



## Analiza și Prognoza seriilor de timp

Seminar 6: Modele VAR și cauzalitate Granger



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

## Cuprins Seminar

Test de Recapitulare

Întrebări Adevărat/Fals

Probleme Practice

Exemple Rezolvate

Analiză pe Date Reale

Subiecte de Discuție

Exerciții pentru Studiu Individual



## Test 1: Definiția VAR

### Întrebare

Într-un model VAR(2) cu 3 variabile, câte matrice de coeficienți  $A_i$  există?

### Variante de răspuns

- (A) 2 indent (B) 3 indent (C) 6 indent (D) 9

*Răspunsul pe slide-ul următor...*



## Test 1: Răspuns

Răspuns: A – 2 matrice de coeficienți

**Modelul VAR( $p$ ):**  $Y_t = c + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \dots + A_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$

**VAR(2) cu  $K = 3$ :**

$$\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ Y_{3t} \end{pmatrix} = c + \underbrace{A_1}_{3 \times 3} \begin{pmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \\ Y_{3,t-1} \end{pmatrix} + \underbrace{A_2}_{3 \times 3} \begin{pmatrix} Y_{1,t-2} \\ Y_{2,t-2} \\ Y_{3,t-2} \end{pmatrix} + \varepsilon_t$$

**Cheie:**  $p =$  numărul de lag-uri = numărul de matrice

## Test 2: Numărul de Parametri

### Întrebare

Un VAR(2) cu  $K = 3$  variabile (inclusiv constantele) are câți parametri de estimat per ecuație?

### Variante de răspuns

- (A) 3      indent (B) 6      indent (C) 7      indent (D) 9

*Răspunsul pe slide-ul următor...*



## Test 2: Răspuns

Răspuns: C – 7 parametri per ecuație

### VAR(p) Parameter Count: The Curse of Dimensionality

Parameters per equation:  $1 + K \times p$

Total parameters:  $K(1 + Kp) + K(K + 1)/2$

(coefficients + covariance matrix)

Model	Coefficients	Total
K=2, p=1	$2(1+2 \times 1) = 6$	+ 3 = 9
K=3, p=2	$3(1+3 \times 2) = 21$	+ 6 = 27
K=5, p=4	$5(1+5 \times 4) = 105$	+ 15 = 120
K=10, p=4	$10(1+10 \times 4) = 410$	+ 55 = 465

Warning: Parameters grow as  $K^2 \times p$  — need lots of data!

**Formula:** Per ecuație =  $1 + K \times p = 1 + 3 \times 2 = 7$ . **Total:**  $K(1 + Kp) = 3(1 + 6) = 21$  parametri

## Test 3: Cauzalitate Granger

### Întrebare

"X cauzează Granger Y" înseamnă:

### Variante de răspuns

- (A) X este cauza economică a lui Y
- (B) Trecutul lui X ajută la predicția lui Y
- (C) X și Y sunt corelate contemporan
- (D) X crește întotdeauna când Y crește

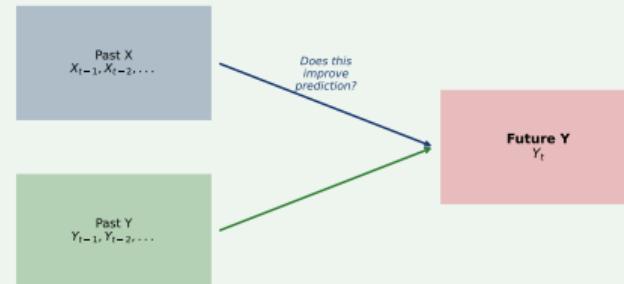
*Răspunsul pe slide-ul următor...*



## Test 3: Răspuns

Răspuns: B – Trecutul lui X ajută la predicția lui Y

**Granger Causality: Predictive, Not Causal!**



"X Granger-causes Y" means: Past X helps predict future Y, beyond what past Y alone provides. Does NOT imply true causation!

**Cheie:** Relație predictivă, NU cauzalitate adevărată!

## Test 4: Testul de Cauzalitate Granger

### Întrebare

Pentru a testa dacă  $Y_2$  cauzează Granger  $Y_1$  într-un VAR(p), testăm:

### Variante de răspuns

- (A) Toți coeficienții din ecuația lui  $Y_1$  sunt egali cu zero
- (B) Coeficienții pe  $Y_2$  întârziat din ecuația lui  $Y_1$  sunt egali cu zero
- (C) Coeficienții pe  $Y_1$  întârziat din ecuația lui  $Y_2$  sunt egali cu zero
- (D) Covarianța erorilor este egală cu zero

*Răspunsul pe slide-ul următor...*



## Test 4: Răspuns

Răspuns: B – Coeficienții pe  $Y_2$  întârziat din ecuația lui  $Y_1 = 0$

**Ipoteza nulă:**  $H_0 : a_{12}^{(1)} = a_{12}^{(2)} = \dots = a_{12}^{(p)} = 0$

**Statistica de test:** Test Wald sau F cu  $p$  restricții

**Interpretare:**

- Respingem  $H_0$ :  $Y_2$  cauzează Granger  $Y_1$
- Nu respingem: Fără evidență de relație predictivă

**Notă:** Testați  $Y_1 \rightarrow Y_2$  separat (coeficienți diferiți în ecuația lui  $Y_2$ )



## Test 5: Stabilitatea VAR

### Întrebare

Un model VAR(1) este stabil (staționar) dacă:

### Variante de răspuns

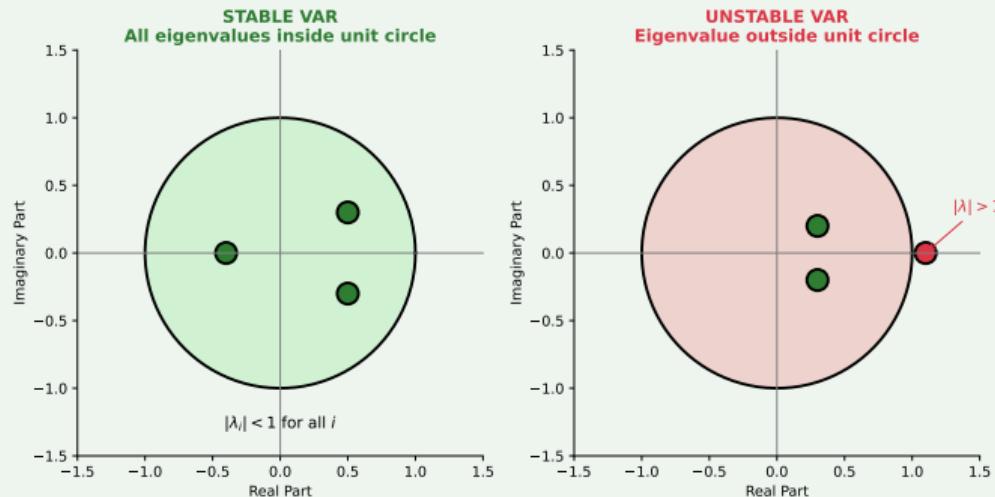
- (A) Toate elementele diagonale ale lui  $A_1$  sunt mai mici decât 1
- (B) Determinantul lui  $A_1$  este mai mic decât 1
- (C) Toate valorile proprii ale lui  $A_1$  sunt mai mici decât 1 în valoare absolută
- (D) Urma lui  $A_1$  este egală cu zero

*Răspunsul pe slide-ul următor...*



## Test 5: Răspuns

Răspuns: C – Toate valorile proprii ale lui  $A_1$  în interiorul cercului unitate



**Stabil:** Toate  $|\lambda_i| < 1$  (în interiorul cercului unitate)  $\Rightarrow$  şocurile dispar în timp

## Test 6: Funcții de Răspuns la Impuls

### Întrebare

O funcție de răspuns la impuls arată:

### Variante de răspuns

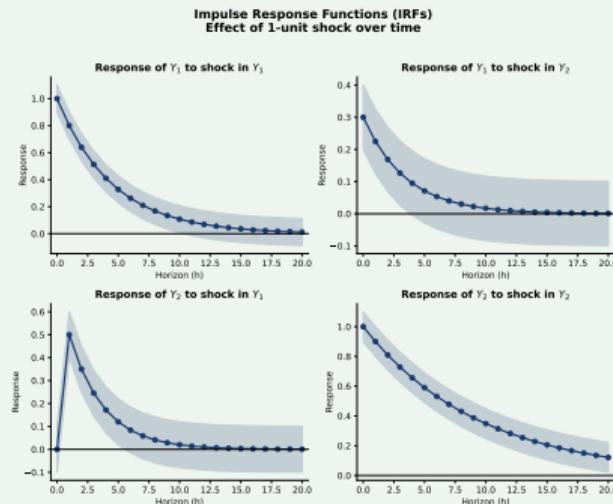
- (A) Corelația între două variabile
- (B) Efectul unui șoc la o variabilă asupra tuturor variabilelor în timp
- (C) Acuratețea prognozei modelului
- (D) Valorile-p ale testelor de coeficienti

*Răspunsul pe slide-ul următor...*



## Test 6: Răspuns

Răspuns: B – Efectul şocului asupra tuturor variabilelor în timp



$\text{IRF}_{ij}(h)$ : Răspunsul variabilei  $i$  la orizontul  $h$  la şocul în variabila  $j$



## Test 7: Selectarea Ordinului Lag

### Întrebare

Care criteriu selectează de obicei cel mai simplu model VAR?

### Variante de răspuns

- (A) AIC (Criteriul Informațional Akaike)
- (B) BIC (Criteriul Informațional Bayesian)
- (C) FPE (Eroarea Finală de Predicție)
- (D)  $R^2$  ajustat

*Răspunsul pe slide-ul următor...*



## Test 7: Răspuns

Răspuns: B – BIC (Criteriul Informațional Bayesian)

**Comparația penalizărilor:**

- AIC:  $-2 \ln L + 2k$
- BIC:  $-2 \ln L + k \ln n$

$L$  = maximul funcției de verosimilitate,  $k$  = nr. parametri,  $n$  = dimensiunea eșantionului

Deoarece  $\ln n > 2$  pentru  $n > 8$ , BIC penalizează complexitatea mai puternic

**Îndrumări practice:**

- Prognoză: AIC poate performa mai bine
- Inferență/parsimonie: BIC preferat
- Eșantioane mari: BIC consistent, AIC倾tde să supraajusteze



## Test 8: interpretarea Cauzației Granger

### Întrebare

"X cauzează Granger Y" înseamnă:

### Variante de răspuns

- (A) X este cauza adevărată a lui Y
- (B) Valorile trecute ale lui X ajută la predicția lui Y dincolo de trecutul propriu al lui Y
- (C) X și Y sunt corelate
- (D) Y depinde doar de X

*Răspunsul pe slide-ul următor...*



## Test 8: Răspuns

Răspuns: B

Cauzalitatea Granger se referă la conținutul **predictiv**, nu la cauzalitatea adevărată.  $X$  cauzează Granger  $Y$  dacă termenii lui  $X$  întârziati sunt semnificativi conjunct în ecuația lui  $Y$ , după controlul pentru  $Y$  întârziat.



## Test 9: Descompunerea varianței Erorii de Prognoză

### Întrebare

FEVD (Descompunerea varianței Erorii de Prognoză) ne spune:

### Variante de răspuns

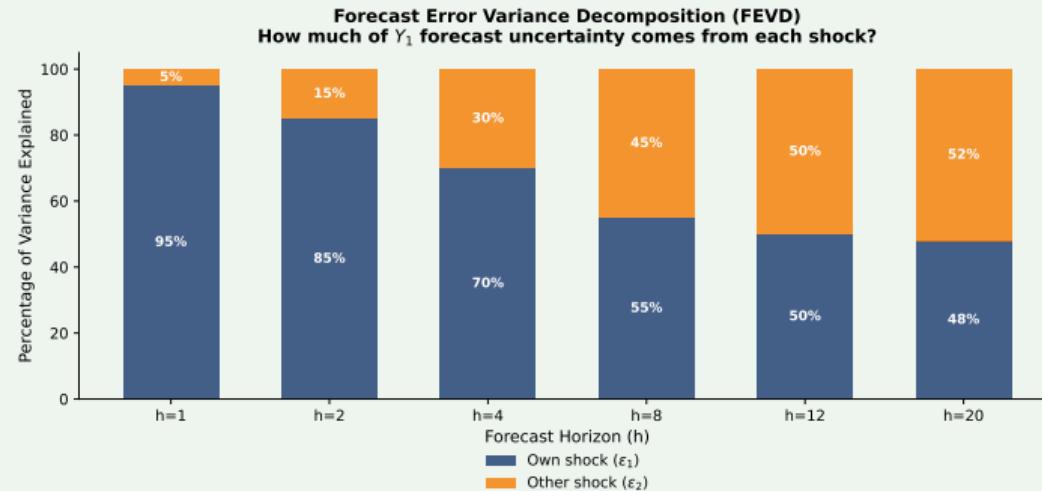
- (A) Corelația între variabile
- (B) Ce proporție din varianța erorii de prognoză vine din fiecare șoc
- (C) Orizontul optim de prognoză
- (D) Ce variabile să includem în model

*Răspunsul pe slide-ul următor...*



## Test 9: Răspuns

Răspuns: B – Proporția varianței erorii de prognoză din fiecare şoc



FEVD: Arată cât din incertitudinea prognozei vine din fiecare şoc la diferite orizonturi



## Test 10: VAR Structural vs Forma Redusă

### Întrebare

Diferența dintre VAR structural (SVAR) și VAR forma redusă este:

### Variante de răspuns

- (A) SVAR are mai multe variabile
- (B) SVAR permite efecte contemporane între variabile
- (C) SVAR folosește metode de estimare diferite
- (D) Nu există diferență

*Răspunsul pe slide-ul următor...*



## Test 10: Răspuns

Răspuns: B

VAR forma redusă: şocurile sunt corelate, fără efecte contemporane în ecuaţii. SVAR: impune restricţii de identificare pentru a recupera şouri structurale cu interpretare economică (de ex., şoc de politică monetară).



## Test 11: Descompunerea Cholesky

### Întrebare

Ordonarea Cholesky în analiza IRF presupune:

### Variante de răspuns

- (A) Toate variabilele sunt la fel de importante
- (B) Variabilele ordonate primele afectează contemporan variabilele de mai târziu, nu invers
- (C) řocurile sunt necorelate
- (D) Nu sunt necesare restricții

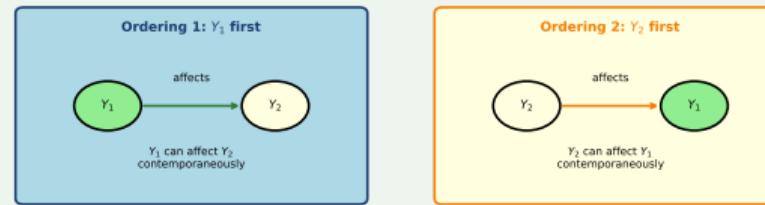
*Răspunsul pe slide-ul următor...*



## Test 11: Răspuns

Răspuns: B – Variabilele ordonate primele afectează contemporan pe cele de mai târziu

### Cholesky Ordering: Order Matters!



#### Key Points:

- Different orderings give DIFFERENT IRFs!
- Ordering should be based on economic theory
- "Fast-moving" variables should come first

**Cholesky:** Structură recursivă. Ordonarea contează – justificați prin teoria economică (cel mai exogen primul)!



## Test 12: Diagnosticele Reziduurilor VAR

### Întrebare

Într-un VAR bine specificat, reziduurile ar trebui să fie:

### Variante de răspuns

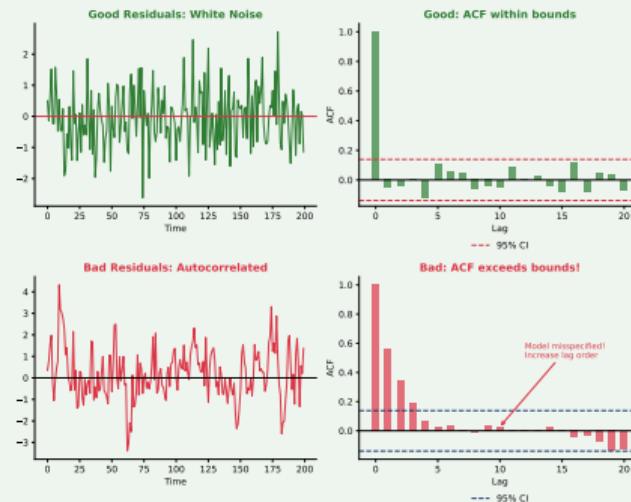
- (A) Autocorelate dar homoscedastice
- (B) Zgomot alb (fără autocorelație)
- (C) Doar distribuite normal
- (D) Corelate între ecuații

*Răspunsul pe slide-ul următor...*



## Test 12: Răspuns

Răspuns: B – Zgomot alb (fără autocorelație)



**Diagnostice:** Reziduurile ar trebui să fie zgomot alb. Folosiți testul Portmanteau/LM. Corelația între ecuații este permisă ( $\Sigma_u$ ).



## Test 13: Cointegrare și VAR

### Întrebare

Dacă variabilele sunt  $I(1)$  și cointegrate, ar trebui să folosiți:

### Variante de răspuns

- (A) VAR în niveluri
- (B) VAR în prime diferențe
- (C) Model cu Corecție a Erorilor Vectoriale (VECM)
- (D) Modele ARIMA univariate

*Răspunsul pe slide-ul următor...*



## Test 13: Răspuns

Răspuns: C

Cu cointegrare, VAR în diferențe pierde informația pe termen lung, în timp ce VAR în niveluri poate fi ineficient. VECM încorporează atât dinamica pe termen scurt cât și relațiile de echilibru pe termen lung prin termenul de corecție a erorilor.



## Test 14: Cauzalitate Instantanee

### Întrebare

Cauzalitatea instantanee diferă de cauzalitatea Granger deoarece testează:

### Variante de răspuns

- (A) Doar relații întârziate
- (B) Corelația contemporană a reziduurilor
- (C) Relații pe termen lung
- (D) Stabilitatea modelului

*Răspunsul pe slide-ul următor...*



## Test 14: Răspuns

Răspuns: B

Cauzalitatea instantanee testează dacă řocurile la  $X$  și  $Y$  sunt corelate în aceeași perioadă (corelația reziduurilor VAR). Cauzalitatea Granger testează dacă valorile *întârziate* ajută la predicție.



## Întrebări Adevărat/Fals

Determinați dacă fiecare afirmație este Adevărată sau Falsă:

1. Modelele VAR tratează toate variabilele ca endogene.
2. Cauzalitatea Granger dovedește cauzalitatea economică adevărată.
3. Un VAR stabil are întotdeauna valorile proprii în interiorul cercului unitate.
4. Rezultatele FEVD depind de ordonarea variabilelor.
5. VAR poate fi estimat prin OLS ecuație cu ecuație.
6. Răspunsurile la impuls dispar în cele din urmă într-un VAR stabil.

*Răspunsurile pe slide-ul următor...*



## Adevărat/Fals: Soluții

1. Modelele VAR tratează toate variabilele ca endogene.

ADEVĂRAT

Fiecare variabilă este regresată pe lag-urile tuturor variabilelor, inclusiv pe ea însăși.

2. Cauzalitatea Granger dovedește cauzalitatea economică adevărată.

FALS

Arată doar conținut predictiv, nu cauzalitate structurală.

3. Un VAR stabil are întotdeauna valorile proprii în interiorul cercului unitate.

ADEVĂRAT

Condiția de stabilitate: toate valorile proprii ale matricei companion satisfac  $|\lambda_i| < 1$ .

4. Rezultatele FEVD depind de ordonarea variabilelor.

ADEVĂRAT

Sub identificarea Cholesky, ordonări diferite dau rezultate diferite.

5. VAR poate fi estimat prin OLS ecuație cu ecuație.

ADEVĂRAT

Cu aceeași regresori în fiecare ecuație, OLS = GLS = ML (sub normalitate).

6. Răspunsurile la impuls dispar în cele din urmă într-un VAR stabil.

ADEVĂRAT

Stabilitatea asigură că şocurile au efecte tranzitorii; IRF  $\rightarrow 0$  când  $h \rightarrow \infty$ .



## Problema 1: Scrierea Ecuatiilor VAR

### Exercițiu

Scrieti cele două ecuații pentru un model VAR(1) bivariat cu variabilele  $Y_t$  (creșterea PIB) și  $X_t$  (inflația).

*Răspunsul pe slide-ul următor...*



## Problema 1: Soluție

### Soluție

$$Y_t = c_1 + a_{11} Y_{t-1} + a_{12} X_{t-1} + \varepsilon_{1t}$$

$$X_t = c_2 + a_{21} Y_{t-1} + a_{22} X_{t-1} + \varepsilon_{2t}$$

#### Interpretare:

- $a_{12}$ : Efectul inflației trecute asupra creșterii PIB curente
- $a_{21}$ : Efectul creșterii PIB trecute asupra inflației curente



## Problema 2: Numărarea Parametrilor

### Exercițiu

Câtă parametri totali trebuie estimați într-un VAR(3) cu  $K = 4$  variabile (inclusiv constantele)?

*Răspunsul pe slide-ul următor...*



## Problema 2: Soluție

### Soluție

Per ecuație:  $1 + K \times p = 1 + 4 \times 3 = 13$  parametri

Total pentru  $K = 4$  ecuații:  $4 \times 13 = 52$  parametri

Plus matricea de covarianță  $\Sigma$ :  $K(K + 1)/2 = 4 \times 5/2 = 10$  elemente unice

**Total general: 62 parametri**

*Acesta este motivul pentru care VAR-urile pot fi "supraparametrizate" cu date limitate!*



## Problema 3: interpretarea Cauzalității Granger

### Exercițiu

Un test de cauzalitate Granger dă:

- $H_0$ : Banii nu cauzează Granger PIB. valoare-p = 0.02
- $H_0$ : PIB nu cauzează Granger Banii. valoare-p = 0.35

Interpretați aceste rezultate.

*Răspunsul pe slide-ul următor...*



## Problema 3: Soluție

### Soluție

- Respingem  $H_0$  la 5%: Banii cauzează Granger PIB**
- Nu respingem  $H_0$ : PIB nu cauzează Granger Banii**

**Concluzie:** Cauzalitate unidirecțională: Bani → PIB

*Interpretare:* Masa monetară trecută ajută la predicția creșterii PIB. Aceasta este consistentă cu punctele de vedere monetariste, dar amintiți-vă: cauzalitate Granger  $\neq$  cauzalitate structurală!



## Problema 4: Verificarea Stabilității

### Exercițiu

Pentru VAR(1) cu  $A_1 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$ , verificați stabilitatea.

*Răspunsul pe slide-ul următor...*



## Problema 4: Soluție

### Soluție

Găsiți valorile proprii:  $\det(A_1 - \lambda I) = 0$

$$(0.7 - \lambda)(0.5 - \lambda) - (0.2)(0.1) = 0$$

$$\lambda^2 - 1.2\lambda + 0.33 = 0$$

$$\lambda = \frac{1.2 \pm \sqrt{1.44 - 1.32}}{2} = \frac{1.2 \pm 0.346}{2}$$

$$\lambda_1 = 0.773, \quad \lambda_2 = 0.427$$

Ambele  $|\lambda_i| < 1 \Rightarrow \text{Stabil!}$



## Problema 5: Calculul IRF

### Exercițiu

Pentru VAR(1) cu  $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.6 \end{pmatrix}$ , calculați  $\Phi_2$  (răspunsul la  $h = 2$ ).

*Răspunsul pe slide-ul următor...*



## Problema 5: Soluție

Soluție

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= A^2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.25 + 0 & 0.10 + 0.12 \\ 0 + 0 & 0 + 0.36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.22 \\ 0 & 0.36 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

**Interpretare:** Un șoc unitar la  $Y_2$  la  $t$  crește  $Y_1$  cu 0.22 la  $t + 2$ .



## Exemplu: Randamente de Acțiuni și Volum de Tranzacționare

### Scenariu

Date zilnice despre randamentele acțiunilor ( $R_t$ ) și volumul de tranzacționare ( $V_t$ ). Testați cauzalitatea Granger în ambele direcții.

### Constatări Tipice în Literatura Financiară

- Randamentele adesea cauzează Granger volumul (modificările de preț declanșează tranzacționare)
- Volumul uneori cauzează Granger randamentele (volumul ca indicator anticipator)
- Rezultate: Adesea cauzalitate **bidirectională**  $R \leftrightarrow V$

### Problemă Practică

Randamentele acțiunilor sunt de obicei staționare, dar volumul poate necesita transformare (log sau diferențiere).



## Exemplu: Rate de Dobândă și Inflație

### Contextul Regulii Taylor

Băncile centrale stabilesc ratele de dobândă ( $i_t$ ) ca răspuns la inflație ( $\pi_t$ ):

$$i_t = r^* + \pi^* + 1.5(\pi_t - \pi^*) + 0.5(y_t - y^*)$$

### Întrebări de Analiză VAR

- Inflația cauzează Granger ratele de dobândă? (Reacția băncii centrale)
- Ratele de dobândă cauzează Granger inflația? (Transmisia politiciei monetare)

### Rezultate Așteptate

Cauzalitate bidirecțională:  $\pi \rightarrow i$  rapid (reacția politiciei),  $i \rightarrow \pi$  întârziat (efectul politiciei)



## Analiza VAR în Python: Funcții Cheie

### Biblioteci Esențiale

```
from statsmodels.tsa.api import VAR  
from statsmodels.tsa.stattools import grangercausalitytests
```

### flux de lucru

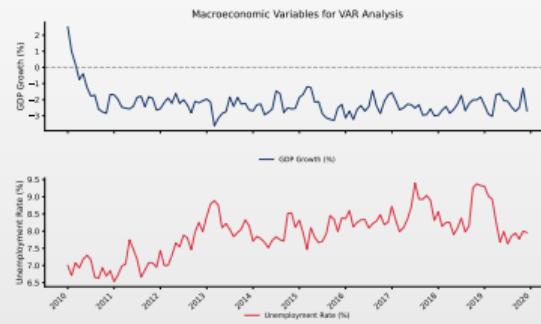
1. Creati DataFrame: data = pd.DataFrame({'pib': ... , 'somaj': ...})
2. Ajustati VAR: model = VAR(data); results = model.fit(maxlags=8, ic='aic')
3. Obtineti IRF: irf = results.irf(periods=20)
4. Obtineti FEVD: fevd = results.fevd(periods=20)
5. Teste Granger: grangercausalitytests(data[['y', 'x']], maxlag=4)

### Notă

Exemple complete de lucru sunt furnizate în notebook-urile Jupyter.



## Studiu de Caz: PIB și Șomaj

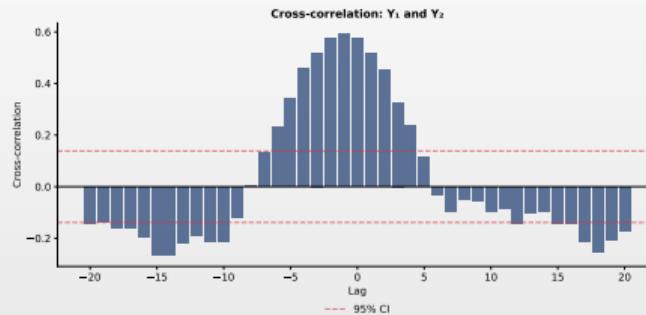


### Observații

**Sus:** Rata de creștere a PIB Real SUA (trimestrial). **Jos:** Rata șomajului SUA. Relație negativă clară (Legea lui Okun). Modelul VAR poate captura interacțiunile dinamice dintre aceste variabile.



## Analiza Corelației Încrucișate

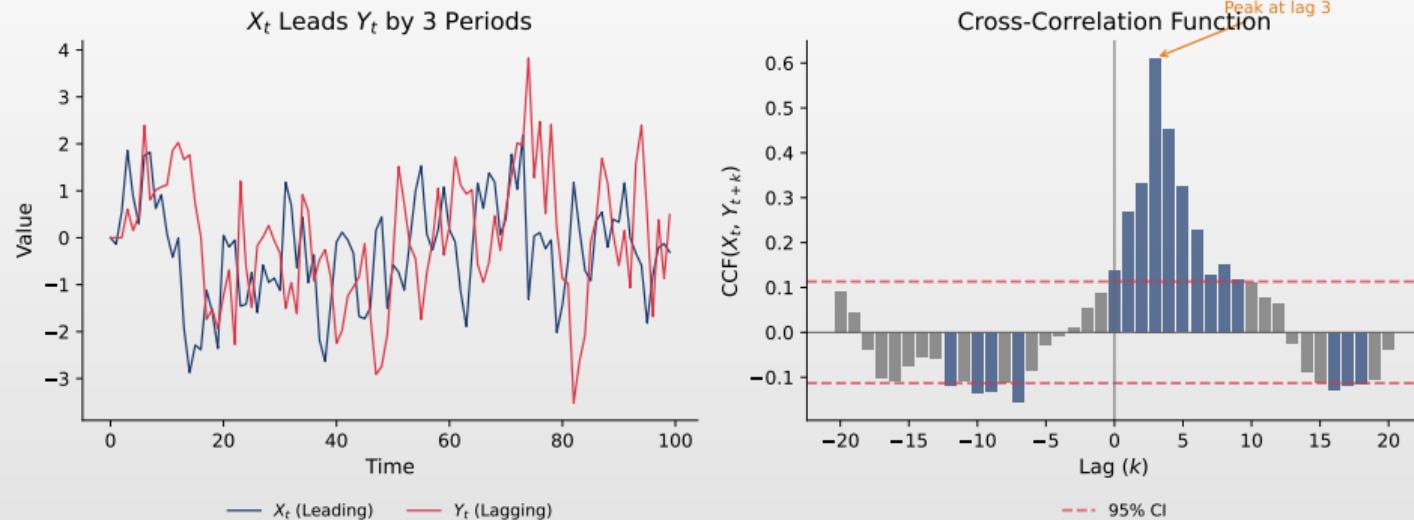


### Observații

Corelația încrucișată măsoară relațiile de anticipare-întârziere. Corelație negativă la lag 0: relație inversă contemporană. Model asimetric sugerează că șomajul răspunde la PIB cu întârziere. Ajută la informarea selectării ordinului lag VAR.



## Vizual: Funcția de Corelație Încrucișată



CCF măsoară corelația dintre două serii la lag-uri diferite, relevând relații de anticipare-întârziere.



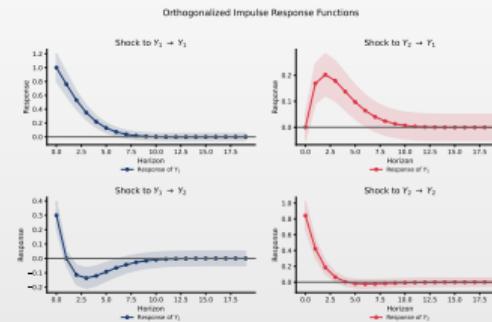
## Rezultate Estimare VAR

Model: VAR(2) pentru Creșterea PIB și Șomaj

Ecuatie	Variabilă	Coef.	Eroare Std.	t-stat
$\Delta PIB_t$	$\Delta PIB_{t-1}$	0.312	0.087	3.59
	$\Delta PIB_{t-2}$	0.145	0.082	1.77
	$U_{t-1}$	-0.421	0.156	-2.70
	$U_{t-2}$	0.198	0.148	1.34
$U_t$	$\Delta PIB_{t-1}$	-0.087	0.032	-2.72
	$\Delta PIB_{t-2}$	-0.045	0.030	-1.50
	$U_{t-1}$	1.456	0.058	25.1
	$U_{t-2}$	-0.521	0.055	-9.47



## Functii de Răspuns la Impuls

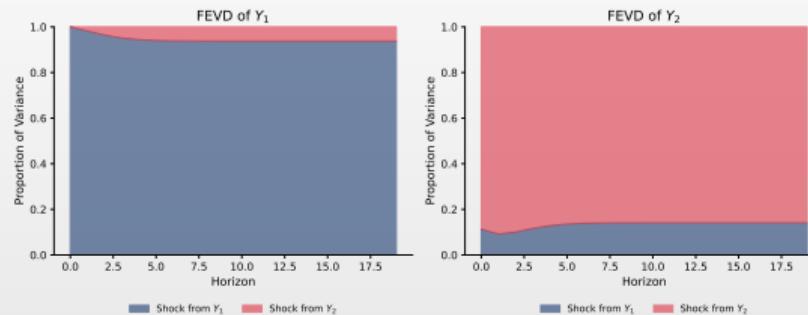


### Observații

- IRF arată răspunsul dinamic la şocuri de o unitate
- řocul PIB: efect pozitiv temporar asupra PIB, negativ asupra řomajului
- řocul řomajului: efect negativ asupra PIB, persistent asupra řomajului
- Benzile de încredere de 95% arată incertitudinea în răspunsuri



## Descompunerea varianței Erorii de Prognoză



### Observații

- FEVD arată proporția varianței explicată de fiecare șoc
- Varianța PIB: explicată în mare parte de șourile proprii, parțial de șomaj
- Varianța șomajului: foarte persistentă (șourile proprii dominante)
- Oferă perspectivă asupra importanței relative a diferitelor șouri



## Discuție: Cauzalitate Granger vs Cauzalitate Adevărată

### Întrebare Cheie

Dacă  $X$  cauzează Granger  $Y$ , înseamnă aceasta că  $X$  cauzează de fapt  $Y$ ? **NU!**

### De ce Poate Eșua Cauzalitatea Granger

- **Omiterea variabilelor:**  $Z$  ar putea cauza atât  $X$  cât și  $Y$  (de ex., vremea → înghețată & încuri)
- **Efecte de anticipare:** Piețele anticipatează evenimente viitoare (prețuri acțiuni → câștiguri)
- **Probleme de agregare:** Momentul colectării datelor contează

### Concluzie

Cauzalitatea Granger se referă la **predicție**, nu la **mecanism**. Pentru cauzalitate structurală, este nevoie de teorie + strategie de identificare.



## Discuție: Ordonarea Variabilelor în IRF

### Întrebare Cheie

De ce contează ordonarea variabilelor pentru IRF ortogonalizate?

### Descompunerea Cholesky Presupune

- Prima variabilă: Afecțează toate celelalte contemporan
- A doua variabilă: Afecțată de prima, afecțează restul
- Ultima variabilă: Afecțată de toate, nu afecțează niciuna contemporan

### Exemplu: Ordonarea VAR pentru Politică Monetară

1. Prețuri petrol (exogen) → 2. PIB (lent) → 3. Inflație → 4. Rate dobândă (rapid)

### Regulă

Ordonați de la "cel mai exogen" la "cel mai endogen" — justificați prin teoria economică!



## Exerciții pentru Acasă

1. **Teoretic:** Arătați că un VAR(1) poate fi scris ca MA( $\infty$ ):  $Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} A^i \varepsilon_{t-i}$  când este stabil.
2. **Calcul:** Pentru VAR(1) cu  $A = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$ :
  - ▶ Verificați stabilitatea; Calculați IRF pentru  $h = 0, 1, 2, 3$
  - ▶ Reprezentați grafic răspunsul lui  $Y_1$  la un soc în  $Y_2$
3. **Aplicat:** Descărcați date despre creșterea PIB SUA și șomaj:
  - ▶ Testați staționaritatea; Estimați VAR (selectați lag-ul optim)
  - ▶ Testați cauzalitatea Granger; Calculați și interpretați IRF
4. **Gândire Critică:** De ce ar putea prețurile acțiunilor să “cauzeze Granger” PIB-ul chiar dacă PIB-ul este determinat de factori reali?



## Indicii pentru Soluții

### Indicii

1. Folosiți substituția recursivă:  $Y_t = AY_{t-1} + \varepsilon_t = A(AY_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \dots$
2. Valorile proprii ale lui  $\begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$ :
  - ▶ Ecuația caracteristică:  $\lambda^2 - 1.2\lambda + 0.35 = 0$
  - ▶  $\lambda_1 \approx 0.85$ ,  $\lambda_2 \approx 0.41$  (ambele  $< 1$ , stabil)
3. Pentru PIB/Şomaj:
  - ▶ Creșterea PIB este de obicei I(0), șomajul poate fi I(1)
  - ▶ Folosiți modificările ratei șomajului dacă e necesar
  - ▶ Așteptați creștere PIB → șomaj (Legea lui Okun)
4. Prețurile acțiunilor anticipatează condițiile economice viitoare—ele reflectă așteptările despre PIB viitor, deci “anticipează” PIB-ul în date chiar dacă cauzalitatea merge în direcția opusă.



## Concluzii cheie din Acest Seminar

### Puncte Principale

1. Modelele VAR captează **interdependențele** între serii de timp multiple
2. Numărul de parametri crește rapid:  $K^2 p + K$  per sistem
3. **Cauzalitatea Granger** testează conținutul predictiv, nu cauzalitatea adevărată
4. IRF arată propagarea dinamică a șocurilor; ordonarea contează

### Puncte Practice

- Verificați întotdeauna staționaritatea înainte de a estima VAR
- Folosiți criterii informaționale (AIC/BIC) pentru selectarea lag-ului
- Raportați testele Granger în ambele direcții
- Justificați ordonarea variabilelor prin teoria economică

### Amintiți-vă

Cauzalitatea Granger se referă la **predicție**, nu la **mecanism**!



## Bibliografie I

### Manuale fundamentale

- Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*, 3rd ed., OTexts.
- Shumway, R.H., & Stoffer, D.S. (2017). *Time Series Analysis and Its Applications*, 4th ed., Springer.
- Brockwell, P.J., & Davis, R.A. (2016). *Introduction to Time Series and Forecasting*, 3rd ed., Springer.

### Serii de timp financiare

- Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*, 3rd ed., Wiley.
- Franke, J., Härdle, W.K., & Hafner, C.M. (2019). *Statistics of Financial Markets*, 4th ed., Springer.



## Bibliografie II

### Abordari moderne si Machine Learning

- Nielsen, A. (2019). *Practical Time Series Analysis*, O'Reilly Media.
- Petropoulos, F., et al. (2022). *Forecasting: Theory and Practice*, International Journal of Forecasting.
- Makridakis, S., Spiliotis, E., & Assimakopoulos, V. (2020). The M4 Competition, International Journal of Forecasting.

### Resurse online si cod

- **Quantlet:** <https://quantlet.com> — Repository de cod pentru statistica
- **Quantinar:** <https://quantinar.com> — Platforma de invatare metode cantitative
- **GitHub TSA:** <https://github.com/QuantLet/TSA> — Cod Python pentru acest seminar

