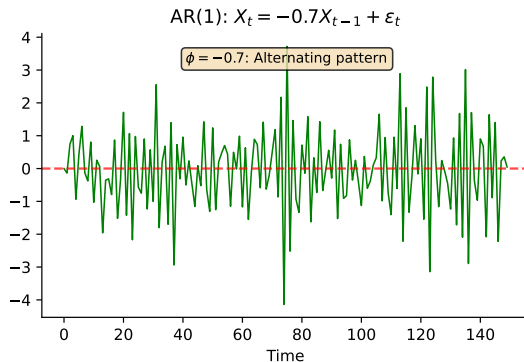
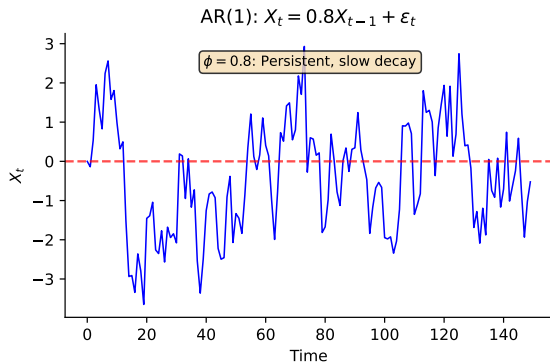
- $c$ : constantă (interceptul)
- $\phi$ : coeficient autoregresiv — măsoară persistența
- $\varepsilon_t$ : inovație (șoc impredictibil)

**Folosind operatorul lag:**

$$(1 - \phi L)X_t = c + \varepsilon_t$$

$$\phi(L)X_t = c + \varepsilon_t \quad \text{unde } \phi(L) = 1 - \phi L$$

## AR(1): Ilustrație Vizuală



Stânga:  $\phi$  pozitiv creează tipare persistente, netede. Dreapta:  $\phi$  negativ creează comportament oscilant în jurul mediei.

## Condiția de Staționaritate AR(1)

Pentru ca AR(1) să fie staționar:  $|\phi| < 1$

Intuiție:

- Dacă  $|\phi| < 1$ : șocurile se diminuează în timp  $\rightarrow$  staționar
- Dacă  $|\phi| = 1$ : mers aleatoriu  $\rightarrow$  nestaționar (rădăcină unitate)
- Dacă  $|\phi| > 1$ : proces exploziv  $\rightarrow$  nestaționar

Ecuația caracteristică:

$$\phi(z) = 1 - \phi z = 0 \implies z = \frac{1}{\phi}$$

Staționaritatea necesită ca rădăcina  $z = 1/\phi$  să se afle **în afara cercului unitate**, adică  $|z| > 1$ , ceea ce înseamnă  $|\phi| < 1$ .

## Proprietățile AR(1)

Pentru un AR(1) staționar cu  $|\phi| < 1$ :

**Media:**

$$\mu = \mathbb{E}[X_t] = \frac{c}{1 - \phi}$$

**Varianța:**

$$\gamma(0) = \text{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}$$

**Autocovarianța:**

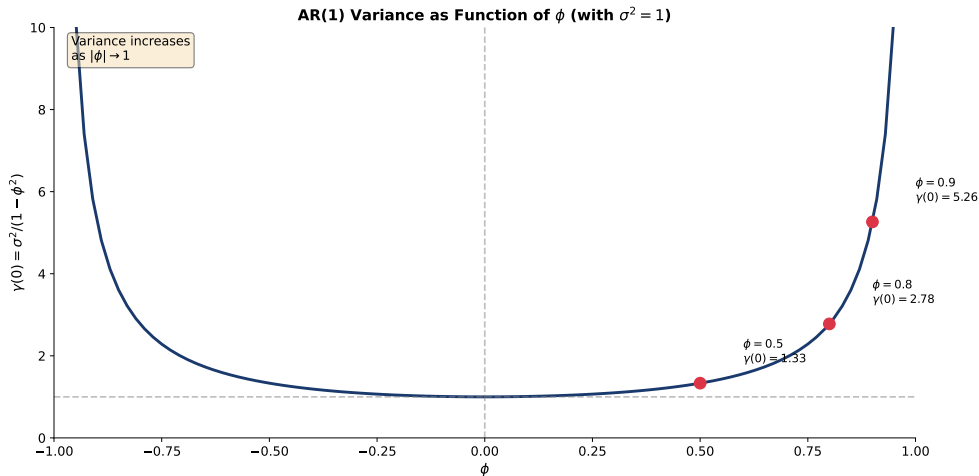
$$\gamma(h) = \phi^h \gamma(0) = \frac{\phi^h \sigma^2}{1 - \phi^2}$$

**Autocorelația (ACF):**

$$\rho(h) = \phi^h$$

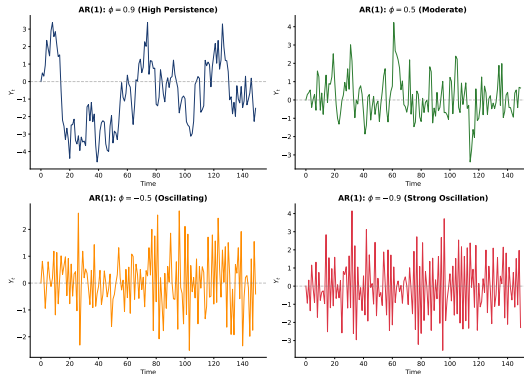
**Observație cheie:** ACF scade exponențial la rata  $\phi$

## Varianța AR(1) ca Funcție de $\phi$



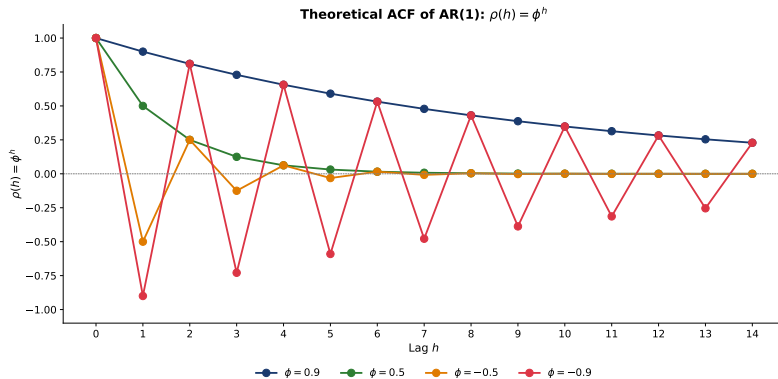
**Observație cheie:** Pe măsură ce  $|\phi| \rightarrow 1$ , varianța explodează  $\rightarrow$  nestăționaritate

## Simulări AR(1): Efectul lui $\phi$



- Valori diferite ale lui  $\phi$  produc comportamente distincte:  $|\phi|$  mai mare înseamnă mai multă persistență
- $\phi$  pozitiv creează tipare netede, de trend;  $\phi$  negativ creează oscilații
- Pe măsură ce  $|\phi| \rightarrow 1$ , procesul devine mai persistent și se apropie de nestaționaritate

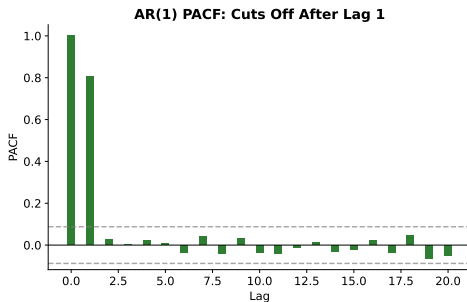
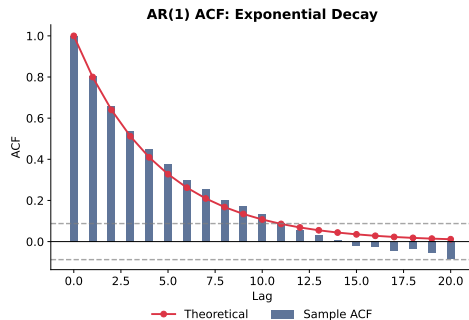
## ACF Teoretic AR(1)



**Tipar:**  $\rho(h) = \phi^h$  — descreștere exponențială (sau alternantă pentru  $\phi < 0$ )



## ACF și PACF AR(1): Teorie vs Eșantion



- **ACF:** Descreștere exponențială la rata  $\phi$  – formula teoretică:  $\rho(h) = \phi^h$
- **PACF:** Un singur vârf la lag 1, apoi se întrerupe – aceasta identifică AR(1)
- Estimările din eșantion (bare) fluctuează în jurul valorilor teoretice; folosiți benzile de încredere

## Tipare ACF și PACF AR(1)

### ACF al AR(1):

- Scade exponențial:  $\rho(h) = \phi^h$
- Dacă  $\phi > 0$ : toate pozitive, descreștere graduală
- Dacă  $\phi < 0$ : semne alternante, descreștere în magnitudine

### PACF al AR(1):

- Se întrerupe după lag 1
- $\pi_1 = \phi$ ,  $\pi_k = 0$  pentru  $k > 1$

ACF		PACF
AR(1)	Descreștere exponențială	Se întrerupe la lag 1

**Acesta este tiparul cheie de identificare pentru AR(1)!**

## Modelul AR(p): Forma Generală

### Definiție 4 (Proces AR(p))

Un proces autoregresiv de ordin  $p$  este:

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

Folosind operatorul lag:

$$\phi(L)X_t = c + \varepsilon_t$$

unde  $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p$

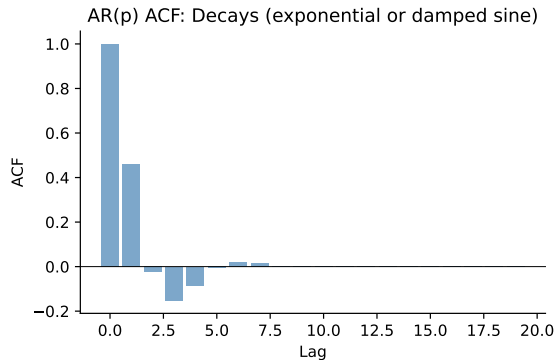
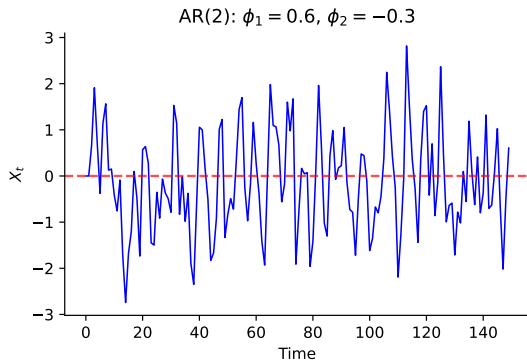
**Condiție de staționaritate:**

- Toate rădăcinile lui  $\phi(z) = 0$  trebuie să se afle **în afara** cercului unitate
- Echivalent: toate rădăcinile au modul  $> 1$

**Tiparul PACF:**

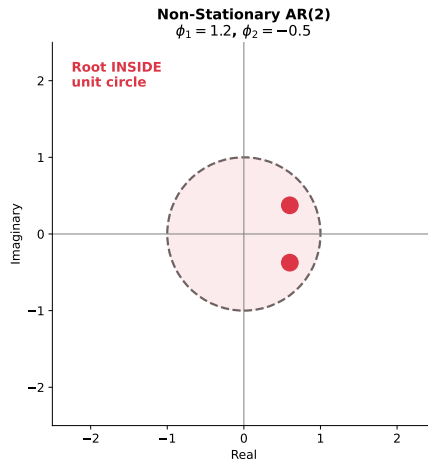
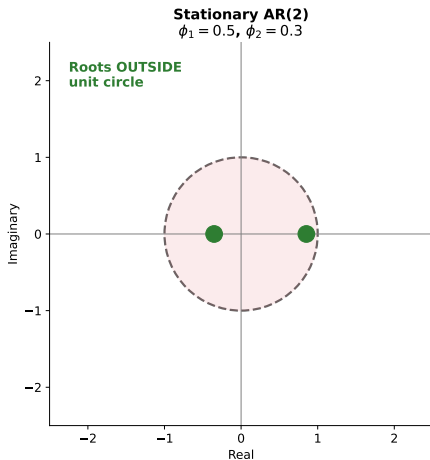
- PACF se întrerupe după lag  $p$
- ACF scade (exponențial sau cu oscilații amortizate)

## AR(p): Ilustrație Vizuală



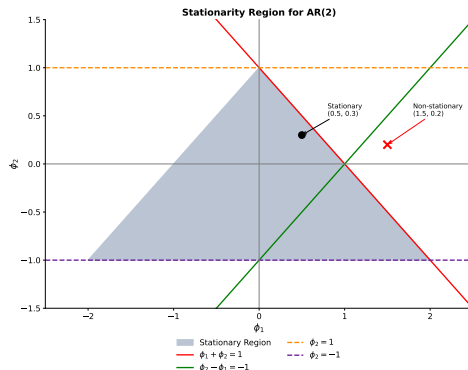
AR(2) poate prezenta comportament ciclic. ACF arată tiparul de descreștere amortizată caracteristic proceselor AR.

## Staționaritatea AR(2): Vizualizarea Cercului Unitate



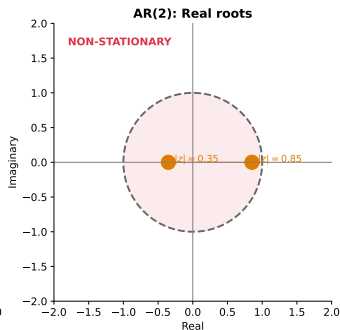
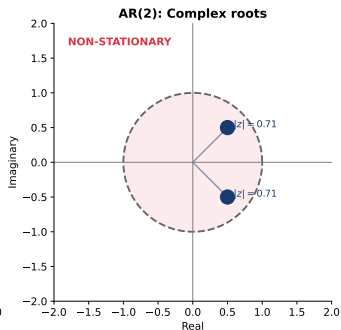
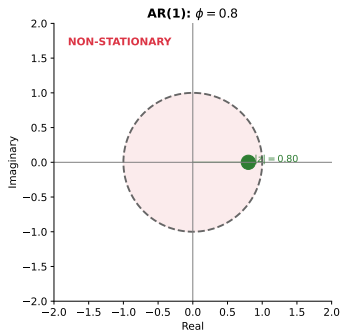
**Regulă:** Toate rădăcinile lui  $\phi(z) = 0$  trebuie să se afle **în afara** cercului unitate umbrit

# Triunghiul de Staționaritate AR(2)



- Regiunea triunghiulară definește toate combinațiile de parametri AR(2) staționari
- Granițe:  $\phi_1 + \phi_2 < 1$ ,  $\phi_2 - \phi_1 < 1$  și  $|\phi_2| < 1$
- Punctele din afara acestei regiuni duc la procese nestaționare sau explozive

# Rădăcinile Polinomului Caracteristic



### Definiție 5 (Proces AR(2))

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

**Condiții de staționaritate pentru AR(2):**

- ❶  $\phi_1 + \phi_2 < 1$
- ❷  $\phi_2 - \phi_1 < 1$
- ❸  $|\phi_2| < 1$

**Comportamentul ACF depinde de rădăcini:**

- **Rădăcini reale:** amestec de două descreșteri exponențiale
- **Rădăcini complexe:** tipar sinusoidal amortizat (pseudo-cicluri)

**PACF:** Se întrerupe după lag 2 ( $\pi_k = 0$  pentru  $k > 2$ )



### Întrebare

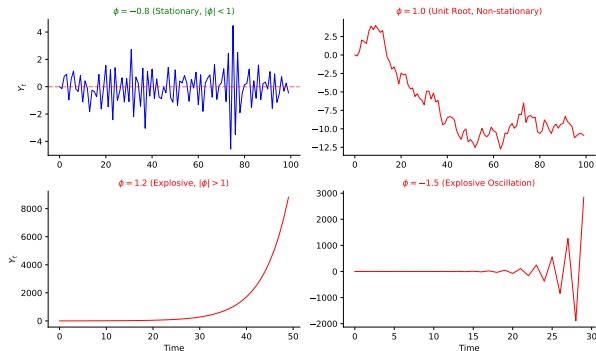
Pentru ce valoare a lui  $\phi$  este procesul AR(1)  $X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$  staționar?

- ☐ A  $\phi = 1.2$
- ☐ B  $\phi = 1.0$
- ☐ C  $\phi = -0.8$
- ☐ D  $\phi = -1.5$

## Quiz: Staționaritate AR – Răspuns

Răspuns Corect: (C)  $\phi = -0.8$

AR(1) este staționar dacă și numai dacă  $|\phi| < 1$ . Doar  $|-0.8| = 0.8 < 1$ .



### Definiție 6 (Proces MA(1))

Un proces de medie mobilă de ordin 1 este:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

unde  $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ .

**Interpretare:**

- $\mu$ : media procesului
- $\theta$ : coeficient MA — măsoară impactul șocului trecut
- Valoarea curentă depinde de șocul curent și unul trecut

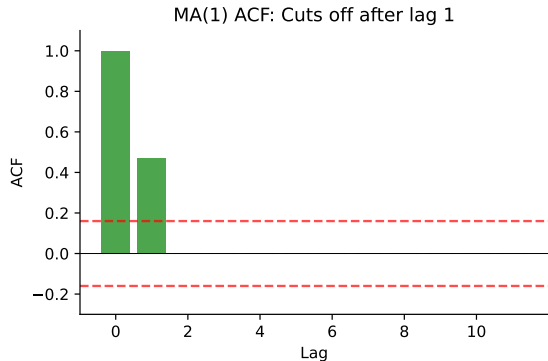
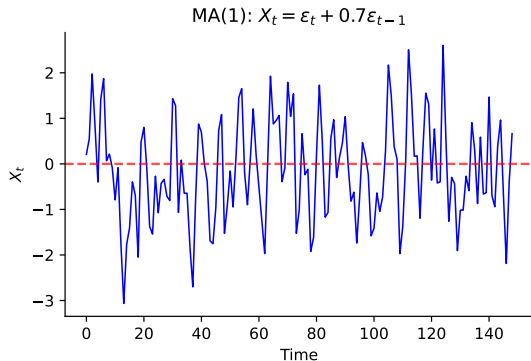
**Folosind operatorul lag:**

$$X_t = \mu + \theta(L)\varepsilon_t$$

unde  $\theta(L) = 1 + \theta L$

**Proprietate cheie:** Procesele MA sunt întotdeauna staționare pentru orice  $\theta$  finit

## MA(1): Ilustrație Vizuală



Procesul MA(1) în stânga. ACF în dreapta arată întreruperea caracteristică după lag 1.

## Proprietățile MA(1)

Pentru MA(1):  $X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$

**Media:**

$$\mathbb{E}[X_t] = \mu$$

**Varianța:**

$$\gamma(0) = \text{Var}(X_t) = \sigma^2(1 + \theta^2)$$

**Autocovarianța:**

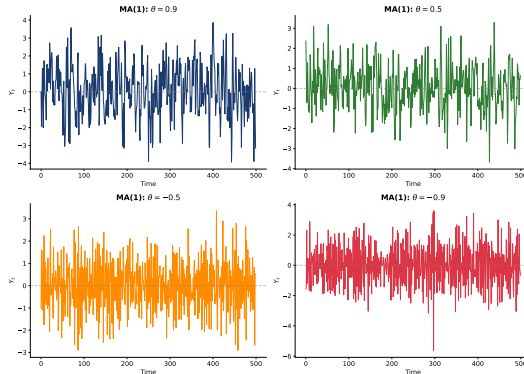
$$\gamma(1) = \theta\sigma^2, \quad \gamma(h) = 0 \text{ pentru } h > 1$$

**Autocorelația (ACF):**

$$\rho(1) = \frac{\theta}{1 + \theta^2}, \quad \rho(h) = 0 \text{ pentru } h > 1$$

**Observație cheie:** ACF se întrerupe după lag 1

## Simulări MA(1): Efectul lui $\theta$



- MA(1) este întotdeauna staționar indiferent de  $\theta$  – memorie finită de doar un lag
- $\theta$  pozitiv netezește seria;  $\theta$  negativ creează fluctuații mai rapide
- Spre deosebire de AR(1), șocurile MA(1) afectează procesul doar pentru o perioadă

## Tipare ACF și PACF MA(1)

### ACF al MA(1):

- Se întrerupe după lag 1
- $\rho(1) = \frac{\theta}{1+\theta^2}$ ,  $\rho(h) = 0$  pentru  $h > 1$
- Notă:  $|\rho(1)| \leq 0.5$  întotdeauna (maxim la  $\theta = \pm 1$ )

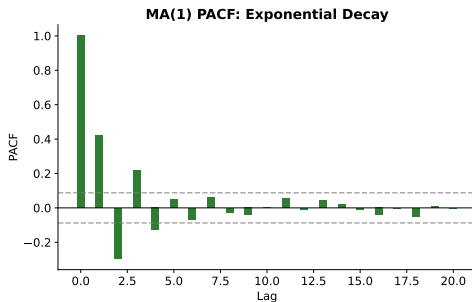
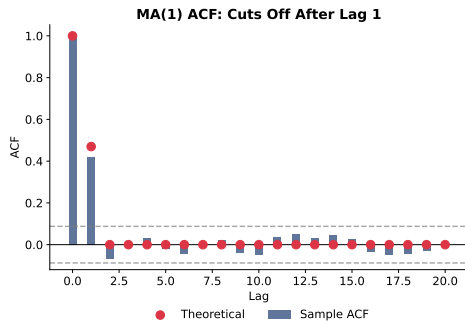
### PACF al MA(1):

- Scade exponențial (sau cu semne alternante)
- Nu se întrerupe

ACF		PACF
MA(1)	Se întrerupe la lag 1	Descreștere exponențială

Acesta este tiparul opus față de AR(1)!

## ACF și PACF MA(1): Comparație Vizuală



- **ACF:** Un singur vârf la lag 1, apoi se întrerupe imediat – semnătura cheie MA(1)
- **PACF:** Descreștere exponențială – tipar opus față de AR(1)
- Această inversare a tiparelor ACF/PACF distinge procesele MA de cele AR



## Definiție 7 (Invertibilitate)

Un proces MA este **invertibil** dacă poate fi scris ca un proces AR infinit:

$$X_t = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j (X_{t-j} - \mu) + \varepsilon_t$$

**Pentru MA(1):** Invertibil dacă  $|\theta| < 1$

**Pentru MA(q):** Toate rădăcinile lui  $\theta(z) = 0$  trebuie să se afle în afara cercului unitate

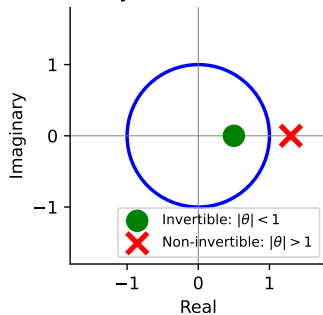
**De ce contează invertibilitatea:**

- Asigură reprezentare unică
- Necesară pentru prognoză și estimare
- Creează corespondență:  $AR(\infty) \leftrightarrow MA(q)$

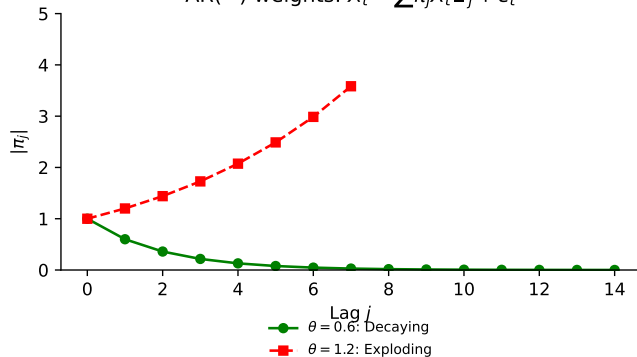
**Notă:** Staționaritatea este pentru AR, Invertibilitatea este pentru MA

## Invertibilitate: Ilustrație Vizuală

Invertibility: Root outside unit circle



AR( $\infty$ ) weights:  $X_t = \sum \pi_j X_{t-j} + \varepsilon_t$



Stânga: invertibilitatea necesită rădăcini în afara cercului unitate. Dreapta: ponderile AR( $\infty$ ) scad doar când  $|\theta| < 1$ .

### Definiție 8 (Proces MA(q))

Un proces de medie mobilă de ordin  $q$  este:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Folosind operatorul lag:

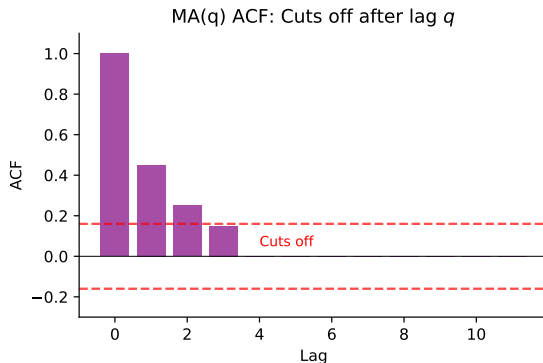
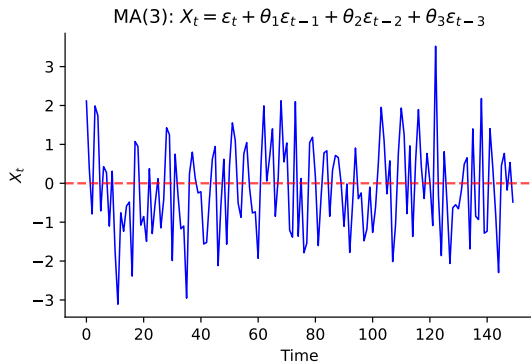
$$X_t = \mu + \theta(L)\varepsilon_t$$

unde  $\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q$

Proprietăți:

- Întotdeauna staționar (varianță finită)
- ACF se întrerupe după lag  $q$ :  $\rho(h) = 0$  pentru  $h > q$
- PACF scade gradual
- Invertibil dacă toate rădăcinile lui  $\theta(z) = 0$  se află în afara cercului unitate

## MA(q): Ilustrație Vizuală



Proces MA(3). Semnătura cheie: ACF se întrerupe după lag  $q$  (aici, lag 3).

## Quiz: Recunoașterea Tiparelor ACF/PACF

### Întrebare

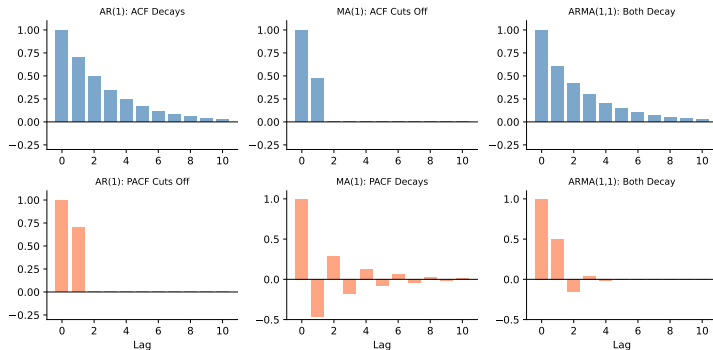
Observați: ACF are vârf la lag 1, apoi se întrerupe. PACF scade gradual. Ce model?

- ☐ A AR(1)
- ☐ B MA(1)
- ☐ C ARMA(1,1)
- ☐ D Zgomot alb

## Quiz: Recunoașterea Tiparelor ACF/PACF – Răspuns

Răspuns Corect: (B) MA(1)

ACF se întrerupe → proces MA; PACF scade → confirmă MA(1)



### Întrebare

Este MA(1)  $X_t = \varepsilon_t + 1.5\varepsilon_{t-1}$  invertibil?

- ☐ A Da, procesele MA sunt întotdeauna invertibile
- ☐ B Da, deoarece  $1.5 > 0$
- ☐ C Nu, deoarece  $|\theta| = 1.5 > 1$
- ☐ D Nu, procesele MA nu sunt niciodată invertibile

### Întrebare

Este MA(1)  $X_t = \varepsilon_t + 1.5\varepsilon_{t-1}$  invertibil?

- ☐ A Da, procesele MA sunt întotdeauna invertibile
- ☐ B Da, deoarece  $1.5 > 0$
- ☒ C Nu, deoarece  $|\theta| = 1.5 > 1$
- ☐ D Nu, procesele MA nu sunt niciodată invertibile

### Răspuns: (C)

Invertibilitatea necesită  $|\theta| < 1$ . Aici  $|\theta| = 1.5 > 1$ , deci nu este invertibil.



### Definiție 9 (Proces ARMA(p,q))

Un proces autoregresiv de medie mobilă de ordin (p,q) este:

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

**Formă compactă folosind operatorii lag:**

$$\phi(L)(X_t - \mu) = \theta(L)\varepsilon_t$$

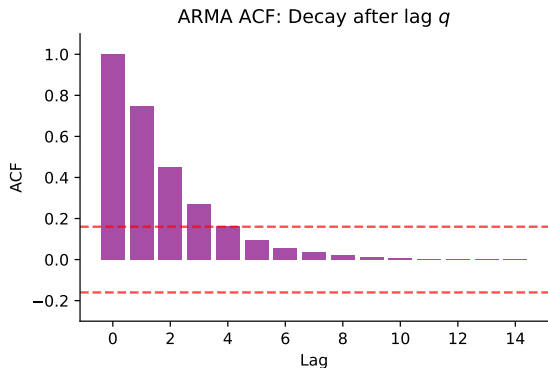
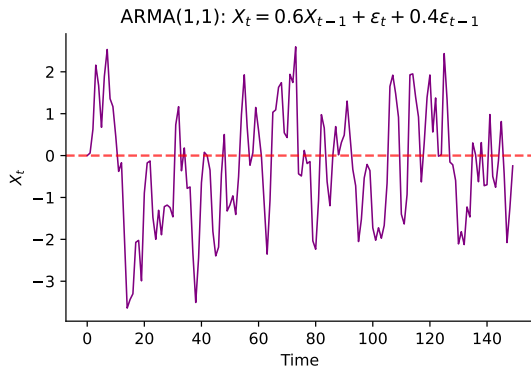
sau echivalent:

$$\phi(L)X_t = c + \theta(L)\varepsilon_t$$

unde  $\mu = \frac{c}{1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p}$

**Idee cheie:** Combină componentele AR și MA pentru modelare mai flexibilă

## ARMA: Ilustrație Vizuală

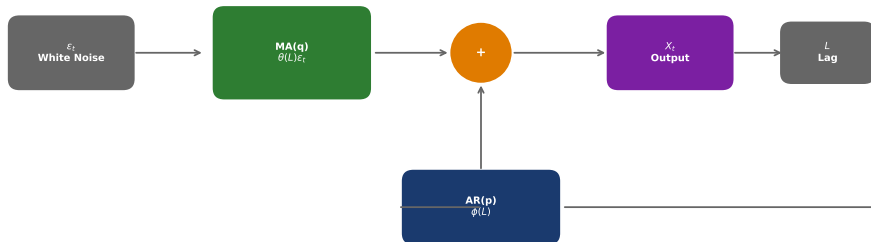


Proces ARMA(1,1). ACF arată descreștere după lag-ul inițial, combinând caracteristicile AR și MA.

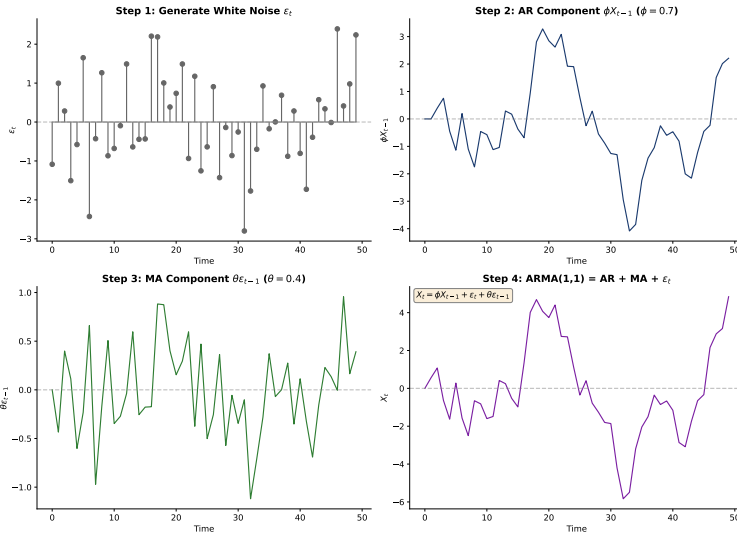
# Structura Modelului ARMA

## ARMA(p,q) Model Structure

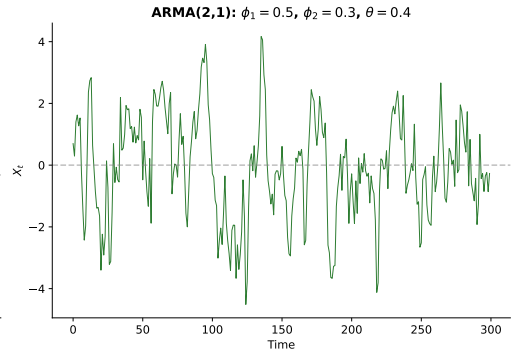
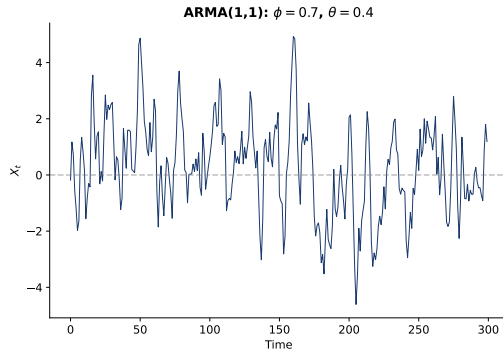
$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$



# Cum Funcționează Simularea ARMA



## Exemple ARMA



### Definiție 10 (Proces ARMA(1,1))

$$X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

**Proprietăți (presupunând staționaritate și invertibilitate):**

- Media:  $\mu = \frac{c}{1-\phi}$
- Varianța:  $\gamma(0) = \frac{(1+2\phi\theta+\theta^2)\sigma^2}{1-\phi^2}$

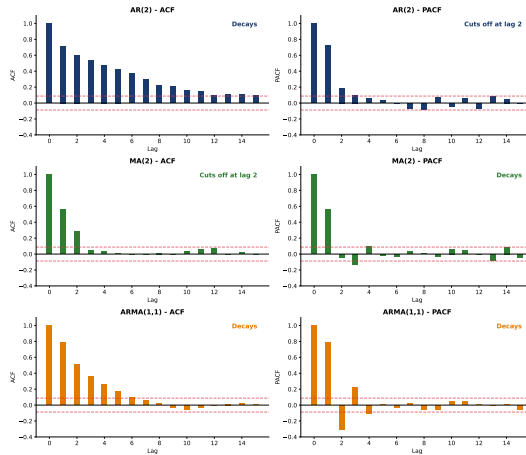
**ACF:**

$$\rho(1) = \frac{(1 + \phi\theta)(\phi + \theta)}{1 + 2\phi\theta + \theta^2}$$

$$\rho(h) = \phi \cdot \rho(h-1) \quad \text{pentru } h \geq 2$$

**Tipar:** ACF scade exponențial după lag 1 (ca AR), dar punctul de pornire depinde atât de  $\phi$  cât și de  $\theta$

# Tipare ACF/PACF: AR vs MA vs ARMA



## Tipare ACF și PACF ARMA

Model	ACF	PACF
AR( $p$ )	Scade (exp./amortizat)	Se întrerupe la lag $p$
MA( $q$ )	Se întrerupe la lag $q$	Scade (exp./amortizat)
ARMA( $p,q$ )	Scade după lag $q - p$	Scade după lag $p - q$

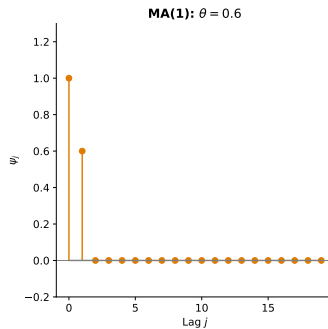
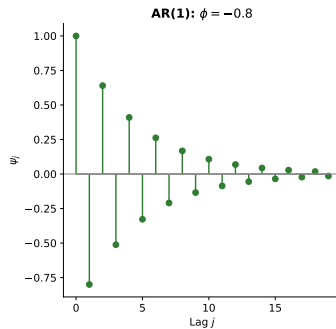
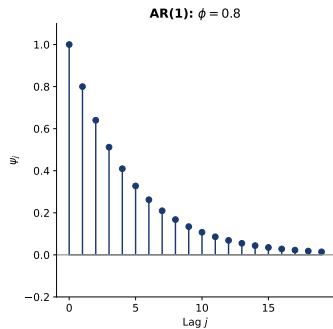
### Regula cheie de identificare:

- **PACF se întrerupe**  $\rightarrow$  proces AR (ordin = lag-ul de întrerupere)
- **ACF se întrerupe**  $\rightarrow$  proces MA (ordin = lag-ul de întrerupere)
- **Ambele scad**  $\rightarrow$  proces ARMA

**Atenție:** În practică, ACF/PACF din eșantion sunt zgomotoase; folosiți benzile de încredere



# Funcții de Răspuns la Impuls



**Interpretare:** Arată cum se propagă un șoc unitar prin sistem în timp

## Rezumat Staționaritate și Invertibilitate

Pentru ca ARMA(p,q) să fie bine comportat:

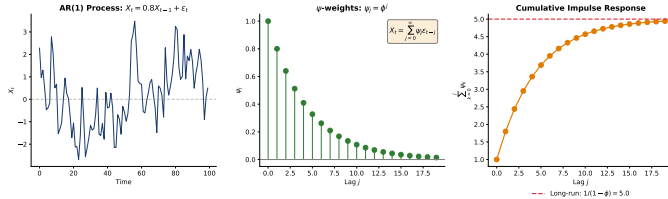
Condiție	Cerință
Staționaritate	Rădăcinile lui $\phi(z) = 0$ în afara cercului unitate
Invertibilitate	Rădăcinile lui $\theta(z) = 0$ în afara cercului unitate

Implicații:

- **Staționaritate:** Se poate scrie ca MA( $\infty$ ):  $X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$
- **Invertibilitate:** Se poate scrie ca AR( $\infty$ ):  $X_t = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j (X_{t-j} - \mu) + \varepsilon_t$

**Reprezentare cauzală:**  $X_t$  depinde doar de șocurile *trecute* (nu viitoare)

# Teorema de Descompunere a lui Wold



Orice proces staționar poate fi scris ca  $MA(\infty)$ :  $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$

### Întrebare

Forma compactă  $\phi(L)X_t = \theta(L)\varepsilon_t$  reprezintă ce model?

- ☐ A Model AR pur
- ☐ B Model MA pur
- ☐ C Model ARMA
- ☐ D Niciunul de mai sus

## Quiz: Reprezentarea ARMA

### Întrebare

Forma compactă  $\phi(L)X_t = \theta(L)\varepsilon_t$  reprezintă ce model?

- ☐ A Model AR pur
- ☐ B Model MA pur
- ☒ C Model ARMA
- ☐ D Niciunul de mai sus

Răspuns: (C) Model ARMA

$\phi(L)$  este polinomul AR,  $\theta(L)$  este polinomul MA  $\rightarrow$  ARMA(p,q)

### Întrebare

Ce este  $(1 - L)^2 X_t$ ?

- ☐ A  $X_t - X_{t-1}$
- ☐ B  $X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$
- ☐ C  $X_t + X_{t-1} + X_{t-2}$
- ☐ D  $X_t - X_{t-2}$

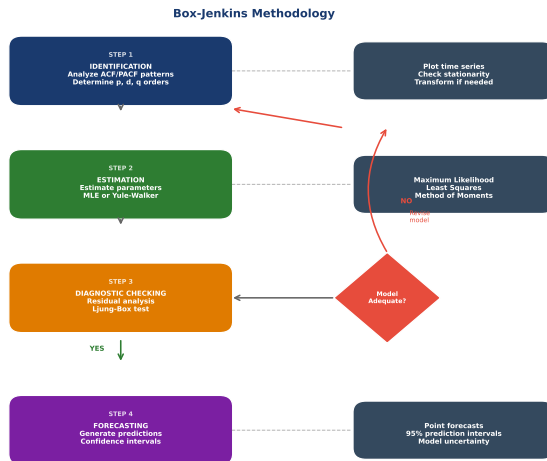
### Întrebare

Ce este  $(1 - L)^2 X_t$ ?

- ☐ A  $X_t - X_{t-1}$
- ☒ B  $X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$
- ☐ C  $X_t + X_{t-1} + X_{t-2}$
- ☐ D  $X_t - X_{t-2}$

Răspuns: (B)

$(1 - L)^2 = 1 - 2L + L^2$ , deci  $(1 - L)^2 X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$





# Tabel Rezumat pentru Identificarea Modelului

## Model Identification: ACF/PACF Patterns

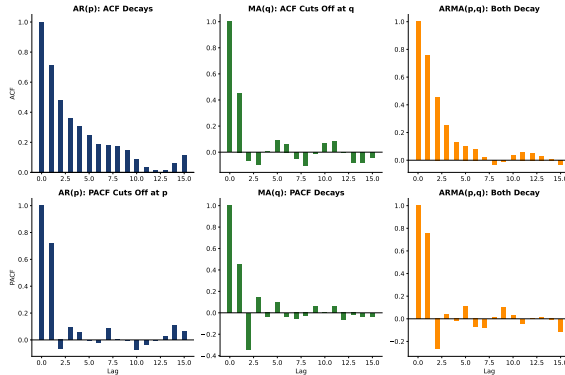
Model	ACF Pattern	PACF Pattern
<b>AR(p)</b>	Exponential decay or damped oscillation	Cuts off after lag p
<b>MA(q)</b>	Cuts off after lag q	Exponential decay or damped oscillation
<b>ARMA(p,q)</b>	Exponential decay after lag q-p	Exponential decay after lag p-q

**Sfat practic:** Începeți simplu ( $p, q$  mici), creșteți dacă diagnosticele eșuează

### Tipare teoretice pentru procese staționare:

Model	Tipar ACF	Tipar PACF
AR(1)	Descresștere exponențială	Vârf la lag 1, apoi 0
AR(2)	Exponențială/sinusoidă amortizată	Vârfuri la lag-uri 1-2, apoi 0
AR(p)	Scade gradual	Se întrerupe după lag $p$
MA(1)	Vârf la lag 1, apoi 0	Descresștere exponențială
MA(2)	Vârfuri la lag-uri 1-2, apoi 0	Exponențială/sinusoidă amortizată
MA(q)	Se întrerupe după lag $q$	Scade gradual
ARMA(p,q)	Scade	Scade

# Tipare ACF/PACF: Ghid Vizual



- **AR:** ACF scade, PACF se întrerupe – folosiți PACF pentru a identifica ordinul  $p$
- **MA:** ACF se întrerupe, PACF scade – folosiți ACF pentru a identifica ordinul  $q$
- **ARMA:** Ambele scad – necesită criterii informaționale pentru selecția modelului

**Scop:** Echilibrează calitatea potrivirii față de complexitatea modelului

**Criteriul Informațional Akaike (AIC):**

$$AIC = -2 \ln(\hat{L}) + 2k$$

**Criteriul Informațional Bayesian (BIC/SBC):**

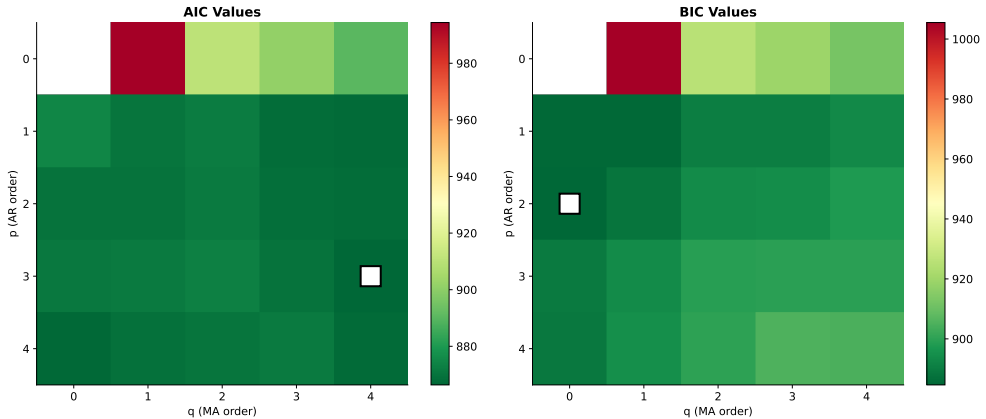
$$BIC = -2 \ln(\hat{L}) + k \ln(n)$$

unde  $\hat{L}$  = verosimilitate maximizată,  $k$  = număr de parametri,  $n$  = dimensiune eșantion

**Utilizare:**

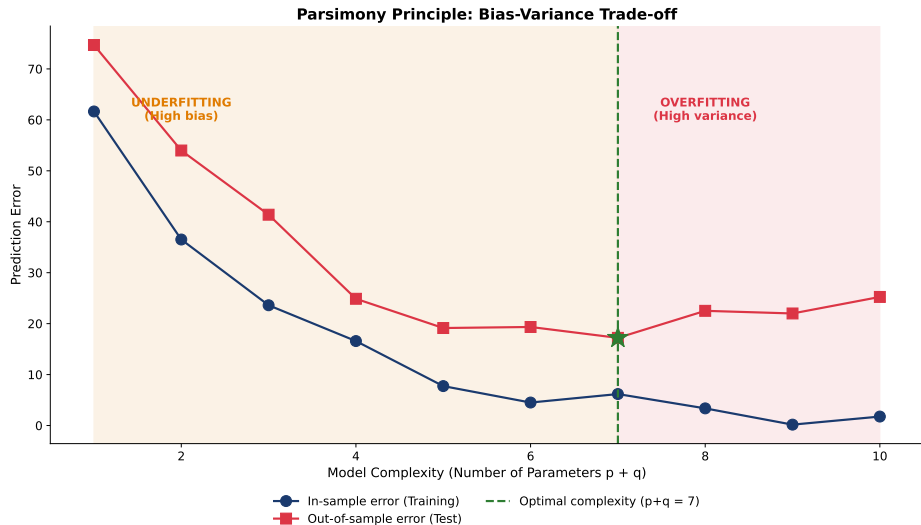
- Valori mai mici sunt mai bune
- BIC penalizează complexitatea mai puternic decât AIC
- AIC tinde să aleagă modele mai mari; BIC mai parcimonios
- Comparați modele potrivite pe *aceleași date*

## AIC vs BIC: Selecția Modelului



**Notă:** Pătratul alb marchează cel mai bun model; valorile mai mici (verde) sunt mai bune

# Principiul Parcimoniei: Compromisul Bias-Varianță



# Selecția Automată a Modelului

## Abordarea căutării pe grilă:

- 1 Potriviiți ARMA( $p, q$ ) pentru  $p = 0, 1, \dots, p_{max}$  și  $q = 0, 1, \dots, q_{max}$
- 2 Selectați modelul cu cel mai mic AIC sau BIC
- 3 Verificați cu teste de diagnostic

## În Python (statsmodels):

- `pm.auto_arima()` din pachetul `pmdarima`
- Testează automat staționaritatea, caută peste ordine
- Returnează cel mai bun model după AIC/BIC

## Atenție:

- Selecția automată este un punct de pornire, nu răspunsul final
- Verificați întotdeauna diagnosticele
- Considerați cunoștințele de domeniu

### Întrebare

Comparând ARMA(1,1) vs ARMA(2,1) folosind BIC, care este corect?

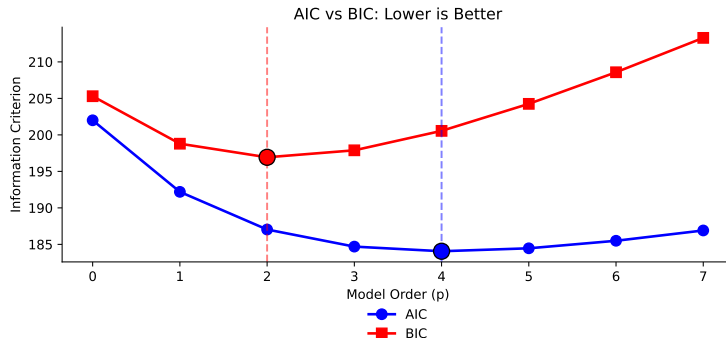
- ☐ A BIC mai mic înseamnă întotdeauna prognoze mai bune
- ☐ B BIC penalizează complexitatea mai puțin decât AIC
- ☐ C Modelul cu BIC mai mic este preferat
- ☐ D BIC poate compara doar modele cu același număr de parametri



## Quiz: Criterii Informaționale – Răspuns

Răspuns Corect: (C) Modelul cu BIC mai mic este preferat

BIC mai mic indică un compromis mai bun între potrivire și complexitate. BIC penalizează complexitatea *mai mult* decât AIC.



## Trei abordări principale:

### 1. Metoda Momentelor / Yule-Walker (doar AR)

- Potrivește autocorelațiile din eșantion la valorile teoretice
- Simplă, formă închisă pentru modele AR
- Nu este eficientă pentru componentele MA

### 2. Estimarea prin Maximum de Verosimilitate (MLE)

- Cea mai comună abordare
- Necesită ipoteză distribuțională (de obicei Gaussiană)
- Eficientă și consistentă

### 3. Cele Mai Mici Pătrate Condiționate

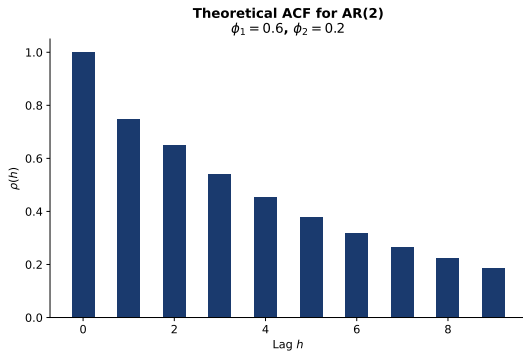
- Minimizaază suma pătratelor reziduurilor
- Condiționare pe observațiile inițiale
- Computațional mai simplă decât MLE exact

## ARMA Parameter Estimation Methods

Yule-Walker	Maximum Likelihood	Conditional LS
<p><b>Pros:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>+ Simple computation</li><li>+ Closed-form solution</li></ul> <p><b>Cons:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>- AR only</li><li>- Less efficient</li></ul>	<p><b>Pros:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>+ Most efficient</li><li>+ Works for ARMA</li></ul> <p><b>Cons:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Iterative</li><li>- Local optima risk</li></ul>	<p><b>Pros:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>+ Simple to implement</li><li>+ Fast computation</li></ul> <p><b>Cons:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Biased for small <math>n</math></li><li>- Ignores initial values</li></ul>

**Recommendation: Use MLE for final estimation,  
Yule-Walker for initial values**

# Ecuțiile Yule-Walker pentru AR(p)



## Yule-Walker Equations

$$\rho(1) = \phi_1 + \phi_2 \rho(1)$$

$$\rho(2) = \phi_1 \rho(1) + \phi_2$$

$$\text{Matrix form: } R \cdot \phi = \rho$$

$R$  = autocorrelation matrix

$$\text{Solution: } \hat{\phi} = R^{-1}\rho$$

## Ecuațiile Yule-Walker: Forma Matriceală

Pentru  $AR(p)$ :  $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$

**Ecuațiile Yule-Walker:**

$$\rho(k) = \phi_1 \rho(k-1) + \phi_2 \rho(k-2) + \cdots + \phi_p \rho(k-p)$$

pentru  $k = 1, 2, \dots, p$

**Forma matriceală:**

$$\begin{pmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \cdots & \rho(p-1) \\ \rho(1) & \rho(0) & \cdots & \rho(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(p-1) & \rho(p-2) & \cdots & \rho(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(p) \end{pmatrix}$$

**Estimare:** Înlocuiți  $\rho(k)$  cu autocorelațiile din eșantion  $\hat{\rho}(k)$

## Estimarea prin Maximum de Verosimilitate

Presupunând erori Gaussiene:  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

Log-verosimilitatea pentru ARMA(p,q):

$$\ell(\phi, \theta, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2$$

unde  $\varepsilon_t$  sunt inovațiile calculate recursiv.

**Procedura de estimare:**

- 1 Inițializare: folosiți metoda momentelor sau OLS pentru valori de pornire
- 2 Optimizare: metode numerice (de ex., BFGS, Newton-Raphson)
- 3 Iterare până la convergență

**În practică:** Folosiți `statsmodels.tsa.arima.model.ARIMA`

**Distribuția asimptotică a MLE:**

$$\hat{\theta} \xrightarrow{d} N\left(\theta_0, \frac{1}{n}I(\theta_0)^{-1}\right)$$

unde  $I(\theta)$  este matricea informației Fisher.

**Erori standard:** Rădăcina pătrată a diagonalei lui  $\frac{1}{n}\hat{I}^{-1}$

**Testarea ipotezelor:**

- $H_0 : \phi_j = 0$  (sau  $\theta_j = 0$ )
- Statistica de test:  $z = \frac{\hat{\phi}_j}{SE(\hat{\phi}_j)} \sim N(0, 1)$  asimptotic
- Respingeți dacă  $|z| > 1.96$  la nivel de 5%

**Interval de încredere:**  $\hat{\phi}_j \pm 1.96 \cdot SE(\hat{\phi}_j)$

Dacă modelul este corect specificat, reziduurile ar trebui să fie zgomot alb:

### 1. Reprezentați grafic reziduurile în timp

- Ar trebui să fluctueze în jurul lui zero
- Fără tipare sau trenduri evidente
- Varianță constantă (fără heteroscedasticitate)

### 2. Verificați ACF reziduurilor

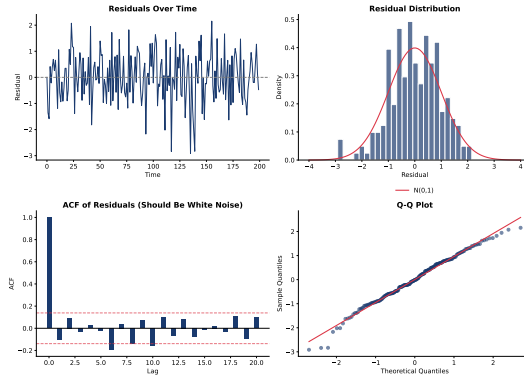
- Toate corelațiile ar trebui să fie în benzile de încredere
- Fără vârfuri semnificative → zgomot alb

### 3. Verificați histograma / graficul Q-Q

- Ar trebui să fie aproximativ normale (dacă presupunem Gaussian)
- Cozi groase sugerează erori non-normale



# Diagnosticarea Reziduurilor: Exemplu



- **Graficul reziduurilor:** Ar trebui să arate dispersie aleatorie în jurul lui zero cu varianță constantă
- **ACF reziduurilor:** Fără vârfuri semnificative indică zgomot alb (potrivire bună)
- **Graficul Q-Q:** Punctele pe linia diagonală indică reziduuri distribuite normal

## Definiție 11 (Testul Ljung-Box)

Testează dacă reziduurile sunt distribuite independent (fără autocorelație).

**Statistica de test:**

$$Q(m) = n(n+2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k}$$

**Ipoteze:**

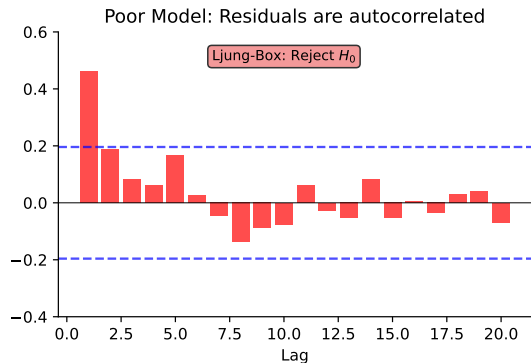
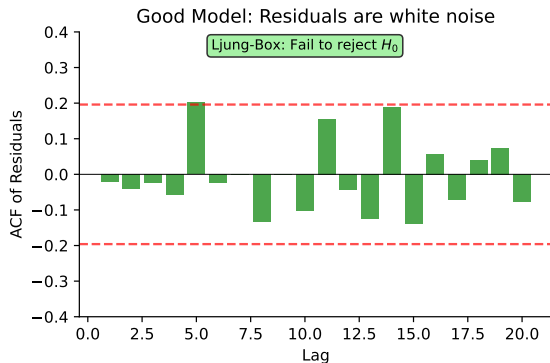
- $H_0$ : Reziduurile sunt zgomot alb (fără autocorelație până la lag  $m$ )
- $H_1$ : Reziduurile sunt autocorelate

**Distribuție:** Sub  $H_0$ ,  $Q(m) \sim \chi^2(m-p-q)$  aproximativ

**Decizie:**

- $p\text{-value} > 0.05 \rightarrow$  nu respingem  $H_0 \rightarrow$  reziduurile arată ca zgomot alb (bine!)
- $p\text{-value} < 0.05 \rightarrow$  autocorelație semnificativă rămâne  $\rightarrow$  model inadecvat

# Testul Ljung-Box: Ilustrație Vizuală



Stânga: Model bun – reziduurile sunt zgomot alb (fără ACF semnificativ). Dreapta: Model slab – reziduurile arată autocorelație.

Un model ARMA bun ar trebui să satisfacă:

- ➊ **Staționaritate:** Rădăcinile AR în afara cercului unitate  
✓ Verificați cu `arroots`
- ➋ **Invertibilitate:** Rădăcinile MA în afara cercului unitate  
✓ Verificați cu `maroots`
- ➌ **Reziduuri zgomot alb:** Fără ACF semnificativ  
✓ Grafic ACF, testul Ljung-Box
- ➍ **Reziduuri normale:** (dacă presupunem)  
✓ Grafic Q-Q, testul Jarque-Bera
- ➎ **Fără heteroscedasticitate:** Varianță constantă  
✓ Reprezentați reziduurile, testul ARCH
- ➏ **Parcimonios:** Cel mai mic AIC/BIC dintre modelele adecvate

Dacă diagnosticele eșuează: Reveniți la identificare, încercați ordine diferite

### Întrebare

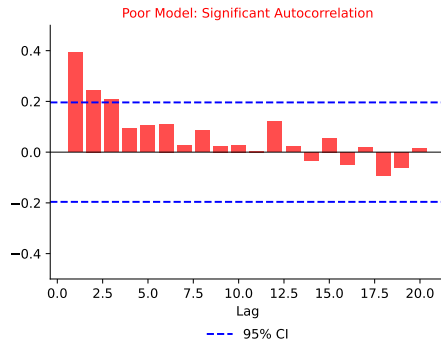
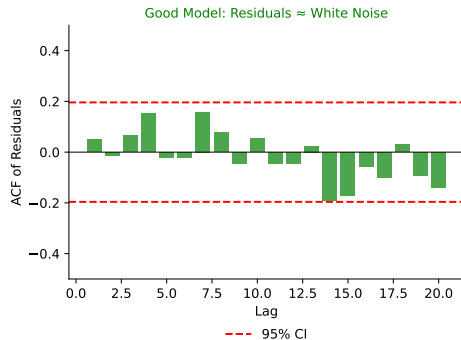
După potrivirea unui model ARMA, rulați testul Ljung-Box pe reziduuri și obțineți  $p\text{-value} = 0.03$ . Ce înseamnă asta?

- ☐ A Modelul este adecvat, reziduurile sunt zgomot alb
- ☐ B Modelul este inadecvat, reziduurile au autocorelație
- ☐ C Trebuie să creșteți dimensiunea eșantionului
- ☐ D Testul este neconcludent

## Quiz: Testul Ljung-Box – Răspuns

Răspuns Corect: (B) Modelul este inadecvat

p-value < 0.05 respinge  $H_0$  (zgomot alb), indicând autocorelație reziduală rămasă.



**Proгноza optimă:** Speranța condiționată minimizează MSE

$$\hat{X}_{n+h|n} = \mathbb{E}[X_{n+h}|X_n, X_{n-1}, \dots]$$

**Pentru AR(1):**  $X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$

$$\hat{X}_{n+1|n} = c + \phi X_n$$

$$\hat{X}_{n+2|n} = c + \phi \hat{X}_{n+1|n} = c(1 + \phi) + \phi^2 X_n$$

$$\hat{X}_{n+h|n} = \mu + \phi^h (X_n - \mu)$$

**Proprietate cheie:** Proгноzele converg la media  $\mu$  când  $h \rightarrow \infty$

**Pentru MA(1):**  $X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$

$$\hat{X}_{n+1|n} = \mu + \theta \varepsilon_n$$

$$\hat{X}_{n+h|n} = \mu \quad \text{pentru } h > 1$$

# Incertitudinea Prognozei

**Eroarea de prognoză:**

$$e_{n+h|n} = X_{n+h} - \hat{X}_{n+h|n}$$

**Eroarea medie pătratică de prognoză (MSFE):**

$$\text{MSFE}(h) = \mathbb{E}[e_{n+h|n}^2] = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2$$

unde  $\psi_j$  sunt coeficienții MA( $\infty$ ).

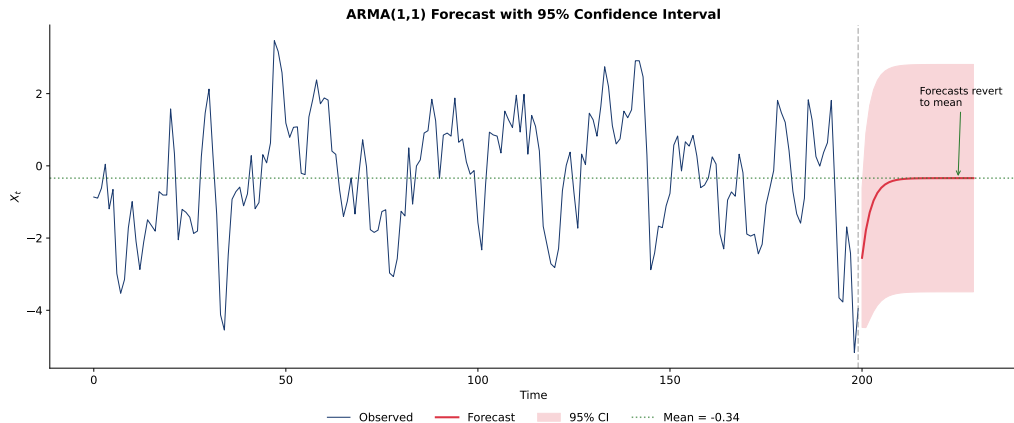
**Pentru AR(1):**  $\psi_j = \phi^j$

$$\text{MSFE}(h) = \sigma^2 \frac{1 - \phi^{2h}}{1 - \phi^2} \rightarrow \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2} = \text{Var}(X_t)$$

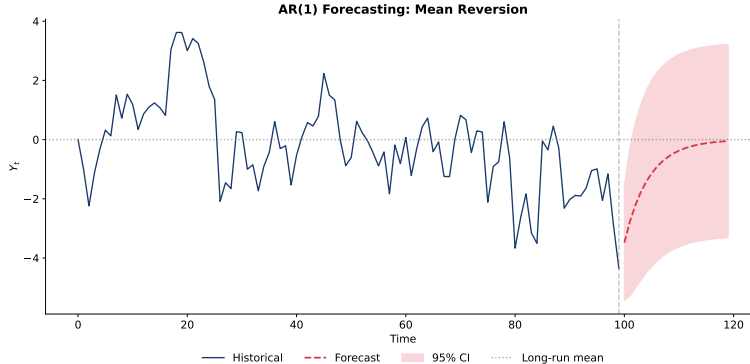
**Observație cheie:** Incertitudinea prognozei crește cu orizontul, ajungând eventual la varianța necondiționată



# Proгноза ARMA cu Intervale de Încredere

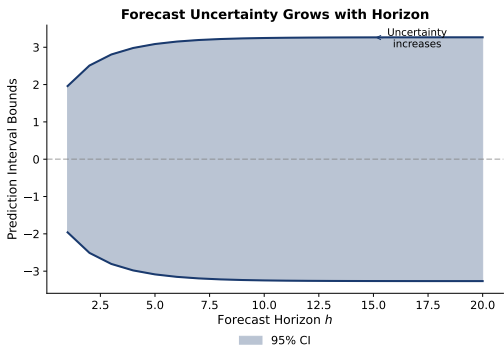
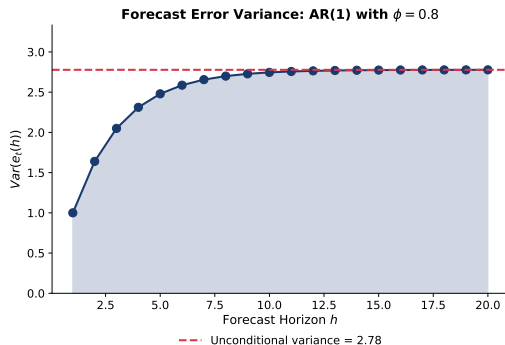


## Proгноза AR(1): Revenirea la Medie



- Prognozele converg la media necondiționată  $\mu$  pe măsură ce orizontul crește
- Rata de convergență depinde de  $|\phi|$ : valori mai mari înseamnă revenire mai lentă
- Intervalele de încredere se largesc cu orizontul, ajungând eventual la varianța necondiționată

# Varianța Erorii de Prognoză în Funcție de Orizont



# Intervale de Încredere pentru Prognoze

**Presupunând erori Gaussiene:**

$$X_{n+h}|X_n, \dots \sim N\left(\hat{X}_{n+h|n}, \text{MSFE}(h)\right)$$

**Interval de încredere  $(1 - \alpha)$ :**

$$\hat{X}_{n+h|n} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\text{MSFE}(h)}$$

unde  $z_{\alpha/2} = 1.96$  pentru IC 95%.

**Proprietăți:**

- Intervalele se largesc pe măsură ce orizontul crește
- În cele din urmă converg la intervalul necondiționat:  $\mu \pm z_{\alpha/2}\sigma_X$
- Lățimea depinde de parametrii modelului (coeficienți AR, etc.)

**În Python:** `model.get_forecast(h).conf_int()`

## Testare în afara eșantionului:

- 1 Împărțiți datele: set de antrenare (potriviți modelul) și set de test (evaluați)
- 2 Generați prognoze pentru perioada de test
- 3 Comparați prognozele cu valorile reale

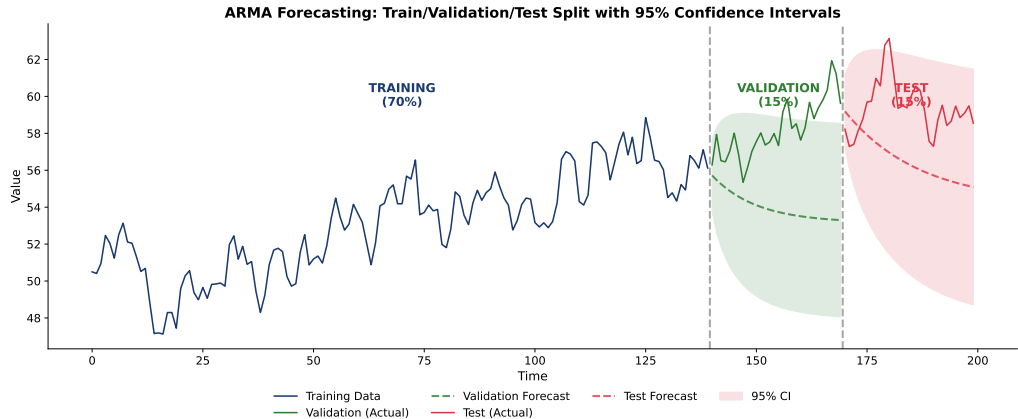
## Metrice (din Capitolul 1):

- $MAE = \frac{1}{n} \sum |e_t|$
- $RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum e_t^2}$
- $MAPE = \frac{100}{n} \sum \left| \frac{e_t}{\hat{X}_t} \right|$

## Fereastră mobilă/în expansiune:

- Re-estimați modelul pe măsură ce sosesc date noi
- Evaluare mai realistă a performanței prognozei

# Exemplu de Prognoză Train/Validare/Test



### Întrebare

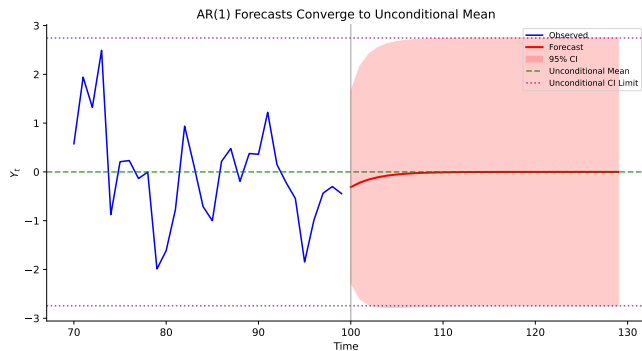
Pentru un model AR(1) staționar, ce se întâmplă cu prognozele când orizontul  $h \rightarrow \infty$ ?

- ☐ A Prognozele cresc nelimitat
- ☐ B Prognozele oscilează la nesfârșit
- ☐ C Prognozele converg la media necondiționată  $\mu$
- ☐ D Prognozele devin mai precise

## Quiz: Proprietățile Prognozei – Răspuns

Răspuns Corect: (C) Prognozele converg la  $\mu$

$$\hat{X}_{n+h|n} = \mu + \phi^h(X_n - \mu) \rightarrow \mu \text{ când } h \rightarrow \infty \text{ (deoarece } |\phi| < 1)$$





# Implementare Python: Potrivirea ARMA

## Folosind statsmodels:

```
from statsmodels.tsa.arima.model import ARIMA

# Potrivire ARMA(2,1) -- notă: ARIMA(p,d,q) cu d=0
model = ARIMA(data, order=(2, 0, 1))
results = model.fit()

# Rezumat
print(results.summary())

# Prognoza
forecast = results.get_forecast(steps=10)
print(forecast.predicted_mean)
print(forecast.conf_int())
```

**Notă:** ARIMA cu  $d = 0$  este echivalent cu ARMA

### Selecție automată ARIMA:

```
import pmdarima as pm

# Auto ARIMA cu criteriul AIC
model = pm.auto_arima(data,
                      start_p=0, max_p=5,
                      start_q=0, max_q=5,
                      d=0, # Fără diferențiere pentru date staționare
                      seasonal=False,
                      information_criterion='aic',
                      trace=True)

print(model.summary())
```

**Rezultat:** Cel mai bun ordin al modelului și parametrii potriviți

## ❶ Pregătirea datelor

- Verificați valori lipsă, valori aberante
- Transformați dacă este necesar (log, diferențiere)

## ❷ Verificarea staționarității

- Inspecție vizuală: grafic temporal, ACF
- Teste formale: ADF, KPSS
- Diferențiați dacă este nestaționar

## ❸ Identificarea modelului

- Tipare ACF/PACF
- Căutare pe grilă cu criterii informaționale

## ❹ Estimare și diagnosticare

- Potriviti modelul, verificați semnificația
- Analiză reziduală, testul Ljung-Box

## ❺ Prognoza

- Prognoze punctuale cu intervale de încredere
- Validare în afara eșantionului

- ❶ **Modele AR( $p$ ):** Valoarea curentă depinde de  $p$  valori trecute
  - Staționaritate: rădăcinile lui  $\phi(z)$  în afara cercului unitate
  - PACF se întrerupe la lag  $p$
- ❷ **Modele MA( $q$ ):** Valoarea curentă depinde de  $q$  șocuri trecute
  - Întotdeauna staționar; invertibilitate: rădăcinile lui  $\theta(z)$  în afara cercului unitate
  - ACF se întrerupe la lag  $q$
- ❸ **ARMA( $p,q$ ):** Combină AR și MA pentru modelare flexibilă
  - Atât ACF cât și PACF scad
- ❹ **Box-Jenkins:** Identificare  $\rightarrow$  Estimare  $\rightarrow$  Diagnosticare  $\rightarrow$  Prognoză
- ❺ **Diagnosticare:** Reziduurile trebuie să fie zgomot alb
- ❻ **Prognoze:** Convergență la medie; incertitudinea crește cu orizontul

## Capitolul 3: ARIMA și Modele Sezoniere

- ARIMA(p,d,q): Modele integrate pentru date nestaționare
- ARIMA Sezonier: SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)<sub>s</sub>
- Diferențiere sezonieră
- Aplicații practice cu tipare sezoniere

### Lectură:

- Hyndman & Athanasopoulos, *Forecasting: Principles and Practice*, Cap. 9
- Box, Jenkins, Reinsel & Ljung, *Time Series Analysis*, Cap. 3-4