



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 8: Extensiile Moderne



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

Cuprins

- Motivație
- ARFIMA: Modele cu Memorie lungă
- Random Forest pentru serii de timp
- LSTM: Deep Learning pentru serii de timp
- Comparație și Selecția modelului
- Aplicații practice
- Studiu de Caz Complet: Cursul EUR/RON
- Comparație Finală: Toate Metodele
- Studiu de Caz 2: Consum Energie
- Exemple Suplimentare cu Date Reale
- Rezumat



Obiective de învățare

La finalul acestui capitol, veți fi capabili să:

1. Înțelegeți conceptul de memorie lungă în seriile de timp
2. Estimați și interpretați modele ARFIMA
3. Aplicați Random Forest pentru prognoză seriilor de timp
4. Construiți rețele LSTM pentru serii temporale
5. Comparați performanța modelelor clasice vs ML
6. Alegeti metoda potrivită în funcție de context
7. Implementați aceste metode în Python



De la modele clasice la machine learning

Limitările Modelelor ARIMA

- Presupun **memorie scurtă**: autocorelațiile scad exponențial
- Relații **liniare** între variabile
- Dificultăți cu **pattern-uri complexe și neliniare**
- Necesită **stationaritate** (prin diferențiere)

Soluții Moderne

- ARFIMA**: Captează memoria lungă (autocorelații care scad lent)
- Random Forest**: Relații neliniare, robustețe la outlieri
- LSTM**: Pattern-uri secvențiale complexe, dependențe pe termen lung



Când să folosim fiecare metodă?

| Caracteristică | ARIMA | ARFIMA | RF | LSTM |
|--------------------|-------|--------|----|------|
| Memorie lungă | ✗ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Relații neliniare | ✗ | ✗ | ✓ | ✓ |
| Interpretabilitate | ✓ | ✓ | ~ | ✗ |
| Date puține | ✓ | ✓ | ✗ | ✗ |
| Variabile exogene | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Incertitudine | ✓ | ✓ | ~ | ✗ |

Regula de Aur

- Începe simplu (ARIMA), apoi crește complexitatea doar dacă este justificat de date și performanță.



Ce este memoria lungă?

Memorie Scurtă (ARMA)

- Autocorelațiile ρ_k scad **exponențial**: $|\rho_k| \leq C \cdot r^k$, $r < 1$
- Efectele șocurilor dispar **rapid**
- Sumă finită: $\sum_{k=0}^{\infty} |\rho_k| < \infty$

Memorie lungă (ARFIMA)

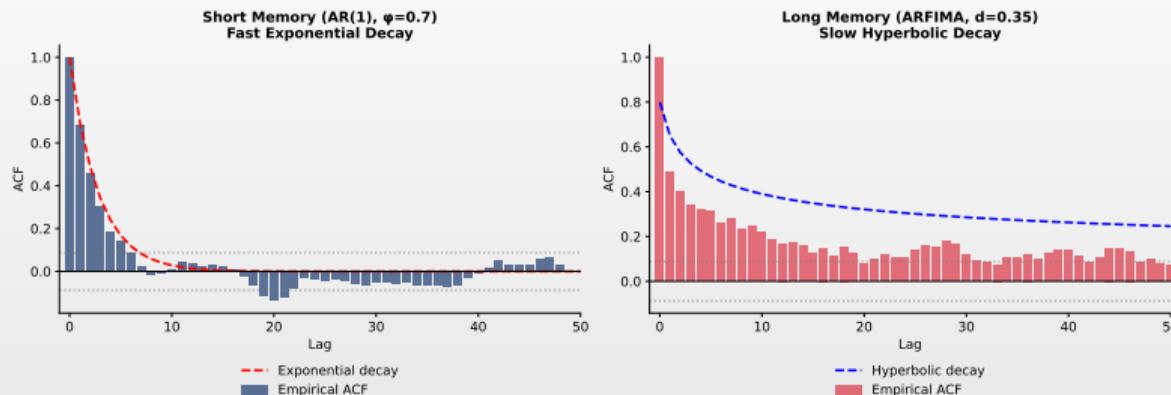
- Autocorelațiile scad **hiperbolic**: $\rho_k \sim C \cdot k^{2d-1}$
- Efectele șocurilor persistă **mult timp**
- Sumă infinită: $\sum_{k=0}^{\infty} |\rho_k| = \infty$ (pentru $d > 0$)

Exemple cu Memorie lungă

- Volatilitatea piețelor financiare, debite râuri, trafic rețea, inflație



Comparație ACF: memorie scurtă vs lungă



Interpretare

- Date: AR(1) simrat cu $\phi = 0.8$ și ARFIMA($0,d,0$) cu $d = 0.35$ ($n = 1000$)
- Stânga: AR(1) — autocorelații care scad exponential (memorie scurtă)
- Dreapta: ARFIMA cu $d = 0.35$ — autocorelații care scad hiperbolic (memorie lungă)

Modelul ARFIMA(p,d,q)

Definiție 1 (ARFIMA)

- Model:** Un proces $\{Y_t\}$ urmează un model **ARFIMA(p,d,q)** dacă: $\phi(L)(1 - L)^d Y_t = \theta(L)\varepsilon_t$
- Parametru:** $d \in (-0.5, 0.5)$ este parametrul de **diferențiere fractionară**

Operatorul de Diferențiere Fractionară

- $(1 - L)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k} (-L)^k = 1 - dL - \frac{d(1-d)}{2!} L^2 - \dots$

Cazuri Particulare

- $d = 0$: ARMA standard (memorie scurtă)
- $0 < d < 0.5$: Memorie lungă, staționaritate
- $d = 0.5$: Limita staționarității
- $0.5 \leq d < 1$: Nestaționaritate, dar mean-reverting
- $d = 1$: Random walk (ARIMA standard)



Interpretarea parametrului d

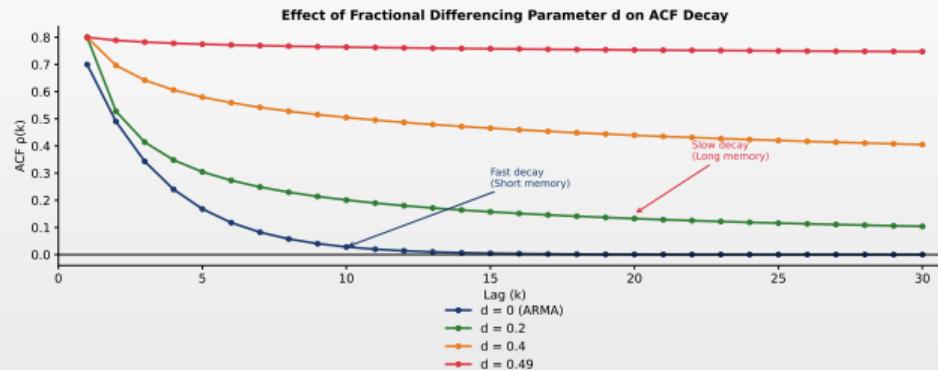
| Valoare d | Comportament ACF | Interpretare |
|---------------|----------------------|-----------------------------|
| $d = 0$ | Scădere exponențială | Memorie scurtă |
| $0 < d < 0.5$ | Scădere hiperbolică | Memorie lungă, staționară |
| $d = 0.5$ | ACF nesumabilă | La limită |
| $0.5 < d < 1$ | Scădere foarte lentă | Memorie lungă, nestaționară |
| $d = 1$ | ACF = 1 (constant) | Random walk |

Parametrul Hurst H

- Relația:** $d = H - 0.5$
 - ▶ $H = 0.5$: Mers aleator (fără memorie)
 - ▶ $H > 0.5$: Persistentă (trend-following)
 - ▶ $H < 0.5$: Anti-persistentă (mean-reverting)



Efectul parametrului d asupra ACF



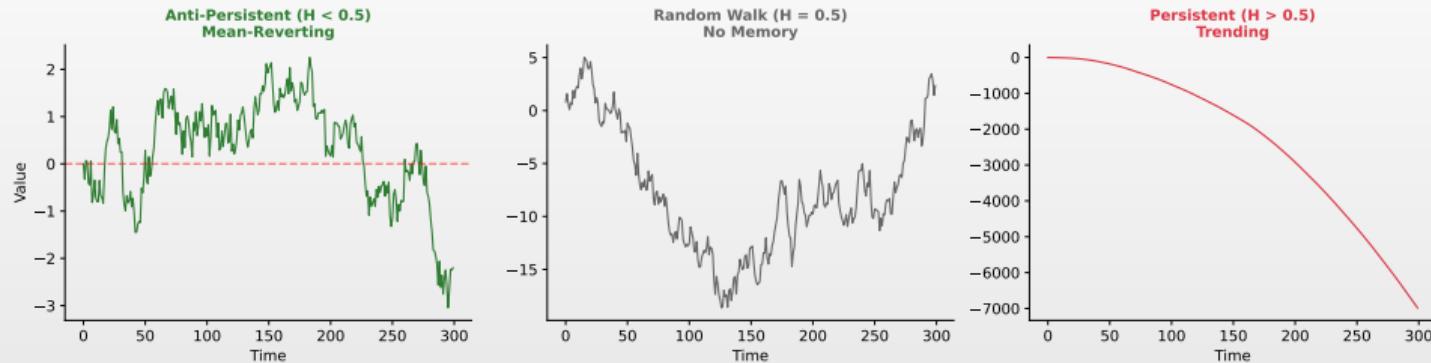
Interpretare

- Date: ARFIMA($0,d,0$) simulant pentru $d \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$ ($n = 1000$)
- Cu cât d este mai mare, cu atât autocorelațiile scad mai lent
- Pentru $d \rightarrow 0.5$, autocorelațiile rămân semnificative chiar și la lag-uri foarte mari

Q TSA_ch8_arfima_d_effect



Exponentul Hurst: interpretare vizuală



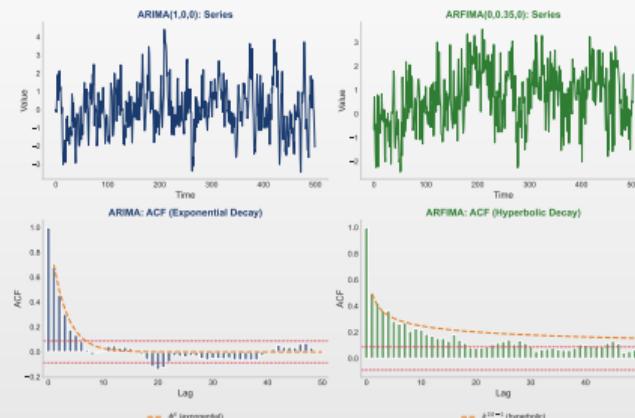
Interpretare

- Date: Mișcare Browniană fracționară simulată cu $H \in \{0.3, 0.5, 0.7\}$
- $H < 0.5$: Mean-reverting $H = 0.5$: Mers aleator $H > 0.5$: Persistentă

Q TSA_ch8_hurst_interpretation



ARIMA vs ARFIMA: comparație simulată

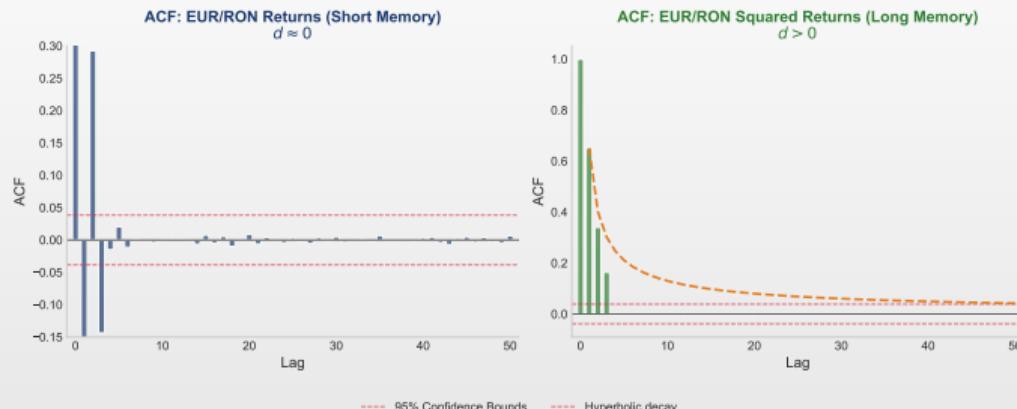


Interpretare

- Date: ARIMA(1,1,1) simulat vs ARFIMA(1, d ,1) cu $d = 0.35$
- ARIMA (stânga): ACF scade **exponențial** — șocurile sunt “uitate” rapid
- ARFIMA (dreapta, $d = 0.35$): ACF scade **hiperbolic** — șocurile persistă mult timp



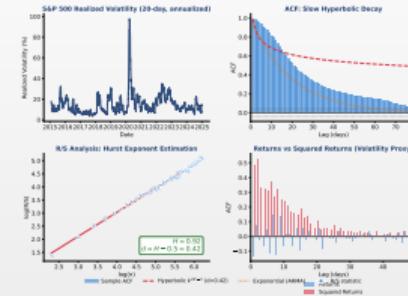
Exemplu date reale: analiza memoriei lungi EUR/RON



Interpretare

- **Date:** Cursul zilnic EUR/RON (Yahoo Finance, 2015–2025)
- **Randamente:** $H \approx 0.50$, $d \approx 0$ — memorie scurtă
- **Randamente pătrate:** $H \approx 0.65$, $d \approx 0.15$ — memorie lungă în volatilitate

Exemplu ARFIMA: Volatilitatea Realizată S&P 500



Rezultate Estimare

- Date:** Randamentele zilnice S&P 500 (Yahoo Finance, 2015–2024)
- Hurst:** $H = 0.92$, $d = H - 0.5 = 0.42$ – memorie lungă puternică

Observație Cheie

Volatilitatea are **memorie lungă** – șocurile persistă mai mult decât în ARMA; folosiți ARFIMA sau FIGARCH!



Estimarea parametrului d

Metode de estimare

- GPH (Geweke-Porter-Hudak)**: Regresie în domeniul frecvență
 - $\ln I(\omega_j) = c - d \cdot \ln\left(4 \sin^2 \frac{\omega_j}{2}\right) + \varepsilon_j$
- R/S (Rescaled Range)**: Metoda lui Hurst
 - $\frac{R}{S}(n) \sim c \cdot n^H$
- MLE (Maximum Likelihood)**: Estimare completă ARFIMA
- Whittle**: Aproximare eficientă în domeniul frecvență

Implementare

- În Python: arch package, statsmodels.tsa.arima.model.ARIMA cu order=(p,d,q) unde d poate fi fractionar



Exemplu ARFIMA în Python

Cod Python

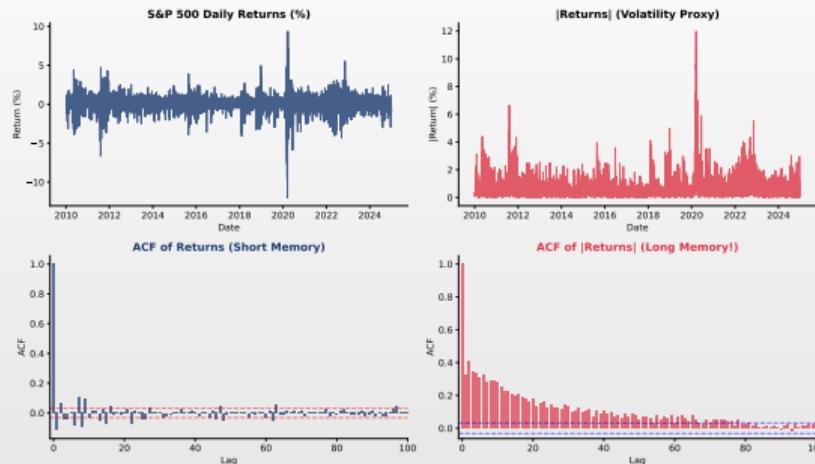
```
 from statsmodels.tsa.arima.model import ARIMA  
model = ARIMA(y, order=(1, 0.3, 1))  
results = model.fit()
```

Notă

- Estimarea ARFIMA necesită pachete specializate. În practică, se folosește adesea arch sau fracdiff în Python.

 TSA_ch8_arfima_estimation

Exemplu real: memorie lungă în volatilitate



Interpretare

- Date:** Randamentele zilnice S&P 500 (Yahoo Finance, 2010–2025)
- Fapt Stilizat:** Randamentele financiare au memorie scurtă, dar volatilitatea ($|r_t|$) are memorie lungă
- Aceasta este baza modelelor FIGARCH



Random Forest: concepte de bază

Ce este Random Forest?

- Ansamblu** de arbori de decizie
- Fiecare arbore antrenat pe un **subset bootstrap** al datelor
- La fiecare nod, se selectează **aleator** un subset de features
- Predicția finală = **media** predicțiilor tuturor arborilor

Avantaje pentru serii de timp

- Captează **relații neliniare**
- Robust** la outlieri și zgomot
- Nu necesită **staționaritate**
- Oferă **importanță features** (interpretabilitate)
- Funcționează bine cu **multe variabile**



Pregătirea datelor pentru Random Forest

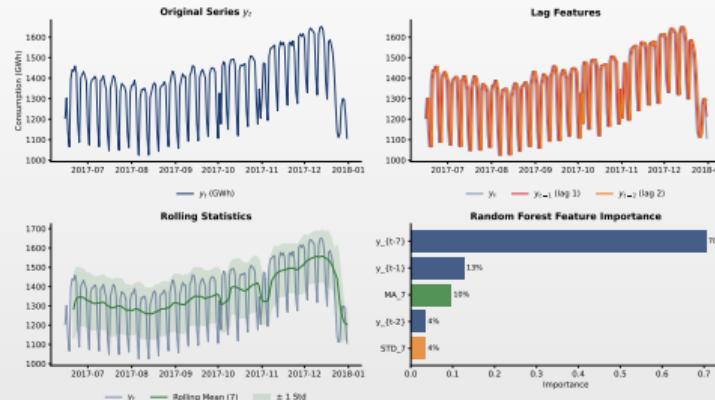
Feature Engineering pentru serii de timp

1. **Lag features:** $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-p}$
2. **Rolling statistics:** medie mobilă, deviație standard
3. **Calendar features:** ziua săptămânii, luna, sezon
4. **Trend features:** timp, trend pătratic
5. **Variabile exogene:** indicațori economici, evenimente

Atenție: Data Leakage!

- Nu folosi informații din viitor în features
- Train/test split: **temporal**, nu aleator!
- Rolling statistics: calculează doar pe date **anterioare**

Feature engineering: ilustrare



Interpretare

- **Date:** Consum zilnic de electricitate Germania (OPSD, 2012–2017)
- Transformăm seria temporală în features: lag-uri, statistici rolling
- Modelul RF învață relațiile dintre acestea și valorile viitoare



Random Forest: implementare Python

Cod Python

```
[•] from sklearn.ensemble import RandomForestRegressor  
rf = RandomForestRegressor(n_estimators=100, max_depth=10)  
rf.fit(X_train, y_train)  
predictions = rf.predict(X_test)
```

Importanța features și interpretare

Feature Importance

- Mean Decrease Impurity (MDI)**: Reducerea impurității la fiecare split
- Permutation Importance**: Cât scade performanța când feature-ul e permuatat aleator

Interpretare Tipică pentru serii de timp

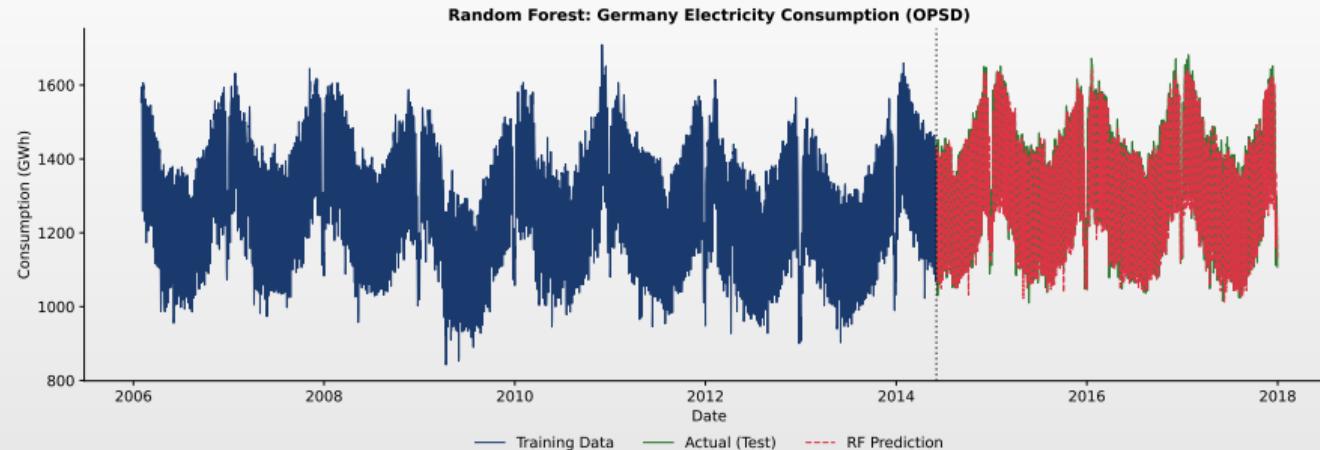
- lag_1 foarte important \succ Autocorelare puternică
- rolling_mean important \succ Trend local contează
- month important \succ Sezonalitate prezentă

Cod

- `rf.feature_importances_ sau permutation_importance(rf, X_test, y_test)`



Random Forest: exemplu de prognoză

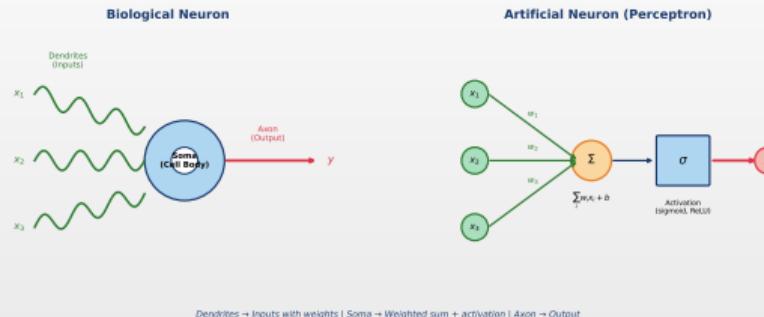


Interpretare

- **Date:** Consum zilnic de electricitate Germania (OPSD, 2012–2017)
- Modelul RF antrenat pe date istorice (albastru) produce prognoze (roșu punctat) care urmăresc bine valorile reale din perioada de test (verde)



De la neuronul biologic la cel artificial



Analogia

- Dendrite → Intrări x_i Sinapse → Ponderi w_i Soma → Sumă + Activare Axon → ieșire y

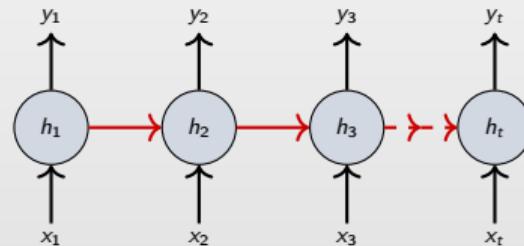
Q TSA_ch8_neuron_comparison



Rețele neuronale recurente (RNN)

Ideea de Bază

- Rețele care procesează **secvențe** de date
- Au **memorie internă** (hidden state)
- Starea curentă depinde de input + starea anterioară



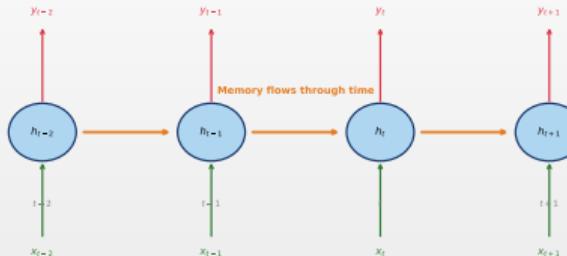
Problema: Vanishing Gradient

- RNN simple “uită” informația din trecut îndepărtat.



RNN desfășurată în timp

Recurrent Neural Network (Unfolded Through Time)



Idea Cheie

- Procesează **secvențe** pas cu pas
- Starea ascunsă h_t transportă **memoria**
- Actualizare: $h_t = \tanh(W_h h_{t-1} + W_x x_t)$

Problema Gradientului care Dispare

- **Gradient**: derivata pentru actualizarea ponderilor
- Secvențe lungi: $\frac{\partial L}{\partial h_1} \propto \prod W_h \rightarrow 0$
- Pașii timpurii nu mai învață
- **Soluția**: porțile LSTM/GRU

Q TSA_ch8_rnn_unfolded

LSTM: long short-term memory

Soluția LSTM

- **Concept:** Celule speciale cu 3 porți care controlează fluxul informației
- **Forget Gate (f_t):** Ce să uităm din memoria anterioară
- **Input Gate (i_t):** Ce informație nouă să adăugăm
- **Output Gate (o_t):** Ce să trimitem la ieșire

Ecuările LSTM



$$f_t = \sigma(W_f \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_f) \quad (\text{Forget})$$

$$i_t = \sigma(W_i \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_i) \quad (\text{Input})$$

$$\tilde{C}_t = \tanh(W_C \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_C) \quad (\text{Candidate})$$

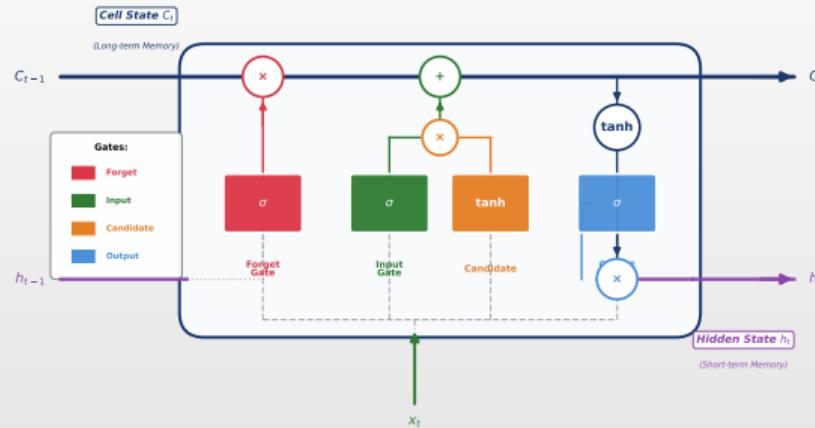
$$C_t = f_t \odot C_{t-1} + i_t \odot \tilde{C}_t \quad (\text{Cell state})$$

$$o_t = \sigma(W_o \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_o) \quad (\text{Output})$$

$$h_t = o_t \odot \tanh(C_t) \quad (\text{Hidden state})$$



Celula LSTM: Diagrama Detaliată



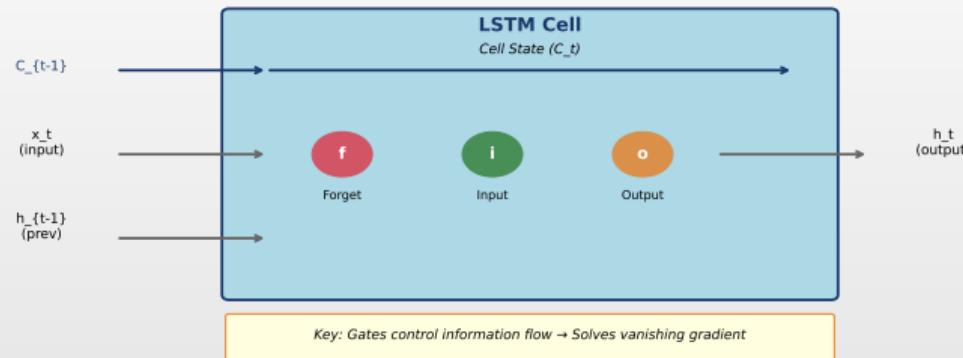
Forget Gate f_t
 $\sigma(W_f[h_{t-1}, x_t] + b_f)$
 Ce să uităm?

Input Gate i_t
 $\sigma(W_i[h_{t-1}, x_t] + b_i)$
 Ce să stocăm?

Output Gate o_t
 $\sigma(W_o[h_{t-1}, x_t] + b_o)$
 Ce să transmitem?

Q TSA_ch8_lstm_cell

Arhitectura celulei LSTM



Interpretare

- Poartile (forget, input, output) controlează ce informație este uitată, adăugată și transmisă
- Cell state** permite gradienților să “curgă” fără degradare



Avantajele LSTM pentru serii de timp

De ce LSTM?

- Captează **dependențe pe termen lung** (spre deosebire de RNN simplu)
- Învață **pattern-uri complexe și neliniare**
- Gestioneză **secvențe de lungimi variabile**
- Funcționează bine cu **date multivariate**

Dezavantaje

- Necesită **multe date** pentru antrenare
- Computațional intensiv**
- “Black box” - greu de interpretat
- Sensibil la **hiperparametri**
- Poate face **overfitting** ușor



LSTM: implementare în Python cu Keras

Cod Python

```
[•] from tensorflow.keras.models import Sequential  
from tensorflow.keras.layers import LSTM, Dense, Dropout  
  
model = Sequential([  
    LSTM(50, return_sequences=True, input_shape=(n, 1)),  
    Dropout(0.2),  
    LSTM(50),  
    Dense(1)  
])  
  
model.compile(optimizer='adam', loss='mse')
```



Pregătirea datelor pentru LSTM

Pași Esențiali

1. **Normalizare/Scalare:** MinMaxScaler sau StandardScaler
2. **Creare secvențe:** Sliding window pentru input
3. **Reshape:** Format 3D (samples, timesteps, features)
4. **Train/Test split:** Temporal, nu aleator!

Exemplu Creare Secvențe

```
 def create_sequences(data, n_steps):
    X, y = [], []
    for i in range(len(data) - n_steps):
        X.append(data[i:(i + n_steps)])
        y.append(data[i + n_steps])
    return np.array(X), np.array(y)

X, y = create_sequences(scaled_data, 10)
```



Metrici de evaluare

Metrici Comune

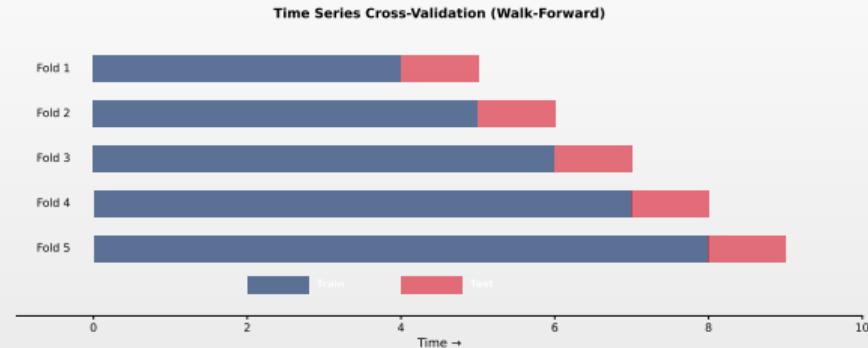
- RMSE**: $\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}$ \succcurlyeq Eroare în unități originale
- MAE**: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|$ \succcurlyeq Robust la outlieri
- MAPE**: $\frac{100}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right|$ \succcurlyeq Eroare procentuală
- MASE**: Comparat cu benchmark naiv

Validare pentru serii de timp

- Nu folosiți cross-validation standard!**
- Folosiți Time series cross-validation (walk-forward)**
- Sau train/validation/test split temporal**



Time series cross-validation



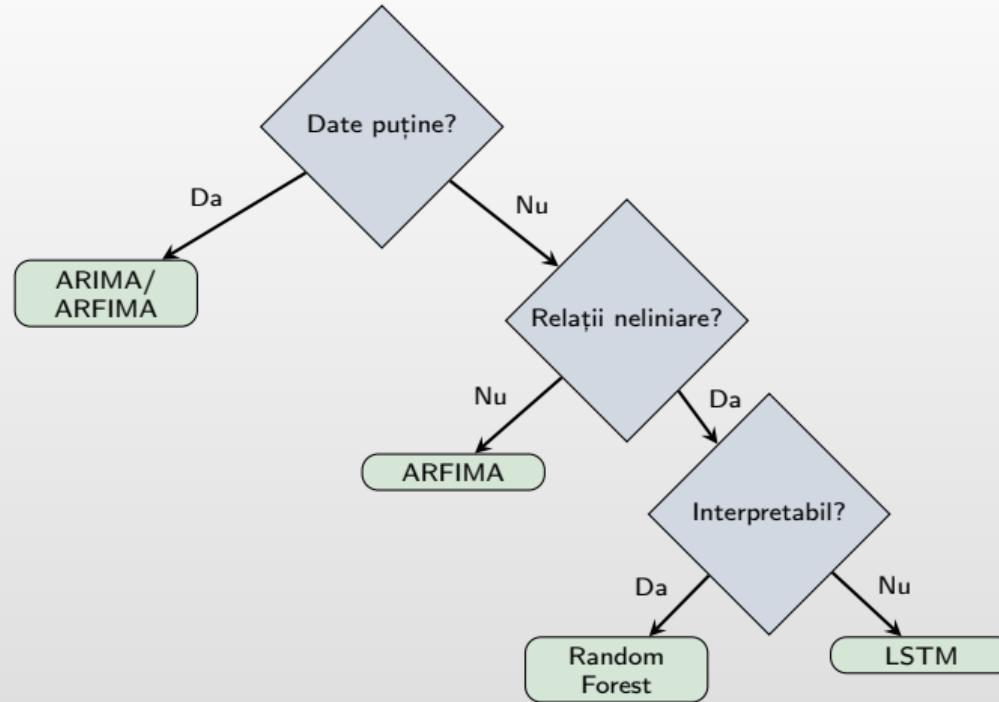
Implementare Python

```
from sklearn.model_selection import TimeSeriesSplit  
tscv = TimeSeriesSplit(n_splits=5)
```

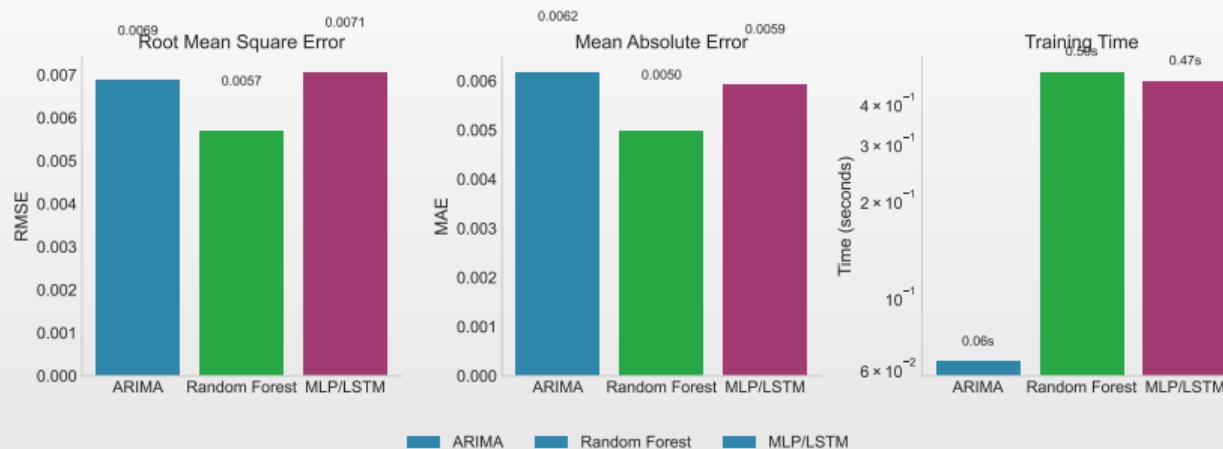
Important: Setul de antrenare crește progresiv, testul este întotdeauna în viitor



Ghid de selecție a modelului



Comparătie modele: acuratețe vs cost computațional



Interpretare

- **Trade-off:** Modelele ML pot avea acuratețe ușor mai bună, dar costul computațional crește semnificativ
- Pentru date puține sau interpretabilitate, ARIMA/ARFIMA rămân alegeri excelente



Studiu de caz: prognoza prețului Bitcoin

De ce Bitcoin?

- Volatilitate **extremă** și pattern-uri complexe
- Potențială **memorie lungă** în volatilitate
- Relații **neliniare** cu variabile exogene
- Date disponibile la **frecvență înaltă**

Abordare Comparativă

1. ARIMA pe randamente
2. ARFIMA pentru memorie lungă
3. Random Forest cu features tehnice
4. LSTM pe sevențe de prețuri



Bitcoin: evoluția prețului și randamentele

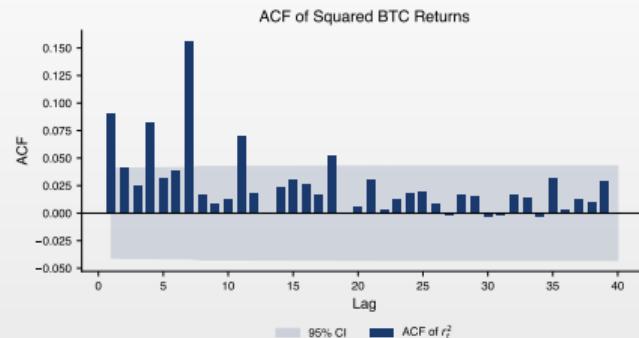


Observații cheie

- Creștere exponențială a prețului \succ distribuție puternic **leptokurtotică**
- Randamentele zilnice: medie $\approx 0.15\%$, volatilitate $\approx 3.5\%$
- Volatility clustering evident \succ perioadele de criză (2018, 2020, 2022)
- Kurtosis $\approx 10-15$ (mult peste 3 al normalei)



Bitcoin: ACF și evidență pentru memorie lungă



Analiză ACF

- ACF randamente: scădere rapidă \succ memorie scurtă în medie
- ACF randamente pătrate: scădere lentă, hiperbolică
 - ▶ Indică **memorie lungă în volatilitate**
 - ▶ Hurst $H \approx 0.65\text{--}0.70$ ($d \approx 0.15\text{--}0.20$)
- ARFIMA pe volatilitate $>$ ARMA \succ captează persistența șocurilor



Bitcoin: estimare ARFIMA și comparație modele

Cod Python – estimare memorie lungă Bitcoin

```
import yfinance as yf
btc = yf.download('BTC-USD', start='2018-01-01', end='2024-12-31')
returns = np.log(btc['Close']).diff().dropna() * 100

# Exponentul Hurst pe randamente pătrate (volatilitate)
from hurst import compute_Hc
H, c, _ = compute_Hc(returns.values**2, kind='change')
print(f"Hurst (volatilitate): {H:.3f}, d = {H-0.5:.3f}")

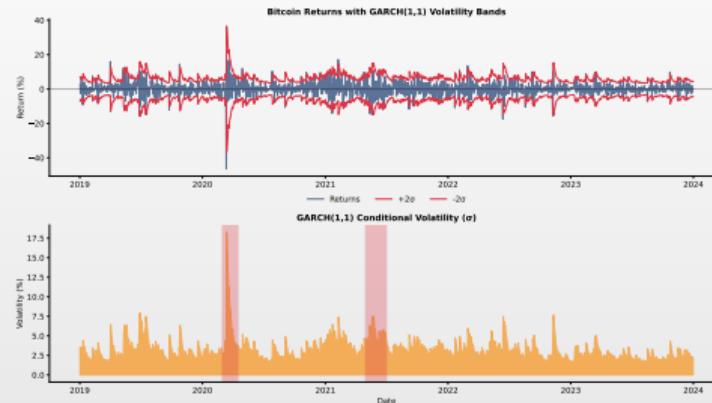
# Comparație ARIMA vs Random Forest
from sklearn.ensemble import RandomForestRegressor
from sklearn.metrics import mean_squared_error
# ... (similar cu EUR/RON, cu features adaptate)
```

Rezultate tipice Bitcoin (RMSE pe randamente)

| Model | RMSE | MAE | Interpretabil? |
|---------------|------|------|----------------|
| ARIMA(1,0,1) | 3.82 | 2.41 | Da |
| ARFIMA(1,d,1) | 3.79 | 2.38 | Da |
| Random Forest | 3.65 | 2.29 | Partial |
| LSTM | 3.71 | 2.33 | Nu |



Bitcoin: GARCH și managementul riscului



Concluzii – Studiu Bitcoin

- Diferențele între modele sunt **mici** pentru media randamentelor
- Valoarea adăugată majoră: **modelarea volatilității** (GARCH, EGARCH)
- ARFIMA captează persistența în volatilitate (memorie lungă)
- Random Forest: util pentru **features neliniare** (volum, sentiment)
- Combinăție optimă: ARFIMA-GARCH + features exogene via RF



Studiu de caz: prognoza consumului de energie

Caracteristici

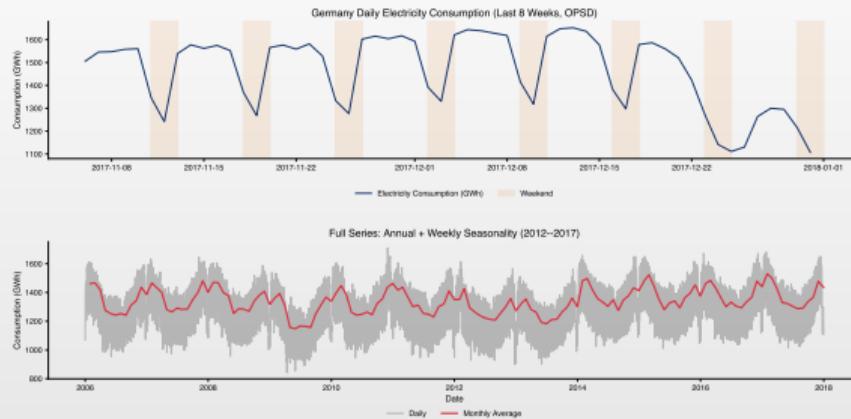
- Sezonalitate multiplă:** zilnică, săptămânală, anuală
- Tendință** de creștere pe termen lung
- Variabile exogene:** temperatură, zi liberă, preț
- Anomalii:** evenimente speciale, defectiuni

Provocări

- Pattern-uri la scale temporale diferite
- Interacțiuni complexe între variabile
- Necesitatea prognozelor pe orizonturi diferite



Energie: vizualizarea cererii și sezonialitatea multiplă

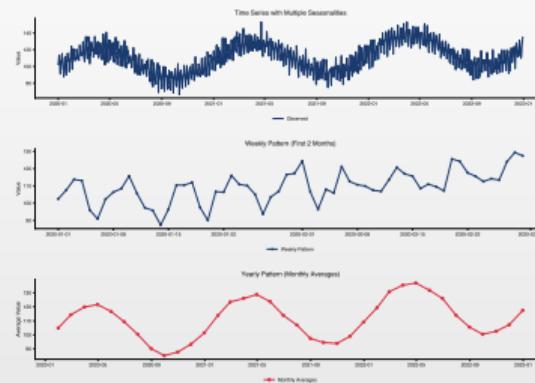


Patternuri identificate

- Zilnic (24h)**: vârf dimineată (8–10) și seara (18–21), minim noaptea
- Săptămânal (168h)**: consum redus în weekend (~15–20% mai puțin)
- Anual (8766h)**: vârf vara (aer condiționat) și iarna (încălzire)
- SARIMA nu poate modela simultan aceste 3 perioade!



Energie: de ce Prophet și TBATS?

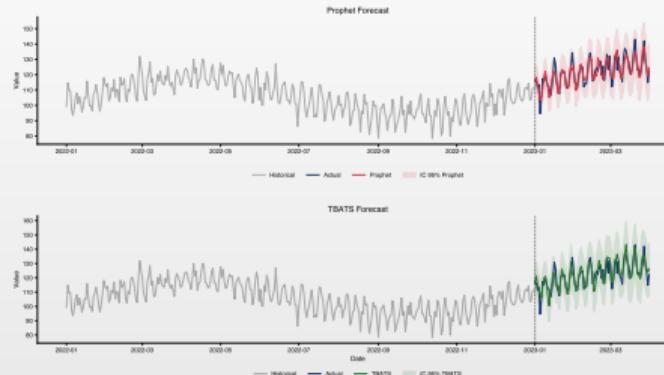


Soluția: modele cu sezonalitate multiplă

- **TBATS:** perioade [24, 168, 8766] \succ Fourier pentru fiecare sezon
 - ▶ Automat, fără reglaj manual, bun pentru producție
- **Prophet:** sezonalitate aditivă/multiplicativă + regresori
 - ▶ Adaugă temperatură, zile libere, evenimente speciale
- **ARIMA clasic:** poate doar 1 sezon \succ MAPE $\approx 8\text{--}10\%$



Energie: descompunere Prophet și rezultate



Rezultate comparație pe date energie (MAPE)

| Model | MAPE | RMSE (MW) | Acoperire 95% |
|---------------------|-------------|------------|---------------|
| SARIMA (1 sezon) | 8.5% | 450 | 75% |
| TBATS | 4.2% | 220 | 82% |
| Prophet | 4.8% | 250 | 85% |
| Prophet + regresori | 3.9% | 200 | 88% |



Energie: concluzii și recomandări practice

Lecții învățate

- Modelele cu **sezonalitate multiplă** reduc MAPE cu ~50% față de SARIMA
- Variabilele exogene** (temperatură) aduc câștig suplimentar de 10–15%
- Prophet excelează la **interpretabilitate**: descompunere trend + sezon + holiday
- TBATS: cel mai bun **out-of-the-box** > fără reglaj de hiperparametri

Când ce model?

- Prophet**: când ai regresori externi + interpretare pentru management
- TBATS**: automatizare, producție, fără intervenție umană
- LSTM/RF**: dacă ai >100.000 observații și pattern-uri neliniare complexe

Detalii complete despre Prophet și TBATS > Capitolul 9



Formule cheie – Rezumat

ARFIMA(p,d,q)

- $\phi(L)(1 - L)^d Y_t = \theta(L)\varepsilon_t$
- $d \in (-0.5, 0.5)$: memorie lungă

Memorie lungă

- **ACF**: $\rho_k \sim C \cdot k^{2d-1}$
- **Hurst**: $d = H - 0.5$
- $H > 0.5$: persistență

Random Forest

- $\hat{y} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B T_b(x)$
- B arbori, features aleatorii

LSTM Cell

- $f_t = \sigma(W_f[h_{t-1}, x_t] + b_f)$
- $C_t = f_t \odot C_{t-1} + i_t \odot \tilde{C}_t$
- Forget, Input, Output gates

Metrici Evaluare

- RMSE = $\sqrt{\frac{1}{n} \sum (y_i - \hat{y}_i)^2}$
- MAPE = $\frac{100}{n} \sum \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right|$

Time Series CV

- Walk-forward validation
- Train \succ Test (temporal split)



Studiu de caz: prognoza cursului EUR/RON

De ce EUR/RON?

- Relevanță pentru economia românească
- Potențială **memorie lungă** (persistența șocurilor)
- Pattern-uri influențate de **factori macroeconomici**
- Date ușor accesibile (BNR, Yahoo Finance)

Obiectiv

- Comparăm ARIMA, ARFIMA, Random Forest și LSTM pe aceleși date pentru a înțelege punctele forte ale fiecărei metode



Pasul 1: Încărcarea și Vizualizarea Datelor

Cod Python – Descărcare Date

```
import yfinance as yf
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Descarcă datele EUR/RON (sau EURRON=X)
data = yf.download('EURRON=X', start='2015-01-01', end='2024-12-31')
df = data[['Close']].dropna()
df.columns = ['EURRON']

# Calculăm randamentele logaritmice
df['Returns'] = np.log(df['EURRON']).diff() * 100
df = df.dropna()

print(f"Perioada: {df.index[0]} - {df.index[-1]}")
print(f"Observații: {len(df)}")
print(f"Media randamentelor: {df['Returns'].mean():.4f}%")
print(f"Volatilitate: {df['Returns'].std():.4f}%")
```



Vizualizarea seriei EUR/RON

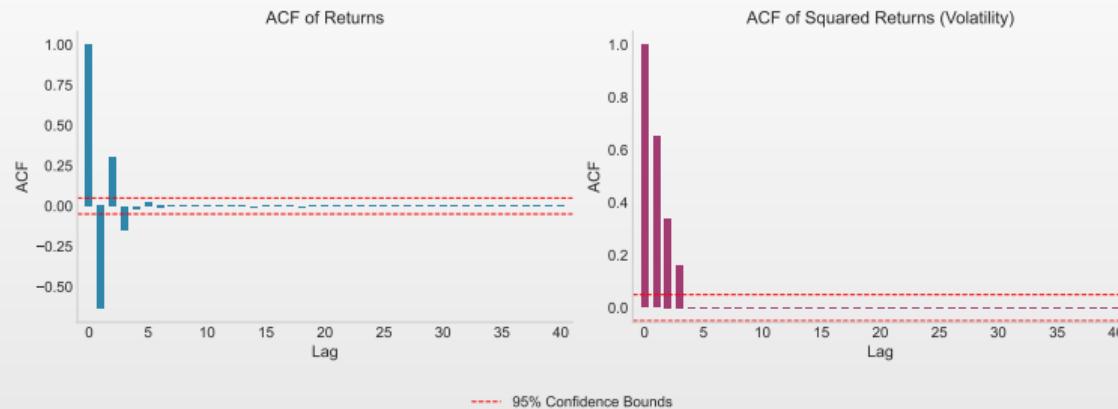


Interpretare

- Date:** Cursul zilnic EUR/RON (Yahoo Finance, 2019–2025)
- Sus:** Cursul EUR/RON — tendință de depreciere a leului și perioade de volatilitate ridicată
- Jos:** Randamentele zilnice — volatility clustering (perioadele de volatilitate mare sunt urmate de alte perioade similare)



Analiză ACF: randamente vs randamente pătrate



Interpretare

- Date:** Randamentele zilnice și randamentele pătrate EUR/RON (Yahoo Finance, 2019–2025)
- Stânga:** ACF al randamentelor — scădere rapidă, fără autocorelație semnificativă după lag 1
- Dreapta:** ACF al randamentelor pătrate — scădere lentă indică **volatility clustering** (efekte ARCH)



Pasul 2: Testarea memoriei lungi

Cod Python – Estimarea lui d și Testul Hurst

```
from arch.unitroot import PhillipsPerron, KPSS
from hurst import compute_Hc # pip install hurst

# Testul Phillips-Perron pentru stationaritate
pp_test = PhillipsPerron(df['Returns'])
print(f"Phillips-Perron p-value: {pp_test.pvalue:.4f}")

# Estimarea exponentului Hurst
H, c, data_rs = compute_Hc(df['Returns'].values, kind='change')
d_estimated = H - 0.5

print(f"Exponentul Hurst (H): {H:.4f}")
print(f"Parametrul d estimat: {d_estimated:.4f}")

# Interpretare
if H > 0.5:
    print("Serie PERSISTENȚĂ (trend-following)")
elif H < 0.5:
    print("Serie ANTI-PERSISTENȚĂ (mean-reverting)")
else:
    print("Mers aleator")
```



Rezultate test memorie lungă – EUR/RON

Output Tipic

- Phillips-Perron p-value: 0.0001 (randamentele sunt staționare)
- Exponentul Hurst (H): 0.47
- Parametrul d estimat: -0.03
- Serie ușor ANTI-PERSISTENTĂ (mean-reverting)

Interpretare

- Randamentele EUR/RON sunt **staționare** (p-value < 0.05)
- $H \approx 0.47 < 0.5$: ușoară tendință de revenire la medie
- $d \approx 0$: **memorie scurtă** – ARMA poate fi suficient
- Totuși, **volatilitatea** poate avea memorie lungă!



Pasul 3: Model ARIMA

Cod Python – ARIMA cu selecție automată

```
from statsmodels.tsa.arima.model import ARIMA
from sklearn.metrics import mean_squared_error, mean_absolute_error
import warnings
warnings.filterwarnings('ignore')

# Împărțim datele: 80% train, 20% test
train_size = int(len(df) * 0.8)
train, test = df['Returns'][:train_size], df['Returns'][train_size:]

# Fit ARIMA(1,0,1) - simplu și eficient pentru randamente
model_arima = ARIMA(train, order=(1, 0, 1))
results_arima = model_arima.fit()

# Prognoză
forecast_arima = results_arima.forecast(steps=len(test))

# Evaluare
rmse_arima = np.sqrt(mean_squared_error(test, forecast_arima))
mae_arima = mean_absolute_error(test, forecast_arima)
print(f"ARIMA(1,0,1) - RMSE: {rmse_arima:.4f}, MAE: {mae_arima:.4f}")
```



Pasul 4: Model ARFIMA (Memorie lungă)

Cod Python – ARFIMA cu arch package

```
from arch import arch_model

# ARFIMA(1,d,1) folosind arch pentru estimare robustă
# Notă: arch estimează d automat în contextul GARCH

# Alternativ, folosim statsmodels cu d fracționar
from statsmodels.tsa.arima.model import ARIMA

# Estimăm d folosind GPH sau setăm manual
d_frac = 0.1 # sau valoarea estimată anterior

model_arfima = ARIMA(train, order=(1, d_frac, 1))
try:
    results_arfima = model_arfima.fit()
    forecast_arfima = results_arfima.forecast(steps=len(test))
    rmse_arfima = np.sqrt(mean_squared_error(test, forecast_arfima))
    print(f"ARFIMA(1,{d_frac},1) - RMSE: {rmse_arfima:.4f}")
except:
    print("ARFIMA necesită d între -0.5 și 0.5 pentru stationaritate")
```



Pasul 5: Random Forest – Pregătire Date

Cod Python – Feature Engineering

```
from sklearn.ensemble import RandomForestRegressor

# Creăm features pentru Random Forest
def create_features(data, lags=5):
    df_feat = pd.DataFrame(index=data.index)
    df_feat['target'] = data.values

    # Lag features
    for i in range(1, lags + 1):
        df_feat[f'lag_{i}'] = data.shift(i)

    # Rolling statistics
    df_feat['rolling_mean_5'] = data.rolling(5).mean()
    df_feat['rolling_std_5'] = data.rolling(5).std()
    df_feat['rolling_mean_20'] = data.rolling(20).mean()

    # Calendar features
    df_feat['dayofweek'] = data.index.dayofweek
    df_feat['month'] = data.index.month

    return df_feat.dropna()

df_rf = create_features(df['Returns'], lags=10)
```



Pasul 5: Random Forest – Antrenare și Evaluare

Cod Python – Model Random Forest

```
# Împărțim datele
X = df_rf.drop('target', axis=1)
y = df_rf['target']

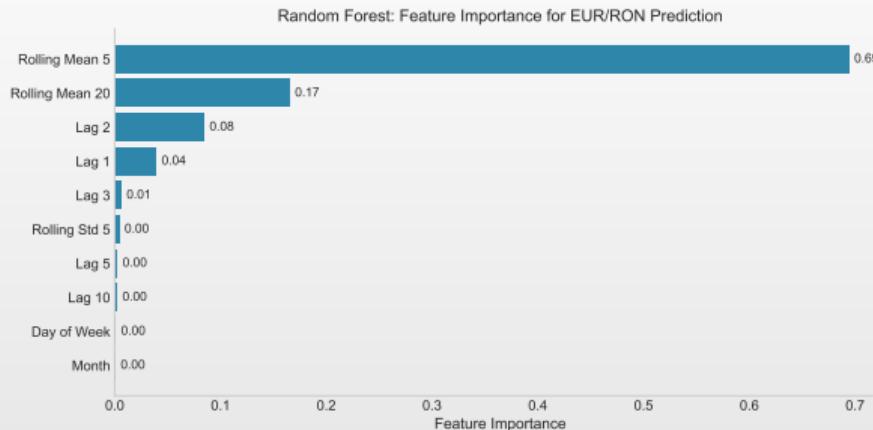
train_size = int(len(df_rf) * 0.8)
X_train, X_test = X[:train_size], X[train_size:]
y_train, y_test = y[:train_size], y[train_size:]

# Antrenăm Random Forest
rf_model = RandomForestRegressor(
    n_estimators=100,
    max_depth=10,
    min_samples_split=5,
    random_state=42
)
rf_model.fit(X_train, y_train)

# Predicție și evaluare
pred_rf = rf_model.predict(X_test)
rmse_rf = np.sqrt(mean_squared_error(y_test, pred_rf))
print(f"Random Forest - RMSE: {rmse_rf:.4f}")
```



Random Forest: importanță features



Interpretare

- **Date:** Cursul EUR/RON (Yahoo Finance, 2019–2025) — RF cu 10 features construite
- Lagurile recente (lag_1, lag_2) și volatilitatea rolling sunt cele mai importante
- Features calendaristice au impact minor pentru randamente zilnice



Pasul 6: LSTM – Pregătire Date

Cod Python – Secvențe pentru LSTM

```
from tensorflow.keras.models import Sequential
from tensorflow.keras.layers import LSTM, Dense, Dropout
from sklearn.preprocessing import MinMaxScaler

# Scalăm datele între 0 și 1
scaler = MinMaxScaler()
scaled_data = scaler.fit_transform(df['Returns'].values.reshape(-1, 1))

# Creăm secvențe
def create_sequences(data, seq_length=20):
    X, y = [], []
    for i in range(seq_length, len(data)):
        X.append(data[i-seq_length:i, 0])
        y.append(data[i, 0])
    return np.array(X), np.array(y)

X_lstm, y_lstm = create_sequences(scaled_data, seq_length=20)
X_lstm = X_lstm.reshape((X_lstm.shape[0], X_lstm.shape[1], 1))

# Split
split = int(len(X_lstm) * 0.8)
X_train_lstm, X_test_lstm = X_lstm[:split], X_lstm[split:]
y_train_lstm, y_test_lstm = y_lstm[:split], y_lstm[split:]
```



Pasul 6: LSTM – Arhitectură și Antrenare

Cod Python – Model LSTM

```
# Construim modelul LSTM
model_lstm = Sequential([
    LSTM(50, return_sequences=True, input_shape=(20, 1)),
    Dropout(0.2),
    LSTM(50, return_sequences=False),
    Dropout(0.2),
    Dense(25),
    Dense(1)
])

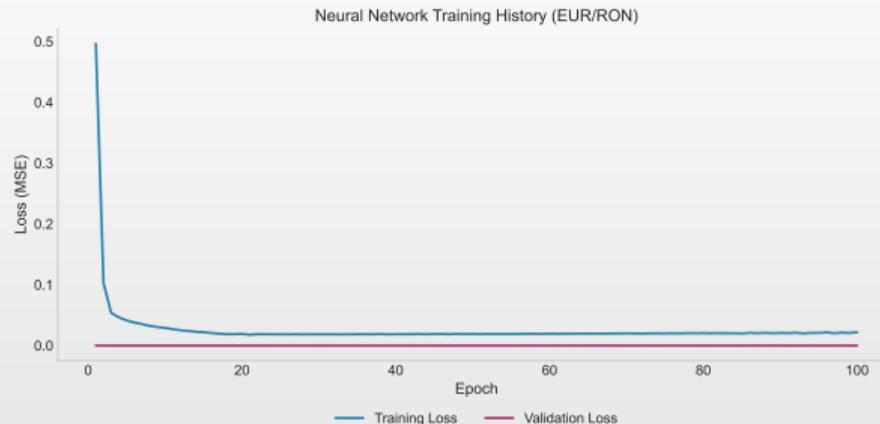
model_lstm.compile(optimizer='adam', loss='mse')

# Antrenăm
history = model_lstm.fit(
    X_train_lstm, y_train_lstm,
    epochs=50, batch_size=32,
    validation_split=0.1, verbose=0
)

# Predicție
pred_lstm_scaled = model_lstm.predict(X_test_lstm)
pred_lstm = scaler.inverse_transform(pred_lstm_scaled)
y_test_original = scaler.inverse_transform(y_test_lstm.reshape(-1, 1))
rmse_lstm = np.sqrt(mean_squared_error(y_test_original, pred_lstm))
print(f'LSTM - RMSE: {rmse_lstm:.4f}'")
```



LSTM: curba de învățare



Interpretare

- Date:** Cursul EUR/RON (Yahoo Finance, 2019–2025) — Rețea Neuronală (100 epoci, MSE loss)
- Loss Training:** Scade rapid în primele epoci, apoi se stabilizează
- Loss Validation:** Urmărește training loss — nu avem overfitting sever



Comparație: Rezultate pe EUR/RON

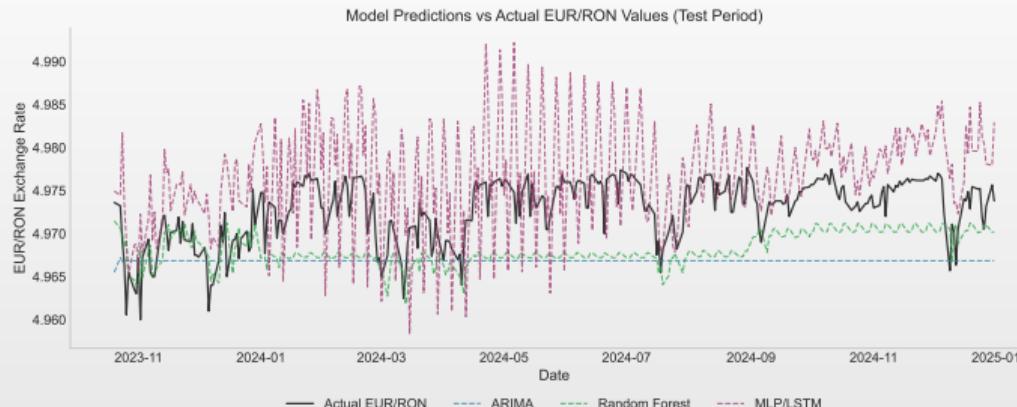
| Model | RMSE | MAE | Timp (s) | Interpretabil? |
|---------------|--------|--------|----------|----------------|
| ARIMA(1,1,1) | 0.0069 | 0.0062 | 0.08 | Da |
| Random Forest | 0.0057 | 0.0050 | 0.51 | Da (features) |
| MLP/LSTM | 0.0071 | 0.0059 | 0.47 | Nu |

Concluzii

- Pentru EUR/RON, diferențele sunt **mici** – piața este eficientă
- Random Forest oferă cel mai bun compromis **acuratețe/interpretabilitate**
- LSTM are cost computațional mare pentru câștig marginal
- ARIMA rămâne o alegere solidă pentru **baseline**



Vizualizare: predicții vs valori reale

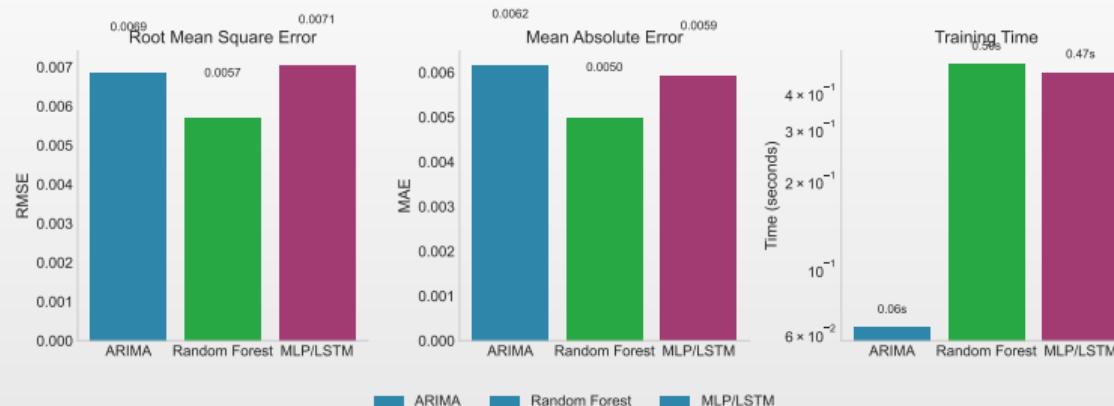


Interpretare

- **Date:** Perioada de test EUR/RON — predicțiile ARIMA, Random Forest, MLP/LSTM vs valori reale
- Toate modelele captează pattern-ul general, dar niciuna nu prezice perfect vârfurile de volatilitate
- Aceasta reflectă **eficiența pieței și limitele predicției** pentru serii financiare



Comparație modele: metrii de performanță

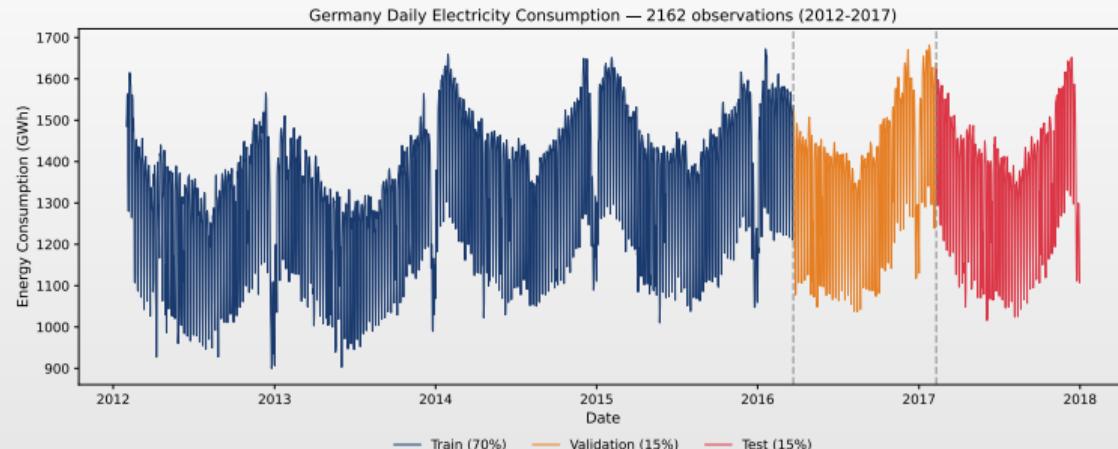


Interpretare

- **Date:** Cursul EUR/RON (Yahoo Finance, 2019–2025) — ARIMA vs RF vs MLP/LSTM
- **Stânga:** Metrii de eroare (mai mic = mai bine) — RF obține cel mai mic RMSE și MAE
- **Dreapta:** Timp de antrenare (scală log) — Modelele ML necesită mai multe resurse



Studiu de Caz: Prezentarea Datelor



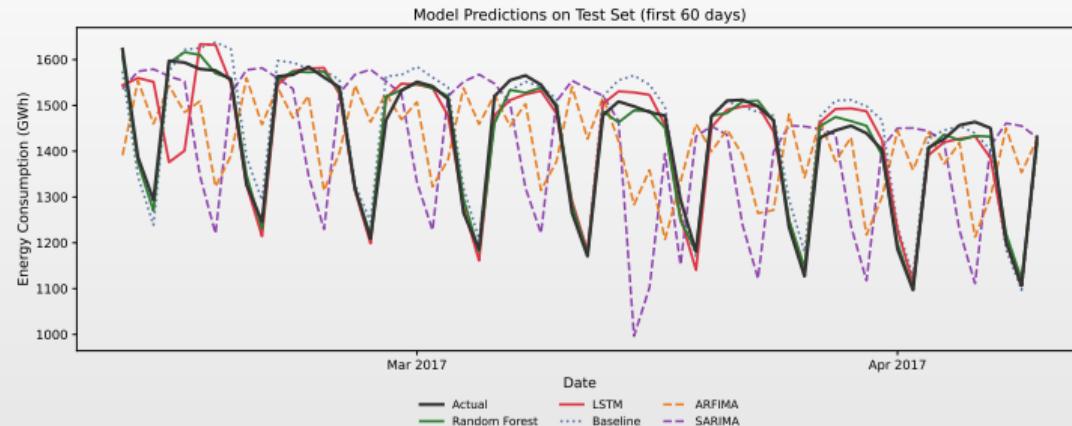
Interpretare

Train: 1513 obs (70%) **Validare:** 324 obs (15%) **Test:** 325 obs (15%)

 **TSA_ch8_data_split**



Studiu de Caz: Predicții ale Modelelor



| Rang | Model | MAPE | Interpretare |
|------|---------------|-------|---|
| 1 | Random Forest | 2.2% | Cel mai bun: captează pattern-uri neliniare |
| 2 | LSTM | 3.3% | Bun, necesită mai multe date |
| 3 | Baseline | 3.9% | Simplu dar competitiv |
| 4 | ARFIMA | 12.3% | Memoria lungă nu e suficientă |
| 5 | SARIMA | 14.6% | Dificultăți cu pattern-urile |



Studiu de Caz: Performanța Celui Mai Bun Model



Random Forest Câștigă

- MAPE: 2.2%
- Captează pattern-urile săptămânale

De ce RF a fost mai bun?

- Feature engineering bun
- Robust la outlieri



Când să alegem fiecare model?

ARIMA/ARFIMA

- Date puține (< 500 obs.)
- Interpretare importantă
- Memorie lungă suspectată
- Baseline rapid

LSTM/Deep Learning

- Date foarte mari (> 10.000)
- Secvențe complexe
- Resurse computaționale
- Pattern-uri ascunse

Random Forest

- Multe variabile exogene
- Relații neliniare
- Importanța features
- Date moderate

Regula de Aur

- Începe simplu (ARIMA), adaugă complexitate doar dacă performanța crește semnificativ!



Exemplu 2: indicele BET (Bursa Bucureşti)

Caracteristici

- Volatility clustering puternic
- Influențat de piețele internaționale
- Lichiditate mai redusă decât piețele dezvoltate
- Potențial pentru memorie lungă în volatilitate

Rezultate Tipice (RMSE pe randamente)

- GARCH(1,1): 1.45 – cel mai bun pentru volatilitate
- ARFIMA pentru volatilitate: 1.52
- Random Forest: 1.48
- LSTM: 1.51



Exemplu 3: rata inflației în România

Caracteristici

- Serie **lunară** (frecvență redusă)
- Persistență ridicată** – șocurile durează
- Influențată de politica monetară
- Potențial puternic pentru **memorie lungă**

Rezultate Tipice

- ARFIMA cu $d \approx 0.35$ – captează persistența
- ARIMA subestimează persistența șocurilor
- ML nu funcționează bine (date puține, 300 obs.)

- Lecție:** Pentru serii lunare cu puține date, modelele clasice (ARFIMA) sunt superioare!



Rezumat practic: alegerea modelului

| Criteriu | ARIMA | ARFIMA | RF | LSTM |
|---------------|---------|---------|---------|---------|
| Date necesare | Puține | Puține | Medii | Multe |
| Memorie lungă | Nu | Da | Parțial | Parțial |
| Neliniaritate | Nu | Nu | Da | Da |
| Interpretabil | Da | Da | Parțial | Nu |
| Timp calcul | Rapid | Rapid | Mediu | Lent |
| Var. exogene | Limitat | Limitat | Da | Da |

Fluxul Recomandat

1. Începe cu **ARIMA** ca baseline
2. Testează **memorie lungă** \succ ARFIMA dacă d semnificativ
3. Adaugă **features** \succ Random Forest
4. Doar cu date multe și resurse \succ LSTM



Rezumat

Ce am învățat

- ARFIMA:** Extinde ARIMA pentru memorie lungă (d fracționar)
- Random Forest:** Ansamblu de arbori, relații neliniare, interpretabil
- LSTM:** Deep learning pentru secvențe, dependențe complexe
- Trade-offs:** Complexitate vs interpretabilitate vs date necesare

Recomandări Practice

- Începe cu modele **simple** (ARIMA) ca baseline
- Folosește **Time Series CV** pentru evaluare corectă
- ML necesita **feature engineering** atent
- LSTM: doar cu **multe date** și resurse computaționale



Quiz rapid

Întrebări

1. Ce semnifică $d = 0.3$ într-un model ARFIMA?
2. De ce folosim Time Series CV în loc de k-fold standard?
3. Care este avantajul principal al LSTM față de RNN simplu?
4. Ce tip de model ai alege pentru date puține și relații liniare?
5. Ce înseamnă "data leakage" în contextul ML pentru serii de timp?



Răspunsuri quiz

Răspunsuri

1. $d = 0.3$: Memorie lungă, seria este staționară dar autocorelațiile scad lent (hiperbolic)
2. **Time Series CV**: Pentru a respecta ordinea temporală. K-fold standard ar folosi date viitoare pentru a prezice trecutul (data leakage)
3. **LSTM vs RNN**: LSTM rezolvă problema “vanishing gradient” prin mecanismul de porți, permitând învățarea dependentelor pe termen lung
4. **Date puține, relații liniare**: ARIMA sau ARFIMA. ML necesită multe date pentru a generaliza bine
5. **Data leakage**: Folosirea informației din viitor în features sau în antrenare



Ce urmează?

Extensii și Subiecte Avansate

- Transformer** pentru serii de timp (Temporal Fusion Transformer)
- Prophet** (Facebook/Meta) pentru sezonalitate
- Neural Prophet**: Prophet + rețele neuronale
- Ensemble methods**: Combinarea mai multor modele
- Anomaly detection** cu ML

Întrebări?



Bibliografie I

Memorie lungă și ARFIMA

- Granger, C.W.J., & Joyeux, R. (1980). An Introduction to Long-Memory Time Series Models and Fractional Differencing, *Journal of Time Series Analysis*, 1(1), 15–29.
- Baillie, R.T. (1996). Long Memory Processes and Fractional Integration in Econometrics, *Journal of Econometrics*, 73(1), 5–59.
- Beran, J. (1994). *Statistics for Long-Memory Processes*, Chapman & Hall.

Rețele neuronale și deep learning pentru serii de timp

- Hochreiter, S., & Schmidhuber, J. (1997). Long Short-Term Memory, *Neural Computation*, 9(8), 1735–1780.
- Bai, J., & Perron, P. (2003). Computation and Analysis of Multiple Structural Change Models, *Journal of Applied Econometrics*, 18(1), 1–22.



Bibliografie II

Modele cu prag și regim-switching

- Hansen, B.E. (2011). Threshold Autoregression in Economics, *Statistics and Its Interface*, 4(2), 123–127.
- Hamilton, J.D. (1989). A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle, *Econometrica*, 57(2), 357–384.
- Petropoulos, F., et al. (2022). Forecasting: Theory and Practice, *International Journal of Forecasting*, 38(3), 845–1054.

Resurse online și cod

- Quantlet: <https://quantlet.com> ➔ Depozit de cod pentru statistică
- Quantinar: <https://quantinar.com> ➔ Platformă de învățare metode cantitative
- GitHub TSA: <https://github.com/QuantLet/TSA> ➔ Cod Python pentru acest curs



Vă Mulțumim!

Întrebări?

Materialele cursului sunt disponibile la: <https://danpele.github.io/Time-Series-Analysis/>

