



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 5: Modele ARCH/GARCH pentru Volatilitate



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din Bucureşti

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

Obiective de învățare

La finalul acestui capitol, veți fi capabili să:

1. Înțelegeți **volatility clustering** și faptele stilizate ale randamentelor financiare
2. Estimați și interpretați modele **ARCH** și **GARCH**
3. Aplicați modele asimetrice (**EGARCH, GJR-GARCH**) pentru efectul de levier
4. Efectuați validarea și selectarea modelelor
5. Prognozați volatilitatea și calculați **Value at Risk (VaR)**

Competențe practice

- Implementare Python cu pachetul **arch**
 - ▶ Estimare, prognoză și diagnostic automat
- Interpretarea parametrilor și a persistenței volatilității
- Calculul VaR pentru managementul riscului
 - ▶ Backtesting și validarea prognozelor



Cuprins

Fundamente

- Motivație
- Introducere în Modelarea Volatilității
- Modelul ARCH
- Modelul GARCH
- Modele GARCH Asimetrice
- Selectarea și Diagnosticarea modelelor

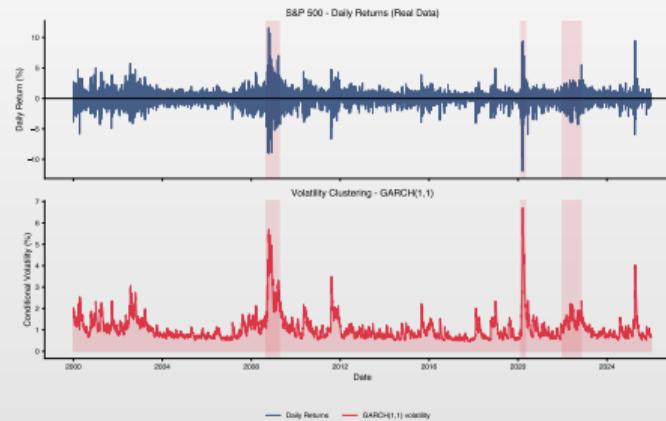
Aplicații

- Prognoza volatilității
- Implementare în Python
- Studiu de Caz: S&P 500
- Studiu de Caz: Bitcoin
- Rezumat și Quiz



Volatility clustering

- Perioadele de volatilitate mare sunt următe de perioade de volatilitate mare; calm de calm
- Acest lucru sugerează că **varianța condiționată este predictibilă**



TSA_ch5_clustering



De ce modelăm volatilitatea?

Observații empirice în seriile financiare

- Randamentele prezintă **volatility clustering** — perioadele de volatilitate ridicată sunt urmate de perioade similare
- Distribuția randamentelor are **cozi groase** (leptokurtosis)
- Corelația randamentelor ≈ 0 , dar corelația pătratelor este semnificativă
- Volatilitatea răspunde **asimetric** la șocuri (leverage effect)

Limitarea modelelor ARIMA

Modelele ARIMA presupun **varianță constantă** (homoscedasticitate), ceea ce nu este realist pentru seriile financiare!

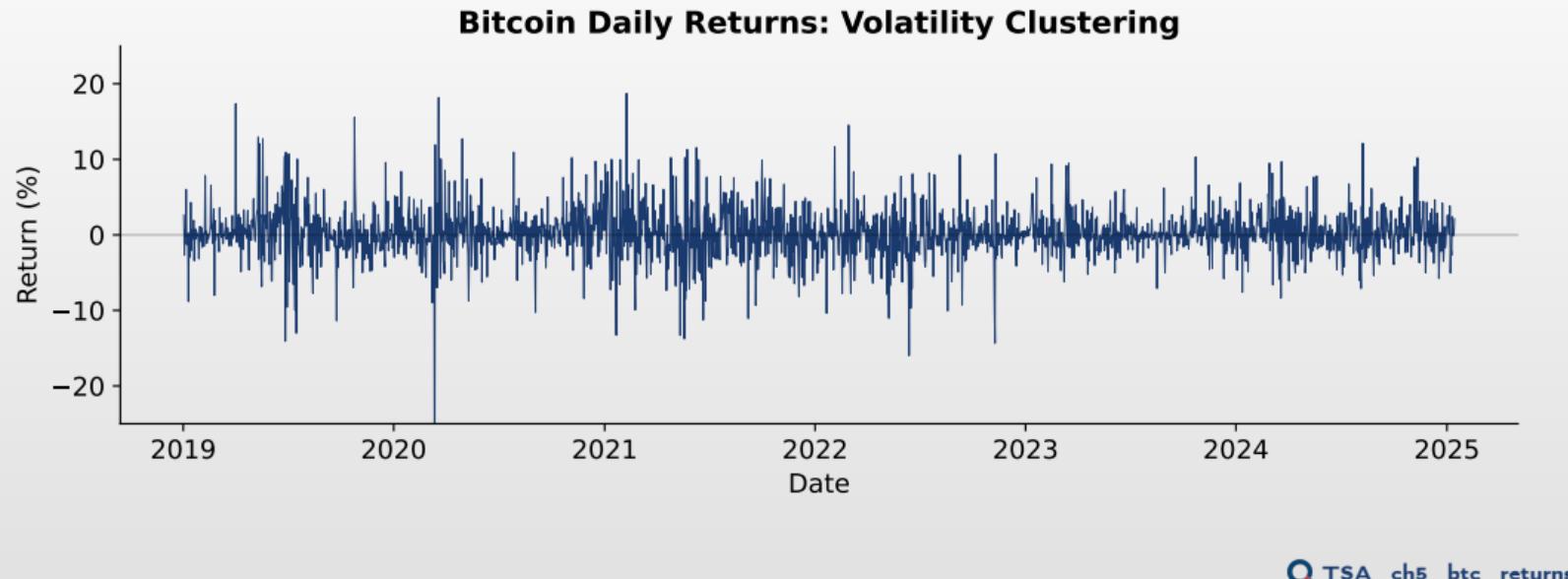


Exemplu: Bitcoin \succ volatility clustering

Observații

- Randamente zilnice Bitcoin (2019–2025): volatility clustering extrem de pronunțat
 - ▶ Randamente de $\pm 20\%$ în perioadele de criză (COVID, Terra/Luna)
- Volatilitatea Bitcoin este semnificativ mai mare decât a activelor tradiționale
 - ▶ α tipic $\approx 0.10\text{--}0.20$ (reacție rapidă la news)

Exemplu: Bitcoin \succ volatility clustering

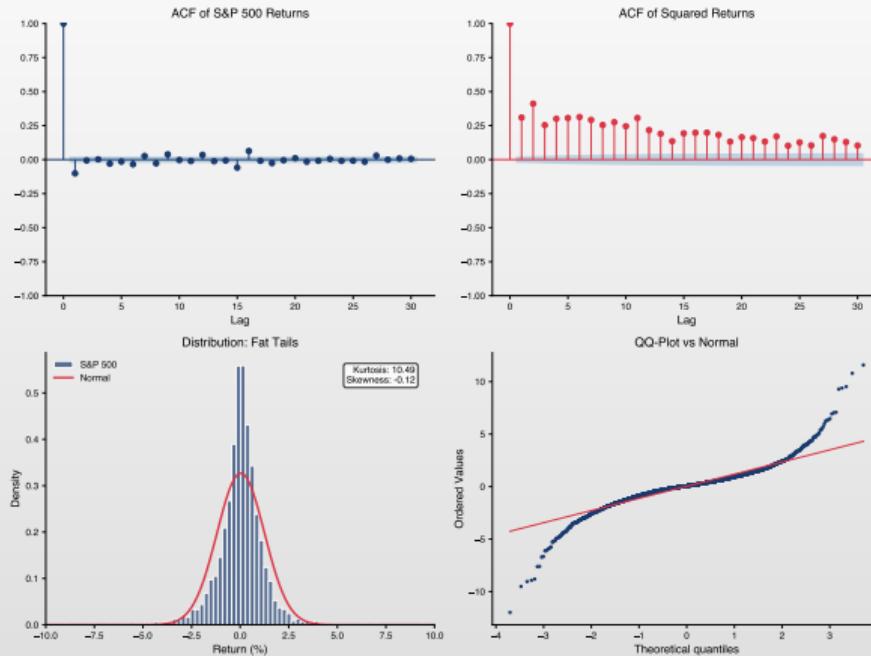


Fapte stilizate ale randamentelor financiare

Proprietăți observate

- **Absența autocorelației** în randamente
 - ▶ $\text{Corr}(r_t, r_{t-k}) \approx 0$ — randamentele sunt impredictibile
- **Autocorelație** în $r_t^2, |r_t|$
 - ▶ $\text{Corr}(r_t^2, r_{t-k}^2) > 0$ — volatilitatea este predictibilă
- **Cozi groase** ($kurtosis > 3$)
 - ▶ Mai multe valori extreme decât prevede distribuția normală
- **Leverage effect**
 - ▶ řocurile negative cresc volatilitatea mai mult decât cele pozitive
- **Volatility clustering**
 - ▶ Perioadele de volatilitate mare sunt urmate de volatilitate mare

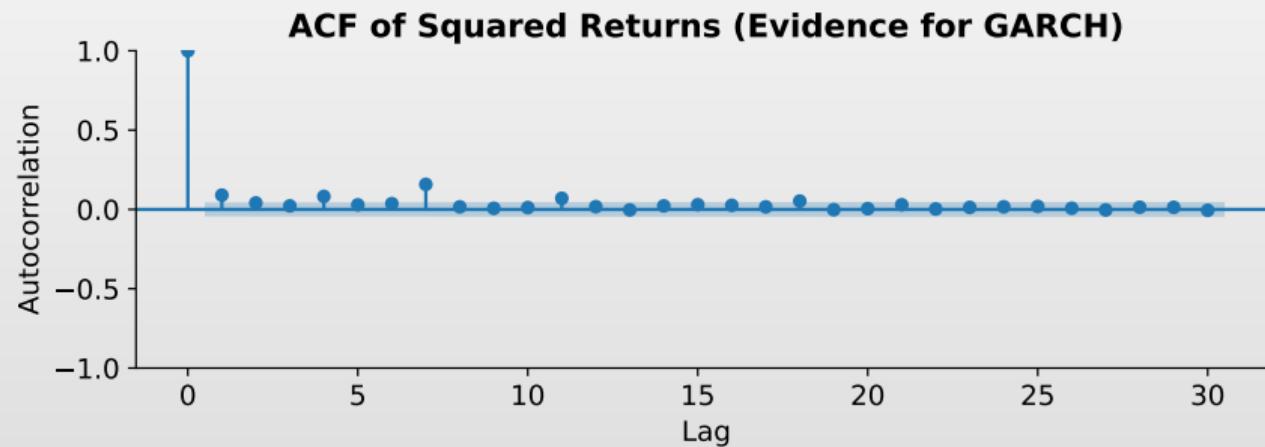
Fapte stilizate ale randamentelor financiare



Exemplu: Bitcoin \succ evidență pentru efecte ARCH

Interpretare

- ACF(r_t^2) este semnificativ la multe lag-uri \succ efecte ARCH prezente
- Varianța condiționată este predictibilă \succ modelele GARCH sunt justificate



Heteroscedasticitate condiționată

Definiție 1 (Varianță Condiționată)

Pentru o serie de randamente $\{r_t\}$, **varianța condiționată** la momentul t este:

$\sigma_t^2 = \text{Var}(r_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}[(r_t - \mu_t)^2 | \mathcal{F}_{t-1}]$ unde \mathcal{F}_{t-1} reprezintă informația disponibilă până la momentul $t-1$.

Modelul general

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \text{i.i.d.}(0, 1)$$

- μ_t = media condiționată (ARMA); σ_t^2 = varianța condiționată (GARCH)
- z_t = inovații standardizate (Normal, Student-t, GED)



Portret de cercetător: Engle & Bollerslev



Robert Engle (*1942)
Premiul Nobel 2003

[W Wikipedia \(en\)](#)



Tim Bollerslev (*1958)

[W Wikipedia \(en\)](#)

Biografie

- **Robert Engle**: economist american la NYU Stern. Premiul Nobel (2003) „pentru metode de analiză a seriilor economice cu volatilitate variabilă în timp (ARCH)”
- **Tim Bollerslev**: economist danez-american la Duke University, doctorand al lui Engle

Contribuții principale

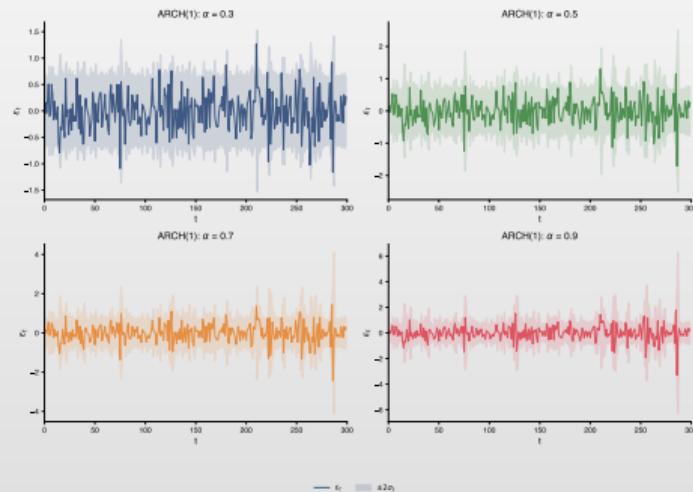
- **Modelul ARCH** (Engle, 1982) — heteroskedasticitate condiționată autoregresivă
- **Modelul GARCH** (Bollerslev, 1986) — ARCH generalizat cu volatilitate persistentă
- **Volatilitatea realizată și econometria de înaltă frecvență**
- Fundamentul managementului modern al riscului financiar (VaR, ES)



Simulare ARCH(1): Efectul parametrului α

Interpretare

- Cu cât α este mai mare, cu atât volatilitatea reacționează mai puternic la șocuri recente



Modelul ARCH(q) — Engle (1982)

Definiție 2 (ARCH(q))

Modelul **Autoregressive Conditional Heteroskedasticity** de ordin q :

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \text{i.i.d.}(0, 1), \quad \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

Restricții pentru staționaritate

- $\omega > 0$ (nivel de bază pozitiv), $\alpha_i \geq 0$ (non-negativitate)
- $\sum_{i=1}^q \alpha_i < 1$ (staționaritate)

Proprietăți ale modelului ARCH(1)

$$\text{ARCH}(1): \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

- Varianța necondiționată:** $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \frac{\omega}{1 - \alpha_1}$ (dacă $\alpha_1 < 1$)
- Kurtosis:** $\kappa = 3 \cdot \frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2}$ (dacă $\alpha_1^2 < 1/3$)
- Kurtosis > 3 pentru $\alpha_1 > 0 \succ$ cozi groase!

Exemplu numeric

Dacă $\omega = 0.0001$ și $\alpha_1 = 0.3$:

- Varianța necondiționată:** $\sigma^2 = \frac{0.0001}{1 - 0.3} = 0.000143$
- Kurtosis:** $\kappa = 3 \cdot \frac{1 - 0.09}{1 - 0.27} = 3.74 > 3$



Demonstrație: varianța necondiționată ARCH(1)

Demonstrație.

Fie $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ cu $z_t \sim N(0, 1)$ și $\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$.

Pasul 1: Aplicăm speranța necondiționată:

$$\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2 z_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2] \cdot \mathbb{E}[z_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2]$$

Pasul 2: Aplicăm speranța ecuației varianței:

$$\mathbb{E}[\sigma_t^2] = \mathbb{E}[\omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2] = \omega + \alpha_1 \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2]$$

Pasul 3: Prin staționaritate, $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] = \sigma^2$:

$$\sigma^2 = \omega + \alpha_1 \sigma^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma^2(1 - \alpha_1) = \omega$$

Rezultat:
$$\boxed{\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha_1}}$$
 (necesită $\alpha_1 < 1$ pentru staționaritate)



Demonstrație: kurtosis ARCH(1)

Pentru $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ cu $z_t \sim N(0, 1)$:

Pasul 1: $\mathbb{E}[\varepsilon_t^4] = \mathbb{E}[\sigma_t^4] \cdot \mathbb{E}[z_t^4] = 3\mathbb{E}[\sigma_t^4]$ (deoarece $\mathbb{E}[z^4] = 3$)

Pasul 2: Folosind $\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$:

$$\mathbb{E}[\sigma_t^4] = \mathbb{E}[(\omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2)^2] = \omega^2 + 2\omega\alpha_1\sigma^2 + \alpha_1^2\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^4]$$

Pasul 3: Rezolvând recurența:

$$\kappa = \frac{\mathbb{E}[\varepsilon_t^4]}{(\mathbb{E}[\varepsilon_t^2])^2} = 3 \cdot \frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2}$$

Interpretare

- $\kappa > 3$ pentru orice $\alpha_1 > 0$ \succ **cozi groase** (leptokurtosis)
- Necesită $\alpha_1 < 0.577$ pentru moment de ordin 4 finit
- ARCH generează în mod natural distribuții cu cozi groase!

Teorie vs empirică: decalajul kurtosis

Kurtosis ARCH(1): prea mică!

- Pentru randamente tipice de acțiuni: $\alpha_1 \approx 0.09$ (S&P 500)
- Kurtosis teoretică: $\kappa = 3 \cdot \frac{1-0.09^2}{1-3 \times 0.09^2} \approx 3.05$
- Kurtosis empirică a randamentelor zilnice S&P 500: $\kappa \approx 13.8$

Decalajul kurtosis

$$\underbrace{3.05}_{\text{ARCH}(1)\text{-Normal}} \ll \underbrace{13.8}_{\text{Empiric}}$$

ARCH(1) cu inovații gaussiene nu poate reproduce kurtosis-ul extrem observat în datele financiare.

Soluții

- **Inovații Student-t:** $z_t \sim t_\nu$, adaugă kurtosis din distribuția însăși
- **GARCH(1,1):** persistență ($\beta > 0$) generează kurtosis suplimentar
- Ambele combinate: Student-t GARCH capturează $\kappa \gg 3$ observat în practică



Testarea efectelor ARCH

Testul Engle pentru efecte ARCH

Procedură:

1. Estimează modelul pentru medie și obține reziduurile $\hat{\varepsilon}_t$
2. Calculează $\hat{\varepsilon}_t^2$
3. Regrezează $\hat{\varepsilon}_t^2$ pe lag-urile sale:

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \cdots + \beta_q \hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + u_t$$

4. Calculează statistica $LM = T \cdot R^2 \sim \chi^2(q)$

Ipoteze

- H_0 : Nu există efecte ARCH ($\alpha_1 = \cdots = \alpha_q = 0$)
- H_1 : Există efecte ARCH (cel puțin un $\alpha_i \neq 0$)



Limitări ale modelului ARCH

Probleme practice

1. **Ordin mare** — de obicei sunt necesare multe lag-uri (q mare)
2. **Mulți parametri** — dificultăți de estimare
3. **Restricții de non-negativitate** — greu de impus pentru q mare
4. **Nu capturează persistența** — volatilitatea observată este foarte persistentă

Soluția

Modelul GARCH — introduce lag-uri ale varianței condiționate pentru a captura persistența cu mai puțini parametri!



Modelul GARCH(1,1)

Cel mai popular model de volatilitate

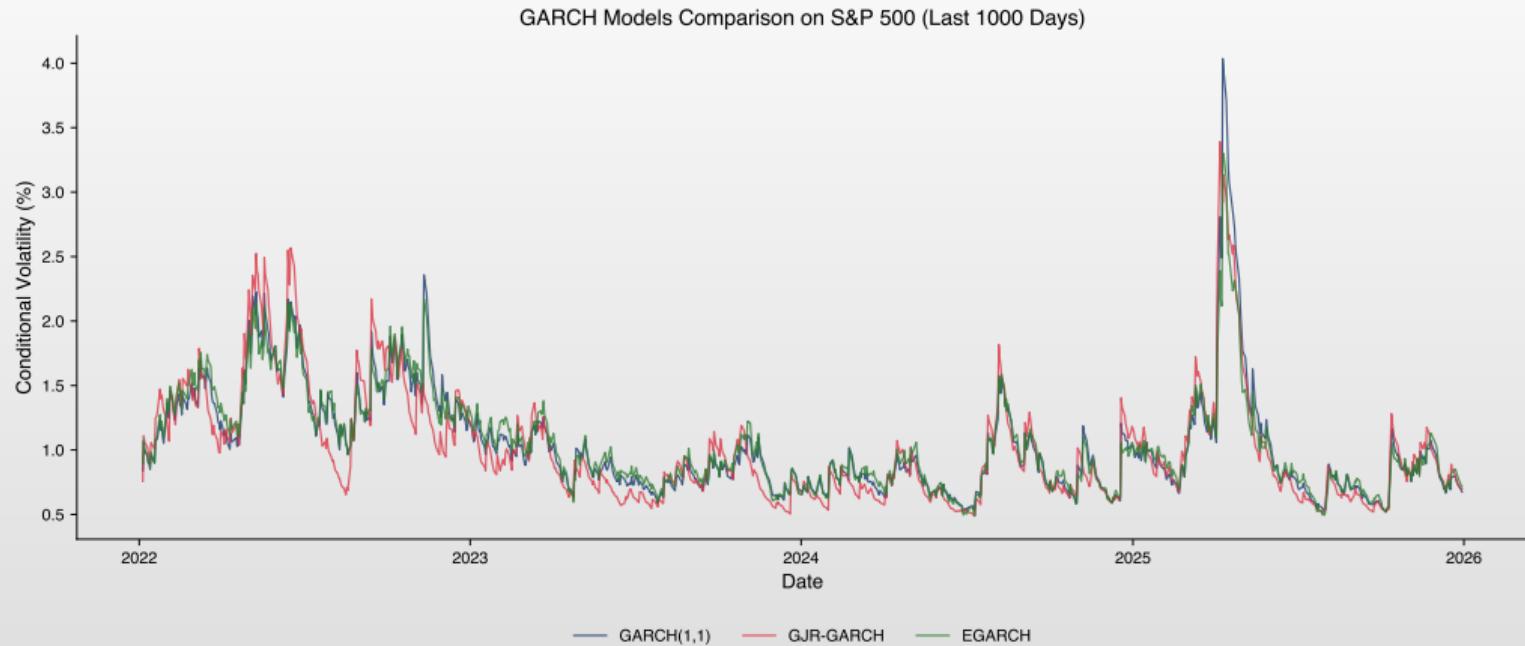
$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

Restricții și proprietăți

- $\omega > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0; \quad \alpha + \beta < 1$ (staționaritate)
- $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}; \quad \text{Half-life: } HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha+\beta)}$



Modelul GARCH(1,1)



Modelul GARCH(p,q) — Bollerslev (1986)

Definiție 3 (GARCH(p,q))

Modelul **Generalized ARCH**:

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \text{i.i.d.}(0, 1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Interpretare

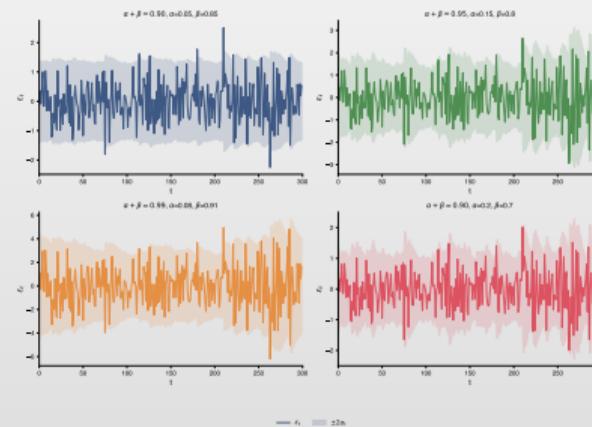
- ω = nivel de bază al volatilității
- α_i = reacția la șocuri recente (coeficienți news)
- β_j = persistența volatilității (memorie)
- $\alpha + \beta$ = persistența totală



Simulare GARCH(1,1): efectul persistenței

Interpretare

- α controlează reacția la șocuri
- β controlează persistența
- Suma $\alpha + \beta$ determină viteza de revenire la medie



Demonstrație: varianța necondiționată GARCH(1,1)

Demonstrație.

Pentru $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$:

Pasul 1: Aplicăm speranța necondiționată: $\mathbb{E}[\sigma_t^2] = \omega + \alpha\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] + \beta\mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2]$

Pasul 2: Prin staționaritate, $\mathbb{E}[\sigma_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2] = \bar{\sigma}^2$ și $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \bar{\sigma}^2$: $\bar{\sigma}^2 = \omega + (\alpha + \beta)\bar{\sigma}^2$

Pasul 3: Rezolvăm: $\bar{\sigma}^2(1 - \alpha - \beta) = \omega \Rightarrow \boxed{\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}}$

□

Condiție de staționaritate

Necesită $\alpha + \beta < 1$ pentru varianță necondiționată finită.

GARCH(1,1) ca ARMA pentru ε_t^2

Reprezentare ARMA(1,1)

Definim $\nu_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ (șocul varianței). Atunci:

$$\varepsilon_t^2 = \omega + (\alpha + \beta)\varepsilon_{t-1}^2 + \nu_t - \beta\nu_{t-1}$$

Aceasta este un **ARMA(1,1)** pentru ε_t^2 !

Implicații

- ACF al ε_t^2 decinde exponențial (ca ARMA)
- Persistența este dată de $\alpha + \beta$
- PACF poate ajuta la identificarea ordinului

Demonstrație: Reprezentarea ARMA a GARCH(1,1)

Demonstrație.

Pasul 1: Definim şocul varianței: $\nu_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$

- $\mathbb{E}[\nu_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}[\varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] - \sigma_t^2 = \sigma_t^2 - \sigma_t^2 = 0$
- ν_t este o secvență diferență de martingal

Pasul 2: Înlocuim $\sigma_t^2 = \varepsilon_t^2 - \nu_t$ în ecuația GARCH:

$$\varepsilon_t^2 - \nu_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta(\varepsilon_{t-1}^2 - \nu_{t-1})$$

Pasul 3: Rearanjăm:

$$\varepsilon_t^2 = \omega + (\alpha + \beta)\varepsilon_{t-1}^2 + \nu_t - \beta\nu_{t-1}$$

Rezultat: ARMA(1,1) cu coeficient AR $\phi = \alpha + \beta$ și coeficient MA $\theta = -\beta$.



Demonstrație: persistența volatilității și half-life

Prognosă multi-pas GARCH(1,1)

- $\mathbb{E}_t[\sigma_{t+h}^2] = \bar{\sigma}^2 + (\alpha + \beta)^{h-1}(\sigma_{t+1}^2 - \bar{\sigma}^2)$

Demonstrație

- **Pasul 1:** Notăm $\phi = \alpha + \beta$ și $q_t = \sigma_t^2 - \bar{\sigma}^2$ (deviația de la medie)
- **Pasul 2:** Din ecuația GARCH: $\mathbb{E}_t[q_{t+1}] = \phi \cdot q_t$, deci $\mathbb{E}_t[q_{t+h}] = \phi^h \cdot q_t$
- **Pasul 3:** Half-life = timpul până când deviația se înjumătățește:
$$\phi^{HL} = 0.5 \Rightarrow HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\phi)} = \frac{-0.693}{\ln(\alpha+\beta)}$$

Exemplu: S&P 500

- Cu $\alpha + \beta = 0.988$: $HL = \frac{-0.693}{-0.012} \approx 58$ zile (șocurile persistă ~3 luni!)



Estimarea modelelor GARCH

Metoda verosimilității maxime (MLE)

Log-verosimilitate (normală): $\ell(\theta) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[\ln(\sigma_t^2) + \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} \right]$

Distribuții alternative pentru z_t

- Student-t**: capturează cozile groase — cea mai frecventă alegere
- GED**: flexibilitate pentru kurtosis
- Skewed Student-t**: asimetrie și cozi groase

Notă practică

Distribuția Student-t oferă de regulă o potrivire mai bună pentru randamentele financiare datorită cozilor groase ($kurtosis > 3$).



Quasi-MLE și robustețe

Ce se întâmplă dacă distribuția este greșit specificată?

- MLE standard presupune $z_t \sim N(0, 1)$, dar distribuția reală poate差别
- Quasi-MLE (QMLE)**: maximizează log-verosimilitatea gaussiană chiar dacă z_t nu este normal
- Observație cheie: avem nevoie doar ca *primele două momente condiționate* să fie corecte

Definiție 4 (Consistență QMLE — Bollerslev & Wooldridge (1992))

Dacă media și varianța condiționate sunt corect specificate, QMLE este consistent pentru (ω, α, β) indiferent de distribuția reală a lui z_t .

Erori standard sandwich (robuste)

Erorile standard trebuie corectate:

$$\hat{V}_{\text{robust}} = \hat{A}^{-1} \hat{B} \hat{A}^{-1} \quad (\text{White, 1982})$$

unde \hat{A} = Hessiana, \hat{B} = produsul exterior al scorurilor. În Python: `result.summary()` raportează SE robuste implicit.

Când folosim QMLE vs MLE complet

- QMLE**: implicit sigur — consistent chiar sub specificare greșită
- MLE complet (Student-*t*)**: mai eficient dacă distribuția este corectă



Provocări practice în estimare

Probleme frecvente

- Eșec de convergență:** log-verosimilitatea este non-convexă; optimizatorul se poate bloca
- Soluții la frontieră:** $\hat{\alpha} \approx 0$ sau $\hat{\alpha} + \hat{\beta} \approx 1$ (aproape IGARCH)
- Sensibilitate la valori inițiale:** inițializări diferite \succ estimări diferite

Bune practici

1. Încercați mai mulți optimizatori: **BFGS** (rapid, bazat pe gradient) vs **Nelder-Mead** (fără derive)
2. Inițializați σ_0^2 cu varianța eșantionului (backcast)
3. Verificați $\alpha + \beta < 1$ post-estimare; dacă ≈ 1 , considerați IGARCH sau schimbare de regim
4. Comparați rezultatele între valori inițiale; estimări consistente \succ model fiabil

Regulă practică

Dacă BFGS și Nelder-Mead dau estimări *diferite* ale parametrilor, modelul poate fi greșit specificat sau datele insuficiente.



Valori tipice pentru GARCH(1,1)

Serie	α	β	$\alpha + \beta$
S&P 500 zilnic	0.05–0.10	0.85–0.95	0.95–0.99
EUR/USD zilnic	0.03–0.08	0.90–0.95	0.95–0.99
Bitcoin zilnic	0.10–0.20	0.75–0.85	0.90–0.98
Obligațiuni	0.02–0.05	0.90–0.97	0.95–0.99

Observații

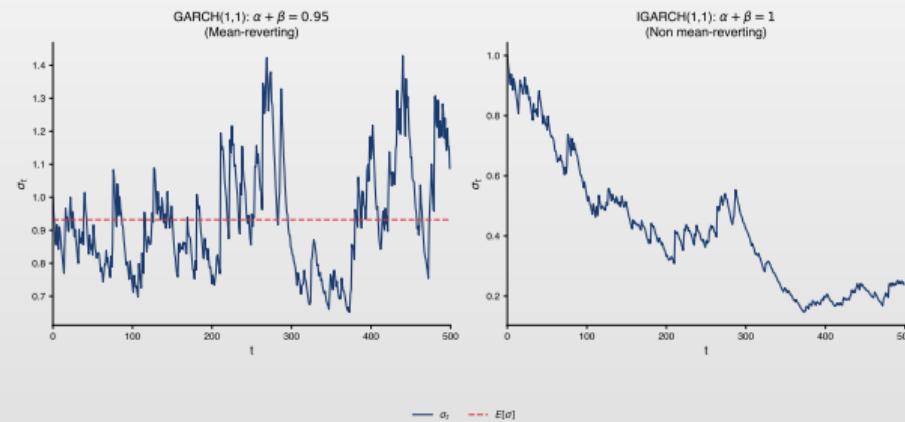
- $\alpha + \beta$ aproape de 1 \succ volatilitate foarte persistentă
- α mic, β mare \succ reacție lentă la șocuri, memorie lungă
- Bitcoin: α mai mare \succ reacție mai rapidă la news



GARCH vs IGARCH: comparație persistență

Interpretare

- GARCH standard revine la media necondiționată
- IGARCH nu are medie finită \succ șocurile persistă indefinit



Q TSA_ch5_igarch



IGARCH — integrated GARCH

Definiție 5 (IGARCH(1,1))

Când $\alpha + \beta = 1$:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + (1 - \alpha) \sigma_{t-1}^2$$

Proprietăți

- Varianța necondiționată nu există (infinită)
- řocurile au efect **permanent** asupra volatilității
- Folosit pentru serii cu persistență extremă
- Util pentru **RiskMetrics** (J.P. Morgan): $\alpha = 0.06$, $\beta = 0.94$

Observație 1

IGARCH este analog cu o rădăcină unitară în varianță!



Schimbări de regim în volatilitate

Problemă

GARCH presupune un singur regim cu parametri constanți. Dar volatilitatea prezintă adesea rupturi structurale (ex. criza 2008, COVID-19).

Definiție 6 (GARCH cu schimbare de regim Markov)

Parametrii (ω, α, β) comută între K regimuri guvernate de un lanț Markov ascuns:

$$\sigma_t^2 = \omega_{s_t} + \alpha_{s_t} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_{s_t} \sigma_{t-1}^2, \quad s_t \in \{1, \dots, K\}$$

Testul ICSS Inclan-Tiao

- Detectează **puncte de schimbare multiple** în varianța necondiționată
- Bazat pe suma cumulativă a observațiilor pătrate (tip CUSUM)
- Rezultate tipice: S&P 500 arată rupturi la 2001, 2008, 2020

Implicații practice

- Dacă rupturile sunt prezente, persistența GARCH $(\alpha + \beta)$ este **biasată în sus** și IGARCH spuriș
- Soluție: estimare GARCH separată per regim, sau ferestre rulante
- Alternativă: GARCH cu schimbare Markov cu $K = 2$ (regim volatilitate scăzută / ridicată)



Leverage effect

Definiție

Leverage effect: řocurile negative cresc volatilitatea mai mult decât cele pozitive de aceeași magnitudine.

Problema GARCH standard

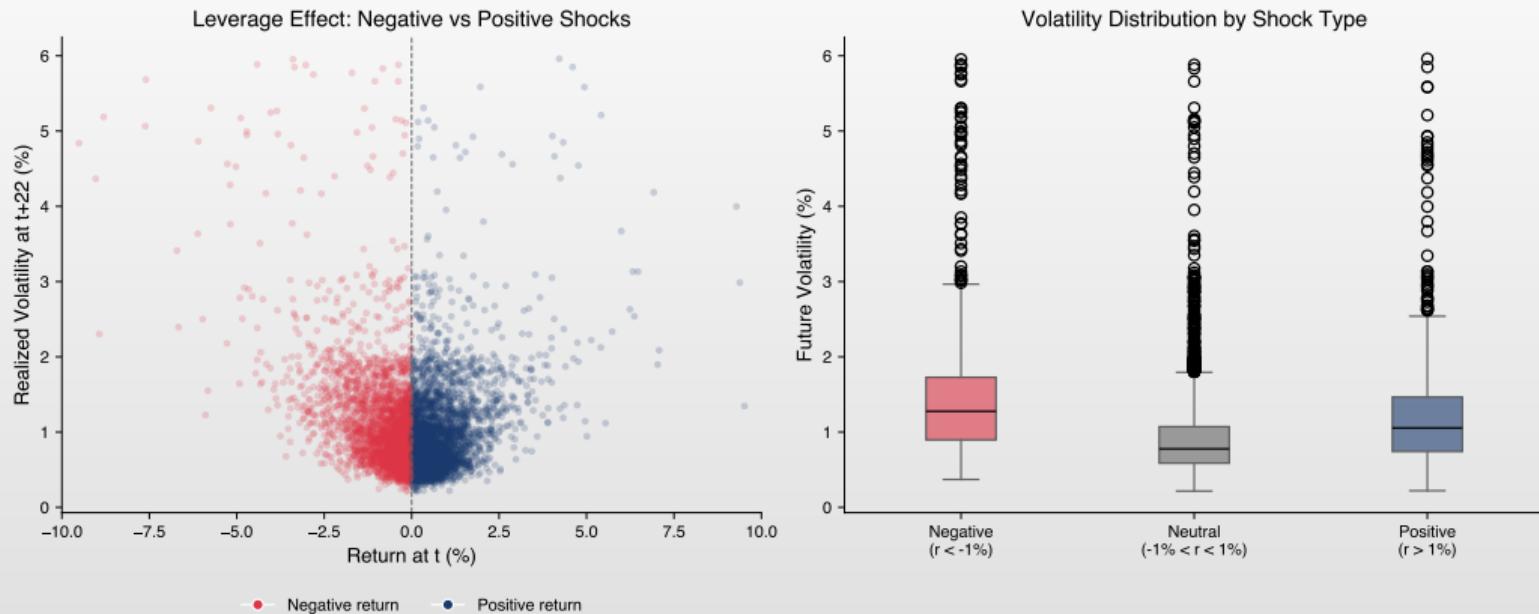
- GARCH standard: $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$ — doar ε_{t-1}^2 contează, semnul se pierde!
- Intuiție economică: Vești proaste \succ prețul scade \succ levierul crește \succ volatilitatea crește

Evidență empirică

- Black (1976): prima documentare a efectului de levier pe piața de acțiuni
- Efectul este asimetric: căderi de 5% cresc volatilitatea mai mult decât creșteri de 5%
- Soluții: EGARCH, GJR-GARCH, TGARCH — modele care disting semnul řocului



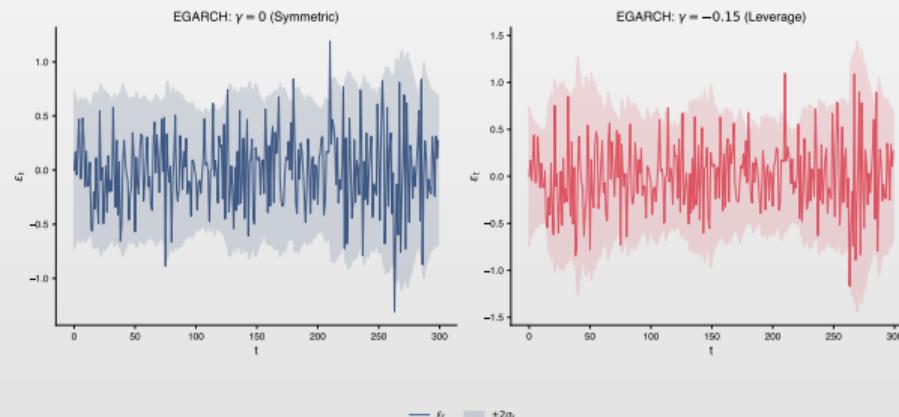
Leverage effect



Simulare EGARCH: Efect simetric vs asimetric

Interpretare

- Când $\gamma < 0$, şocurile negative cresc volatilitatea mai mult decât cele pozitive



 TSA_ch5_egarch_sim



Modelul EGARCH — Nelson (1991)

Definiție 7 (EGARCH(1,1))

Exponential GARCH:

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \alpha(|z_{t-1}| - \mathbb{E}[|z_{t-1}|]) + \gamma z_{t-1} + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2)$$

unde $z_t = \varepsilon_t / \sigma_t$.

Avantaje EGARCH

- Nu necesită restricții de non-negativitate — modelează $\ln(\sigma_t^2)$
- Captează leverage effect prin parametrul γ
 - ▶ $\gamma < 0$: șocuri negative \succcurlyeq volatilitate mai mare
 - ▶ $\gamma = 0$: efect simetric (ca GARCH)
- Persistența este dată de β



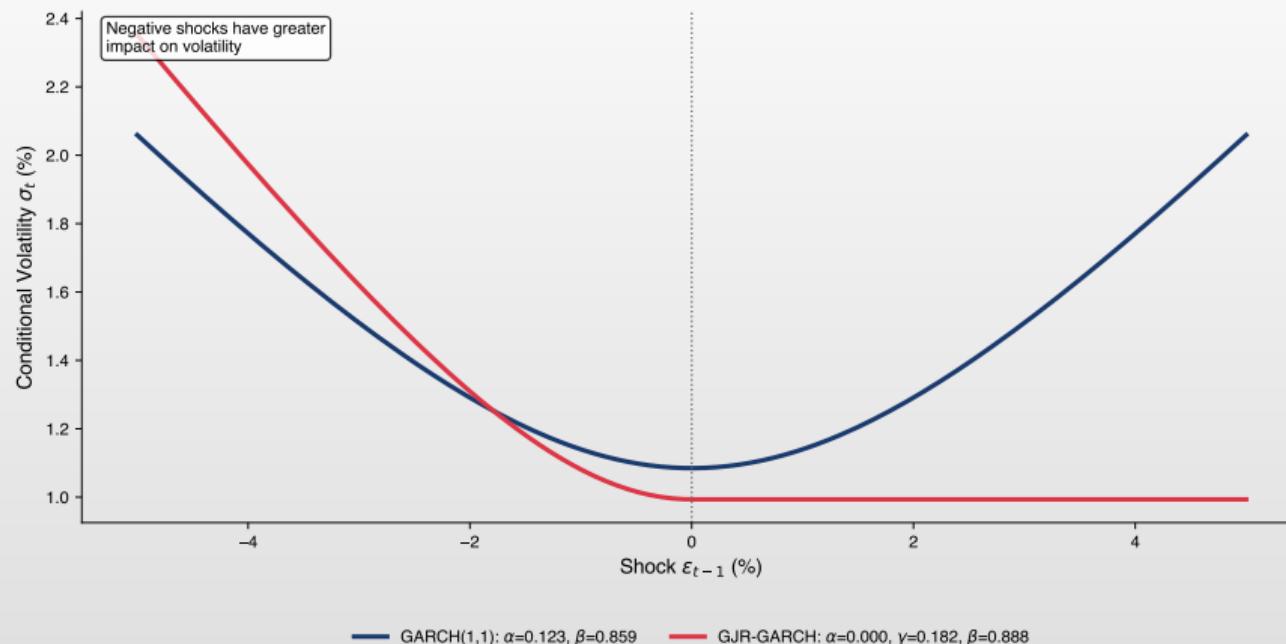
News impact curve \succ EGARCH

Interpretare

- News Impact Curve:** relația între ε_t și σ_{t+1}^2
- GARCH:** curba simetrică (parabolă)
 - ▶ řocuri pozitive și negative au același impact
- EGARCH:** curba asimetrică
 - ▶ řocuri negative au impact mai mare asupra volatilității



News impact curve \curvearrowright EGARCH



Modelul GJR-GARCH

Definiție 8 (GJR-GARCH(1,1))

Glosten, Jagannathan & Runkle (1993): $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 \cdot I_{t-1} + \beta \sigma_{t-1}^2$ unde $I_{t-1} = 1$ dacă $\varepsilon_{t-1} < 0$, altfel 0.

Interpretare

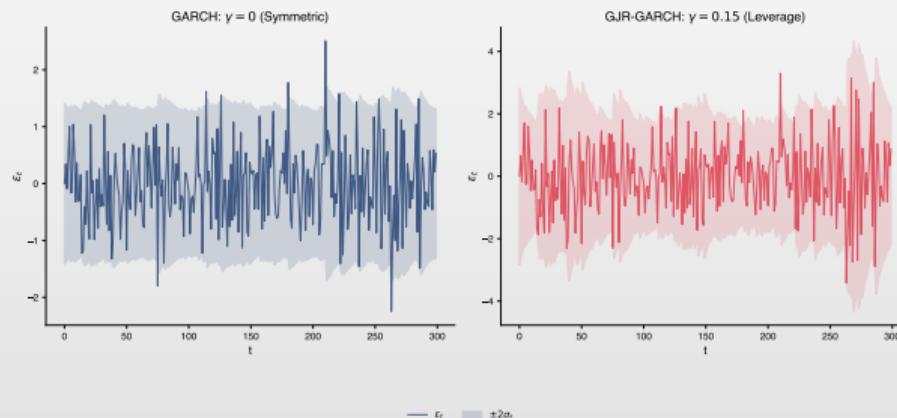
- řouri pozitive: impact = α ; řouri negative: impact = $\alpha + \gamma$
- Leverage effect prezent dacă $\gamma > 0$
- Staþionaritate: $\alpha + \gamma/2 + \beta < 1$



Simulare GJR-GARCH/TGARCH

Interpretare

- GJR-GARCH adaugă un termen indicator pentru a captura răspunsul asimetric la şocuri negative



TSA_ch5_gjr_sim

TGARCH — threshold GARCH

Definiție 9 (TGARCH(1,1))

Zakoian (1994) modelează deviația standard: $\sigma_t = \omega + \alpha^+ \varepsilon_{t-1}^+ + \alpha^- \varepsilon_{t-1}^- + \beta \sigma_{t-1}$

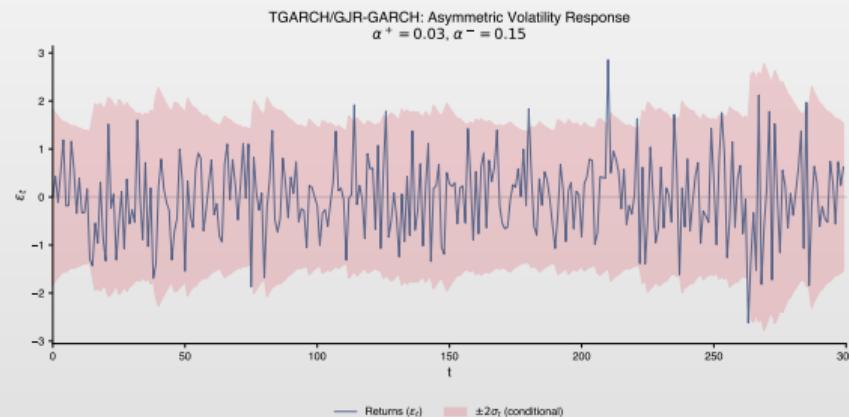
Comparație modele asimetrice

Model	Specificație	Leverage
GARCH	σ_t^2	Nu
EGARCH	$\ln(\sigma_t^2)$	Da ($\gamma < 0$)
GJR-GARCH	σ_t^2 cu indicător	Da ($\gamma > 0$)
TGARCH	σ_t	Da ($\alpha^- > \alpha^+$)

Simulare TGARCH: răspuns asimetric la volatilitate

Interpretare

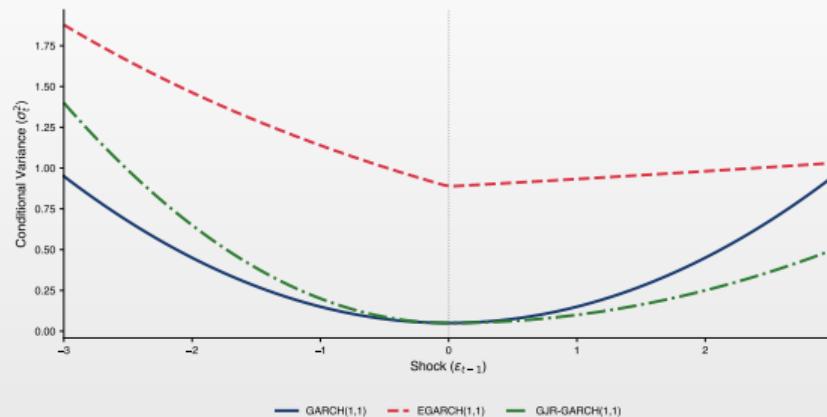
- TGARCH cu $\alpha^+ = 0.03$ și $\alpha^- = 0.15$ > șocurile negative amplifică volatilitatea de 5×
- Benzile de volatilitate $\pm 2\sigma$ se largesc asimetric în perioadele de criză



Q TSA_ch5_tgarch_sim



Comparație news impact curves



Interpretare

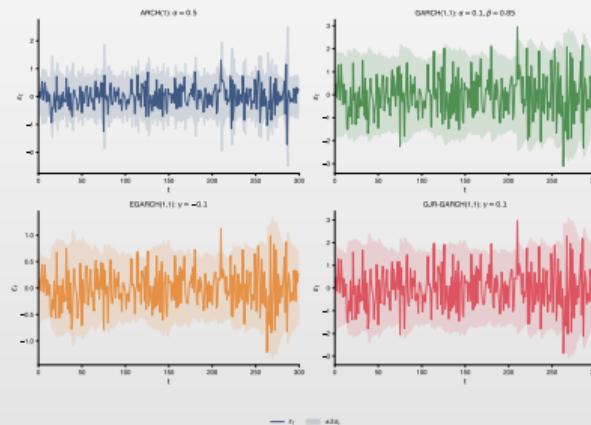
- GARCH standard:** simetric
 - Tratează şocuri pozitive și negative identic
- EGARCH și GJR-GARCH:** captează asimetria
 - Leverage effect: şocuri negative \succ impact mai mare



Comparație familie GARCH

Interpretare

- Toate modelele capturează volatility clustering, dar diferă în modul de modelare a asimetriei



 TSA_ch5_family



GARCH-in-Mean (GARCH-M) — Engle, Lilien & Robins (1987)

Definiție 10 (GARCH-M)

- Model: Volatilitatea intră direct în ecuația mediei:

$$\begin{aligned}r_t &= \mu + \delta \cdot g(\sigma_t^2) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2\end{aligned}$$

- Functia g : poate fi σ_t^2 , σ_t , sau $\ln(\sigma_t^2)$

Interpretare economică

- $\delta > 0$: prima de risc \succ randamente mai mari când volatilitatea este ridicată
- Formalizează relația risc-randament (CAPM, Merton ICAPM); testul $H_0 : \delta = 0$

Exemplu tipic: acțiuni

- $r_t = 0.02 + \underbrace{0.15}_{\delta} \cdot \sigma_t + \varepsilon_t \quad \succ$ La $\sigma_t = 2\%$: $\mathbb{E}[r_t] = 0.023$ (0.3% primă)



GARCH-M: Specificații alternative

Specificații comune

Prima de risc poate intra sub diferite forme: (1) $r_t = \mu + \lambda\sigma_t + \varepsilon_t$; (2) $r_t = \mu + \lambda\sigma_t^2 + \varepsilon_t$; (3) $r_t = \mu + \lambda \ln(\sigma_t^2) + \varepsilon_t$

Rezultate tipice pentru piețele de acțiuni

- λ estimat adesea pozitiv dar mic (0.01–0.10)
- Semnificația variază în funcție de piață și perioadă
- Specificația cu variantă produce estimări λ mai mari

Observație 2

GARCH-M este utilizat în evaluarea activelor, optimizarea portofoliului și testarea CAPM.



Selectarea ordinului

Criterii informaționale

- AIC** = $-2\ell + 2k$
- BIC** = $-2\ell + k \ln(T)$
- HQIC** = $-2\ell + 2k \ln(\ln(T))$

unde ℓ = maximul log-verosimilității, k = nr. parametri.

Recomandări practice

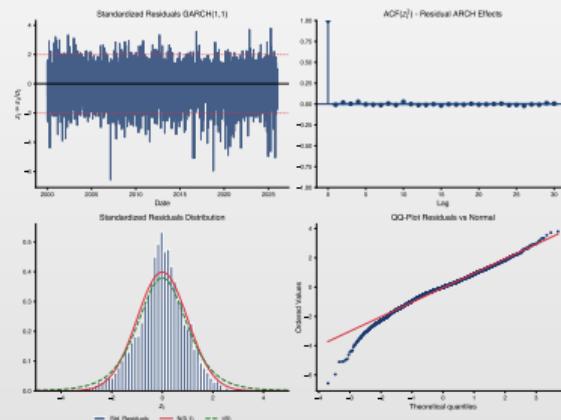
- GARCH(1,1) este suficient în **90% din cazuri**
- Verifică dacă modelul asimetric îmbunătățește semnificativ fit-ul
- Alege distribuția inovațiilor care minimizează AIC/BIC



Exemplu diagnostic

Verificare

- ☐ Reziduurile standardizate trebuie să fie i.i.d. fără efecte ARCH reziduale



 TSA_ch5_diagnostic



Diagnosticarea modelelor GARCH

Reziduuri standardizate

$$\hat{z}_t = \frac{\hat{\varepsilon}_t}{\hat{\sigma}_t}$$

Dacă modelul este corect specificat, \hat{z}_t ar trebui să fie i.i.d.(0,1).

Verificări diagnostic

1. **Ljung-Box pe \hat{z}_t :** verifică absența autocorelației în medie
2. **Ljung-Box pe \hat{z}_t^2 :** verifică absența efectelor ARCH reziduale
3. **Test ARCH-LM pe \hat{z}_t :** confirmă absența heteroscedasticității
4. **Histogramă + QQ-plot:** verifică distribuția asumată



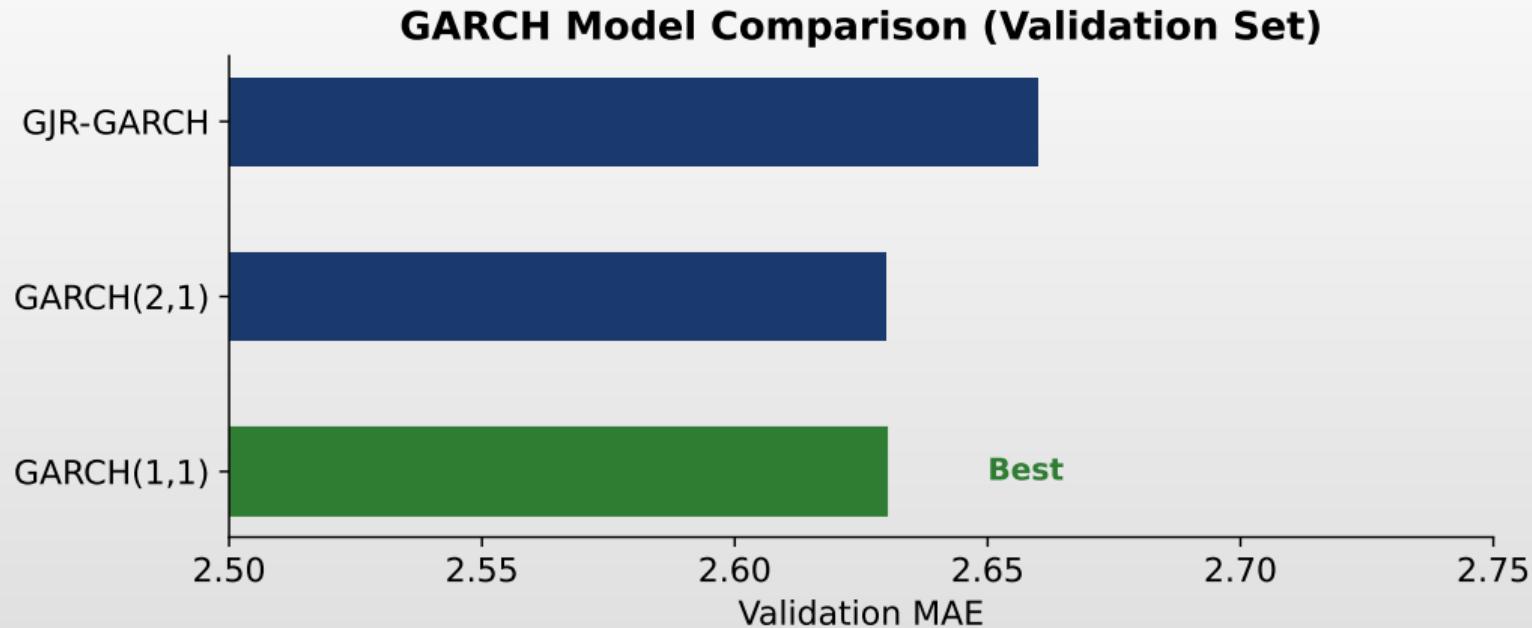
Comparație modele GARCH \succ validare

Interpretare

- GARCH(1,1) obține cel mai mic MAE pe setul de validare
 - ▶ Mai parcimonios și mai stabil decât modelele de ordin mai mare
- GARCH(2,1) și GJR-GARCH: performanță similară, dar mai mulți parametri
- Concluzie:** simplitatea câștigă \succ GARCH(1,1) este greu de bătut



Comparație modele GARCH ➔ validare



Testul Diebold-Mariano

Motivație

Date fiind două modele de volatilitate concurente, care prognozează mai bine?

Definiție 11 (Diebold-Mariano (1995))

Definim diferența de pierdere: $d_t = L(e_{1t}) - L(e_{2t})$ unde $e_{it} = \sigma_t^2 - \hat{\sigma}_{it}^2$ și $L(\cdot)$ este o funcție de pierdere (ex. $L(e) = e^2$).

$$DM = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\hat{V}(\bar{d})}} \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad \text{sub } H_0 : \mathbb{E}[d_t] = 0$$

Note practice

- H_0 : acuratețe predictivă egală; respingere \succ un model este semnificativ mai bun
- Funcții de pierdere comune: MSE (e^2), MAE ($|e|$), QLIKE ($\log \hat{\sigma}^2 + \sigma^2 / \hat{\sigma}^2$)
- QLIKE este robustă la proxy-uri zgomotoase de volatilitate (Patton, 2011)
- Folosiți erori standard HAC (Newey-West) dacă d_t este autocorelat

Exemplu

EGARCH-t vs GARCH-N pe S&P 500: testul DM cu pierdere QLIKE respinge de regulă H_0 în favoarea EGARCH-t.



Regresia Mincer-Zarnowitz

Test de eficiență a prognozei

Regresăm volatilitatea realizată pe volatilitatea prognozată:

$$\sigma_{t,\text{realized}}^2 = a + b \hat{\sigma}_t^2 + u_t$$

Definiție 12 (Ipoteze)

$H_0 : a = 0, b = 1$ (prognoză nedirecționată și eficientă)

Test prin F-test sau Wald. Respingere \succ prognoza este biasată sau ineficientă.

Interpretare

- R^2 măsoară fracția din varianță explicată de prognoză
- $b > 1$: prognozele subestimează volatilitatea; $b < 1$: supraestimează
- $a > 0$: bias sistematic ascendent în volatilitatea realizată

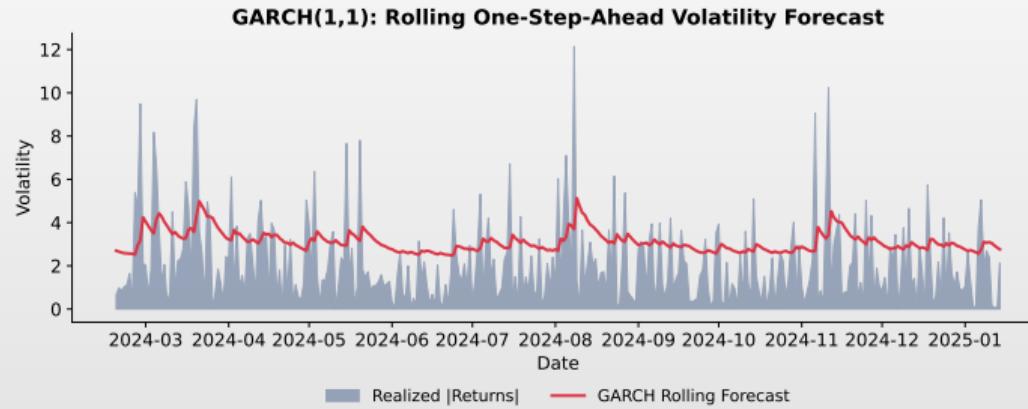
Atenție

Varianța realizată (r_t^2) este un proxy zgomotos pentru $\sigma_t^2 \succ R^2$ de regulă mic (< 0.10). Preferați RV_t când e disponibil.



Prognoza volatilității — vizualizare

- Prognoza converge exponential către $\bar{\sigma}^2$; viteza depinde de $\alpha + \beta$
- Cu cât $\alpha + \beta$ este mai aproape de 1, cu atât convergența este mai lentă



Q TSA_ch5_vol_forecast

Prognoza cu GARCH(1,1)

Prognoză un pas înainte

$$\hat{\sigma}_{T+1}^2 = \omega + \alpha \varepsilon_T^2 + \beta \sigma_T^2$$

Prognoză multi-pas

Pentru $h > 1$: $\mathbb{E}_T[\sigma_{T+h}^2] = \bar{\sigma}^2 + (\alpha + \beta)^{h-1}(\sigma_{T+1}^2 - \bar{\sigma}^2)$ unde $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$ = varianța necondiționată.

Convergență

$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{E}_T[\sigma_{T+h}^2] = \bar{\sigma}^2$ — prognoza converge către varianța necondiționată!



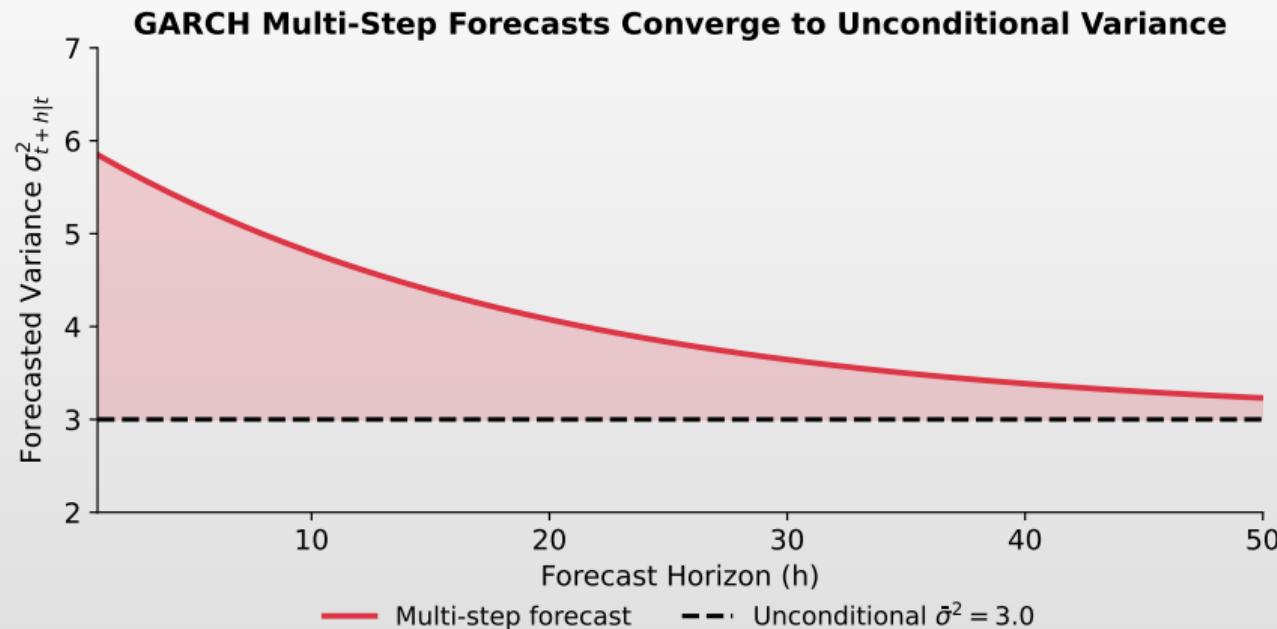
Convergența prognozei GARCH către varianța necondiționată

Interpretare

- Prognoza multi-pas converge exponențial către $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$
- Cu cât $\alpha + \beta$ este mai aproape de 1, cu atât convergența este mai lentă
 - ▶ S&P 500: $\alpha + \beta \approx 0.99 \succ$ convergență în ~50 zile
 - ▶ Bitcoin: $\alpha + \beta \approx 0.95 \succ$ convergență mai rapidă



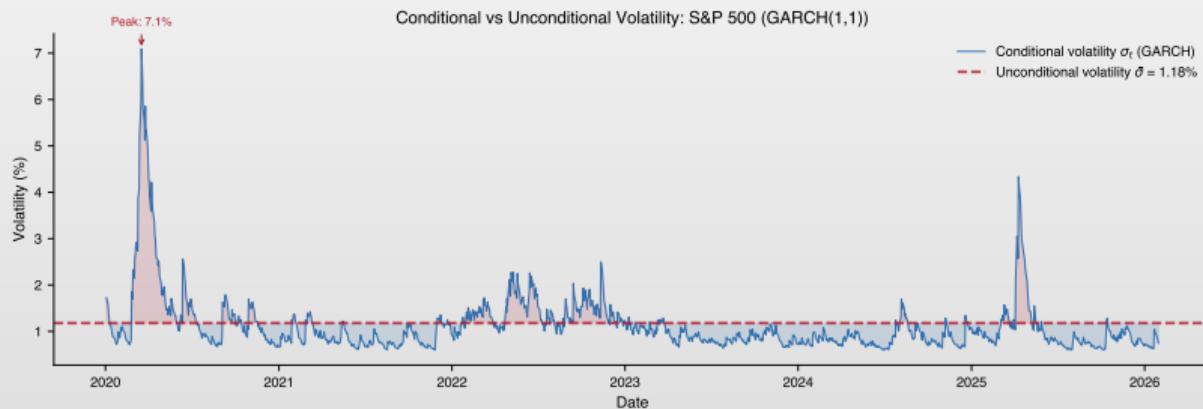
Convergența prognozei GARCH către varianța necondiționată



Volatilitate condiționată vs necondiționată

Interpretare

- Volatilitate condiționată σ_t (GARCH): variabilă în timp, reacționează la news
- Volatilitate necondiționată $\bar{\sigma} = \sqrt{\omega/(1 - \alpha - \beta)}$: nivel constant pe termen lung
- Zone roșii: $\sigma_t > \bar{\sigma}$ (perioade de stres); zone albastre: $\sigma_t < \bar{\sigma}$ (perioade calme)



Q TSA_ch5_cond_vs_uncond



Volatilitate realizată și HAR-RV

Volatilitate realizată (RV)

Cu randamente intra-zilnice $r_{t,i}$ la frecvența Δ (M observații pe zi):

$$RV_t = \sum_{i=1}^M r_{t,i}^2$$

RV_t este o măsură fără model, observabilă a varianței zilnice (vs. GARCH: latentă).

Definiție 13 (Modelul HAR-RV — Corsi (2009))

$$RV_t = \beta_0 + \beta_D RV_{t-1} + \beta_W RV_{t-1}^{(w)} + \beta_M RV_{t-1}^{(m)} + u_t$$

unde $RV^{(w)} = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 RV_{t-j}$ (săptămânală) și $RV^{(m)} = \frac{1}{22} \sum_{j=1}^{22} RV_{t-j}$ (lunară).

Avantaj cheie

- Regresie OLS simplă care capturează **memoria lungă** în volatilitate
- Traderi eterogeni (orizonturi zilnice/săptămâna/lunare) explică dinamica multi-scală
- Adesea depășește GARCH când datele intra-zilnice sunt disponibile (rand. la 5 min, $M \approx 78/\text{zi}$)
- Atenție: zgromot de microstructură la frecvență foarte înaltă \succ estimatori kernel



Realized GARCH

Motivație

GARCH standard tratează volatilitatea ca latentă. Cu date de frecvență înaltă, o putem observa prin RV_t .

Definiție 14 (Realized GARCH — Hansen, Huang & Shek (2012))

Ecuația randamentelor: $r_t = \mu + \sigma_t z_t, \quad z_t \sim D(0, 1)$

Ecuația GARCH: $\log \sigma_t^2 = \omega + \beta \log \sigma_{t-1}^2 + \gamma \log RV_{t-1}$

Ecuația de măsurare: $\log RV_t = \xi + \varphi \log \sigma_t^2 + \tau(z_t) + u_t$

Beneficii

- Model comun:** leagă randamentele, volatilitatea latentă și măsurile realizate
- Funcția de levier $\tau(z_t)$ capturează asimetria direct
- De regulă prognoze **mai precise** decât GARCH standard (set informațional mai bogat)

Comparație: GARCH vs HAR-RV vs Realized GARCH

- GARCH:** nu necesită date intra-zilnice; cel mai utilizat
- HAR-RV:** simplu, fără model; necesită date la 5 min
- Realized GARCH:** combină avantajele; necesită date la 5 min + structură parametrică



VaR și ES: ilustrație grafică

Interpretare

- ◻ VaR 1% = pierderea depășită doar în 1% din cazuri
- ◻ Zona roșie = pierderi extreme (dincolo de VaR)



Q TSA_ch5_var_plot



Aplicații ale prognozei volatilității

Value at risk (VaR)

$$\text{VaR}_\alpha = z_\alpha \cdot \sigma_{T+1}$$

Pierdere maximă cu probabilitate $1 - \alpha$.

Expected shortfall (ES)

$$\text{ES}_\alpha = \mathbb{E}[-r | r < -\text{VaR}_\alpha]$$

Pierdere medie când VaR este depășit.

Alte aplicații

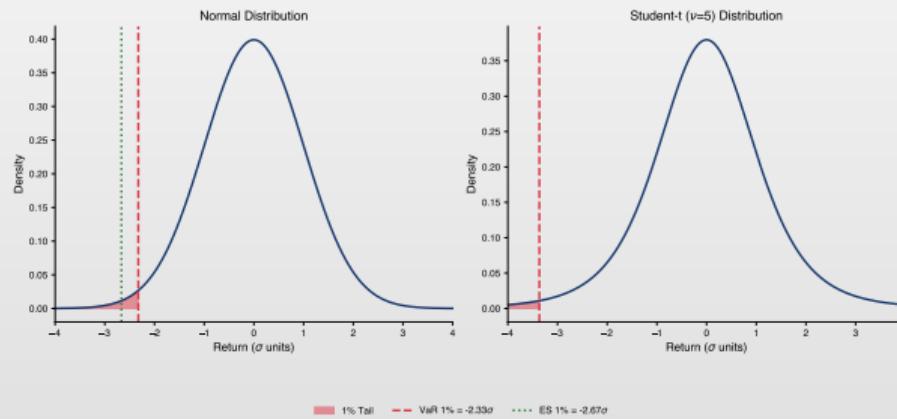
- Prețul opțiunilor
- Hedging dinamic
- Alocarea portofoliului
- Stress testing



VaR vs expected shortfall: normal vs Student-t

Interpretare

- ES măsoară pierderea medie când VaR este depășit
- Student-t: VaR și ES mai mari decât sub distribuția normală



Q TSA_ch5_var_es



Value at risk — exemplu numeric

Calculul VaR

Portofoliu: **1.000.000 EUR**, volatilitate prognozată $\hat{\sigma}_{T+1} = 1.5\%$

VaR cu distribuție normală

Nivel	z_α	VaR (%)	VaR (EUR)
5% (1 zi)	1.645	2.47%	24.675
1% (1 zi)	2.326	3.49%	34.890

Scalare pentru perioade mai lungi

$$\text{VaR}_h \text{ zile} = \text{VaR}_1 \text{ zi} \cdot \sqrt{h} \quad \text{— presupune randamente i.i.d.}$$



Value at risk — distribuție Student-t

De ce Student-t?

Distribuția normală **subestimează** riscul de coadă. Student-t cu ν grade de libertate capturează mai bine cozile groase (kurtosis > 3).

Comparație VaR 1% (1 zi): $\sigma = 1.5\%$, portofoliu = 1M EUR

Distribuție	Cuantilă	VaR (EUR)
Normal	2.326	34.890
Student-t ($\nu = 6$)	3.143	47.145
Student-t ($\nu = 4$)	3.747	56.205

Observație

Cu $\nu = 6$ (tipic pentru acțiuni), VaR este cu **35% mai mare** decât cel normal!



VaR — exemplu complet cu GARCH

Procedura de calcul VaR

1. Estimează modelul GARCH(1,1) cu distribuție Student-t
2. Obține prognoza volatilității: $\hat{\sigma}_{T+1}$
3. Calculează VaR: $VaR_{\alpha} = t_{\alpha}(\nu) \cdot \hat{\sigma}_{T+1} \cdot \sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}}$

Exemplu: S&P 500

- Parametri estimați: $\alpha = 0.088$, $\beta = 0.900$, $\nu = 6.4$
- Volatilitate progonzată: $\hat{\sigma}_{T+1} = 1.2\%$
- Portofoliu: 10.000.000 EUR

VaR 1% (1 zi): $VaR = 3.05 \times 0.012 \times 10,000,000 = 366,000$ EUR



Ce este VaR backtesting?

Definiție

- Backtesting** = verificarea ex-post a calității modelului VaR
- Compară pierderile realizate cu pragul VaR proгnozat
 - ▶ O **încălcare** (violation) apare când $r_t < -\text{VaR}_t$

Principiul Backtesting-ului

- Indicatorul de încălcare: $I_t = 1(r_t < -\text{VaR}_{\alpha,t})$
- Pentru un model corect la nivel α :
 - ▶ Frecvența: $\hat{p} = \frac{1}{T} \sum I_t \approx \alpha$; încălcări **independente**
- VaR 1% pe 250 zile \succ așteptăm ~ 2.5 încălcări/an

Importanță

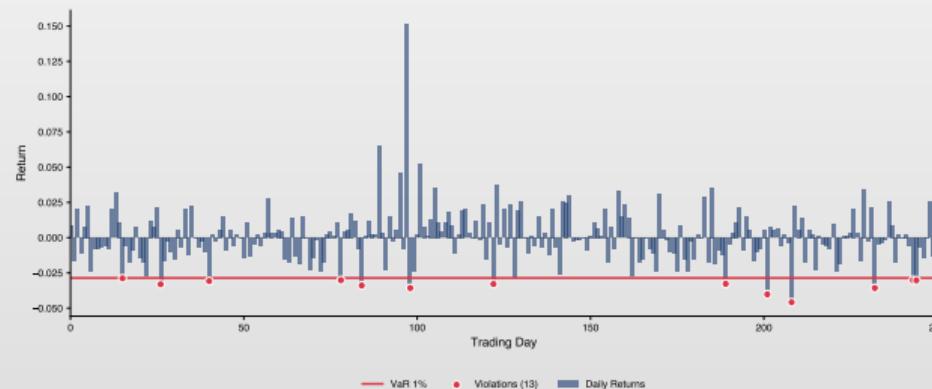
- Cerință regulamentară **Basel III/IV** pentru bănci: backtesting obligatoriu



VaR backtesting: vizualizare

Interpretare

- Linia roșie: pragul VaR 1% estimat cu GARCH(1,1)
- Punctele roșii: 13 încălcări din 250 zile ($\hat{p} = 5.2\%$)
 - ▶ **Zonă roșie Basel** ➤ modelul subestimează semnificativ riscul
 - ▶ Soluții: distribuție Student-t, model EGARCH, sau nivel VaR mai conservator



Backtesting VaR: semaforul Basel

Zonele de semaforizare Basel III/IV

Zonă	Încălcări/250 zile	Interpretare	Penalizare
Verde	0–4	Model acceptabil	Fără penalizare
Galben	5–9	Necesită investigare	Factor k crește
Roșu	≥ 10	Model inadecvat	Penalizare maximă

Exemplu practic

- Portofoliu cu VaR 1%: 250 zile de backtesting
- 3 încălcări \succ **Zonă verde** \succ model acceptabil
- 7 încălcări \succ **Zonă galbenă** \succ revizuire necesară
- 13 încălcări \succ **Zonă roșie** \succ model respins



Metodologia Rolling Window pentru VaR

Conceptul Rolling Window

- O fereastră mobilă de dimensiune fixă W (ex. 500 zile) se deplasează zi cu zi
- La fiecare pas t : re-estimare GARCH pe $[t - W, t - 1]$, prognoză $\hat{\sigma}_{t|t-1}$, calcul VaR_t

Procedura pas cu pas (pentru fiecare zi $t = W + 1, \dots, T$)

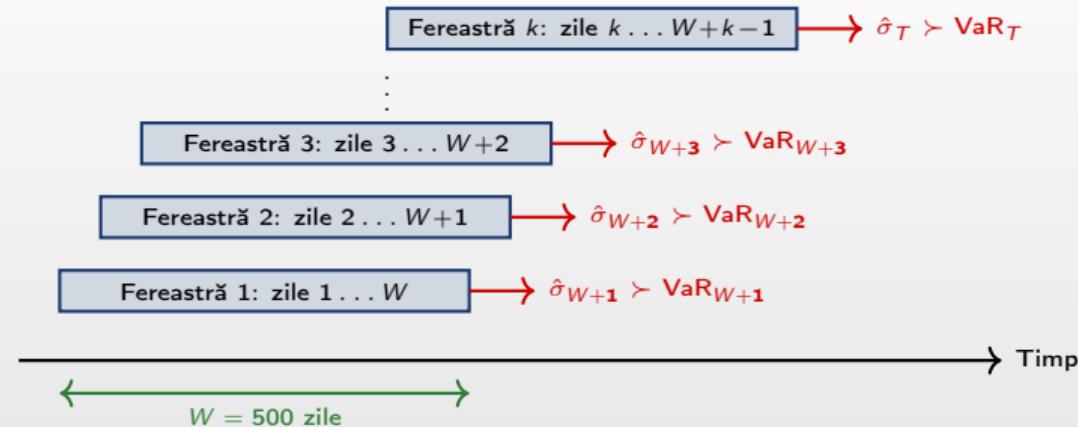
1. Estimează GARCH pe $\{r_{t-W}, \dots, r_{t-1}\} \succ$ parametri $\hat{\omega}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\nu}$
2. Prognozează: $\hat{\sigma}_{t|t-1}^2 = \hat{\omega} + \hat{\alpha} r_{t-1}^2 + \hat{\beta} \hat{\sigma}_{t-1}^2$
3. Calculează: $\text{VaR}_{\alpha,t} = -t_\alpha(\hat{\nu}) \cdot \sqrt{\frac{\hat{\nu}-2}{\hat{\nu}}} \cdot \hat{\sigma}_{t|t-1}$
4. Verifică încălcarea: $I_t = 1(r_t < -\text{VaR}_{\alpha,t})$

De ce Rolling și nu expanding?

- Fereastra fixă: parametrii reflectă **regimul curent** al volatilității
- Datele vechi ($> W$ zile) pot fi irelevante (schimbări structurale, crize)



Rolling Window VaR: schema procedurii



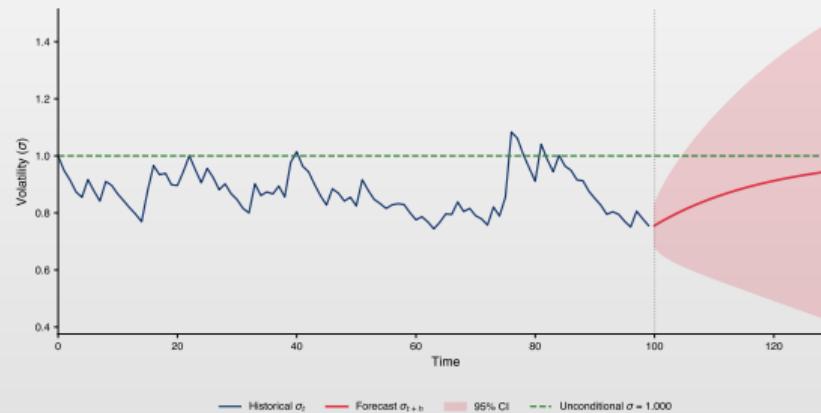
Rezultat

- Obținem seria $\{\text{VaR}_{\alpha,t}\}_{t=W+1}^T \succ$ un prag **diferit** în fiecare zi
- VaR-ul se adaptează la regimul curent: crește în perioadele volatile, scade în cele calme
- Comparăm r_t cu $-\text{VaR}_{\alpha,t}$ pentru a identifica încălcările

Prognoza volatilității cu intervale de încredere

Interpretare

- ◻ Prognoza converge către $\bar{\sigma}$
- ◻ Incertitudinea crește cu orizontul de prognoză



Q TSA_ch5_vol_ci



Rolling forecast > prognoza pas cu pas

Procedura

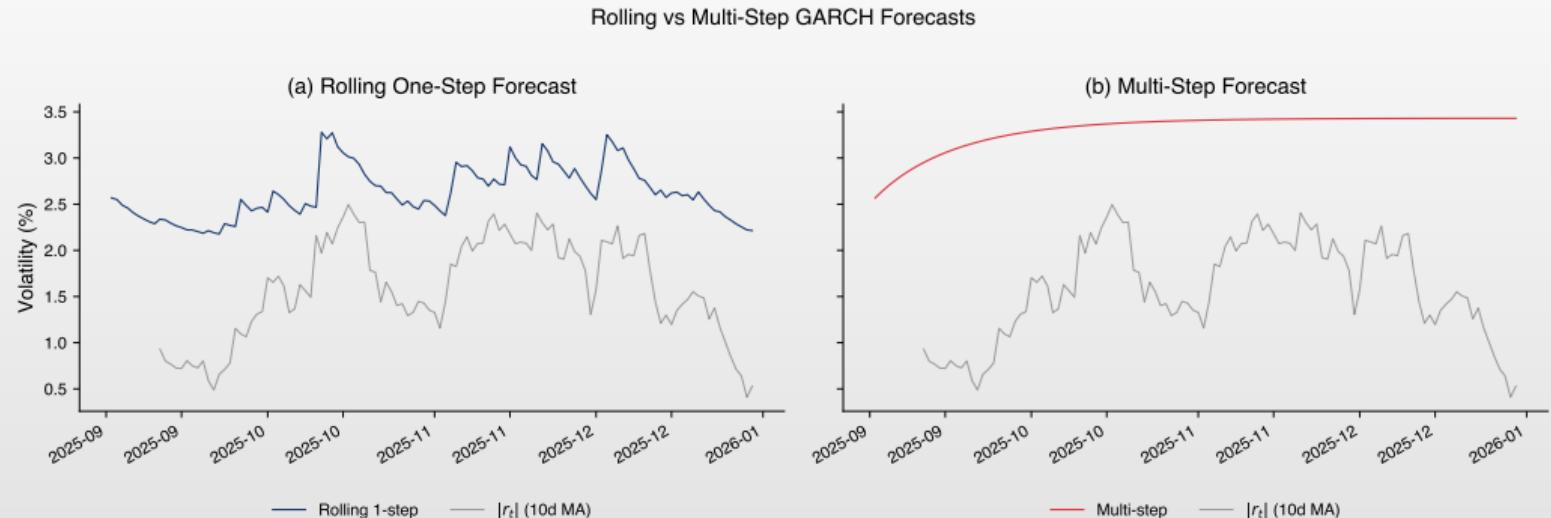
S&P 500, W=500, GARCH(1,1)-t

- Re-estimare GARCH pe $[t-W, t-1]$; prognoză $\hat{\sigma}_{t|t-1}$
- Comparație cu vol. realizată (std. rulantă 20 zile)

Rezultate (2015 zile OOS)

- $\rho = 0.938 >$ urmărire excellentă; MAE = 0.15%, RMSE = 0.24%
- COVID-19: sub-predicție temporară, adaptare rapidă

Rolling forecast > prognosă pas cu pas



 TSA_ch5_rolling_forecast

VaR backtesting: testul Kupiec

Testul acoperirii necondiționate

Testează dacă rata de încălcare observată este egală cu rata așteptată p (ex. 1% pentru VaR 1%).

Fie N = numărul de încălcări VaR, T = totalul observațiilor, $\hat{p} = N/T$.

Statistica Likelihood Ratio:

$$LR_{uc} = -2 \ln \left[\frac{(1-p)^{T-N} p^N}{(1-\hat{p})^{T-N} \hat{p}^N} \right] \sim \chi^2(1)$$

Ipoteze

- $H_0: \hat{p} = p$ (modelul VaR este corect calibrat)
- $H_1: \hat{p} \neq p$ (modelul VaR sub- sau supra-estimează riscul)



VaR backtesting: testul Christoffersen

Testul acoperirii condiționate

Testează atât **acoperirea necondiționată** cât și **independența** încălcărilor.

Încălcările trebuie să fie independente — fără clusterizare a excepțiilor!

Componente ale testului

- Testul de independentă (LR_{ind}):** Testează dacă încălcările sunt serial independente
- Acoperire condiționată:** $LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind} \sim \chi^2(2)$

Interpretare

- Respinge LR_{uc} : frecvență greșită
- Respinge LR_{ind} : încălcări clusterizate
- Respinge LR_{cc} : modelul eşuează



Backtesting complet \succ rezultate și decizie

Aplicare S&P 500 (T=500, VaR 1%)

- Rolling window: $W = 500$ zile, model EGARCH(1,1)-t
- Fereastră de test: $T - W$ zile out-of-sample
- Se compară VaR prognozat cu randamentul realizat în fiecare zi

Output tipic

- Număr încălcări vs așteptat \succ zona Basel (verde/galben/roșu)
- Kupiec (frecvență): $H_0: \hat{p} = \alpha \succ$ p-value $> 0.05 \succ$ acceptat
- Christoffersen (independență): $H_0: \text{încălcări i.i.d.} \succ$ p-value $> 0.05 \succ$ acceptat
- Test combinat: ambele condiții îndeplinite \succ **model validat**

 **TSA_ch5_backtest_full**



Backtesting-ul Expected Shortfall

De ce backtesting ES?

- VaR măsoară doar *pragul* pierderilor extreme, nu *magnitudinea* lor
- ES = pierderea medie dacă VaR este depășit \succ mai informativ pentru riscul de coadă

Definiție 15 (Testul Z Acerbi-Székely (2014))

$$Z_{\text{ES}} = \frac{1}{n_\alpha} \sum_{t: r_t < -\text{VaR}_t} \frac{r_t}{\text{ES}_t} + 1$$

Sub H_0 (model ES corect): $\mathbb{E}[Z_{\text{ES}}] = 0$. Se respinge dacă $Z_{\text{ES}} < z_{\alpha/2}$.

Observație cheie

- Spre deosebire de backtesting VaR (hit/miss binar), backtesting ES folosește *magnitudinea* pierderilor
- Mai puternic dar necesită eșantioane mari ($T > 1000$); alt.: bootstrap McNeil & Frey (2000)
- ES sub Student- t : $\text{ES}_{\alpha}^{t_\nu} = -\mu + \sigma \cdot \frac{\nu + (t_{\alpha}, \nu)^2}{\nu - 1} \cdot \frac{f_{t_\nu}(t_{\alpha}, \nu)}{\alpha}$ — cozi groase \succ ES mai mare



Basel IV: de la VaR la ES

Schimbarea reglementară

- ☐ **Basel II/III:** Capital bazat pe VaR 99% (10 zile)
- ☐ **Basel IV (FRTB, 2023+):** Capital bazat pe **ES 97.5%** (10 zile)
- ☐ Motivație: ES este **coerent** (subaditivitate), VaR nu este

Echivalență sub normalitate

$$\text{ES}_{97.5\%}^{\text{Normal}} = \frac{\phi(z_{0.025})}{0.025} \cdot \sigma \approx 2.338 \sigma \approx \text{VaR}_{99\%}^{\text{Normal}} = 2.326 \sigma$$

➤ Sub normalitate, $\text{ES } 97.5\% \approx \text{VaR } 99\%$. Sub cozi groase, $\text{ES} \gg \text{VaR}$.

Implicație practică

- ☐ Modelele GARCH Student-*t* devin **esențiale** pentru estimarea precisă a ES
- ☐ Băncile trebuie să modeleze *întreaga coadă*, nu doar un singur cuantil



ARMA-GARCH: modelarea combinată a mediei și varianței

De ce modelare combinată?

Corelație serială \succ ARMA pentru medie; Volatility clustering \succ GARCH pentru varianță.

Definiție 16 (ARMA(p,q)-GARCH(r,s))

Ecuația mediei: $r_t = \mu + \sum_{i=1}^p \phi_i(r_{t-i} - \mu) + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$

Ecuația varianței: $\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^r \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2$



ARMA-GARCH: strategie de selecție a modelului

Abordare pas cu pas

1. **Identifică modelul pentru medie:** Verifică ACF/PACF al randamentelor
2. **Testează efectele ARCH:** Aplică testul ARCH-LM pe reziduuri
3. **Specifică modelul pentru varianță:** De obicei GARCH(1,1) este suficient
4. **Estimare combinată:** Estimează ambele ecuații prin MLE
5. **Diagnostic:** Reziduurile standardizate trebuie să fie i.i.d.

Specificații comune

- Randamente acțiuni:** AR(1)-GARCH(1,1) sau ARMA(1,1)-GARCH(1,1)
- Cursuri de schimb:** Adesea doar GARCH(1,1) (fără dinamică în medie)
- Rate ale dobânzii:** AR(1)-EGARCH(1,1) pentru efecte de levier



Python: Estimarea GARCH cu arch

Pași cheie

```
from arch import arch_model
import numpy as np
from scipy.stats import norm

# Fit GARCH(1,1) with Student-t innovations
model = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, q=1,
                    dist='StudentsT', mean='AR', lags=1)
result = model.fit(disp='off')
print(result.summary())

# Forecast 20-step ahead volatility
forecast = result.forecast(horizon=20)
sigma_forecast = np.sqrt(forecast.variance.iloc[-1])

# Compute 1-day VaR (1%) from conditional distribution
sigma_1 = sigma_forecast.iloc[0]
VaR_1pct = norm.ppf(0.01) * sigma_1 # Normal approx
```

Notă: Pentru VaR Student-t, înlocuiți `norm.ppf` cu `scipy.stats.t.ppf(0.01, df=nu)` scalat cu $\sqrt{(\nu - 2)/\nu}$.



Pasul 1: Datele > randamente zilnice S&P 500

Descrierea datelor

- **Sursă:** Yahoo Finance, S&P 500, date zilnice 2000–2024 ($T > 6000$)
- **Randamente:** $r_t = \ln(P_t/P_{t-1}) \times 100$

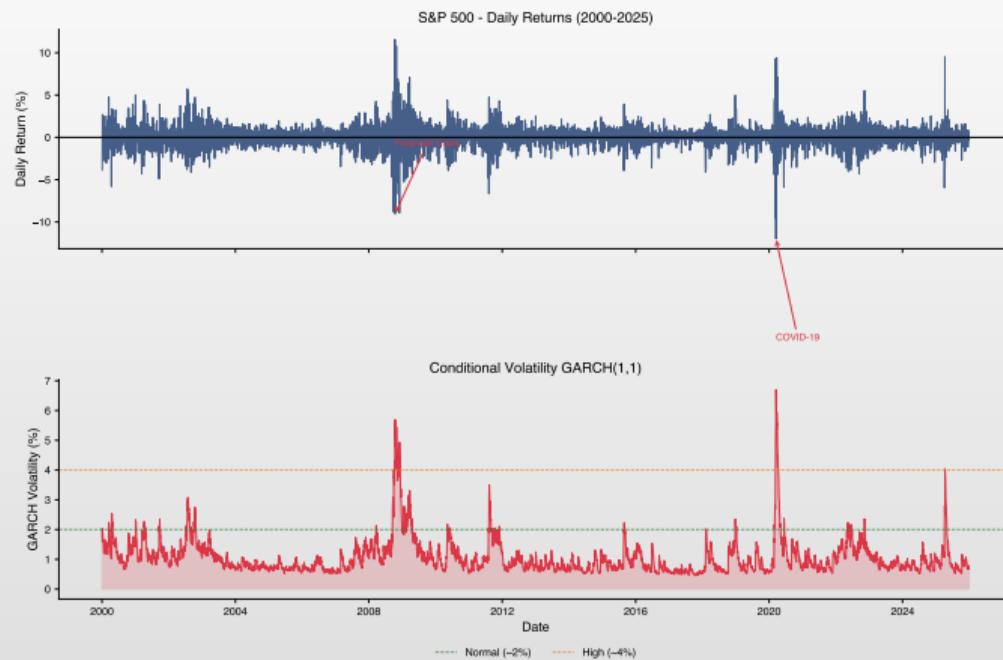
Statistici descriptive

Medie	Std. Dev.	Skewness	Kurtosis	Min	Max
0.034%	1.21%	-0.29	13.8	-12.8%	+11.0%

- Cozi groase (kurtosis $\gg 3$) și asimetrie negativă > efecte ARCH



Pasul 1: Datele > randamente zilnice S&P 500



Pasul 2: Testarea efectelor ARCH

Cod Python \succ ARCH-LM și Ljung-Box pe r_t^2

Rezultate

Test	Statistică	p-value
ARCH-LM (10 lags)	892.4	< 0.0001
Ljung-Box r_t^2 (lag 20)	4217.6	< 0.0001

Concluzie: Efecte ARCH puternice \succ heteroscedasticitate semnificativă



Pasul 3: Parametri estimați \succ comparație

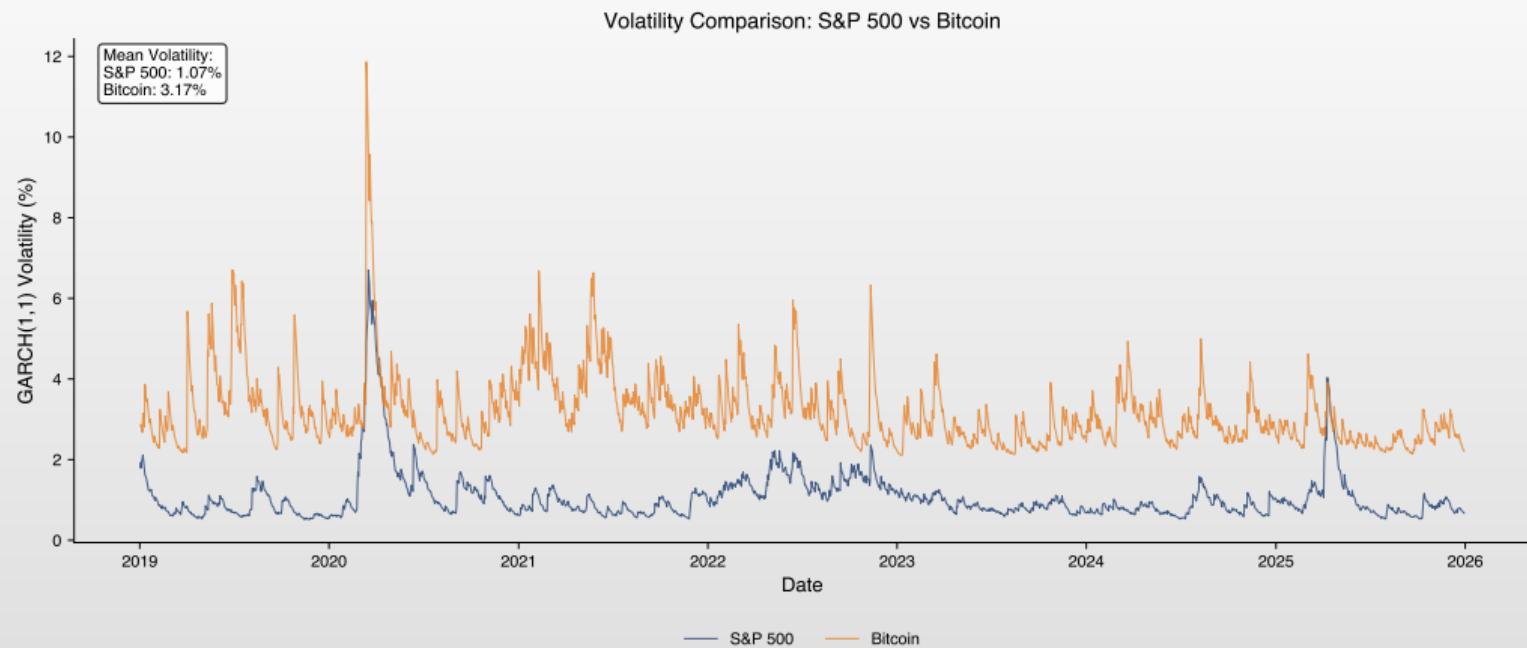
Tabel parametri estimați

Model	ω	α	β	γ	$\alpha + \beta$	ν	HL
GARCH-N	0.011	0.088	0.901	—	0.989	—	60 zile
GARCH-t	0.011	0.088	0.900	—	0.989	6.42	60 zile
EGARCH-t	0.003	0.103	0.987	-0.120	—	6.38	53 zile
GJR-t	0.010	0.022	0.906	0.126	0.991	6.51	78 zile

Interpretare

- EGARCH $\gamma = -0.12$ semnificativ \succ leverage effect confirmat
- GJR: $\alpha_{\text{neg}} = \alpha + \gamma = 0.148$ vs $\alpha_{\text{poz}} = 0.022 \succ$ asimetrie puternică

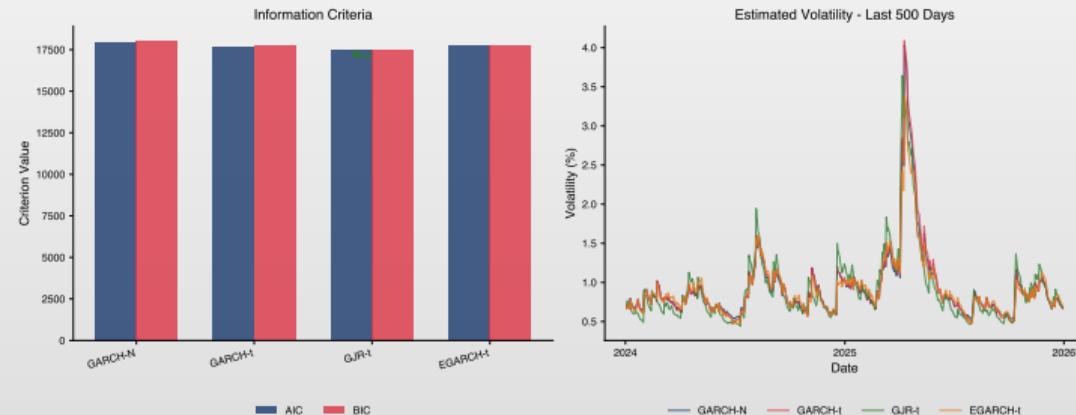
Pasul 3: Volatilitatea condiționată estimată \succsim S&P 500



Pasul 5: Leverage effect > vizualizare

GARCH vs EGARCH > diferențe de volatilitate

- EGARCH produce volatilitate **mai mare** după șocuri negative (2008, 2020)
- GARCH simetric **subestimează** riscul în perioadele de criză
- Diferență: până la 2–3 puncte procentuale în volatilitate zilnică



Pasul 4: Selecția modelului \succ AIC/BIC

Criterii informaționale

Model	Log-Lik	AIC	BIC	Rang
GARCH(1,1)-N	-8042.3	16090.6	16111.0	4
GARCH(1,1)-t	-7981.5	15971.0	15997.8	3
EGARCH(1,1)-t	-7964.2	15938.4	15971.6	1
GJR-GARCH(1,1)-t	-7968.1	15946.2	15979.4	2

Decizia

- EGARCH(1,1)-t câștigă:** cel mai mic AIC și BIC
- Student-t superior normalei ($\Delta\text{AIC} \approx 120$) \succ cozi groase contează!
- Leverage effect justifică modele asimetrice ($\Delta\text{AIC} \approx 33$ față de GARCH-t)

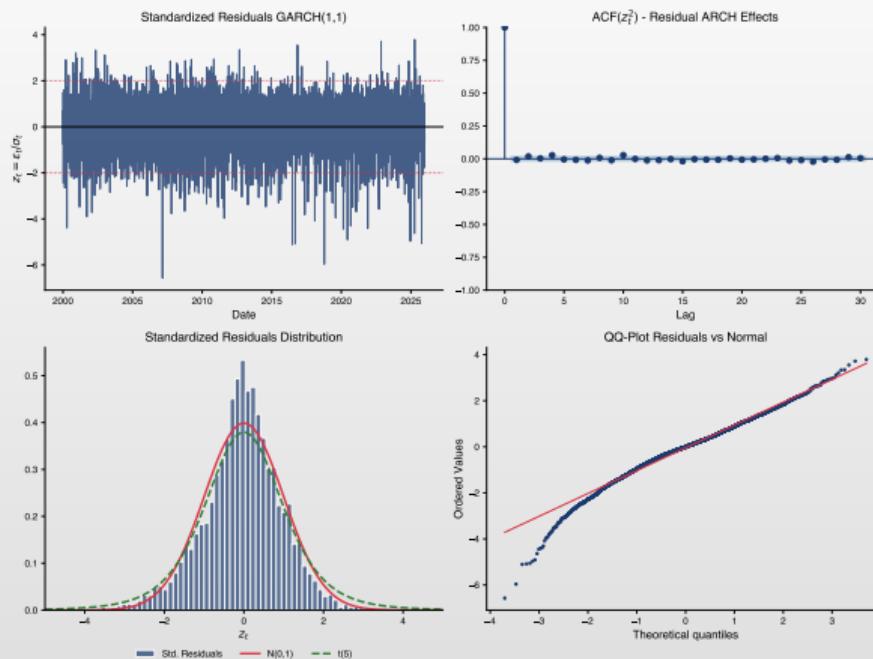


Pasul 5: Diagnostice \succ EGARCH(1,1)-t

Verificări pe reziduuri standardizate $z_t = \varepsilon_t / \hat{\sigma}_t$

- Ljung-Box** pe z_t : p-value = 0.38 \succ fără autocorelație reziduală
- Ljung-Box** pe z_t^2 : p-value = 0.52 \succ efecte ARCH eliminate
- Q-Q plot**: punctele urmează dreapta teoretică Student-t
- Concluzie**: modelul EGARCH(1,1)-t captează adevarat dinamica volatilității

Pasul 5: Diagnostice \succ EGARCH(1,1)-t



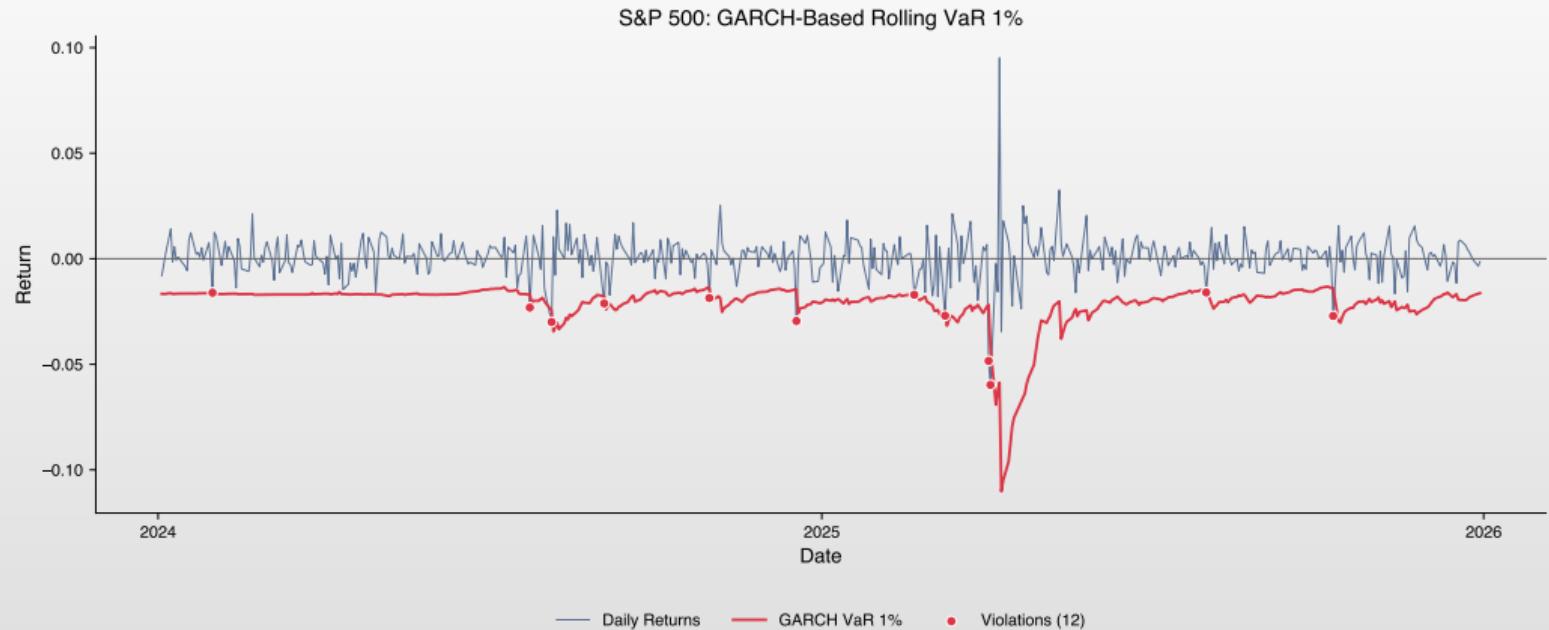
Pasul 6: Backtesting rolling VaR \succ S&P 500

Rezultate Kupiec + Christoffersen (2015 zile out-of-sample)

Test	Statistică	p-value	Decizia
Încălcări	27/2015 ($\hat{p} = 1.34\%$)	—	Zona verde
Kupiec (uc)	2.13	0.145	Acceptat
Christoffersen (ind)	0.79	0.375	Acceptat
Combinat (cc)	2.91	0.233	Acceptat



Pasul 6: Rolling VaR \succ S&P 500



Pasul 7: Concluzii \succ studiu S&P 500

Rezumatul metodologiei pas cu pas

1. **Date:** randamente log, statistici descriptive \succ cozi groase, asimetrie
2. **Test ARCH:** ARCH-LM + Ljung-Box pe $r_t^2 \succ$ efecte ARCH semnificative
3. **Estimare:** 4 modele candidate (simetric/asimetric \times Normal/Student-t)
4. **Selectie:** AIC/BIC \succ EGARCH(1,1)-t câștigător
5. **Diagnostice:** reziduuri standardizate \succ model adekvat
6. **VaR:** rolling window + backtesting Kupiec/Christoffersen \succ model validat

Lecții cheie

- Distribuția Student-t este **esențială** pentru date financiare
- Leverage effect: modelele asimetrice **obligatorii** pentru acțiuni
- Backtesting sistematic: nu doar „arată bine”, ci **testat statistic**



Pasul 1: Datele > randamente zilnice Bitcoin

Descrierea datelor

- Sursă: Yahoo Finance (BTC-USD), date zilnice 2018–2024
- Randamente log: media $\approx 0.05\%$, volatilitate $\approx 3.5\%$

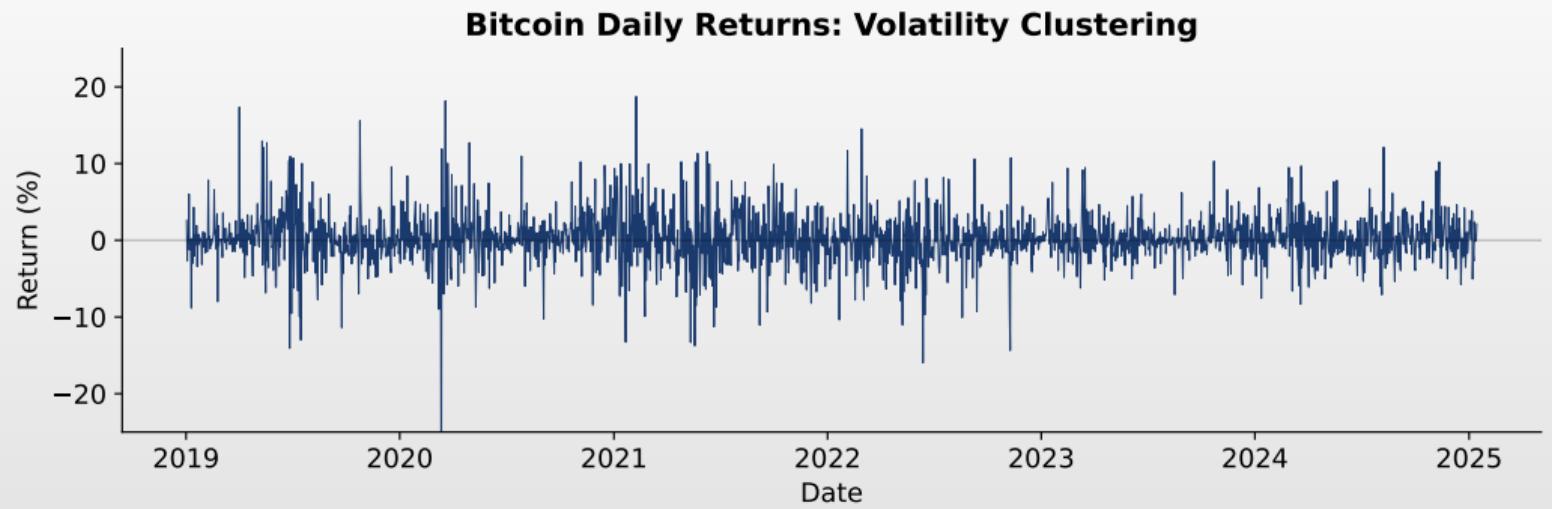
Statistici descriptive

Medie	Std. Dev.	Skewness	Kurtosis	Min	Max
0.05%	3.48%	-0.72	12.1	-46.5%	+22.5%

- Volatilitate $\sim 3\times$ mai mare decât S&P 500
- Kurtosis extremă > riscul de pierderi mari



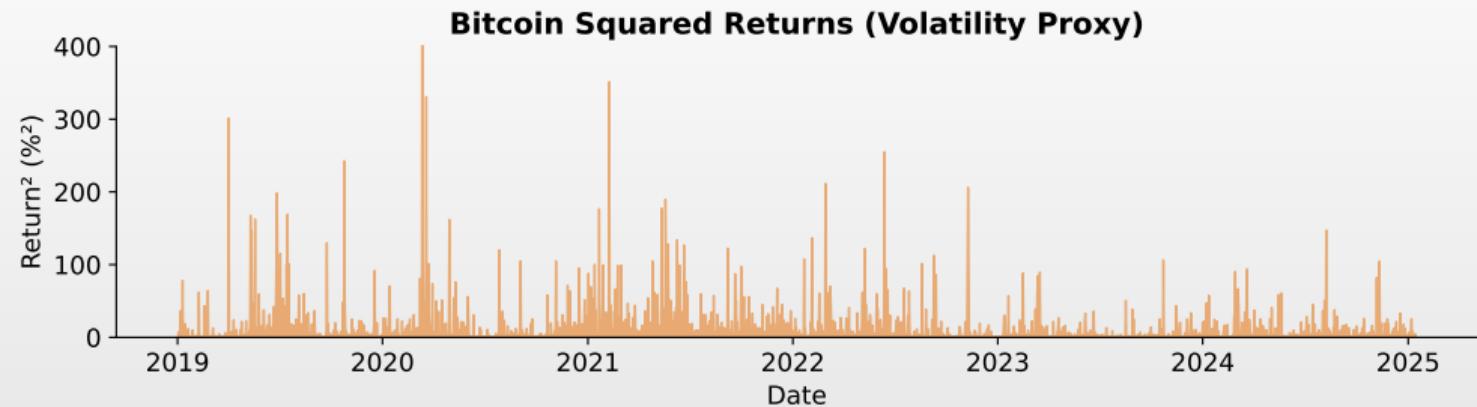
Pasul 1: Datele > randamente zilnice Bitcoin



Q TSA_ch5_btc



Pasul 2: Testarea efectelor ARCH \succ Bitcoin

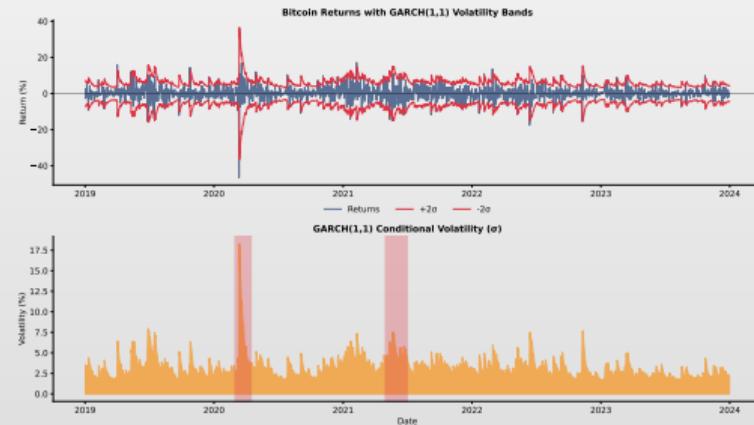


Q TSA_ch5_btc_arch

Pasul 5: Volatilitatea condiționată \succ Bitcoin

Diagnostic GJR-GARCH(1,1)-t

- Ljung-Box pe z_t^2 : p-value = 0.41 \succ efecte ARCH eliminate
- Vârfuri volatilitate: martie 2020 (COVID), mai 2022 (Terra/Luna)
- Volatilitate zilnică: de la 1% (perioadele calme) la >15% (crize)



Pasul 3–4: Estimare și selecție modele \succ Bitcoin

Parametri estimați

Model	ω	α	β	γ	$\alpha+\beta$	ν	AIC
GARCH-t	0.42	0.131	0.848	—	0.979	4.82	9284
EGARCH-t	0.08	0.184	0.976	-0.061	—	4.79	9276
GJR-t	0.40	0.088	0.854	0.078	0.976	4.85	9271

Interpretare

- **GJR-GARCH-t câștigă** (cel mai mic AIC)
- $\nu \approx 4.8$: cozi **mult mai groase** decât S&P 500 ($\nu = 6.4$)
- $\alpha = 0.131$ (BTC) vs 0.088 (S&P) \succ Bitcoin reacționează mai rapid la news
- Leverage effect mai slab decât la acțiuni ($\gamma_{\text{BTC}} = 0.078$ vs 0.126)

Pasul 6: Backtesting rolling VaR \succ Bitcoin

Teste statistice (2421 zile out-of-sample)

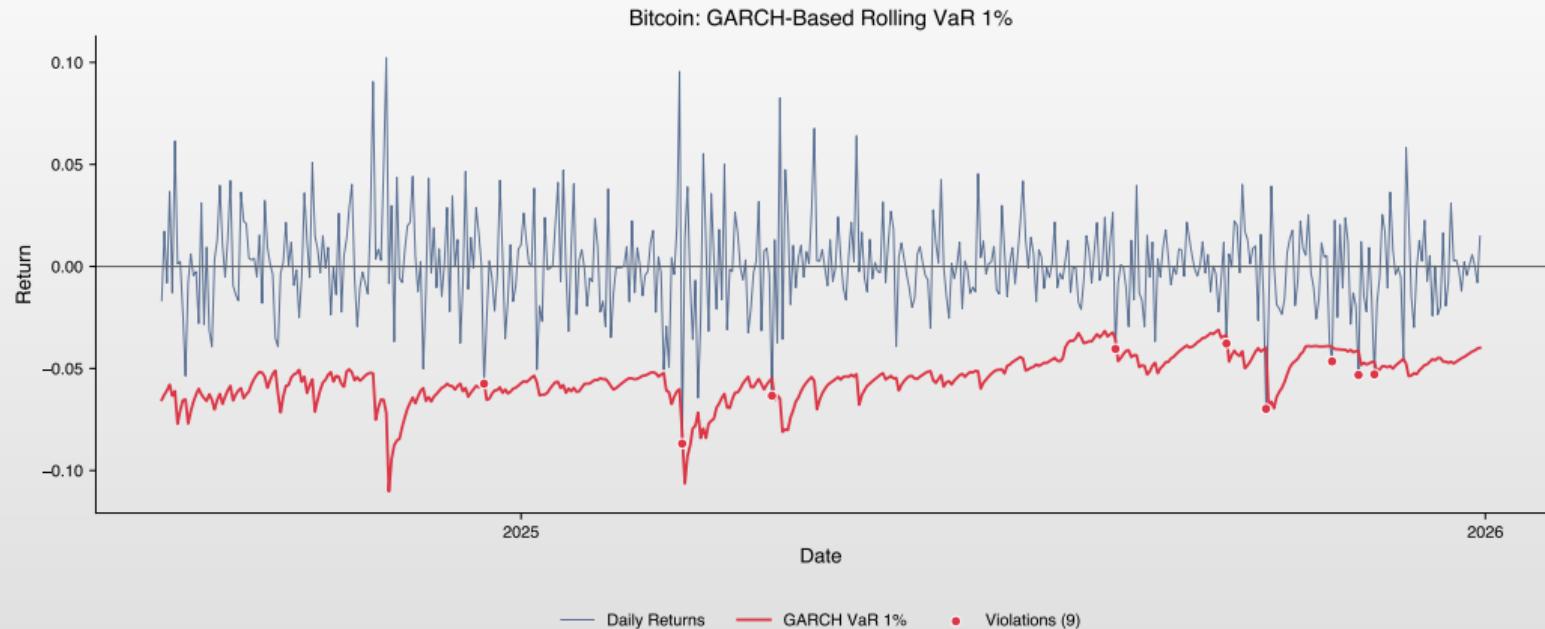
Test	Statistică	p-value	Decizia
Încălcări	28/2421 ($\hat{p} = 1.16\%$)	—	Zona verde
Kupiec (uc)	0.57	0.450	Acceptat
Christoffersen (ind)	0.94	0.333	Acceptat
Combinat (cc)	1.51	0.471	Acceptat

Interpretare

- Volatilitatea variază de la 3% la 38% \succ rolling window esențial
- Toate testele **acceptate**: model valid pentru managementul riscului



Pasul 6: Rolling VaR \succ Bitcoin



Pasul 6: VaR rolling window \succ Bitcoin

Rolling window GJR-GARCH-t (W=500 zile, VaR 1%)

Caracteristici VaR rolling Bitcoin (2018–2024)

- VaR mediu: 9.34% (\approx EUR 93.400 / 1M EUR)
- VaR maxim: 37.54% \succ crash COVID martie 2020
- VaR minim: 2.90% \succ perioadă calmă
- Bitcoin: VaR rolling $\sim 4\times$ mai mare decât S&P 500 la aceeași expunere



Comparație finală: S&P 500 vs Bitcoin

Rezumat comparativ

	S&P 500	Bitcoin
Volatilitate medie	1.2%	3.5%
Kurtosis	13.8	12.1
Student-t ν	6.42	4.82
Cel mai bun model	EGARCH(1,1)-t	GJR-GARCH(1,1)-t
Leverage effect	Puternic ($\gamma = -0.12$)	Moderat ($\gamma = 0.078$)
Half-life	~60 zile	~42 zile
Rolling VaR 1% mediu	2.53%	9.34%
Rolling VaR 1% maxim	22.02% (COVID)	37.54% (COVID)
Rolling ES 1% mediu	3.42%	12.87%
Kupiec	Acceptat ($p=0.145$)	Acceptat ($p=0.450$)
Christoffersen (ind)	Acceptat ($p=0.375$)	Acceptat ($p=0.333$)

Concluzie generală

- Re-estimare GARCH la fiecare pas: Kupiec + Christoffersen **acceptate**
- Rolling window VaR: **obligatoriu** \succ VaR static complet inadecvat
- Student-t + model asimetric: **esențiale** pentru ambele piețe



Formule cheie

Modele de volatilitate

- **ARCH(q):** $\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$
- **GARCH(1,1):** $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$
- **EGARCH:** $\ln(\sigma_t^2) = \omega + \alpha(|z_{t-1}| - \mathbb{E}[|z|]) + \gamma z_{t-1} + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2)$
- **GJR-GARCH:** $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 I_{t-1} + \beta \sigma_{t-1}^2$

Proprietăți și măsuri

- **Var. necond.:** $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$ **Half-life:** $HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha+\beta)}$
- **VaR:** $\text{VaR}_\alpha = z_\alpha \cdot \sigma_{T+1}$ **Staționaritate:** $\alpha + \beta < 1$
- **ARCH-LM:** $LM = T \cdot R^2 \sim \chi^2(q)$



Exercițiu AI: Gândire critică

Prompt de testat în ChatGPT / Claude / Copilot

"Folosind yfinance, descarcă prețurile zilnice de închidere S&P 500 (^GSPC) din 2018-01-01 până în 2024-12-31 (aprox. 1.750 observații). Calculează randamentele logaritmice zilnice. Testează efectele ARCH, ajustează un model GARCH(1,1) și prognozează volatilitatea pe următoarele 20 de zile de tranzacționare. Vreau cod Python complet."

Exercițiu:

1. Rulați prompt-ul într-un LLM la alegere și analizați critic răspunsul.
2. Calculează randamentele logaritmice corect? Elimină media înainte de GARCH?
3. Cum testează efectele ARCH? Folosește testul LM al lui Engle?
4. Separă ecuația mediei de ecuația varianței?
5. Discută efectele asimetrice (GJR-GARCH, EGARCH)? Estimările VaR sunt calculate din distribuția condițională?
6. Identificați cel puțin **două erori factuale** sau presupuneri discutabile din output-ul LLM.
7. Verifică codul constrângerea de staționaritate $\alpha + \beta < 1$? Dacă nu, adăugați-o.
8. Comparați estimarea VaR a LLM-ului cu rezultatele din acest capitol. Sunt consistente?

Atenție: Codul generat de AI poate rula fără erori și arăta profesional. *Asta nu înseamnă că e corect.*



Rezumat ➔ capitolul 5: Modele de volatilitate

Concepțe cheie

- ARCH(q)**: varianța condiționată depinde de pătratele erorilor trecute (Nobel 2003)
- GARCH(p,q)**: adaugă lag-uri ale varianței pentru persistență (GARCH(1,1) în 90% din cazuri)
- EGARCH**: permite leverage effect, fără restricții de pozitivitate
- GJR-GARCH/TGARCH**: captură asimetria cu variabile indicator

Aplicații

- Măsurarea și prognoza riscului (VaR, ES)
- Prețul derivatelor, hedging dinamic, managementul portofoliului

Sfat practic

- Începe cu GARCH(1,1), verifică leverage effect, alege distribuția care minimizează AIC/BIC!
 - ▶ Student-t adesea superior distribuției normale



Întrebarea 1

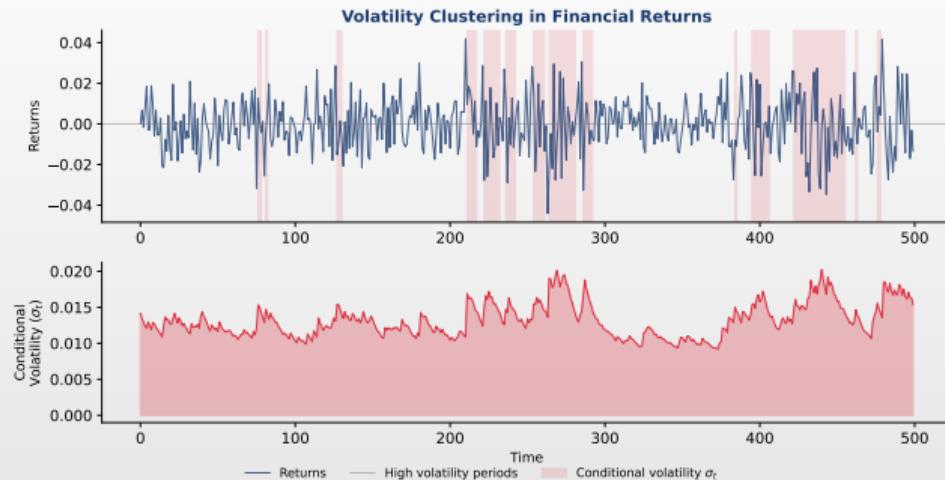
Întrebare

- Ce descrie cel mai bine fenomenul de *volatility clustering* în seriile financiare?

Variante de răspuns

- (A) Randamentele financiare sunt distribuite normal și independente
- (B) Perioadele de volatilitate ridicată sunt urmate de perioade de volatilitate ridicată, și invers
- (C) Volatilitatea este constantă în timp (homoscedasticitate)
- (D) Corelația dintre randamente este întotdeauna pozitivă

Întrebarea 1: Răspuns



Răspuns: (B)

- Volatility clustering este un fapt stilizat fundamental. Implică faptul că varianța condiționată este **predictibilă**, motivând modelele ARCH/GARCH.

Q TSA_ch5_quiz1_volatility_clustering



Întrebarea 2

Întrebare

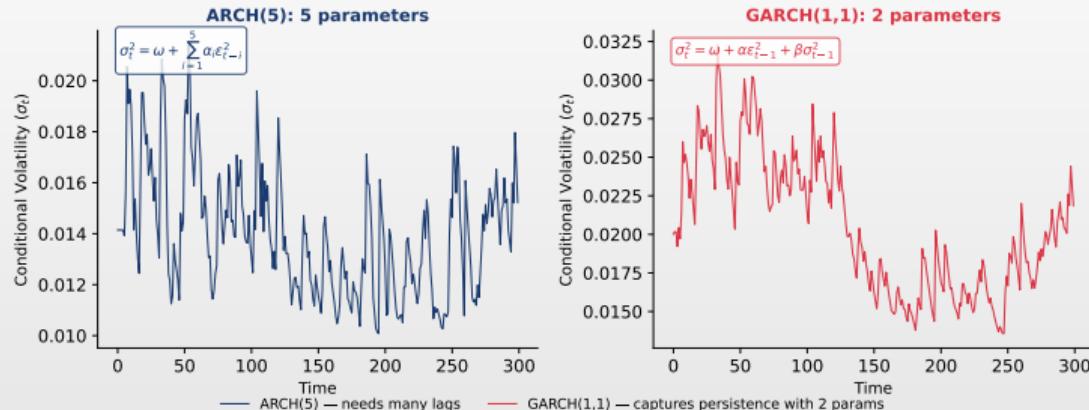
- Care este diferența principală dintre un model ARCH(q) și un model GARCH(p,q)?

Variante de răspuns

- (A)** GARCH modelează media condiționată, ARCH modelează varianța
- (B)** ARCH include lag-uri ale varianței condiționate, GARCH nu
- (C)** GARCH adaugă lag-uri ale varianței condiționate (σ_{t-j}^2) pe lângă pătratele erorilor
- (D)** ARCH este mai parcimonios decât GARCH

Întrebarea 2: Răspuns

ARCH vs GARCH: Parsimony



Răspuns: (C)

- GARCH(1,1) captează aceeași persistență ca ARCH(q) cu doar 2 parametri în loc de q . În practică, GARCH(1,1) este suficient în 90% din cazuri.



Întrebarea 3

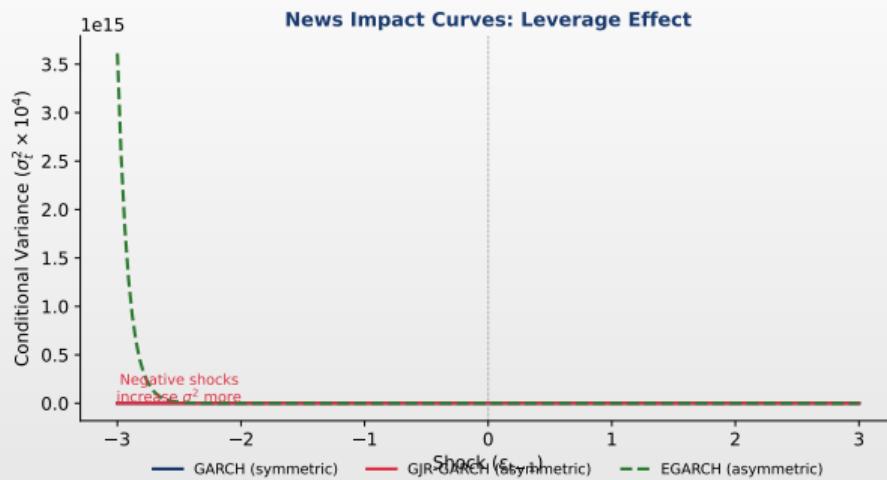
Întrebare

- Ce este *leverage effect* și ce modele GARCH îl captează?

Variante de răspuns

- (A)** řocurile pozitive cresc volatilitatea mai mult; captat de GARCH standard
- (B)** řocurile negative cresc volatilitatea mai mult; captat de EGARCH și GJR-GARCH
- (C)** Volatilitatea este simetrică; captat de toate modelele GARCH
- (D)** Efectul de levier financiar asupra prețului acțiunilor; captat de IGARCH

Întrebarea 3: Răspuns



Răspuns: (B)

- Scăderile de preț cresc volatilitatea **mai mult** decât creșterile de aceeași magnitudine. GARCH standard folosește ε_{t-1}^2 , pierzând informația de semn.



Întrebarea 4

Întrebare

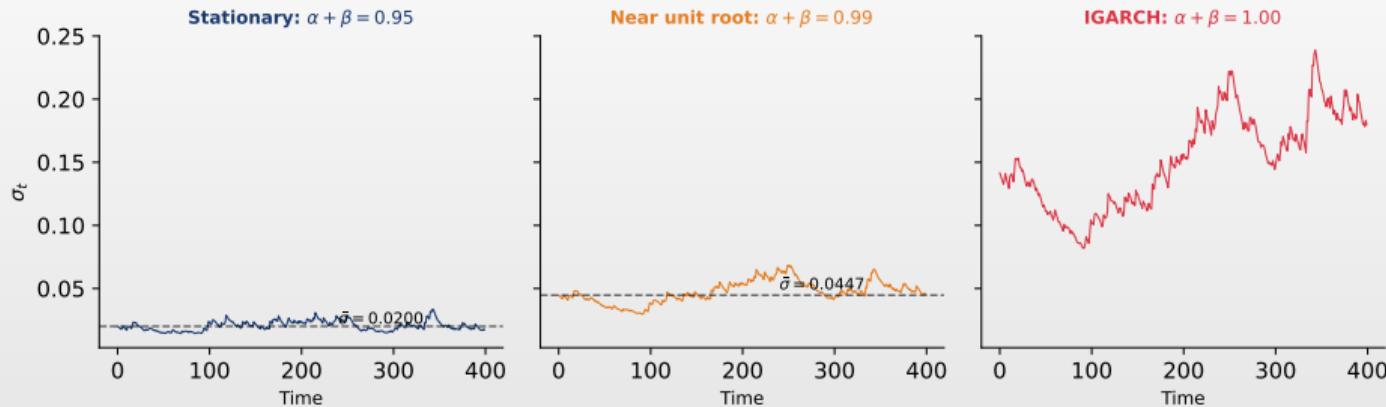
Care este condiția de staționaritate pentru un model GARCH(1,1)?

Variante de răspuns

- (A)** $\alpha + \beta = 1$
- (B)** $\alpha > 0$ și $\beta > 0$
- (C)** $\alpha + \beta < 1$, cu $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$
- (D)** $\alpha \cdot \beta < 1$

Întrebarea 4: Răspuns

GARCH(1,1) Stationarity: $\alpha + \beta < 1$



Răspuns: (C)

- Asigură existența varianței necondiționate finite: $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$. Când $\alpha + \beta = 1$ (IGARCH), varianța este infinită.



Întrebarea 5

Întrebare computațională aplicată

Un model GARCH(1,1) estimat pe randamente zilnice logaritmice (%) dă: $\omega = 0.05$, $\alpha = 0.15$, $\beta = 0.82$.

- (a) Calculați varianța necondiționată $\bar{\sigma}^2$ și volatilitatea anualizată.
- (b) Calculați half-life-ul unui soc de volatilitate.
- (c) Pentru un portofoliu de 2 000 000 EUR, calculați VaR pe 1 zi la 1% sub:
 - ▶ Distribuția normală
 - ▶ Distribuția Student-*t* cu $\nu = 5$ grade de libertate

(Folosiți $\sigma_{T+1} = \bar{\sigma}$ pentru simplitate.)

Întrebarea 5: Răspuns

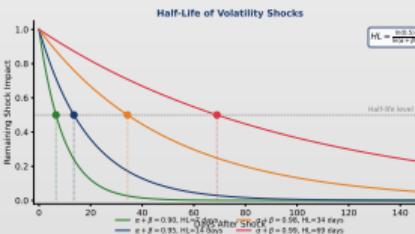
Rezolvare

- (a) $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta} = \frac{0.05}{1-0.97} = 1.667 \Rightarrow \bar{\sigma} = 1.291\% \text{ zilnic} \quad \sigma_{an} = 1.291\% \times \sqrt{252} \approx 20.5\%$
- (b) $HL = \frac{\ln 0.5}{\ln(\alpha+\beta)} = \frac{-0.693}{\ln(0.97)} = \frac{-0.693}{-0.0305} \approx 23 \text{ zile}$
- (c) Valoare portofoliu $V = 2,000,000 \text{ EUR}$, $\sigma_{T+1} = 1.291\%:$

Normal: $\text{VaR}_{1\%} = 2.326 \times 0.01291 \times 2,000,000 = 60\,066 \text{ EUR}$

Student- $t(5)$: $t_{0.01,5} = 3.365$ scalat cu $\sqrt{(\nu - 2)/\nu} = \sqrt{3/5}:$

$\text{VaR}_{1\%} = \frac{3.365}{\sqrt{5/3}} \times 0.01291 \times 2,000,000 = 78\,300 \text{ EUR} \quad (+30\% \text{ vs Normal!})$



Q TSA_ch5_quiz5_halflife



Bibliografie I

Lucrări fundamentale ARCH/GARCH

- Engle, R.F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation, *Econometrica*, 50(4), 987–1007.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 31(3), 307–327.
- Nelson, D.B. (1991). Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach, *Econometrica*, 59(2), 347–370.

Modele asimetrice și extensii

- Glosten, L.R., Jagannathan, R., & Runkle, D.E. (1993). On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks, *Journal of Finance*, 48(5), 1779–1801.
- Francq, C., & Zakoïan, J.-M. (2019). *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*, 2nd ed., Wiley.



Bibliografie II

Manuale și aplicații financiare

- Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*, 3rd ed., Wiley.
- Franke, J., Härdle, W.K., & Hafner, C.M. (2019). *Statistics of Financial Markets*, 4th ed., Springer.
- McNeil, A.J., Frey, R., & Embrechts, P. (2015). *Quantitative Risk Management*, 2nd ed., Princeton University Press.

Resurse online și cod

- **Quantlet:** <https://quantlet.com> ↘ Platformă de cod pentru metode cantitative
- **Quantinar:** <https://quantinar.com> ↘ Platformă de învățare pentru metode cantitative
- **GitHub TSA:** https://github.com/QuantLet/TSA/tree/main/TSA_ch5 ↘ Cod Python pentru acest capitol



Bibliografie III

Estimare și evaluare

- White, H. (1982). Maximum Likelihood Estimation of Misspecified Models, *Econometrica*, 50(1), 1–25.
- Hansen, P.R., & Lunde, A. (2005). A Forecast Comparison of Volatility Models: Does Anything Beat a GARCH(1,1)?, *Journal of Applied Econometrics*, 20(7), 873–889.
- Hansen, P.R., Huang, Z., & Shek, H.H. (2012). Realized GARCH: A Joint Model for Returns and Realized Measures of Volatility, *Journal of Applied Econometrics*, 27(6), 877–906.

Frecvență înaltă și managementul riscului

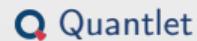
- Corsi, F. (2009). A Simple Approximate Long-Memory Model of Realized Volatility, *Journal of Financial Econometrics*, 7(2), 174–196.
- Patton, A.J. (2011). Volatility Forecast Comparison Using Imperfect Volatility Proxies, *Journal of Econometrics*, 160(1), 246–256.
- Acerbi, C., & Székely, B. (2014). Backtesting Expected Shortfall, *Risk Magazine*, December.



Vă Mulțumim!

Întrebări?

Materialele cursului sunt disponibile la: <https://danpele.github.io/Time-Series-Analysis/>



Quantlet



Quantinar