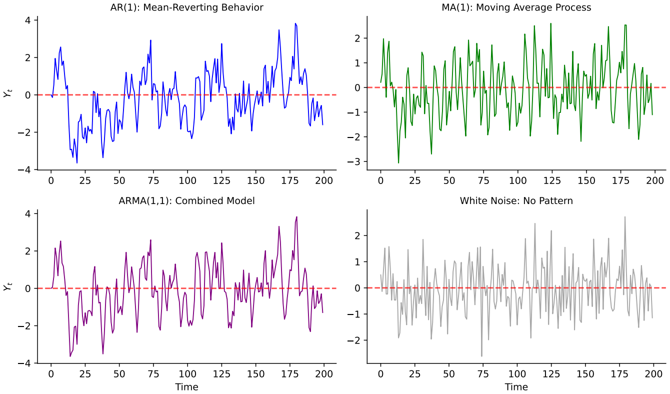
Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 2: Modele ARMA

Serii de Timp Staționare

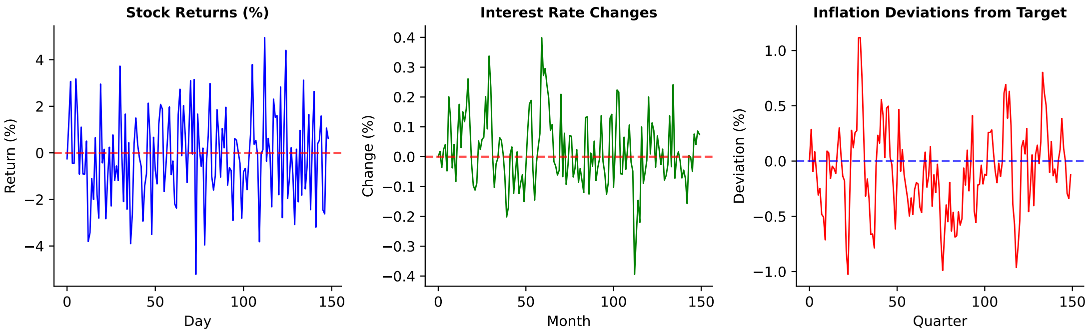
Structura Cursului

Exemplu Motivațional: Procese Staționare



- **Procese AR**: Valoarea curentă depinde de valorile trecute — comportament de revenire la medie
- **Procese MA**: Valoarea curentă depinde de șocurile trecute — memorie scurtă
- **ARMA**: Combină ambele mecanisme pentru modelare flexibilă

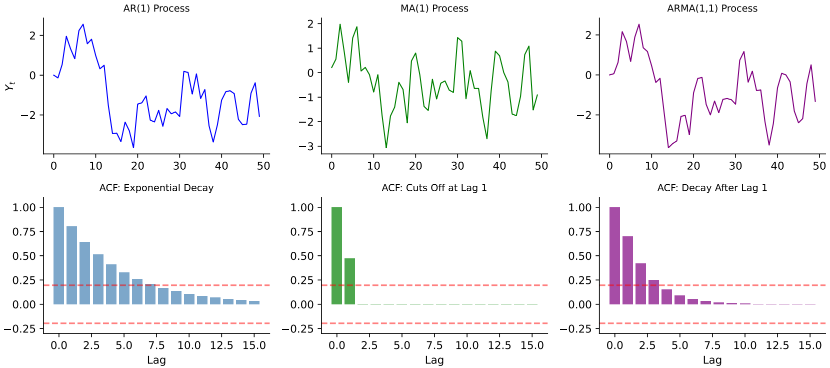
Aplicații Practice ale ARMA



Observație Cheie

Multe serii economice și financiare devin staționare după transformări simple (randamente, rate de creștere, abateri de la trend) — perfecte pentru modelarea ARMA!

Identificarea Modelului prin Tipare ACF



ACF Dezvăluie Structura Modelului

Diferite modele ARMA produc tipare ACF distincte — putem identifica modelul examinând datele!

Recapitulare: Staționaritatea

Din Capitolul 1: Un proces $\{X_t\}$ este **slab staționar** dacă:

1. $\mathbb{E}[X_t] = \mu$ (medie constantă)
2. $\text{Var}(X_t) = \sigma^2 < \infty$ (varianță constantă, finită)
3. $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$ (covarianța depinde doar de lag-ul h)

De ce contează staționaritatea pentru ARMA:

- Modelele ARMA presupun că procesul subiacent este staționar
- Datele nestaționare trebuie diferențiate mai întâi (ARIMA)
- Staționaritatea asigură parametri stabili ai modelului

Astăzi: Construim modele pentru serii de timp staționare folosind valori trecute și erori trecute.

Operatorul Lag (Operatorul de Întârziere)

Definiție 1 (Operatorul Lag)

Operatorul lag L (sau operatorul de întârziere B) deplasează o serie de timp înapoi cu o perioadă:

$$LX_t = X_{t-1}$$

Proprietăți:

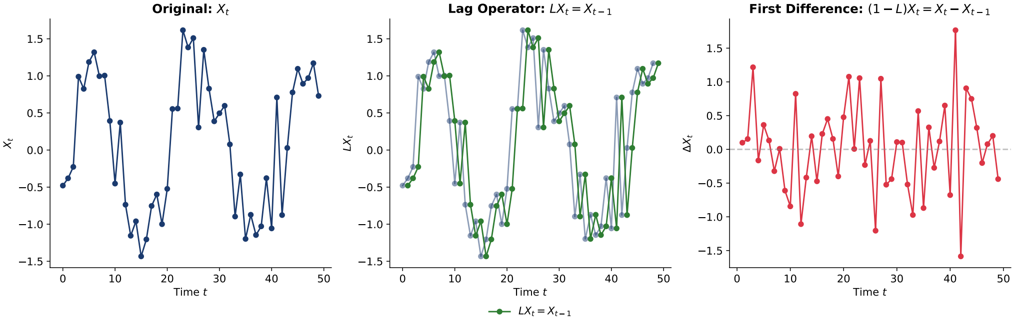
- $L^k X_t = X_{t-k}$ (deplasare înapoi cu k perioade)
- $L^0 X_t = X_t$ (identitate)
- $(1 - L)X_t = X_t - X_{t-1} = \Delta X_t$ (prima diferență)
- $(1 - L)^d X_t = \Delta^d X_t$ (diferența de ordin d)

Polinoame Lag:

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p$$

$$\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q$$

Operatorul Lag: Ilustrație Vizuală



Observație cheie: Operatorul lag este fundamentul notației modelelor ARMA

Procesul de Zgomot Alb

Definiție 2 (Zgomot Alb)

Un proces $\{\varepsilon_t\}$ este **zgomot alb**, notat $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, dacă:

1. $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$ pentru toți t
2. $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$ pentru toți t
3. $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ pentru toți $t \neq s$

Proprietăți:

- Zgomotul alb este "blocul de construcție" al modelelor ARMA
- ACF: $\rho(0) = 1$, $\rho(h) = 0$ pentru $h \neq 0$
- PACF: același tipar
- **Zgomot alb Gaussian:** adițional $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

Notă: Zgomotul alb *nu* este predictibil — este pur aleatoriu.

Modelul AR(1): Definiție

Definiție 3 (Proces AR(1))

Un **proces autoregresiv de ordin 1** este:

$$X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

unde $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ și $|\phi| < 1$ pentru staționaritate.

Interpretare:

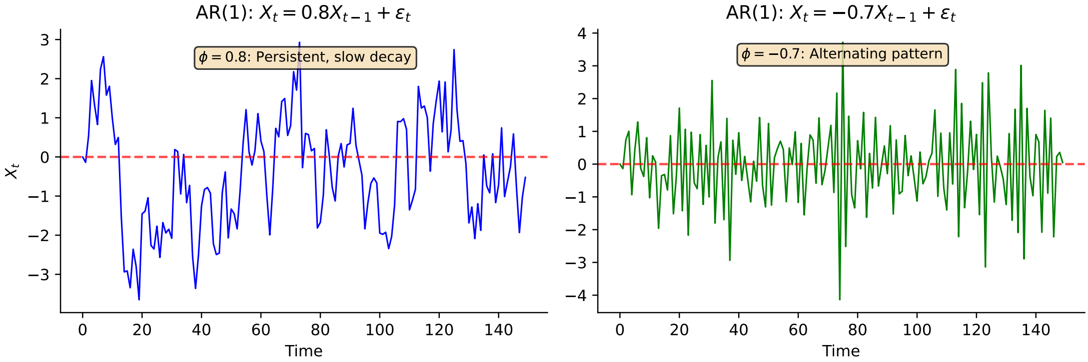
- c: constantă (interceptul)
- ϕ: coeficient autoregresiv — măsoară persistența
- ε_t: inovație (șoc impredictibil)

Folosind operatorul lag:

$$(1 - \phi L)X_t = c + \varepsilon_t$$

$$\phi(L)X_t = c + \varepsilon_t \quad \text{unde } \phi(L) = 1 - \phi L$$

AR(1): Ilustrație Vizuală



Stânga: ϕ pozitiv creează tipare persistente, netede. Dreapta: ϕ negativ creează comportament oscilant în jurul mediei.

Condiția de Staționaritate AR(1)

Pentru ca AR(1) să fie staționar: $|\phi| < 1$

Intuiție:

- Dacă $|\phi| < 1$: șocurile se diminuează în timp $\to$ staționar
- Dacă $|\phi| = 1$: mers aleatoriu $\to$ nestaționar (rădăcină unitate)
- Dacă $|\phi| > 1$: proces exploziv $\to$ nestaționar

Ecuația caracteristică:

$$\phi(z) = 1 - \phi z = 0 \implies z = \frac{1}{\phi}$$

Staționaritatea necesită ca rădăcina $z = 1/\phi$ să se afle **în afara cercului unitate**, adică $|z| > 1$, ceea ce înseamnă $|\phi| < 1$.

Proprietățile AR(1)

Pentru un AR(1) staționar cu $|\phi| < 1$:

Media:

$$\mu = \mathbb{E}[X_t] = \frac{c}{1-\phi}$$

Varianța:

$$\gamma(0) = \text{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$$

Autocovarianța:

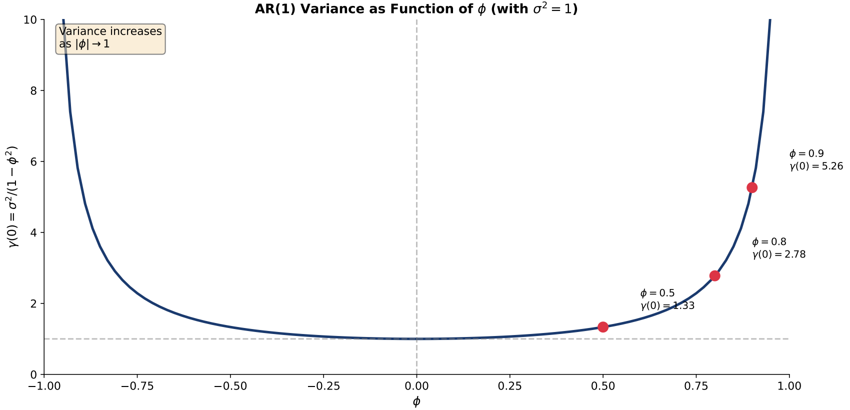
$$\gamma(h) = \phi^h \gamma(0) = \frac{\phi^h \sigma^2}{1-\phi^2}$$

Autocorelația (ACF):

$$\rho(h) = \phi^h$$

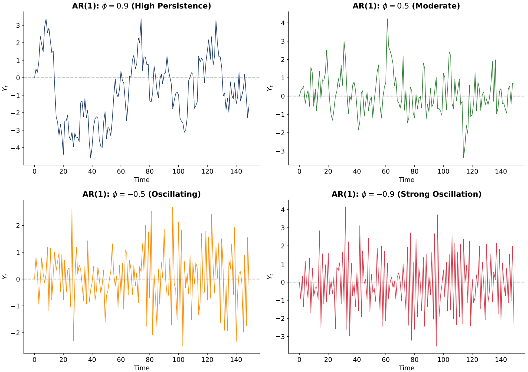
Observație cheie: ACF scade exponențial la rata ϕ

Varianța AR(1) ca Funcție de ϕ



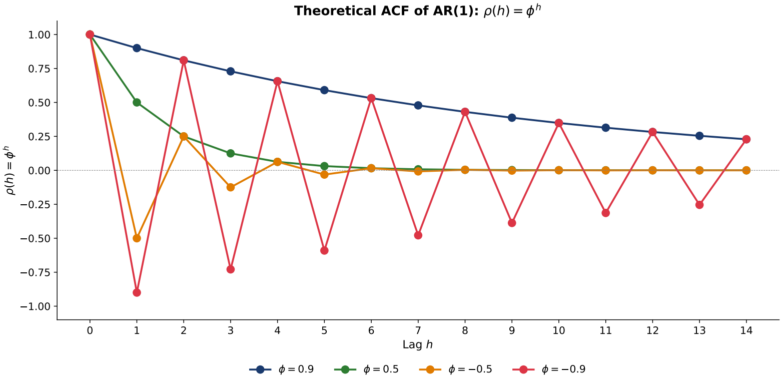
Observație cheie: Pe măsură ce $|\phi| \to 1$, varianța explodează $\to$ nestaționaritate

Simulări AR(1): Efectul lui ϕ



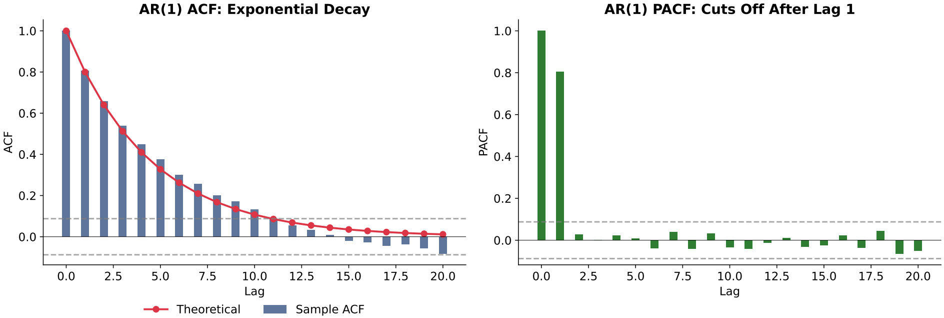
- Valori diferite ale lui ϕ produc comportamente distincte: $|\phi|$ mai mare înseamnă mai multă persistență
- ϕ pozitiv creează tipare netede, de trend; ϕ negativ creează oscilații
- Pe măsură ce $|\phi| \to 1$, procesul devine mai persistent și se apropie de nestaționaritate

ACF Teoretic AR(1)



Tipar: $\rho(h) = \phi^h$ — descreștere exponențială (sau alternantă pentru $\phi < 0$)

ACF și PACF AR(1): Teorie vs Eșantion



- **ACF**: Descreștere exponențială la rata ϕ – formula teoretică: $\rho(h) = \phi^h$
- **PACF**: Un singur vârf la lag 1, apoi se întrerupe – aceasta identifică AR(1)
- Estimările din eșantion (bare) fluctuează în jurul valorilor teoretice; folosiți benzile de încredere

Tipare ACF și PACF AR(1)

ACF al AR(1):

- Scade exponențial: $\rho(h) = \phi^h$
- Dacă $\phi > 0$: toate pozitive, descreștere graduală
- Dacă $\phi < 0$: semne alternante, descreștere în magnitudine

PACF al AR(1):

- **Se întrerupe după lag 1**
- $\pi_1 = \phi$, $\pi_k = 0$ pentru $k > 1$

	ACF	**PACF**
AR(1)	Descreștere exponențială	Se întrerupe la lag 1

Acesta este tiparul cheie de identificare pentru AR(1)!

Modelul AR(p): Forma Generală

Definiție 4 (Proces AR(p))

Un **proces autoregresiv de ordin p** este:

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

Folosind operatorul lag:

$$\phi(L)X_t = c + \varepsilon_t$$

unde $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p$

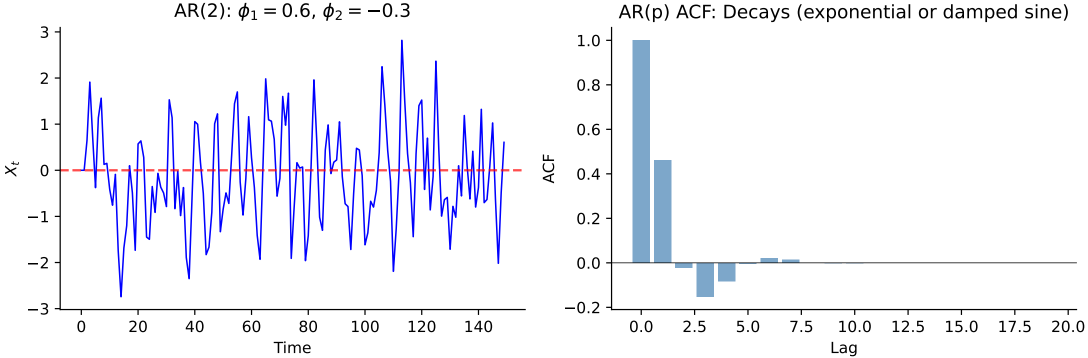
Condiție de staționaritate:

- Toate rădăcinile lui $\phi(z) = 0$ trebuie să se afle **în afara** cercului unitate
- Echivalent: toate rădăcinile au modul > 1

Tiparul PACF:

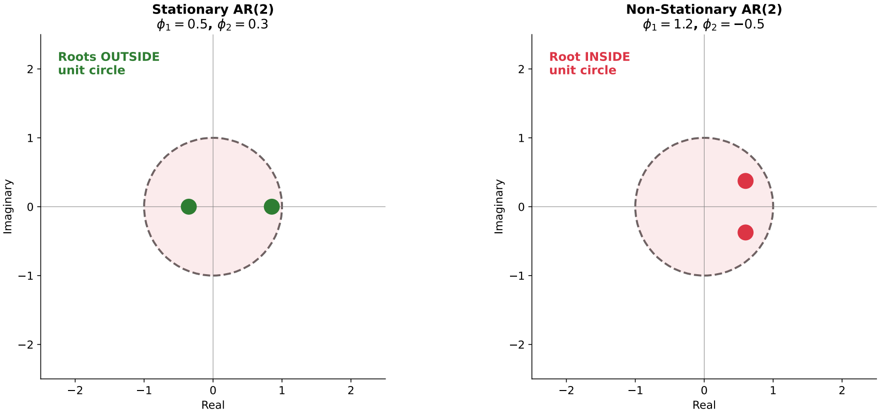
- PACF se întrerupe după lag p
- ACF scade (exponențial sau cu oscilații amortizate)

AR(p): Ilustrație Vizuală



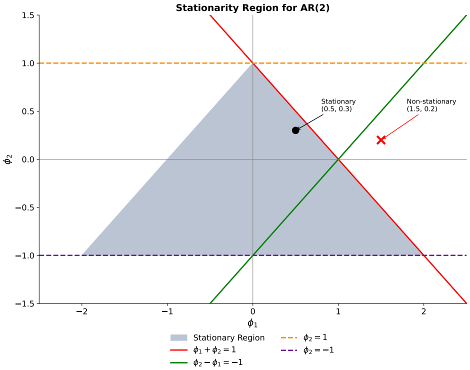
AR(2) poate prezenta comportament ciclic. ACF arată tiparul de descreștere amortizată caracteristic proceselor AR.

Staționaritatea AR(2): Vizualizarea Cercului Unitate



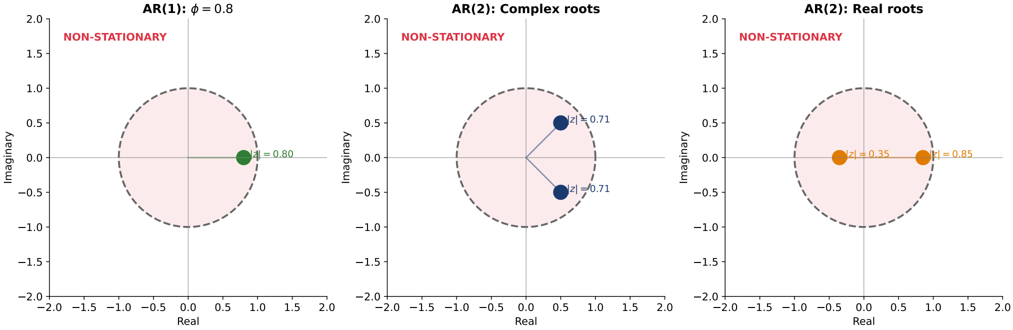
Regulă: Toate rădăcinile lui $\phi(z) = 0$ trebuie să se afle **în afara** cercului unitate umbrit

Triunghiul de Staționaritate AR(2)



- Regiunea triunghiulară definește toate combinațiile de parametri AR(2) staționari
- Granițe: $\phi_1 + \phi_2 < 1$, $\phi_2 - \phi_1 < 1$ și $|\phi_2| < 1$
- Punctele din afara acestei regiuni duc la procese nestaționare sau explozive

Rădăcinile Polinomului Caracteristic



Modelul AR(2)

Definiție 5 (Proces AR(2))

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

Condiții de staționaritate pentru AR(2):

1. $\phi_1 + \phi_2 < 1$
2. $\phi_2 - \phi_1 < 1$
3. $|\phi_2| < 1$

Comportamentul ACF depinde de rădăcini:

- **Rădăcini reale:** amestec de două descreșteri exponențiale
- **Rădăcini complexe:** tipar sinusoidal amortizat (pseudo-cicluri)

PACF: Se întrerupe după lag 2 ($\pi_k = 0$ pentru $k > 2$)

Quiz: Staționaritate AR

Întrebare

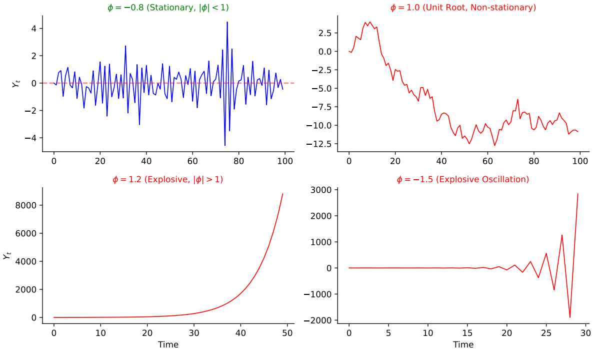
Pentru ce valoare a lui ϕ este procesul AR(1) $X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$ staționar?

- A $\phi = 1.2$
- B $\phi = 1.0$
- C $\phi = -0.8$
- D $\phi = -1.5$

Quiz: Staționaritate AR – Răspuns

Răspuns Corect: (C) $\phi = -0.8$

AR(1) este staționar dacă și numai dacă $|\phi| < 1$. Doar $|-0.8| = 0.8 < 1$.



Modelul MA(1): Definiție

Definiție 6 (Proces MA(1))

Un **proces de medie mobilă de ordin 1** este:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

unde $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$.

Interpretare:

- μ: media procesului
- θ: coeficient MA — măsoară impactul șocului trecut
- Valoarea curentă depinde de șocul curent și unul trecut

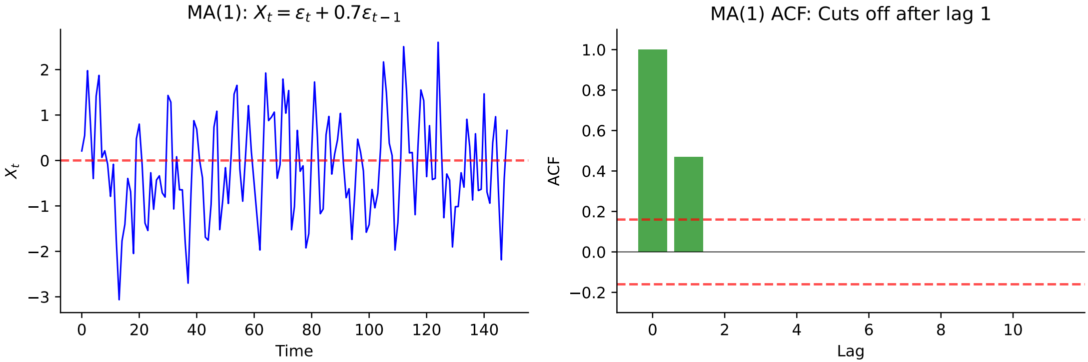
Folosind operatorul lag:

$$X_t = \mu + \theta(L)\varepsilon_t$$

unde $\theta(L) = 1 + \theta L$

Proprietate cheie: Procesele MA sunt **întotdeauna staționare** pentru orice θ finit

MA(1): Ilustrație Vizuală



Procesul MA(1) în stânga. ACF în dreapta arată întreruperea caracteristică după lag 1.

Proprietățile MA(1)

Pentru MA(1): $X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$

Media:

$$\mathbb{E}[X_t] = \mu$$

Varianța:

$$\gamma(0) = \text{Var}(X_t) = \sigma^2(1 + \theta^2)$$

Autocovarianța:

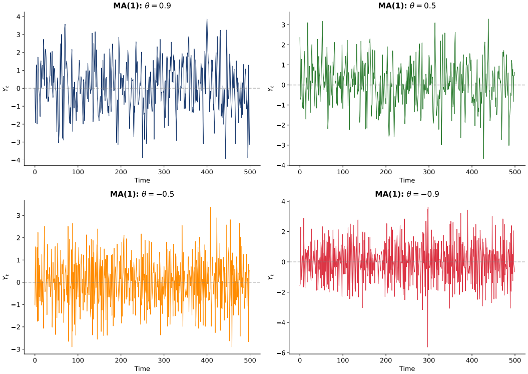
$$\gamma(1) = \theta\sigma^2, \quad \gamma(h) = 0 \text{ pentru } h > 1$$

Autocorelația (ACF):

$$\rho(1) = \frac{\theta}{1 + \theta^2}, \quad \rho(h) = 0 \text{ pentru } h > 1$$

Observație cheie: ACF **se întrerupe** după lag 1

Simulări MA(1): Efectul lui θ



- MA(1) este întotdeauna staționar indiferent de θ – memorie finită de doar un lag
- θ pozitiv netezește seria; θ negativ creează fluctuații mai rapide
- Spre deosebire de AR(1), șocurile MA(1) afectează procesul doar pentru o perioadă

Tipare ACF și PACF MA(1)

ACF al MA(1):

- **Se întrerupe după lag 1**
- $\rho(1) = \frac{\theta}{1+\theta^2}$, $\rho(h) = 0$ pentru $h > 1$
- Notă: $|\rho(1)| \leq 0.5$ întotdeauna (maxim la $\theta = \pm 1$)

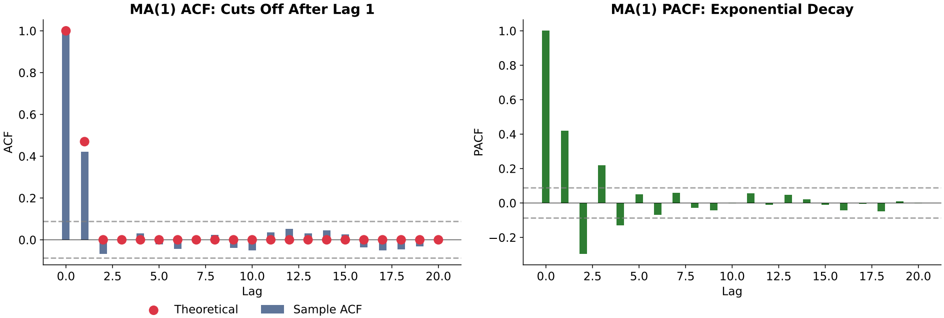
PACF al MA(1):

- Scade exponențial (sau cu semne alternante)
- *Nu* se întrerupe

	ACF	**PACF**
MA(1)	Se întrerupe la lag 1	Descreștere exponențială

Acesta este tiparul opus față de AR(1)!

ACF și PACF MA(1): Comparație Vizuală



- **ACF**: Un singur vârf la lag 1, apoi se întrerupe imediat – semnătura cheie MA(1)
- **PACF**: Descreștere exponențială – tipar opus față de AR(1)
- Această inversare a tiparelor ACF/PACF distinge procesele MA de cele AR

Invertibilitatea Modelelor MA

Definiție 7 (Invertibilitate)

Un proces MA este **invertibil** dacă poate fi scris ca un proces AR infinit:

$$X_t = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j (X_{t-j} - \mu) + \varepsilon_t$$

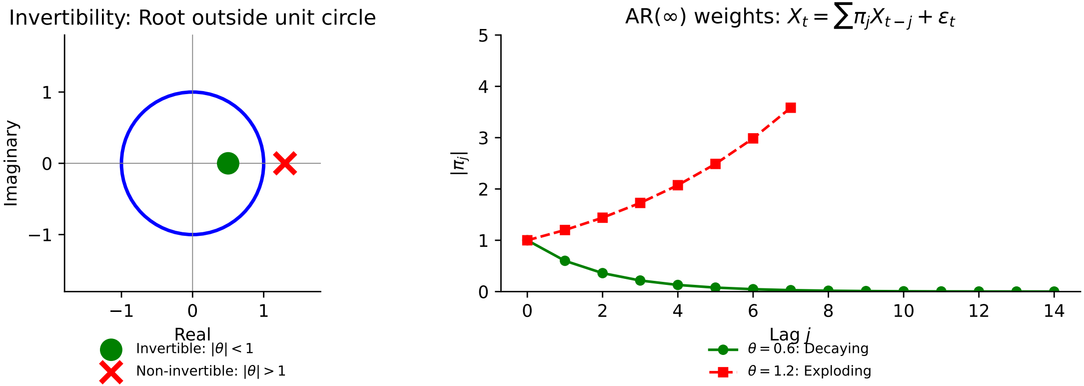
Pentru MA(1): Invertibil dacă $|\theta| < 1$
Pentru MA(q): Toate rădăcinile lui $\theta(z) = 0$ trebuie să se afle în afara cercului unitate

De ce contează invertibilitatea:

- Asigură reprezentare unică
- Necesară pentru prognoză și estimare
- Creează corespondență: AR(∞) $\leftrightarrow$ MA(q)

Notă: Staționaritatea este pentru AR, Invertibilitatea este pentru MA

Invertibilitate: Ilustrație Vizuală



Stânga: invertibilitatea necesită rădăcini în afara cercului unitate. Dreapta: ponderile AR(∞) scad doar când $|\theta| < 1$.

Modelul MA(q): Forma Generală

Definiție 8 (Proces MA(q))

Un **proces de medie mobilă de ordin q** este:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

Folosind operatorul lag:

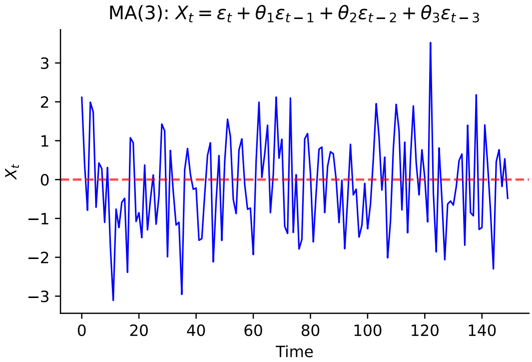
$$X_t = \mu + \theta(L)\varepsilon_t$$

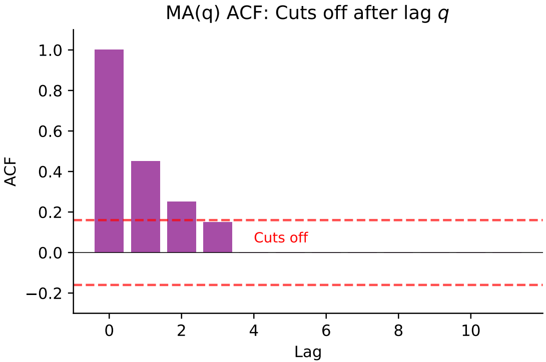
unde $\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q$

Proprietăți:

- Întotdeauna staționar (varianță finită)
- ACF se întrerupe după lag q: $\rho(h) = 0$ pentru $h > q$
- PACF scade gradual
- Invertibil dacă toate rădăcinile lui $\theta(z) = 0$ se află în afara cercului unitate

MA(q): Ilustrație Vizuală





Proces MA(3). Semnătura cheie: ACF se întrerupe după lag q (aici, lag 3).

Quiz: Recunoașterea Tiparelor ACF/PACF

Întrebare

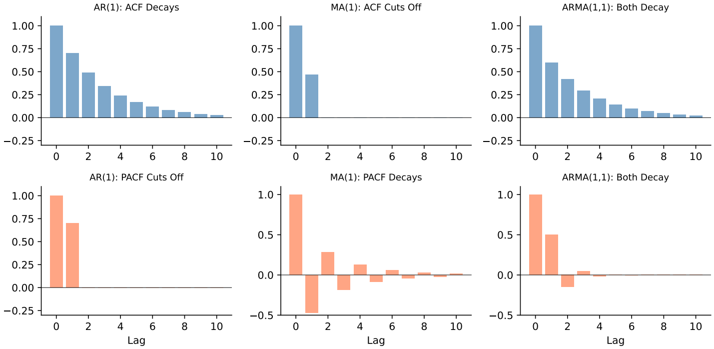
Observați: ACF are vârf la lag 1, apoi se întrerupe. PACF scade gradual. Ce model?

- A. AR(1)
- B. MA(1)
- C. ARMA(1,1)
- D. Zgomot alb

Quiz: Recunoașterea Tiparelor ACF/PACF – Răspuns

Răspuns Corect: (B) MA(1)

ACF se întrerupe → proces MA; PACF scade → confirmă MA(1)



Quiz: Invertibilitate MA

Întrebare

Este MA(1) $X_t = \varepsilon_t + 1.5\varepsilon_{t-1}$ invertibil?

- **A** Da, procesele MA sunt întotdeauna invertibile
- **B** Da, deoarece $1.5 > 0$
- **C** Nu, deoarece $|\theta| = 1.5 > 1$
- **D** Nu, procesele MA nu sunt niciodată invertibile

Quiz: Invertibilitate MA

Întrebare

Este MA(1) $X_t = \varepsilon_t + 1.5\varepsilon_{t-1}$ invertibil?

- A. Da, procesele MA sunt întotdeauna invertibile
- B. Da, deoarece $1.5 > 0$
- C. Nu, deoarece $|\theta| = 1.5 > 1$
- D. Nu, procesele MA nu sunt niciodată invertibile

Răspuns: (C)

Invertibilitatea necesită $|\theta| < 1$. Aici $|\theta| = 1.5 > 1$, deci nu este invertibil.

Modelul ARMA(p,q): Definiție

Definiție 9 (Proces ARMA(p,q))

Un **proces autoregresiv de medie mobilă** de ordin (p,q) este:

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Formă compactă folosind operatorii lag:

$$\phi(L)(X_t - \mu) = \theta(L)\varepsilon_t$$

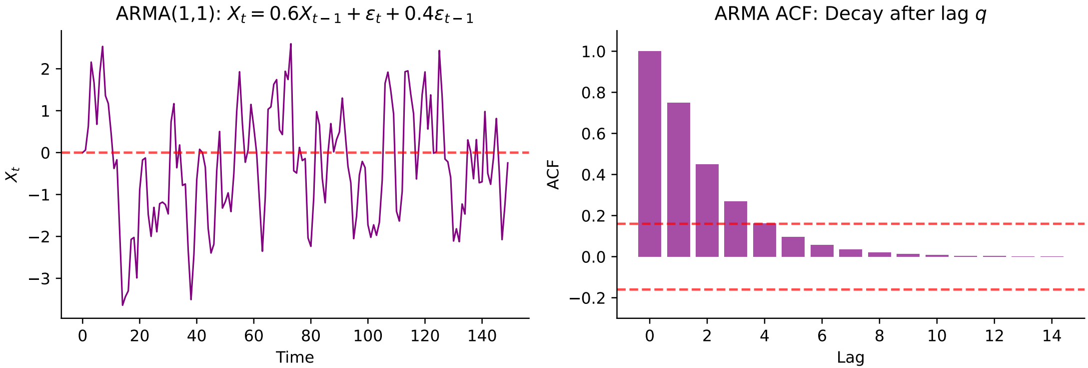
sau echivalent:

$$\phi(L)X_t = c + \theta(L)\varepsilon_t$$

unde $\mu = \frac{c}{1-\phi_1-\cdots-\phi_p}$

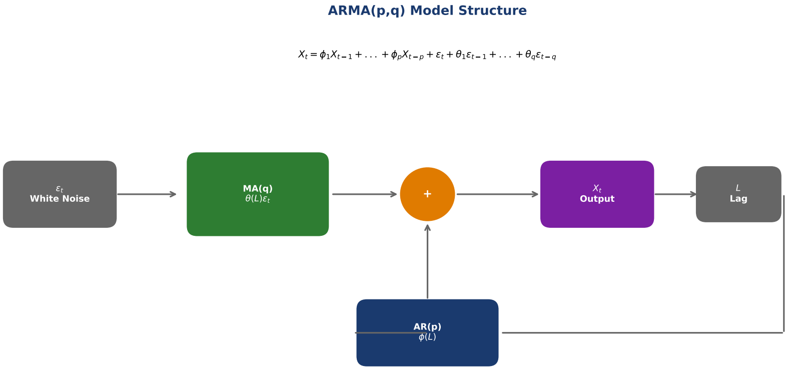
Idee cheie: Combină componentele AR și MA pentru modelare mai flexibilă

ARMA: Ilustrație Vizuală

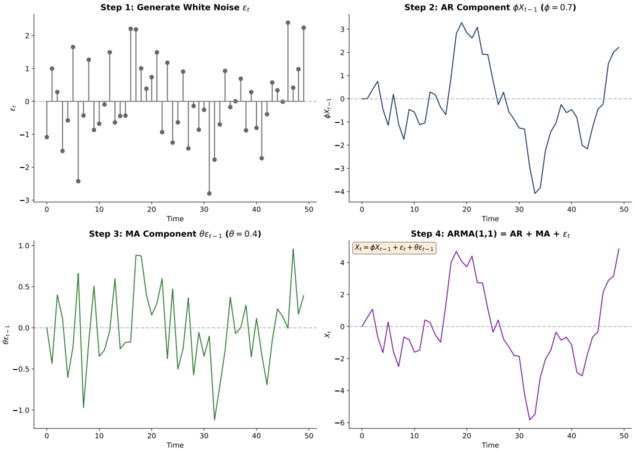


Proces ARMA(1,1). ACF arată descreștere după lag-ul inițial, combinând caracteristicile AR și MA.

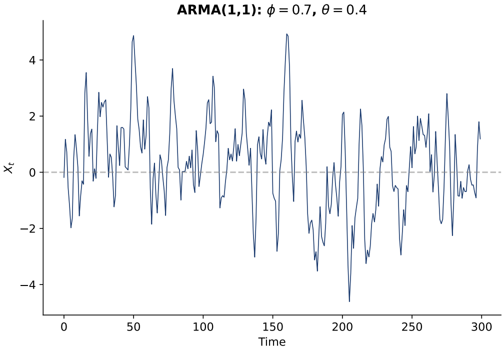
Structura Modelului ARMA

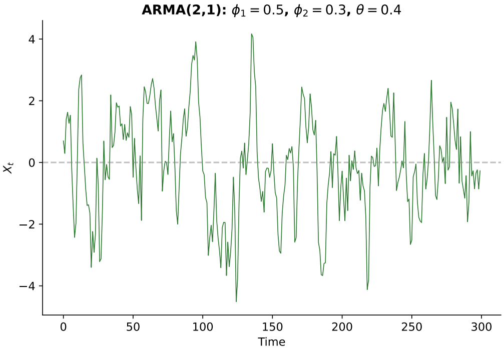


Cum Funcționează Simularea ARMA



Exemple ARMA





Modelul ARMA(1,1)

Definiție 10 (Proces ARMA(1,1))

$$X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

Proprietăți (presupunând staționaritate și invertibilitate):

- Media: $\mu = \frac{c}{1-\phi}$
- Varianța: $\gamma(0) = \frac{(1+2\phi\theta+\theta^2)\sigma^2}{1-\phi^2}$

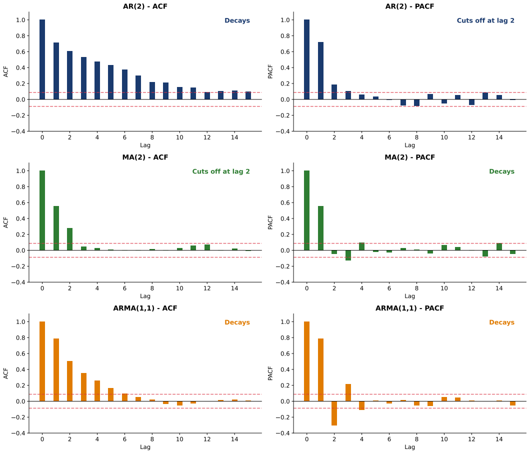
ACF:

$$\rho(1) = \frac{(1+\phi\theta)(\phi+\theta)}{1+2\phi\theta+\theta^2}$$

$$\rho(h) = \phi \cdot \rho(h-1) \quad \text{pentru } h \geq 2$$

Tipar: ACF scade exponențial după lag 1 (ca AR), dar punctul de pornire depinde atât de ϕ cât și de θ

Tipare ACF/PACF: AR vs MA vs ARMA



Tipare ACF și PACF ARMA

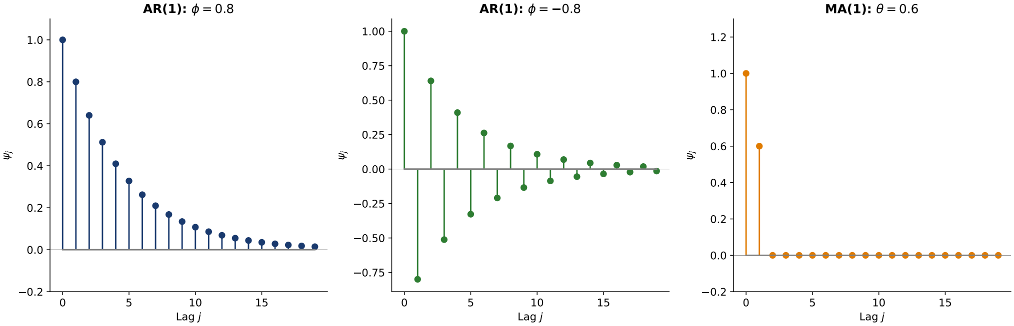
Model	ACF	PACF
AR(p)	Scade (exp./amortizat)	Se întrerupe la lag p
MA(q)	Se întrerupe la lag q	Scade (exp./amortizat)
ARMA(p,q)	Scade după lag $q-p$	Scade după lag $p-q$

Regula cheie de identificare:

- **PACF se întrerupe** $\rightarrow$ proces AR (ordin = lag-ul de întrerupere)
- **ACF se întrerupe** $\rightarrow$ proces MA (ordin = lag-ul de întrerupere)
- **Ambele scad** $\rightarrow$ proces ARMA

Atenție: În practică, ACF/PACF din eșantion sunt zgomotoase; folosiți benzile de încredere

Funcții de Răspuns la Impuls



Interpretare: Arată cum se propagă un șoc unitar prin sistem în timp

Rezumat Staționaritate și Invertibilitate

Pentru ca ARMA(p,q) să fie bine comportat:

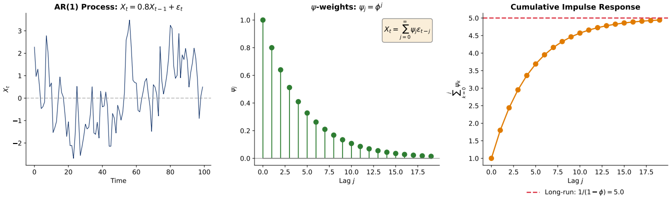
Condiție	Cerință
Staționaritate	Rădăcinile lui $\phi(z) = 0$ în afara cercului unitate
Invertibilitate	Rădăcinile lui $\theta(z) = 0$ în afara cercului unitate

Implicații:

- **Staționaritate:** Se poate scrie ca MA(∞): $X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$
- **Invertibilitate:** Se poate scrie ca AR(∞): $X_t = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j (X_{t-j} - \mu) + \varepsilon_t$

Reprezentare cauzală: X_t depinde doar de șocurile *trecute* (nu viitoare)

Teorema de Descompunere a lui Wold



Orice proces staționar poate fi scris ca MA(∞): $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$

Quiz: Reprezentarea ARMA

Întrebare

Forma compactă $\phi(L)X_t = \theta(L)\varepsilon_t$ reprezintă ce model?

- A. Model AR pur
- B. Model MA pur
- C. Model ARMA
- D. Niciunul de mai sus

Quiz: Reprezentarea ARMA

Întrebare

Forma compactă $\phi(L)X_t = \theta(L)\varepsilon_t$ reprezintă ce model?

- A. Model AR pur
- B. Model MA pur
- C. Model ARMA
- D. Niciunul de mai sus

Răspuns: (C) Model ARMA

$\phi(L)$ este polinomul AR, $\theta(L)$ este polinomul MA $\rightarrow$ ARMA(p,q)

Quiz: Operatorul Lag

Întrebare

Ce este $(1 - L)^2 X_t$?

- **A** $X_t - X_{t-1}$
- **B** $X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$
- **C** $X_t + X_{t-1} + X_{t-2}$
- **D** $X_t - X_{t-2}$

Quiz: Operatorul Lag

Întrebare

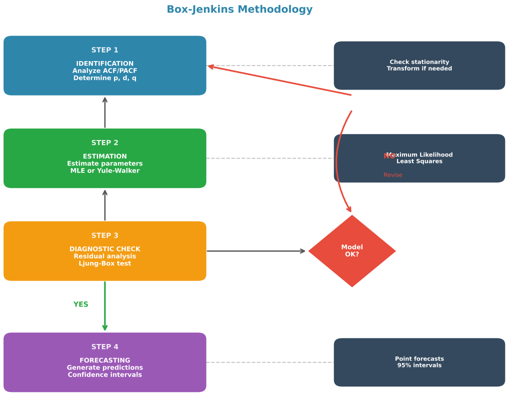
Ce este $(1-L)^2 X_t$?

- **A** $X_t - X_{t-1}$
- **B** $X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$
- **C** $X_t + X_{t-1} + X_{t-2}$
- **D** $X_t - X_{t-2}$

Răspuns: (B)

$(1-L)^2 = 1 - 2L + L^2$, deci $(1-L)^2 X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$

Metodologia Box-Jenkins



Tabel Rezumat pentru Identificarea Modelului

Model Identification: ACF/PACF Patterns

Model	ACF Pattern	PACF Pattern
AR(p)	Exponential decay or damped oscillation	Cuts off after lag p
MA(q)	Cuts off after lag q	Exponential decay or damped oscillation
ARMA(p,q)	Exponential decay after lag q-p	Exponential decay after lag p-q

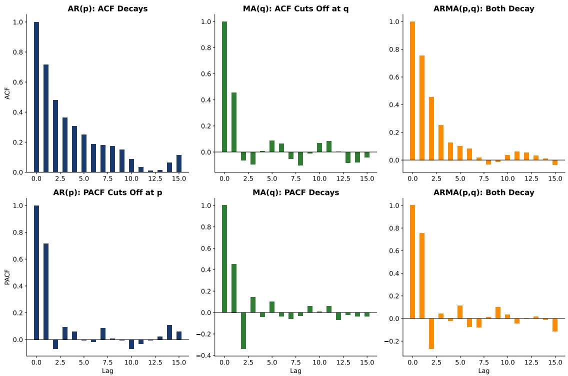
Sfat practic: Începeți simplu (p, q mici), creșteți dacă diagnosticele eșuează

Reguli de Identificare ACF/PACF

Tipare teoretice pentru procese staționare:

Model	Tipar ACF	Tipar PACF
AR(1)	Descreștere exponențială	Vârf la lag 1, apoi 0
AR(2)	Exponențială/sinusoidă amortizată	Vârfuri la lag-uri 1-2, apoi 0
AR(p)	Scade gradual	Se întrerupe după lag p
MA(1)	Vârf la lag 1, apoi 0	Descreștere exponențială
MA(2)	Vârfuri la lag-uri 1-2, apoi 0	Exponențială/sinusoidă amortizată
MA(q)	Se întrerupe după lag q	Scade gradual
ARMA(p,q)	Scade	Scade

Tipare ACF/PACF: Ghid Vizual



- **AR**: ACF scade, PACF se întrerupe – folosiți PACF pentru a identifica ordinul p
- **MA**: ACF se întrerupe, PACF scade – folosiți ACF pentru a identifica ordinul q
- **ARMA**: Ambele scad – necesită criterii informaționale pentru selecția modelului

Criterii Informaționale

Scop: Echilibrează calitatea potrivirii față de complexitatea modelului

Criteriul Informațional Akaike (AIC):

$$\text{AIC} = -2\ln(\hat{L}) + 2k$$

Criteriul Informațional Bayesian (BIC/SBC):

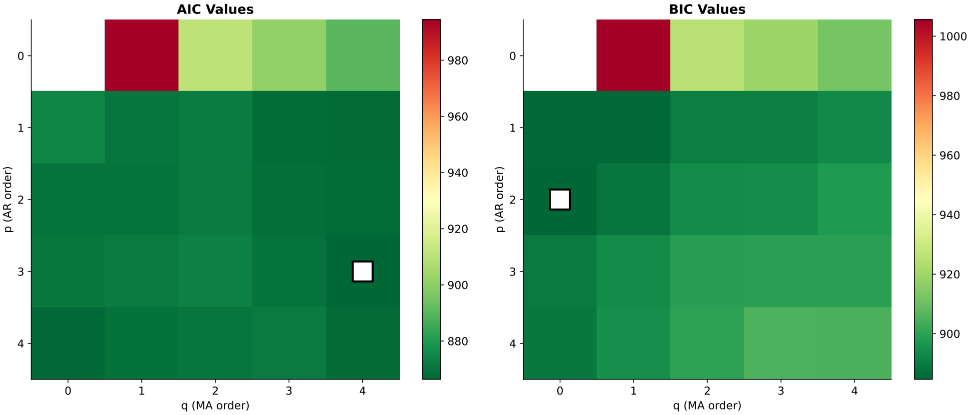
$$\text{BIC} = -2\ln(\hat{L}) + k\ln(n)$$

unde $\hat{L}$ = verosimilitate maximizată, k = număr de parametri, n = dimensiune eșantion

Utilizare:

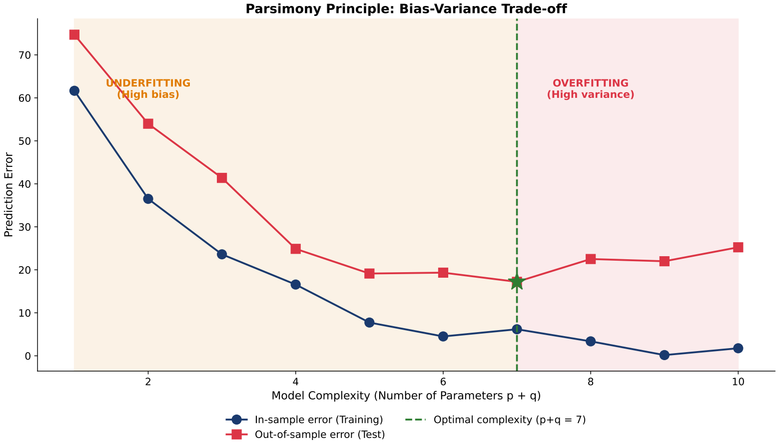
- Valori mai mici sunt mai bune
- BIC penalizează complexitatea mai puternic decât AIC
- AIC tinde să aleagă modele mai mari; BIC mai simplu
- Comparați modele potrivite pe *aceleași date*

AIC vs BIC: Selecția Modelului



Notă: Pătratul alb marchează cel mai bun model; valorile mai mici (verde) sunt mai bune

Principiul Parcimoniei: Compromisul Bias-Varianță



Selecția Automată a Modelului

Abordarea căutării pe grilă:

1. Potriviți ARMA(p,q) pentru $p = 0, 1, \ldots, p_{max}$ și $q = 0, 1, \ldots, q_{max}$
2. Selectați modelul cu cel mai mic AIC sau BIC
3. Verificați cu teste de diagnostic

În Python (statsmodels):

- `pm.auto_arima()` din pachetul `pmdarima`
- Testează automat staționaritatea, caută peste ordine
- Returnează cel mai bun model după AIC/BIC

Atenție:

- Selecția automată este un punct de pornire, nu răspunsul final
- Verificați întotdeauna diagnosticele
- Considerați cunoștințele de domeniu

Quiz: Criterii Informaționale

Întrebare

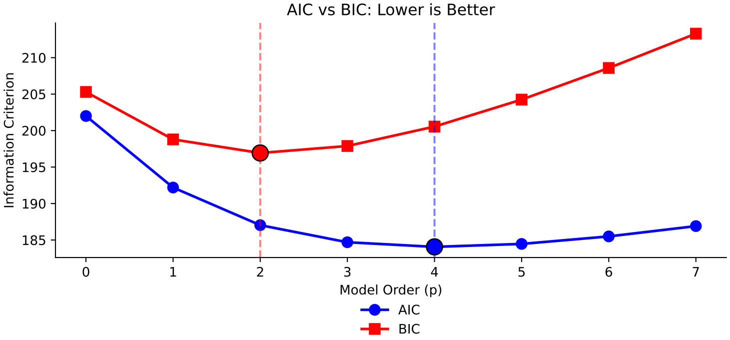
Comparând ARMA(1,1) vs ARMA(2,1) folosind BIC, care este corect?

- A. BIC mai mic înseamnă întotdeauna prognoze mai bune
- B. BIC penalizează complexitatea mai puțin decât AIC
- C. Modelul cu BIC mai mic este preferat
- D. BIC poate compara doar modele cu același număr de parametri

Quiz: Criterii Informaționale – Răspuns

Răspuns Corect: (C) Modelul cu BIC mai mic este preferat

BIC mai mic indică un compromis mai bun între potrivire și complexitate. BIC penalizează complexitatea *mai mult* decât AIC.



Prezentare Generală a Metodelor de Estimare

Trei abordări principale:

1. **Metoda Momentelor / Yule-Walker (doar AR)**
   - Potrivește autocorelațiile din eșantion la valorile teoretice
   - Simplă, formă închisă pentru modele AR
   - Nu este eficientă pentru componentele MA
2. **Estimarea prin Maximum de Verosimilitate (MLE)**
   - Cea mai comună abordare
   - Necesită ipoteză distribuțională (de obicei Gaussiană)
   - Eficientă și consistentă
3. **Cele Mai Mici Pătrate Condiționate**
   - Minimizează suma pătratelor reziduurilor
   - Condiționare pe observațiile inițiale
   - Computațional mai simplă decât MLE exact

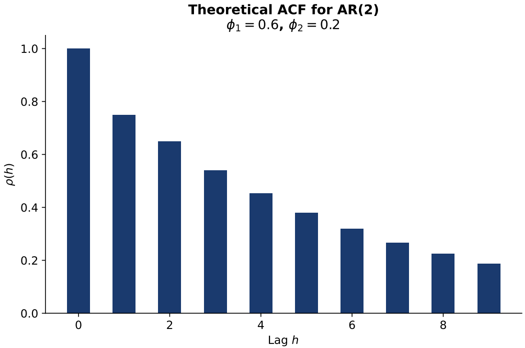
Comparația Metodelor de Estimare

ARMA Parameter Estimation Methods

Yule-Walker	Maximum Likelihood	Conditional LS
Pros:	**Pros:**	**Pros:**
+ Simple computation	+ Most efficient	+ Simple to implement
+ Closed-form solution	+ Works for ARMA	+ Fast computation
Cons:	**Cons:**	**Cons:**
- AR only	- Iterative	- Biased for small n
- Less efficient	- Local optima risk	- Ignores initial values

Recommendation: Use MLE for final estimation,
Yule-Walker for initial values

Ecuațiile Yule-Walker pentru AR(p)



Yule-Walker Equations

$$\rho(1) = \phi_1 + \phi_2 \rho(1)$$

$$\rho(2) = \phi_1 \rho(1) + \phi_2$$

Matrix form: $R \cdot \phi = \rho$

R = autocorrelation matrix

Solution: $\hat{\phi} = R^{-1} \rho$

Ecuațiile Yule-Walker: Forma Matriceală

Pentru AR(p): $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$

Ecuațiile Yule-Walker:

$$\rho(k) = \phi_1 \rho(k-1) + \phi_2 \rho(k-2) + \cdots + \phi_p \rho(k-p)$$

pentru $k = 1, 2, \ldots, p$

Forma matriceală:

$$\begin{pmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \cdots & \rho(p-1) \\ \rho(1) & \rho(0) & \cdots & \rho(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(p-1) & \rho(p-2) & \cdots & \rho(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(p) \end{pmatrix}$$

Estimare: Înlocuiți $\rho(k)$ cu autocorelațiile din eșantion $\hat{\rho}(k)$

Estimarea prin Maximum de Verosimilitate

Presupunând erori Gaussiene: $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

Log-verosimilitatea pentru ARMA(p,q):

$$\ell(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2$$

unde ε_t sunt inovațiile calculate recursiv.

Procedura de estimare:

1. Inițializare: folosiți metoda momentelor sau OLS pentru valori de pornire
2. Optimizare: metode numerice (de ex., BFGS, Newton-Raphson)
3. Iterare până la convergență

În practică: Folosiți `statsmodels.tsa.arima.model.ARIMA`

Erori Standard și Inferență

Distribuția asimptotică a MLE:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \xrightarrow{d} N\left(\boldsymbol{\theta}_0, \frac{1}{n}\mathrm{I}(\boldsymbol{\theta}_0)^{-1}\right)$$

unde $\mathrm{I}(\boldsymbol{\theta})$ este matricea informației Fisher.

Erori standard: Rădăcina pătrată a diagonalei lui $\frac{1}{n}\hat{\mathrm{I}}^{-1}$

Testarea ipotezelor:

- $H_0 : \phi_j = 0$ (sau $\theta_j = 0$)
- Statistica de test: $z = \frac{\hat{\phi}_j}{SE(\hat{\phi}_j)} \sim N(0, 1)$ asimptotic
- Respingeți dacă $|z| > 1.96$ la nivel de 5%

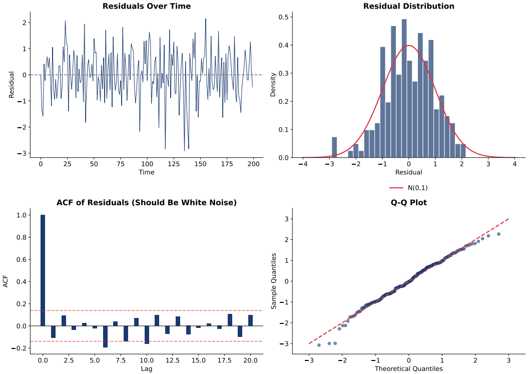
Interval de încredere: $\hat{\phi}_j \pm 1.96 \cdot SE(\hat{\phi}_j)$

Analiza Reziduurilor

Dacă modelul este corect specificat, reziduurile ar trebui să fie zgomot alb:

1. **Reprezentați grafic reziduurile în timp**
   - Ar trebui să fluctueze în jurul lui zero
   - Fără tipare sau trenduri evidente
   - Varianță constantă (fără heteroscedasticitate)
2. **Verificați ACF reziduurilor**
   - Toate corelațiile ar trebui să fie în benzile de încredere
   - Fără vârfuri semnificative $\rightarrow$ zgomot alb
3. **Verificați histograma / graficul Q-Q**
   - Ar trebui să fie aproximativ normale (dacă presupunem Gaussian)
   - Cozi groase sugerează erori non-normale

Diagnosticarea Reziduurilor: Exemplu



- **Graficul reziduurilor**: Ar trebui să arate dispersie aleatorie în jurul lui zero cu varianță constantă
- **ACF reziduurilor**: Fără vârfuri semnificative indică zgomot alb (potrivire bună)
- **Graficul Q-Q**: Punctele pe linia diagonală indică reziduuri distribuite normal

Testul Ljung-Box

Definiție 11 (Testul Ljung-Box)

Testează dacă reziduurile sunt distribuite independent (fără autocorelație).

Statistica de test:

$$Q(m) = n(n+2)\sum_{k=1}^{m} \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k}$$

Ipoteze:

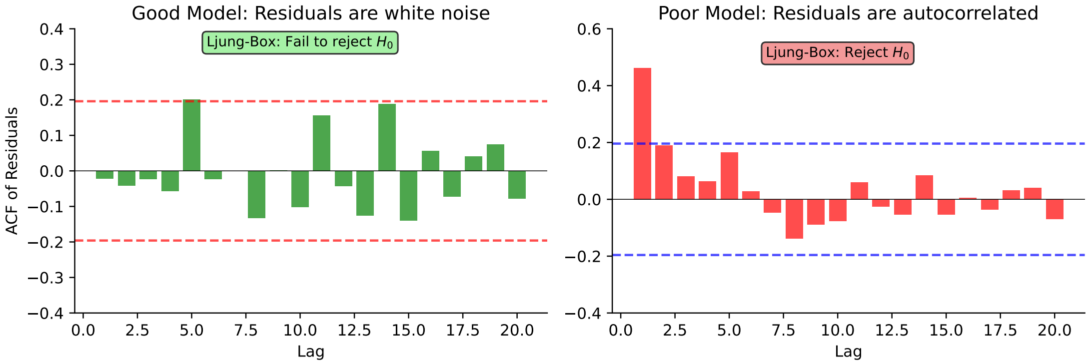
- H_0: Reziduurile sunt zgomot alb (fără autocorelație până la lag m)
- H_1: Reziduurile sunt autocorelate

Distribuție: Sub H_0, $Q(m) \sim \chi^2(m-p-q)$ aproximativ

Decizie:

- p-value $> 0.05 \rightarrow$ nu respingem $H_0 \rightarrow$ reziduurile arată ca zgomot alb (bine!)
- p-value $< 0.05 \rightarrow$ autocorelație semnificativă rămâne $\rightarrow$ model inadecvat

Testul Ljung-Box: Ilustrație Vizuală



Stânga: Model bun – reziduurile sunt zgomot alb (fără ACF semnificativ). Dreapta: Model slab – reziduurile arată autocorelație.

Lista de Verificare Diagnostic

Un model ARMA bun ar trebui să satisfacă:

1. **Staționaritate:** Rădăcinile AR în afara cercului unitate
   ✓ Verificați cu `arroots`
2. **Invertibilitate:** Rădăcinile MA în afara cercului unitate
   ✓ Verificați cu `maroots`
3. **Reziduuri zgomot alb:** Fără ACF semnificativ
   ✓ Grafic ACF, testul Ljung-Box
4. **Reziduuri normale:** (dacă presupunem)
   ✓ Grafic Q-Q, testul Jarque-Bera
5. **Fără heteroscedasticitate:** Varianță constantă
   ✓ Reprezentați reziduurile, testul ARCH
6. **Simplu:** Cel mai mic AIC/BIC dintre modelele adecvate

Dacă diagnosticele eșuează: Reveniți la identificare, încercați ordine diferite

Quiz: Testul Ljung-Box

Întrebare

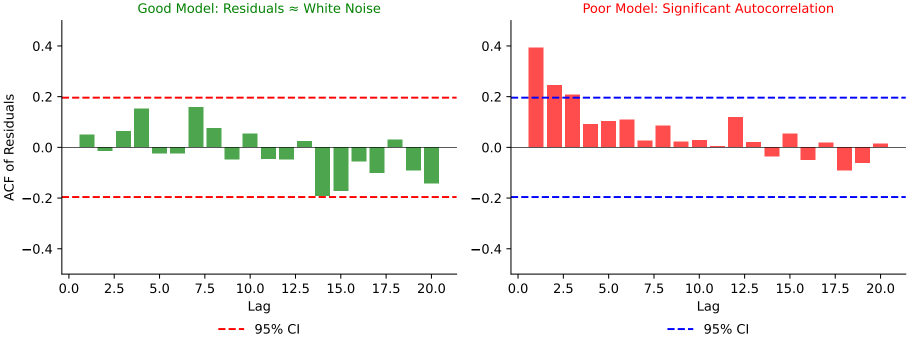
După potrivirea unui model ARMA, rulați testul Ljung-Box pe reziduuri și obțineți p-value = 0.03. Ce înseamnă asta?

- A. Modelul este adecvat, reziduurile sunt zgomot alb
- B. Modelul este inadecvat, reziduurile au autocorelație
- C. Trebuie să creșteți dimensiunea eșantionului
- D. Testul este neconcludent

Quiz: Testul Ljung-Box – Răspuns

Răspuns Corect: (B) Modelul este inadecvat

p-value < 0.05 respinge H_0 (zgomot alb), indicând autocorelație reziduală rămasă.



Prognoze Punctuale

Prognoza optimă: Speranța condiționată minimizează MSE

$$\hat{X}_{n+h|n} = \mathbb{E}[X_{n+h}|X_n, X_{n-1}, \ldots]$$

Pentru AR(1): $X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$

$$\hat{X}_{n+1|n} = c + \phi X_n$$
$$\hat{X}_{n+2|n} = c + \phi \hat{X}_{n+1|n} = c(1+\phi) + \phi^2 X_n$$
$$\hat{X}_{n+h|n} = \mu + \phi^h (X_n - \mu)$$

Proprietate cheie: Prognozele converg la media μ când $h \to \infty$

Pentru MA(1): $X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$

$$\hat{X}_{n+1|n} = \mu + \theta \varepsilon_n$$
$$\hat{X}_{n+h|n} = \mu \quad \text{pentru } h > 1$$

Incertitudinea Prognozei

Eroarea de prognoză:

$$e_{n+h|n} = X_{n+h} - \hat{X}_{n+h|n}$$

Eroarea medie pătratică de prognoză (MSFE):

$$\text{MSFE}(h) = \mathbb{E}[e_{n+h|n}^2] = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2$$

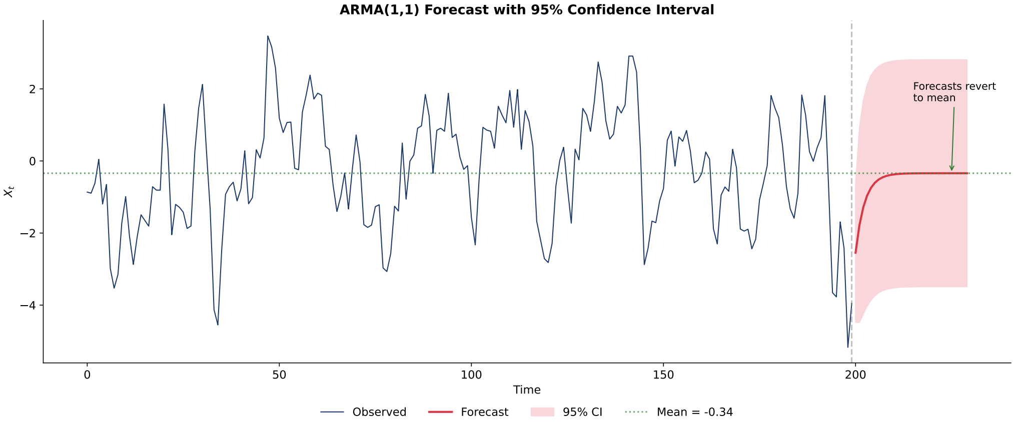
unde ψ_j sunt coeficienții MA(∞).

Pentru AR(1): $\psi_j = \phi^j$

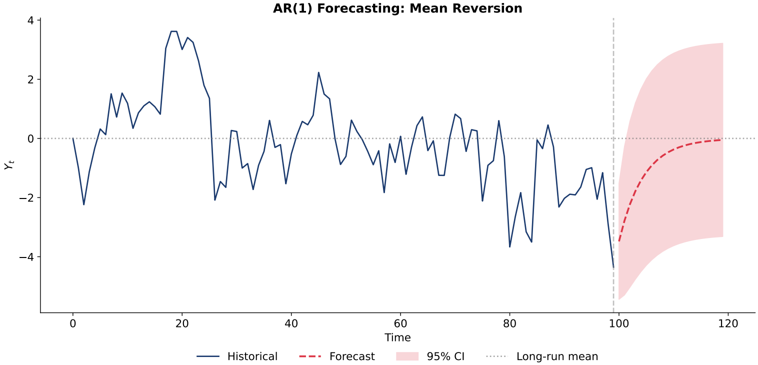
$$\text{MSFE}(h) = \sigma^2 \frac{1-\phi^{2h}}{1-\phi^2} \to \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} = \text{Var}(X_t)$$

Observație cheie: Incertitudinea prognozei crește cu orizontul, ajungând eventual la varianța necondiționată

Prognoza ARMA cu Intervale de Încredere

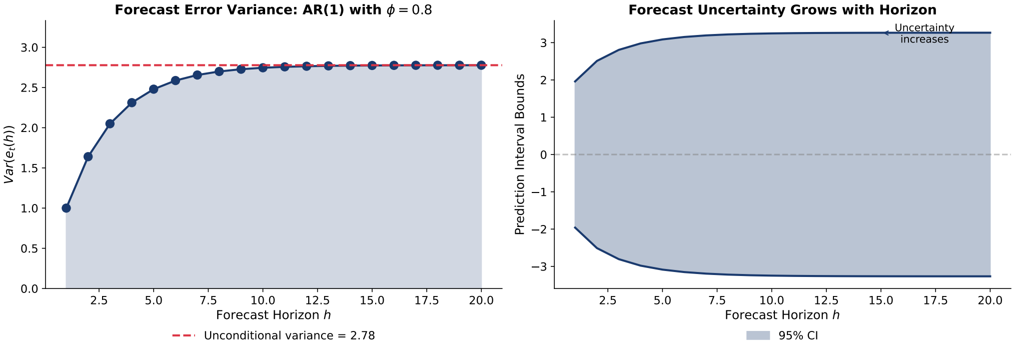


Prognoza AR(1): Revenirea la Medie



- Prognozele converg la media necondiționată μ pe măsură ce orizontul crește
- Rata de convergență depinde de $|\phi|$: valori mai mari înseamnă revenire mai lentă
- Intervalele de încredere se lărgesc cu orizontul, ajungând eventual la varianța necondiționată

Varianța Erorii de Prognoză în Funcție de Orizont



Intervale de Încredere pentru Prognoze

Presupunând erori Gaussiene:

$$X_{n+h}|X_n, \ldots \sim N\left(\hat{X}_{n+h|n}, \mathrm{MSFE}(h)\right)$$

Interval de încredere $(1-\alpha)$**:**

$$\hat{X}_{n+h|n} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\mathrm{MSFE}(h)}$$

unde $z_{\alpha/2} = 1.96$ pentru IC 95%.

Proprietăți:

- Intervalele se lărgesc pe măsură ce orizontul crește
- În cele din urmă converg la intervalul necondiționat: $\mu \pm z_{\alpha/2}\sigma_X$
- Lățimea depinde de parametrii modelului (coeficienți AR, etc.)

În Python: `model.get_forecast(h).conf_int()`

Evaluarea Prognozei

Testare în afara eșantionului:

1. Împărțiți datele: set de antrenare (potriviți modelul) și set de test (evaluați)
2. Generați prognoze pentru perioada de test
3. Comparați prognozele cu valorile reale

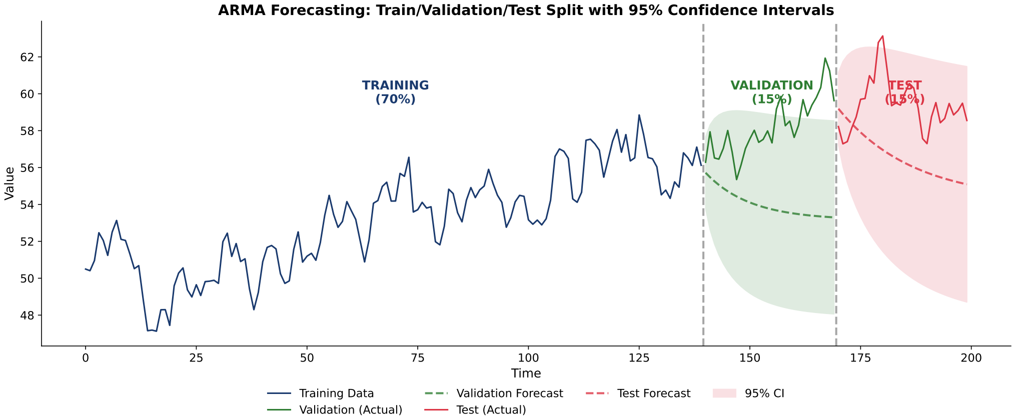
Metrici (din Capitolul 1):

- $\text{MAE} = \frac{1}{n}\sum |e_t|$
- $\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum e_t^2}$
- $\text{MAPE} = \frac{100}{n}\sum \left|\frac{e_t}{X_t}\right|$

Fereastră mobilă/în expansiune:

- Re-estimați modelul pe măsură ce sosesc date noi
- Evaluare mai realistă a performanței prognozei

Exemplu de Prognoză Train/Validare/Test



Quiz: Proprietățile Prognozei

Întrebare

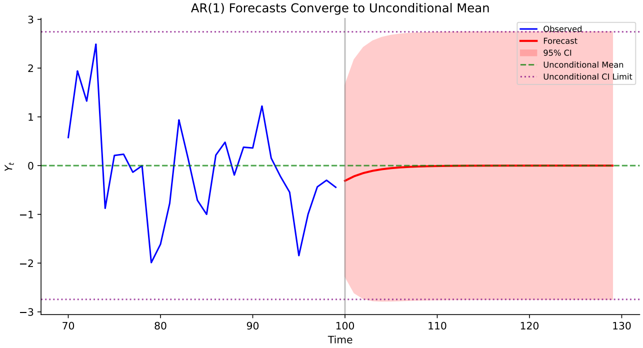
Pentru un model AR(1) staționar, ce se întâmplă cu prognozele când orizontul $h \to \infty$?

- **A** Prognozele cresc nelimitat
- **B** Prognozele oscilează la nesfârșit
- **C** Prognozele converg la media necondiționată μ
- **D** Prognozele devin mai precise

Quiz: Proprietățile Prognozei – Răspuns

Răspuns Corect: (C) Prognozele converg la μ

$\hat{X}_{n+h|n} = \mu + \phi^h(X_n - \mu) \to \mu$ când $h \to \infty$ (deoarece $|\phi| < 1$)



Implementare Python: Potrivirea ARMA

Folosind statsmodels:

```
from statsmodels.tsa.arima.model import ARIMA

# Potrivire ARMA(2,1) -- notă:  ARIMA(p,d,q) cu d=0
model = ARIMA(data, order=(2, 0, 1))
results = model.fit()

# Rezumat
print(results.summary())

# Prognoza
forecast = results.get_forecast(steps=10)
print(forecast.predicted_mean)
print(forecast.conf_int())
```

Notă: ARIMA cu $d = 0$ este echivalent cu ARMA

Python: Selecția Modelului cu pmdarima

Selecție automată ARIMA:

```
import pmdarima as pm

# Auto ARIMA cu criteriul AIC
model = pm.auto_arima(data,
              start_p=0, max_p=5,
              start_q=0, max_q=5,
              d=0, # Fără diferențiere pentru date staționare
              seasonal=False,
              information_criterion='aic',
              trace=True)

print(model.summary())
```

Rezultat: Cel mai bun ordin al modelului și parametrii potriviți

Rezumat Flux de Lucru

1. **Pregătirea datelor**
   - Verificați valori lipsă, valori aberante
   - Transformați dacă este necesar (log, diferențiere)
2. **Verificarea staționarității**
   - Inspecție vizuală: grafic temporal, ACF
   - Teste formale: ADF, KPSS
   - Diferențiați dacă este nestaționar
3. **Identificarea modelului**
   - Tipare ACF/PACF
   - Căutare pe grilă cu criterii informaționale
4. **Estimare și diagnosticare**
   - Potriviți modelul, verificați semnificația
   - Analiză reziduală, testul Ljung-Box
5. **Prognoza**
   - Prognoze punctuale cu intervale de încredere
   - Validare în afara eșantionului

Concluzii Cheie

1. **Modele AR(p):** Valoarea curentă depinde de p valori trecute
   - Staționaritate: rădăcinile lui $\phi(z)$ în afara cercului unitate
   - PACF se întrerupe la lag p
2. **Modele MA(q):** Valoarea curentă depinde de q șocuri trecute
   - Întotdeauna staționar; invertibilitate: rădăcinile lui $\theta(z)$ în afara cercului unitate
   - ACF se întrerupe la lag q
3. **ARMA(p,q):** Combină AR și MA pentru modelare flexibilă
   - Atât ACF cât și PACF scad
4. **Box-Jenkins:** Identificare $\rightarrow$ Estimare $\rightarrow$ Diagnosticare $\rightarrow$ Prognoză
5. **Diagnosticare:** Reziduurile trebuie să fie zgomot alb
6. **Prognoze:** Converg la medie; incertitudinea crește cu orizontul

Previzualizare Capitolul Următor

Capitolul 3: ARIMA și Modele Sezoniere

- ARIMA(p,d,q): Modele integrate pentru date nestaționare
- ARIMA Sezonier: SARIMA$(p,d,q)(P,D,Q)_s$
- Diferențiere sezonieră
- Aplicații practice cu tipare sezoniere

Lectură:

- Hyndman & Athanasopoulos, *Forecasting: Principles and Practice*, Cap. 9
- Box, Jenkins, Reinsel & Ljung, *Time Series Analysis*, Cap. 3-4

Referințe

- Box, G.E.P., Jenkins, G.M., Reinsel, G.C., & Ljung, G.M. (2015). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. 5th ed., Wiley.
- Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
- Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*. 3rd ed., OTexts. `https://otexts.com/fpp3/`
- Brockwell, P.J., & Davis, R.A. (2016). *Introduction to Time Series and Forecasting*. 3rd ed., Springer.
- Shumway, R.H., & Stoffer, D.S. (2017). *Time Series Analysis and Its Applications*. 4th ed., Springer.

Surse de Date și Software

Pachete Software:

- `statsmodels` – Modele statistice pentru Python, inclusiv ARIMA
- `pmdarima` – Selecție automată ARIMA pentru Python
- `scipy` – Optimizare și funcții statistice
- `numpy`, `pandas` – Manipulare date
- `matplotlib` – Vizualizare

Date și Exemple:

- Serii de timp simulate pentru ilustrații
- Exemple bazate pe Hyndman & Athanasopoulos (2021)