



## Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 5: Modele ARCH/GARCH pentru Volatilitate



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

## Obiective de învățare

La finalul acestui capitol, veți fi capabili să:

1. Înțelegeți **volatility clustering** și faptele stilizate ale randamentelor financiare
2. Estimați și interpretați modele **ARCH** și **GARCH**
3. Aplicați modele asimetrice (**EGARCH, GJR-GARCH**) pentru efectul de levier
4. Efectuați validarea și selectarea modelelor
5. Prognozați volatilitatea și calculați **Value at Risk (VaR)**

## Competențe practice

- Implementare Python cu pachetul arch (estimare, prognoză, diagnostic)
- Interpretarea parametrilor și a persistenței volatilității
- Calculul VaR pentru managementul riscului (backtesting și validare)



## Cuprins

### Fundamente

- Motivație
- Introducere în Modelarea Volatilității
- Modelul ARCH
- Modelul GARCH
- Modele GARCH Asimetrice
- Selectarea și Diagnosticarea modelelor

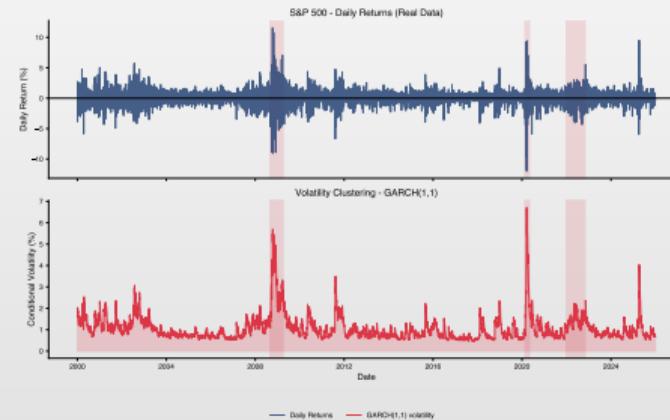
### Aplicații

- Prognoza volatilității
- Implementare în Python
- Studiu de Caz: S&P 500
- Studiu de Caz: Bitcoin
- Rezumat și Quiz



## Volatility clustering

- Perioadele de volatilitate mare sunt urmate de perioade de volatilitate mare, iar perioadele de volatilitate redusă sunt urmate de perioade de volatilitate redusă
- Acest lucru sugerează că **varianța condiționată** este predictibilă



TSA\_ch5\_clustering



## De ce modelăm volatilitatea?

### Observații empirice în seriile financiare

- Randamentele prezintă **volatility clustering** — perioadele de volatilitate ridicată sunt urmate de perioade similare
- Distribuția randamentelor are **cozi groase** (leptokurtosis)
- Corelația randamentelor  $\approx 0$ , dar corelația pătratelor este semnificativă
- Volatilitatea răspunde **asimetric** la șocuri (leverage effect)

### Limitarea modelelor ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average)

- Modelele ARIMA presupun **varianță constantă** (homoscedasticitate)
- Această ipoteză nu este realistă pentru seriile financiare.

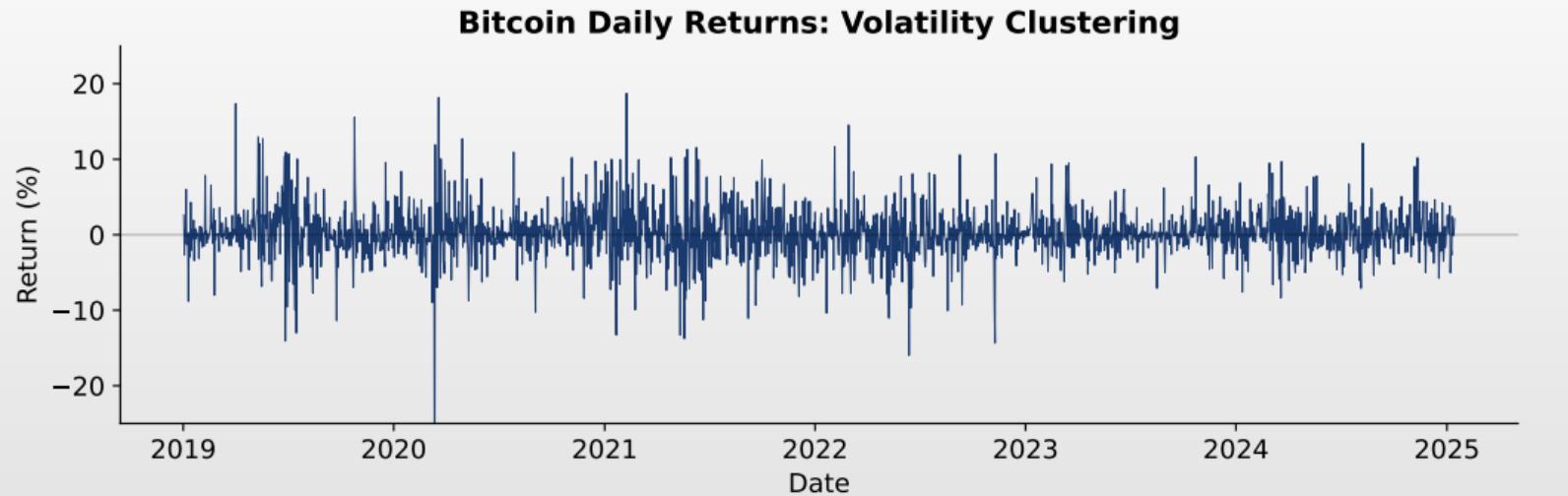


## Exemplu: Bitcoin – volatility clustering

### Observații

- Randamente zilnice Bitcoin (2019–2025): volatility clustering extrem de pronunțat
  - ▶ Randamente de  $\pm 20\%$  în perioadele de criză (COVID, Terra/Luna)
- Volatilitatea Bitcoin este semnificativ mai mare decât a activelor tradiționale
  - ▶  $\alpha$  tipic  $\approx 0.10\text{--}0.20$  (reacție rapidă la informații noi)

## Exemplu: Bitcoin – volatility clustering



Q TSA\_ch5\_btc\_returns

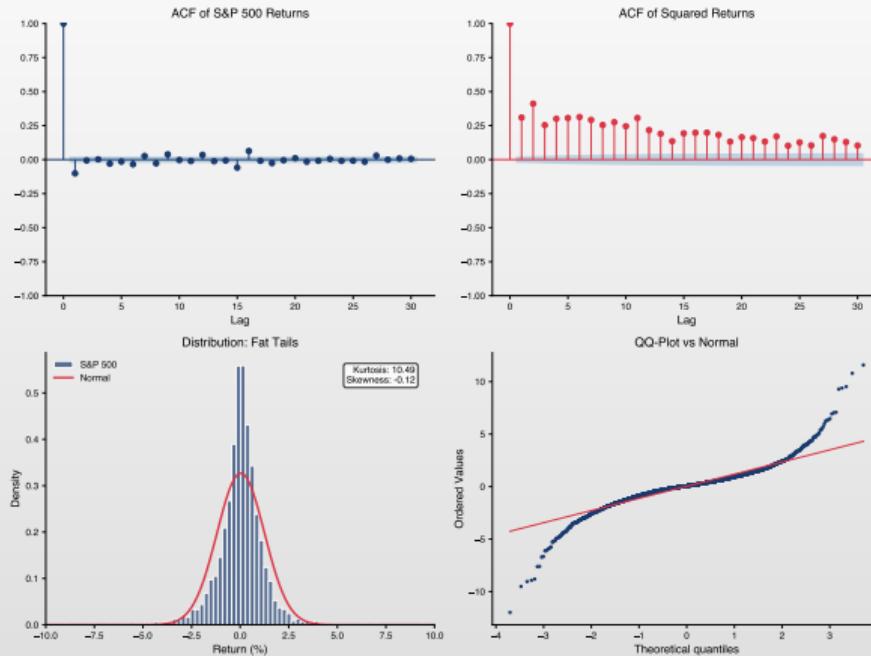
## Fapte stilizate ale randamentelor financiare

### Proprietăți observate

- **Absența autocorelației** în randamente
  - ▶  $\text{Corr}(r_t, r_{t-k}) \approx 0$  — randamentele sunt imprevizibile
- **Autocorelație** în  $r_t^2, |r_t|$ 
  - ▶  $\text{Corr}(r_t^2, r_{t-k}^2) > 0$  — volatilitatea este predictibilă
- **Cozi groase** ( $kurtosis > 3$ )
  - ▶ Mai multe valori extreme decât prevede distribuția normală
- **Leverage effect**
  - ▶ řocurile negative cresc volatilitatea mai mult decât cele pozitive
- **Volatility clustering**
  - ▶ Perioadele de volatilitate mare sunt urmate de volatilitate mare



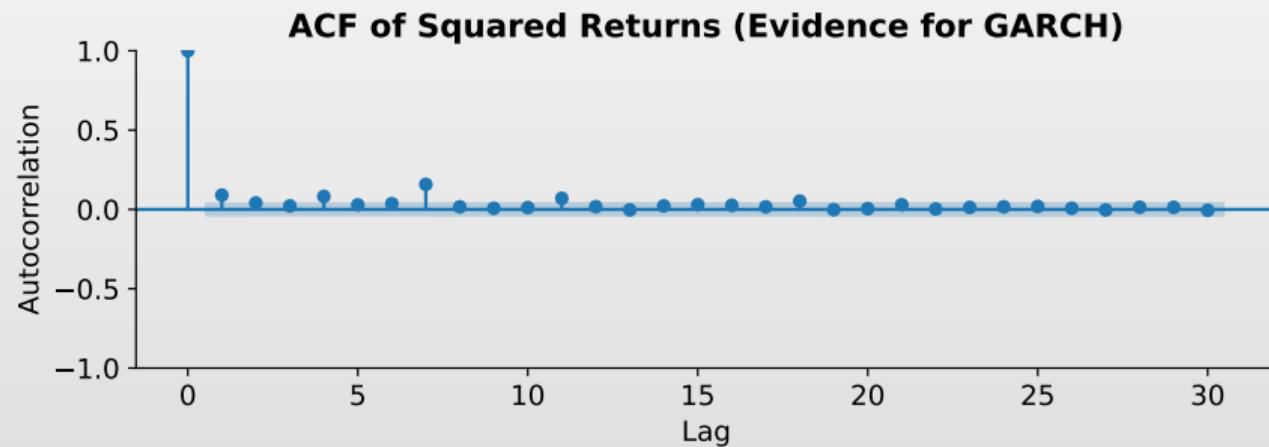
## Fapte stilizate ale randamentelor financiare



## Exemplu: Bitcoin – evidență pentru efecte ARCH

### Interpretare

- ACF( $r_t^2$ ) este semnificativ la multe lag-uri  $\Rightarrow$  efecte ARCH prezente
- Varianța condiționată este predictibilă  $\Rightarrow$  modelele GARCH sunt justificate



## Heteroscedasticitate condiționată

### Definiție 1 (Varianță Condiționată)

Pentru o serie de randamente  $\{r_t\}$ , **varianța condiționată** la momentul  $t$  este:

$\sigma_t^2 = \text{Var}(r_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}[(r_t - \mu_t)^2 | \mathcal{F}_{t-1}]$  unde  $\mathcal{F}_{t-1}$  reprezintă informația disponibilă până la momentul  $t-1$ .

### Modelul general

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \text{i.i.d.}(0, 1)$$

- $\mu_t$  = media condiționată (ARMA);  $\sigma_t^2$  = varianța condiționată (GARCH)
- $z_t$  = inovații standardizate (Normal, Student-t, GED — Generalized Error Distribution)



## Portret de cercetător: Engle & Bollerslev



Robert Engle (\*1942)

Premiul Nobel 2003

 [Wikipedia \(en\)](#)



Tim Bollerslev (\*1958)

 [Wikipedia \(en\)](#)

### Biografie

- Robert Engle**: economist american la NYU Stern. Premiul Nobel (2003) „pentru metode de analiză a seriilor economice cu volatilitate variabilă în timp (ARCH)”
- Tim Bollerslev**: economist danez-american la Duke University, doctorand al lui Engle

### Contribuții principale

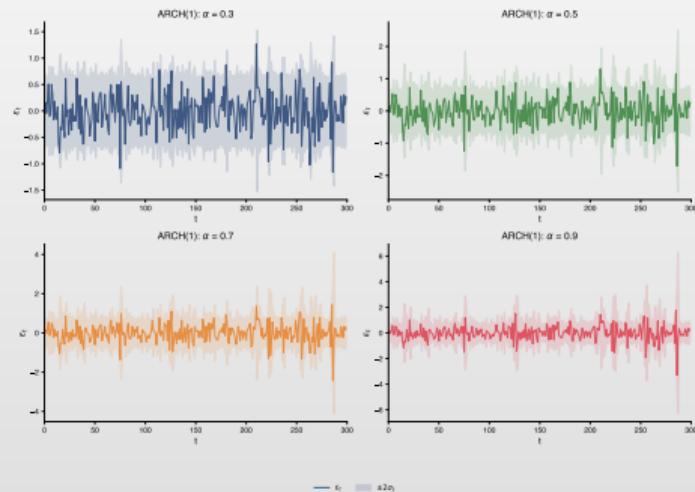
- Modelul ARCH** (Engle, 1982) — heteroscedasticitate condiționată autoregresivă
- Modelul GARCH** (Bollerslev, 1986) — ARCH generalizat cu volatilitate persistentă
- Volatilitatea realizată** și econometria de înaltă frecvență
- Fundamentul managementului modern al riscului financiar (VaR, ES)



## Simulare ARCH(1): Efectul parametrului $\alpha$

### Interpretare

- Cu cât  $\alpha$  este mai mare, cu atât volatilitatea reacționează mai puternic la șocuri recente



## Modelul ARCH(q) — Engle (1982)

### Definiție 2 (ARCH(q))

Modelul **Autoregressive Conditional Heteroskedasticity** de ordin  $q$ :

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \text{i.i.d.}(0, 1), \quad \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

### Restricții pentru staționaritate

- $\omega > 0$  (nivel de bază pozitiv),  $\alpha_i \geq 0$  (non-negativitate)
- $\sum_{i=1}^q \alpha_i < 1$  (staționaritate)

## Proprietăți ale modelului ARCH(1)

$$\text{ARCH}(1): \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

- **Varianța necondiționată:**  $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \frac{\omega}{1 - \alpha_1}$  (dacă  $\alpha_1 < 1$ )
- **Kurtosis:**  $\kappa = 3 \cdot \frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2}$  (dacă  $\alpha_1^2 < 1/3$ ; sub ipoteza  $z_t \sim N(0, 1)$ )
- Kurtosis  $> 3$  pentru  $\alpha_1 > 0 \Rightarrow$  **cozi groase!**
- **Notă:** Formula presupune inovații gaussiene ( $z_t \sim N(0, 1)$ ); sub alte distribuții (e.g., Student-*t*), kurtosisul necondiționat se modifică

### Exemplu numeric

- Dacă  $\omega = 0.0001$  și  $\alpha_1 = 0.3$ :
  - ▶ Varianța necondiționată:  $\sigma^2 = \frac{0.0001}{1-0.3} = 0.000143$
  - ▶ Kurtosis:  $\kappa = 3 \cdot \frac{1-0.09}{1-0.27} = 3.74 > 3$



## Demonstrație: varianța necondiționată ARCH(1)

Demonstrație.

Fie  $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$  cu  $z_t \sim N(0, 1)$  și  $\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$ .

**Pasul 1:** Aplicăm speranța necondiționată:

$$\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2 z_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2] \cdot \mathbb{E}[z_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2]$$

(independență:  $\sigma_t^2$  este  $\mathcal{F}_{t-1}$ -măsurabil,  $z_t \perp \mathcal{F}_{t-1}$ )

**Pasul 2:** Aplicăm speranța ecuației varianței:

$$\mathbb{E}[\sigma_t^2] = \mathbb{E}[\omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2] = \omega + \alpha_1 \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2]$$

**Pasul 3:** Prin staționaritate,  $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] = \sigma^2$ :

$$\sigma^2 = \omega + \alpha_1 \sigma^2 \Rightarrow \sigma^2(1 - \alpha_1) = \omega$$

**Rezultat:** 
$$\boxed{\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha_1}}$$
 (necesită  $\alpha_1 < 1$  pentru staționaritate)



## Demonstrație: kurtosis ARCH(1)

Pentru  $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$  cu  $z_t \sim N(0, 1)$ :

**Pasul 1:**  $\mathbb{E}[\varepsilon_t^4] = \mathbb{E}[\sigma_t^4] \cdot \mathbb{E}[z_t^4] = 3\mathbb{E}[\sigma_t^4]$  (deoarece  $\mathbb{E}[z^4] = 3$ )

**Pasul 2:** Folosind  $\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$ :

$$\mathbb{E}[\sigma_t^4] = \mathbb{E}[(\omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2)^2] = \omega^2 + 2\omega\alpha_1\sigma^2 + \alpha_1^2\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^4]$$

**Pasul 3:** Rezolvând recurența:

$$\kappa = \frac{\mathbb{E}[\varepsilon_t^4]}{(\mathbb{E}[\varepsilon_t^2])^2} = 3 \cdot \frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2}$$

### Interpretare

- $\kappa > 3$  pentru orice  $\alpha_1 > 0 \Rightarrow$  **cozi groase** (leptokurtosis)
- Necesită  $\alpha_1 < 1/\sqrt{3} \approx 0.577$  pentru moment de ordin 4 finit
- ARCH generează în mod natural distribuții cu cozi groase.

## Teorie vs empirică: decalajul kurtosis

Kurtosis ARCH(1): prea mică.

- Pentru randamente tipice de acțiuni:  $\alpha_1 \approx 0.09$  (S&P 500)
- Kurtosis teoretică:  $\kappa = 3 \cdot \frac{1-0.09^2}{1-3 \times 0.09^2} \approx 3.05$ ; kurtosis empirică S&P 500:  $\kappa \approx 13.8$

### Decalajul kurtosis

$$\begin{array}{ccc} 3.05 & \ll & 13.8 \\ \text{ARCH(1)-Normal} & & \text{Empiric} \end{array}$$

- ARCH(1) cu inovații gaussiene nu poate reproduce kurtosis-ul extrem observat în datele financiare

### Soluții

- Inovații Student- $t$ :  $z_t \sim t_\nu$  adaugă kurtosis din distribuția însăși
- GARCH(1,1): persistența ( $\beta > 0$ ) generează kurtosis suplimentar
- Ambele combinate: Student- $t$  GARCH capturează  $\kappa \gg 3$  observat în practică



## Testarea efectelor ARCH

### Testul Engle pentru efecte ARCH

**Procedură:**

1. Estimează modelul pentru medie și obține reziduurile  $\hat{\varepsilon}_t$
2. Calculează  $\hat{\varepsilon}_t^2$
3. Regrezează  $\hat{\varepsilon}_t^2$  pe lag-urile sale:

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \cdots + \beta_q \hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + u_t$$

4. Calculează statistica  $LM = T \cdot R^2 \sim \chi^2(q)$

### Ipoteze

- $H_0$ : Nu există efecte ARCH ( $\alpha_1 = \cdots = \alpha_q = 0$ )
- $H_1$ : Există efecte ARCH (cel puțin un  $\alpha_i \neq 0$ )



## Limitări ale modelului ARCH

### Probleme practice

1. **Ordin mare** — de obicei sunt necesare multe lag-uri ( $q$  mare)
2. **Mulți parametri** — dificultăți de estimare
3. **Restricții de non-negativitate** — greu de impus pentru  $q$  mare
4. **Nu capturează persistența** — volatilitatea observată este foarte persistentă

### Soluția

- Modelul GARCH** — introduce lag-uri ale varianței condiționate pentru a captura persistența cu mai puțini parametri.



## Modelul GARCH(1,1)

Cel mai popular model de volatilitate

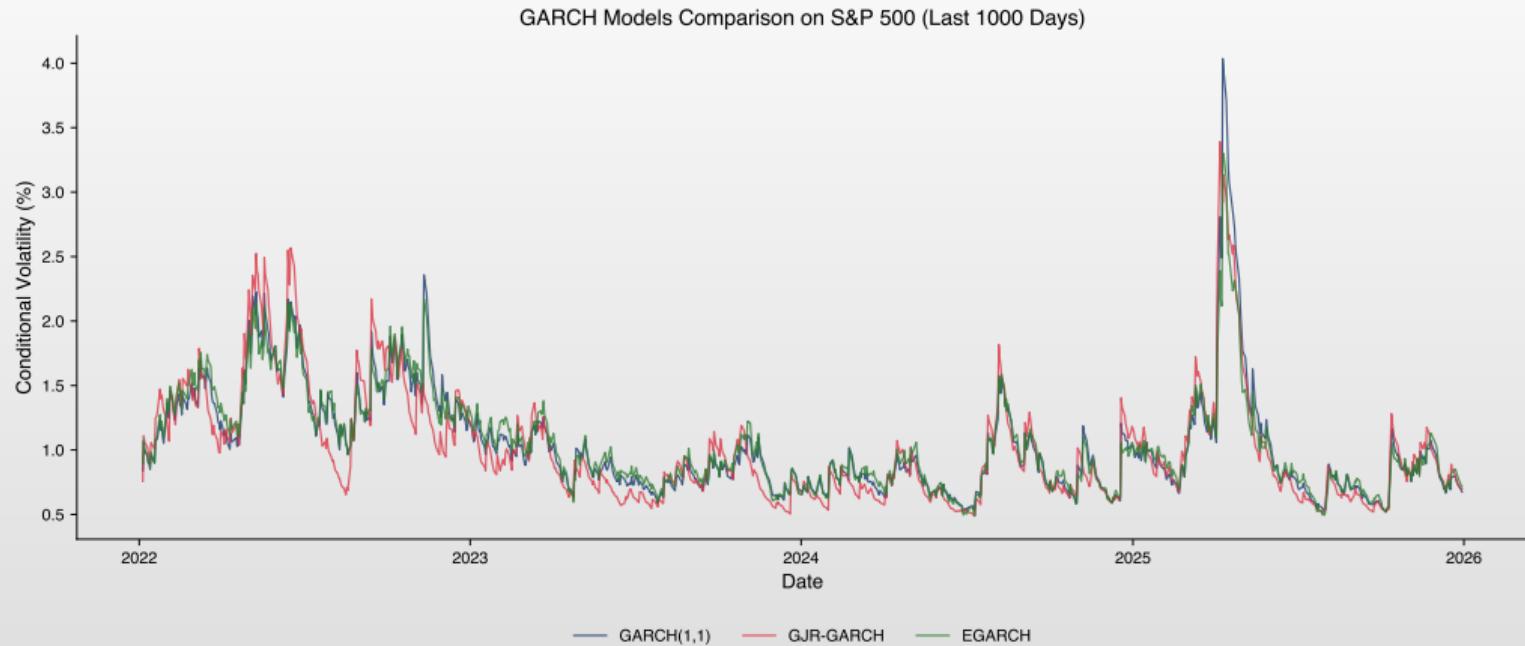
- $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$

Restricții și proprietăți

- $\omega > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0; \quad \alpha + \beta < 1$  (staționaritate)
- $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}; \quad \text{Half-life: } HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha+\beta)}$



## Modelul GARCH(1,1)



## Modelul GARCH(p,q) — Bollerslev (1986)

### Definiție 3 (GARCH(p,q))

Modelul **Generalized ARCH**:

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \text{i.i.d.}(0, 1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

### Interpretare

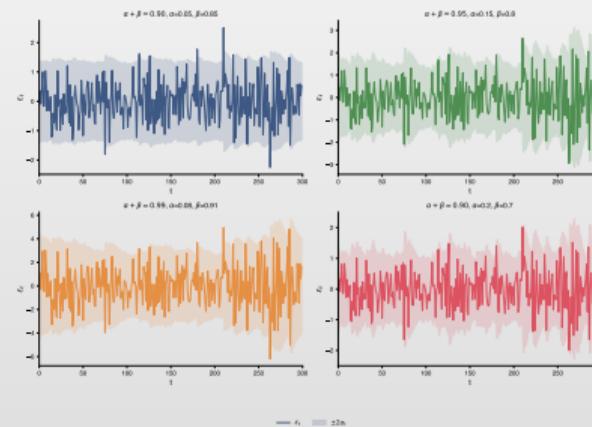
- $\omega$  = nivel de bază al volatilității
- $\alpha_i$  = reacția la șocuri recente (coeficienți de impact)
- $\beta_j$  = persistența volatilității (memorie)
- $\alpha + \beta$  = persistența totală



## Simulare GARCH(1,1): efectul persistenței

### Interpretare

- $\alpha$  controlează reacția la șocuri
- $\beta$  controlează persistența
- Suma  $\alpha + \beta$  determină viteza de revenire la medie



## Demonstrație: varianța necondiționată GARCH(1,1)

### Demonstrație.

Pentru  $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$ :

**Pasul 1:** Aplicăm speranța necondiționată:  $\mathbb{E}[\sigma_t^2] = \omega + \alpha\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] + \beta\mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2]$

**Pasul 2:** Prin staționaritate,  $\mathbb{E}[\sigma_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2] = \bar{\sigma}^2$  și  $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \bar{\sigma}^2$ :  $\bar{\sigma}^2 = \omega + (\alpha + \beta)\bar{\sigma}^2$

**Pasul 3:** Rezolvăm:  $\bar{\sigma}^2(1 - \alpha - \beta) = \omega \Rightarrow \boxed{\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}}$

□

### Condiție de staționaritate

- ☐ Necesită  $\alpha + \beta < 1$  pentru varianță necondiționată finită

## GARCH(1,1) ca ARMA pentru $\varepsilon_t^2$

### Reprezentare ARMA(1,1)

- Definim  $\nu_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$  (șocul varianței). Atunci:

$$\varepsilon_t^2 = \omega + (\alpha + \beta)\varepsilon_{t-1}^2 + \nu_t - \beta\nu_{t-1}$$

- Aceasta este un **ARMA(1,1)** pentru  $\varepsilon_t^2$ .

### Implicații

- ACF al  $\varepsilon_t^2$  decinde exponențial (ca ARMA)
- Persistența este dată de  $\alpha + \beta$
- PACF poate ajuta la identificarea ordinului



## Demonstrație: Reprezentarea ARMA a GARCH(1,1)

### Demonstrație.

**Pasul 1:** Definim şocul varianței:  $\nu_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$

- $\mathbb{E}[\nu_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}[\varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] - \sigma_t^2 = \sigma_t^2 - \sigma_t^2 = 0$
- $\nu_t$  este o secvență diferență de martingal

**Pasul 2:** Înlocuim  $\sigma_t^2 = \varepsilon_t^2 - \nu_t$  în ecuația GARCH:

$$\varepsilon_t^2 - \nu_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta(\varepsilon_{t-1}^2 - \nu_{t-1})$$

**Pasul 3:** Rearanjăm:

$$\varepsilon_t^2 = \omega + (\alpha + \beta)\varepsilon_{t-1}^2 + \nu_t - \beta\nu_{t-1}$$

**Rezultat:** ARMA(1,1) cu coeficient AR  $\phi = \alpha + \beta$  și coeficient MA  $\theta = -\beta$ .



## Demonstrație: persistența volatilității și half-life

### Prognosă multi-pas GARCH(1,1)

- $\mathbb{E}_t[\sigma_{t+h}^2] = \bar{\sigma}^2 + (\alpha + \beta)^{h-1}(\sigma_{t+1}^2 - \bar{\sigma}^2)$

### Demonstrație

- **Pasul 1:** Notăm  $\phi = \alpha + \beta$  și  $q_t = \sigma_t^2 - \bar{\sigma}^2$  (deviația de la medie)
- **Pasul 2:** Din ecuația GARCH:  $\mathbb{E}_t[q_{t+1}] = \phi \cdot q_t$ , deci  $\mathbb{E}_t[q_{t+h}] = \phi^h \cdot q_t$
- **Pasul 3:** Half-life = timpul până când deviația se înjumătățește:  
$$\phi^{HL} = 0.5 \Rightarrow HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\phi)} = \frac{-0.693}{\ln(\alpha+\beta)}$$

### Exemplu: S&P 500

- Cu  $\alpha + \beta = 0.988$ :  $HL = \frac{-0.693}{-0.012} \approx 58$  zile (șocurile persistă ~3 luni!)



## Estimarea modelelor GARCH

Metoda verosimilității maxime (MLE — Maximum Likelihood Estimation)

- Log-verosimilitate (normală):  $\ell(\theta) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[ \ln(\sigma_t^2) + \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} \right]$

Distribuții alternative pentru  $z_t$

- **Student-t**: capturează cozile groase — cea mai frecventă alegere
- **GED**: flexibilitate pentru kurtosis
- **Skewed Student-t**: asimetrie și cozi groase

Notă practică

- Distribuția Student-t oferă de regulă o potrivire mai bună pentru randamentele financiare datorită cozilor groase ( $kurtosis > 3$ )



## Quasi-MLE și robustețe

Ce se întâmplă dacă distribuția este greșit specificată?

- MLE standard presupune  $z_t \sim N(0, 1)$ , dar distribuția reală poate differi
- **QMLE**: maximizează log-verosimilitatea gaussiană chiar dacă  $z_t$  nu este normal; necesită doar ca *primele două momente condiționate* să fie corecte

Definiție 4 (Consistența QMLE — Bollerslev & Wooldridge (1992))

- Dacă media și varianța condiționate sunt corect specificate, QMLE este **consistent** pentru  $(\omega, \alpha, \beta)$  indiferent de distribuția reală a lui  $z_t$

Erori standard sandwich (robuste)

- Corecție:  $\hat{V}_{\text{robust}} = \hat{A}^{-1} \hat{B} \hat{A}^{-1}$  (White, 1982); în Python: SE robuste implicit

QMLE vs MLE complet

- **QMLE**: implicit robust — consistent chiar sub specificare greșită
- **MLE complet** (Student-*t*): mai eficient dacă distribuția este corectă



## Provocări practice în estimare

### Probleme frecvente

- Eșec de convergență:** log-verosimilitatea este non-convexă; optimizatorul se poate bloca
- Soluții la frontieră:**  $\hat{\alpha} \approx 0$  sau  $\hat{\alpha} + \hat{\beta} \approx 1$  (aproape IGARCH — Integrated GARCH)
- Sensibilitate la valori inițiale:** inițializări diferite  $\Rightarrow$  estimări diferite

### Bune practici

1. Încercați mai mulți optimizatori: **BFGS** (rapid, bazat pe gradient) vs **Nelder-Mead** (fără derive)
2. Inițializați  $\sigma_0^2$  cu varianța eșantionului (backcast)
3. Verificați  $\alpha + \beta < 1$  post-estimare; dacă  $\approx 1$ , considerați IGARCH sau schimbare de regim
4. Comparați rezultatele între valori inițiale; estimări consistente  $\Rightarrow$  model fiabil

### Regulă practică

- Dacă BFGS și Nelder-Mead dau estimări *diferite* ale parametrilor, modelul poate fi greșit specificat sau datele insuficiente



## Valori tipice pentru GARCH(1,1)

Serie	$\alpha$	$\beta$	$\alpha + \beta$
S&P 500 zilnic	0.05–0.10	0.85–0.95	0.95–0.99
EUR/USD zilnic	0.03–0.08	0.90–0.95	0.95–0.99
Bitcoin zilnic	0.10–0.20	0.75–0.85	0.90–0.98
Obligațiuni	0.02–0.05	0.90–0.97	0.95–0.99

### Observații

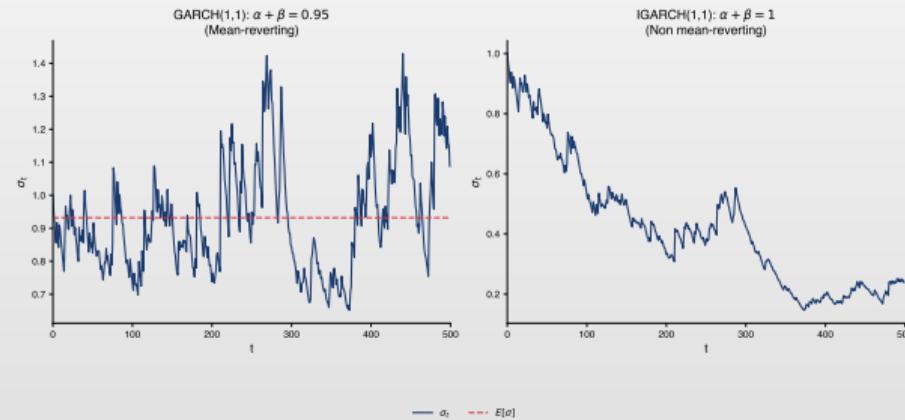
- $\alpha + \beta$  aproape de 1  $\Rightarrow$  volatilitate foarte persistentă
- $\alpha$  mic,  $\beta$  mare  $\Rightarrow$  reacție lentă la șocuri, memorie lungă
- Bitcoin:  $\alpha$  mai mare  $\Rightarrow$  reacție mai rapidă la informații noi



## GARCH vs IGARCH: comparație persistență

### Interpretare

- GARCH standard revine la media necondiționată
- IGARCH nu are medie finită  $\Rightarrow$  řocurile persistă indefinit



Q TSA\_ch5\_igarch



## IGARCH — integrated GARCH

Q TSA\_ch5\_igarch

### Definiție 5 (IGARCH(1,1))

Când  $\alpha + \beta = 1$ :

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + (1 - \alpha) \sigma_{t-1}^2$$

### Proprietăți

- Varianța necondiționată nu există (infinită) (dar procesul rămâne strict staționar, cf. Nelson, 1990)
- řocurile au efect **permanent** asupra volatilității
- Folosit pentru serii cu persistență extremă
- Util pentru **RiskMetrics** (J.P. Morgan):  $\alpha = 0.06$ ,  $\beta = 0.94$

### Observație 1

- IGARCH este analog cu o rădăcină unitară în varianță.



## Teorema lui Nelson (1990): Staționaritate strictă IGARCH

[TSA\\_ch5\\_nelson\\_theorem](#)

### Teoremă 1 (Nelson, 1990)

Fie procesul IGARCH(1,1):  $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ ,  $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + (1 - \alpha) \sigma_{t-1}^2$ ,  $z_t$  i.i.d.,  $\mathbb{E}[z_t^2] = 1$ . Dacă  $\omega > 0$  și  $\mathbb{E}[\ln(\alpha z_t^2 + (1 - \alpha))] < 0$ , atunci procesul  $\{\varepsilon_t\}$  este strict staționar și ergodic, deși varianța necondiționată este infinită.

### Condiția Lyapunov

- Condiția  $\mathbb{E}[\ln(\alpha z_t^2 + (1 - \alpha))] < 0$  este echivalentă cu **exponentul Lyapunov de vârf negativ**
- Se verifică pentru distribuții standard ( $z_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , t-Student) când  $\alpha \in (0, 1)$
- Interpretare: log-volatilitatea  $\ln \sigma_t^2$  are o tendință medie de contracție

### Schiță de demonstrație

- Se rescrie  $\sigma_t^2$  ca recurență stocastică:  $Y_t = A_t Y_{t-1} + B_t$ , unde  $A_t = \alpha z_{t-1}^2 + (1 - \alpha)$ ,  $B_t = \omega$
- Se aplică teorema Bougerol & Picard (1992): dacă  $\mathbb{E}[\ln A_t] < 0$  și  $\mathbb{E}[\ln^+ B_t] < \infty$ , seria  $Y_t$  converge în distribuție

## IGARCH: Staționaritate strictă vs. staționaritate în covarianță

 TSA\_ch5\_igarch

### Contrast fundamental

Proprietate	GARCH ( $\alpha + \beta < 1$ )	IGARCH ( $\alpha + \beta = 1$ )
Strict staționar	Da	Da (Nelson, 1990)
Staționar în covarianță	Da	Nu ( $\text{Var}[\varepsilon_t] = \infty$ )
Varianță necondiționată	$\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$	Nu există (infinită)
Persistența șocurilor	Geometrică (se estompează)	Permanentă

### Implicație practică

- IGARCH este un **model valid**, în ciuda rădăcinii unitare în varianță
- Prognoza varianței condiționate:  $\mathbb{E}_t[\sigma_{t+h}^2] = \sigma_t^2 + h\omega$  (creștere liniară)
- Nu implică explozie a procesului:  $\varepsilon_t$  rămâne bine definit

### Observație 2

Distincția strict staționar / staționar în covarianță este analogă cu procesele cu cozi grele: un proces poate avea distribuția marginală bine definită fără a avea momente finite de ordin superior.



## Schimbări de regim în volatilitate

### Problemă

- GARCH presupune un **singur regim** cu parametri constanți
- Volatilitatea prezintă adesea **rupturi structurale** (ex. criza 2008, COVID-19)

### Definiție 6 (GARCH cu schimbare de regim Markov)

Parametrii  $(\omega, \alpha, \beta)$  comută între  $K$  regimuri guvernate de un lanț Markov ascuns:

$$\sigma_t^2 = \omega_{s_t} + \alpha_{s_t} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_{s_t} \sigma_{t-1}^2, \quad s_t \in \{1, \dots, K\}$$

### Testul ICSS (Iterated Cumulative Sums of Squares) — Inclán-Tiao

- Detectează **puncte de schimbare multiple** în varianța necondiționată (tip CUSUM)
- Rezultate tipice: S&P 500 arată rupturi la 2001, 2008, 2020

### Implicații practice

- Dacă rupturile sunt prezente, persistența GARCH  $(\alpha + \beta)$  este **distorsionată în sus**  $\Rightarrow$  IGARCH fals
- Soluție: estimare GARCH separată per regim, ferestre rulante, sau GARCH Markov ( $K = 2$ )



## Leverage effect

### Definiție

- **Leverage effect:** řocurile negative cresc volatilitatea **mai mult** decât cele pozitive de aceeași magnitudine

### Problema GARCH standard

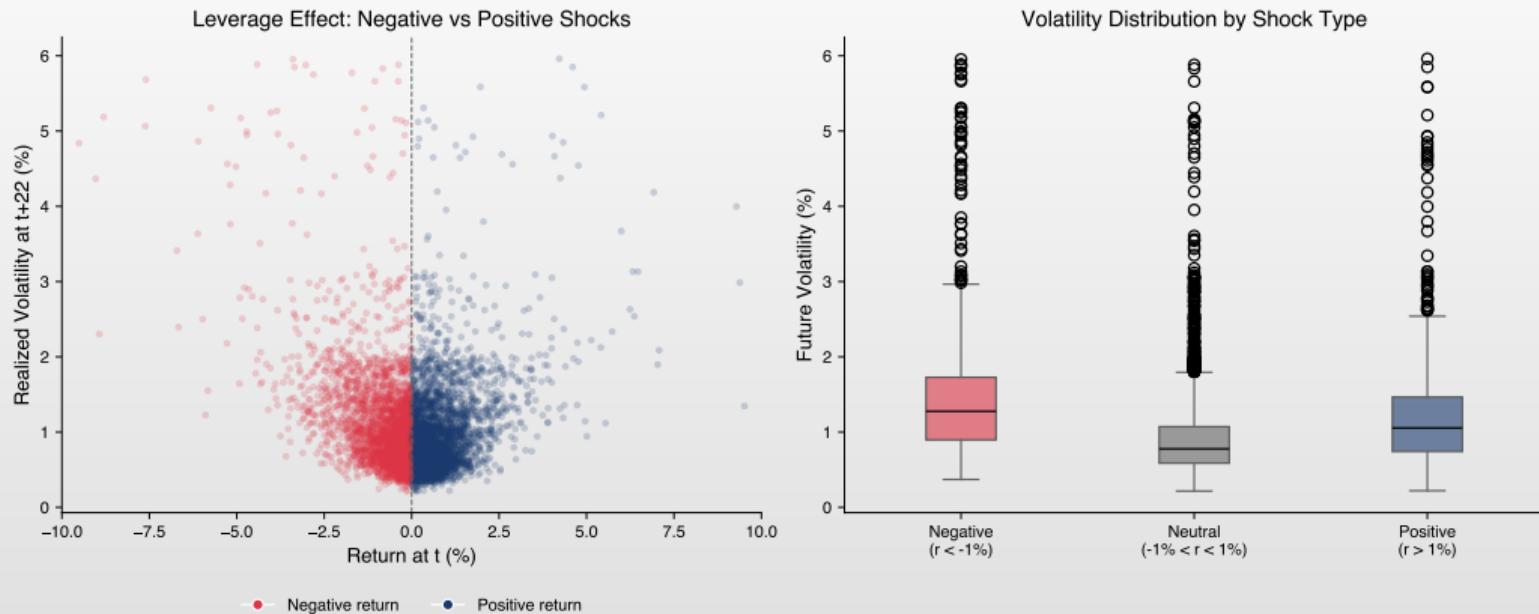
- GARCH standard:  $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$  — doar  $\varepsilon_{t-1}^2$  contează, semnul se pierde.
- Intuiție economică: Semnale negative de piață  $\Rightarrow$  prețul scade  $\Rightarrow$  levierul crește  $\Rightarrow$  volatilitatea crește

### Evidență empirică

- Black (1976): prima documentare a efectului de levier pe piața de acțiuni
- Efectul este asimetric: căderi de 5% cresc volatilitatea mai mult decât creșteri de 5%
- Soluții: EGARCH, GJR-GARCH, TGARCH (Threshold GARCH) — modele care disting semnul řocului



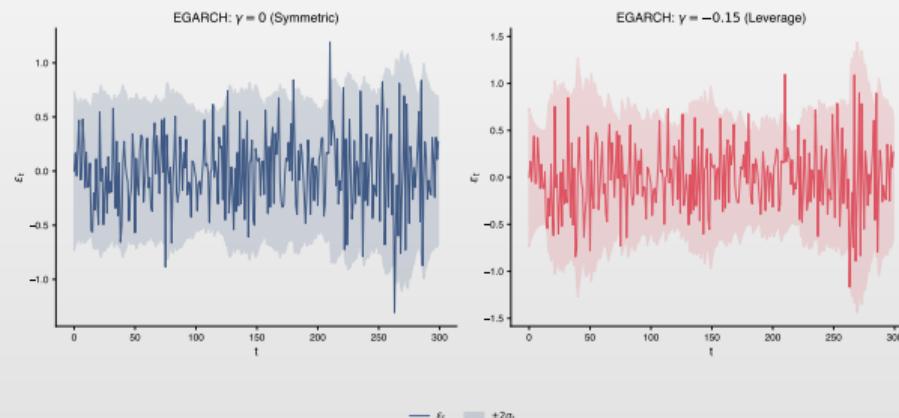
## Leverage effect



## Simulare EGARCH: Efect simetric vs asimetric

### Interpretare

- Când  $\gamma < 0$ , şocurile negative cresc volatilitatea mai mult decât cele pozitive



Q TSA\_ch5\_egarch\_sim

## Modelul EGARCH — Nelson (1991)

### Definiție 7 (EGARCH(1,1))

Exponential GARCH:

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \alpha(|z_{t-1}| - \mathbb{E}[|z_{t-1}|]) + \gamma z_{t-1} + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2)$$

unde  $z_t = \varepsilon_t / \sigma_t$ .

### Avantaje EGARCH

- Nu necesită restricții de non-negativitate — modelează  $\ln(\sigma_t^2)$
- Captează leverage effect prin parametrul  $\gamma$ 
  - ▶  $\gamma < 0$ : şocuri negative  $\Rightarrow$  volatilitate mai mare
  - ▶  $\gamma = 0$ : efect simetric (ca GARCH)
- Persistența este dată de  $\beta$



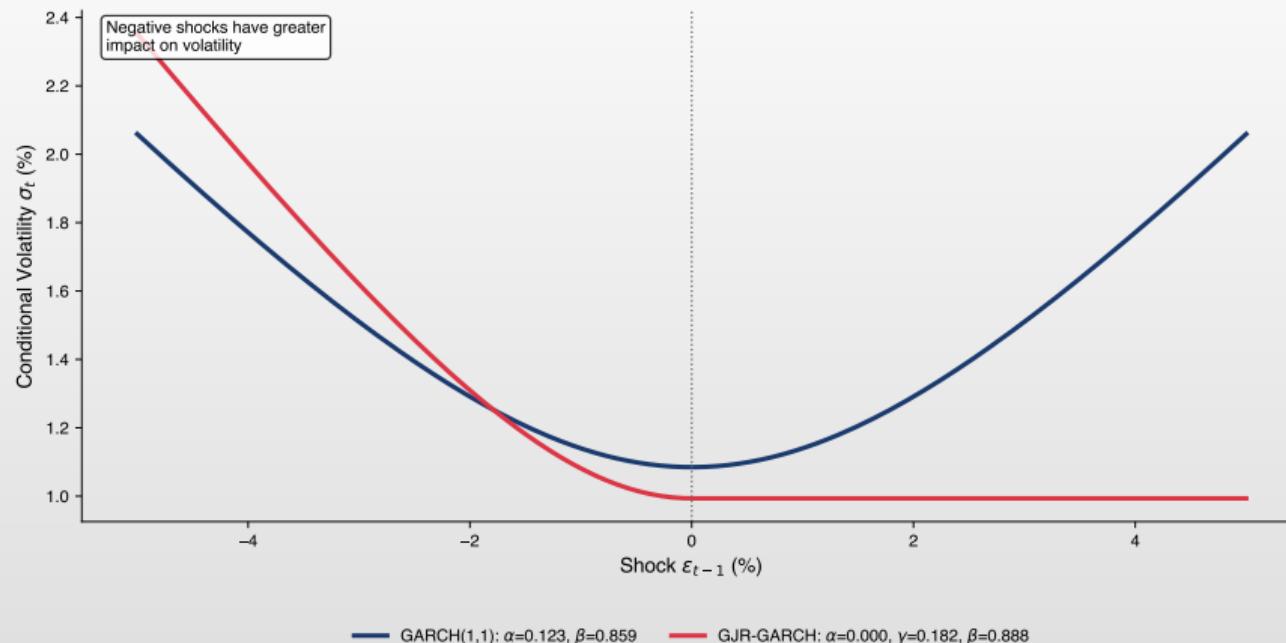
## News impact curve – EGARCH

### Interpretare

- News Impact Curve:** relația între  $\varepsilon_t$  și  $\sigma_{t+1}^2$
- GARCH:** curba simetrică (parabolă)
  - ▶ řocuri pozitive și negative au același impact
- EGARCH:** curba asimetrică
  - ▶ řocuri negative au impact mai mare asupra volatilității



## News impact curve – EGARCH



## Modelul GJR-GARCH

### Definiție 8 (GJR-GARCH(1,1))

Glosten, Jagannathan & Runkle (1993):  $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 \cdot I_{t-1} + \beta \sigma_{t-1}^2$  unde  $I_{t-1} = 1$  dacă  $\varepsilon_{t-1} < 0$ , altfel 0.

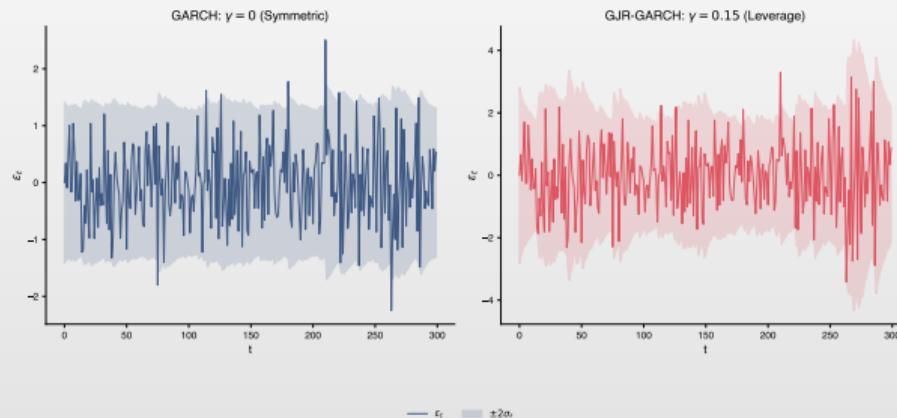
### Interpretare

- řouri pozitive: impact =  $\alpha$ ; řouri negative: impact =  $\alpha + \gamma$
- Leverage effect prezent dacă  $\gamma > 0$
- Staþionaritate:  $\alpha + \gamma/2 + \beta < 1$

## Simulare GJR-GARCH/TGARCH

### Interpretare

- GJR-GARCH adaugă un termen indicator pentru a captura răspunsul asimetric la şocuri negative



TSA\_ch5\_gjr\_sim

## TGARCH — threshold GARCH

### Definiție 9 (TGARCH(1,1))

Zakoian (1994) modelează deviația standard:  $\sigma_t = \omega + \alpha^+ \varepsilon_{t-1}^+ + \alpha^- \varepsilon_{t-1}^- + \beta \sigma_{t-1}$

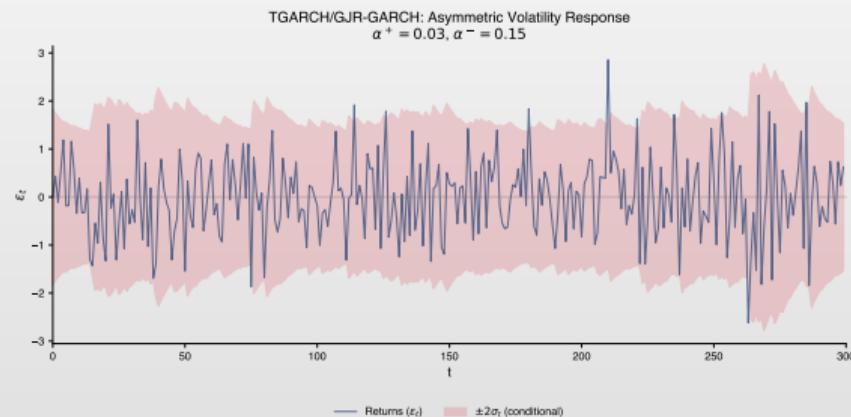
### Comparație modele asimetrice

Model	Specificație	Leverage
GARCH	$\sigma_t^2$	Nu
EGARCH	$\ln(\sigma_t^2)$	Da ( $\gamma < 0$ )
GJR-GARCH	$\sigma_t^2$ cu indicător	Da ( $\gamma > 0$ )
TGARCH	$\sigma_t$	Da ( $\alpha^- > \alpha^+$ )

## Simulare TGARCH: răspuns asimetric la volatilitate

### Interpretare

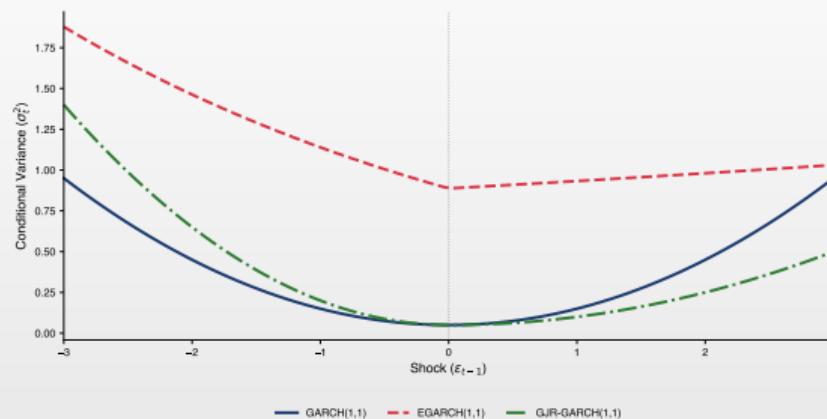
- TGARCH cu  $\alpha^+ = 0.03$  și  $\alpha^- = 0.15 \Rightarrow$  șocurile negative amplifică volatilitatea de 5×
- Benzile de volatilitate  $\pm 2\sigma$  se largesc asimetric în perioadele de criză



Q TSA\_ch5\_tgarch\_sim



## Comparație news impact curves



### Interpretare

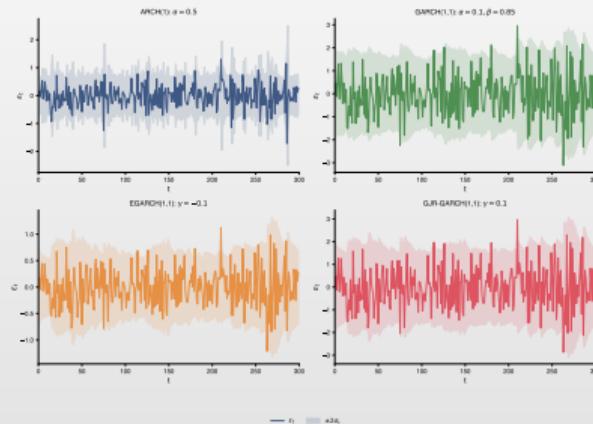
- GARCH standard:** simetric
  - Tratează şocuri pozitive și negative identic
- EGARCH și GJR-GARCH:** captează asimetria
  - Leverage effect: şocuri negative  $\Rightarrow$  impact mai mare



## Comparație familie GARCH

### Interpretare

- Toate modelele capturează volatility clustering, dar diferă în modul de modelare a asimetriei



 TSA\_ch5\_family

## GARCH-in-Mean (GARCH-M) — Engle, Lilien & Robins (1987)

### Definiție 10 (GARCH-M)

- Model: Volatilitatea intră direct în ecuația mediei:

$$r_t = \mu + \delta \cdot g(\sigma_t^2) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

- Funcția  $g$ : poate fi  $\sigma_t^2$ ,  $\sigma_t$ , sau  $\ln(\sigma_t^2)$

### Interpretare economică

- $\delta > 0$ : prima de risc  $\Rightarrow$  randamente mai mari când volatilitatea este ridicată
- Formalizează relația risc-randament (CAPM, Merton ICAPM); testul  $H_0 : \delta = 0$  verifică semnificația

### Exemplu tipic: acțiuni

- $r_t = 0.02 + \underbrace{0.15}_{\delta} \cdot \sigma_t + \varepsilon_t \Rightarrow$  La  $\sigma_t = 2\%$ :  $\mathbb{E}[r_t] = 0.023$  (0.3% primă)



## GARCH-M: Specificații alternative

### Specificații comune

- Prima de risc poate intra sub diferite forme:
  - ▶ (1)  $r_t = \mu + \lambda\sigma_t + \varepsilon_t$
  - ▶ (2)  $r_t = \mu + \lambda\sigma_t^2 + \varepsilon_t$
  - ▶ (3)  $r_t = \mu + \lambda \ln(\sigma_t^2) + \varepsilon_t$

### Rezultate tipice pentru piețele de acțiuni

- $\lambda$  estimat adesea pozitiv dar mic (0.01–0.10)
- Semnificația variază în funcție de piață și perioadă
- Specificația cu variantă produce estimări  $\lambda$  mai mari

### Observație 3

- GARCH-M este utilizat în evaluarea activelor, optimizarea portofoliului și testarea CAPM



## Selectarea ordinului

### Criterii informaționale

- AIC** (Akaike Information Criterion) =  $-2\ell + 2k$
- BIC** (Bayesian Information Criterion) =  $-2\ell + k \ln(T)$
- HQIC** (Hannan-Quinn Information Criterion) =  $-2\ell + 2k \ln(\ln(T))$

unde  $\ell$  = maximul log-verosimilității,  $k$  = nr. parametri.

### Recomandări practice

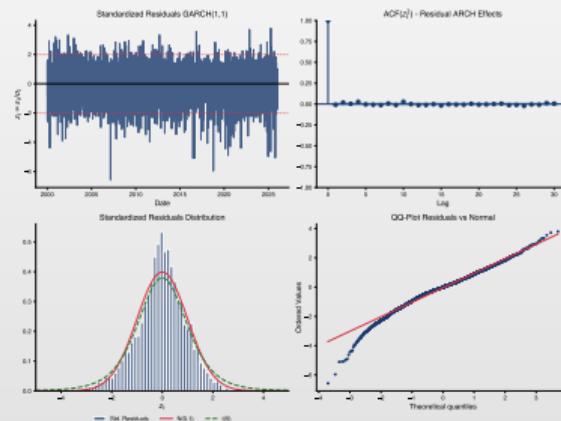
- GARCH(1,1) este suficient în **90% din cazuri**
- Verificați dacă modelul asimetric îmbunătățește semnificativ ajustarea
- Alege distribuția inovațiilor care minimizează AIC/BIC



## Exemplu diagnostic

### Verificare

- ☐ Reziduurile standardizate trebuie să fie i.i.d. fără efecte ARCH reziduale



 TSA\_ch5\_diagnostic



## Diagnosticarea modelelor GARCH

### Reziduuri standardizate

$$\hat{z}_t = \frac{\hat{\varepsilon}_t}{\hat{\sigma}_t}$$

- Dacă modelul este corect specificat,  $\hat{z}_t$  ar trebui să fie i.i.d.(0,1)

### Verificări diagnostic

- Ljung-Box pe  $\hat{z}_t$ :** verifică absența autocorelației în medie
- Ljung-Box pe  $\hat{z}_t^2$ :** verifică absența efectelor ARCH reziduale
- Test ARCH-LM pe  $\hat{z}_t$ :** confirmă absența heteroscedasticității
- Histogramă + QQ-plot:** verifică distribuția asumată

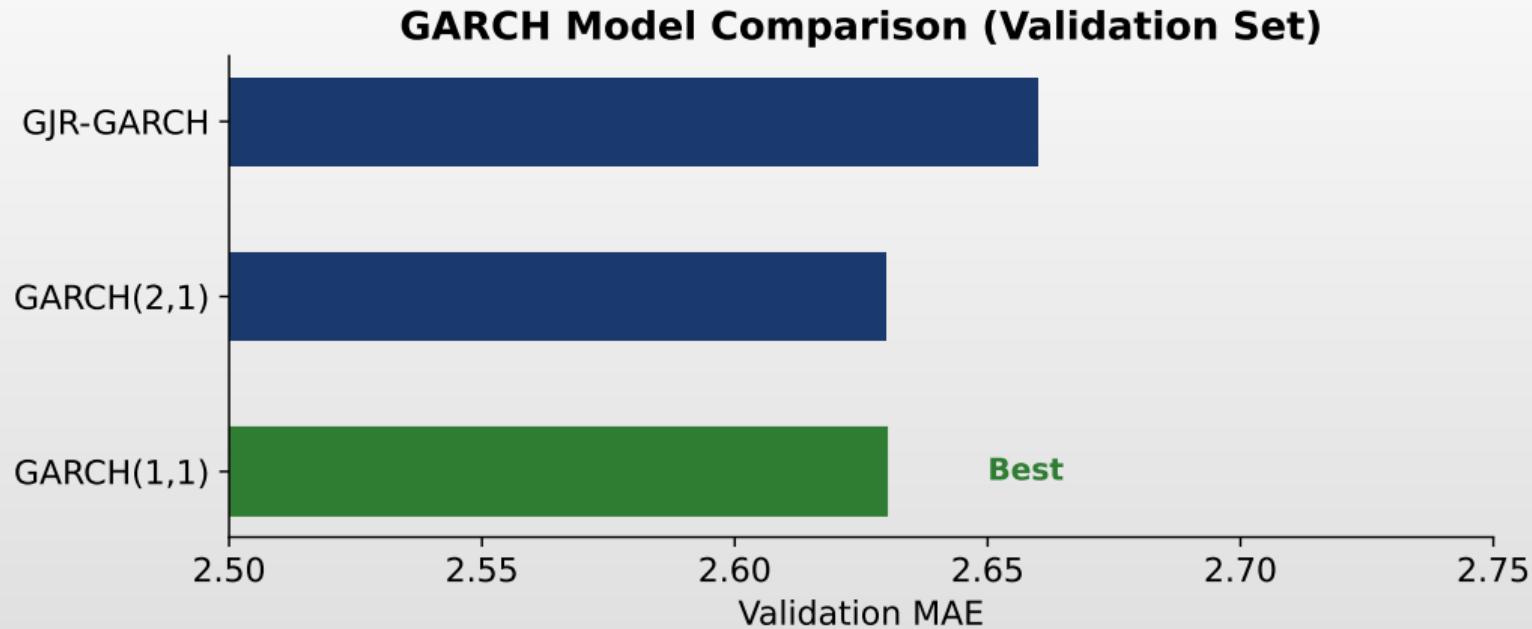
## Comparație modele GARCH – validare

### Interpretare

- GARCH(1,1) obține cel mai mic MAE pe setul de validare
  - ▶ Mai parcimonios și mai stabil decât modelele de ordin mai mare
- GARCH(2,1) și GJR-GARCH: performanță similară, dar mai mulți parametri
- Concluzie:** simplitatea câștigă  $\Rightarrow$  GARCH(1,1) este greu de bătut



## Comparație modele GARCH – validare



## Testul Diebold-Mariano

### Motivație

- Date fiind două modele de volatilitate concurente, care prognozează mai bine?

### Definiție 11 (Diebold-Mariano (1995))

Diferența de pierdere:  $d_t = L(e_{1t}) - L(e_{2t})$ , unde  $e_{it} = \sigma_t^2 - \hat{\sigma}_{it}^2$

$$DM = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\hat{V}(\bar{d})}} \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad \text{sub } H_0 : \mathbb{E}[d_t] = 0$$

### Note practice

- $H_0$ : acuratețe predictivă egală; respingere  $\Rightarrow$  un model este semnificativ mai bun
- Funcții de pierdere: MSE, MAE, QLIKE — QLIKE robustă (Patton, 2011); SE HAC dacă  $d_t$  autocorelat

### Exemplu

- EGARCH-t vs GARCH-N pe S&P 500: testul DM cu QLIKE respinge de regulă  $H_0$  în favoarea EGARCH-t



## Regresia Mincer-Zarnowitz

### Test de eficiență a prognozei

- Regresăm volatilitatea realizată pe volatilitatea prognozată:  $\sigma_{t,\text{realized}}^2 = a + b \hat{\sigma}_t^2 + u_t$

### Definiție 12 (Ipoteze)

- $H_0 : a = 0, b = 1$  (prognoză nedirecționată și eficientă)
- Test prin F-test sau Wald; respingere  $\Rightarrow$  prognoza este biasată sau ineficientă

### Interpretare

- $R^2$  măsoară fracția din varianță explicată de prognoză
- $b > 1$ : subestimează volatilitatea;  $b < 1$ : supraestimează;  $a > 0$ : bias ascendent

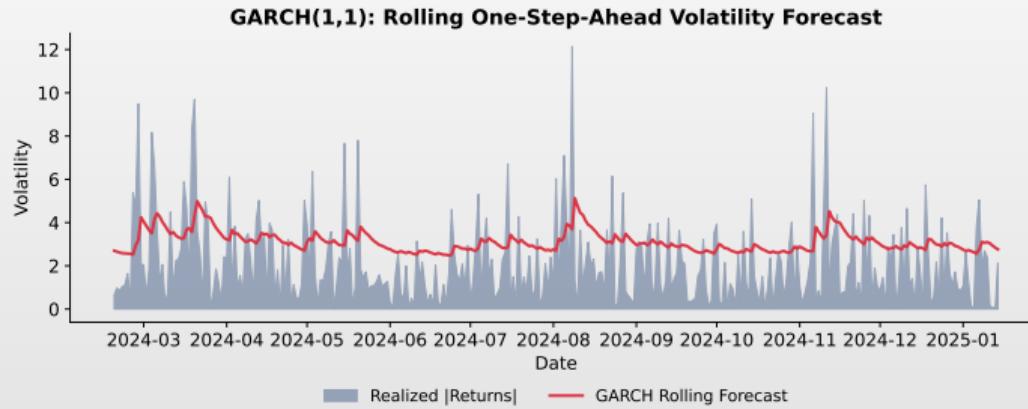
### Atenție

- Varianța realizată ( $r_t^2$ ) este un proxy zgomotos;  $R^2$  de regulă mic ( $< 0.10$ ); preferați  $RV_t$



## Prognoza volatilității — vizualizare

- Prognoza pe termen scurt reflectă volatilitatea curentă; pe termen lung converge către  $\bar{\sigma}^2$
- Zona umbrată: incertitudinea prognozei crește cu orizontul



Q TSA\_ch5\_vol\_forecast

## Prognoza cu GARCH(1,1)

### Prognoză un pas înainte

- $\hat{\sigma}_{T+1}^2 = \omega + \alpha \varepsilon_T^2 + \beta \sigma_T^2$

### Prognoză multi-pas

- Pentru  $h > 1$ :  $\mathbb{E}_T[\sigma_{T+h}^2] = \bar{\sigma}^2 + (\alpha + \beta)^{h-1}(\sigma_{T+1}^2 - \bar{\sigma}^2)$
- $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$  = varianța necondiționată

### Convergență

- $\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{E}_T[\sigma_{T+h}^2] = \bar{\sigma}^2$  — prognoza converge către varianța necondiționată.



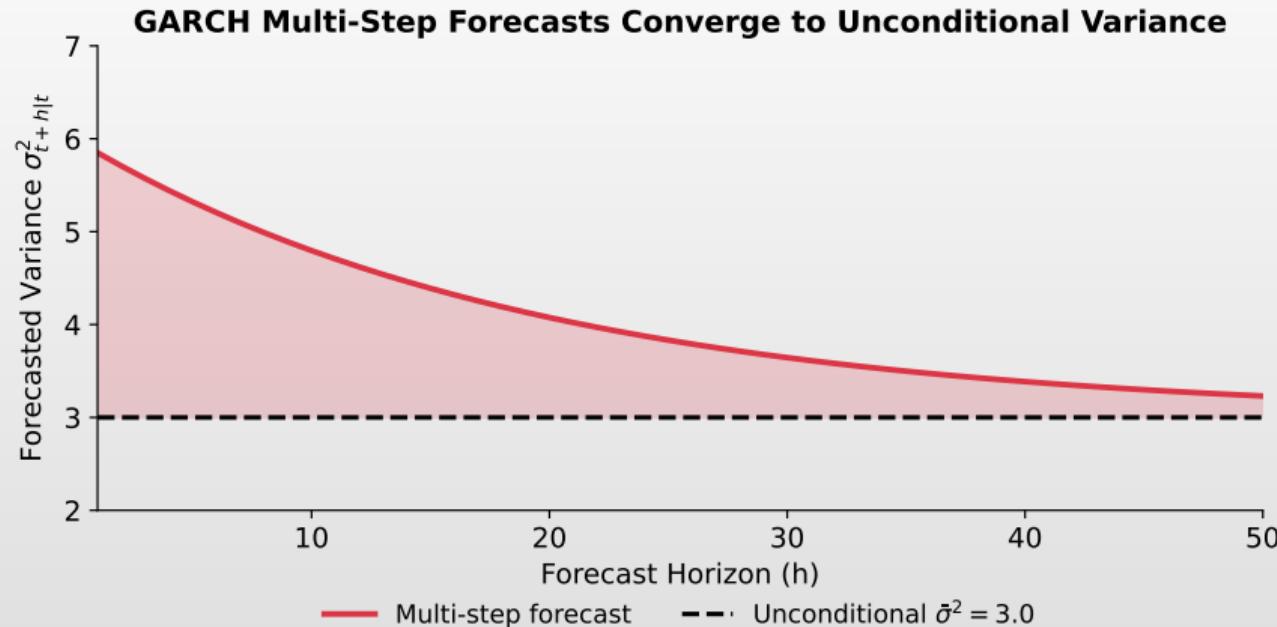
## Convergența prognozei GARCH către varianța necondiționată

### Interpretare

- Prognoza multi-pas converge exponențial către  $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$
- Cu cât  $\alpha + \beta$  este mai aproape de 1, cu atât convergența este mai lentă
  - ▶ S&P 500:  $\alpha + \beta \approx 0.99 \Rightarrow$  convergență în  $\sim 50$  zile
  - ▶ Bitcoin:  $\alpha + \beta \approx 0.95 \Rightarrow$  convergență mai rapidă



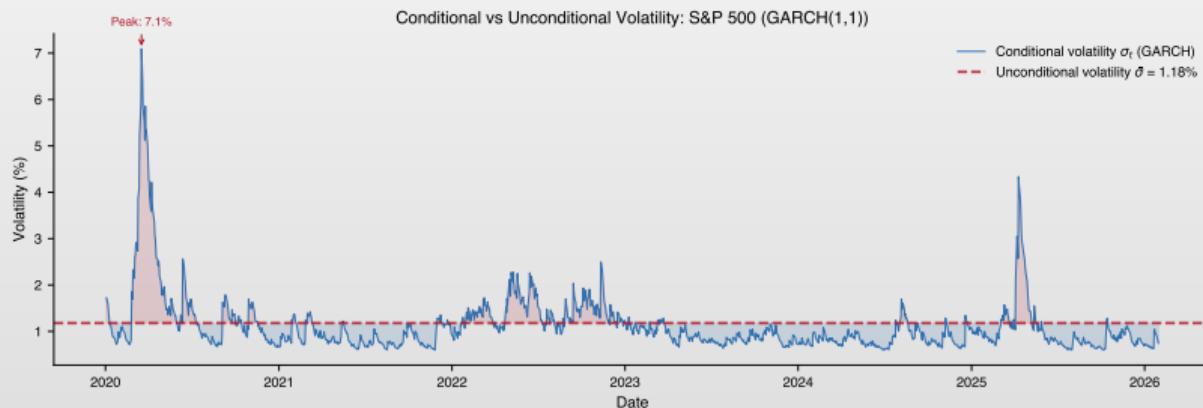
## Convergența prognozei GARCH către varianța necondiționată



## Volatilitate condiționată vs necondiționată

### Interpretare

- Volatilitate condiționată  $\sigma_t$  (GARCH): variabilă în timp, reacționează la informații noi
- Volatilitate necondiționată  $\bar{\sigma} = \sqrt{\omega/(1 - \alpha - \beta)}$ : nivel constant pe termen lung
- Zone roșii:  $\sigma_t > \bar{\sigma}$  (perioade de stres); zone albastre:  $\sigma_t < \bar{\sigma}$  (perioade de volatilitate redusă)



TSA\_ch5\_cond\_vs\_uncond



## Volatilitate realizată și HAR-RV

### Volatilitate realizată (RV)

- Cu randamente intra-zilnice  $r_{t,i}$  ( $M$  obs./zi):  $RV_t = \sum_{i=1}^M r_{t,i}^2$  — măsură **fără model, observabilă** (vs. GARCH: latentă)

### Definiție 13 (Modelul HAR-RV — Corsi (2009))

$$RV_t = \beta_0 + \beta_D RV_{t-1} + \beta_W RV_{t-1}^{(w)} + \beta_M RV_{t-1}^{(m)} + u_t$$

unde  $RV^{(w)} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 RV_{t-i}$  : (săptămânală) și  $RV^{(m)} = \frac{1}{22} \sum_{i=1}^{22} RV_{t-i}$  : (lunară)

### Avantaj principal

- Regresie OLS simplă care capturează **memoria lungă**; traderi eterogeni explică dinamica multi-scală
- Adesea depășește GARCH când datele intra-zilnice sunt disponibile (5 min,  $M \approx 78$ /zi)
- Atenție: zgromot de microstructură la frecvență foarte înaltă  $\Rightarrow$  estimatori kernel



## Realized GARCH

### Motivație

- GARCH standard tratează volatilitatea ca **latentă**; cu date de frecvență înaltă, o putem **observa** prin  $RV_t$

### Definiție 14 (Realized GARCH — Hansen, Huang & Shek (2012))

**Ecuația randamentelor:**  $r_t = \mu + \sigma_t z_t, \quad z_t \sim D(0, 1)$

**Ecuația GARCH:**  $\log \sigma_t^2 = \omega + \beta \log \sigma_{t-1}^2 + \gamma \log RV_{t-1}$

**Ecuația de măsurare:**  $\log RV_t = \xi + \varphi \log \sigma_t^2 + \tau(z_t) + u_t$

### Beneficii

- **Model comun:** leagă randamentele, volatilitatea latentă și măsurile realizate
- Funcția de levier  $\tau(z_t)$  capturează asimetria; prognoze **mai precise** decât GARCH standard

### Comparație: GARCH vs HAR-RV vs Realized GARCH

- **GARCH:** nu necesită date intra-zilnice; cel mai utilizat
- **HAR-RV:** simplu, fără model; necesită date la 5 min
- **Realized GARCH:** combină avantajele; necesită date la 5 min + structură parametrică



## VaR și ES: ilustrație grafică

### Interpretare

- ◻ VaR 1% = pierderea depășită doar în 1% din cazuri
- ◻ Zona roșie = pierderi extreme (dincolo de VaR)



Q TSA\_ch5\_var\_plot



## Aplicații ale prognozei volatilității

### Value at risk (VaR)

- $\text{VaR}_\alpha = z_\alpha \cdot \sigma_{T+1}$
- Pierdere maximă cu probabilitate  $1 - \alpha$

### Expected shortfall (ES)

- $\text{ES}_\alpha = \mathbb{E}[-r | r < -\text{VaR}_\alpha]$
- Pierdere medie când VaR este depășit

### Alte aplicații

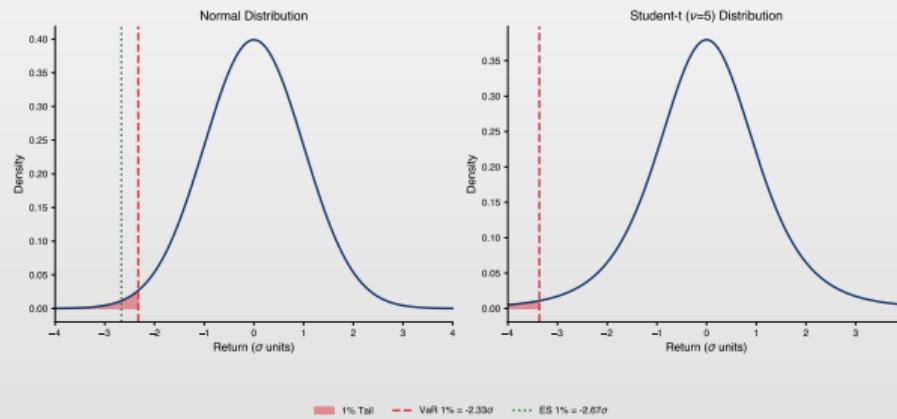
- Prețul opțiunilor
- Hedging dinamic
- Alocarea portofoliului
- Stress testing



## VaR vs expected shortfall: normal vs Student-t

### Interpretare

- ES măsoară pierderea medie când VaR este depășit
- Student-t: VaR și ES mai mari decât sub distribuția normală



Q TSA\_ch5\_var\_es



## Value at risk — exemplu numeric

### Calculul VaR

- Portofoliu: 1.000.000 EUR, volatilitate progozată  $\hat{\sigma}_{T+1} = 1.5\%$

### VaR cu distribuție normală

Nivel	$z_\alpha$	VaR (%)	VaR (EUR)
5% (1 zi)	1.645	2.47%	24.675
1% (1 zi)	2.326	3.49%	34.890

### Scalare pentru perioade mai lungi

- $VaR_h \text{ zile} = VaR_1 \text{ zi} \cdot \sqrt{h}$  — presupune randamente i.i.d.
- **Atenție:** Sub modelele GARCH, randamentele **nu** sunt i.i.d. (sunt condiționat heteroscedastice)  $\Rightarrow$  regula  $\sqrt{h}$  este doar o **aproximare**; pentru VaR multi-perioadă, folosiți prognoza GARCH iterată



## Value at risk — distribuție Student-t

### De ce Student-t?

- Distribuția normală **subestimează** riscul de coadă
- Student-t cu  $\nu$  grade de libertate capturează mai bine cozile groase ( $kurtosis > 3$ )

Comparație VaR 1% (1 zi):  $\sigma = 1.5\%$ , portofoliu = 1M EUR

Distribuție	Cuantilă	VaR (EUR)
Normal	2.326	34.890
Student-t ( $\nu = 6$ )	3.143	47.145
Student-t ( $\nu = 4$ )	3.747	56.205

### Observație

- Cu  $\nu = 6$  (tipic pentru acțiuni), VaR este cu **35% mai mare** decât cel normal.



## VaR — exemplu complet cu GARCH

### Procedura de calcul VaR

1. Estimează modelul GARCH(1,1) cu distribuție Student-t
2. Obține prognoza volatilității:  $\hat{\sigma}_{T+1}$
3. Calculează VaR:  $VaR_\alpha = t_\alpha(\nu) \cdot \hat{\sigma}_{T+1} \cdot \sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}}$

### Exemplu: S&P 500

- Parametri estimați:  $\alpha = 0.088$ ,  $\beta = 0.900$ ,  $\nu = 6.4$
- Volatilitate progonzată:  $\hat{\sigma}_{T+1} = 1.2\%$
- Portofoliu: 10.000.000 EUR

**VaR 1% (1 zi):**  $VaR = 3.05 \times 0.012 \times 10,000,000 = 366,000$  EUR



## Ce este VaR backtesting?

### Definiție

- Backtesting** = verificarea ex-post a calității modelului VaR
- Compară pierderile realizate cu pragul VaR proгnozat
  - ▶ O **încălcare** (violation) apare când  $r_t < -\text{VaR}_t$

### Principiul Backtesting-ului

- Indicatorul de încălcare:  $I_t = 1(r_t < -\text{VaR}_{\alpha,t})$
- Pentru un model corect la nivel  $\alpha$ :
  - ▶ Frecvența:  $\hat{p} = \frac{1}{T} \sum I_t \approx \alpha$ ; încălcări **independente**
- VaR 1% pe 250 zile  $\Rightarrow$  așteptăm  $\sim 2.5$  încălcări/an

### Importanță

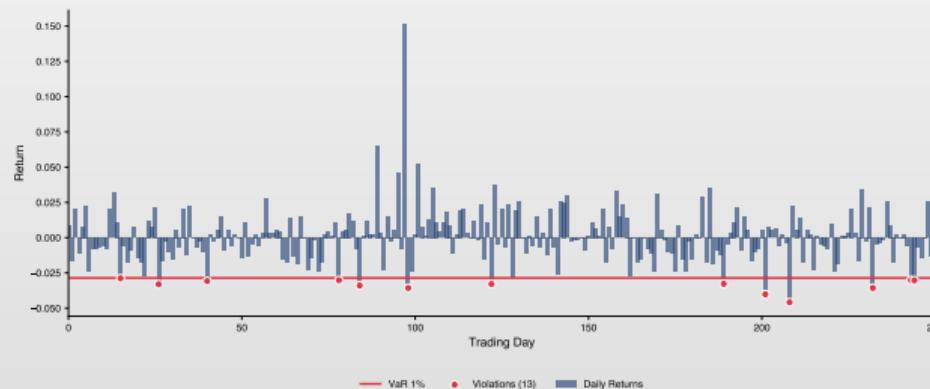
- Cerință regulamentară **Basel III/IV** pentru bănci: backtesting obligatoriu



## VaR backtesting: vizualizare

### Interpretare

- Linia roșie: pragul VaR 1% estimat cu GARCH(1,1)
- Punctele roșii: 13 încălcări din 250 zile ( $\hat{p} = 5.2\%$ )
  - ▶ **Zonă roșie Basel** ⇒ modelul subestimează semnificativ riscul
  - ▶ Soluții: distribuție Student-t, model EGARCH, sau nivel VaR mai conservator



## Backtesting VaR: semaforul Basel

### Zonele de semaforizare Basel III/IV

Zonă	Încălcări/250 zile	Interpretare	Penalizare
Verde	0–4	Model acceptabil	Fără penalizare
Galben	5–9	Necesită investigare	Factor $k$ crește
Roșu	$\geq 10$	Model inadecvat	Penalizare maximă

### Exemplu practic

- Portofoliu cu VaR 1%: 250 zile de backtesting
- 3 încălcări ⇒ **Zonă verde** ⇒ model acceptabil
- 7 încălcări ⇒ **Zonă galbenă** ⇒ revizuire necesară
- 13 încălcări ⇒ **Zonă roșie** ⇒ model respins



## Metodologia Rolling Window pentru VaR

### Conceptul Rolling Window

- O fereastră mobilă de dimensiune fixă  $W$  (ex. 500 zile) se deplasează zi cu zi
- La fiecare pas  $t$ : re-estimare GARCH pe  $[t - W, t - 1]$ , prognoză  $\hat{\sigma}_{t|t-1}$ , calcul  $\text{VaR}_t$

### Procedura pas cu pas (pentru fiecare zi $t = W + 1, \dots, T$ )

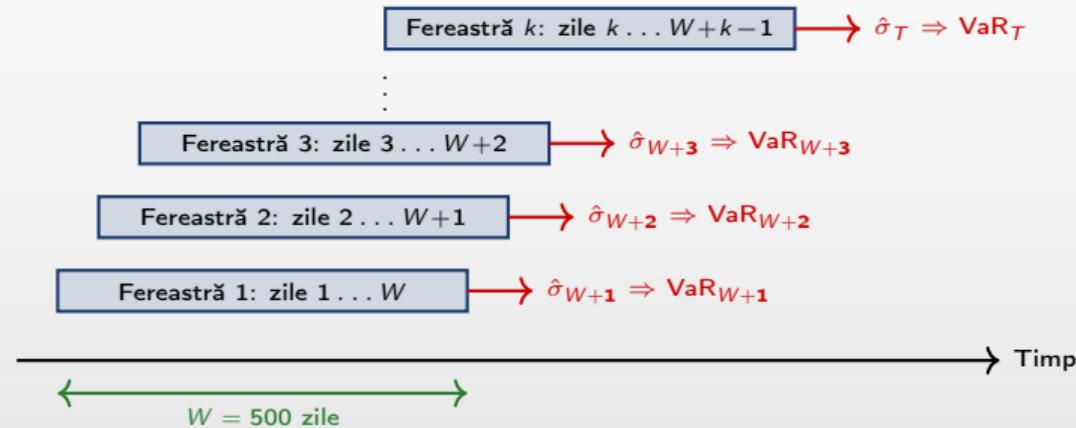
1. Estimează GARCH pe  $\{r_{t-W}, \dots, r_{t-1}\} \Rightarrow$  parametri  $\hat{\omega}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\nu}$
2. Prognozează:  $\hat{\sigma}_{t|t-1}^2 = \hat{\omega} + \hat{\alpha}r_{t-1}^2 + \hat{\beta}\hat{\sigma}_{t-1}^2$
3. Calculează:  $\text{VaR}_{\alpha,t} = -t_\alpha(\hat{\nu}) \cdot \sqrt{\frac{\hat{\nu}-2}{\hat{\nu}}} \cdot \hat{\sigma}_{t|t-1}$
4. Verifică încălcarea:  $I_t = 1(r_t < -\text{VaR}_{\alpha,t})$

### De ce Rolling și nu expanding?

- Fereastra fixă: parametrii reflectă **regimul curent** al volatilității
- Datele vechi ( $> W$  zile) pot fi irelevante (schimbări structurale, crize)



## Rolling Window VaR: schema procedurii



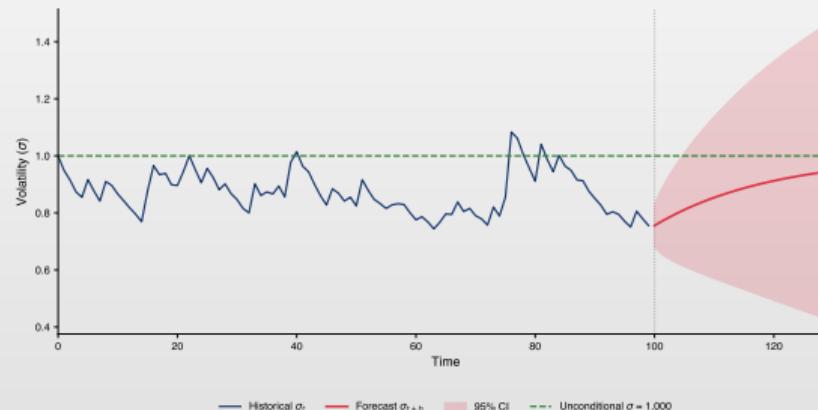
### Rezultat

- Obținem seria  $\{\text{VaR}_{\alpha,t}\}_{t=W+1}^T \Rightarrow$  un prag **diferit** în fiecare zi
- VaR-ul se adaptează la regimul curent: crește în perioadele volatile, scade în perioadele de volatilitate redusă
- Comparăm  $r_t$  cu  $-\text{VaR}_{\alpha,t}$  pentru a identifica încălcările

## Prognoza volatilității cu intervale de încredere

### Interpretare

- ◻ Prognoza converge către  $\bar{\sigma}$
- ◻ Incertitudinea crește cu orizontul de prognoză



Q TSA\_ch5\_vol\_ci

## Rolling forecast – prognoza pas cu pas

### Procedura

S&P 500, W=500, GARCH(1,1)-t

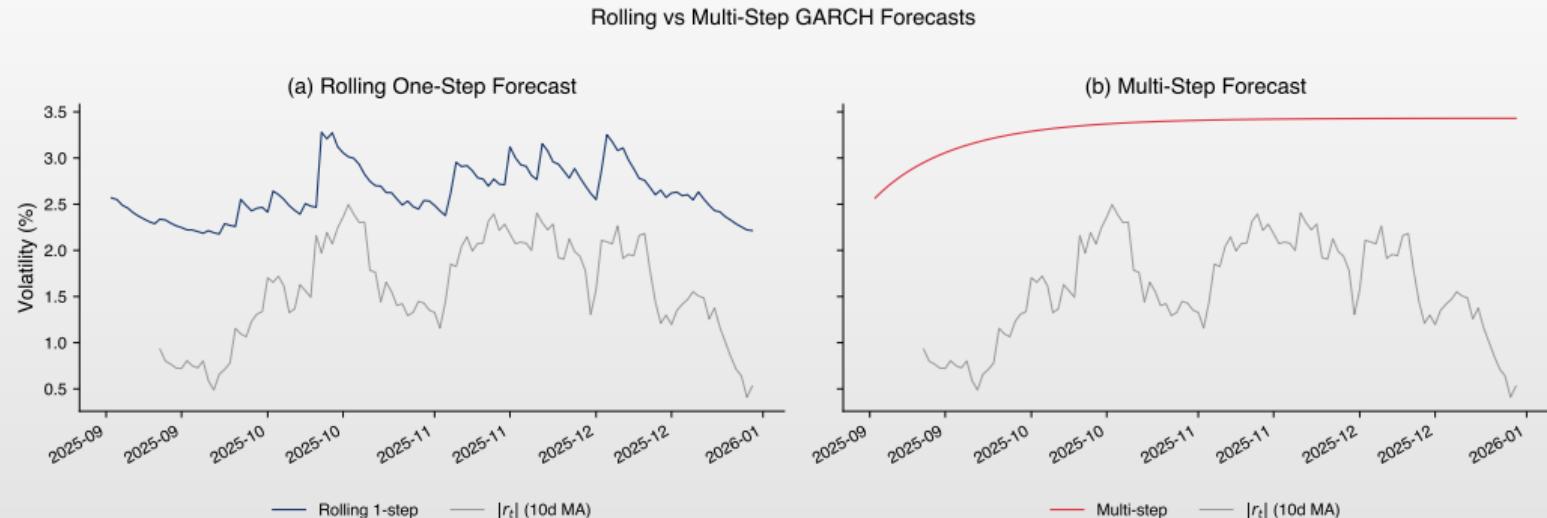
- Re-estimare GARCH pe  $[t-W, t-1]$ ; prognoză  $\hat{\sigma}_{t|t-1}$
- Comparație cu vol. realizată (std. rulantă 20 zile)

### Rezultate (2015 zile OOS)

- $\rho = 0.938 \Rightarrow$  urmărire excelentă; MAE = 0.15%, RMSE = 0.24%
- COVID-19: sub-predicție temporară, adaptare rapidă



## Rolling forecast – prognosă pas cu pas



 TSA\_ch5\_rolling\_forecast

## VaR backtesting: testul Kupiec

### Testul acoperirii necondiționate

- Testează dacă rata de încălcare observată este egală cu rata așteptată  $p$  (ex. 1% pentru VaR 1%)
- Fie  $N$  = numărul de încălcări VaR,  $T$  = totalul observațiilor,  $\hat{p} = N/T$
- Statistica Likelihood Ratio:**

$$LR_{uc} = -2 \ln \left[ \frac{(1-p)^{T-N} p^N}{(1-\hat{p})^{T-N} \hat{p}^N} \right] \sim \chi^2(1)$$

### Ipoteze

- $H_0: \hat{p} = p$  (modelul VaR este corect calibrat)
- $H_1: \hat{p} \neq p$  (modelul VaR sub- sau supra-estimează riscul)



## VaR backtesting: testul Christoffersen

### Testul acoperirii condiționate

- Testează atât **acoperirea necondiționată** cât și **independența** încălcărilor
- Încălcările trebuie să fie independente — fără clusterizare a excepțiilor.

### Componente ale testului

- **Testul de independență ( $LR_{ind}$ ):** Testează dacă încălcările sunt serial independente
- **Acoperire condiționată:**  $LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind} \sim \chi^2(2)$

### Interpretare

- Respinge  $LR_{uc}$ : frecvență greșită
- Respinge  $LR_{ind}$ : încălcări clusterizate
- Respinge  $LR_{cc}$ : modelul nu este validat



## Backtesting complet – rezultate și decizie

### Aplicare S&P 500 (T=500, VaR 1%)

- Rolling window:  $W = 500$  zile, model EGARCH(1,1)-t
- Fereastră de test:  $T - W$  zile out-of-sample
- Se compară VaR prognozat cu randamentul realizat în fiecare zi

### Output tipic

- Număr încălcări vs așteptat  $\Rightarrow$  zona Basel (verde/galben/roșu)
- Kupiec (frecvență):  $H_0: \hat{p} = \alpha \Rightarrow p\text{-value} > 0.05 \Rightarrow$  acceptat
- Christoffersen (independență):  $H_0: \text{încălcări i.i.d.} \Rightarrow p\text{-value} > 0.05 \Rightarrow$  acceptat
- Test combinat: ambele condiții îndeplinite  $\Rightarrow$  **model validat**

 **TSA\_ch5\_backtest\_full**



## Backtesting-ul Expected Shortfall

### De ce backtesting ES?

- VaR măsoară doar *pragul* pierderilor extreme, nu *magnitudinea* lor
- ES = pierderea medie dacă VaR este depășit  $\Rightarrow$  mai informativ pentru riscul de coadă

### Definiție 15 (Testul Z Acerbi-Székely (2014))

$$Z_{\text{ES}} = \frac{1}{n_\alpha} \sum_{t:r_t < -\text{VaR}_t} \frac{r_t}{\text{ES}_t} + 1$$

Sub  $H_0$  (model ES corect):  $E[Z_{\text{ES}}] = 0$ : se respinge dacă  $Z_{\text{ES}} < z_{-\alpha}$

### Observație

- Spre deosebire de backtesting VaR (binar), backtesting ES folosește *magnitudinea* pierderilor
- Mai puternic dar necesită eșantioane mari ( $T > 1000$ ); alternativă: bootstrap McNeil & Frey (2000)
- ES sub Student- $t$ : cozi groase  $\Rightarrow$  ES mai mare decât sub normalitate



## Basel IV: de la VaR la ES

### Schimbarea reglementară

- ☐ Basel II/III: Capital bazat pe VaR 99% (10 zile)
- ☐ Basel IV (FRTB, 2023+): Capital bazat pe **ES 97.5%** (10 zile)
- ☐ Motivație: ES este **coherent** (subaditivitate), VaR nu este

### Echivalentă sub normalitate

$$\text{ES}_{97.5\%}^{\text{Normal}} = \frac{\phi(z_{0.025})}{0.025} \cdot \sigma \approx 2.338 \sigma \quad \approx \quad \text{VaR}_{99\%}^{\text{Normal}} = 2.326 \sigma$$

- ☐ Sub normalitate, ES 97.5%  $\approx$  VaR 99%; sub cozi groase, ES  $\gg$  VaR

### Implicație practică

- ☐ Modelele GARCH Student-t devin **esențiale** pentru estimarea precisă a ES
- ☐ Băncile trebuie să modeleze *întreaga coadă*, nu doar un singur cuantil



## ARMA-GARCH: modelarea combinată a mediei și varianței

### De ce modelare combinată?

- Corelație serială ⇒ ARMA pentru medie
- Volatility clustering ⇒ GARCH pentru varianță

### Definiție 16 (ARMA(p,q)-GARCH(r,s))

Ecuatia mediei:

$$r_t = \mu + \sum_{i=1}^p \phi_i(r_{t-i} - \mu) + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$$

Ecuatia varianței:  $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ ,

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^r \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2$$



## ARMA-GARCH: strategie de selecție a modelului

### Abordare pas cu pas

1. **Identifică modelul pentru medie:** Verifică ACF/PACF al randamentelor
2. **Testează efectele ARCH:** Aplică testul ARCH-LM pe reziduuri
3. **Specifică modelul pentru varianță:** De obicei GARCH(1,1) este suficient
4. **Estimare combinată:** Estimează ambele ecuații prin MLE
5. **Diagnostic:** Reziduurile standardizate trebuie să fie i.i.d.

### Specificații comune

- Randamente acțiuni:** AR(1)-GARCH(1,1) sau ARMA(1,1)-GARCH(1,1)
- Cursuri de schimb:** Adesea doar GARCH(1,1) (fără dinamică în medie)
- Rate ale dobânzii:** AR(1)-EGARCH(1,1) pentru efecte de levier



## Python: Estimarea GARCH cu arch

### Pași principali

```
from arch import arch_model
import numpy as np; from scipy.stats import norm

# Fit GARCH(1,1) with Student-t innovations
model = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, q=1,
                     dist='StudentsT', mean='AR', lags=1)
result = model.fit(disp='off')
print(result.summary())

# Forecast 20-step ahead volatility
forecast = result.forecast(horizon=20)
sigma_forecast = np.sqrt(forecast.variance.iloc[-1])

# Compute 1-day VaR (1%) from conditional distribution
sigma_1 = sigma_forecast.iloc[0]
VaR_1pct = norm.ppf(0.01) * sigma_1 # Normal approx
```

Notă: Pentru VaR Student-t, înlocuiți `norm.ppf` cu `scipy.stats.t.ppf(0.01, df=nu)` scalat cu  $\sqrt{(\nu - 2)/\nu}$ .



## Pasul 1: Datele – randamente zilnice S&P 500

### Descrierea datelor

- Sursă:** Yahoo Finance, S&P 500, date zilnice 2000–2024 ( $T > 6000$ )
- Randamente:**  $r_t = \ln(P_t/P_{t-1}) \times 100$

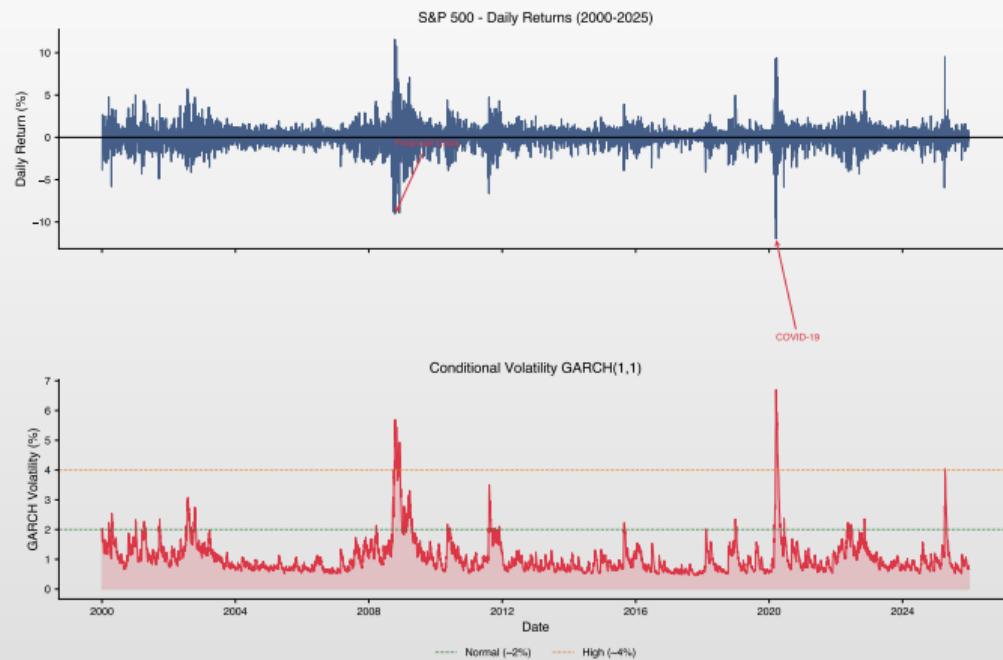
### Statistici descriptive

Medie	Std. Dev.	Skewness	Kurtosis	Min	Max
0.034%	1.21%	-0.29	13.8	-12.8%	+11.0%

- Cozi groase (kurtosis  $\gg 3$ ) și asimetrie negativă  $\Rightarrow$  efecte ARCH



## Pasul 1: Datele – randamente zilnice S&P 500



## Pasul 2: Testarea efectelor ARCH

Cod Python  $\Rightarrow$  ARCH-LM și Ljung-Box pe  $r_t^2$

- Testăm prezența efectelor ARCH în reziduurile modelului pentru medie

### Rezultate

Test	Statistică	p-value
ARCH-LM (10 lags)	892.4	< 0.0001
Ljung-Box $r_t^2$ (lag 20)	4217.6	< 0.0001

- Concluzie:** Efecte ARCH puternice  $\Rightarrow$  heteroscedasticitate semnificativă



## Pasul 3: Parametri estimați – comparație

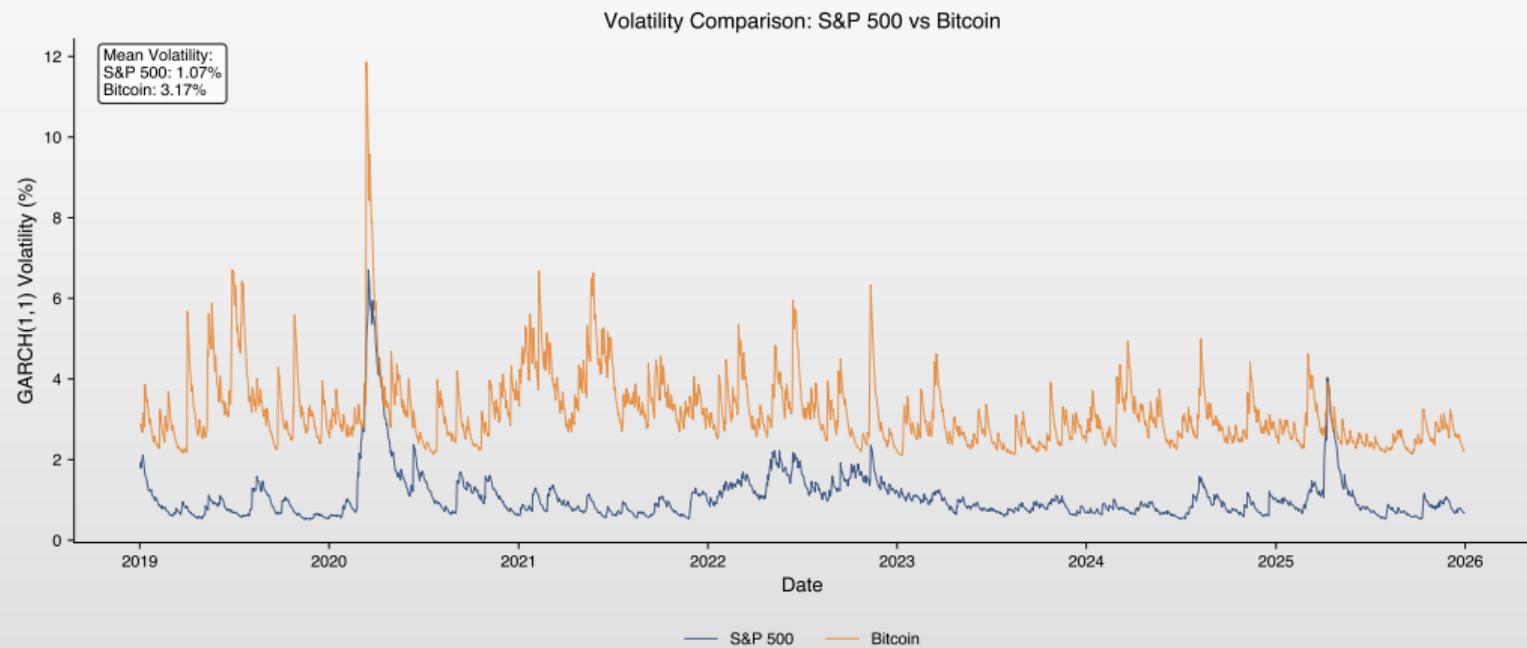
Tabel parametri estimați

Model	$\omega$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\alpha + \beta$	$\nu$	HL
GARCH-N	0.011	0.088	0.901	—	0.989	—	60 zile
GARCH-t	0.011	0.088	0.900	—	0.989	6.42	60 zile
EGARCH-t	0.003	0.103	0.987	-0.120	—	6.38	53 zile
GJR-t	0.010	0.022	0.906	0.126	0.991	6.51	78 zile

### Interpretare

- EGARCH  $\gamma = -0.12$  semnificativ  $\Rightarrow$  leverage effect confirmat
- GJR:  $\alpha_{\text{neg}} = \alpha + \gamma = 0.148$  vs  $\alpha_{\text{poz}} = 0.022 \Rightarrow$  asimetrie puternică

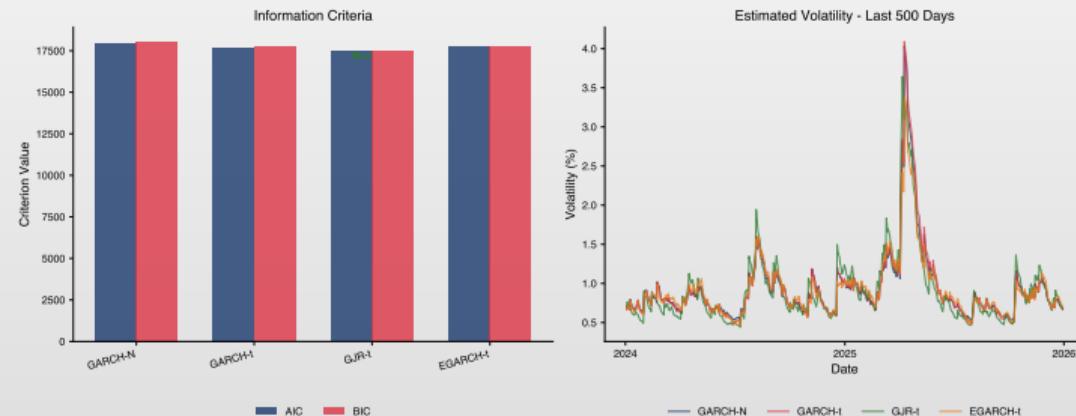
## Pasul 3: Volatilitatea condiționată estimată – S&P 500



## Pasul 4: Leverage effect – vizualizare

### GARCH vs EGARCH ⇒ diferențe de volatilitate

- EGARCH produce volatilitate **mai mare** după șocuri negative (2008, 2020)
- GARCH simetric **subestimează** riscul în perioadele de criză
- Diferență: până la 2–3 puncte procentuale în volatilitate zilnică



## Pasul 5: Selecția modelului – AIC/BIC

### Criterii informaționale

Model	Log-Lik	AIC	BIC	Rang
GARCH(1,1)-N	-8042.3	16090.6	16111.0	4
GARCH(1,1)-t	-7981.5	15971.0	15997.8	3
EGARCH(1,1)-t	-7964.2	<b>15938.4</b>	<b>15971.6</b>	<b>1</b>
GJR-GARCH(1,1)-t	-7968.1	15946.2	15979.4	2

### Decizia

- EGARCH(1,1)-t câștigă:** cel mai mic AIC și BIC
- Student-t superior normalei ( $\Delta\text{AIC} \approx 120$ )  $\Rightarrow$  cozi groase contează.
- Leverage effect justifică modele asimetrice ( $\Delta\text{AIC} \approx 33$  față de GARCH-t)

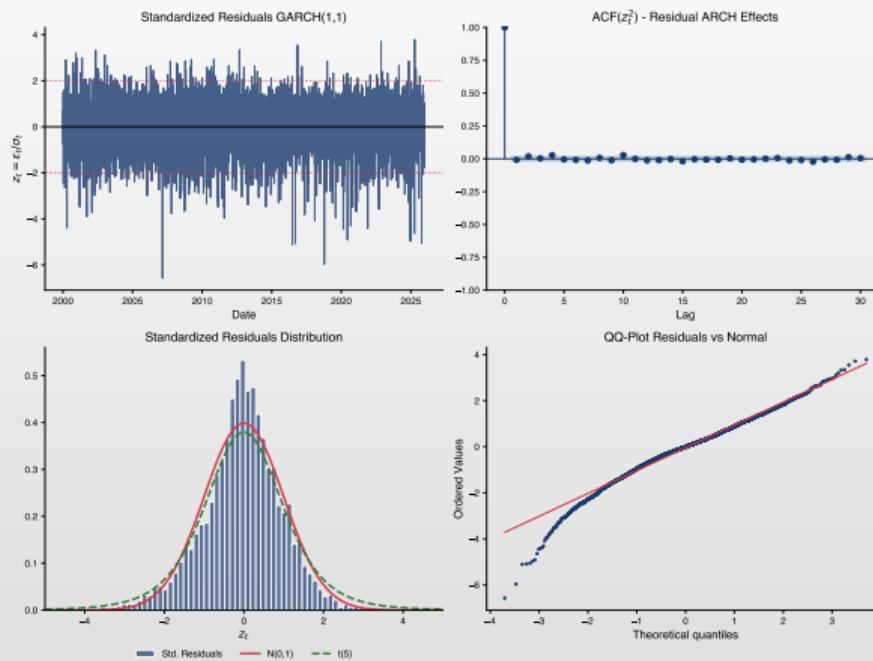


## Pasul 6: Diagnostice – EGARCH(1,1)-t

### Verificări pe reziduuri standardizate $z_t = \varepsilon_t / \hat{\sigma}_t$

- Ljung-Box** pe  $z_t$ : p-value = 0.38  $\Rightarrow$  fără autocorelație reziduală
- Ljung-Box** pe  $z_t^2$ : p-value = 0.52  $\Rightarrow$  efecte ARCH eliminate
- Q-Q plot**: punctele urmează dreapta teoretică Student-t
- Concluzie**: modelul EGARCH(1,1)-t captează adevarat dinamica volatilității

## Pasul 6: Diagnostice – EGARCH(1,1)-t



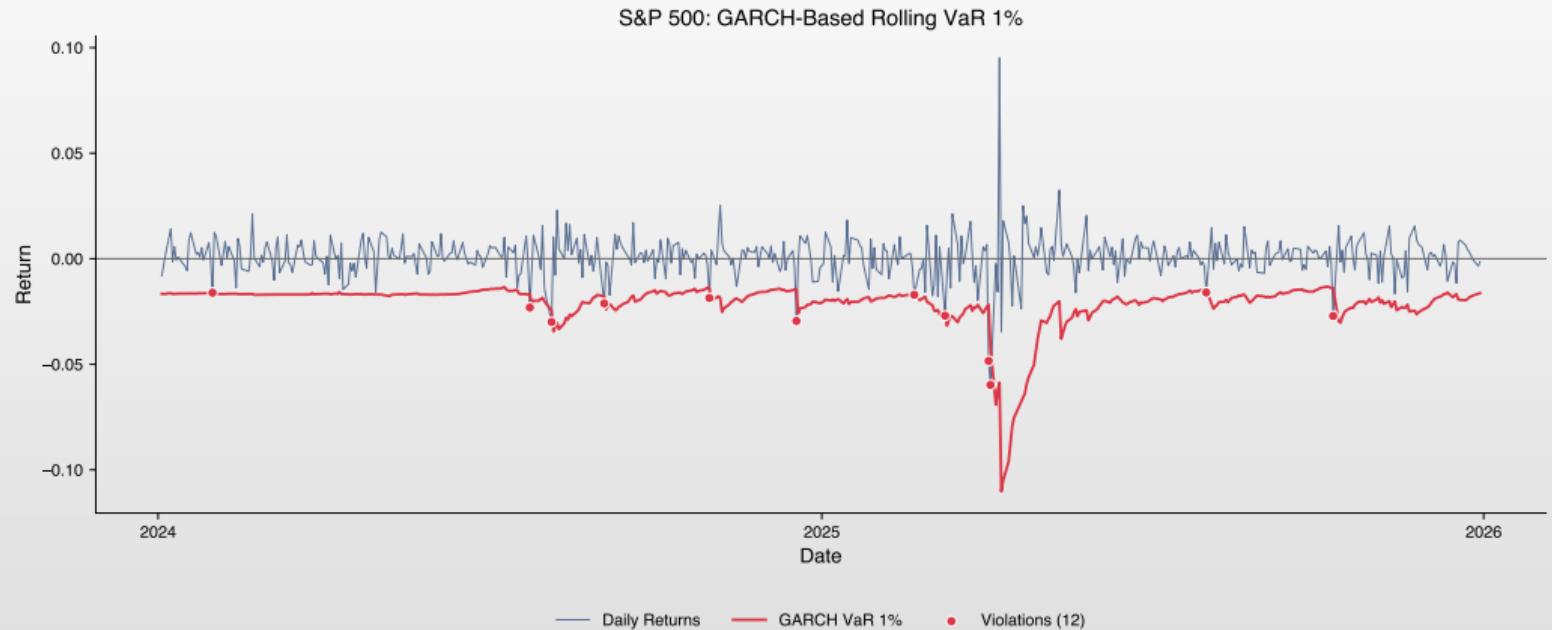
## Pasul 7: Backtesting rolling VaR – S&P 500

Rezultate Kupiec + Christoffersen (2015 zile out-of-sample)

Test	Statistică	p-value	Decizia
Încălcări	27/2015 ( $\hat{p} = 1.34\%$ )	—	Zona verde
Kupiec (uc)	2.13	0.145	Acceptat
Christoffersen (ind)	0.79	0.375	Acceptat
Combinat (cc)	2.91	0.233	Acceptat



## Pasul 7: Rolling VaR – S&P 500



## Pasul 8: Concluzii – studiu S&P 500

### Rezumatul metodologiei pas cu pas

1. **Date:** randamente log, statistici descriptive  $\Rightarrow$  cozi groase, asimetrie
2. **Test ARCH:** ARCH-LM + Ljung-Box pe  $r_t^2 \Rightarrow$  efecte ARCH semnificative
3. **Estimare:** 4 modele candidate (simetric/asimetric  $\times$  Normal/Student-t)
4. **Selectie:** AIC/BIC  $\Rightarrow$  EGARCH(1,1)-t câștigător
5. **Diagnostice:** reziduuri standardizate  $\Rightarrow$  model adekvat
6. **VaR:** rolling window + backtesting Kupiec/Christoffersen  $\Rightarrow$  model validat

### Concluzii

- Distribuția Student-t este **esențială** pentru date financiare
- Leverage effect: modelele asimetrice **obligatorii** pentru acțiuni
- Backtesting sistematic: nu doar „arată bine”, ci **testat statistic**



## Pasul 1: Datele – randamente zilnice Bitcoin

### Descrierea datelor

- Sursă: Yahoo Finance (BTC-USD), date zilnice 2018–2024
- Randamente log: media  $\approx 0.05\%$ , volatilitate  $\approx 3.5\%$

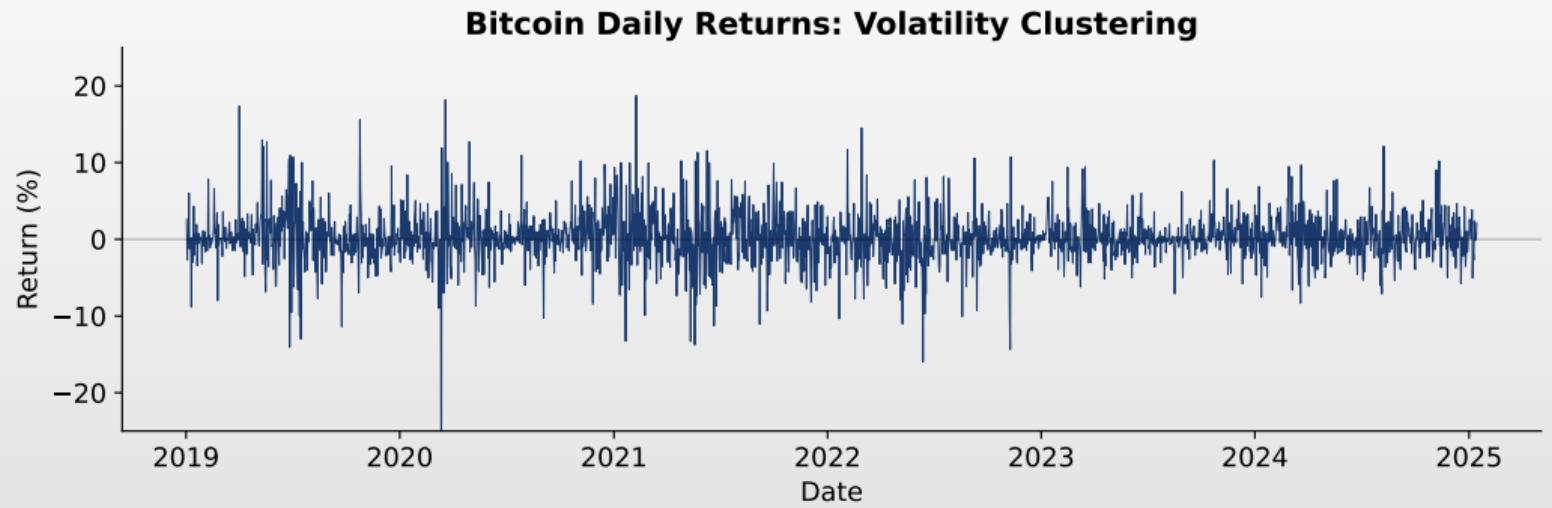
### Statistici descriptive

Medie	Std. Dev.	Skewness	Kurtosis	Min	Max
0.05%	3.48%	-0.72	12.1	-46.5%	+22.5%

- Volatilitate  $\sim 3\times$  mai mare decât S&P 500
- Kurtosis extremă  $\Rightarrow$  riscul de pierderi mari



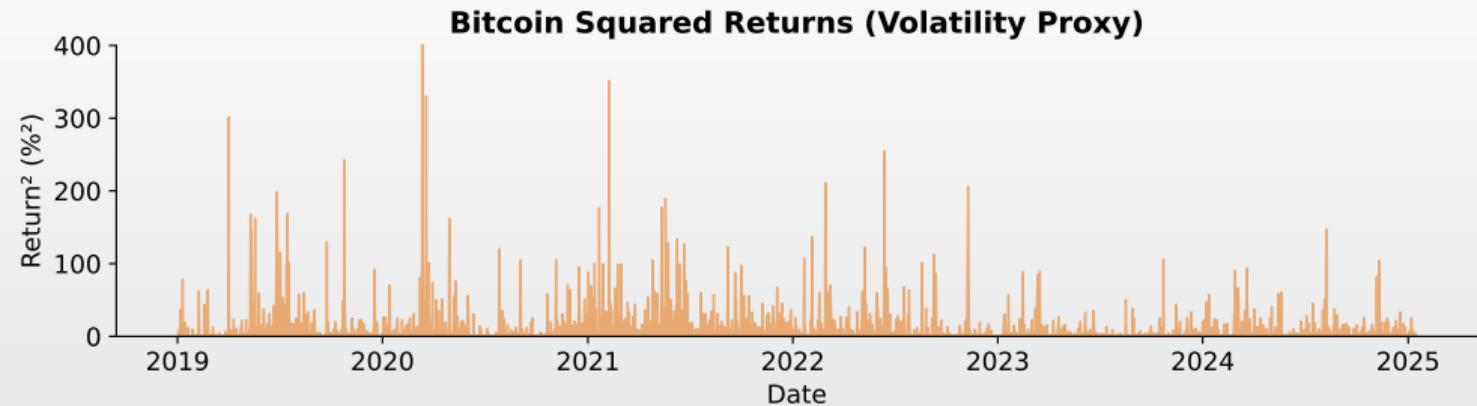
## Pasul 1: Datele – randamente zilnice Bitcoin



Q TSA\_ch5\_btc



## Pasul 2: Testarea efectelor ARCH – Bitcoin

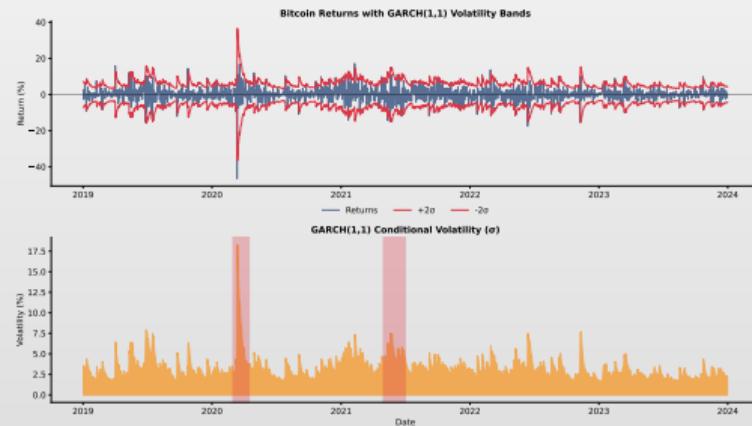


Q TSA\_ch5\_btc\_arch

## Pasul 3: Volatilitatea condiționată – Bitcoin

### Diagnostic GJR-GARCH(1,1)-t

- Ljung-Box pe  $z_t^2$ : p-value = 0.41  $\Rightarrow$  efecte ARCH eliminate
- Vârfuri volatilitate: martie 2020 (COVID), mai 2022 (Terra/Luna)
- Volatilitate zilnică: de la 1% (perioadele de volatilitate redusă) la >15% (crize)



## Pasul 4: Estimare și selecție modele – Bitcoin

### Parametri estimați

Model	$\omega$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\alpha+\beta$	$\nu$	AIC
GARCH-t	0.42	0.131	0.848	—	0.979	4.82	9284
EGARCH-t	0.08	0.184	0.976	-0.061	—	4.79	9276
GJR-t	0.40	0.088	0.854	0.078	0.976	4.85	<b>9271</b>

### Interpretare

- **GJR-GARCH-t câștigă** (cel mai mic AIC)
- $\nu \approx 4.8$ : cozi **mult mai groase** decât S&P 500 ( $\nu = 6.4$ )
- $\alpha = 0.131$  (BTC) vs 0.088 (S&P)  $\Rightarrow$  Bitcoin reacționează mai rapid la informații noi
- Leverage effect mai slab decât la acțiuni ( $\gamma_{\text{BTC}} = 0.078$  vs 0.126)



## Pasul 5: Backtesting rolling VaR – Bitcoin

### Teste statistice (2421 zile out-of-sample)

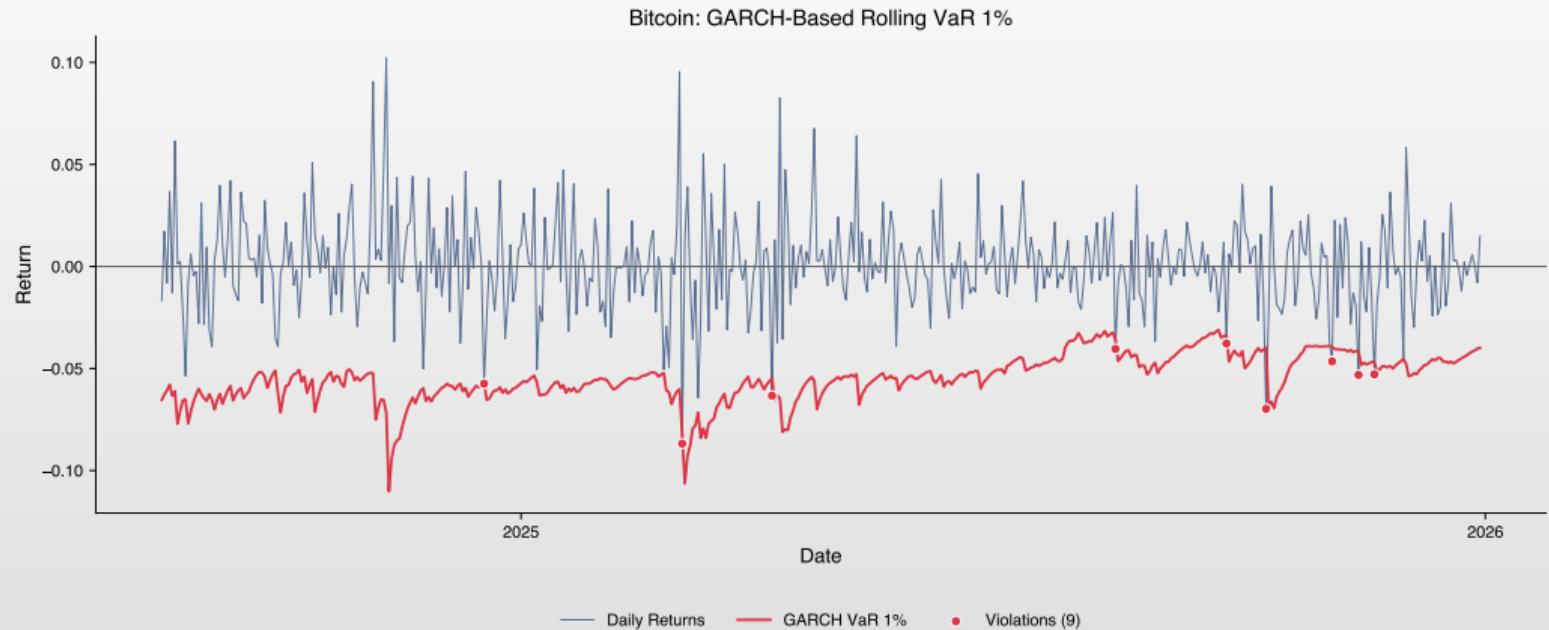
Test	Statistică	p-value	Decizia
Încălcări	28/2421 ( $\hat{p} = 1.16\%$ )	—	Zona verde
Kupiec (uc)	0.57	0.450	Acceptat
Christoffersen (ind)	0.94	0.333	Acceptat
Combinat (cc)	1.51	0.471	Acceptat

### Interpretare

- Volatilitatea variază de la 3% la 38% ⇒ rolling window esențial
- Toate testele **acceptate**: model valid pentru managementul riscului



## Pasul 5: Rolling VaR – Bitcoin



## Pasul 5: VaR rolling window – Bitcoin

### Rolling window GJR-GARCH-t (W=500 zile, VaR 1%)

- Estimare rolling pe fereastră de 500 zile cu prognoză VaR zilnică

### Caracteristici VaR rolling Bitcoin (2018–2024)

- VaR mediu: 9.34% ( $\approx$  EUR 93.400 / 1M EUR)
- VaR maxim: 37.54%  $\Rightarrow$  crash COVID martie 2020
- VaR minim: 2.90%  $\Rightarrow$  perioadă calmă
- Bitcoin: VaR rolling  $\sim 4 \times$  mai mare decât S&P 500 la aceeași expunere



## Comparație finală: S&P 500 vs Bitcoin

### Rezumat comparativ

	S&P 500	Bitcoin
Volatilitate medie	1.2%	3.5%
Kurtosis	13.8	12.1
Student-t $\nu$	6.42	4.82
Cel mai bun model	EGARCH(1,1)-t	GJR-GARCH(1,1)-t
Leverage effect	Puternic ( $\gamma = -0.12$ )	Moderat ( $\gamma = 0.078$ )
Half-life	~60 zile	~42 zile
Rolling VaR 1% mediu	<b>2.53%</b>	<b>9.34%</b>
Rolling VaR 1% maxim	<b>22.02%</b> (COVID)	<b>37.54%</b> (COVID)
Rolling ES 1% mediu	<b>3.42%</b>	<b>12.87%</b>
Kupiec	Acceptat ( $p=0.145$ )	Acceptat ( $p=0.450$ )
Christoffersen (ind)	Acceptat ( $p=0.375$ )	Acceptat ( $p=0.333$ )

### Concluzie generală

- Re-estimare GARCH la fiecare pas: Kupiec + Christoffersen **acceptate**
- Rolling window VaR: **obligatoriu**  $\Rightarrow$  VaR static complet inadecvat
- Student-t + model asimetric: **esențiale** pentru ambele piețe



## Formule principale

### Modele de volatilitate

- ARCH(q):**  $\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$
- GARCH(1,1):**  $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$
- EGARCH:**  $\ln(\sigma_t^2) = \omega + \alpha(|z_{t-1}| - \mathbb{E}[|z|]) + \gamma z_{t-1} + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2)$
- GJR-GARCH:**  $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 I_{t-1} + \beta \sigma_{t-1}^2$

### Proprietăți și măsuri

- Var. necond.:**  $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$     **Half-life:**  $HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha+\beta)}$
- VaR:**  $VaR_\alpha = z_\alpha \cdot \sigma_{T+1}$     **Staționaritate:**  $\alpha + \beta < 1$
- ARCH-LM:**  $LM = T \cdot R^2 \sim \chi^2(q)$



## Modelul DCC-GARCH multivariat

TSA ch5 dcc garch

### Motivație: De la volatilitate univariată la corelații dinamice

- GARCH univariat modelează volatilitatea **unei singure** serii
- În practică, portofoliile conțin **multiple active** cu corelații variabile în timp
- DCC-GARCH (Engle, 2002) modelează simultan volatilitățile și corelațiile

### Structura DCC în două etape

1. **Etapa 1:** Estimarea GARCH univariat pentru fiecare serie  $\Rightarrow D_t = \text{diag}(\sigma_{1,t}, \dots, \sigma_{K,t})$
2. **Etapa 2:** Modelarea corelațiilor condiționate:  $Q_t = (1 - a - b)\bar{Q} + a u_{t-1} u'_{t-1} + b Q_{t-1}$ , unde  $u_t = D_t^{-1} \varepsilon_t$  sunt reziduurile standardizate

### Matricea de corelație și covarianță condiționate

- Corelație:  $R_t = Q_t^{*-1} Q_t Q_t^{*-1}$ , cu  $Q_t^* = \text{diag}(\sqrt{q_{11,t}}, \dots, \sqrt{q_{KK,t}})$
- Covarianță:  $H_t = D_t R_t D_t$



## Estimare DCC-GARCH

Q TSA\_ch5\_dcc\_estimation

Estimare QML în două etape (Engle, 2002; Engle & Sheppard, 2001)

1. Etapa 1 — Estimarea parametrilor GARCH univariați:

$$\mathcal{L}_1(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K (\ln \sigma_{k,t}^2 + \varepsilon_{k,t}^2 / \sigma_{k,t}^2) \longrightarrow \hat{D}_t$$

2. Etapa 2 — Estimarea parametrilor de corelație ( $a, b$ ):

$$\mathcal{L}_2(a, b) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\ln |R_t| + u_t' R_t^{-1} u_t - u_t' u_t)$$

Proprietăți ale estimatorului

- Estimatorul QML este **consistent** chiar și sub misspecificarea distribuției condiționate
- Erori standard robuste via **sandwich estimator** (Bollerslev & Wooldridge, 1992)
- Avantaj computațional: reduce dimensiunea problemei de la  $O(K^2)$  la  $O(K) + O(2)$

## Proprietăți și extensii DCC

 TSA\_ch5\_dcc\_extensions

### Pozitiv-definire

- $H_t$**  este pozitiv definită dacă  $\bar{Q}$  este pozitiv definită și  $a + b < 1$ ,  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$
- Normalizarea prin  $Q_t^*$  garantează  $\rho_{ij,t} \in [-1, 1]$

### DCC asimetric (Cappiello, Engle & Sheppard, 2006)

Extensie cu **termen de levier** pentru a capta creșterea corelațiilor în perioade de criză:

$$Q_t = (1 - a - b)\bar{Q} - g\bar{N} + a u_{t-1} u'_{t-1} + b Q_{t-1} + g n_{t-1} n'_{t-1}$$

unde  $n_t = \mathbb{I}(u_t < 0) \odot u_t$  (componenta negativă),  $\bar{N} = \mathbb{E}[n_t n'_t]$

### Aplicații

- Optimizarea portofoliului:** ponderi Markowitz cu  $H_t$  variabilă în timp
- Risc sistemic:** corelații condiționate ca măsură de contagiune financiară
- Hedging dinamic:** rapoarte optime de acoperire  $h_t^* = \sigma_{12,t}/\sigma_{22,t}$



## Exercițiu AI: Gândire critică

Prompt de testat în ChatGPT / Claude / Copilot

"Folosind yfinance, descarcă prețurile zilnice de închidere S&P 500 (^GSPC) din 2018-01-01 până în 2024-12-31 (aprox. 1.750 observații). Calculează randamentele logaritmice zilnice. Testează efectele ARCH, ajustează un model GARCH(1,1) și prognozează volatilitatea pe următoarele 20 de zile de tranzacționare. Vreau cod Python complet."

**Exercițiu:**

1. Rulați prompt-ul într-un LLM la alegere și analizați critic răspunsul
2. Calculează randamentele logaritmice corect? Elimină media înainte de GARCH?
3. Cum testează efectele ARCH? Folosește testul LM al lui Engle?
4. Separă ecuația mediei de ecuația varianței?
5. Discută efectele asimetrice (GJR-GARCH, EGARCH)?



## Exercițiu AI: Gândire critică (cont.)

**Exercițiu (continuare):**

6. Estimările VaR sunt calculate din distribuția condițională?
7. Identificați cel puțin **două erori factuale** sau presupuneri discutabile din output-ul LLM
8. Verifică codul constrângerea de staționaritate  $\alpha + \beta < 1$ ? Dacă nu, adăugați-o
9. Comparați estimarea VaR a LLM-ului cu rezultatele din acest capitol. Sunt consistente?

**Atenție:** Codul generat de AI poate rula fără erori și arăta profesional. *Asta nu înseamnă că e corect.*



## Rezumat – capitolul 5: Modele de volatilitate

### Concepțe fundamentale

- ARCH(q)**: varianța condiționată depinde de pătratele erorilor trecute (Nobel 2003)
- GARCH(p,q)**: adaugă lag-uri ale varianței pentru persistență (GARCH(1,1) în 90% din cazuri)
- EGARCH**: permite leverage effect, fără restricții de pozitivitate
- GJR-GARCH/TGARCH**: captură asimetria cu variabile indicator

### Aplicații

- Măsurarea și prognoza riscului (VaR, ES)
- Prețul derivatelor, hedging dinamic, managementul portofoliului

### Sfat practic

- Începe cu GARCH(1,1), verifică leverage effect, alege distribuția care minimizează AIC/BIC.
  - ▶ Student-t adesea superior distribuției normale



## Întrebarea 1

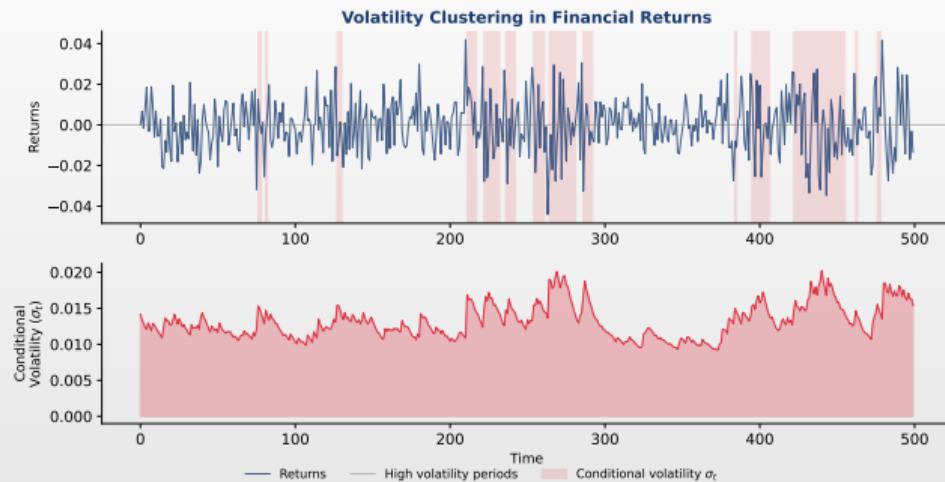
### Întrebare

- Ce descrie cel mai bine fenomenul de *volatility clustering* în seriile financiare?

### Variante de răspuns

- (A) Randamentele financiare sunt distribuite normal și independente
- (B) Perioadele de volatilitate ridicată sunt urmate de perioade de volatilitate ridicată, și invers
- (C) Volatilitatea este constantă în timp (homoscedasticitate)
- (D) Corelația dintre randamente este întotdeauna pozitivă

## Întrebarea 1: Răspuns



Răspuns: (B)

- Volatility clustering este un fapt stilizat fundamental. Implică faptul că varianța condiționată este **predictibilă**, motivând modelele ARCH/GARCH.

Q TSA\_ch5\_quiz1\_volatility\_clustering



## Întrebarea 2

### Întrebare

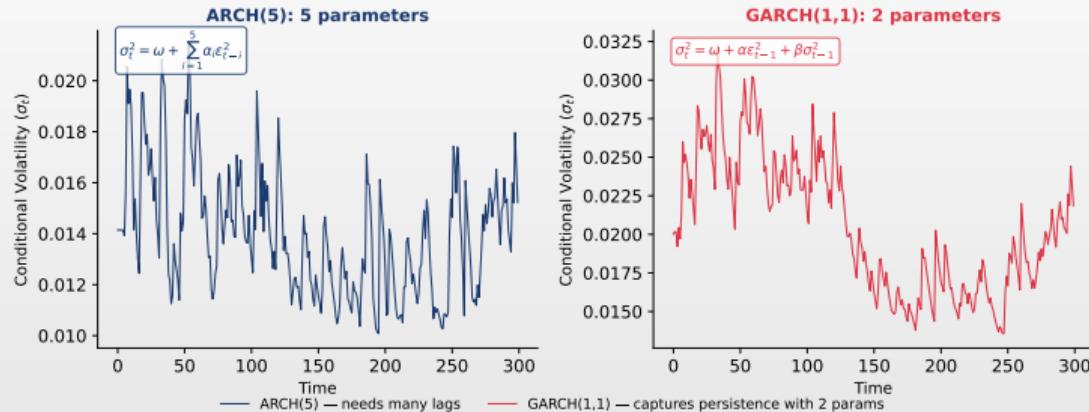
- Care este diferența principală dintre un model ARCH(q) și un model GARCH(p,q)?

### Variante de răspuns

- (A)** GARCH modelează media condiționată, ARCH modelează varianța
- (B)** ARCH include lag-uri ale varianței condiționate, GARCH nu
- (C)** GARCH adaugă lag-uri ale varianței condiționate ( $\sigma_{t-j}^2$ ) pe lângă pătratele erorilor
- (D)** ARCH este mai parcimonios decât GARCH

## Întrebarea 2: Răspuns

ARCH vs GARCH: Parsimony



Răspuns: (C)

- GARCH(1,1) captează aceeași persistență ca ARCH( $q$ ) cu doar 2 parametri în loc de  $q$ . În practică, GARCH(1,1) este suficient în 90% din cazuri.



## Întrebarea 3

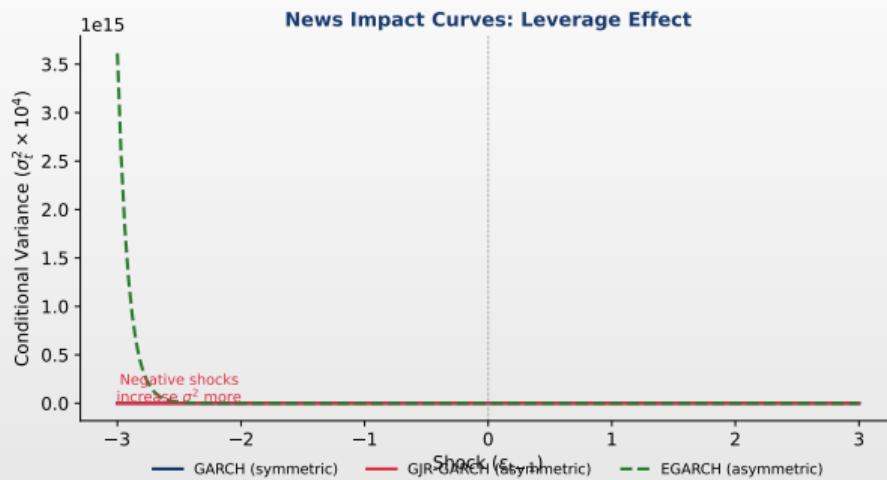
### Întrebare

- Ce este *leverage effect* și ce modele GARCH îl captează?

### Variante de răspuns

- (A)** řocurile pozitive cresc volatilitatea mai mult; captat de GARCH standard
- (B)** řocurile negative cresc volatilitatea mai mult; captat de EGARCH și GJR-GARCH
- (C)** Volatilitatea este simetrică; captat de toate modelele GARCH
- (D)** Efectul de levier financiar asupra prețului acțiunilor; captat de IGARCH

## Întrebarea 3: Răspuns



Răspuns: (B)

- Scăderile de preț cresc volatilitatea **mai mult** decât creșterile de aceeași magnitudine. GARCH standard folosește  $\varepsilon_{t-1}^2$ , pierzând informația de semn.



## Întrebarea 4

### Întrebare

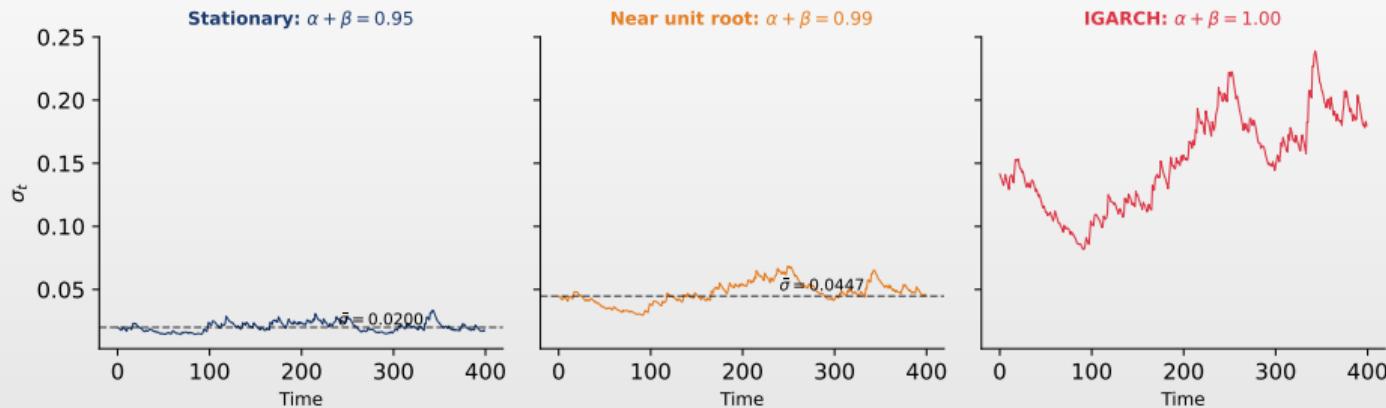
Care este condiția de staționaritate pentru un model GARCH(1,1)?

### Variante de răspuns

- (A)**  $\alpha + \beta = 1$
- (B)**  $\alpha > 0$  și  $\beta > 0$
- (C)**  $\alpha + \beta < 1$ , cu  $\omega > 0$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$
- (D)**  $\alpha \cdot \beta < 1$

## Întrebarea 4: Răspuns

GARCH(1,1) Stationarity:  $\alpha + \beta < 1$



Răspuns: (C)

- Asigură existența varianței necondiționate finite:  $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$ . Când  $\alpha + \beta = 1$  (IGARCH), varianța este infinită.



## Întrebarea 5

### Întrebare computațională aplicată

Un model GARCH(1,1) estimat pe randamente zilnice logaritmice (%) dă:  $\omega = 0.05$ ,  $\alpha = 0.15$ ,  $\beta = 0.82$ .

- (a) Calculați varianța necondiționată  $\bar{\sigma}^2$  și volatilitatea anualizată.
- (b) Calculați half-life-ul unui soc de volatilitate.
- (c) Pentru un portofoliu de 2 000 000 EUR, calculați VaR pe 1 zi la 1% sub:
  - ▶ Distribuția normală
  - ▶ Distribuția Student-*t* cu  $\nu = 5$  grade de libertate

(Folosiți  $\sigma_{T+1} = \bar{\sigma}$  pentru simplitate.)

## Întrebarea 5: Răspuns

### Rezolvare

(a)  $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta} = \frac{0.05}{1-0.97} = 1.667 \Rightarrow \bar{\sigma} = 1.291\% \text{ zilnic}$

$$\sigma_{an} = 1.291\% \times \sqrt{252} \approx 20.5\%$$

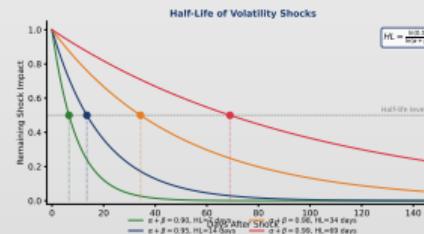
(b)  $HL = \frac{\ln 0.5}{\ln(\alpha+\beta)} = \frac{-0.693}{\ln(0.97)} = \frac{-0.693}{-0.0305} \approx 23 \text{ zile}$

(c) Valoare portofoliu  $V = 2,000,000 \text{ EUR}$ ,  $\sigma_{T+1} = 1.291\%$ :

**Normal:**  $\text{VaR}_{1\%} = 2.326 \times 0.01291 \times 2,000,000 = \mathbf{60\,066 \text{ EUR}}$

**Student- $t(5)$ :**  $t_{0.01,5} = 3.365$  scalat cu  $\sqrt{(\nu - 2)/\nu} = \sqrt{3/5}$ :

$$\text{VaR}_{1\%} = \frac{3.365}{\sqrt{5/3}} \times 0.01291 \times 2,000,000 = \mathbf{67\,300 \text{ EUR (+12\% vs Normal!)}}$$



## Bibliografie I

### Lucrări fundamentale ARCH/GARCH

- Engle, R.F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation, *Econometrica*, 50(4), 987–1007.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 31(3), 307–327.
- Nelson, D.B. (1991). Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach, *Econometrica*, 59(2), 347–370.

### Modele asimetrice și extensii

- Glosten, L.R., Jagannathan, R., & Runkle, D.E. (1993). On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks, *Journal of Finance*, 48(5), 1779–1801.
- Francq, C., & Zakoïan, J.-M. (2019). *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*, 2nd ed., Wiley.



## Bibliografie II

### Manuale și aplicații financiare

- Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*, 3rd ed., Wiley.
- Franke, J., Härdle, W.K., & Hafner, C.M. (2019). *Statistics of Financial Markets*, 4th ed., Springer.
- McNeil, A.J., Frey, R., & Embrechts, P. (2015). *Quantitative Risk Management*, 2nd ed., Princeton University Press.

### Resurse online și cod

- **Quantlet:** <https://quantlet.com> – Platformă de cod pentru metode cantitative
- **Quantinar:** <https://quantinar.com> – Platformă de învățare pentru metode cantitative
- **GitHub TSA:** [https://github.com/QuantLet/TSA/tree/main/TSA\\_ch5](https://github.com/QuantLet/TSA/tree/main/TSA_ch5) – Cod Python pentru acest capitol



## GARCH multivariat: extensii pentru portofolii

### De ce GARCH multivariat?

- Portofoliile necesită matricea de covarianță condiționată  $H_t = \text{Cov}(r_t | \mathcal{F}_{t-1})$
- $K$  active  $\Rightarrow K(K + 1)/2$  elemente unice în  $H_t \Rightarrow$  explozie dimensională

### DCC (Engle, 2002)

- $H_t = D_t R_t D_t$
- $D_t = \text{diag}(\sigma_{1,t}, \dots, \sigma_{K,t})$  — GARCH univariat
- $R_t$  — corelații dinamice (2 parametri)
- **Avantaj:** estimare în 2 etape, scalabil
- **Limită:** corelații simetrice

### BEKK (Engle-Kroner, 1995)

- $H_t = C'C + A'\epsilon'_{t-1}A + B'H_{t-1}B$
- Garantează  $H_t \succ 0$  (pozitiv-definită)
- **Avantaj:** model complet flexibil
- **Limită:**  $K^2$  parametri per matrice  $\Rightarrow$  practic doar  $K \leq 3$

### Implementare Python

```
from arch.univariate import ARCHModel — DCC via rmgarch (R) sau mgarch (Python/Stata)
```



## Bibliografie III

### Estimare și evaluare

- White, H. (1982). Maximum Likelihood Estimation of Misspecified Models, *Econometrica*, 50(1), 1–25.
- Hansen, P.R., & Lunde, A. (2005). A Forecast Comparison of Volatility Models: Does Anything Beat a GARCH(1,1)?, *Journal of Applied Econometrics*, 20(7), 873–889.
- Hansen, P.R., Huang, Z., & Shek, H.H. (2012). Realized GARCH: A Joint Model for Returns and Realized Measures of Volatility, *Journal of Applied Econometrics*, 27(6), 877–906.

### Frecvență înaltă și managementul riscului

- Corsi, F. (2009). A Simple Approximate Long-Memory Model of Realized Volatility, *Journal of Financial Econometrics*, 7(2), 174–196.
- Patton, A.J. (2011). Volatility Forecast Comparison Using Imperfect Volatility Proxies, *Journal of Econometrics*, 160(1), 246–256.
- Acerbi, C., & Székely, B. (2014). Backtesting Expected Shortfall, *Risk Magazine*, December.



# Vă Mulțumim!

## Întrebări?

Materialele cursului sunt disponibile la: <https://danpele.github.io/Time-Series-Analysis/>

