



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 1: Introducere în Serii de Timp

Fundamente și Concepte



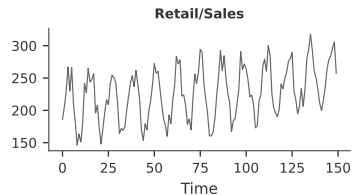
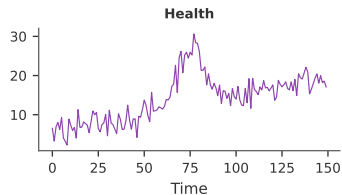
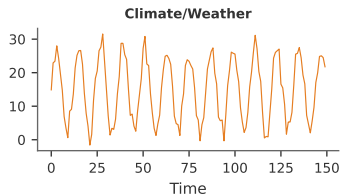
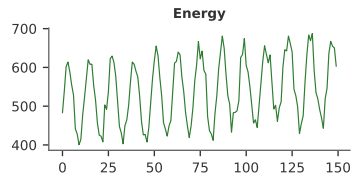
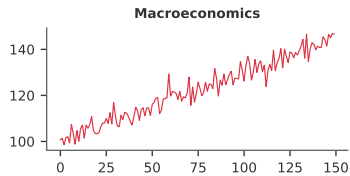
La sfârșitul acestui capitol, veți fi capabili să:

1. **Definiți** seriile de timp și să le distingeți de datele transversale și de panel
2. **Descompuneți** seriile de timp în componente de trend, sezonabilitate și reziduuri
3. **Aplicați** netezirea exponențială (SES, Holt, Holt-Winters, ETS)
4. **Evaluați** prognozele folosind MAE, RMSE, MAPE; separări train/validare/test
5. **Modelați** sezonabilitatea folosind variabile dummy sau termeni Fourier
6. **Gestionați** trendul și sezonabilitatea prin eliminarea trendului și ajustare sezonieră
7. **Înțelegeți** procesele stochastice și staționaritatea
8. **Calculați** ACF/PACF și efectuați teste de staționaritate (ADF, KPSS)

Structura Capitolului

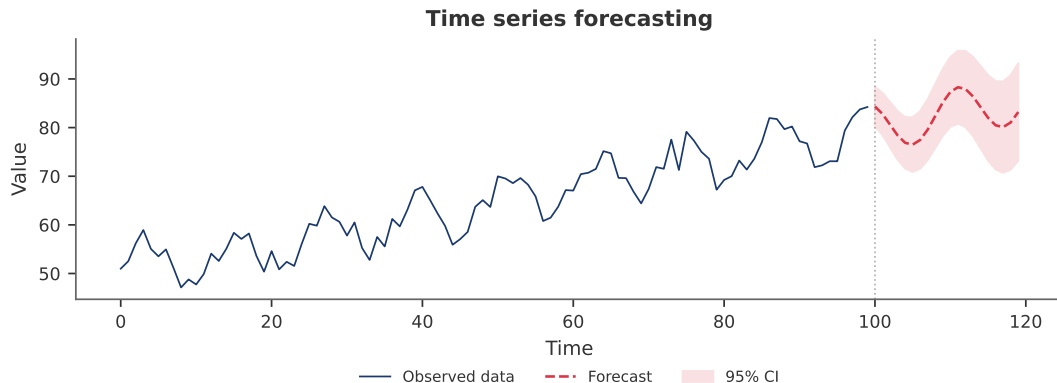
- 1 Ce Este o Serie de Timp?
- 2 Descompunerea Seriilor de Timp
- 3 Metode de Netezire Exponențială
- 4 Evaluarea Prognozei
- 5 Modelarea Sezonalității
- 6 Gestionarea Trendului și Sezonalității
- 7 Procese Stochastice
- 8 Staționaritatea
- 9 Zgomot Alb și Mers Aleatoriu
- 10 Funcții de Autocorelație
- 11 Operatorul Lag și Diferențierea
- 12 Testarea Staționarității
- 13 Aplicație pe Date Financiare
- 14 Rezumat
- 15 Quiz
- 16 Studiu de Caz: PIB România
- 17 Referințe

Seriile de Timp Sunt Pretutindeni



- **Finanțe:** Prețuri de acțiuni, cursuri de schimb, volume de tranzacționare
- **Economie:** PIB, șomaj, rate ale inflației
- **Afaceri:** Vânzări, trafic web, cererea clienților
- **Știință:** Temperatură, niveluri de poluare, indicatori vitali ai pacienților

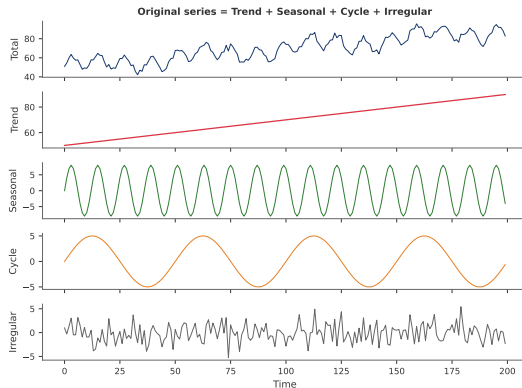
De Ce Studiem Seriile de Timp?



Obiectivul Principal: Prognoza

Folosiți tiparele istorice pentru a prezice valorile viitoare — esențial pentru planificarea afacerilor, gestionarea riscurilor și deciziile de politică.

Înțelegerea Structurii Seriilor de Timp



Descompunere

Orice serie de timp poate fi descompusă în componente interpretabile: trend, sezonalitate și zgomot.

Definiția unei Serii de Timp

Definiție 1 (Serie de Timp)

O **serie de timp** este o secvență de observații $\{X_t\}$ indexate după timp:

$$\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$$

unde \mathcal{T} este un set de indici reprezentând puncte temporale.

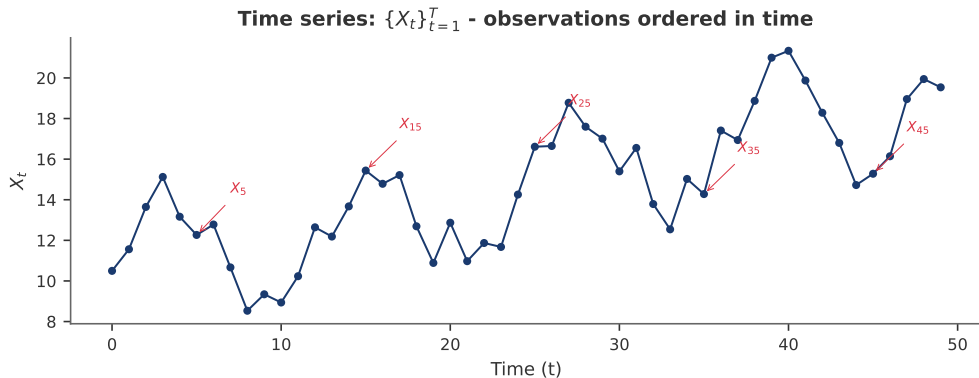
Caracteristici cheie:

- **Ordonate:** Observațiile au o ordine temporală naturală
- **Dependente:** Observațiile consecutive sunt de obicei corelate
- **Discrete** sau **Continue:** Indexul temporal poate fi discret ($t = 1, 2, 3, \dots$) sau continuu

Notăție:

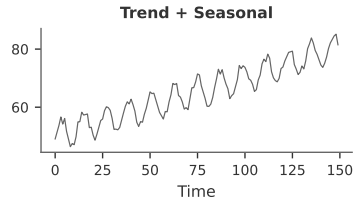
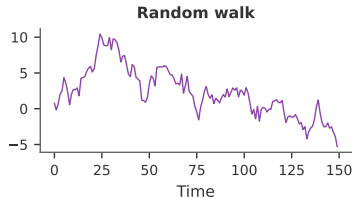
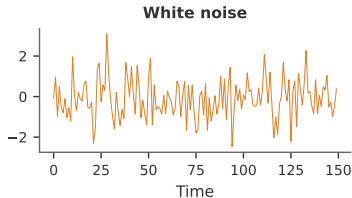
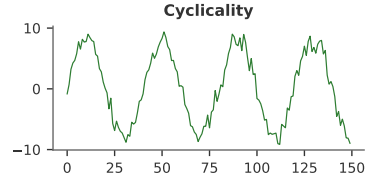
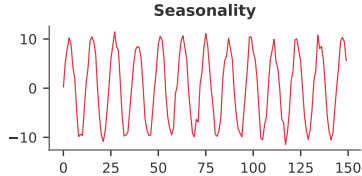
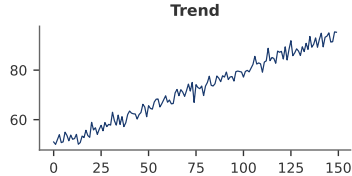
- X_t = observația la momentul t
- $\{X_t\}_{t=1}^T$ = serie de timp finită cu T observații

Serie de Timp: Ilustrație Vizuală



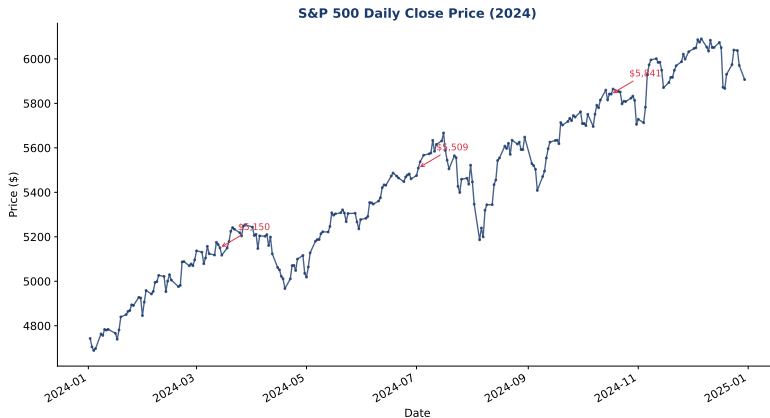
Fiecare punct X_t reprezintă o observație la momentul t . Secvența este ordonată și observațiile consecutive sunt de obicei corelate.

Tipare Comune în Seriile de Timp



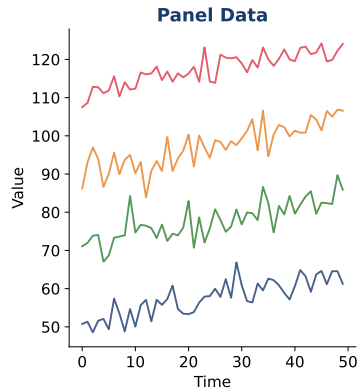
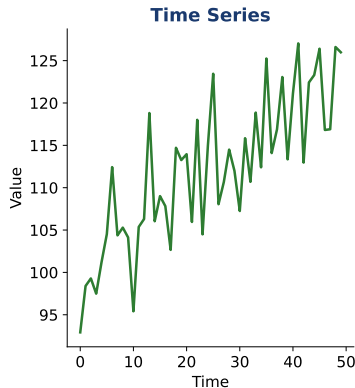
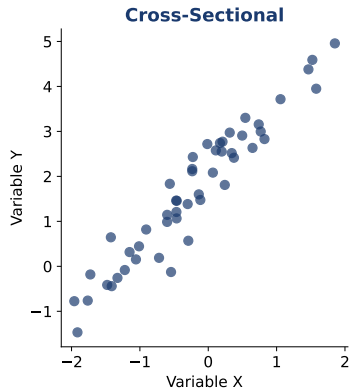
- **Trend:** Creștere sau scădere pe termen lung a datelor
- **Sezonalitate:** Tipare periodice regulate (de ex., lunar, trimestrial)
- **Aleatoriu:** Niciun tipar sistematic – fluctuații imprevizibile

Serie de Timp: Definiție Vizuală



Fiecare punct X_t reprezintă o măsurătoare la momentul discret t . Date: S&P 500 (2024).

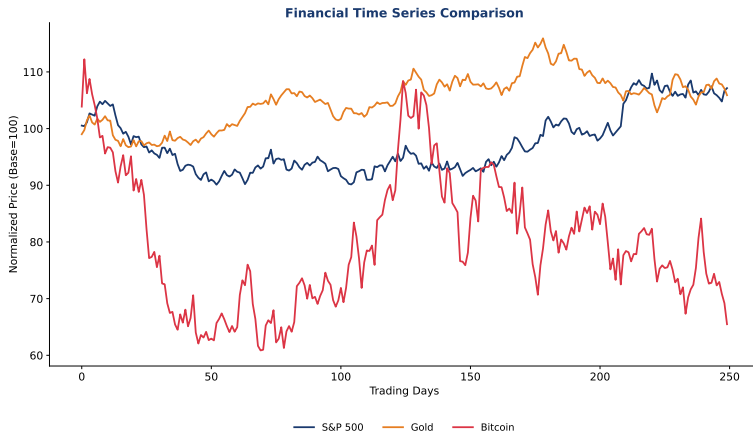
Tipuri de Date: Comparație



— Cross-sectional — Time Series — Panel

Tip de Date	Unități (N)	Temp (T)	Exemplu
Transversale	Multe	1	Sondaj pe 1000 gospodării
Serie de timp	1	Multe	Preturi zilnice S&P 500

Exemple de Date de Tip Serie de Timp



Date financiare reale de la Yahoo Finance (2019–2025). Normalizate la baza 100.

De Ce Descompunem o Serie de Timp?

Descompunerea separă o serie de timp în componente interpretabile:

Obiective:

- Înțelegerea tiparelor subiacente
- Eliminarea sezonality pentru modelare
- Identificarea direcției trendului
- Izolarea fluctuațiilor neregulate
- Îmbunătățirea acurateței prognozei

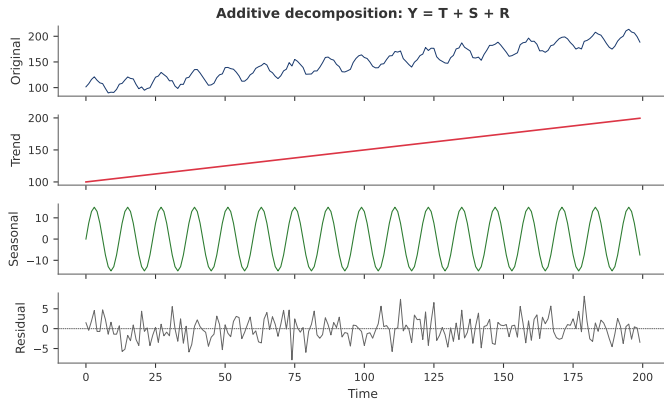
Componente:

- $T_t = \text{Trend}$: Mișcare pe termen lung
- $S_t = \text{Sezonality}$: Tipar periodic regulat
- $C_t = \text{Ciclic}$: Fluctuații ale ciclului de afaceri
- $\varepsilon_t = \text{Rezidual}$: Zgomot aleatoriu

Modele Clasice de Descompunere

- **Aditiv**: $X_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$
- **Multiplicativ**: $X_t = T_t \times S_t \times \varepsilon_t$

Descompunerea Seriilor de Timp: Exemplu Vizual



- **Original:** Seria de timp observată cu toate componentele
- **Trend:** Mișcarea subiacentă pe termen lung extrasă prin netezire
- **Sezonalitate:** Tiparul periodic regulat care se repetă la fiecare ciclu
- **Rezidual:** Zgomotul aleatoriu după eliminarea trendului și sezonality

Componenta ciclică C_t : Fluctuații pe termen mediu (2–10 ani)

Caracteristici:

- Fluctuații ale ciclului de afaceri
- Nicio perioadă fixă (spre deosebire de sezonabilitate)
- Durata variază: 2–10 ani
- Amplitudinea variază în timp

Exemple:

- Expansiuni/recesiuni economice
- Cicluri de credit
- Cicluri imobiliare
- Cicluri ale prețurilor materiilor prime

Notă Practică

Adeesea combinată cu trendul ca componentă **trend-ciclu** deoarece:

- Dificil de separat de trend cu date scurte
- Multe metode de descompunere estimează $T_t + C_t$ împreună

$$X_t = T_t + S_t + \varepsilon_t \quad (1)$$

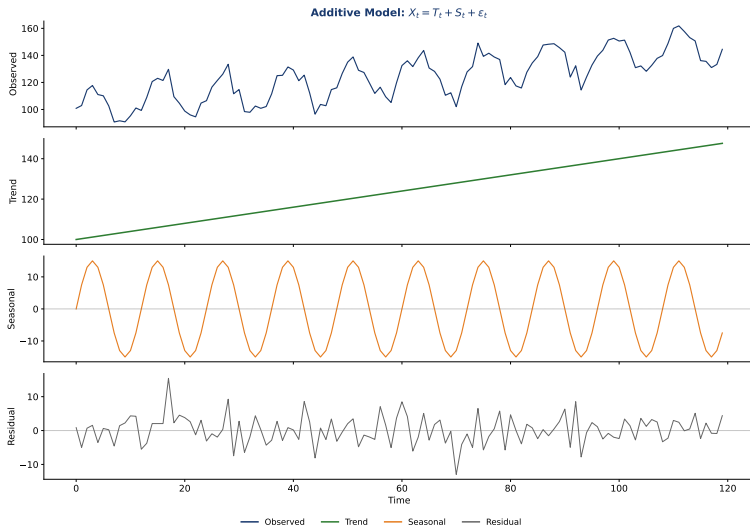
Când se utilizează:

- Fluctuațiile sezoniere sunt **constante** în timp
- Varianța seriei este **stabilă**

Proprietăți:

- $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$ (reziduuri cu medie zero)
- $\sum_{j=1}^s S_j = 0$ (sezonalitatea însumează la zero)
- Unitățile lui S_t sunt aceleași cu ale lui X_t

Descompunere Aditivă: Vizualizare



Modelul de Descompunere Multiplicativă

$$X_t = T_t \times S_t \times \varepsilon_t \quad (2)$$

Când se utilizează:

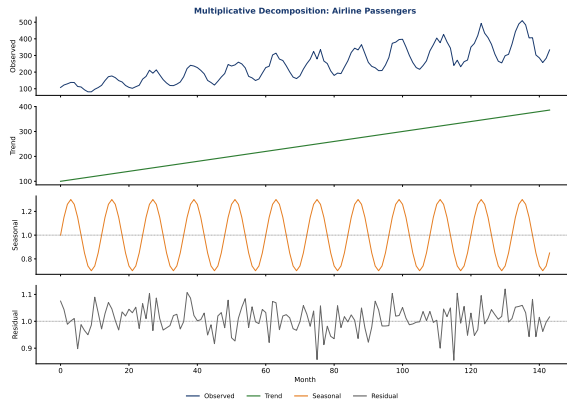
- Fluctuațiile sezoniere **cresc** odată cu nivelul seriei
- Varianța **crește** în timp

Proprietăți:

- $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 1$ (reziduuri centrate la 1)
- $\frac{1}{s} \sum S_j = 1$ (media sezonality este 1)
- S_t este un raport (adimensional)

Sfat: Transformarea logaritmică convertește la modelul aditiv.

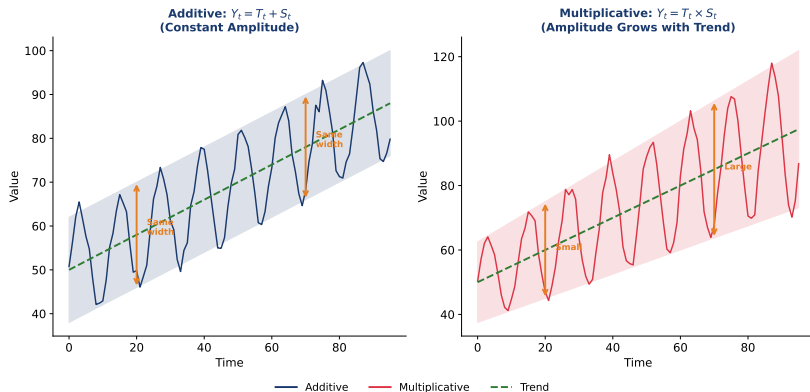
Descompunere Multiplicativă: Date Reale



Exemplu

Setul clasic Box-Jenkins pentru pasageri aerieni (1949–1960). Amplitudinea sezonieră crește cu nivelul.

Aditivă vs Multiplicativă: Comparație



Diferența cheie: În modelul multiplicativ, componenta sezonă este un *raport* (centrat la 1), în timp ce în modelul aditiv este în *unități absolute* (centrat la 0).

Definiție 2 (Media Mobilă Centrată)

Media mobilă centrată de ordin $2q + 1$ este:

$$\hat{T}_t = \frac{1}{2q + 1} \sum_{j=-q}^q X_{t+j}$$

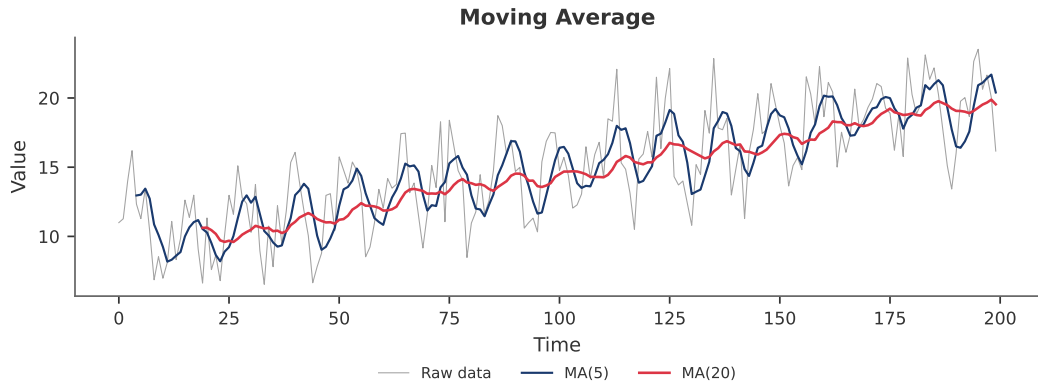
Pentru date sezoniere:

- Dacă perioada s este **impară**: medie simplă pe s observații
- Dacă perioada s este **pară** (de ex., 12): se folosește MA $2 \times s$ cu ponderi înjumătățite la capete

Proprietăți:

- Netezește fluctuațiile sezoniere și aleatorii
- Fereastră mai mare \Rightarrow trend mai neted
- Compromis: pierdere de date la capete

Media Mobilă Centrată: Ilustrație Vizuală



Media mobilă netezește fluctuațiile pe termen scurt, dezvăluind trendul subiacent.

Pași pentru Descompunerea Multiplicativă:

❶ Estimarea Trendului: $\hat{T}_t = MA_s(X_t)$

❷ Eliminarea trendului: $D_t = X_t / \hat{T}_t$

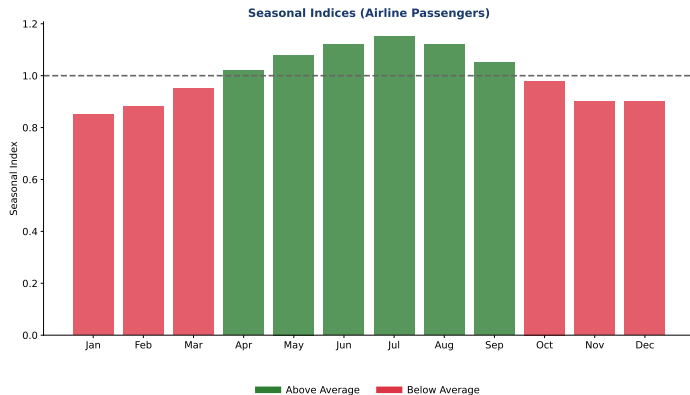
❸ Estimarea Sezonalității: Media D_t pentru fiecare sezon j

$$\hat{S}_j = \text{media}(D_t \text{ pentru toate } t \text{ din sezonul } j)$$

❹ Normalizare: Scalare astfel încât $\frac{1}{s} \sum_{j=1}^s \hat{S}_j = 1$

❺ Calculul Reziduurilor: $\hat{\varepsilon}_t = X_t / (\hat{T}_t \times \hat{S}_t)$

Indici Sezonieri: Interpretare



Interpretare: $S_t > 1$ înseamnă activitate peste medie; $S_t < 1$ înseamnă sub medie. Datele aeriene arată vârf de călătorii în iulie–august.

Definiție 3 (STL - Descompunere Sezonieră-Trend folosind LOESS)

STL folosește regresia ponderată local (LOESS) pentru a estima componentele:

$$X_t = T_t + S_t + R_t$$

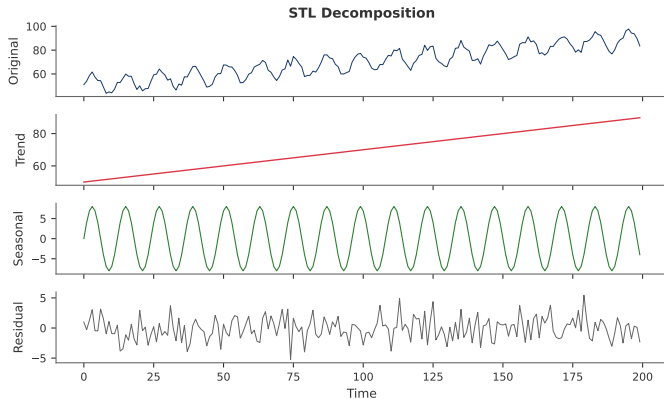
Avantaje față de descompunerea clasică:

- Gestionează **orice perioadă sezonieră** (nu doar 4 sau 12)
- Componenta sezonieră poate **să se schimbe în timp**
- **Robust** la valori aberante (cu opțiunea `robust=True`)
- Oferă estimări **netede** ale trendului

Parametri cheie:

- `period`: Perioada sezonieră (de ex., 12 pentru lunar)
- `seasonal`: Fereastră pentru netezirea sezonieră (întreg impar)
- `robust`: Folosește ajustare robustă pentru a reduce ponderea valorilor aberante

Descompunerea STL: Ilustrație Vizuală



Observație Cheie

STL separă seria în trend, sezonabilitate și rest folosind LOESS.

Netezirea Exponențială: Prezentare Generală

Metodele de **netezire exponențială** produc prognoze bazate pe medii ponderate ale observațiilor trecute, cu ponderi care scad exponențial.

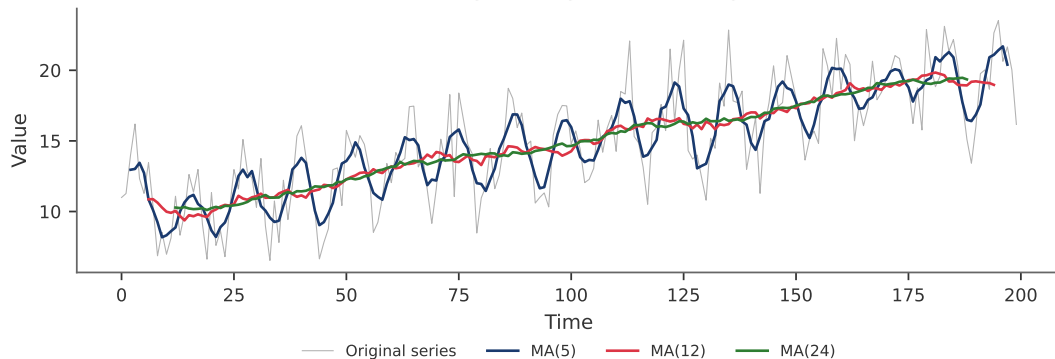
De Ce Netezire Exponențială?

- Metode de prognoză simple dar eficiente
- Observațiile mai recente primesc ponderi mai mari
- Gestionează trendul și sezonalitatea
- Baza pentru modelele ETS

Trei metode principale:

- ➊ **Netezire Exponențială Simplă (SES):** Doar nivel
- ➋ **Metoda Holt:** Nivel + Trend
- ➌ **Holt-Winters:** Nivel + Trend + Sezonalitate

Moving average: smoothing



- **Fereastră mică** (de ex., 5): Receptivă la schimbări dar zgomotoasă
- **Fereastră mare** (de ex., 30): Mai netedă dar mai lentă în reacție
- Compromis între reducerea zgomotului și întârzierea în detectarea schimbărilor

Netezirea Exponențială Simplă (SES)

Prognoză: $\hat{X}_{t+1|t} = \alpha X_t + (1 - \alpha)\hat{X}_{t|t-1}$

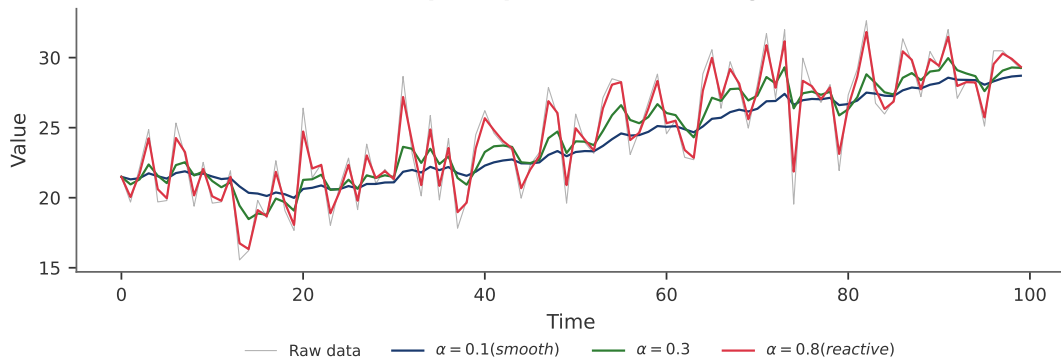
unde $\alpha \in (0, 1)$ este **parametrul de netezire**.

Cum funcționează:

- Ponderile scad exponențial în trecut
- α mare: receptiv la schimbările recente
- α mic: prognoze mai netede, mai stabile

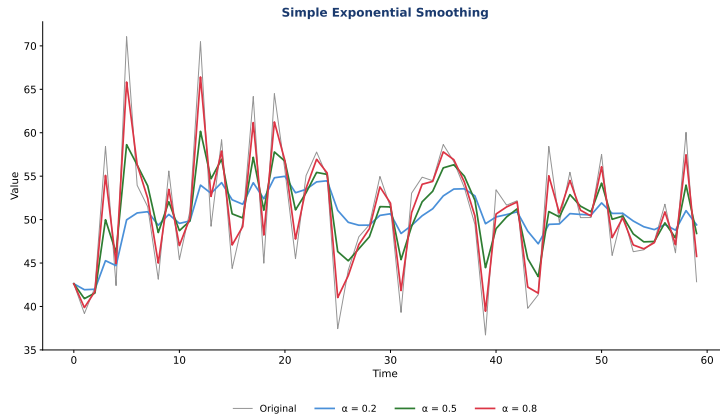
Forma de nivel: $\ell_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)\ell_{t-1}$

Simple exponential smoothing



- α mic (de ex., 0.1): Mai multă pondere pe trecut – mai neted, adaptare mai lentă
- α mare (de ex., 0.9): Mai multă pondere pe recent – receptiv, mai volatil
- Alegeți α în funcție de cât de rapid se schimbă procesul subiacent

Netezirea Exponențială Simplă: Efectul lui α



Un α mai mic produce prognoze mai netede; un α mai mare urmează datele mai îndeaproape.

Metoda Holt cu Trend Liniar

Extinde SES pentru a captura **trendul liniar** folosind două ecuații:

Nivel: $\ell_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1})$

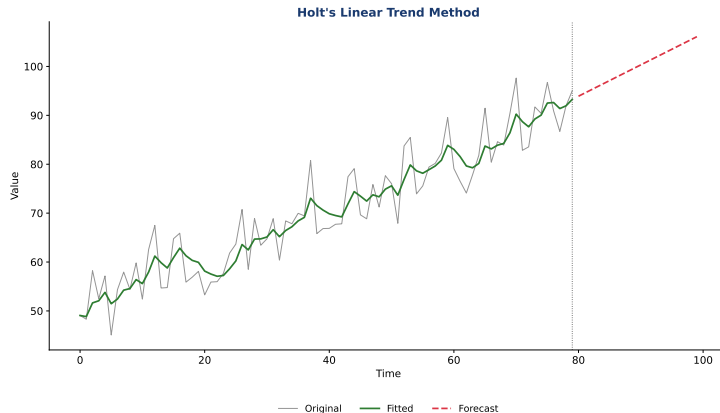
Trend: $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1}$

Prognoză: $\hat{X}_{t+h|t} = \ell_t + h \cdot b_t$

Parametri:

- $\alpha \in (0, 1)$: Parametru de netezire pentru nivel
- $\beta^* \in (0, 1)$: Parametru de netezire pentru trend
- ℓ_t : Nivelul estimat la momentul t
- b_t : Trendul (panta) estimat la momentul t

Metoda Holt: Vizualizare



Metoda Holt captează atât nivelul cât și trendul, proiectându-le în orizontul de prognoză.

Metoda Sezonieră Holt-Winters

Extinde metoda Holt pentru a include **sezonalitatea** cu trei ecuații:

Nivel: $\ell_t = \alpha(X_t - S_{t-s}) + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1})$

Trend: $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1}$

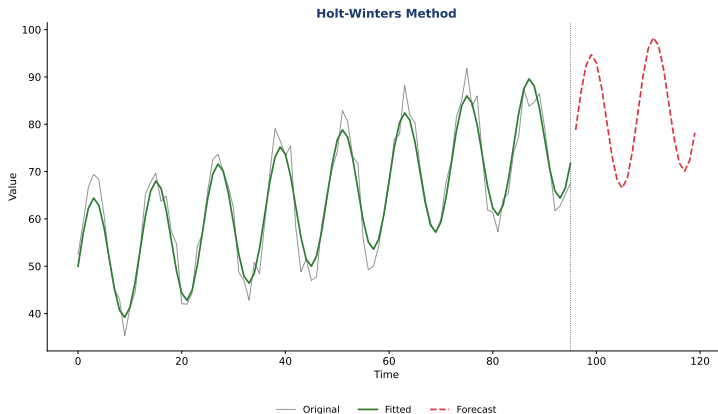
Sezonalitate: $S_t = \gamma(X_t - \ell_t) + (1 - \gamma)S_{t-s}$

Prognoză: $\hat{X}_{t+h|t} = \ell_t + h \cdot b_t + S_{t+h-s(k+1)}$

Parametri:

- α : Netezire nivel
- β^* : Netezire trend
- γ : Netezire sezonaliitate
- s : Perioada sezonieră (de ex., 12 pentru lunar)

Holt-Winters: Captarea Sezonalității



Holt-Winters descompune seria și produce prognoze sezoniere.

Definiție 4 (Modele ETS)

Cadrul **ETS** generalizează netezirea exponențială cu structură explicită de eroare:

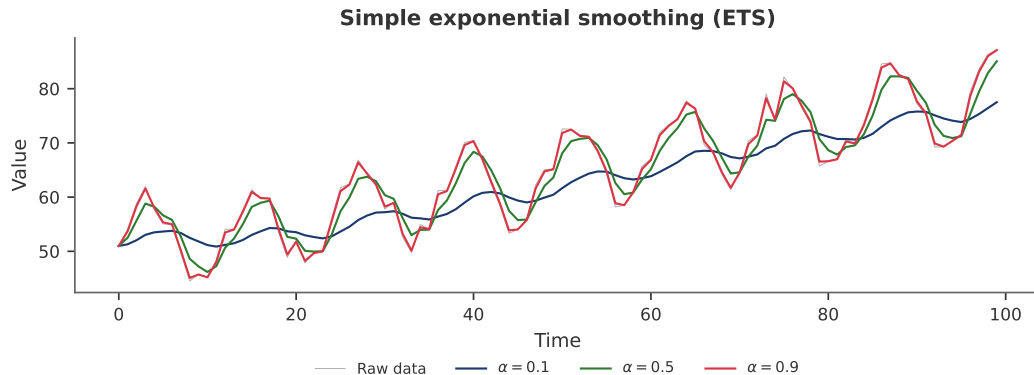
$$\text{ETS}(E, T, S)$$

unde fiecare componentă poate fi:

Componentă	N	A	M
Eroare (E)	–	Aditivă	Multiplicativă
Trend (T)	Niciunul	Aditiv	Multiplicativ
Sezonalitate (S)	Niciuna	Aditivă	Multiplicativă

Exemple:

- $\text{ETS}(A, N, N)$ = Netezire Exponențială Simplă
- $\text{ETS}(A, A, N)$ = Metoda Liniară Holt
- $\text{ETS}(A, A, A)$ = Holt-Winters Aditivă
- $\text{ETS}(M, A, M)$ = Erori multiplicative, trend aditiv, sezonalitate multiplicativă

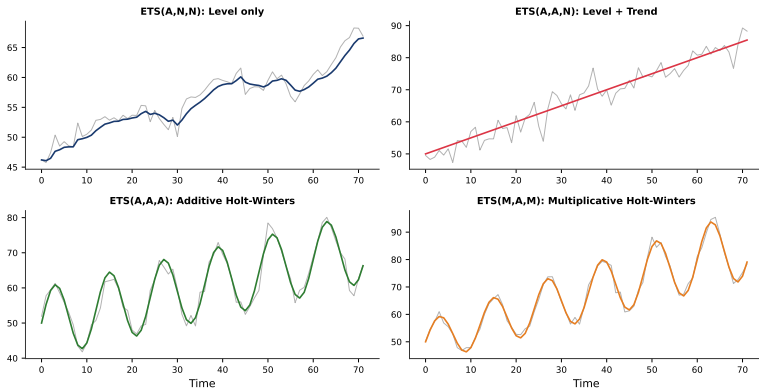


Interpretare

Modelele ETS folosesc observații ponderate exponențial pentru prognoză. Ponderile scad pe măsură ce observațiile devin mai vechi.

Selecția Modelului ETS

ETS Framework: Error-Trend-Seasonality



Interpretare

Cadrul ETS oferă o modalitate sistematică de a alege cel mai bun model folosind AIC/BIC.

Parametrul de Amortizare

Introduce $\phi \in (0, 1)$ pentru a preveni supra-proiecția

Ecuatii

Nivel: $\ell_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})$

Trend: $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)\phi b_{t-1}$

Prognoză: $\hat{X}_{t+h|t} = \ell_t + \phi \frac{1-\phi^h}{1-\phi} b_t$

Observație Cheie

- Când $h \rightarrow \infty$: prognoza \rightarrow constantă
- Previne extrapolarea nerealistă
- Adesea cel mai bun pentru orizonturi lungi

Metrici de Acuratețe a Prognozei

Eroarea de Prognoză: $e_t = X_t - \hat{X}_t$ (real minus prezis)

Dependente de Scară:

- $MAE = \frac{1}{n} \sum |e_t|$
- $MSE = \frac{1}{n} \sum e_t^2$
- $RMSE = \sqrt{MSE}$

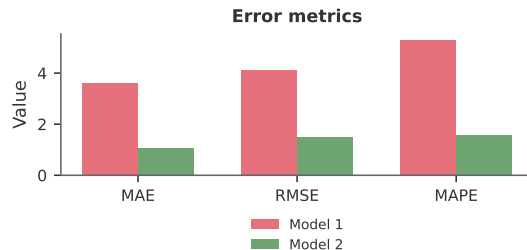
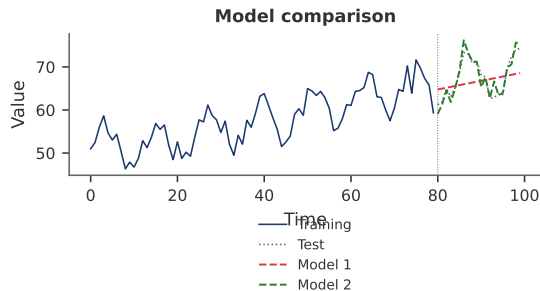
Independente de Scară:

- $MAPE = \frac{100}{n} \sum \left| \frac{e_t}{X_t} \right|$
- sMAPE (simetric)

Pe care să o folosim?

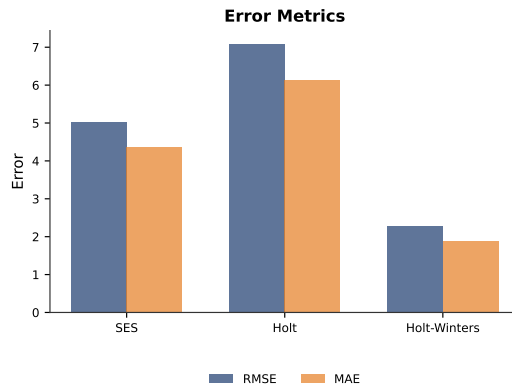
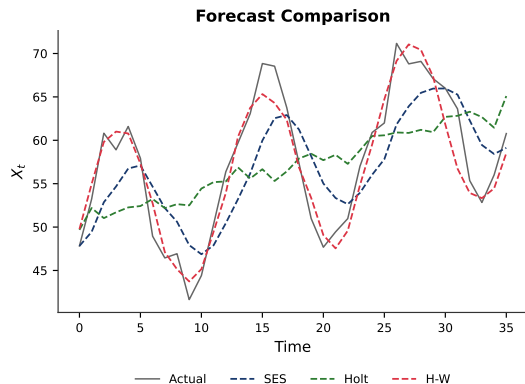
- Aceeași serie: RMSE, MAE
- Comparatie între serii: MAPE, sMAPE

Evaluarea Prognozei: Exemplu Vizual



- **Sus:** Valori reale vs. valori prognozate – evaluare vizuală a potrivirii
- **Jos:** Reziduurile ar trebui să fie centrate în jurul lui zero fără tipar
- Prognozele bune au reziduuri mici, aleatorii cu varianță constantă

Compararea Metodelor de Prognoză



Interpretare

Stânga: Compararea prognozelor SES, Holt și Holt-Winters. **Dreapta:** Metrice de eroare pentru fiecare metodă.

Proprietăți Reziduuri

Proгноzele bune ar trebui să aibă reziduuri:

- 1 **Medie zero:** $\mathbb{E}[e_t] = 0$
- 2 **Necorelate:** $\text{Cov}(e_t, e_{t-k}) = 0$
- 3 **Varianță constantă:** $\text{Var}(e_t) = \sigma^2$
- 4 **Distribuite normal**

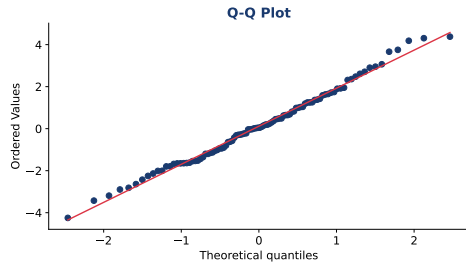
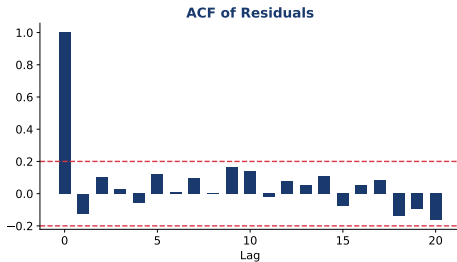
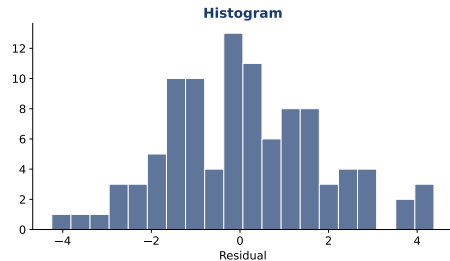
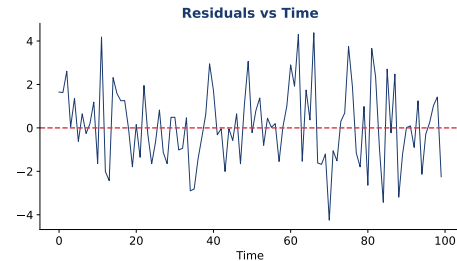
Teste de Diagnostic

Testul Ljung-Box (autocorelație):

$$Q = T(T+2) \sum_{k=1}^h \frac{\hat{\rho}_k^2}{T-k} \sim \chi_h^2$$

Testul Jarque-Bera (normalitate)

Diagnosticarea Reziduurilor: Vizualizare



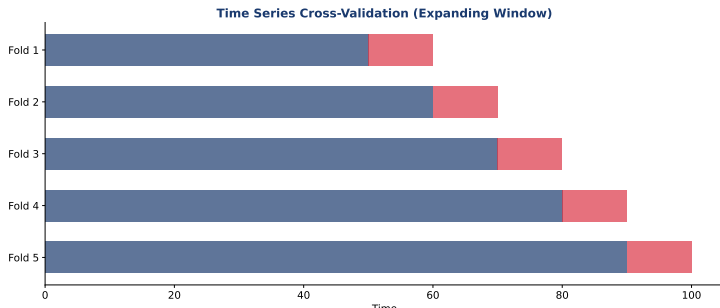
Validarea Încrucișată pentru Serii de Timp

Important

CV standard nu funcționează pentru serii de timp (dependență temporală).

CV cu Origine Mobilă (Ferestre în Expansiune)

- 1 Antrenare pe $\{X_1, \dots, X_t\}$, prognoză \hat{X}_{t+h}
- 2 Incrementare t , repetare



Separarea Train / Validare / Test

Separare în trei părți pentru dezvoltarea modelului:

Set de Antrenare

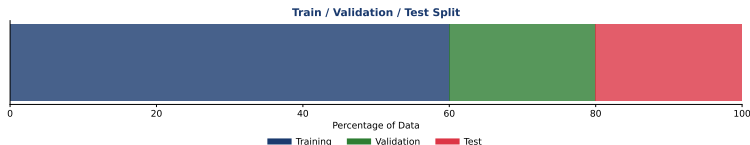
- Potrivirea parametrilor modelului
- Cea mai mare porțiune (60–80%)
- Folosit pentru estimare

Set de Validare

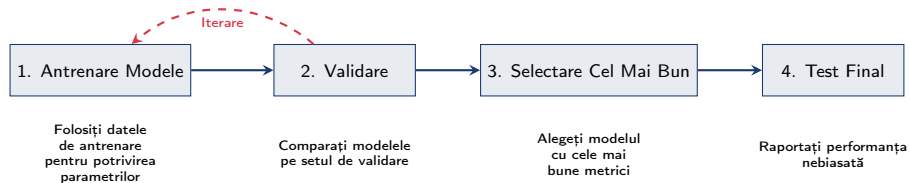
- Ajustarea hiperparametrilor
- Compararea modelelor
- Selectarea celei mai bune abordări

Set de Test

- Doar evaluare finală
- Niciodată folosit pentru ajustare
- Performanță nebiasată



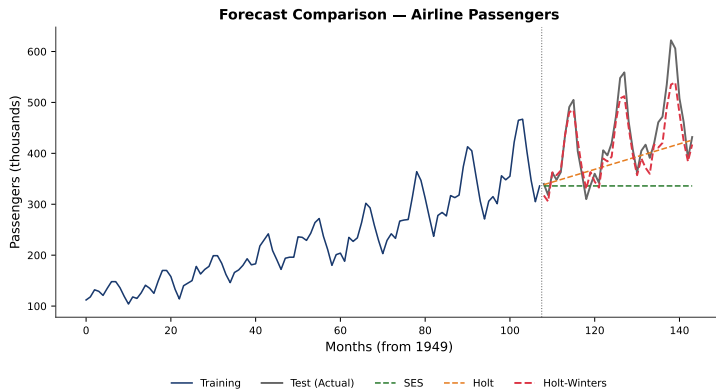
Fluxul de Lucru pentru Dezvoltarea Modelului



Regulă Critică

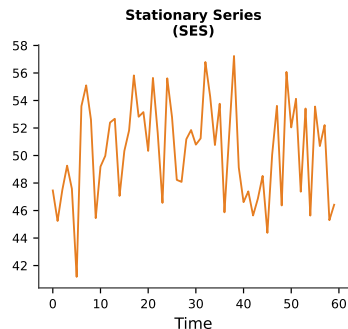
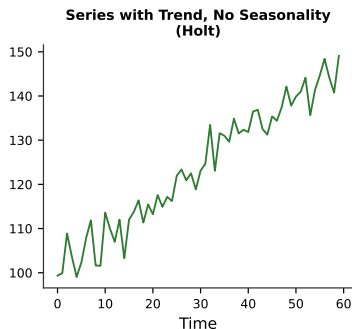
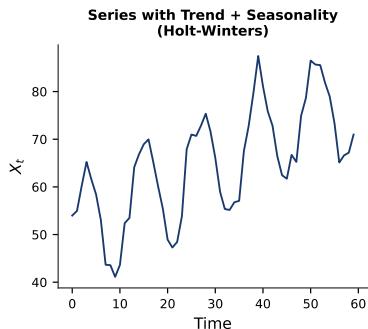
Niciodată nu folosiți setul de test pentru selecția modelului! Aceasta cauzează *scurgere de date* și estimări excesiv de optimiste ale performanței.

Date Reale: Compararea Proгноzelor



Date pasageri aerieni: Holt-Winters Multiplicativ performează cel mai bine pentru date sezoniere.

Different Series Require Different Models



Serii diferite necesită modele diferite. Datele sezoniere au nevoie de metode sezoniere.

Modelarea Sezonalității: Două Abordări

1. Variabile Dummy:

$$X_t = \mu + \sum_{j=1}^{s-1} \gamma_j D_{jt} + \varepsilon_t$$

- $D_{jt} = 1$ dacă t în sezonul j
- $s - 1$ parametri
- Orice tipar sezonier

2. Termeni Fourier:

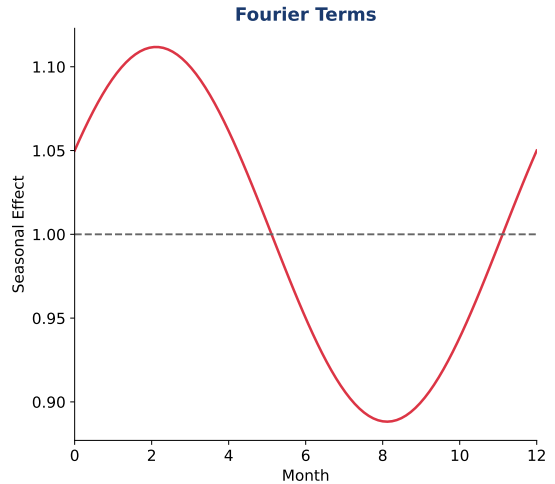
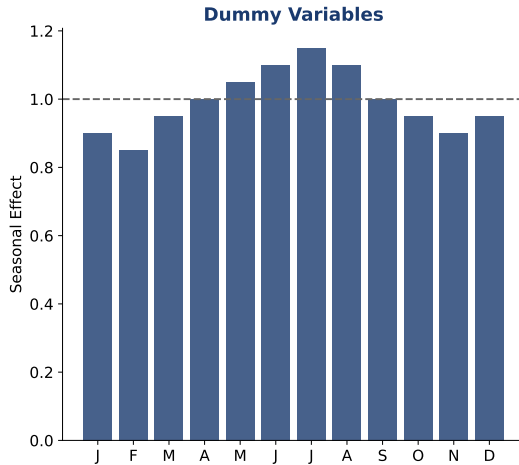
$$X_t = \mu + \sum_{k=1}^K [\alpha_k \sin(\cdot) + \beta_k \cos(\cdot)]$$

- Funcții sinusoidale
- $2K$ parametri
- Tipare netede

Compromis

Dummy: orice tipar, mai mulți parametri. Fourier: neted, mai puțini parametri.

Variable Dummy vs Termeni Fourier



■ Dummies — Fourier

Alegerea între Dummy și Fourier

Criteriu	Dummy	Fourier
Parametri (lunar)	11	$2K$ (adesea 4–6)
Tipar sezonier	Orice formă	Neted/sinusoidal
Interpretare	Directă (efecte lunare)	Componente de frecvență
Sezoane de înaltă frecvență	Mulți parametri	Eficient
Sezonalitate multiplă	Complex	Ușor (adăugare termeni)

Ghiduri:

- Folosiți **dummy** când tiparul sezonier este neregulat sau aveți nevoie de coeficienți interpretabili
- Folosiți **Fourier** pentru tipare netede, sezonalitate de înaltă frecvență (zilnică, orară) sau perioade sezoniere multiple
- **Termenii Fourier** sunt folosiți în modelele TBATS și Facebook Prophet

De Ce Eliminăm Trendul și Sezonalitatea?

Înainte de modelare, adesea trebuie să facem seria staționară:

Motive pentru eliminarea trendului:

- Cerința de staționaritate
- Focus pe fluctuații
- Evitarea regresiei false
- Permitearea inferenței valide

Motive pentru desezonalizare:

- Dezvăluirea trendului subiacent
- Comparare între sezoane
- Simplificarea modelării
- Focus pe componenta neregulată

Important

După modelarea seriei fără trend/desezonalizate, trebuie să **inversăm transformarea** pentru prognoză.

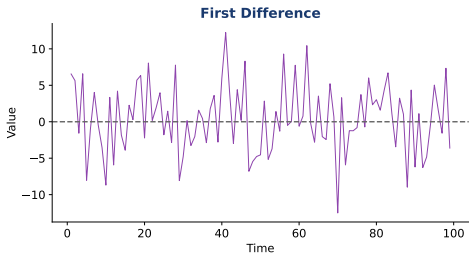
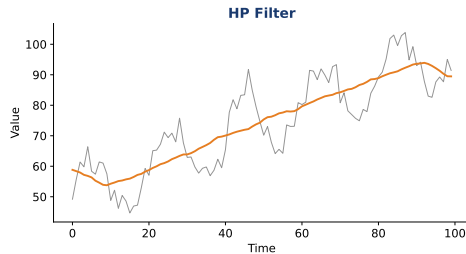
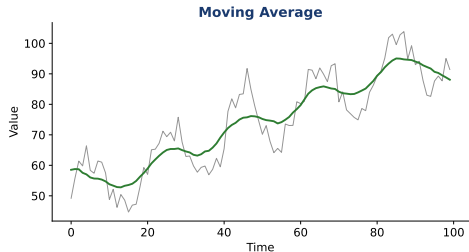
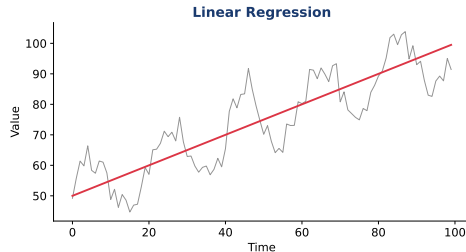
Şase abordări comune pentru eliminarea trendului:

- ❶ **Diferențiere:** $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$
- ❷ **Regresie liniară:** Potrivire $\hat{T}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t$
- ❸ **Polinomială:** Potrivire polinom de ordin superior
- ❹ **Filtru HP:** Echilibru între potrivire și netezime
- ❺ **Media mobilă:** $\hat{T}_t = MA_q(X_t)$
- ❻ **LOESS:** Regresie polinomială locală

Alegerea depinde de:

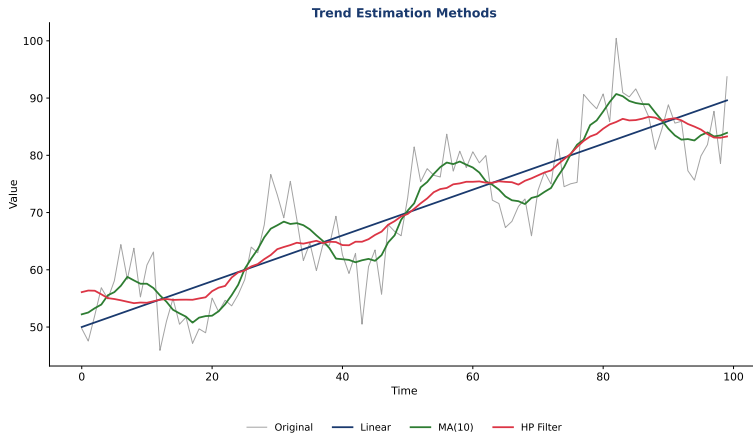
- Natura trendului (determinist vs stochastic)
- Scopul (prognoză vs analiză)

Metode de Eliminare a Trendului: Comparație



— Original — Linear — MA — HP

Estimarea Trendului: Abordări Multiple



Metodele diferite captează trendul la niveluri variate de netezime.

Filtrul Hodrick-Prescott (HP)

Definiție 5 (Filtrul HP)

Filtrul HP descompune o serie de timp X_t în trend τ_t și ciclu c_t :

$$X_t = \tau_t + c_t$$

prin minimizarea:

$$\min_{\{\tau_t\}} \left\{ \sum_{t=1}^T (X_t - \tau_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} [(\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1})]^2 \right\}$$

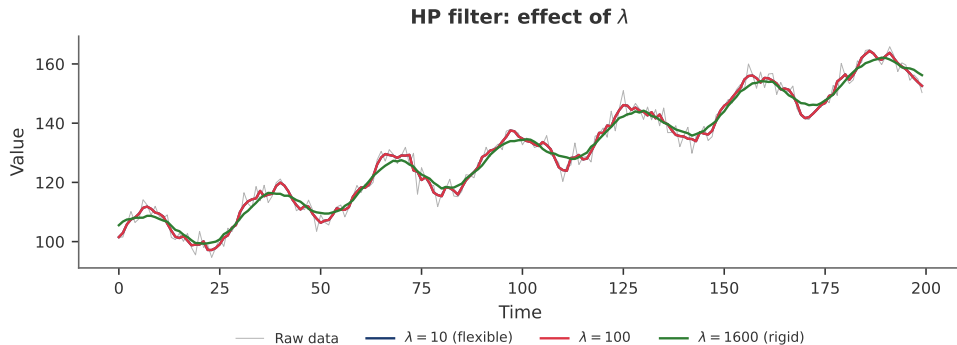
Interpretare

- Primul termen: potrivire la date
- Al doilea termen: penalizare netezime
- λ : parametru de compromis

Valori Standard λ

- Anual: $\lambda = 6.25$
- Trimestrial: $\lambda = 1600$
- Lunar: $\lambda = 129600$

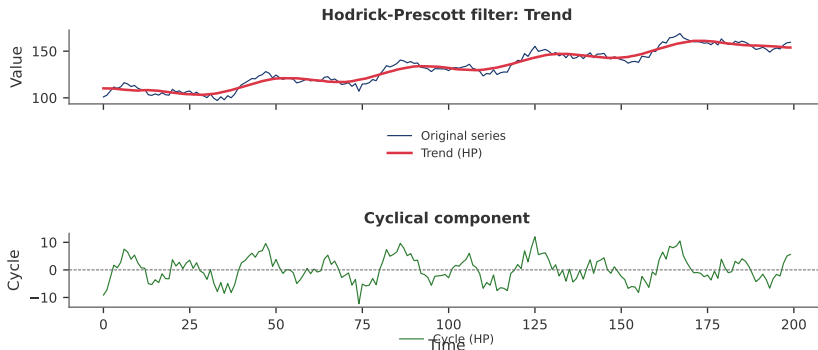
Filtrul HP: Efectul lui λ



Compromis

- λ **mic**: Trendul urmează datele îndeaproape (mai flexibil)
- λ **mare**: Trendul devine mai neted (se apropie de trend liniar)

Filtrul HP: Extragerea Ciclului de Afaceri



Aplicație

Filtrul HP este utilizat pe scară largă în macroeconomie pentru extragerea ciclurilor de afaceri din PIB și alte serii economice.

Probleme Cunoscute

- **Problema capetelor:** Estimările trendului nesigure la capete
- **Cicluri false:** Poate crea dinamici artificiale
- **Alegerea λ :** Rezultatele sensibile la parametru
- **Non-staționar:** Presupune trend neted

Alternative

- **Filtre band-pass:** Baxter-King, Christiano-Fitzgerald
- **Filtrul Hamilton:** Bazat pe regresie
- **Componente neobservate:** Modele spațiu-stare

Critica lui Hamilton (2018)

„De ce nu ar trebui să folosiți niciodată filtrul Hodrick-Prescott" — sugerează utilizarea regresiei pe valori întârziate.

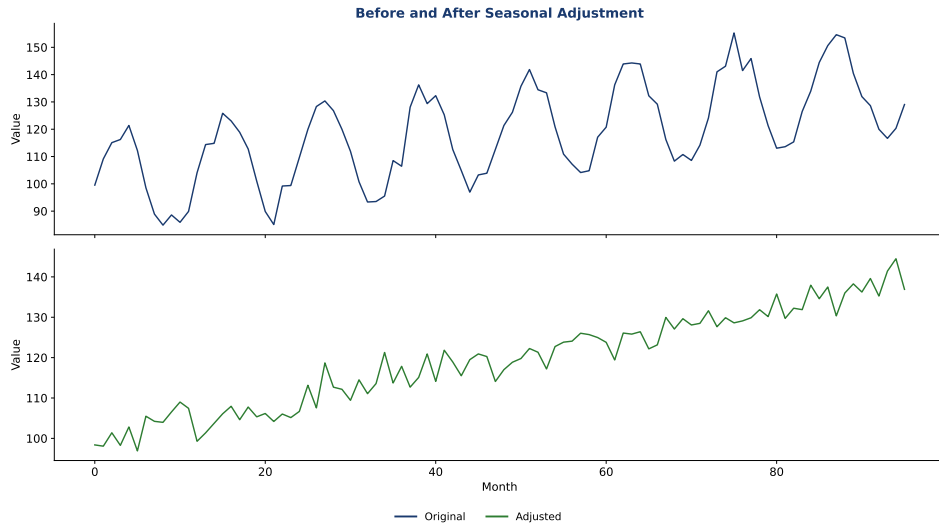
Metode de Eliminare a Sezonalității

Patru abordări pentru eliminarea sezonalității:

- 1 Diferențiere sezonieră: $\Delta_s X_t = X_t - X_{t-s}$
- 2 Împărțire (multiplicativ): $X_t^{adj} = X_t / \hat{S}_t$
- 3 Scădere (aditiv): $X_t^{adj} = X_t - \hat{S}_t$
- 4 X-13ARIMA-SEATS: Metodă statistică guvernamentală

Perioada sezonieră s : Lunar $\Rightarrow s = 12$; Trimestrial $\Rightarrow s = 4$

Ajustare Sezonieră: Vizualizare



Trend Determinist vs Stochastic

Trend Determinist:

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$$

- Trendul este o funcție de timp
- Eliminarea trendului prin regresie
- ε_t este staționar

Trend Stochastic:

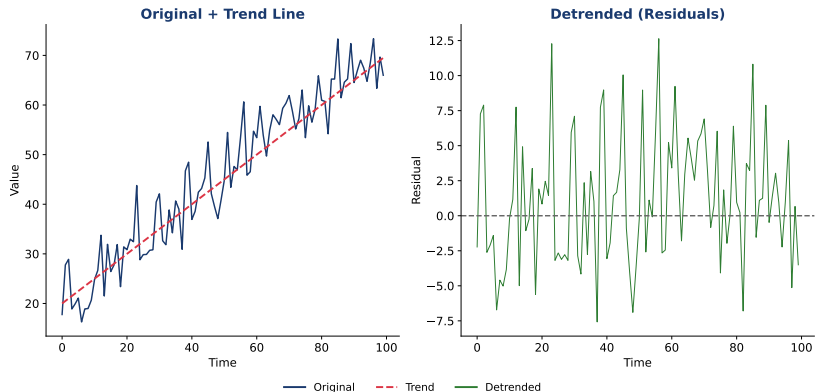
$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Componentă de mers aleatoriu
- Eliminarea trendului prin diferențiere
- ΔX_t este staționar

Metoda Greșită = Probleme

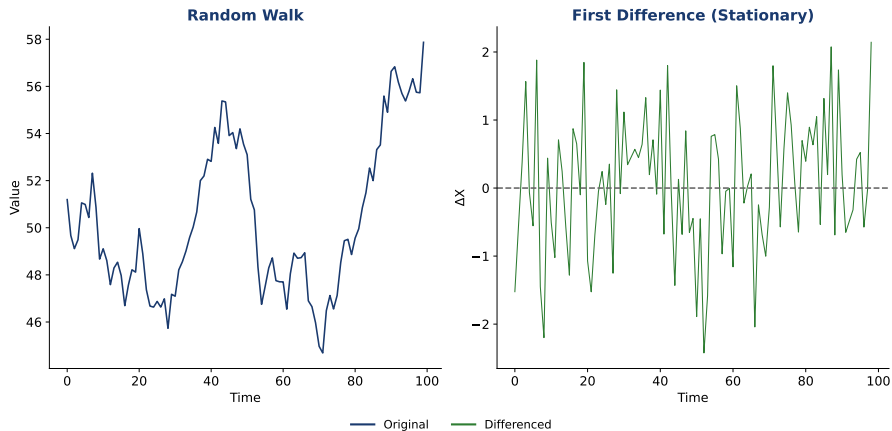
- Diferențierea trendului determinist \Rightarrow supra-diferențiere
- Regresie pe trend stochastic \Rightarrow regresie falsă

Exemplu: Trend Determinist



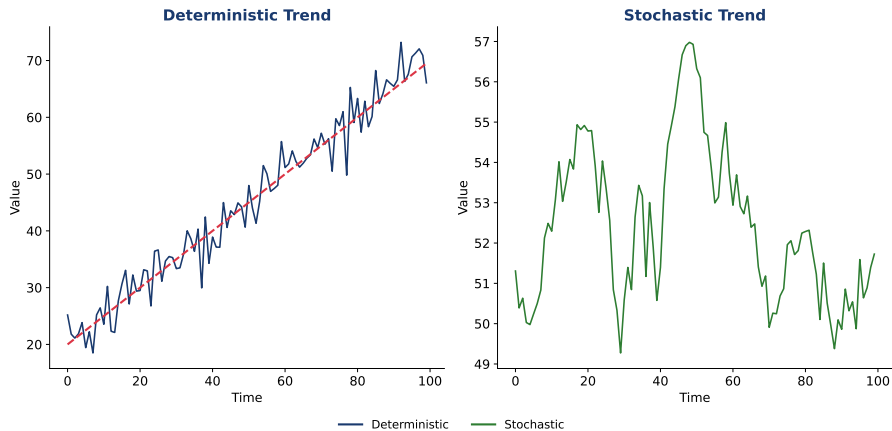
Cheie: Folosiți **regresia** pentru a elimina trendul \succ reziduurile sunt staționare (ACF scade rapid).

Exemplu: Trend Stochastic (Mers Aleatoriu)



Cheie: Folosiți **diferențierea** pentru a elimina trendul \succ diferențele sunt staționare (zgomot alb).

Comparație Alăturată



Rețineți: Determinist \succ regresie. Stochastic \succ diferențiere.

Definiție 6 (Proces Stochastic)

Un **proces stochastic** este o colecție de variabile aleatoare indexate după timp:

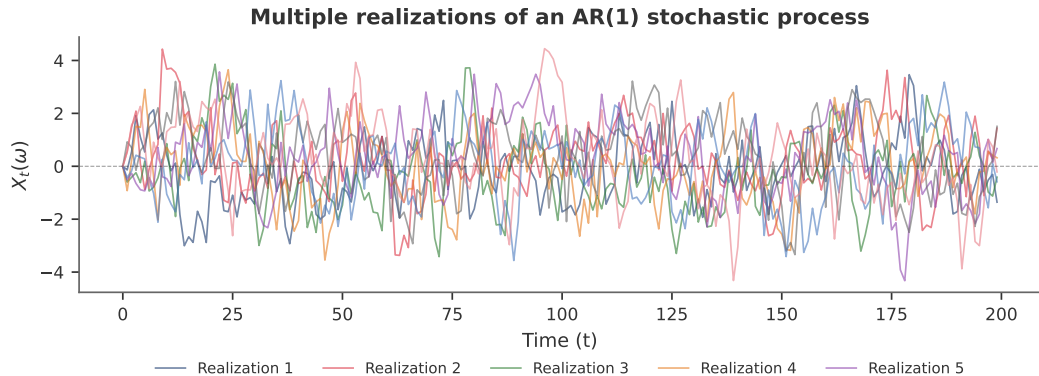
$$\{X_t(\omega) : t \in \mathcal{T}, \omega \in \Omega\}$$

unde Ω este spațiul de selecție al rezultatelor posibile.

Două perspective:

- ω **fix**: O *realizare* sau *traietorie de selecție* $\{X_t(\omega)\}_{t \in \mathcal{T}}$
- t **fix**: O *variabilă aleatoare* X_t cu distribuția $F_t(x)$

Observație cheie: O serie de timp pe care o observăm este o **realizare** a procesului stochastic subiacent. Folosim această singură realizare pentru a deduce proprietățile procesului.



Fiecare linie este o realizare diferită din același proces stochastic subiacent. Observăm doar o realizare dar vrem să înțelegem procesul.

Momentele unui Proces Stochastic

Primele două momente caracterizează proprietățile slabe:

Funcția de Medie: $\mu_t = \mathbb{E}[X_t]$

Funcția de Autocovarianță (ACVF):

$$\gamma(t, s) = \text{Cov}(X_t, X_s) = \mathbb{E}[(X_t - \mu_t)(X_s - \mu_s)]$$

Funcția de Autocorelație (ACF):

$$\rho(t, s) = \frac{\gamma(t, s)}{\sqrt{\text{Var}(X_t) \cdot \text{Var}(X_s)}}$$

Proprietăți: $\rho(t, s) \in [-1, 1]$ și $\rho(t, t) = 1$

De Ce Contează Staționaritatea

Staționaritatea este o ipoteză fundamentală pentru analiza seriilor de timp:

Fără Staționaritate:

- Media, varianța se schimbă în timp
- Trecutul poate să nu prezică viitorul
- Metodele standard eșuează
- Corelații false

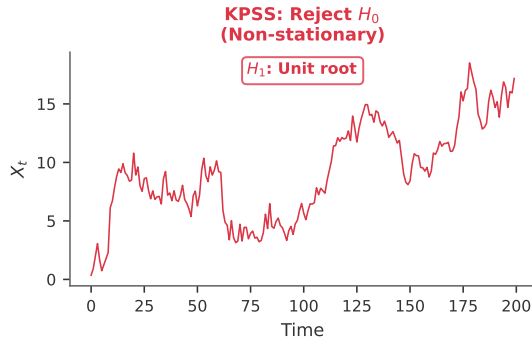
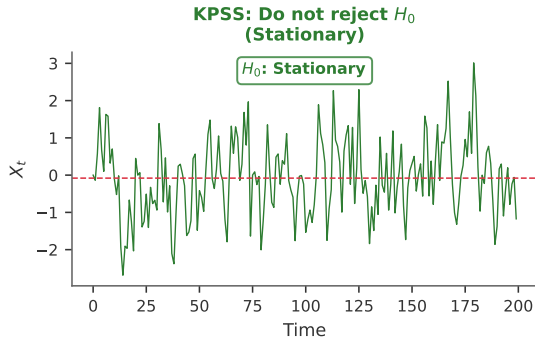
Cu Staționaritate:

- Proprietăți statistice constante
- Putem estima din o singură realizare
- Inferență validă posibilă
- Modelele sunt semnificative

Principiu Cheie

Majoritatea modelelor de serii de timp (ARMA, ARIMA, etc.) necesită staționaritate. Seriile nestaționare trebuie transformate (de ex., diferențiere) înainte de modelare.

Staționar vs Nestaționar: Comparație Vizuală



- **Staționar:** Medie și varianță constante – fluctuează în jurul unui nivel fix
- **Nestaționar:** Media și/sau varianța se schimbă în timp
- Inspecția vizuală este primul pas; testele formale (ADF, KPSS) confirmă

Definiție 7 (Staționaritate Strictă (Puternică))

Un proces $\{X_t\}$ este **strict staționar** dacă pentru toți k , toți t_1, \dots, t_k și toți h :

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_k+h})$$

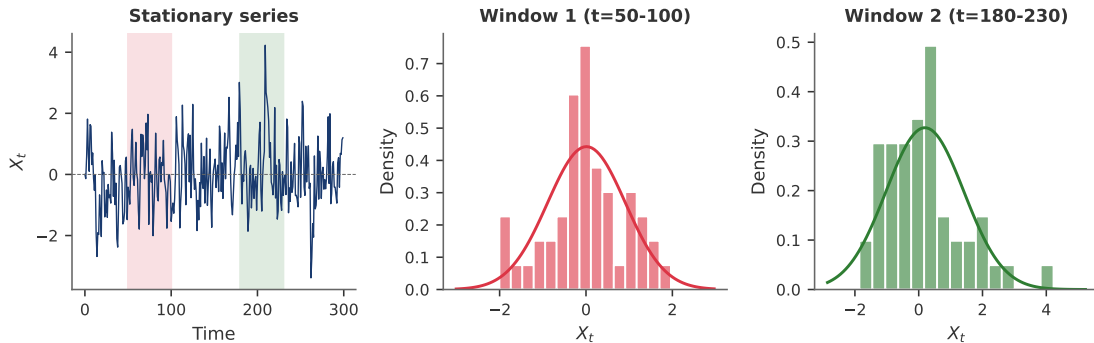
Interpretare: Distribuția comună a oricărei colecții de observații este **invariantă la deplasări temporale**.

Implicații:

- Toate distribuțiile marginale $F_{X_t}(x)$ sunt identice
- $\mathbb{E}[X_t] = \mu$ (medie constantă)
- $\text{Var}(X_t) = \sigma^2$ (varianță constantă)
- Distribuțiile comune depind doar de *diferențele* temporale

Notă: Staționaritatea strictă este o condiție puternică, adesea impractică de verificat.

Staționaritate Strictă: Ilustrație Vizuală



Staționar: oricare două ferestre au aceeași distribuție comună. Nestaționar: distribuția se schimbă în timp.

Staționaritate Slabă (de Covarianță)

Definiție 8 (Staționaritate Slabă)

Un proces $\{X_t\}$ este **slab staționar** (sau staționar de covarianță) dacă:

- ❶ $\mathbb{E}[X_t] = \mu$ (medie constantă)
- ❷ $\text{Var}(X_t) = \sigma^2 < \infty$ (varianță constantă, finită)
- ❸ $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$ (covarianța depinde doar de lag-ul h)

Proprietate cheie: Autocovarianța este o funcție doar de lag:

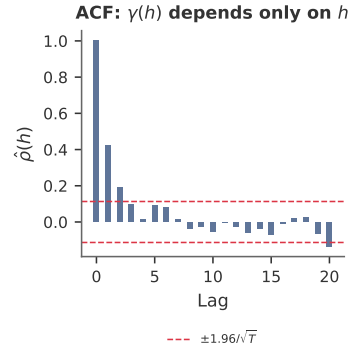
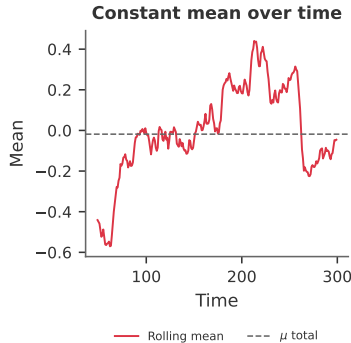
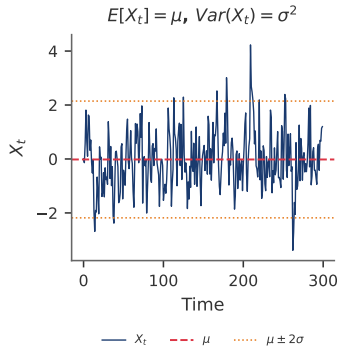
$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \mathbb{E}[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)]$$

Funcția de autocorelație:

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t+h})}{\text{Var}(X_t)}$$

Notă: $\rho(0) = 1$ și $\rho(h) = \rho(-h)$ (simetrie)

Staționaritate Slabă: Ilustrație Vizuală



Stânga: medie și varianță constante. Dreapta: autocovarianța depinde doar de lag-ul h , nu de timpul t .

Proprietățile Funcției de Autocovarianță

Pentru un proces slab staționar, ACVF $\gamma(h)$ satisface:

- ❶ **Simetrie:** $\gamma(h) = \gamma(-h)$
- ❷ **Maxim la zero:** $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$
- ❸ **Definit nenegativ**

Implicație: Nu orice funcție poate fi o funcție de autocovarianță.

Definiție 9 (Zgomot Alb)

Un proces $\{\varepsilon_t\}$ este **zgomot alb**, notat $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, dacă:

- ❶ $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$ pentru toți t
- ❷ $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$ pentru toți t
- ❸ $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ pentru $t \neq s$

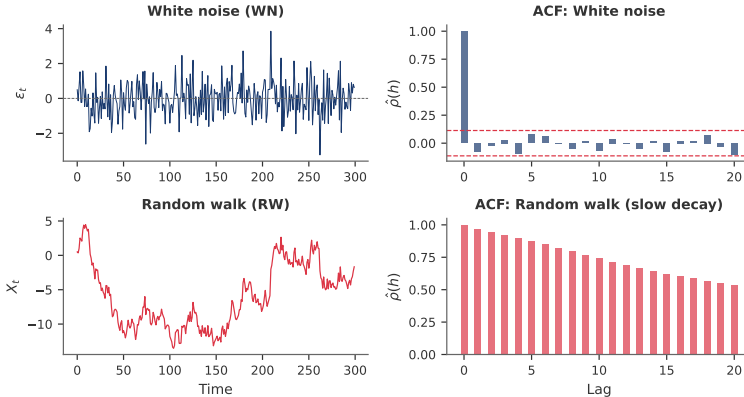
ACF al Zgomotului Alb:

$$\rho(h) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } h = 0 \\ 0 & \text{dacă } h \neq 0 \end{cases}$$

Tipuri:

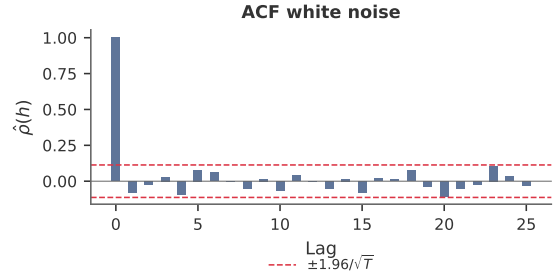
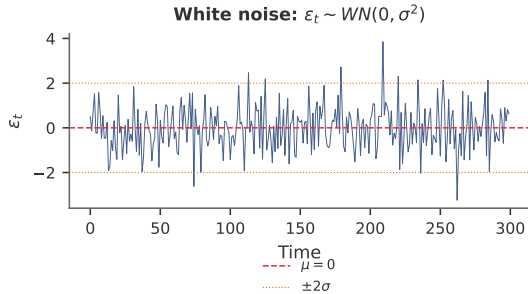
- **Zgomot alb slab:** Necorelat (condițiile de mai sus)
- **Zgomot alb puternic:** Independent și identic distribuit (i.i.d.)
- **Zgomot alb Gaussian:** $\varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$

Zgomot Alb vs Mers Aleatoriu: Comparație



- **Zgomot alb:** Fluctuează în jurul lui zero – staționar, varianță constantă
- **Mers aleatoriu:** Suma cumulativă a zgomotului alb – rătăcește, nestaționar
- Mersul aleatoriu este cel mai simplu proces nestaționar (rădăcină unitară)

Zgomot Alb: Ilustrație Vizuală



Stânga: zgomotul alb fluctuează în jurul lui zero cu varianță constantă. Dreapta: ACF arată nicio autocorelație (toate zero după lag 0).

Procesul de Mers Aleatoriu

Definiție: $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$ unde $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, $X_0 = 0$

Forma explicită: $X_t = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$

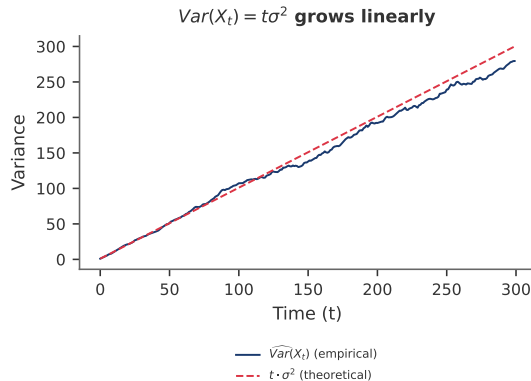
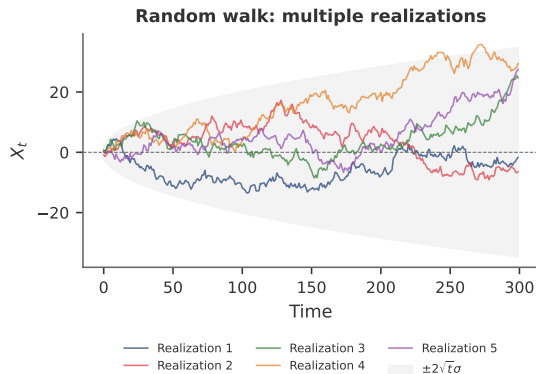
Proprietăți:

- $\mathbb{E}[X_t] = 0$ (medie constantă)
- $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$ (varianța crește în timp!)
- $\text{Cov}(X_t, X_s) = \min(t, s) \cdot \sigma^2$

Nestaționar!

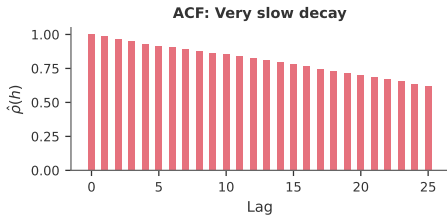
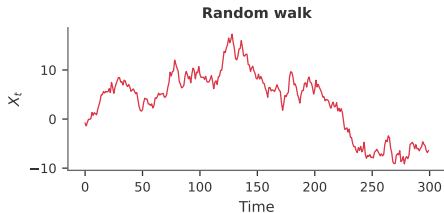
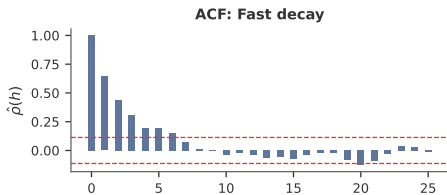
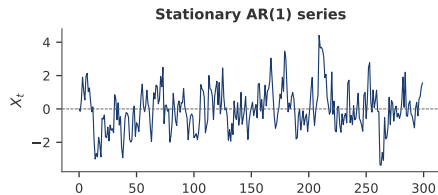
Mersul aleatoriu **nu este staționar** deoarece varianța depinde de t .

Mers Aleatoriu: Vizualizare



Stânga: Traectorii multiple divergă în timp. **Dreapta:** Varianța crește linear: $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$.

Staționar vs Nestaționar: Comparație



Diagnostic cheie: ACF al procesului staționar scade rapid; ACF al mersului aleatoriu scade foarte lent.

Funcția de Autocorelație din Eșantion

ACF din eșantion la lag-ul h :

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\sum_{t=1}^{T-h} (x_t - \bar{x})(x_{t+h} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2}$$

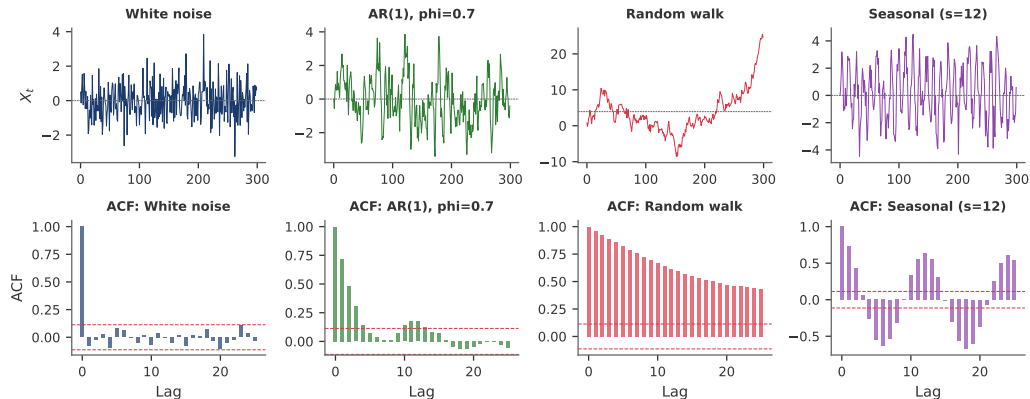
Proprietăți:

- $\hat{\rho}(0) = 1$ întotdeauna
- $|\hat{\rho}(h)| \leq 1$

Test de semnificație: Sub zgomot alb, $\hat{\rho}(h) \approx N(0, 1/T)$

Limite 95%: $\pm 1.96/\sqrt{T}$

Tipare ACF pentru Diferite Procese



- **Zgomot alb:** ACF scade la zero imediat (nicio dependență)
- **AR(1):** ACF scade exponențial – indică structură autoregresivă
- **Sezonier:** ACF arată vârfuri la lag-uri sezoniere (de ex., 12, 24 pentru lunar)
- **Mers aleatoriu:** ACF scade foarte lent – semn de nestaționaritate

Funcția de Autocorelație Parțială (PACF)

PACF ϕ_{hh} : Corelația dintre X_t și X_{t+h} după eliminarea efectului liniar al $X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1}$.

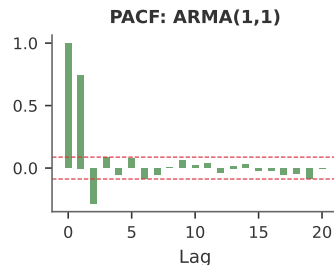
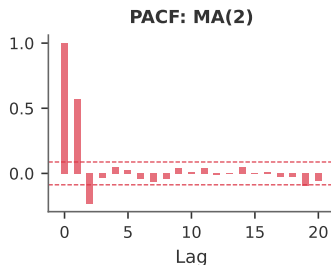
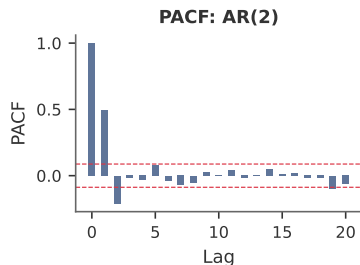
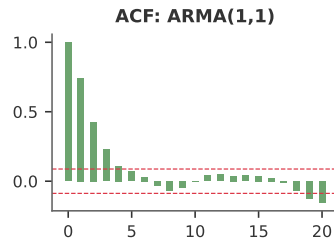
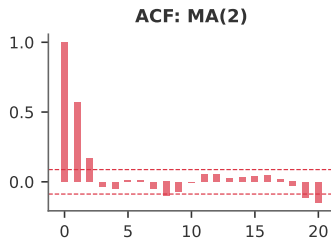
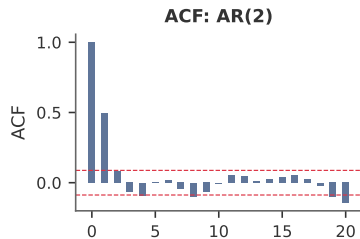
Interpretare:

- $\phi_{11} = \rho(1)$ (același ca ACF la lag 1)
- ϕ_{22} = corelația lui X_t, X_{t+2} controlând pentru X_{t+1}
- Măsoară dependența *directă* la lag-ul h

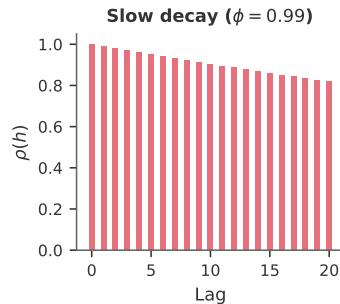
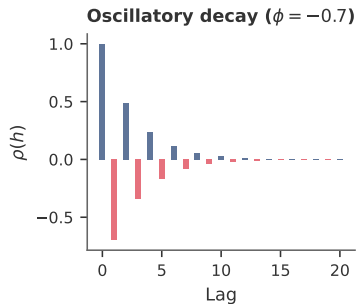
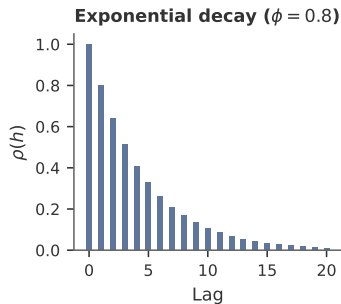
Aplicație cheie: Identificarea ordinului AR

- Pentru $AR(p)$: PACF **se anulează** după lag-ul p
- Pentru $MA(q)$: ACF **se anulează** după lag-ul q

Tipare ACF și PACF



ACF Teoretic pentru AR(1)



Pentru AR(1): $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$, ACF teoretic este $\rho(h) = \phi^h$.

Definiție 10 (Operatorul Lag)

Operatorul lag (sau operatorul de întârziere) L este definit prin:

$$LX_t = X_{t-1}$$

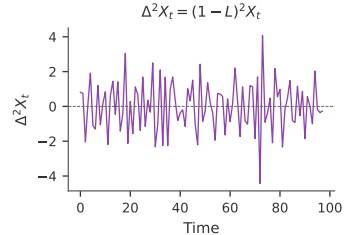
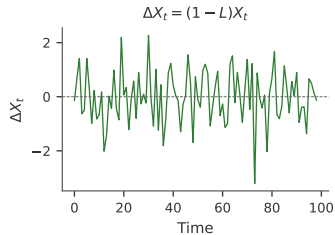
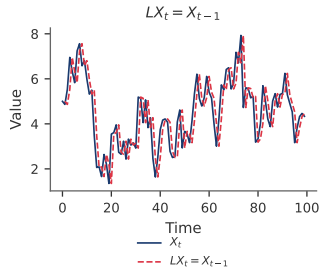
Proprietăți:

- $L^k X_t = X_{t-k}$ (întârziere cu k perioade)
- $L^0 = I$ (identitate)
- $(1 - \phi L)X_t = X_t - \phi X_{t-1}$

Exemple:

- AR(1): $(1 - \phi L)X_t = \varepsilon_t$
- MA(1): $X_t = (1 + \theta L)\varepsilon_t$
- AR(p): $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p)X_t = \varepsilon_t$

Operatorul Lag: Ilustrație Vizuală



Operatorul lag L deplasează fiecare observație înapoi cu o perioadă de timp: $LX_t = X_{t-1}$.

Diferențierea

Prima diferență: $\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = (1 - L)X_t$

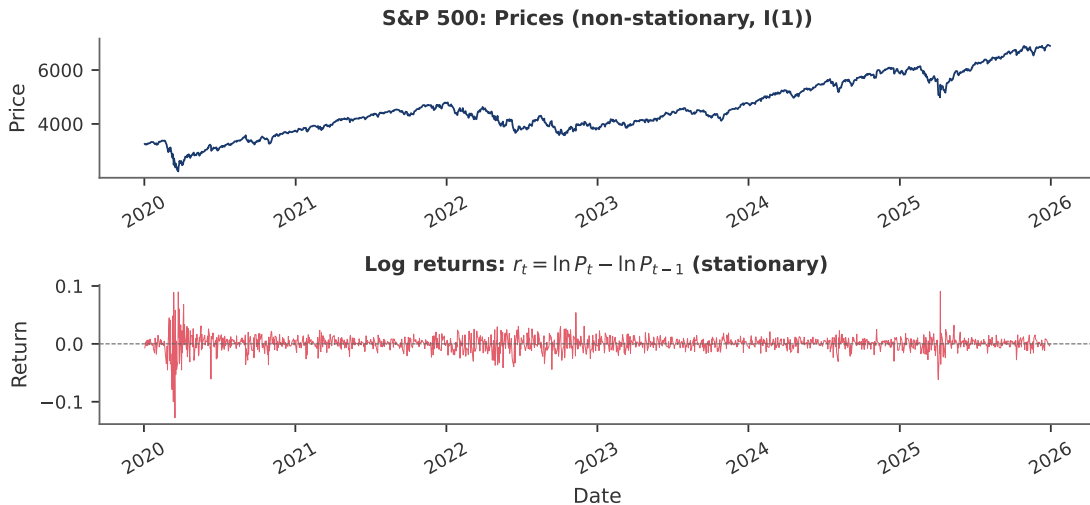
De ce diferențiem?

- Elimină trendul și rădăcina unitară
- Mers aleatoriu: $\Delta X_t = \varepsilon_t$ (zgomot alb)

Proces integrat: $X_t \sim I(d)$ dacă $\Delta^d X_t$ este staționar

- $I(0)$: Staționar (nu necesită diferențiere)
- $I(1)$: Necesită o diferențiere
- $I(2)$: Necesită două diferențieri

Efectul Diferențierii: S&P 500



Testul Augmented Dickey-Fuller (ADF)

Model: $\Delta X_t = \alpha + \gamma X_{t-1} + \sum_{i=1}^p \delta_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t$

Ipoteze:

- $H_0: \gamma = 0$ (rădăcină unitară)
- $H_1: \gamma < 0$ (staționar)

Decizie:

- $\tau < \text{valoare critică} \Rightarrow \text{Respingem } H_0 \Rightarrow \text{Staționar}$
- $\tau \geq \text{valoare critică} \Rightarrow \text{Nestaționar}$

Valori critice: distribuția Dickey-Fuller (nu normală)

Statistica de test:

$$\tau = \frac{\hat{\gamma}}{SE(\hat{\gamma})}$$

Model: $X_t = \xi t + r_t + \varepsilon_t$ unde $r_t = r_{t-1} + u_t$

Ipoteze (opuse față de ADF):

- $H_0: \sigma_u^2 = 0$ (staționar)
- $H_1: \sigma_u^2 > 0$ (rădăcină unitară)

Statistica de test:

$$LM = \frac{\sum_{t=1}^T S_t^2}{T^2 \hat{\sigma}^2}$$

unde $S_t = \sum_{i=1}^t \hat{\varepsilon}_i$

Decizie:

- $LM > \text{valoare critică} \Rightarrow \text{Respingem } H_0 \Rightarrow \text{Nestaționar}$
- $LM \leq \text{valoare critică} \Rightarrow \text{Staționar}$

Notă: KPSS completează ADF—folosiți ambele pentru concluzii robuste.

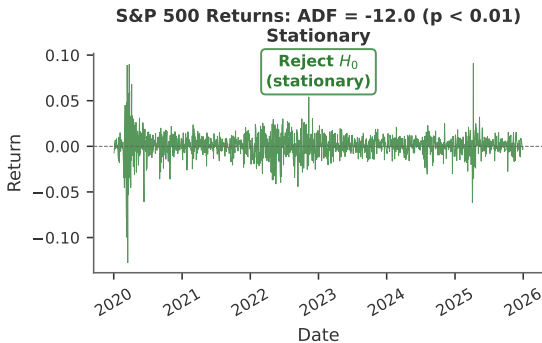
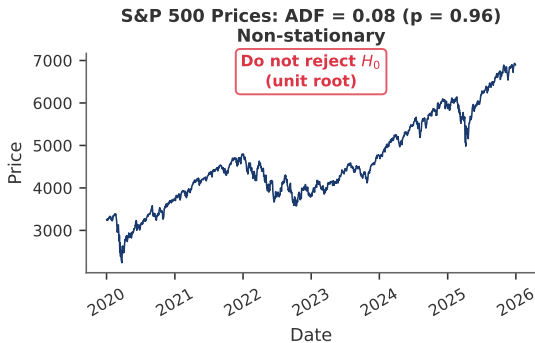
Testare confirmatorie pentru concluzii robuste:

ADF	KPSS	Concluzie
Respingem H_0	Nu respingem H_0	Staționar
Nu respingem H_0	Respingem H_0	Rădăcină Unitate
Respingem H_0	Respingem H_0	Neconcludent
Nu respingem H_0	Nu respingem H_0	Neconcludent

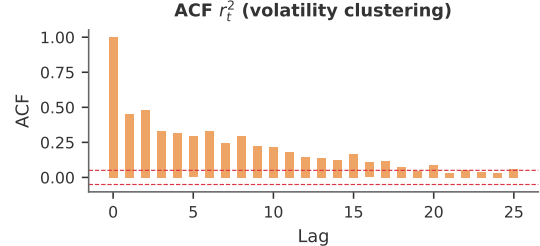
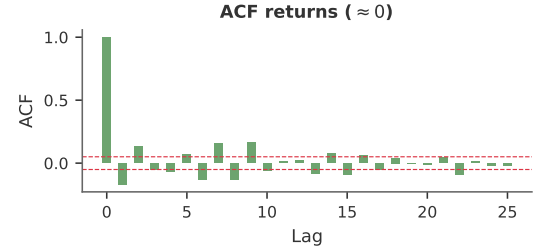
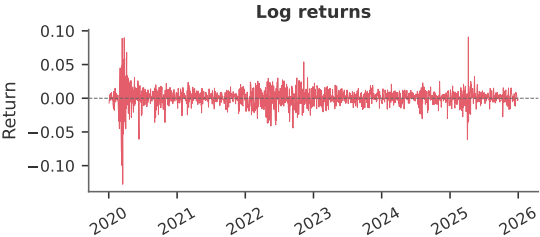
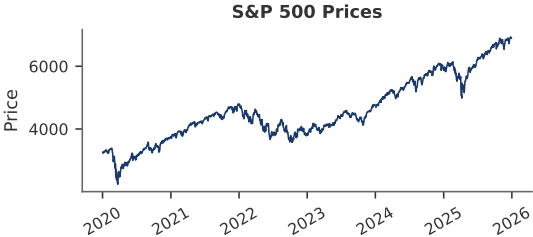
Flux de lucru recomandat:

- 1 Rulați testul ADF (nulă = rădăcină unitară)
- 2 Rulați testul KPSS (nulă = staționar)
- 3 Dacă rezultatele coincid, procedați cu încredere
- 4 Dacă neconcludent, considerați teste alternative (PP, DF-GLS)

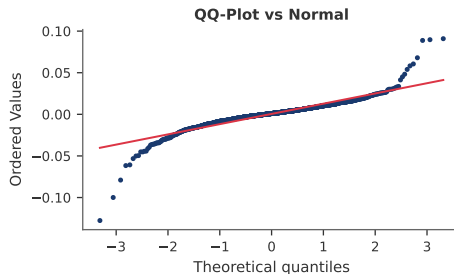
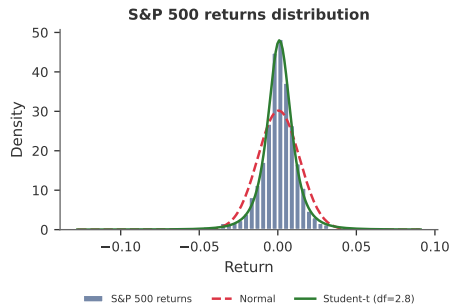
Testul ADF: Vizualizare cu S&P 500



Analiza S&P 500: Prezentare Generală



Fapte Stilizate ale Randamentelor Financiare



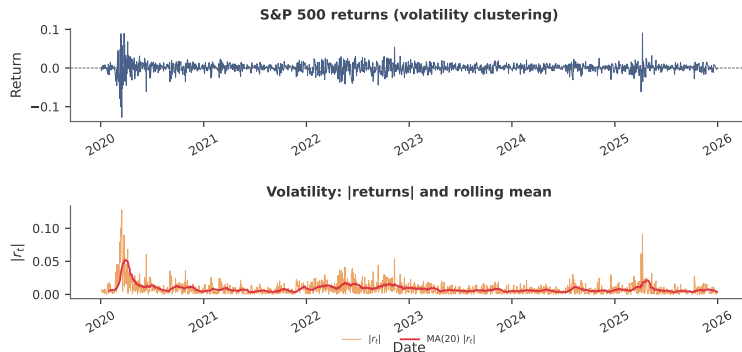
Proprietăți observate:

- Asimetrie negativă (coadă stângă)
- Kurtoză excesivă ($\gg 3$)
- Cozi groase (heavy tails)

Implicații:

- Distribuția normală inadecvată
- Evenimente extreme mai probabile
- Necesită distribuție Student-t sau similară

Gruparea Volatilității



Fapt Stilizat

Randamentele mari (pozitive sau negative) tind să fie urmate de randamente mari. Această **grupare a volatilității** motivează modelele ARCH/GARCH (capitolele viitoare).

- 1 **Serie de timp** = observații indexate după timp cu dependență temporală
- 2 **Descompunere**: Aditivă $X_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$ sau Multiplicativă
- 3 **Netezire Exponențială**: SES (nivel), Holt (trend), Holt-Winters (sezonier)
- 4 **Evaluare Prognoză**: MAE, RMSE, MAPE; folosiți separări train/validare/test
- 5 **Modelarea Sezonalității**: Variabile dummy (orice tipar) sau termeni Fourier (neted)
- 6 **Gestionarea Trendului**: Diferențiere (stochastic) sau regresie (determinist)
- 7 **Staționaritate**: Media, varianța, autocovarianța constante în timp
- 8 **ACF/PACF**: Esențiale pentru identificarea structurii de dependență
- 9 **Teste rădăcină unitară**: ADF (H_0 : rădăcină unitară) vs KPSS (H_0 : staționar)

Formule Importante I

Descompunere

Aditivă: $X_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$ Multiplicativă: $X_t = T_t \times S_t \times \varepsilon_t$

Netezire Exponențială Simplă (SES)

$\hat{X}_{t+1|t} = \alpha X_t + (1 - \alpha)\hat{X}_{t|t-1}$ unde $\alpha \in (0, 1)$

Trend Liniar Holt

$\ell_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1})$ $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1}$

Holt-Winters Aditivă

$\ell_t = \alpha(X_t - S_{t-s}) + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1})$ $S_t = \gamma(X_t - \ell_t) + (1 - \gamma)S_{t-s}$

Media Mobilă (Estimare Trend)

$$\hat{T}_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^q X_{t+j}$$

Autocovarianță și Autocorelație

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) \quad \rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$$

Mers Aleatoriu

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \quad \Rightarrow \quad \text{Var}(X_t) = t\sigma^2 \text{ (nestaționar)}$$

Diferențiere

$$\Delta X_t = (1 - L)X_t = X_t - X_{t-1}$$

Capitolul 2: Modele ARMA

- Modele Autoregresive (AR)
- Modele de Medie Mobilă (MA)
- Modele ARMA combinate
- Identificarea modelului folosind ACF/PACF
- Estimarea parametrilor
- Diagnosticarea modelului
- Prognoza

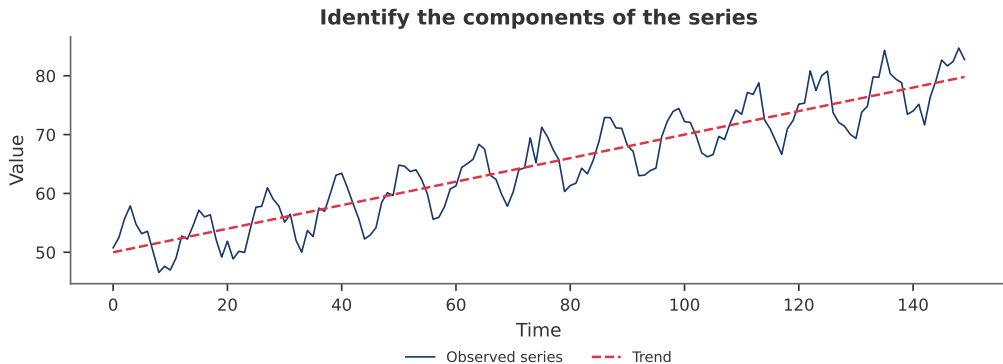
Întrebarea Quiz 1

Întrebare

O serie de timp Y_t arată mișcare ascendentă de-a lungul anilor plus tipare repetitive în fiecare trimestru. Ce componente sunt prezente?

- ☐ A Doar trend
- ☐ B Doar sezonabilitate
- ☐ C Trend și Sezonabilitate
- ☐ D Doar zgomot aleatoriu

Întrebarea Quiz 1: Răspuns



Răspuns Corect: (C) Trend și Sezonalitate

Mișcare ascendentă = Trend; Tipare trimestriale = Sezonalitate ($s=4$)

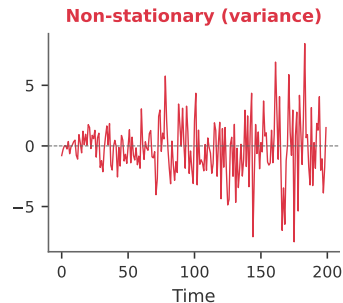
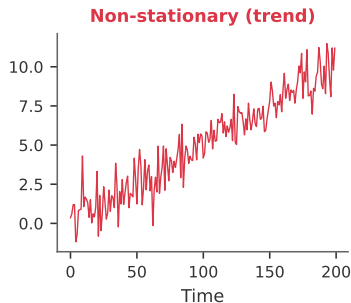
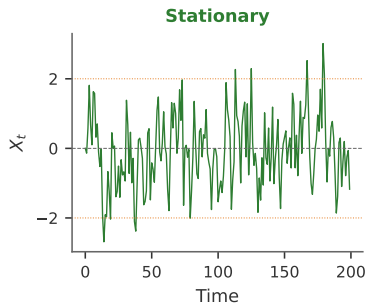
Întrebarea Quiz 2

Întrebare

Care dintre următoarele este o caracteristică a unei serii de timp staționare?

- ☐ A Media se schimbă în timp
- ☐ B Varianța crește în timp
- ☐ C Medie și varianță constante în timp
- ☐ D Conține o componentă de trend

Întrebarea Quiz 2: Răspuns



Răspuns Corect: (C) Medie și varianță constante în timp

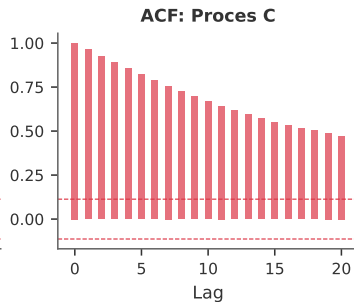
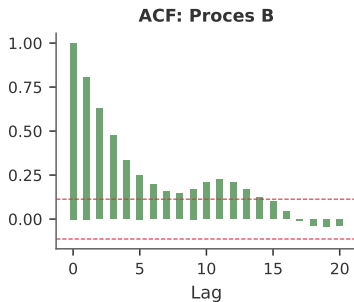
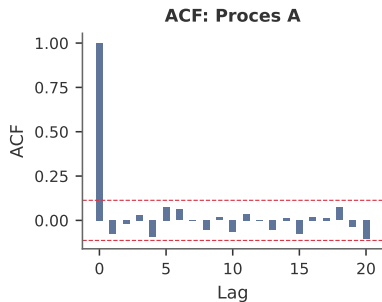
Staționaritatea necesită: medie constantă, varianță constantă și autocovarianța depinde doar de lag.

Întrebare

Pentru un proces de zgomot alb, cum arată ACF la lag-uri $k > 0$?

- ☐ A Descreștere exponențială
- ☐ B Toate valorile semnificative și pozitive
- ☐ C Toate valorile aproximativ zero (în interiorul benzilor de încredere)
- ☐ D Alternare pozitiv și negativ

Întrebarea Quiz 3: Răspuns



Răspuns Corect: (C) Aproximativ zero în interiorul benzilor de încredere

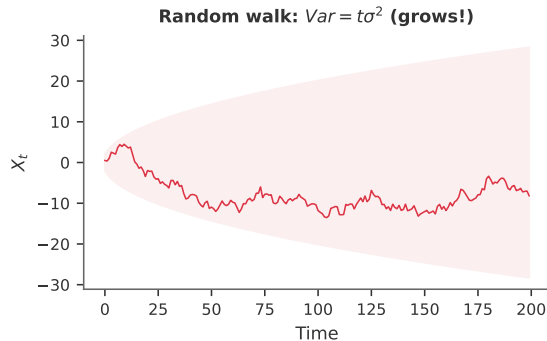
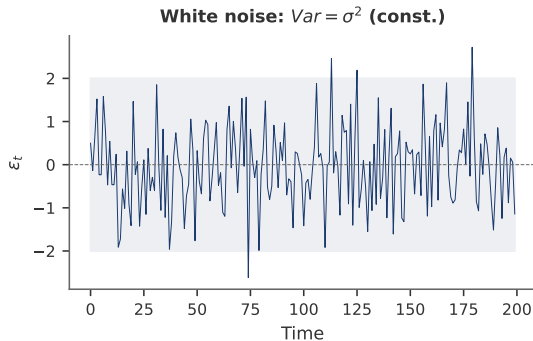
Zgomotul alb nu are autocorelație: $\rho_k = 0$ pentru toți $k \neq 0$.

Întrebare

Care este diferența cheie între zgomotul alb și mersul aleatoriu?

- ☐ A Zgomotul alb are trend, mersul aleatoriu nu
- ☐ B Mersul aleatoriu este suma cumulativă a zgomotului alb
- ☐ C Ambele sunt procese staționare
- ☐ D Zgomotul alb are varianță mai mare

Întrebarea Quiz 4: Răspuns



Răspuns Corect: (B) Mers aleatoriu = suma cumulativă a zgomotului alb

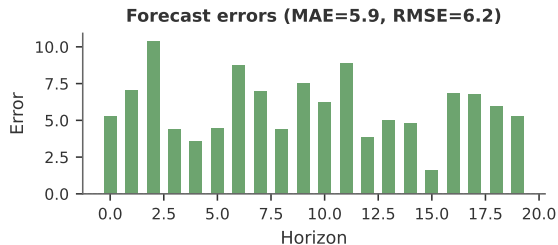
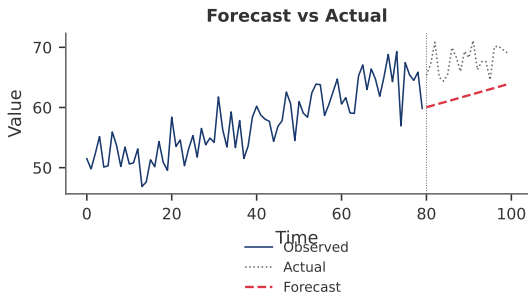
$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i \text{ unde } \varepsilon_t \text{ este zgomot alb.}$$

Întrebare

Care metrică de eroare a prognozei este cea mai sensibilă la erori mari (valori aberante)?

- ☐ A MAE (Eroarea Medie Absolută)
- ☐ B RMSE (Rădăcina Erorii Medii Pătratice)
- ☐ C MAPE (Eroarea Medie Absolută Procentuală)
- ☐ D Toate sunt la fel de sensibile

Întrebarea Quiz 5: Răspuns



Răspuns Corect: (B) RMSE

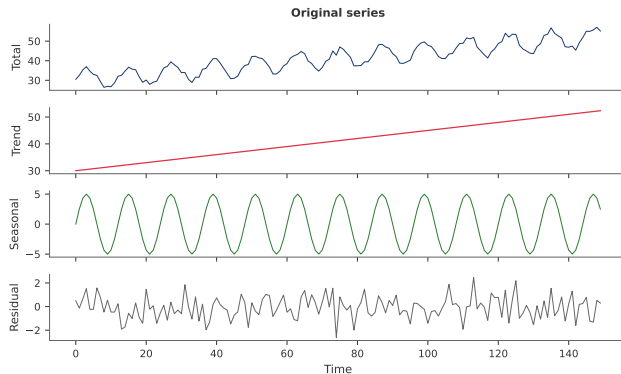
RMSE ridică la pătrat erorile, deci erorile mari au impact disproporționat: $\sqrt{\frac{1}{n} \sum e_t^2}$

Întrebare

Când ar trebui să folosiți descompunerea multiplicativă în loc de cea aditivă?

- ☐ A Când seria nu are trend
- ☐ B Când amplitudinea sezonieră este constantă
- ☐ C Când amplitudinea sezonieră crește odată cu nivelul seriei
- ☐ D Când seria este staționară

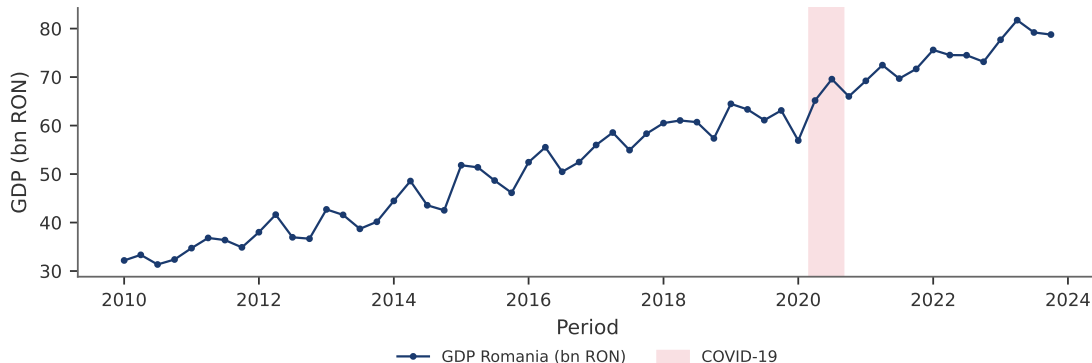
Întrebarea Quiz 6: Răspuns



Răspuns Corect: (C) Amplitudinea sezonieră crește odată cu nivelul

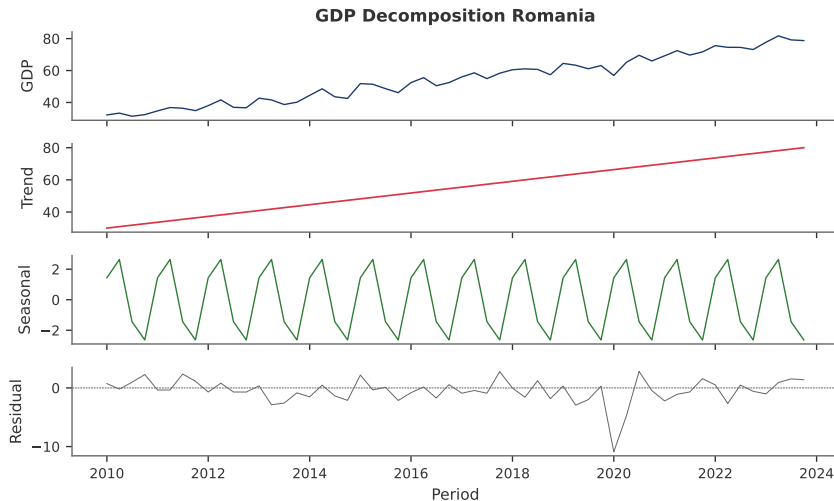
Multiplicativă: $Y_t = T_t \times S_t \times \varepsilon_t$ — oscilațiile sezoniere proporționale cu trendul.

Quarterly GDP Romania (2010-2023)



- **Date:** PIB trimestrial România, 2010–2023 (sursa: INS/Eurostat)
- **Observații:** Trend crescător, sezonabilitate trimestrială, șoc COVID-19 în 2020

Descompunerea Seriei PIB



Componente Identificate

- **Trend:** Creștere economică susținută
- **Sezonalitate:** Pattern trimestrial regulat ($Q4 > Q1$)
- **Reziduu:** Include șocul COVID-19 din 2020

Lecții Învățate

- Descompunerea ajută la înțelegerea structurii datelor
- Șocurile externe (COVID) apar în componenta reziduală
- Sezonalitatea trebuie modelată explicit

Următorii Pași

În capitolele următoare vom învăța să modelăm fiecare componentă: ARIMA pentru trend, SARIMA pentru sezonalitate.

Referințe



Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*. 3rd ed., OTexts.



Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.



Box, G.E.P., Jenkins, G.M., Reinsel, G.C., & Ljung, G.M. (2015). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. 5th ed., Wiley.



Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*. 3rd ed., Wiley.



Cleveland, R.B., Cleveland, W.S., McRae, J.E., & Terpenning, I. (1990). STL: A Seasonal-Trend Decomposition. *Journal of Official Statistics*, 6(1), 3-73.

Date Reale Utilizate în Acest Capitol

- **Pasageri Aviație:** Set de date clasic Box-Jenkins, 1949–1960
- **S&P 500:** Yahoo Finance (SPY), date istorice
- **Pete Solare:** Set de date Statsmodels, observații lunare

Software și Instrumente

- **Python:** statsmodels, pandas, matplotlib, yfinance
- **R:** pachetele forecast, tseries
- **Surse de Date:** Yahoo Finance, FRED Economic Data

Vă Mulțumesc!

Întrebări?

Grafice generate folosind Python (statsmodels, matplotlib)

Materiale curs disponibile la: <https://github.com/danpele/Time-Series-Analysis>