Capitolul 3: Modele ARIMA

Seminar

Cuprins Seminar

1. Test de Recapitulare
2. Întrebări Adevărat/Fals
3. Probleme Practice
4. Exemple Rezolvate
5. Analiză pe Date Reale
6. Subiecte de Discuție
7. Rezumat

Test 1: Ordinul de Integrare

Întrebare

O serie de timp Y_t necesită două diferențe pentru a deveni staționară. Care este ordinul ei de integrare?

A) $I(0)$
B) $I(1)$
C) $I(2)$
D) Nu poate fi determinat

Test 1: Ordinul de Integrare

Întrebare

O serie de timp Y_t necesită două diferențe pentru a deveni staționară. Care este ordinul ei de integrare?

- A) $I(0)$
- B) $I(1)$
- C) $I(2)$
- D) Nu poate fi determinat

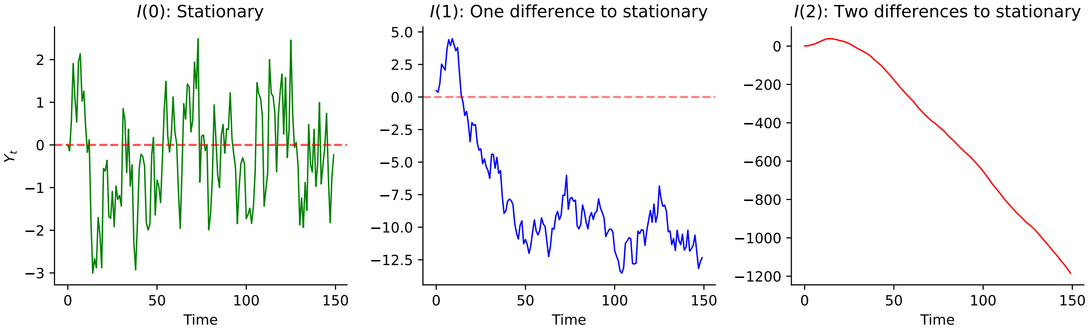
Răspuns: C – $I(2)$

Definiție: $Y_t \sim I(d)$ dacă $\Delta^d Y_t$ este staționară dar $\Delta^{d-1} Y_t$ nu este.
Exemplu: Dacă Y_t urmează $\Delta^2 Y_t = \varepsilon_t$, atunci:

- $\Delta Y_t = \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$ (încă are rădăcină unitară)
- $\Delta^2 Y_t = \varepsilon_t$ (zgomot alb, staționară)

Lumea reală: Nivelurile prețurilor pot fi $I(2)$ când inflația însăși este nestaționară.

Vizual: Procese Integrate



$I(0)$: staționară. $I(1)$: o diferență necesară. $I(2)$: două diferențe necesare pentru a deveni staționară.

Test 2: Proprietățile Mersului Aleatoriu

Întrebare

Pentru un mers aleatoriu $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$ cu $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$, care este $\text{Var}(Y_t)$?

- A) σ^2
- B) $t \cdot \sigma^2$
- C) σ^2/t
- D) $\sigma^2/(1 - \phi^2)$

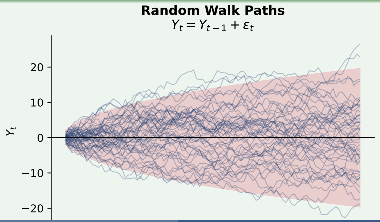
Test 2: Proprietățile Mersului Aleatoriu

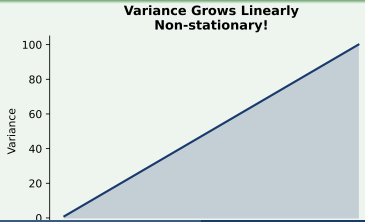
Întrebare

Pentru un mers aleatoriu $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$ cu $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$, care este $\text{Var}(Y_t)$?

- A) σ^2
- B) $t \cdot \sigma^2$
- C) σ^2 / t
- D) $\sigma^2 / (1 - \phi^2)$

Răspuns: B – $t \cdot \sigma^2$





Test 3: Ipotezele Testului ADF

Întrebare

În testul Augmented Dickey-Fuller, care este ipoteza nulă?

A) Seria este staționară
B) Seria are o rădăcină unitară
C) Seria nu are autocorelație
D) Seria este distribuită normal

Test 3: Ipotezele Testului ADF

Întrebare

În testul Augmented Dickey-Fuller, care este ipoteza nulă?

- A) Seria este staționară
- B) Seria are o rădăcină unitară
- C) Seria nu are autocorelație
- D) Seria este distribuită normal

Răspuns: B – Seria are o rădăcină unitară

Regresia ADF: $\Delta Y_t = \alpha + \gamma Y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p} \delta_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t$

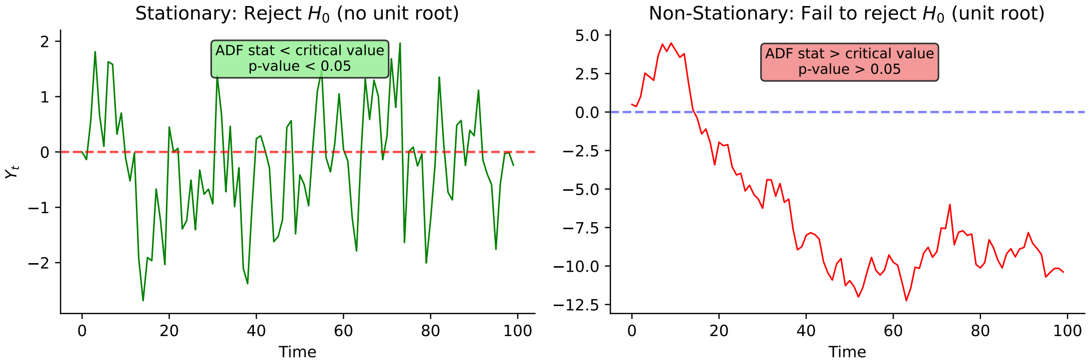
Ipoteze:

- $H_0 : \gamma = 0$ (rădăcină unitară, nestaționară)
- $H_1 : \gamma < 0$ (staționară)

Decizie: Respingem H_0 dacă statistica $t <$ valoarea critică (de ex., -2.86 la 5%)

Notă: Folosește distribuția specială Dickey-Fuller, nu t standard.

Vizual: Testul ADF



Stânga: staționară – ADF respinge rădăcina unitară. Dreapta: nestaționară – ADF nu respinge.

Test 4: Notația ARIMA

Întrebare

Ce înseamnă ARIMA(2,1,1)?

- A) AR(2) pe date diferențiate cu erori MA(1)
- B) AR(1) cu 2 diferențe și MA(1)
- C) MA(2) cu 1 diferență și AR(1)
- D) 2 lag-uri, 1 trend, 1 componentă sezonieră

Test 4: Notația ARIMA

Întrebare

Ce înseamnă ARIMA(2,1,1)?

- A) AR(2) pe date diferențiate cu erori MA(1)
- B) AR(1) cu 2 diferențe și MA(1)
- C) MA(2) cu 1 diferență și AR(1)
- D) 2 lag-uri, 1 trend, 1 componentă sezonieră

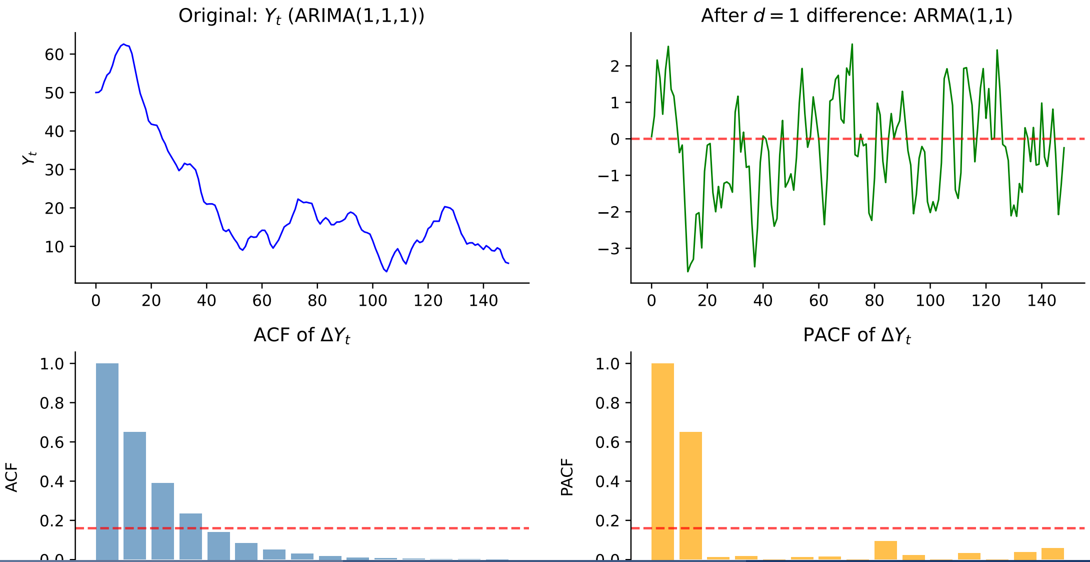
Răspuns: A – AR(2) pe date diferențiate cu erori MA(1)

ARIMA(p, d, q): $\phi(L)(1-L)^d Y_t = \theta(L)\varepsilon_t$
ARIMA(2,1,1) se expandează la:

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)(1 - L)Y_t = (1 + \theta_1 L)\varepsilon_t$$

Sau echivalent: $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)\Delta Y_t = (1 + \theta_1 L)\varepsilon_t$
Interpretare: Mai întâi diferențiem seria, apoi ajustăm ARMA(2,1) pe ΔY_t.

Vizual: Procesul ARIMA



Test 5: Operatorul de Diferență

Întrebare

Care este $(1 - L)^2 Y_t$ expandat?

- A) $Y_t - Y_{t-1}$
- B) $Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$
- C) $Y_t + 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$
- D) $Y_t - Y_{t-2}$

Test 5: Operatorul de Diferență

Întrebare

Care este $(1 - L)^2 Y_t$ expandat?

- A) $Y_t - Y_{t-1}$
- B) $Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$
- C) $Y_t + 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$
- D) $Y_t - Y_{t-2}$

Răspuns: B – $Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$

Expandare folosind teorema binomială:

$$(1 - L)^2 = 1 - 2L + L^2$$

Aplicare lui Y_t:

$$(1 - L)^2 Y_t = Y_t - 2L \cdot Y_t + L^2 \cdot Y_t = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$$

Notă: Aceasta este egală cu $\Delta(\Delta Y_t) = \Delta Y_t - \Delta Y_{t-1}$, “schimbarea schimbărilor”.

Test 6: KPSS vs ADF

Întrebare

Cum diferă testul KPSS de testul ADF?

- A) KPSS testează sezonalitatea, ADF testează trenduri
- B) KPSS are staționaritatea ca nulă, ADF are rădăcina unitară ca nulă
- C) KPSS este mai puternic decât ADF
- D) Nu există diferență

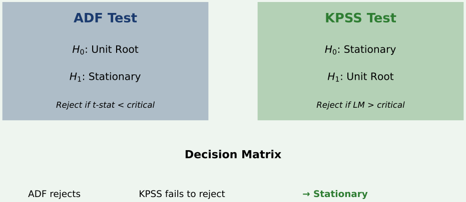
Test 6: KPSS vs ADF

Întrebare

Cum diferă testul KPSS de testul ADF?

- A) KPSS testează sezonalitatea, ADF testează trenduri
- B) KPSS are staționaritatea ca nulă, ADF are rădăcina unitară ca nulă
- C) KPSS este mai puternic decât ADF
- D) Nu există diferență

Răspuns: B – Ipoteze nule inversate



Test 7: Supradiferențierea

Întrebare

Dacă $Y_t \sim I(1)$ și calculăm $\Delta^2 Y_t$, ce se întâmplă?

- A) Obținem o serie staționară mai bună
- B) Introducem autocorelație negativă artificială
- C) Varianța scade
- D) Nu se schimbă nimic

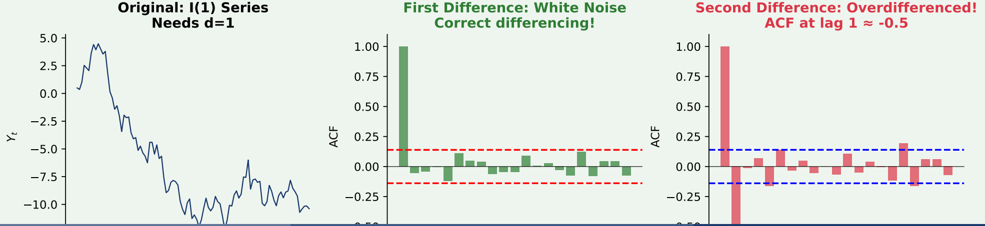
Test 7: Supradiferențierea

Întrebare

Dacă $Y_t \sim I(1)$ și calculăm $\Delta^2 Y_t$, ce se întâmplă?

- A. Obținem o serie staționară mai bună
- B. Introducem autocorelație negativă artificială
- C. Varianța scade
- D. Nu se schimbă nimic

Răspuns: B – Autocorelație negativă artificială



Test 8: Varianța Prognozei

Întrebare

Pentru un model ARIMA(0,1,0) (mers aleatoriu), cum se comportă varianța prognozei când orizontul h crește?

- A) Rămâne constantă
- B) Scade la zero
- C) Crește liniar cu h
- D) Convergă la o limită finită

Test 8: Varianța Prognozei

Întrebare

Pentru un model ARIMA(0,1,0) (mers aleatoriu), cum se comportă varianța prognozei când orizontul h crește?

- A) Rămâne constantă
- B) Scade la zero
- C) Crește liniar cu h
- D) Convergă la o limită finită

Răspuns: C – Crește liniar cu h

Prognoza mersului aleatoriu: $\hat{Y}_{T+h|T} = Y_T$ (cea mai bună prognoză este valoarea curentă)
Eroarea de prognoză: $Y_{T+h} - \hat{Y}_{T+h|T} = \sum_{i=1}^{h} \varepsilon_{T+i}$
Varianță:

$$\text{Var}(Y_{T+h} - \hat{Y}_{T+h|T}) = h\sigma^2$$

IC 95%: $Y_T \pm 1.96\sqrt{h}\sigma$ (se lărgește cu $\sqrt{h}$)

Test 9: Puterea Testului de Rădăcină Unitară

Întrebare

Testul ADF are putere scăzută când:

- A) Dimensiunea eșantionului este foarte mare
- B) Rădăcina adevărată este aproape dar nu egală cu 1
- C) Seria nu are trend
- D) Seria este clar staționară

Test 9: Puterea Testului de Rădăcină Unitară

Întrebare

Testul ADF are putere scăzută când:

- A) Dimensiunea eșantionului este foarte mare
- B) Rădăcina adevărată este aproape dar nu egală cu 1
- C) Seria nu are trend
- D) Seria este clar staționară

Răspuns: B – Rădăcina aproape dar nu egală cu 1

Exemplu: AR(1) cu $\phi = 0.95$ vs mers aleatoriu ($\phi = 1$)
Problemă: Ambele au modele ACF similare (descreștere lentă), dar una este staționară!
Putere scăzută înseamnă: Probabilitate mare de eroare de tip II (eșec în respingerea lui H_0 fals)
Soluții:

- Dimensiuni mai mari ale eșantionului
- Testul Phillips-Perron (robust la heteroscedasticitate)
- Teste de rădăcină unitară pe paneluri (serii multiple)

Test 10: Selecția Modelului ARIMA

Întrebare

După o diferențiere, ACF arată un vârf doar la lag 1, și PACF descrește. Modelul potrivit este:

- A) ARIMA(1,1,0)
- B) ARIMA(0,1,1)
- C) ARIMA(1,1,1)
- D) ARIMA(0,2,1)

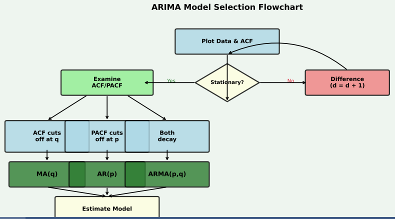
Test 10: Selecția Modelului ARIMA

Întrebare

După o diferențiere, ACF arată un vârf doar la lag 1, și PACF descrește. Modelul potrivit este:

- A) ARIMA(1,1,0)
- B) ARIMA(0,1,1)
- C) ARIMA(1,1,1)
- D) ARIMA(0,2,1)

Răspuns: B – ARIMA(0,1,1)



Test 11: Staționaritate în Trend vs Staționaritate în Diferențe

Întrebare

Un proces staționar în trend devine staționar prin:

- A) Luarea diferențelor de ordinul întâi
- B) Eliminarea trendului determinist prin regresie
- C) Luarea diferențelor de ordinul doi
- D) Aplicarea ajustării sezoniere

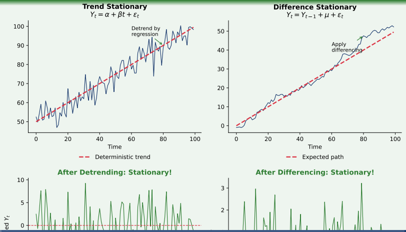
Test 11: Staționaritate în Trend vs Staționaritate în Diferențe

Întrebare

Un proces staționar în trend devine staționar prin:

- (A) Luarea diferențelor de ordinul întâi
- (B) Eliminarea trendului determinist prin regresie
- (C) Luarea diferențelor de ordinul doi
- (D) Aplicarea ajustării sezoniere

Răspuns: B – Eliminarea trendului determinist prin regresie



Test 12: Invertibilitatea ARIMA

Întrebare

ARIMA(0,1,1) cu $\theta_1 = 1.2$ este:

- A) Staționară și invertibilă
- B) Nestaționară dar invertibilă
- C) Nestaționară și neinvertibilă
- D) Staționară dar neinvertibilă

Test 12: Invertibilitatea ARIMA

Întrebare

ARIMA(0,1,1) cu $\theta_1 = 1.2$ este:

- A) Staționară și invertibilă
- B) Nestaționară dar invertibilă
- C) Nestaționară și neinvertibilă
- D) Staționară dar neinvertibilă

Răspuns: C – Nestaționară și neinvertibilă

Verificare staționaritate: $d = 1$ înseamnă o rădăcină unitară $\Rightarrow$ Nestaționară
Verificare invertibilitate: Polinomul MA este $\theta(z) = 1 + 1.2z$

- Rădăcină: $z = -1/1.2 = -0.833$ (în interiorul cercului unitate)
- Invertibilitatea necesită rădăcina în afara cercului unitate
- $|\theta_1| = 1.2 > 1 \Rightarrow$ Neinvertibilă

Corecție: Rescrieți cu $\theta^* = 1/1.2 = 0.833$ și ajustați varianța.

Test 13: Regresia Falsă

Întrebare

Regresând un mers aleatoriu pe un alt mers aleatoriu independent, de obicei se obține:

- A) Nicio relație semnificativă
- B) R^2 ridicat și statistici t semnificative (fals)
- C) Corelație negativă
- D) Multicolinearitate perfectă

Test 13: Regresia Falsă

Întrebare

Regresând un mers aleatoriu pe un alt mers aleatoriu independent, de obicei se obține:

- A) Nicio relație semnificativă
- B) R^2 ridicat și statistici t semnificative (fals)
- C) Corelație negativă
- D) Multicolinearitate perfectă

Răspuns: B – R^2 ridicat și statistici t semnificative (fals)

Granger & Newbold (1974): Fenomenul regresiei false

Simptome:

- R^2 ridicat (adesea > 0.9) între serii neînrudite
- Statistici t semnificative
- Statistică Durbin-Watson foarte scăzută ($\ll 2$)
- Reziduuri nestaționare

Test 14: Prognoza pe Termen Lung

Întrebare

Prognoza pe termen lung din ARIMA(1,1,0) cu $\phi_1 = 0.7$ convergă la:

A) Zero
B) Media necondiționată
C) O extrapolare liniară a trendului
D) Ultima valoare observată

Test 14: Prognoza pe Termen Lung

Întrebare

Prognoza pe termen lung din ARIMA(1,1,0) cu $\phi_1 = 0.7$ convergă la:

A) Zero
B) Media necondiționată
C) O extrapolare liniară a trendului
D) Ultima valoare observată

Răspuns: C – O extrapolare liniară a trendului

Model: $(1 - \phi_1 L)(1 - L)Y_t = c + \varepsilon_t$
Prognoza pe termen lung: Pentru modelele I(1) cu derivă c:

$$\hat{Y}_{T+h} \approx Y_T + h \cdot \frac{c}{1 - \phi_1}$$

Diferențe cheie:

- ARMA staționară: Prognozele $\rightarrow$ media necondiționată

Întrebări Adevărat/Fals

Întrebare

Determinați dacă fiecare afirmație este Adevărată sau Falsă:

1. Un proces I(2) necesită două diferențe pentru a deveni staționar.
2. Testul ADF include întotdeauna un termen constant.
3. ARIMA(0,1,0) este un alt nume pentru un mers aleatoriu.
4. Diferențierea unei serii staționare o face “mai staționară.”
5. Testul KPSS are staționaritatea ca ipoteză nulă.
6. Modelele ARIMA pot captura doar modele liniare.

Răspunsul pe slide-ul următor...

Adevărat/Fals: Soluții

Răspunsuri

1. Un proces I(2) necesită două diferențe pentru a deveni staționar. **ADEVĂRAT**
   I(d) înseamnă că d diferențe sunt necesare. I(2) = două rădăcini unitare.
2. Testul ADF include întotdeauna un termen constant. **FALS**
   Alegeți: fără constantă, doar constantă, sau constantă + trend.
3. ARIMA(0,1,0) este un alt nume pentru un mers aleatoriu. **ADEVĂRAT**
   $(1 - L)Y_t = \varepsilon_t \Rightarrow Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$.
4. Diferențierea unei serii staționare o face "mai staționară." **FALS**
   Supradiferențierea creează MA neinvertibil; afectează performanța modelului.
5. Testul KPSS are staționaritatea ca ipoteză nulă. **ADEVĂRAT**
   KPSS: H_0 = staționară. Opus testului ADF.
6. Modelele ARIMA pot captura doar modele liniare. **ADEVĂRAT**
   ARIMA este liniar în parametri. Modelele neliniare necesită GARCH, rețele neuronale, etc.

Problema 1: Testarea Rădăcinii Unitare

Exercițiu

Aveți date trimestriale de PIB pentru 80 de trimestre. Testul ADF (cu constantă și trend) dă o statistică de test de -2.85. Valoarea critică la 5% este -3.41.

1. Care este concluzia dumneavoastră despre staționaritate?
2. Ce ați face în continuare?

Problema 1: Testarea Rădăcinii Unitare

Exercițiu

Aveți date trimestriale de PIB pentru 80 de trimestre. Testul ADF (cu constantă și trend) dă o statistică de test de -2.85. Valoarea critică la 5% este -3.41.

1. Care este concluzia dumneavoastră despre staționaritate?
2. Ce ați face în continuare?

Soluție

1. Deoarece $-2.85 > -3.41$, **nu respingem** H_0. Datele par să aibă o rădăcină unitară (nestaționare).
2. Luați prima diferență ΔY_t și repetați testul ADF pe seria diferențiată pentru a confirma că este acum staționară.

Problema 2: Identificarea Modelului

Exercițiu

După diferențierea o dată a unei serii de timp, ACF arată:

- Vârf semnificativ la lag 1 ($\rho_1 = 0.4$)
- Toate celelalte lag-uri nesemnificative

PACF arată descreștere graduală.
Ce model ARIMA este sugerat?

Problema 2: Identificarea Modelului

Exercițiu

După diferențierea o dată a unei serii de timp, ACF arată:

- Vârf semnificativ la lag 1 ($\rho_1 = 0.4$)
- Toate celelalte lag-uri nesemnificative

PACF arată descreștere graduală.
Ce model ARIMA este sugerat?

Soluție

- ACF se întrerupe după lag 1 $\Rightarrow$ componentă MA(1)
- PACF descrește $\Rightarrow$ Confirmă structura MA
- Deoarece am diferențiat o dată: $d = 1$

Model sugerat: ARIMA(0,1,1) sau IMA(1,1)

Problema 3: Ecuația ARIMA

Exercițiu

Scrieți ecuația completă pentru ARIMA(1,1,1):

$$(1 - \phi_1 L)(1 - L)Y_t = c + (1 + \theta_1 L)\varepsilon_t$$

Expandați complet în termenii Y_t, Y_{t-1}, Y_{t-2}, etc.

Problema 3: Ecuația ARIMA

Exercițiu

Scrieți ecuația completă pentru ARIMA(1,1,1):

$$(1 - \phi_1 L)(1 - L)Y_t = c + (1 + \theta_1 L)\varepsilon_t$$

Expandați complet în termenii Y_t, Y_{t-1}, Y_{t-2}, etc.

Soluție

Expandând $(1 - \phi_1 L)(1 - L) = 1 - L - \phi_1 L + \phi_1 L^2 = 1 - (1 + \phi_1)L + \phi_1 L^2$:

$$Y_t - (1 + \phi_1)Y_{t-1} + \phi_1 Y_{t-2} = c + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Sau echivalent:

$$Y_t = c + (1 + \phi_1)Y_{t-1} - \phi_1 Y_{t-2} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Problema 4: Calculul Prognozei

Exercițiu

Dat ARIMA(0,1,1): $\Delta Y_t = \varepsilon_t + 0.3\varepsilon_{t-1}$

La momentul T: $Y_T = 100$, $\hat{\varepsilon}_T = 2$, $\sigma^2 = 4$

Calculați:

1. $\hat{Y}_{T+1|T}$ (prognoza la un pas)
2. $\hat{Y}_{T+2|T}$ (prognoza la doi pași)

Problema 4: Calculul Prognozei

Exercițiu

Dat ARIMA(0,1,1): $\Delta Y_t = \varepsilon_t + 0.3\varepsilon_{t-1}$
La momentul T: $Y_T = 100$, $\hat{\varepsilon}_T = 2$, $\sigma^2 = 4$
Calculați:

1. $\hat{Y}_{T+1|T}$ (prognoza la un pas)
2. $\hat{Y}_{T+2|T}$ (prognoza la doi pași)

Soluție

1. $\hat{Y}_{T+1|T} = Y_T + 0.3\hat{\varepsilon}_T = 100 + 0.3(2) = 100.6$
2. $\hat{Y}_{T+2|T} = \hat{Y}_{T+1|T} + 0.3 \cdot 0 = 100.6 + 0 = 100.6$
   (Șocurile viitoare $\varepsilon_{T+1}, \varepsilon_{T+2}$ sunt prognozate ca 0)

Problema 5: Intervale de Încredere

Exercițiu

Continuând de la Problema 4, calculați intervalele de încredere de 95% pentru $\hat{Y}_{T+1|T}$ și $\hat{Y}_{T+2|T}$.
Reamintim: $\sigma^2 = 4$, $\theta_1 = 0.3$

Problema 5: Intervale de Încredere

Exercițiu

Continuând de la Problema 4, calculați intervalele de încredere de 95% pentru $\hat{Y}_{T+1|T}$ și $\hat{Y}_{T+2|T}$.
Reamintim: $\sigma^2 = 4$, $\theta_1 = 0.3$

Soluție

Pentru IMA(1,1), ponderile MA(∞) sunt $\psi_0 = 1$, $\psi_j = 1 + \theta_1$ pentru $j \geq 1$.
1 pas: $\text{Var}(e_{T+1}) = \sigma^2 \psi_0^2 = 4$, deci $SE = 2$
$100.6 \pm 1.96(2) = [96.68, 104.52]$
2 pași: $\text{Var}(e_{T+2}) = \sigma^2(\psi_0^2 + \psi_1^2) = 4(1 + 1.3^2) = 10.76$, $SE = 3.28$
$100.6 \pm 1.96(3.28) = [94.17, 107.03]$

Exemplu: Testarea Rădăcinii Unitare în Prețurile Acțiunilor

Scenariu

Aveți prețuri de închidere zilnice pentru o acțiune pe parcursul a 500 de zile. Vreți să determinați dacă prețurile urmează un mers aleatoriu.

Abordare Pas cu Pas

1. **Inspecție vizuală**: Reprezentați grafic prețurile – probabil arată trend
2. **Testul ADF pe prețuri**: Așteptați să nu respingeți H_0 (rădăcină unitară)
3. **Luați randamentele logaritmice**: $r_t = \ln(P_t/P_{t-1}) = \Delta \ln(P_t)$
4. **Testul ADF pe randamente**: Ar trebui să respingeți H_0 (staționară)
5. **Concluzie**: Log prețurile sunt $I(1)$, randamentele sunt $I(0)$

Exemplu: Box-Jenkins pentru Date de Inflație

Scenariu

Rate lunare ale inflației pentru 10 ani. Construiți un model ARIMA.

Flux de lucru

1. **Reprezentare grafică și test**: ADF sugerează limită – încercați atât $d = 0$ cât și $d = 1$
2. **Dacă** $d = 0$: Ajustați modele ARMA, comparați AIC
3. **Dacă** $d = 1$: Examinați ACF/PACF ale lui ΔY_t
   - ACF: vârf la lag 1, apoi se întrerupe
   - PACF: descrește
   - $\Rightarrow$ Încercați ARIMA(0,1,1)
4. **Estimare**: Ajustați ARIMA(0,1,1), verificați coeficienții
5. **Diagnostic**: Ljung-Box pe reziduuri (vrem $p > 0.05$)
6. **Comparare**: AIC al ARIMA(0,1,1) vs ARMA(1,1) pe niveluri

Exemplu: Interpretarea Rezultatelor Python

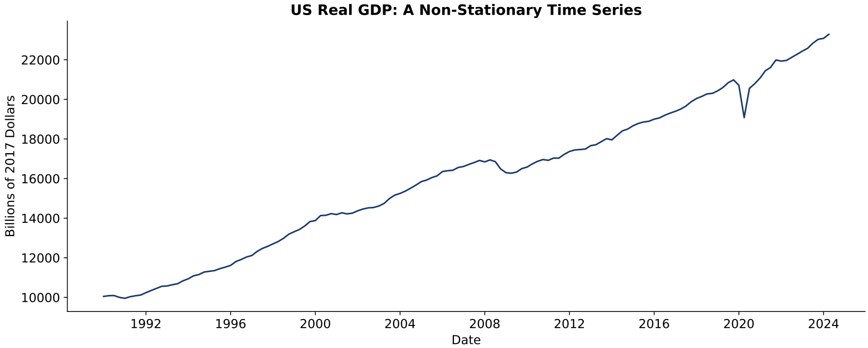
Rezultate ARIMA din statsmodels

```
                           ARIMA Model Results
==============================================================
Dep. Variable:            D.y    No. Observations:     99
Model:              ARIMA(1,1,1)    AIC                  285.32
                                    BIC                  295.63
==============================================================
                 coef     std err      z      P>|z|
--------------------------------------------------------------
const          0.0521     0.048     1.085    0.278
ar.L1          0.4532     0.102     4.443    0.000
ma.L1         -0.2891     0.118    -2.450    0.014
sigma2         1.2340     0.176     7.011    0.000
```

Interpretare

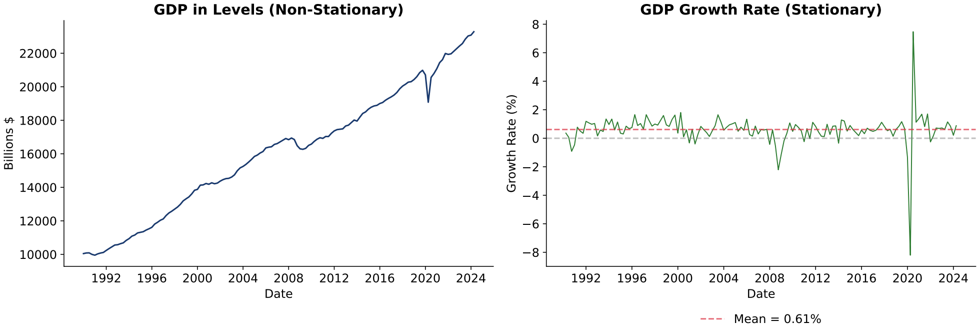
- Coeficientul AR (0.45) este semnificativ, coeficientul MA (-0.29) este semnificativ
- Constanta (0.052) nesemnificativă – am putea seta $c = 0$
- Verificare: $|\phi_1| < 1$ (staționară), $|\theta_1| < 1$ (invertibilă) – OK!

Studiu de Caz: PIB Real SUA (1990–2024)



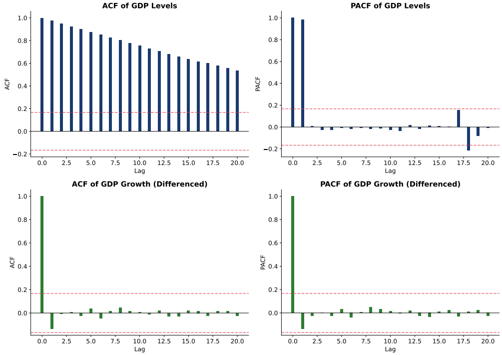
- PIB Real SUA în miliarde de dolari 2017 (date trimestriale)
- **Trend ascendent** clar – tipic pentru seriile macroeconomice
- Scăderi notabile în timpul recesiunilor (2008-2009, 2020)
- Nestaționară: necesită diferențiere înainte de modelarea ARIMA

Staționaritate Prin Diferențiere



- **Stânga**: PIB în niveluri – trend ascendent clar (nestaționară)
- **Dreapta**: Rata de creștere a PIB $= \Delta \log(Y_t) \times 100$ – staționară
- Prima diferențiere a log PIB elimină trendul stocastic
- Rata de creștere fluctuează în jurul unei medii constante ($\approx 0.6\%$ trimestrial)

ACF/PACF: Niveluri vs Diferențiate



- **Rândul de sus**: ACF/PACF ale nivelurilor PIB – descreștere lentă indică nestaționaritate
- **Rândul de jos**: ACF/PACF ale creșterii PIB – mai ales în limitele de încredere
- Modelul sugerează că un model ARIMA de ordin mic este potrivit

Rezultate Estimare ARIMA: Creșterea PIB SUA

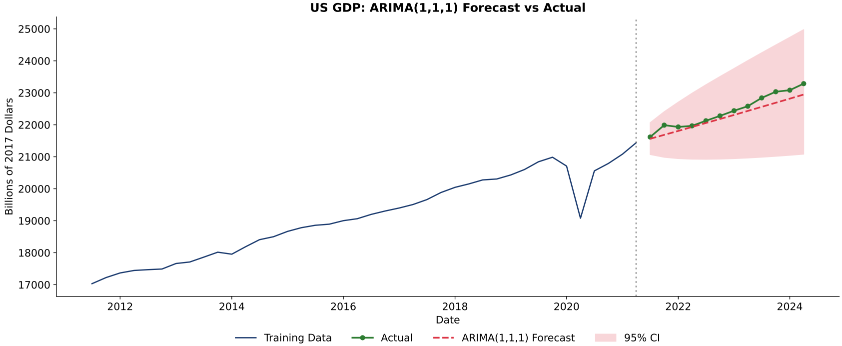
Model: ARIMA$(1,1,1)$ pe log(PIB)

Parametru	Estimat	Eroare Std.	z-stat	valoare-p
ϕ_1 (AR.L1)	0.312	0.185	1.69	0.091
θ_1 (MA.L1)	-0.087	0.203	-0.43	0.668
σ^2	0.00012	–	–	–

Interpretare

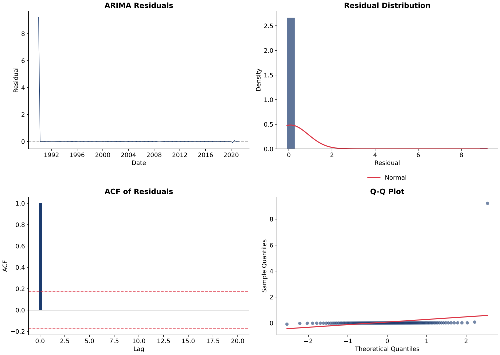
- ARIMA de ordin mic captează rezonabil dinamica PIB
- Coeficientul AR(1) pozitiv – creșterea PIB arată persistență
- Alternativă: mersul aleatoriu simplu (ARIMA(0,1,0)) adesea competitiv

Prognoză: ARIMA vs Real



- Albastru: date istorice de antrenare; Verde: date reale de test
- Roșu întrerupt: prognoze ARIMA cu interval de încredere 95%
- Prognozele captează direcția generală a trendului
- Intervalele de încredere se lărgesc pe măsură ce orizontul de prognoză crește

Diagnostice Model: Analiza Reziduurilor



- Reziduurile nu arată modele sistematice în timp
- Distribuție aproximativ normală (histogramă și grafic Q-Q)
- ACF-ul reziduurilor în limite – fără autocorelație semnificativă rămasă
- Modelul captează adecvat procesul generator de date

Discuție: Trenduri Deterministe vs Stocastice

Întrebare Cheie

De ce este important să distingem între trendurile deterministe și stocastice?

Puncte de Discuție

- **Consecințele tratamentului greșit**:
  - Detrendarea unei rădăcini unitare $\Rightarrow$ staționaritate falsă
  - Diferențierea unei serii staționare în trend $\Rightarrow$ supradiferențiere
- **Interpretare economică**:
  - Trend determinist: șocurile sunt temporare
  - Trend stocastic: șocurile au efecte permanente
- **Implicații de politică**:
  - O recesiune reduce permanent PIB-ul, sau economia revine la trend?

Discuție: Criterii de Selecție a Modelului

Întrebare Cheie

Când ar trebui să folosiți AIC vs BIC pentru selecția modelului ARIMA?

Considerații

- **AIC**: Minimizează eroarea de predicție, poate supraajusta
  - Mai bun pentru prognoză
  - Tinde să selecteze modele mai mari
- **BIC**: Selecție consistentă a modelului, mai parsimonios
  - Mai bun pentru identificarea modelului "adevărat"
  - Penalizează complexitatea mai puternic
- **Sfat practic**: Raportați ambele, preferați BIC dacă diferă substanțial

Discuție: Limitările ARIMA

Întrebare Cheie

Care sunt principalele limitări ale modelelor ARIMA?

Puncte de Discuție

- **Liniaritate**: Nu poate captura dinamici neliniare
- **Varianță constantă**: Presupune homoscedasticitate (fără efecte GARCH)
- **Fără rupturi structurale**: Parametrii presupuși constanți
- **Univariat**: Ignoră relațiile cu alte variabile
- **Simetric**: Tratează șocurile pozitive și negative la fel
- **Prognoze pe termen lung**: Incertitudinea crește rapid

Extensii

Aceste limitări motivează GARCH (volatilitate), VAR (multivariat), modele cu schimbări de regim, etc.

Puncte Cheie din Seminarul de Astăzi

Ce am Acoperit

1. **Integrare și diferențiere**: Procesele $I(d)$ necesită d diferențe
2. **Testarea rădăcinii unitare**: ADF testează H_0: rădăcină unitară; KPSS testează H_0: staționară
3. **ARIMA(p,d,q)**: Combină ARMA cu diferențierea
4. **Identificarea modelului**: Folosiți modelele ACF/PACF și criteriile informaționale
5. **Prognoză**: Prognoze punctuale și intervale de încredere în creștere

Următorul Seminar

Exerciții practice Python cu date economice reale:

- Testarea rădăcinii unitare cu `statsmodels`
- Auto-ARIMA cu `pmdarima`
- Prognoză și diagnostice model