



# Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 1: Procese Stochastice și Staționaritate



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

## Obiective de Învățare

La finalul acestui capitol, veți fi capabili să:

1. Definiți procesele stochastice și să înțelegeți proprietățile acestora
2. Distingeți între staționaritatea strictă și slabă (covarianță)
3. Identificați procesele de zgomot alb și mers aleatoriu
4. Calculați și interpretați ACF și PACF
5. Aplicați operatorul lag și diferențierea
6. Efectuați teste de staționaritate (ADF, KPSS)
7. Analizați date financiare de tip serie de timp
8. Distingeți între procesele cu rădăcină unitate și cele staționare în trend

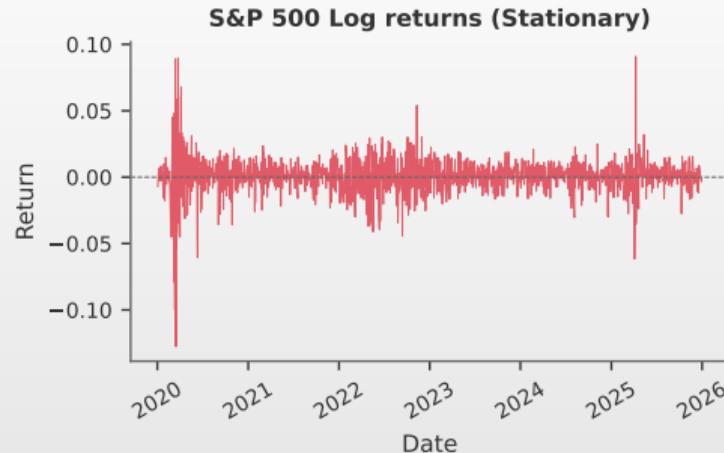
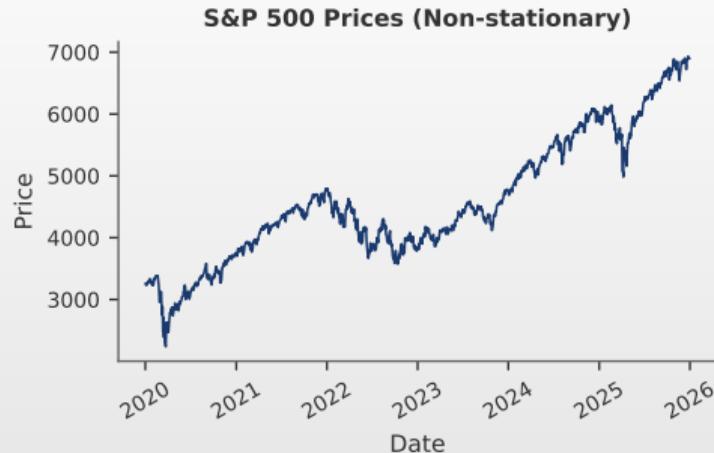


## Structura capitolului

- Motivație
- Procese Stochastice
- Staționaritate
- Operatorul lag și Diferențierea
- Zgomot Alb și Mers Aleatoriu
- Funcții de Autocorelație
- Testarea Staționarității
- Aplicație pe Date Financiare
- Studiu de Caz: Testarea Staționarității
- Rezumat
- Quiz



## Exemple: serii staționare vs. nestaționare



### Observații

- Prețurile (stânga) sunt nestaționare: trend, media se schimbă în timp
- Randamentele (dreapta) sunt staționare: medie  $\approx 0$ , varianță aprox. constantă
- Randamente log:  $r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1} \succ$  nestaționar  $\rightarrow$  staționar



## Proces stochastic: definiție

### Definiție 1 (Proces Stochastic)

- Un **proces stochastic** este o colecție de variabile aleatoare indexate după timp
  - ▶  $\{X_t(\omega) : t \in \mathcal{T}, \omega \in \Omega\}$
  - ▶  $\Omega$  este spațiul eșantion al rezultatelor posibile

### Două Perspective

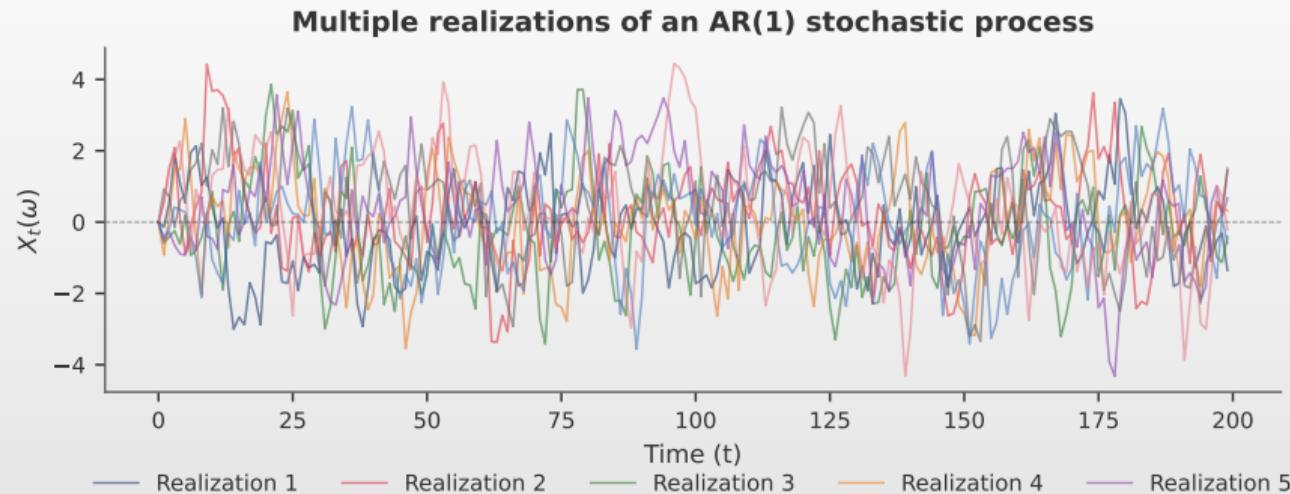
- $\omega$  fixat: O *realizare*  $\{X_t(\omega)\}_{t \in \mathcal{T}}$
- $t$  fixat: O *variabilă aleatoare*  $X_t$

### Observație Cheie

- O serie de timp pe care o observăm este **o singură realizare** a procesului stochastic subiacent



## Proces stochastic: ilustrare vizuală



### Interpretare

- Fiecare linie este o **realizare diferită** din același proces stochastic subiacent
- Observăm doar **o singură realizare**, dar vrem să înțelegem proprietățile procesului



## Momentele unui proces stochastic

### Primele Două Momente Caracterizează Procesul

- Funcția de Medie:**  $\mu_t = \mathbb{E}[X_t]$
- Autocovarianță (ACVF):**  $\gamma(t, s) = \text{Cov}(X_t, X_s)$ 
  - $\gamma(t, s) = \mathbb{E}[(X_t - \mu_t)(X_s - \mu_s)]$
- Autocorelația (ACF):**
  - $\rho(t, s) = \gamma(t, s) / \sqrt{\text{Var}(X_t) \cdot \text{Var}(X_s)}$

### Proprietăți ACF

- Interval:**  $\rho(t, s) \in [-1, 1]$
- Normalizare:**  $\rho(t, t) = 1$  (corelație perfectă cu sine)

### Punct Cheie

- General:**  $\mu_t$  și  $\gamma(t, s)$  pot depinde de  $t$
- Staționar:** Elimină această dependență



## De ce contează staționaritatea

### Fără Staționaritate

- Media, varianța se schimbă în timp
  - ▶ Estimările sunt inconsistente
- Trecutul poate să nu prezică viitorul
- Metodele standard eșuează
- Corelații false (spurious)

### Cu Staționaritate

- Proprietăți statistice constante
  - ▶ Ergodicitate justificată
- Putem estima dintr-o singură realizare
- Inferență validă posibilă
- Modelele sunt semnificative

### Principiu Cheie

- Majoritatea modelelor de serii de timp (ARMA, ARIMA, etc.) necesită staționaritate
- Seriile nestaționare trebuie transformate (de ex., diferențiere) înainte de modelare



## Staționaritatea strictă

### Definiție 2 (Staționaritate Strictă (Puternică))

- Un proces  $\{X_t\}$  este **strict staționar** dacă pentru orice  $k$ , orice  $t_1, \dots, t_k$ , și orice  $h$ :
  - ▶  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_k+h})$
- **Notăție:**  $X \stackrel{d}{=} Y$  înseamnă *egalitate în distribuție*
  - ▶  $P(X \leq x) = P(Y \leq x)$

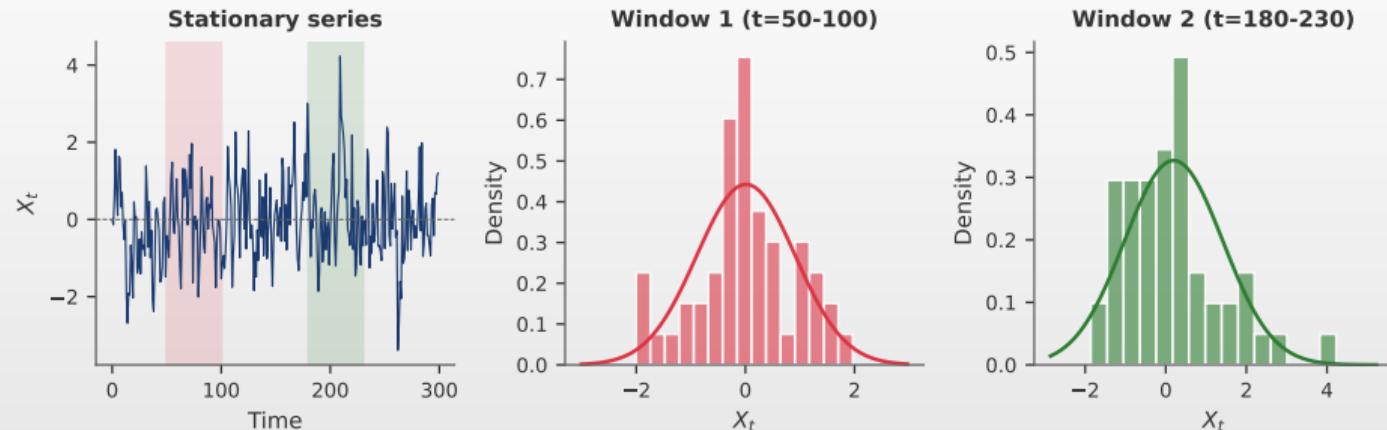
### Implicații

- **Distribuții identice:**  $F_{X_t}(x)$  nu depinde de  $t$ 
  - ▶  $\mathbb{E}[X_t] = \mu$  (medie constantă, dacă există)
  - ▶  $\text{Var}(X_t) = \sigma^2$  (variantă constantă, dacă există)
- **Dependența de lag:** Distribuțiile comune depind doar de lag

### Notă

- Staționaritatea strictă este o condiție puternică, adesea imposibil de verificat în practică

## Staționaritatea strictă: ilustrare vizuală



### Interpretare

- Translația în timp nu schimbă distribuția comună a variabilelor
- Oricare două ferestre temporale au aceleași proprietăți statistice
- În practică: verificăm doar primele momente (staționaritate slabă)



## Staționaritatea slabă (covarianță)

### Definiție 3 (Staționaritate Slabă)

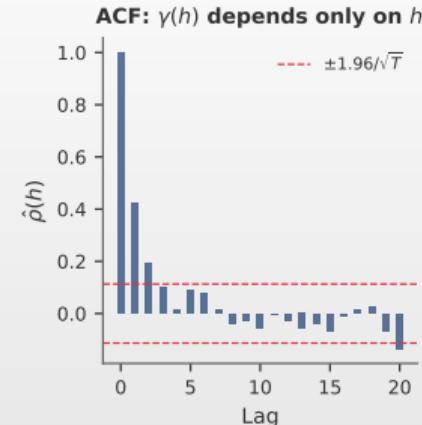
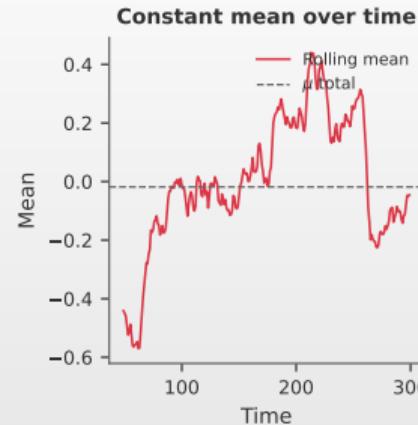
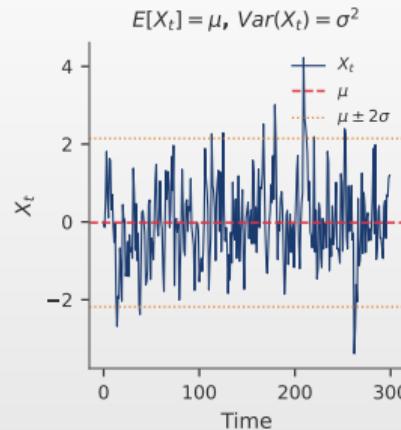
- Un proces  $\{X_t\}$  este **slab staționar** (sau staționar în covarianță) dacă:
  - ▶  $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$  pentru toți  $t$ 
    - Momente finite de ordin 2
  - ▶  $\mathbb{E}[X_t] = \mu$  pentru toți  $t$ 
    - Medie constantă
  - ▶  $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$ 
    - Covarianța depinde doar de lag-ul  $h$ , nu de  $t$

### Proprietăți Cheie

- **Autocovarianță** este funcție doar de lag:
  - ▶  $\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \mathbb{E}[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)]$
- **Autocorelația:**
  - ▶  $\rho(h) = \gamma(h)/\gamma(0) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h})/\text{Var}(X_t)$
- **Notă:**  $\rho(0) = 1$ ,  $|\rho(h)| \leq 1$ ,  $\rho(h) = \rho(-h)$  (simetrie)



## Staționaritatea slabă: ilustrare vizuală



### Cele trei condiții

- $\mathbb{E}[X_t] = \mu$  constantă  $\succ$  media nu depinde de timp
- $\text{Var}(X_t) = \sigma^2$  constantă  $\succ$  varianța nu depinde de timp
- $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$   $\succ$  autocovarianța depinde doar de lag  $h$



## Relația între staționaritate strictă și slabă

### Teoremă 1 (Implicație Fundamentală)

Dacă  $\{X_t\}$  este **strict staționar** și  $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$ , atunci  $\{X_t\}$  este și **slab staționar**.

### Demonstrație.

- Fie  $t_1, t_2$  oarecare și  $h$  deplasare temporală arbitrară
- Din invarianța distribuției comune:  $(X_{t_1}, X_{t_2}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+h}, X_{t_2+h})$
- $\mathbb{E}[X_{t_1}] = \mathbb{E}[X_{t_1+h}] = \mu$  (medie constantă)
- $\text{Cov}(X_{t_1}, X_{t_2}) = \text{Cov}(X_{t_1+h}, X_{t_2+h})$
- Deci autocovarianța depinde doar de diferența  $t_2 - t_1 = h$ , nu de  $t_1$



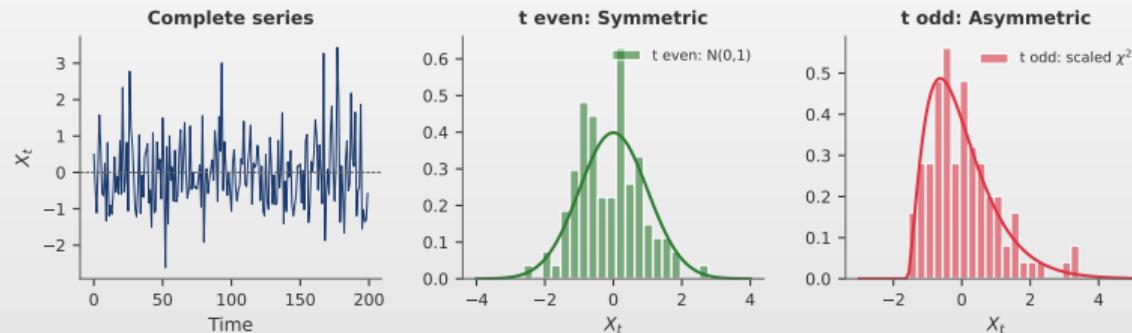
Atenție: Reciproca NU este adevărată!

- Există procese slab staționare dar **nu** strict staționare

## Contraexemplu: slab staționar dar NU strict staționar

### Construcție

- Fie  $\{X_t\}$  variabile aleatoare **independente** cu:  $t$  par:  $X_t \sim N(0, 1)$ ;  $t$  impar:  $X_t \sim \frac{\chi^2(5)-5}{\sqrt{10}}$



Slab staționar ✓

- $\mathbb{E}[X_t] = 0$ ,  $\text{Var}(X_t) = 1$ ,  $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = 0$

NU strict staționar ✗

- Asimetria diferă ( $0$  vs  $> 0$ )  $\succ X_1 \neq X_2$

Q TSA\_ch1\_counterexample



## Proprietățile funcției de autocovarianță

### Propoziție 1

Pentru un proces slab staționar, ACVF  $\gamma(h)$  satisfacă:

- Simetrie:**  $\gamma(h) = \gamma(-h)$
- Maximum la zero:**  $|\gamma(h)| \leq \gamma(0) = \text{Var}(X_t)$
- Definit nenegativ:**  $\sum_{i,j} a_i a_j \gamma(i-j) \geq 0$  pentru orice  $a_1, \dots, a_n$

### Demonstrație (prop. 3)

- $\text{Var} \left( \sum_{i=1}^n a_i X_{t+i} \right) = \sum_{i,j} a_i a_j \gamma(i-j) \geq 0$  (varianța  $\geq 0$ )

### Implicație

- Nu orice funcție poate fi o funcție de autocovarianță validă



## Ergodicitatea: fundamentul inferenței din date

### Definiție 4 (Ergodicitate pentru Medie)

- Un proces staționar  $\{X_t\}$  este **ergodic pentru medie** dacă:
  - $\bar{X}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t \xrightarrow{P} \mathbb{E}[X_t] = \mu$  când  $T \rightarrow \infty$

### De ce contează ergodicitatea?

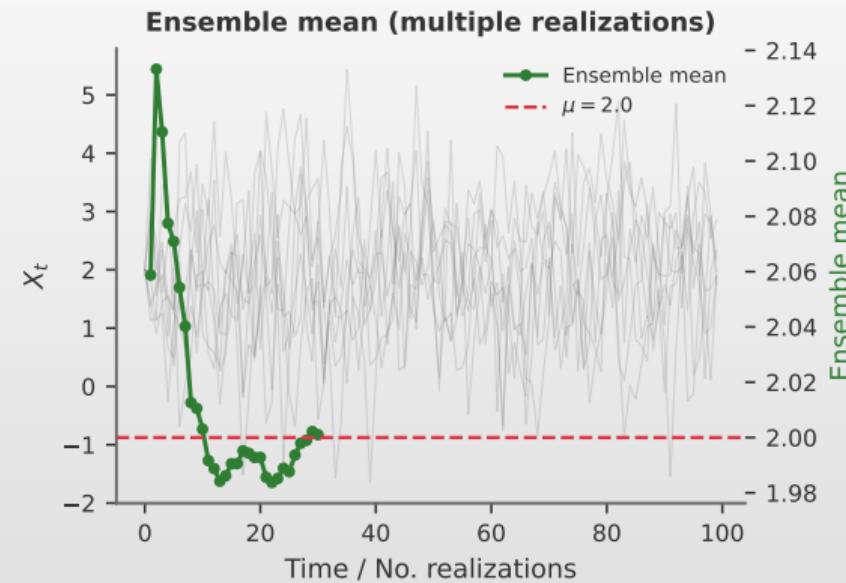
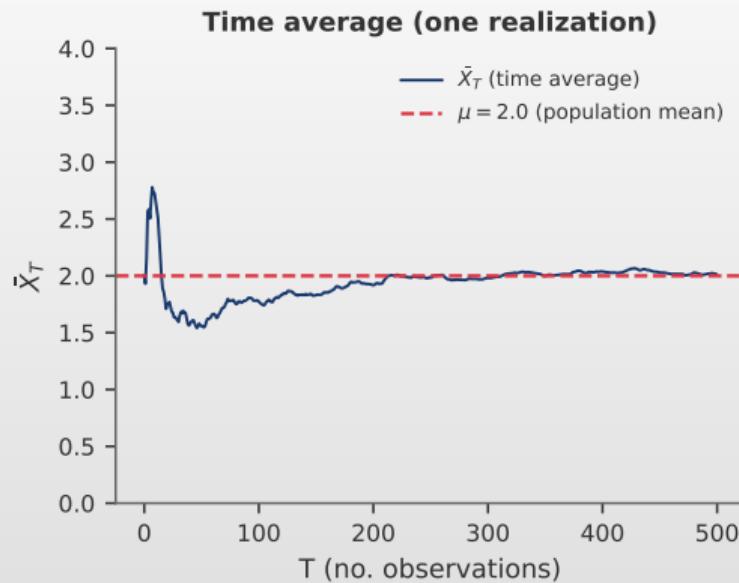
- Problema:** Avem doar o **singură realizare** a procesului stochastic
- Soluția:** Ergodicitatea permite estimarea lui  $\mu$  din  $\bar{X}_T$ 
  - Media temporală convergează la media populației
  - Fără ergodicitate, inferență statistică nu este posibilă!

### Teoremă 2 (Condiție Suficientă)

Dacă  $\sum_{h=0}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty$  (autocovarianțe absolut sumabile), procesul este ergodic.



## Ergodicitatea: ilustrare vizuală



- Media temporală** (o singură realizare) și **media ansamblului** (realizări multiple) converg ambele la  $\mu$
- Ergodicitatea garantează că putem estima  $\mu$  dintr-o **singură serie temporală** suficient de lungă



## Teorema de descompunere Wold

### Teoremă 3 (Wold, 1938)

Orice proces **staționar în covariantă**  $\{X_t\}$  poate fi scris ca:  $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + \eta_t$

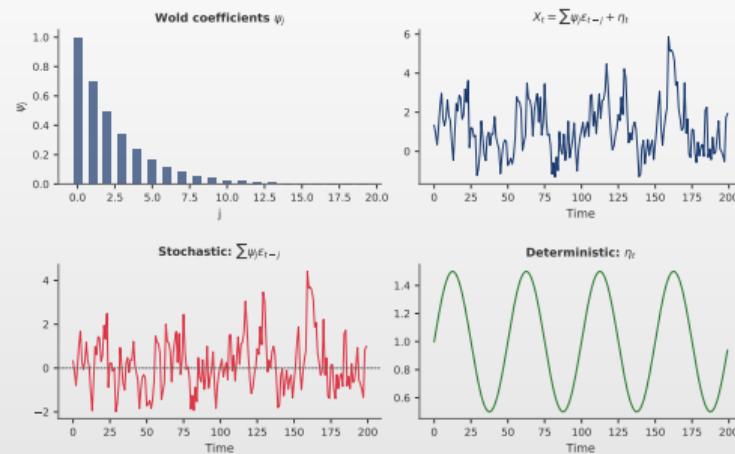
- $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$  > zgomot alb
  - $\psi_0 = 1, \sum \psi_j^2 < \infty$
- $\eta_t$  > componentă deterministă (perfect predictibilă)

### Semnificația Teoremei Wold

- Descompunere:** Orice proces staționar = **MA( $\infty$ )** + componentă deterministă
  - Justifică teoretic modelele MA( $q$ ) și ARMA( $p, q$ )
  - Coeficienții  $\psi_j$  măsoară impactul șocurilor trecute



## Teorema Wold: ilustrare vizuală



### Interpretare

- $X_t$  se descompune în componentă **stochastică** ( $MA(\infty)$ ) și componentă **deterministă** ( $\eta_t$ )
- Coeficienții  $\psi_j$  descresc  $\succcurlyeq$  řocurile recente au impact mai mare decât cele îndepărtate



## Operatorul lag

### Definiție 5 (Operatorul lag)

- **Operatorul lag** (sau operatorul de întârziere)  $L$  este definit prin:  $LX_t = X_{t-1}$

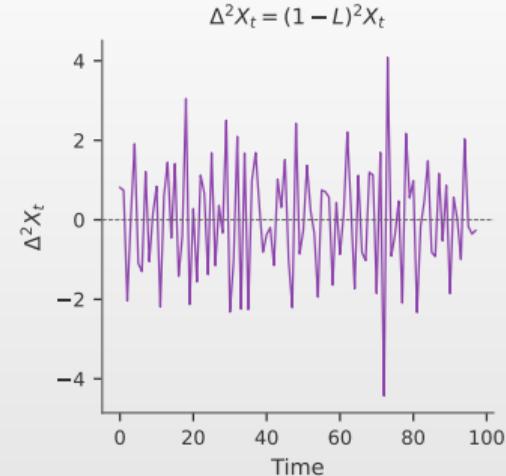
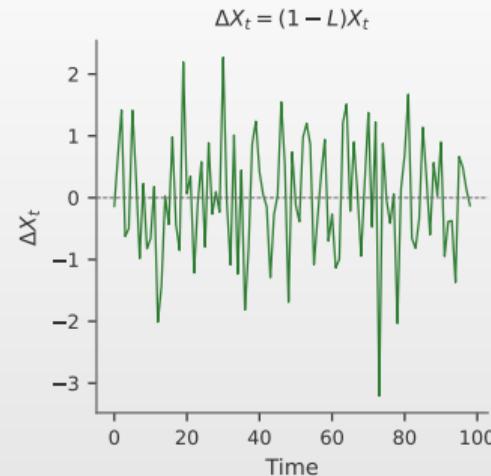
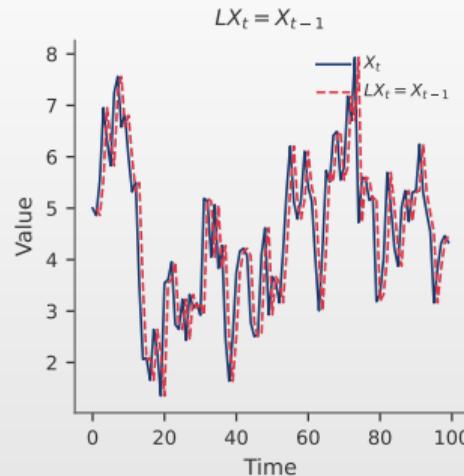
### Proprietăți

- **Puteri:**  $L^k X_t = X_{t-k}$  (întârzie cu  $k$  perioade)
  - ▶ Notație compactă pentru modele
- **Identitate:**  $L^0 = I$
- **Polinom:**  $(1 - \phi L)X_t = X_t - \phi X_{t-1}$

### Exemple

- **Prima diferență:**  $(1 - L)X_t = X_t - X_{t-1}$
- **A doua diferență:**  $(1 - L)^2 X_t = \Delta^2 X_t$
- **Sezonieră:**  $(1 - L^{12})X_t$

## Operatorul lag: ilustrare vizuală



### Proprietăți

- $LX_t = X_{t-1}$  → operatorul lag deplasează seria cu o perioadă în trecut
- $L^k X_t = X_{t-k}$  → deplasare cu  $k$  perioade;  $L^0 = I$  (identitate)
- Operatorul diferență:**  $\Delta = (1 - L)$ , astfel  $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$

## Diferențierea

### De ce Diferențiem?

- **Prima Diferență:**  $\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = (1 - L)X_t$ 
  - ▶ Elimină trendul și rădăcina unitate
  - ▶ Mers aleatoriu:  $\Delta X_t = \varepsilon_t$

### Definiție 6 (Proces Integrat de Ordin $d$ )

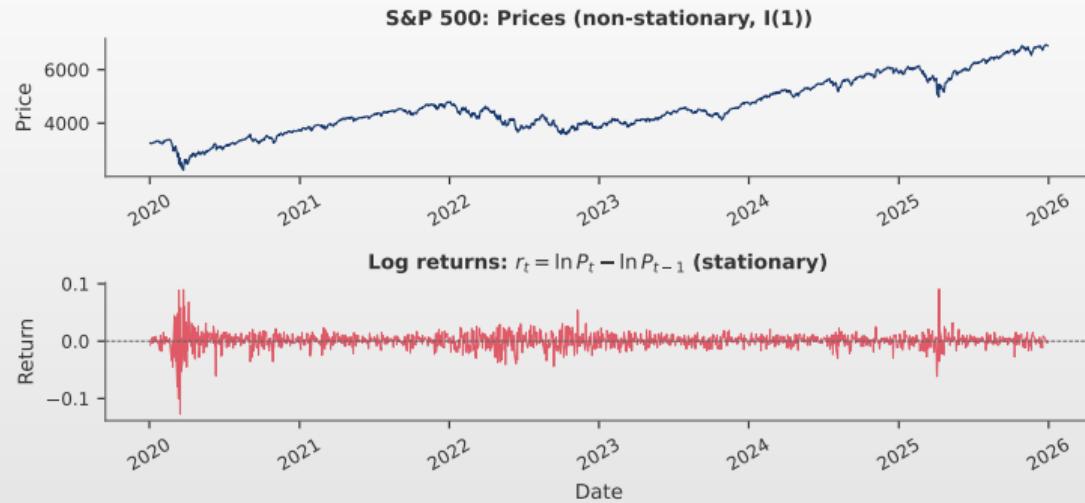
- Un proces  $\{X_t\}$  este **integrat de ordin  $d$** , notat  $X_t \sim I(d)$ , dacă:
  - ▶  $\Delta^d X_t = (1 - L)^d X_t$  este staționar ( $I(0)$  proces)
  - ▶  $\Delta^{d-1} X_t$  nu este staționar

### Exemple

- $I(0)$ : Proces staționar (zgomot alb, AR staționar)
- $I(1)$ : Mers aleatoriu  $\succ \Delta X_t = \varepsilon_t$  este staționar
- $I(2)$ : Necesită două diferențieri pentru stationaritate



## Efectul diferențierii: S&P 500



### Interpretare

- Sus:** Prețuri S&P 500  $\succ$  trend clar, nestaționar ( $I(1)$ )
- Jos:** Randamente log  $r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1} \succ$  fluctuează în jurul mediei  $\approx 0$ , staționar



## Procesul de zgomot alb

### Definiție 7 (Zgomot Alb)

- Un proces  $\{\varepsilon_t\}$  este **zgomot alb**, notat  $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ , dacă:
  - ▶  $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$  pentru orice  $t$  (medie zero)
  - ▶  $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$  pentru orice  $t$  (varianță constantă)
  - ▶  $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$  pentru  $t \neq s$  (necorelat)

### ACF al Zgomotului Alb

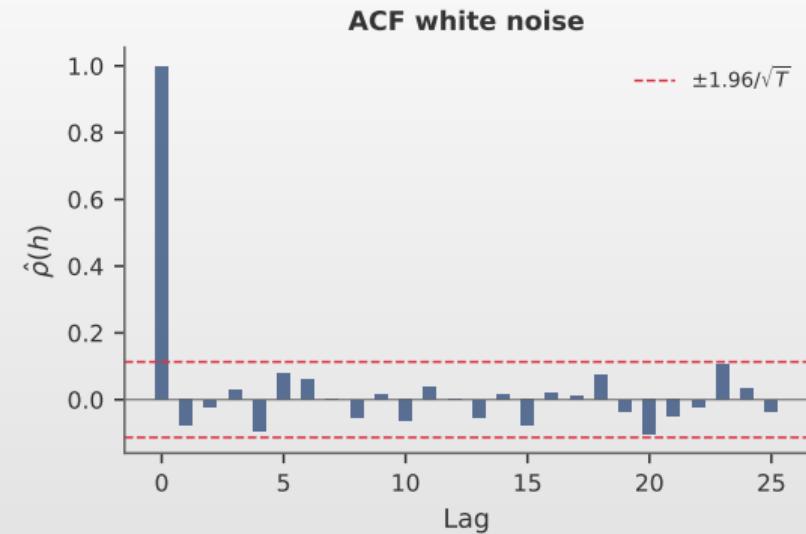
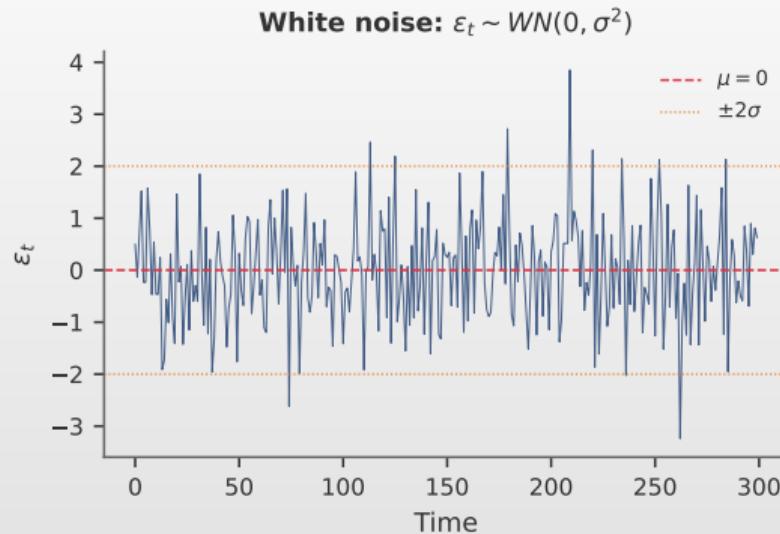
- Din definiție:  $\gamma(0) = \sigma^2$  și  $\gamma(h) = 0$  pentru  $h \neq 0$ ;  $\rho(h) = \begin{cases} 1 & h = 0 \\ 0 & h \neq 0 \end{cases}$

### Tipuri de zgomot alb (în ordine crescătoare a restricțiilor)

- **Slab**: necorelat, dar pot exista dependențe neliniare
- **Puternic**:  $\varepsilon_t$  sunt *independente* și identic distribuite (i.i.d.)
- **Gaussian**:  $\varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$ 
  - ▶ Necorelat  $\Rightarrow$  independent

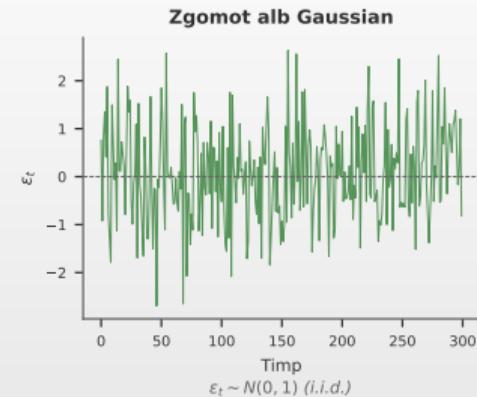
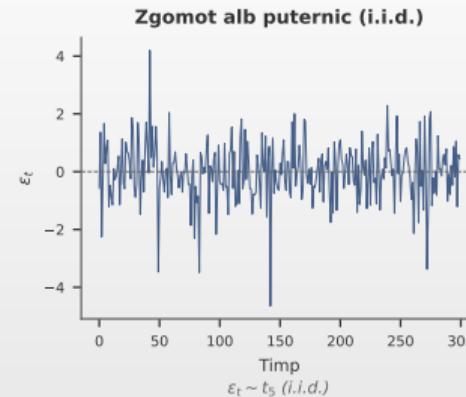
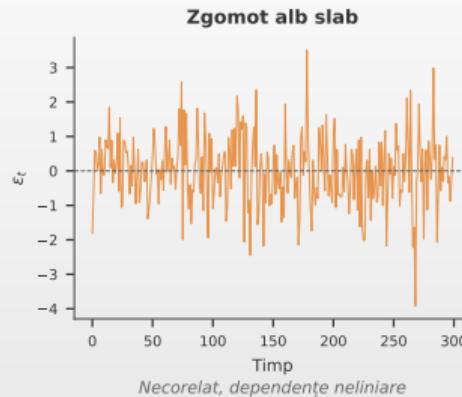


## Zgomot alb: ilustrare vizuală



Q **TSA\_ch1\_white\_noise**

## Cele trei tipuri de zgomot alb



Relația de incluziune: Gaussian  $\subset$  Puternic (i.i.d.)  $\subset$  Slab (necorelat)

- **Slab:**  $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ , dar pot exista dependențe neliniare (ex. GARCH)
- **Puternic:**  $\varepsilon_t$  sunt i.i.d. — orice distribuție (ex. Student- $t$ )
- **Gaussian:**  $\varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$  — necorelat  $\Leftrightarrow$  independent

## Procesul de mers aleatoriu

### Definiție 8 (Mers Aleatoriu)

$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2), \quad X_0 = 0 \quad \Rightarrow \text{Forma explicită: } X_t = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$

### Propoziție 2 (Proprietăți)

- $\mathbb{E}[X_t] = 0$
- $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$  (crește cu timpul!)
- $\text{Cov}(X_t, X_s) = \min(t, s) \cdot \sigma^2$

### Demonstrații.

- $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^t \varepsilon_i\right] = 0$
- $\text{Var}(X_t) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^t \varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^t \text{Var}(\varepsilon_i) = t\sigma^2 \quad (\text{independență})$
- $\text{Cov}(X_t, X_s) = \min(t, s) \sigma^2 \quad (\text{pentru } s \leq t)$

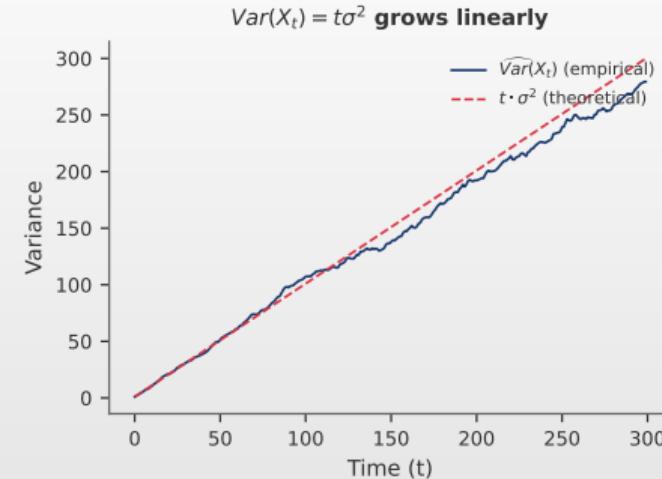
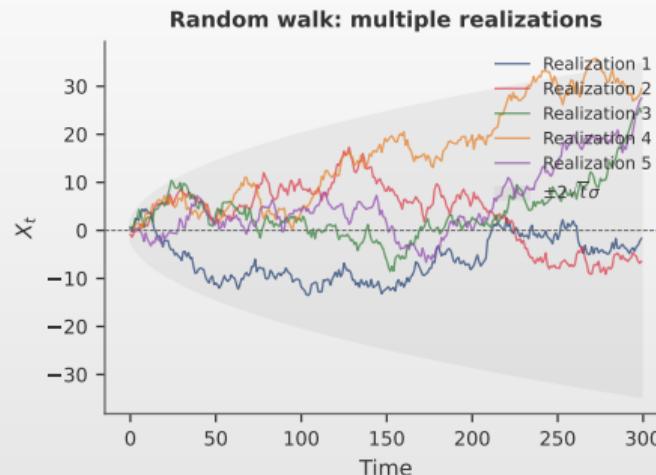
□

### Nestaționar!

$\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$  depinde de  $t \succ$  mersul aleatoriu **nu este staționar**



## Mers aleatoriu: vizualizare



### Observații

- Fiecare șoc are **efect permanent**;  $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$  crește liniar cu timpul
- **Soluție** — diferențierea transformă în zgomot alb,  $\Delta X_t = \varepsilon_t$



## Mers aleatoriu cu drift

### Definiție 9 (Mers Aleatoriu cu Drift)

$X_t = c + X_{t-1} + \varepsilon_t$ ,  $c \neq 0$  este **driftul**  $\Rightarrow$  Forma explicită:  $X_t = ct + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$

### Propoziție 3 (Proprietăți)

- $\mathbb{E}[X_t] = ct$  (trend liniar)
- $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$  (crește cu timpul)

### Diferențiere

$\Delta X_t = c + \varepsilon_t$  — constantă plus zgomot alb  $\succ$  seria diferențiată este staționară

### Importanța practică

- PIB nominal, prețuri de acțiuni  $\succ$  adesea modele ca RW cu drift
- Testul ADF include variante: fără constantă, cu constantă, cu constantă și trend



## Staționaritate în trend vs. staționaritate în diferențe

### Staționaritate în trend (TS)

- Model:**  $Y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$ 
  - ▶ Trend **determinist**
  - ▶ Abaterile de la trend sunt temporare
- Soluție:** regresie pe  $t$ , se extrag reziduurile
- Efect:** řocurile NU au efect permanent

### Staționaritate în diferențe (DS)

- Model:**  $Y_t = c + Y_{t-1} + \varepsilon_t$ 
  - ▶ Trend **stochastic**
  - ▶ Abaterile de la trend sunt permanente
- Soluție:** diferențiere ( $\Delta Y_t$ )
- Efect:** řocurile AU efect permanent

### De ce contează distincția?

- Diferențiere pe TS:** introduce rădăcină unitară artificială în MA
- Regresie pe DS:** produce reziduuri **tot nestăționare**
- Soluție:** Testele ADF și KPSS ajută la distincție



## Zgomot alb vs mers aleatoriu: comparație

### Zgomot Alb

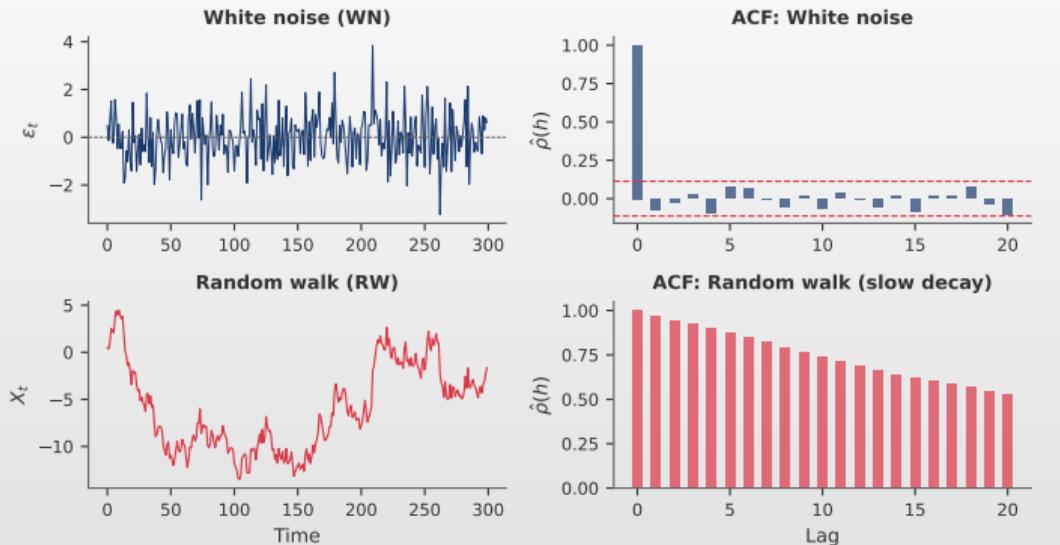
- Staționar
- $\text{Var} = \sigma^2$  (const.)
- $\text{ACF} = 0, h \neq 0$
- Fără memorie

### Mers Aleatoriu

- Nestaționar
- $\text{Var} = t\sigma^2$  (crește)
- $\text{ACF} \approx 1$  (lent)
- Șocuri permanente

### Legătură

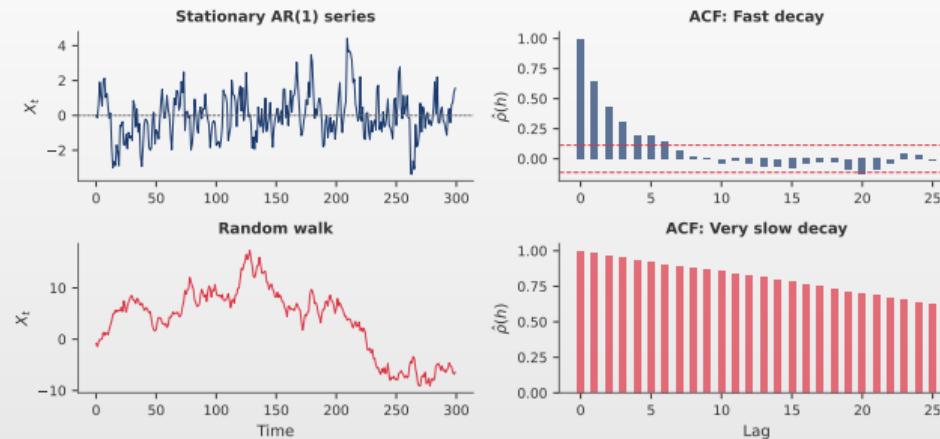
- $\Delta X_t = \varepsilon_t$



Q TSA\_ch1\_random\_walk



## Comparație ACF: staționar vs mers aleatoriu



### Interpretare

- **Staționar:** ACF scade rapid (exponențial sau oscilant) spre zero
- **Mers aleatoriu:** ACF scade foarte lent, rămâne aproape de 1
- **Regulă practică:** ACF lent  $\succ$  suspectăm rădăcină unitate  $\succ$  test ADF



## Funcția de autocorelație eșantion

### ACF Eșantion la Lag-ul $h$

$$\square \hat{\rho}(h) = \frac{\sum_{t=1}^{T-h} (x_t - \bar{x})(x_{t+h} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2}$$

► Proprietăți:  $\hat{\rho}(0) = 1$ ,  $|\hat{\rho}(h)| \leq 1$

### Teoremă 4 (Bartlett, 1946)

Sub  $H_0$ : zgomot alb, pentru  $T$  mare:  $\hat{\rho}(h) \approx N(0, 1/T)$

### Interval de încredere 95%

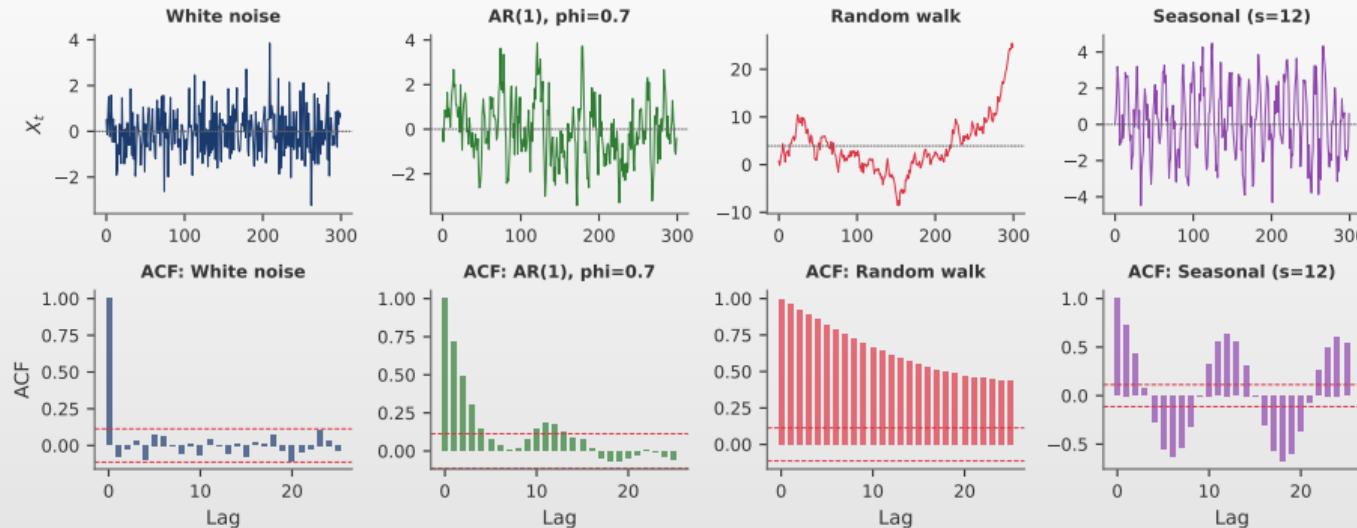
$$\square \pm 1.96/\sqrt{T} \text{ (benzile din graficele ACF)}$$

### Atenție

- Formula Bartlett validă **doar sub  $H_0$ : zgomot alb**
- Pentru AR/MA, varianța asimptotică diferă



## Tipare ACF pentru diferite procese



### Interpretare

- Zgomot alb:**  $ACF = 0$ ; **Staționar:** scade rapid; **Nestăționar:** scade lent
- Sezonier:** Vârfuri la lag-uri sezonale (12, 24 pentru date lunare)



## Funcția de autocorelație parțială (PACF)

### Definiție 10 (Autocorelația Parțială)

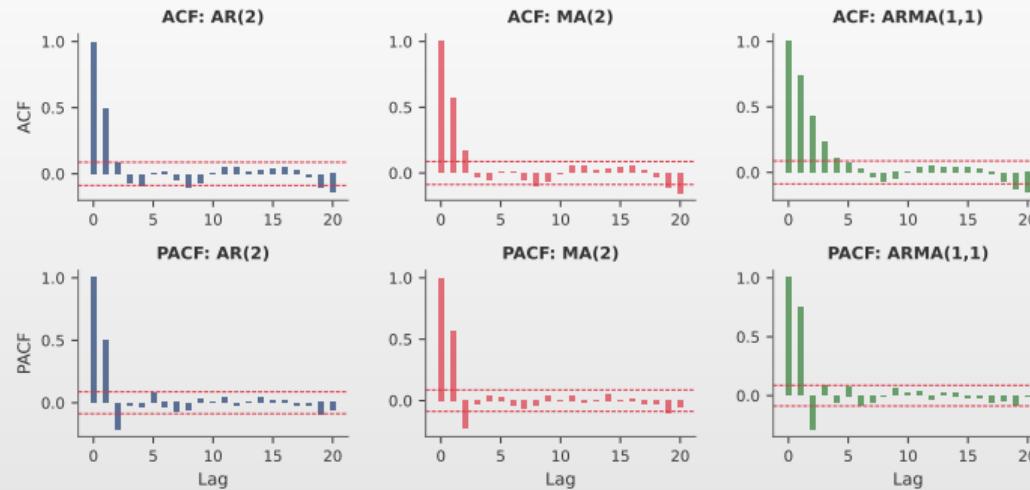
- PACF la lag-ul  $h$ , notat  $\phi_{hh}$ : ultimul coeficient din regresia:
  - ▶  $X_t = \phi_{h1}X_{t-1} + \phi_{h2}X_{t-2} + \cdots + \phi_{hh}X_{t-h} + e_t$
- Alternativ:
  - ▶  $\phi_{hh} = \text{Corr}(X_t - \hat{X}_t^{(h-1)}, X_{t-h} - \hat{X}_{t-h}^{(h-1)})$
- Interpretare: Dependență directă la lag-ul  $h$ 
  - ▶ Elimină efectul lag-urilor intermediare

### Aplicație Cheie: Identificarea Ordinului Modelului

- AR( $p$ ): PACF se anulează după lag-ul  $p$ 
  - ▶ ACF scade exponențial sau oscilant
- MA( $q$ ): ACF se anulează după lag-ul  $q$ 
  - ▶ PACF scade exponențial sau oscilant



## Tipare ACF și PACF

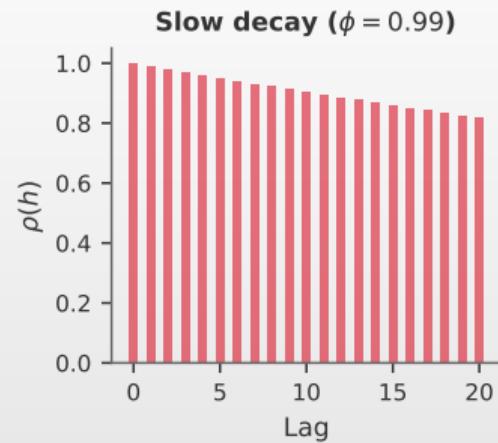
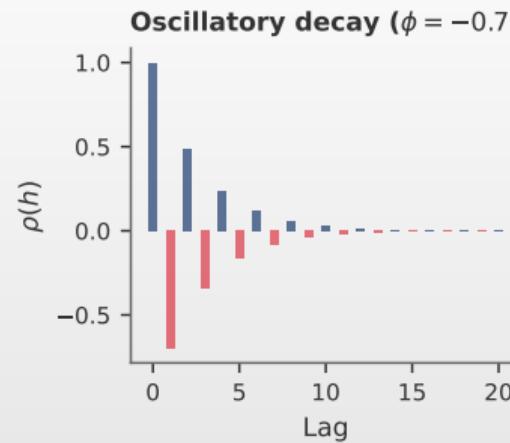
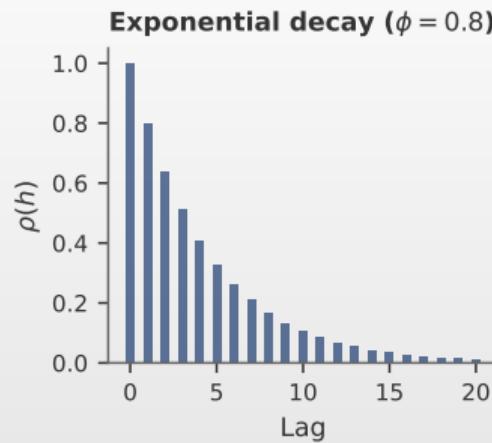


### Reguli de identificare

- AR( $p$ )**: ACF scade exponențial, PACF se anulează după lag  $p$
- MA( $q$ )**: ACF se anulează după lag  $q$ , PACF scade exponențial
- ARMA( $p, q$ )**: Ambele scad exponențial  $\succ$  identificarea necesită criterii informaționale



## Tipare de scădere ACF



### Interpretare

- Scădere exponențială:** Dependență pozitivă persistentă (AR cu  $\phi > 0$ )
- Scădere oscilantă:** Dependență alternantă (AR cu  $\phi < 0$ )
- Viteza de scădere indică puterea memoriei procesului



## Testul Augmented Dickey-Fuller (ADF)

### Modelul ADF

$$\Delta X_t = \alpha + \gamma X_{t-1} + \sum_{i=1}^p \delta_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t, \quad \gamma = \rho - 1, \quad H_0 : \gamma = 0 \Leftrightarrow \rho = 1$$

### Ipoteze

- $H_0: \gamma = 0$  (rădăcină unitate)
- $H_1: \gamma < 0$  (staționar)

### Statistica de Test

- $\tau_{ADF} = \hat{\gamma} / SE(\hat{\gamma})$
- $\hat{\gamma}$  = coeficient OLS al  $X_{t-1}$
- $SE(\hat{\gamma}) = \hat{\sigma}_\varepsilon / \sqrt{\sum X_{t-1}^2}$

### Regula de Decizie

- $\tau_{ADF} < \text{val. critică} \succ \text{Respingem } H_0 \succ \text{Staționar}$
- $\tau_{ADF} \geq \text{val. critică} \succ \text{Nestaționar (rădăcină unitate)}$
- Valorile critice urmează distribuția Dickey-Fuller (**nu t-Student!**)



## Testul KPSS

### Modelul

- $X_t = \xi t + r_t + \varepsilon_t$  unde  $r_t = r_{t-1} + u_t$

### Ipoteze (opus ADF)

- $H_0: \sigma_u^2 = 0$  (staționar)
- $H_1: \sigma_u^2 > 0$  (rădăcină unitate)

### Statistica de Test

- $LM = \frac{\sum_{t=1}^T S_t^2}{T^2 \hat{\sigma}^2}$
- unde  $S_t = \sum_{i=1}^t \hat{e}_i$

### Regula de Decizie

- $LM >$  valoarea critică  $\succ$  Respingem  $H_0 \succ$  **Nestaționar**
- $LM \leq$  valoarea critică  $\succ$  **Staționar**



## Folosirea ADF și KPSS împreună

### Testare Confirmatorie

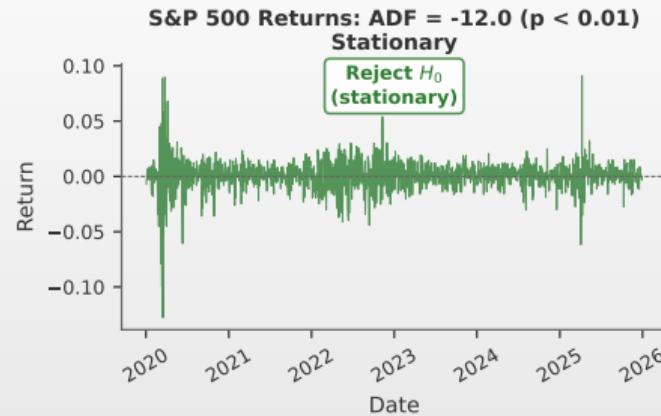
- ADF respinge  $H_0$  + KPSS nu respinge:** Staționar
- ADF nu respinge + KPSS respinge  $H_0$ :** Rădăcină Unitară
- Ambele resping sau ambele nu resping:** Neconcludent
  - Necesită teste suplimentare (PP, DF-GLS)

### Flux de Lucru

- Pasul 1:** Test ADF ( $H_0$ : rădăcină)
- Pasul 2:** Test KPSS ( $H_0$ : staționar)
- Pasul 3:** Rezultate concordante  $\succ$  OK
  - Altfel: teste PP, DF-GLS



## Testul ADF: vizualizare cu S&P 500



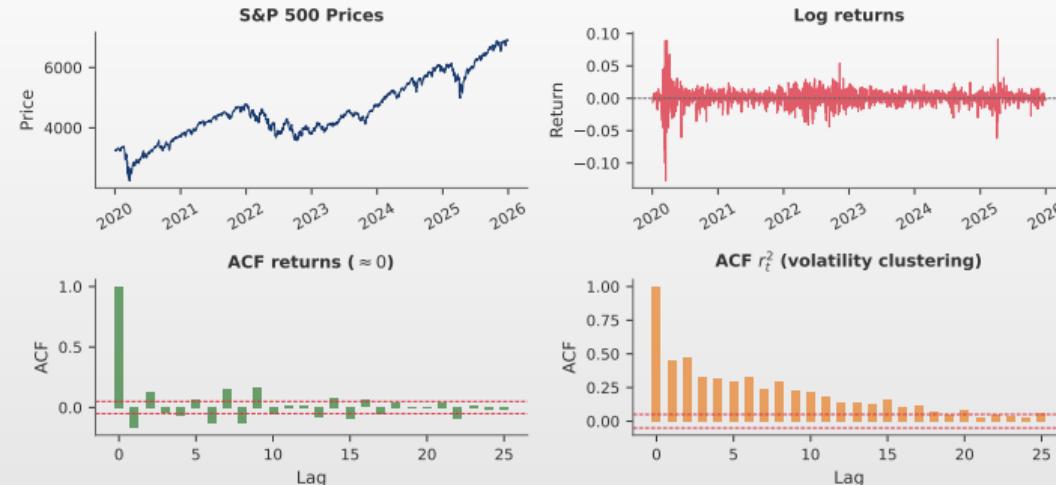
Q TSA\_ch1\_unit\_root\_tests

### Interpretarea Testului ADF

- Ipoteza:**  $H_0$ : Rădăcină unitate
  - ▶ Valori critice:  $-3.43$  (1%),  $-2.86$  (5%),  $-2.57$  (10%)
  - ▶  $\tau <$  val. critică  $\succ$  respingem  $H_0 \succ$  serie staționară
- S&P 500:** Prețuri nestaționare; Randamente staționare



## Analiza S&P 500: prezentare generală

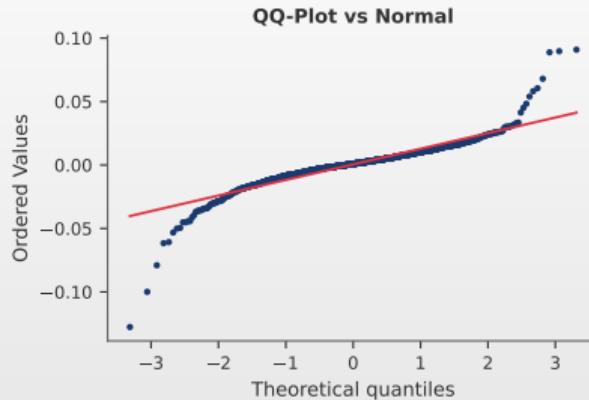
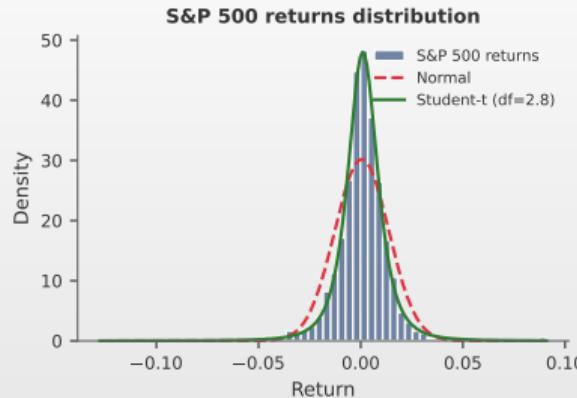


### Observații

- Prețuri: Trend ascendent, nestaționar; Randamente: Medie  $\approx 0$ , staționar
- ACF randamente:  $\approx 0$  (eficient); ACF  $r_t^2$ : Semnificativ (volatility clustering)



## Fapte stilizate ale randamentelor financiare



### Proprietăți observate

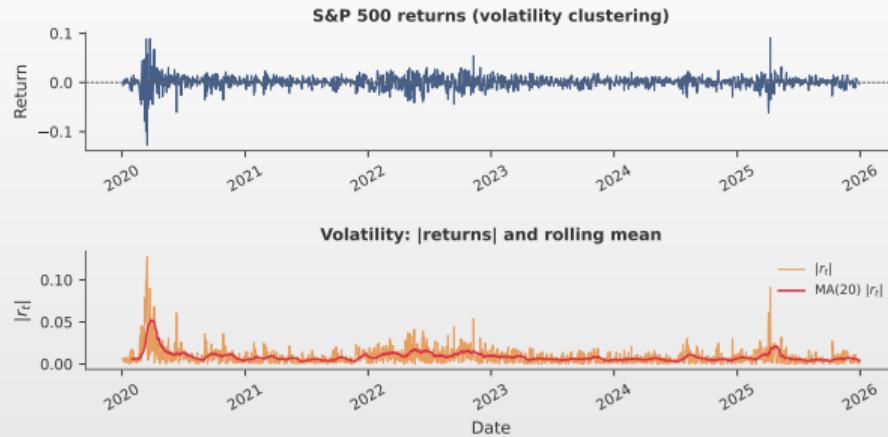
- Asimetrie negativă (coadă stângă)
- Kurtosis excesiv ( $\gg 3$ )
- Cozi groase (heavy tails)

### Implicații

- Distribuția normală inadecvată
- Evenimente extreme mai probabile
- Necesită Student-t sau GED



## Volatility clustering

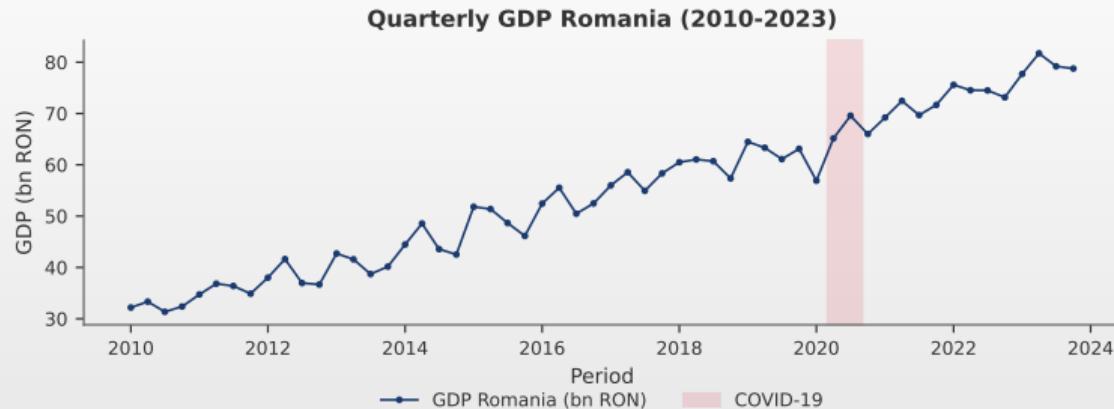


### Observații

- Randamente mari (în valoare absolută) urmate de randamente mari
- Perioade de calm urmate de perioade de calm
- Volatilitate variabilă în timp**  $\succ$  modele ARCH/GARCH (Cap. 5)



## Studiu de caz: PIB-ul trimestrial al României



 TSA\_ch1\_case\_gdp

### Analiza Inițială

- Date:** PIB trimestrial România 2010–2023 (56 obs., INS/Eurostat)
- Observații:** Trend ascendent, posibil sezonier
  - ▶ řoc structural COVID-19 vizibil
- Ipoteză:** Serie nestaționară  $\succsim$  testăm cu ADF și KPSS



## Testarea staționarității: ADF și KPSS

### Testul ADF

- Ipoteză:**  $H_0$ : Rădăcină unitate
- Rezultat:** Stat. ADF: -1.23
  - ▶ Val. critică: -2.89
  - ▶ Nu respingem  $H_0$

### Testul KPSS

- Ipoteză:**  $H_0$ : Staționară
- Rezultat:** Stat. KPSS: 0.89
  - ▶ Val. critică: 0.46
  - ▶ Respingem  $H_0$

Concluzie: Ambele Teste Concordă

- Seria PIB este **nestaționară**  $\succ$  necesită diferențiere



## Diferențierea: transformare la staționaritate

### După Diferențiere

- **Teste:** Ambele confirmă staționaritate
  - ▶ ADF:  $-4.56$  ( $p < 0.01$ )
  - ▶ KPSS:  $0.21$  ( $p > 0.10$ )

### Concluzie

- **PIB nivel:** nestaționar
- **$\Delta PIB$ :** staționar
  - ▶ Folosim  $\Delta PIB_t$  pentru modelare

### Rezultat Final

- PIB-ul necesită o diferențiere pentru a deveni staționar



## Concluzii principale

### Rezumat

- **Proces stochastic:** colecție de variabile aleatoare indexate în timp
- **Staționaritate slabă:** medie, varianță, autocovarianță constante
- **Zgomot alb:**  $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ 
  - ▶ Staționar, ACF = 0 pentru  $h \neq 0$
- **Mers aleatoriu:**  $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$ 
  - ▶ Nestaționar,  $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$
- **ACF/PACF:** instrumente cheie pentru identificarea structurii
- **Diferențierea:** transformă serii nestaționare în staționare
- **Teste rădăcină unitate:**
  - ▶ ADF ( $H_0$ : rădăcină unitate) vs KPSS ( $H_0$ : staționar)



## Formule importante

### Staționaritate Slabă

- **Momente constante:**
  - ▶  $\mathbb{E}[X_t] = \mu$  (medie constantă)
  - ▶  $\text{Var}(X_t) = \sigma^2$  (varianță constantă)
- **Autocovarianță:**  $\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h})$
- **Autocorelație:**  $\rho(h) = \gamma(h)/\gamma(0)$

### Operatorul lag

- **Lag:**  $LX_t = X_{t-1}$
- **Diferență:**  $\Delta X_t = (1 - L)X_t$

### Zgomot Alb (WN)

- **Model:**  $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$
- **ACF:**  $\rho(h) = 0$  pentru  $h \neq 0$

### Mers Aleatoriu (RW)

- **Model:**  $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$
- **Varianță:**  $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$  (crește!)



## Previzualizare capitolul următor

### Capitolul 2: Modele ARMA

- AR( $p$ ):** Modele Autoregresive
- MA( $q$ ):** Modele Medie Mobilă
- ARMA( $p, q$ ):** Modele combinate
- Identificare:** Cu ACF/PACF

### Ce Vom Învăța

- Estimare:** Parametrii modelului
- Diagnostic:** Verificarea modelului
- Prognoză:** Intervale de încredere
- Selectie:** AIC, BIC



## Întrebarea 1

### Întrebare

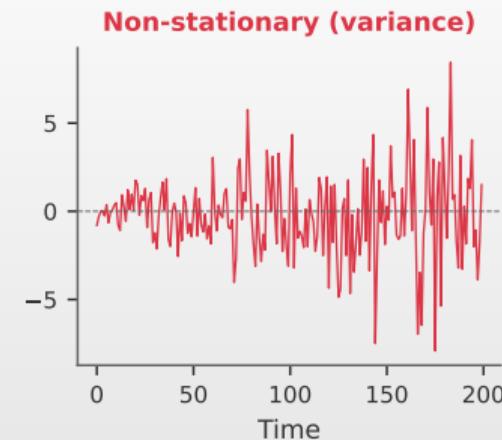
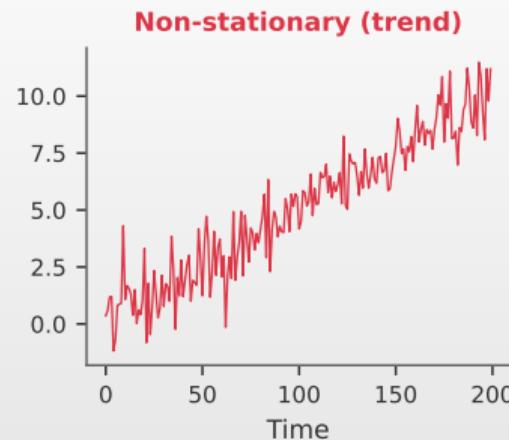
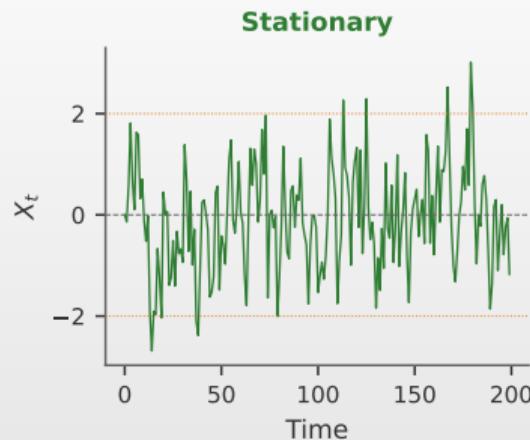
Care sunt cele trei condiții pentru staționaritatea slabă (în covarianță)?

### Variante de răspuns

- (A) Media zero, varianța infinită, covarianță dependentă de timp
- (B) Media constantă, varianța constantă, autocovarianța depinde doar de lag
- (C) Distribuție normală, independentă, varianță unitară
- (D) Trend liniar, sezonalitate constantă, reziduuri albe



## Întrebarea 1: Răspuns



Răspuns: (B)

- $\mathbb{E}[X_t] = \mu, \text{Var}(X_t) = \sigma^2, \gamma(t, s) = \gamma(|t - s|)$



## Întrebarea 2

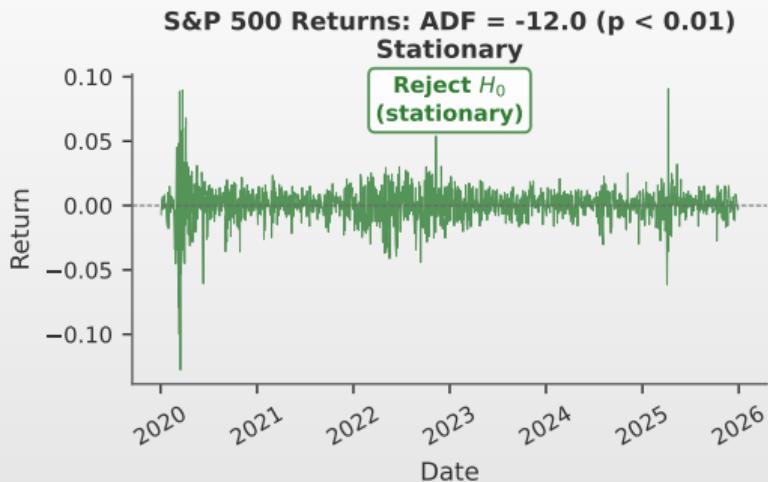
### Întrebare

Care este ipoteza nulă ( $H_0$ ) în testul ADF (Augmented Dickey-Fuller)?

### Variante de răspuns

- (A) Seria este staționară
- (B) Seria are rădăcină unitate (este nestaționară)
- (C) Seria nu are autocorelație
- (D) Seria are distribuție normală

## Întrebarea 2: Răspuns



Răspuns: (B)

- $H_0$ : rădăcină unitate;  $\tau <$  val. critică  $\succ$  staționară



## Întrebarea 3

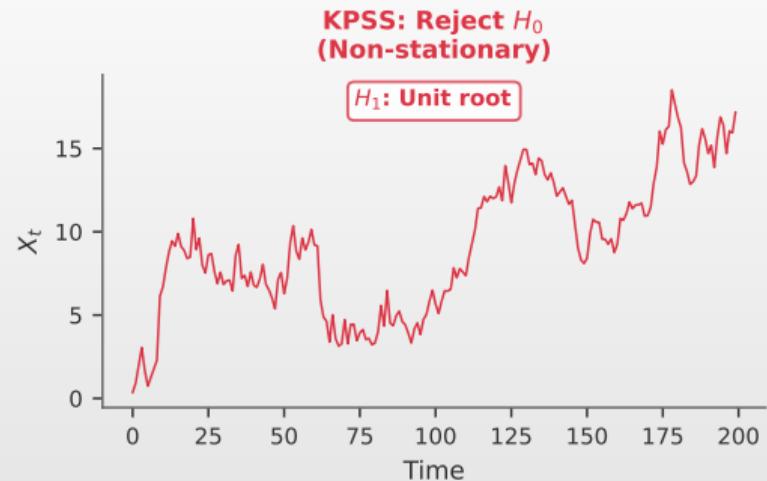
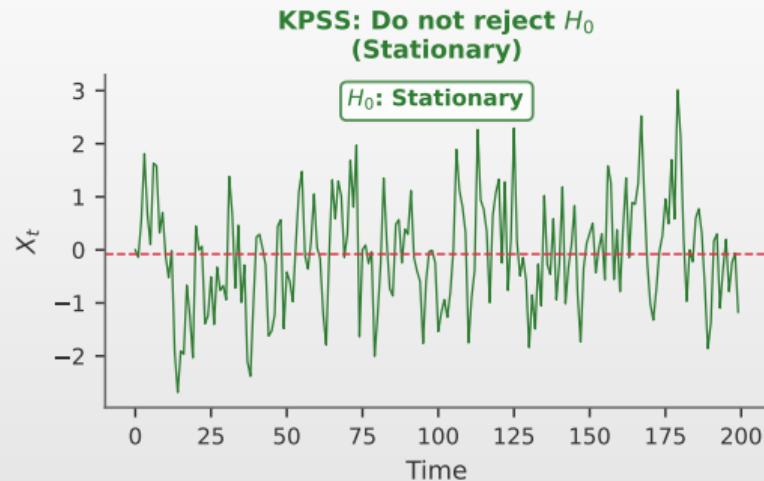
### Întrebare

Care este ipoteza nulă ( $H_0$ ) în testul KPSS?

### Variante de răspuns

- (A) Seria are rădăcină unitate (nestaționară)
- (B) Seria este staționară
- (C) Seria este un mers aleatoriu
- (D) Seria are trend determinist

### Întrebarea 3: Răspuns



Răspuns: (B)

- KPSS:  $H_0$  staționară (opus ADF). Folosiți ambele teste!



## Întrebarea 4

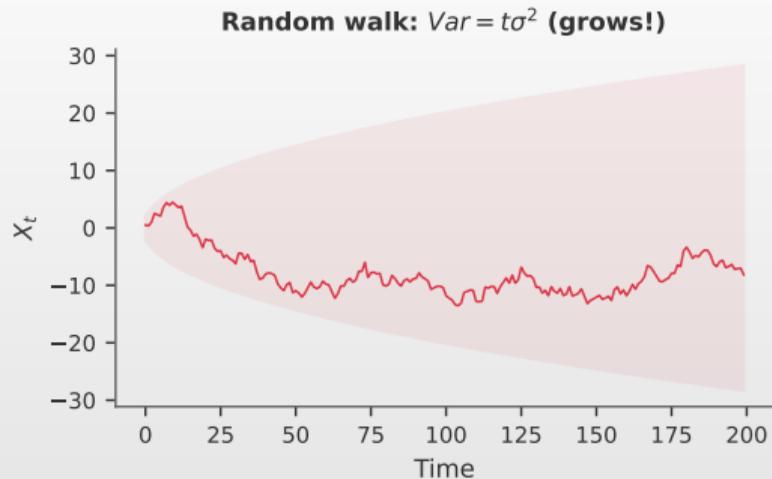
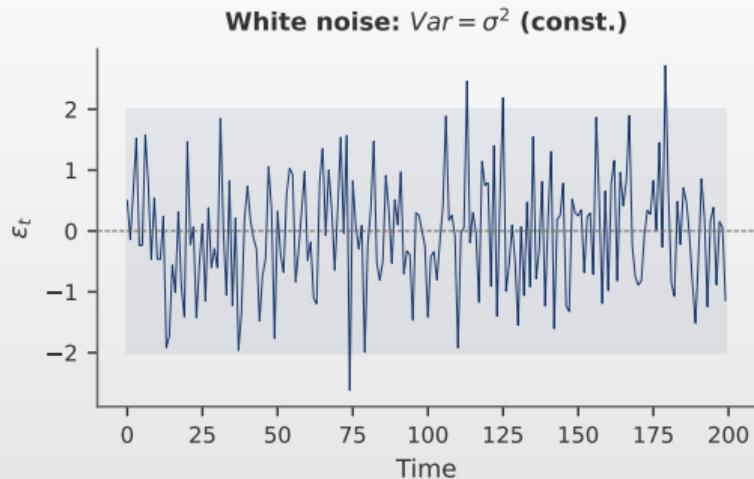
### Întrebare

Care este proprietatea cheie a varianței unui mers aleatoriu  $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$ ?

### Variante de răspuns

- (A) Varianța este constantă:  $\text{Var}(X_t) = \sigma^2$
- (B) Varianța crește liniar cu timpul:  $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$
- (C) Varianța scade cu timpul
- (D) Varianța este zero

## Întrebarea 4: Răspuns



Răspuns: (B)

- $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$  crește liniar  $\succ$  nestaționar



## Întrebarea 5

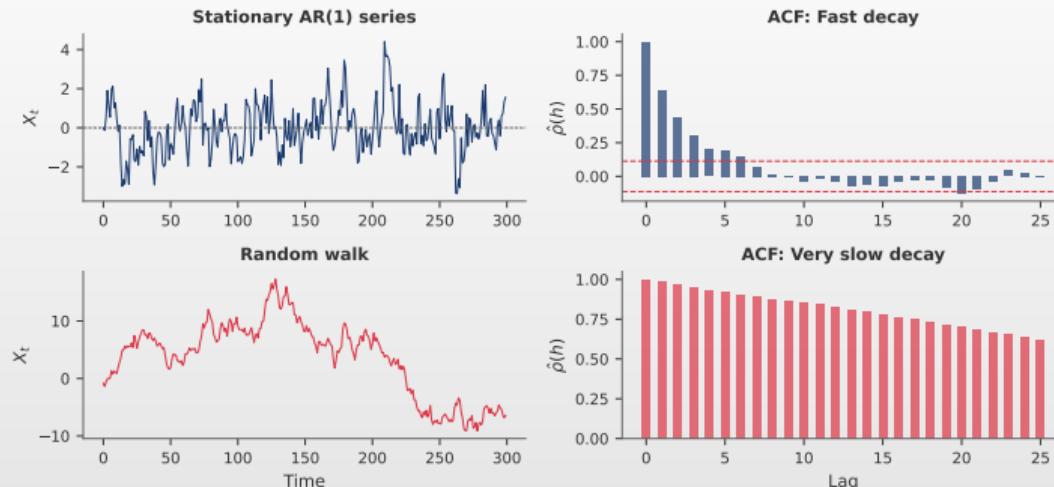
### Întrebare

Cum arată ACF-ul unui mers aleatoriu (serie nestaționară cu rădăcină unitate)?

### Variante de răspuns

- (A) Toate valorile sunt zero după lag 0
- (B) Scade exponențial rapid
- (C) Scade foarte lent (persistență înaltă)
- (D) Oscilează între pozitiv și negativ

## Întrebarea 5: Răspuns



Răspuns: (C)

- $ACF \approx 1$  pentru multe lag-uri, scădere lentă  $\succ$  test ADF



## Întrebarea 6

### Întrebare

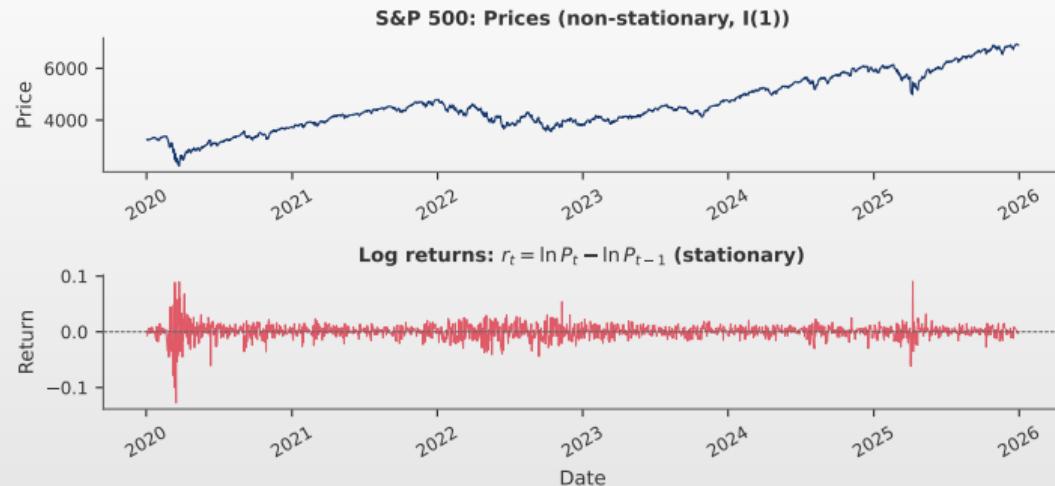
Cum obținem randamente staționare dintr-o serie de prețuri financiare  $P_t$ ?

### Variante de răspuns

- (A) Diferențiere simplă:  $\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$
- (B) Logaritmare apoi diferențiere:  $r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}$
- (C) Doar logaritmare:  $\ln P_t$
- (D) Standardizare:  $(P_t - \bar{P})/s_P$



## Întrebarea 6: Răspuns



Răspuns: (B)

- Randamente log:  $r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}$
- Mai întâi  $\ln$  (stabilizează varianța), apoi  $\Delta$  (elimină trendul)  $\succ$  serie staționară



## Bibliografie

### Manuale Fundamentale

- Hyndman & Athanasopoulos (2021). *Forecasting*, OTexts
- Shumway & Stoffer (2017). *Time Series Analysis*, Springer
- Hamilton (1994). *Time Series Analysis*, Princeton

### Resurse Online

- Quantlet:** <https://quantlet.com> > cod statistică
- Quantinar:** <https://quantinar.com> > tutoriale
- GitHub:** <https://github.com/QuantLet/TSA>

### Referințe Clasice

- Wold (1938). *Analysis of Stationary Time Series*
- Bartlett (1946). "Sampling Properties", *JRSS*



## Surse de date și software

### Date Utilizate

- S&P 500:** Yahoo Finance
  - ▶ Prețuri, randamente
- PIB România:** INS/Eurostat
  - ▶ Date trimestriale
- Cursuri valutare:** BNR

### Software

- Python:** statsmodels, pandas, matplotlib, scipy
- R:** forecast, tseries, urca
- Date:** Yahoo Finance, FRED, Eurostat



# Vă Mulțumim!

## Întrebări?

*Grafcile au fost generate folosind Python (statsmodels, matplotlib)*

Materialele cursului sunt disponibile la: <https://danpele.github.io/Time-Series-Analysis/>



Quantlet



Quantinar