



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 0: Fundamente



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

Obiective de învățare

La sfârșitul acestui capitol, veți putea să:

1. Definiți seriile de timp și să le distingeți de datele transversale și de panel
2. Descompuneți seriile de timp în componente de trend-ciclu, sezonalitate și reziduuri
3. Aplicați metodele de netezire exponențială: SES (Simple Exponential Smoothing), Holt, Holt-Winters
Cadrul ETS (Error-Trend-Seasonality) pentru selecția automată a modelului
4. Evaluați prognozele folosind MAE (Mean Absolute Error), RMSE (Root Mean Squared Error)
Metrics procentuale: MAPE (Mean Absolute Percentage Error), sMAPE (symmetric MAPE)
5. Implementați separarea antrenare/validare/test și validarea încrucișată
6. Modelați sezonalitatea folosind variabile dummy sau termeni Fourier
7. Eliminați trendul și sezonalitatea prin metode adecvate
8. Distingeți între trendurile deterministe și stochastice

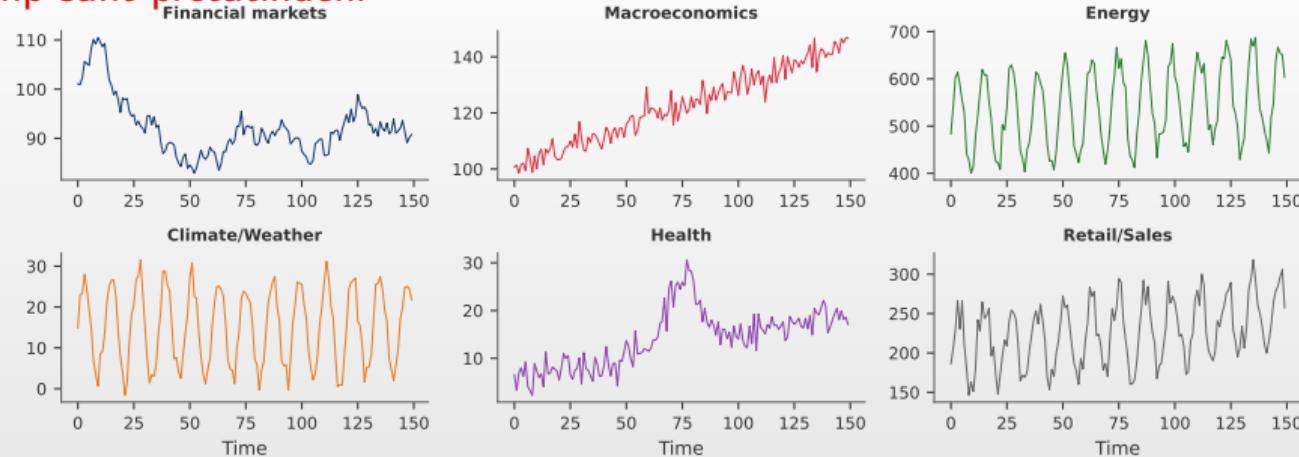


Cuprins

- Motivație
- Ce Este o Serie de timp?
- Descompunerea seriilor de timp
- Metode de Netezire Exponențială
- Evaluarea prognozei
- Modelarea sezonalității
- Gestionarea Trendului și Sezonalității
- Utilizare IA
- Rezumat
- Bibliografie



Seriile de timp sunt prețutindeni

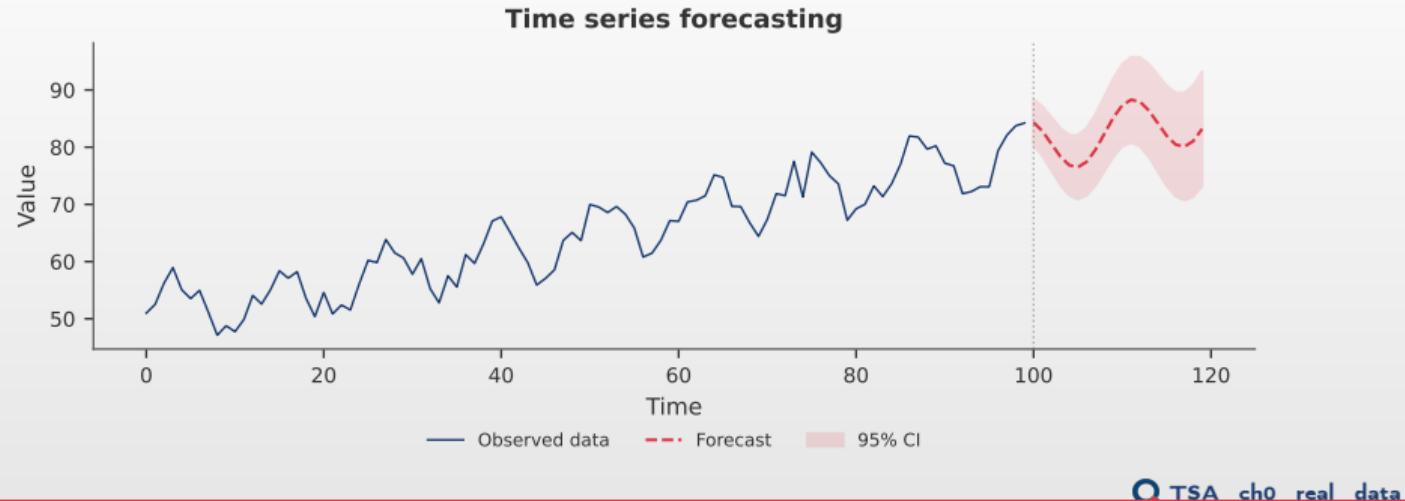


○ TSA cho real data

- Finanțe:** Prețuri acțiuni, cursuri valutare, volume
- Economie:** PIB (Produs Intern Brut), șomaj, rate ale inflației
- Afaceri:** Vânzări, trafic web, cerere
- Știință:** Temperatură, poluare, semne vitale



De ce studiem seriile de timp?



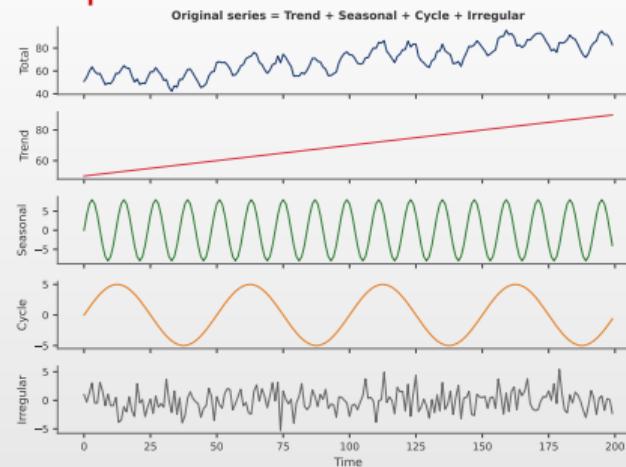
TSA ch0 real data

Obiectiv principal: prognoza

- Folosim tiparele istorice pentru a prezice valori viitoare
- Esențial pentru planificarea afacerilor, managementul riscului și deciziile de politică



Înțelegerea structurii seriilor de timp



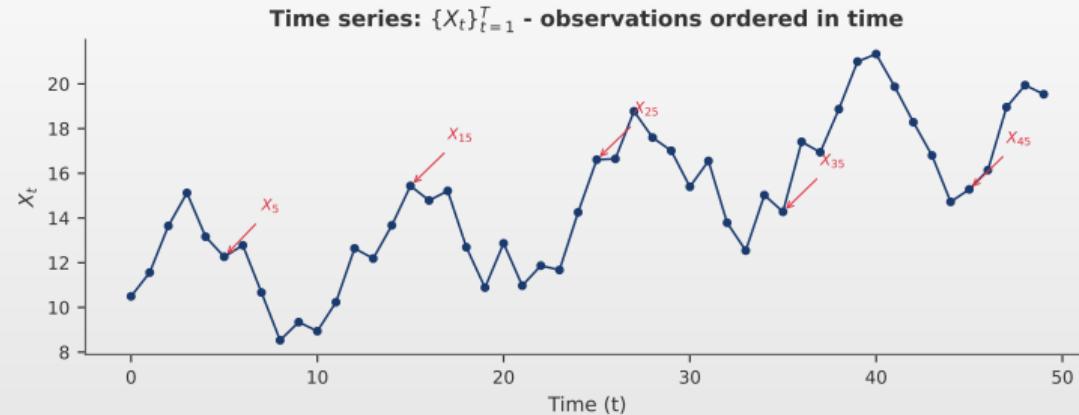
Q TSA ch0 real data

Descompunere

- Orice serie de timp poate fi descompusă în: **trend-ciclu + sezonalitate + zgomot**



Serie de timp: ilustrație conceptuală



[TSA_ch0_definition](#)

Elemente fundamentale

- **Notăție formală:** X_t = valoarea la momentul t , $t \in \{1, 2, \dots, T\}$
- **Autocorelație:** $\rho_k = \text{Corr}(X_t, X_{t-k})$ — măsoară dependența temporală
- Funcția ACF (Autocorrelation Function) cuantifică această dependență



Definiția unei serii de timp

Definiție 1 (Serie de timp)

- **Serie de timp:** secvență de observații $\{X_t\}$ indexate după timp: $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ unde \mathcal{T} este o mulțime de indici reprezentând momente de timp

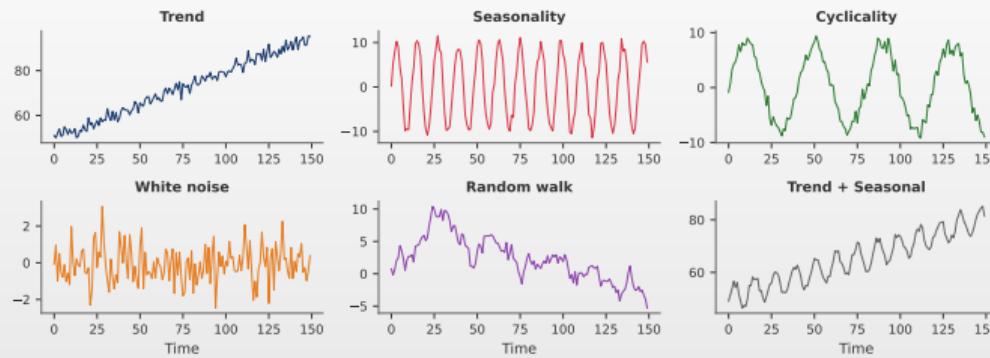
Caracteristici

- **Ordonate:** ordine temporală naturală
- **Dependente:** observațiile consecutive sunt corelate
- **Discrete/Continue:** $t = 1, 2, 3, \dots$

Notație

- X_t : observația la momentul t
- $\{X_t\}_{t=1}^T$: serie cu T observații

Tipare comune în seriile de timp



Q TSA_ch0_definition

Tipuri de tipare

- Trend:** creștere sau scădere pe termen lung
- Sezonier:** tipare periodice regulate
- Ciclic:** fluctuații pe termen mediu (2–10 ani)
- Aleatoriu:** fluctuații imprevizibile



Exemplu practic: date financiare reale



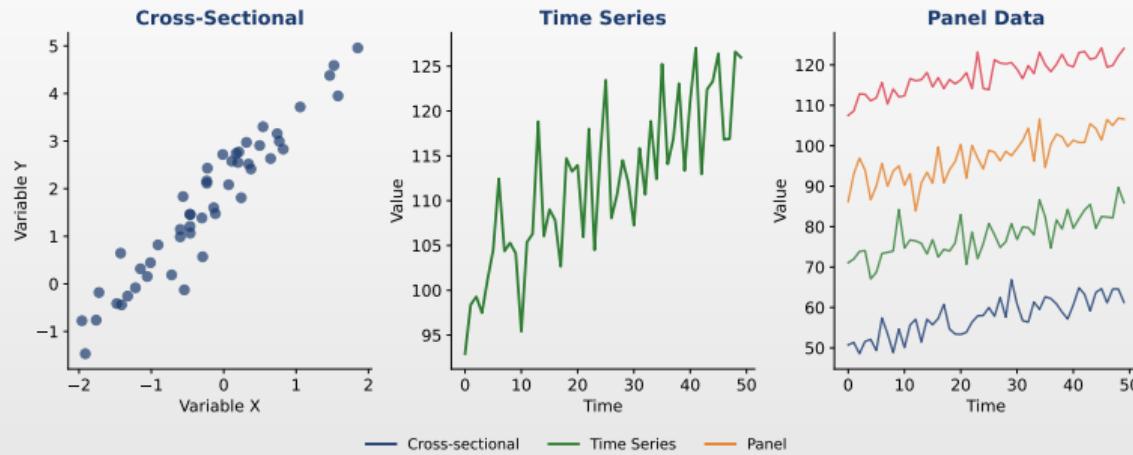
Q TSA_cho_definition

S&P 500 (2024)

- Frecvență zilnică:** ≈ 252 zile de tranzacționare/an
- Caracteristici observate:** trend ascendent, volatilitate grupată
- Persistență:** efectul de inerție în prețuri



Tipuri de date: comparație



| Tip de Date | Unități (N) | Timp (T) | Exemplu |
|---------------|-----------------|--------------|---------------------------|
| Transversale | Multe | 1 | Sondaj pe 1000 gospodării |
| Serie de timp | 1 | Multe | Preturi zilnice S&P 500 |
| Panel | Multe | Multe | PIB-ul a 50 țări, 20 ani |



Exemple de date de tip serie de timp



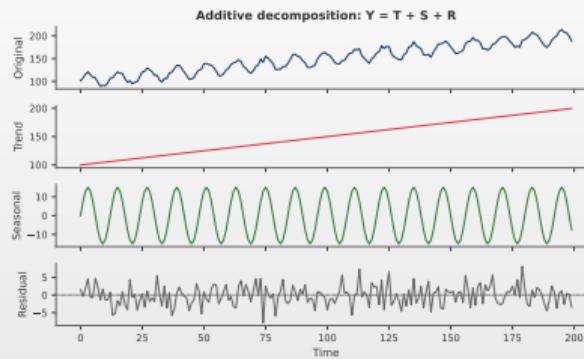
Q TSA_ch0_real_data

Date financiare reale

- Sursă:** Yahoo Finance (2019–2025), normalizează la baza 100
- Bitcoin:** cel mai volatil
- Aur:** cel mai stabil



Descompunerea seriilor de timp: exemplu vizual



TSA_ch0_decomposition

Componente explicate

- Original:** seria observată
- Trend-Ciclu:** mișcare pe termen lung
- Sezonier:** tipar periodic
- Reziduu:** zgomot aleatoriu



De ce descompunem o serie de timp?

Obiective

- Înțelegerea tiparelor subiacente
- Eliminarea sezonalității pentru modelare
- Identificarea direcției trendului
- Izolare fluctuațiilor neregulate
- Îmbunătățirea acurateții prognozei

Componente

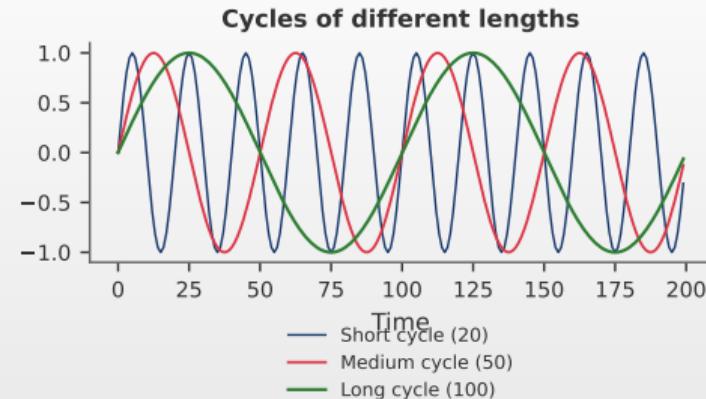
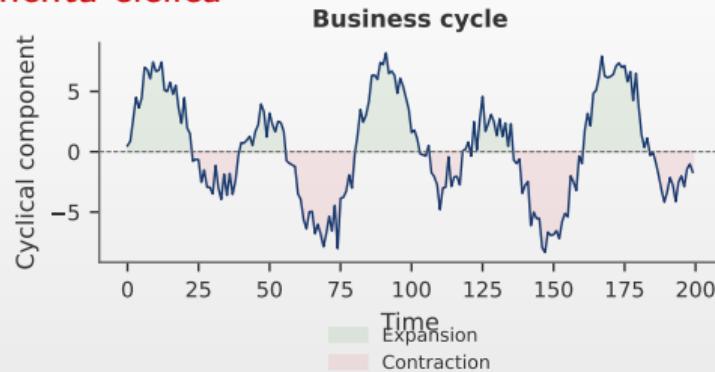
- T_t : Trend-Ciclu
 - ▶ Mișcare pe termen lung
- S_t : Sezonier
 - ▶ Tipar periodic regulat
- ε_t : Reziduu
 - ▶ Zgomot aleatoriu

Modele clasice de descompunere

- Aditiv:** $X_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$
 - ▶ Amplitudine sezonieră constantă
- Multiplicativ:** $X_t = T_t \times S_t \times \varepsilon_t$
 - ▶ Amplitudine sezonieră crește cu nivelul



Componenta ciclică



Caracteristici

- Durată:** fluctuații pe termen mediu (2–10 ani)
- Aperiodic:** fără perioadă fixă (vs sezonalitate)
- Origine:** reflectă ciclurile economice

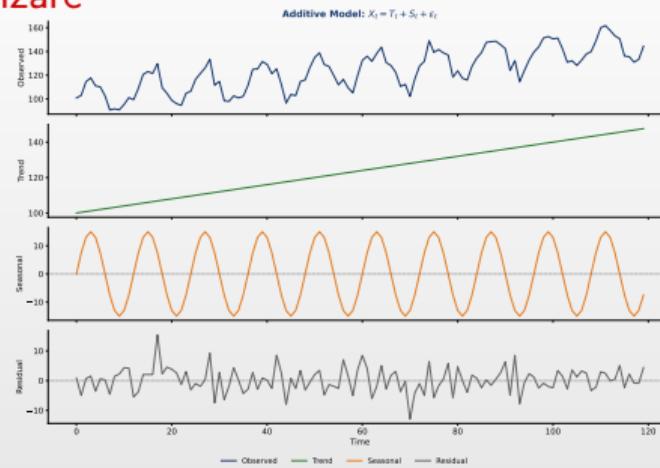
Q TSA_ch0_decomposition

În practică

- Combinare:** ciclul combinat cu trendul
- Dificultate:** greu de identificat în serii scurte
- Soluție:** de obicei absorbit în trend-ciclu



Descompunere aditivă: vizualizare



Q TSA_ch0_decomposition

Interpretare

- **Descompunere:** Original = Trend + Sezonier + Reziduu
- **Proprietate:** amplitudine sezonieră constantă, nu depinde de nivel



Modelul de descompunere aditivă

Model

- Ecuatie:** $X_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$
 - ▶ Componentele se adună pentru a forma seria observată

Când să folosim

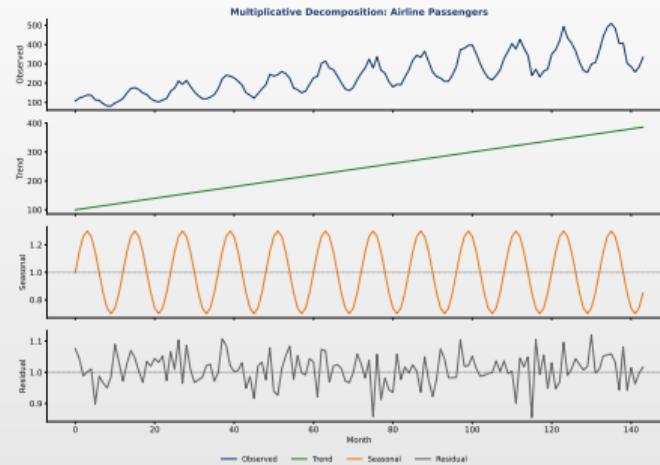
- Fluctuații sezoniere constante**
 - ▶ Amplitudinea nu depinde de nivel
- Varianța seriei stabilă**
 - ▶ Măsoară dispersia în jurul mediei
 - ▶ Estimator: $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

Proprietăți

- Eroare:** $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$ (medie zero)
- Sezonier:** $\sum_{j=1}^s S_j = 0$ (suma sezonala e zero)
- Unități:** S_t sunt aceleasi ca X_t



Descompunere multiplicativă: date reale



Exemplu

- Date Box-Jenkins: pasageri lunari (1949–1960)
- Amplitudinea sezonieră crește cu nivelul

 TSA_ch0_decomposition



Modelul de descompunere multiplicativă

Model

- **Ecuatie:** $X_t = T_t \times S_t \times \varepsilon_t$
- Componentele se înmulțesc pentru a forma seria observată

Când să folosim

- **Fluctuații crescătoare:** sezonalitatea crește cu nivelul
- **Heteroscedasticitate:** varianța crește în timp
- **Exemple:** date economice/financiare

Proprietăți

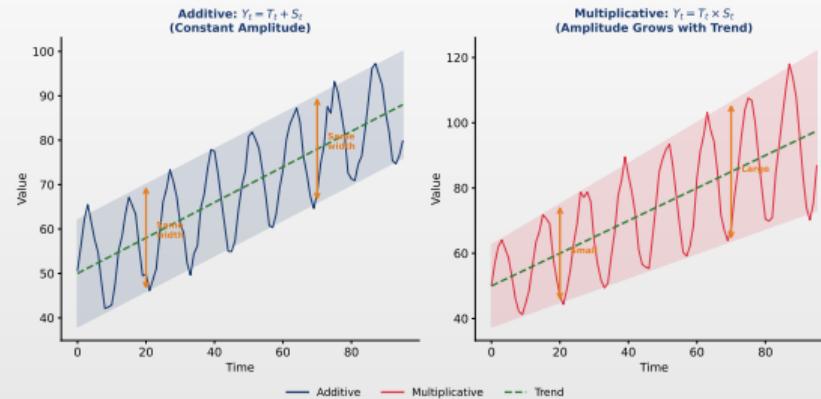
- **Eroare:** $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 1$ (centrat la 1)
- **Sezonier:** $\frac{1}{s} \sum_{j=1}^s S_j = 1$ (media e 1)
- **Unități:** S_t este raport adimensional

Sfat

- **Transformare logaritmică:** multiplicativ \succ aditiv
- $\log X_t = \log T_t + \log S_t + \log \varepsilon_t$



Aditivă vs multiplicativă: comparație



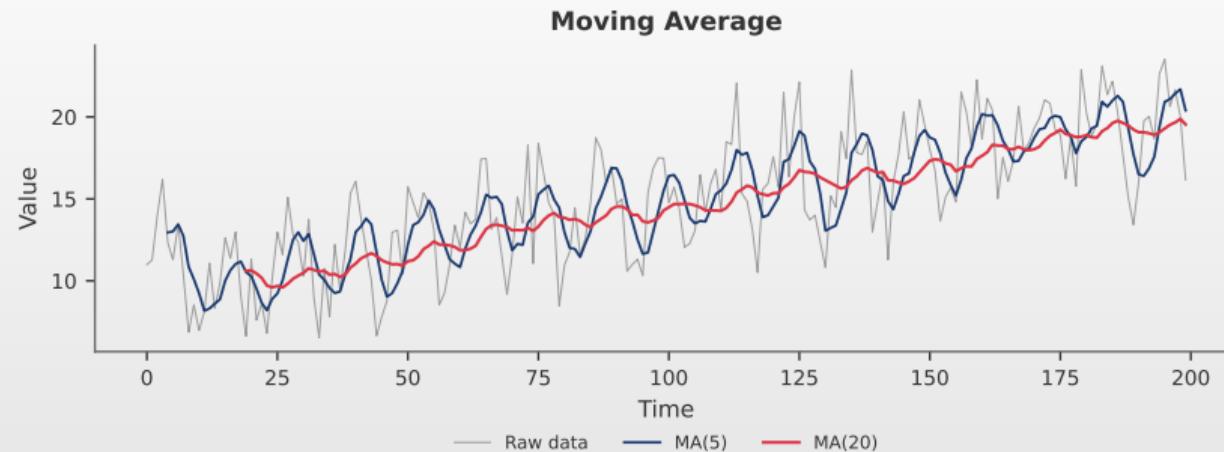
TSA_ch0_decomposition

Diferența

- Multiplicativ:** componenta sezonieră este un *raport*, centrată la valoarea 1
- Aditiv:** componenta sezonieră în *unități absolute*, centrată la valoarea 0



Media mobilă centrată: ilustrație vizuală



Interpretare

- Netezire:** elimină fluctuațiile pe termen scurt
- Rezultat:** dezvăluie trendul subiacent



Estimarea trendului: media mobilă

Definiție 2 (media mobilă centrată)

- **Media mobilă centrată** de ordin $2q + 1$:

$$\hat{T}_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^q X_{t+j} \quad (1)$$

Pentru date sezoniere

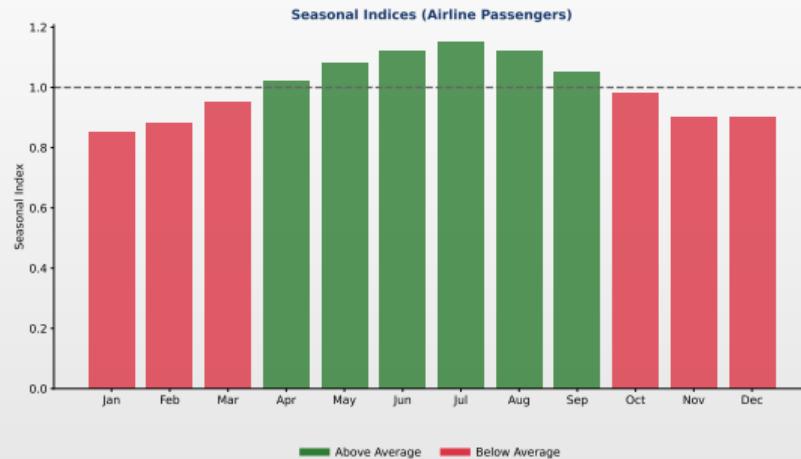
- **Perioada s impară**
 - ▶ Se folosește medie simplă
- **Perioada s pară**
 - ▶ $2 \times s$ MA cu ponderi jumătate

Proprietăți

- **Netezire:** elimină sezonierul & aleatoriu
- **Fereastră mare** \succ estimare mai netedă
- **Dezavantaj:** pierdere de date la extremități



Indici sezonieri: interpretare



Interpretare

- $S_t > 1$: activitate peste medie; $S_t < 1$: sub medie
- Vârf de călătorii în iulie–august



Algoritmul descompunerii clasice

Pași pentru descompunerea multiplicativă

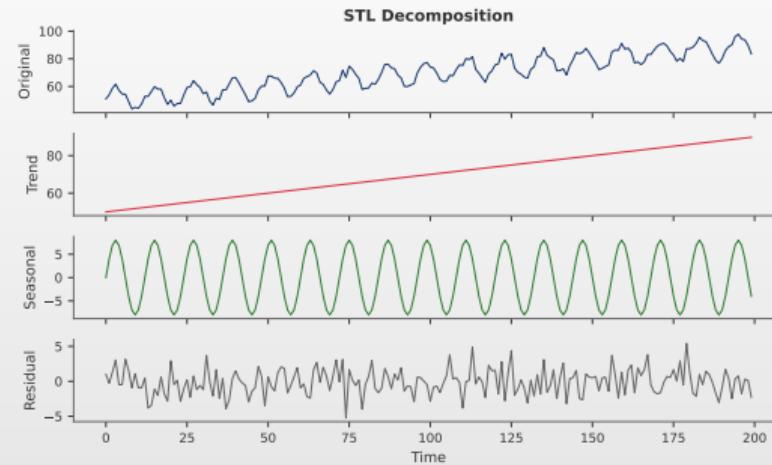
- **Pasul 1** > **Estimare Trend:** $\hat{T}_t = MA_s(X_t)$
 - ▶ Medie mobilă centrată de ordinul perioadei sezoniere
- **Pasul 2** > **Eliminarea trendului:** $D_t = X_t / \hat{T}_t$
- **Pasul 3** > **Estimare Sezonier:** $\hat{S}_j = \text{media}(D_t \text{ pentru sezonul } j)$
- **Pasul 4** > **Normalizare:** scalare astfel încât $\frac{1}{s} \sum_{j=1}^s \hat{S}_j = 1$
- **Pasul 5** > **Calcul Reziduuri:** $\hat{\varepsilon}_t = X_t / (\hat{T}_t \times \hat{S}_t)$

Notă

- **Pentru descompunere aditivă:** operațiile se modifică
 - ▶ Împărțire > scădere
 - ▶ Înmulțire > adunare



Descompunerea STL: ilustrație vizuală



Principiu

- ☐ STL (Seasonal-Trend decomposition using LOESS): separă trend + sezonier + rest
- ☐ Folosește regresie locală ponderată LOESS (LOcally Estimated Scatterplot Smoothing)

Q TSA cho decomposition



Descompunerea STL: o abordare modernă

Definiție 3 (STL - Descompunere Sezonier-Trend folosind LOESS)

- **STL:** folosește regresie locală ponderată (LOESS): $X_t = T_t + S_t + R_t$

Avantaje

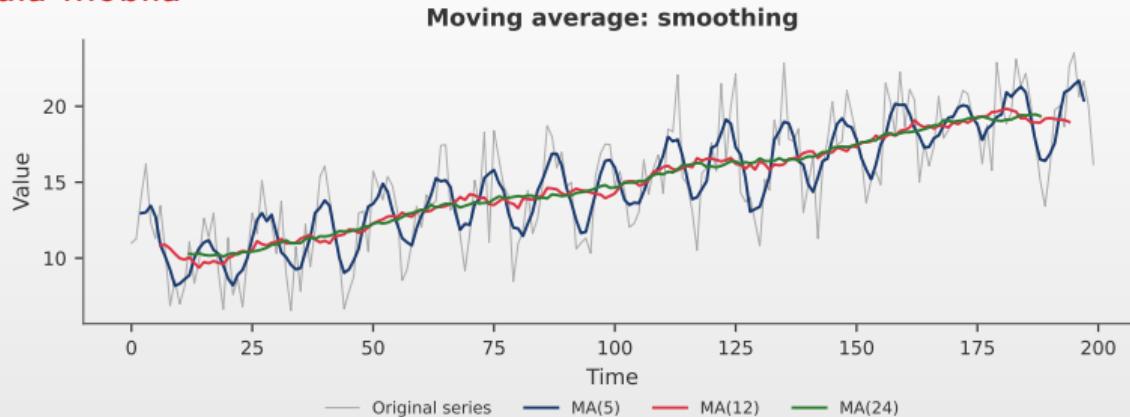
- **Flexibilitate:** orice perioadă sezonieră
- **Variabilitate:** sezonalitatea poate evoluă în timp
- **Robustete:** rezistentă la valori extreme
- **Netezire:** estimări netede ale trendului

Parametri

- **period:** perioada sezonieră
 - ▶ Ex: 12 pentru date lunare, 4 pentru trimestriale
- **seasonal:** fereastra de netezire
- **robust:** ponderare redusă pentru valori aberante



Netezirea cu media mobilă



Compromisul dimensiunii ferestrei

- Fereastră mică:** reactivă dar zgomotoasă
 - ▶ Captează schimbări rapide, dar amplifică zgomotul
- Fereastră mare:** netedă dar cu întârziere
 - ▶ Elimină zgomotul, dar reacționează lent



Netezirea exponențială: prezentare generală

Definiție

- **Netezirea exponențială:** medii ponderate ale observațiilor trecute
 - ▶ Ponderile scad exponențial în timp
 - ▶ Observațiile recente primesc ponderi mai mari

De ce netezire exponențială?

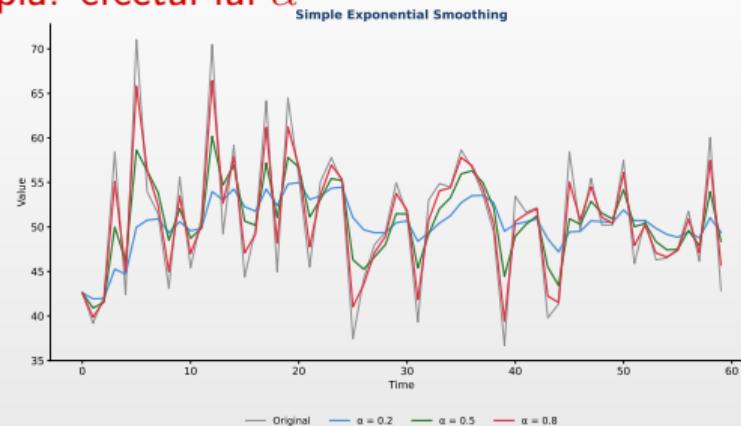
- **Simplă:** ușor de implementat și înțeles
 - ▶ Un singur parametru de netezire
- **Adaptivă:** ponderi mai mari pentru date recente
- **Versatilă:** gestionează trend și sezonalitate

Trei metode principale

- **SES (Simple Exponential Smoothing):** doar nivel
 - ▶ Cea mai simplă metodă exponențială
- **Holt:** nivel + trend
 - ▶ Captează direcția de evoluție
- **Holt-Winters:** + sezonalitate
 - ▶ Model complet cu toate componente



Netezirea exponențială simplă: efectul lui α



Compromis

- α mic \succ prognoze netede
 - ▶ Mai multă pondere pe istoria îndepărtată
- α mare \succ urmărește datele
 - ▶ Reacție rapidă la schimbări recente



Netezirea exponențială simplă (SES)

Model

- **Ecuatie:** $\hat{X}_{t+1|t} = \alpha X_t + (1 - \alpha)\hat{X}_{t|t-1}$
 - ▶ $\alpha \in (0, 1)$ este parametrul de netezire

Cum funcționează

- **Principiu:** ponderile scad exponențial
- α mare
 - ▶ Prognoză reactivă la schimbări
- α mic
 - ▶ Prognoză mai netedă, stabilă

Forma cu nivel

- **Ecuatie:** $\ell_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)\ell_{t-1}$
 - ▶ ℓ_t = nivelul estimat la momentul t
 - ▶ Prognoză: $\hat{X}_{t+h|t} = \ell_t$ (constantă)



SES: exemplu numeric pas cu pas

Date: Vânzări lunare (mii EUR)

- Date: $X_1 = 100, X_2 = 110, X_3 = 105, X_4 = 115, X_5 = 120 \quad (\alpha = 0.3, \hat{X}_{1|0} = 100)$

Calcul iterativ: $\hat{X}_{t+1|t} = \alpha X_t + (1 - \alpha) \hat{X}_{t|t-1}$

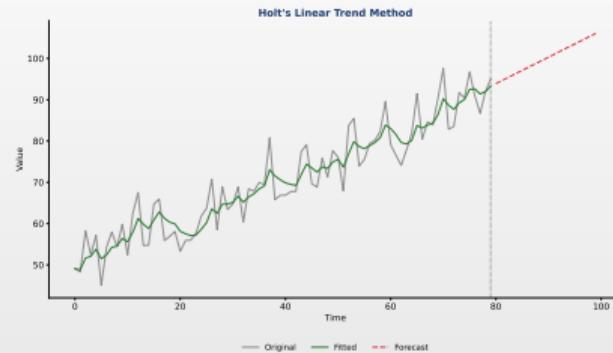
| t | X_t | $\hat{X}_{t t-1}$ | e_t | Calcul $\hat{X}_{t+1 t}$ |
|-----|-------|-------------------|-------|---|
| 1 | 100 | 100.00 | 0.00 | $0.3 \times 100 + 0.7 \times 100 = 100.00$ |
| 2 | 110 | 100.00 | 10.00 | $0.3 \times 110 + 0.7 \times 100 = 103.00$ |
| 3 | 105 | 103.00 | 2.00 | $0.3 \times 105 + 0.7 \times 103 = 103.60$ |
| 4 | 115 | 103.60 | 11.40 | $0.3 \times 115 + 0.7 \times 103.6 = 107.02$ |
| 5 | 120 | 107.02 | 12.98 | $0.3 \times 120 + 0.7 \times 107.02 = 110.91$ |

Prognoză și evaluare

- Prognoză: $\hat{X}_{6|5} = 110.91$
- Metrici: MAE = 7.28, RMSE = 8.97



Metoda Holt: vizualizare



Q TSA_ch0_smoothing

Interpretare

- Metoda Holt:** captează nivelul și trendul, le proiectează în orizontul de prognoză
- α : controlează schimbări de nivel
- β^* : controlează schimbări de trend



Metoda Holt cu trend liniar

Ecuări

- Nivel:** $\ell_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1})$
- Trend:** $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1}$
- Prognoză:** $\hat{X}_{t+h|t} = \ell_t + h \cdot b_t$
 - Extrapolează trendul liniar pe h pași

Parametri

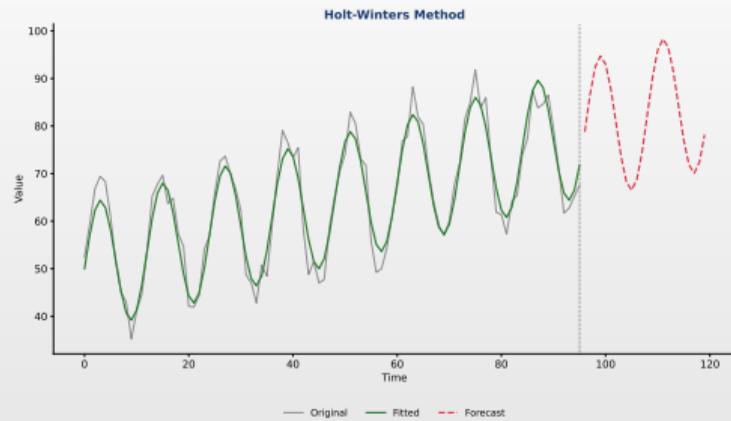
- α : netezire nivel
 - Controlează reactivitatea la schimbări de nivel
- β^* : netezire trend
 - Controlează reactivitatea la schimbări de pantă

Componente

- ℓ_t : nivel estimat
 - Media locală a seriei
- b_t : trend estimat (pantă)
 - Rata de creștere/descrescere



Holt-Winters: captarea sezonalității



 TSA_ch0_smoothing

Observație

- Descompunere completă:** separă nivel, trend și sezonier
- Prognoze sezoniere:** include atât trend cât și tipar periodic



Metoda sezonieră Holt-Winters

Ecuări (sezonalitate aditivă)

- Nivel:** $\ell_t = \alpha(X_t - S_{t-s}) + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1})$
- Trend:** $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1}$
- Sezonier:** $S_t = \gamma(X_t - \ell_t) + (1 - \gamma)S_{t-s}$
- Prognoză:** $\hat{X}_{t+h|t} = \ell_t + h \cdot b_t + S_{t+h-s(k+1)}$
 - Unde $k = \lfloor (h-1)/s \rfloor$

Parametri

- α — nivel
- β^* — trend
- γ — sezonier
- s — perioadă sezonieră
 - Toți în $(0, 1)$; estimați prin minimizarea erorii



Cadrul ETS: eroare-trend-sezonalitate

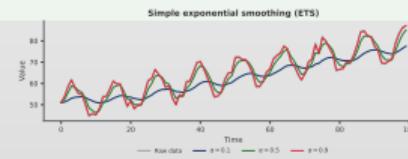
Definiție 4 (Modele ETS)

- **Cadrul ETS:** generalizează netezirea exponențială: $ETS(E, T, S)$

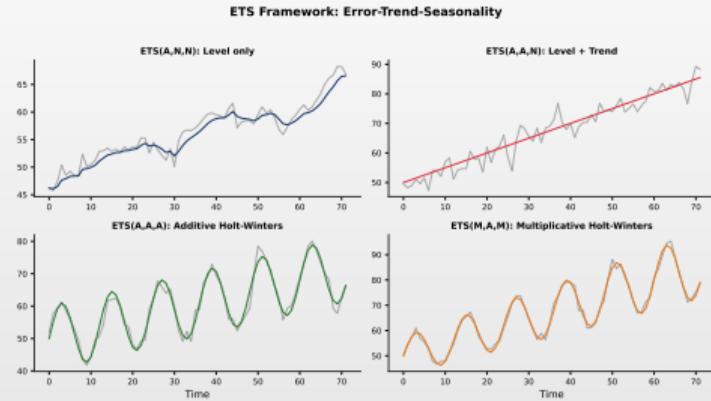
| Componentă | N | A | M |
|--------------|----------|---------|----------------|
| Eroare (E) | – | aditivă | multiplicativă |
| Trend (T) | Niciunul | Aditiv | Multiplicativ |
| Sezonier (S) | Niciunul | Aditiv | Multiplicativ |

Exemple

- **ETS(A,N,N):** Netezire exponențială simplă \succ doar nivel, fără trend sau sezonalitate
- **ETS(A,A,N):** Metoda Liniară Holt \succ nivel + trend aditiv
- **ETS(A,A,A):** Holt-Winters aditivă \succ nivel + trend + sezonalitate aditivă



Selectia modelului ETS



TSA_ch0_smoothing

Selectie automată

- Criterii informaționale:** AIC (Akaike Information Criterion), BIC (Bayesian Information Criterion)
- Selectie optimală:** echilibru între ajustare și complexitate



Metode cu trend amortizat

Parametrul de amortizare

- **Parametru:** $\phi \in (0, 1)$
 - ▶ Previne extrapolarea excesivă a trendului
 - ▶ Trendul converge către o constantă

Ecuări

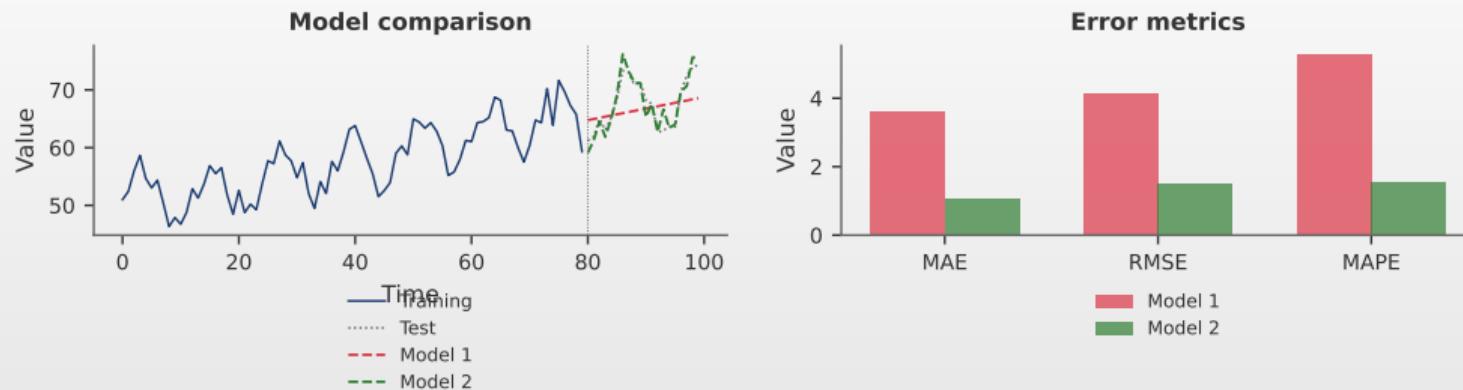
- **Nivel:** $\ell_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})$
- **Trend:** $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)\phi b_{t-1}$
- **Prognoză:** $\hat{X}_{t+h|t} = \ell_t + \phi \frac{1 - \phi^h}{1 - \phi} b_t$

Comportament asimptotic

- **Asimptotic:** când $h \rightarrow \infty$, prognoza \rightarrow constantă
 - ▶ Previne extrapolare nerealistă pe termen lung
- **Avantaj:** adesea mai bună pentru orizonturi lungi



Evaluarea prognozei: exemplu vizual



Observații

- Sus:** actual vs. prognoză — evaluare vizuală a calității prognozei
- Jos:** reziduuri — medie zero, varianță constantă, fără tipar

TSA_ch0_forecast_eval



Metrici de acuratețe a prognozei

Eroarea de prognoză

- Definiție:** $e_t = X_t - \hat{X}_t$ (actual minus previs)
- Pozitivă \Rightarrow subestimează; Negativă \Rightarrow supraestimează

Dependente de scală

- MAE:** $\frac{1}{n} \sum |e_t|$
- MSE (Mean Squared Error):** $\frac{1}{n} \sum e_t^2$
- RMSE:** $\sqrt{\text{MSE}}$

Independente de scală

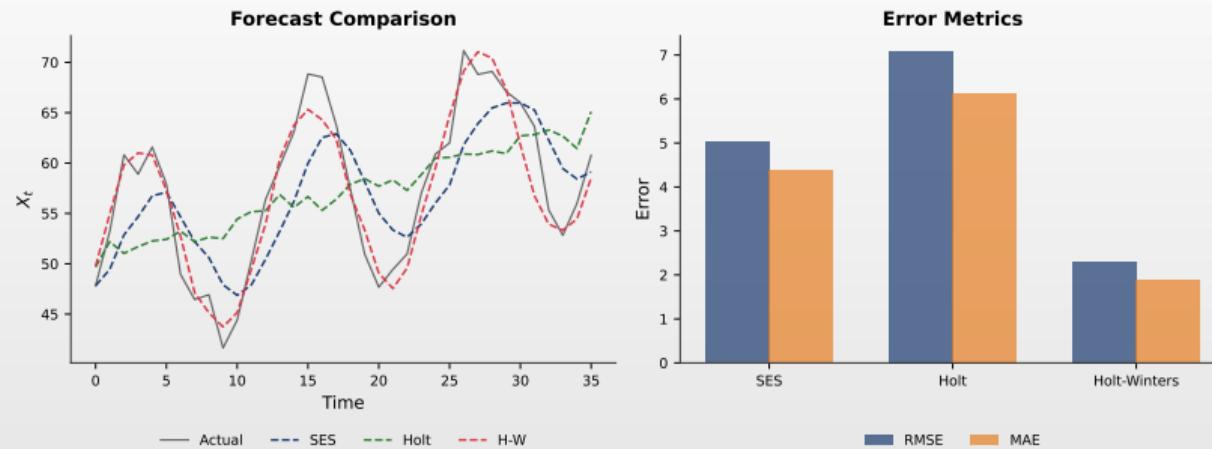
- MAPE:** $\frac{100}{n} \sum \left| \frac{e_t}{X_t} \right|$
- sMAPE:** $\frac{100}{n} \sum \frac{|e_t|}{(|X_t| + |\hat{X}_t|)/2}$

Ce să folosim?

- Aceeași serie:** RMSE, MAE \succcurlyeq comparare modele pe aceleasi date
- Între serii diferite:** MAPE, sMAPE \succcurlyeq metrici procentuale, independente de scală



Compararea metodelor de prognoză

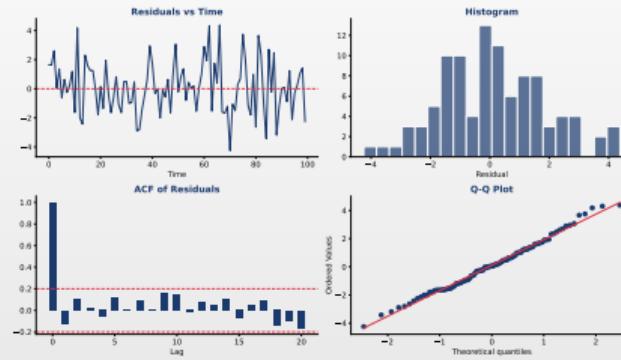


Interpretare

- Stânga: Prognoze SES, Holt, Holt-Winters
- Dreapta: Metriki de eroare — comparație vizuală și cantitativă



Diagnosticarea reziduurilor: vizualizare



TSA_ch0_forecast_eval

Ce să verificăm

- Grafic temporal:** fără tipare sistematice
- Histogramă:** verificare normalitate
- ACF:** fără autocorelație semnificativă
- Grafic Q-Q:** confirmare normalitate



Diagnosticarea reziduurilor

Proprietăți ale reziduurilor

- **Medie zero:** $\mathbb{E}[e_t] = 0$
 - ▶ Prognoza nu are eroare sistematică
- **Necorelate:** $\text{Cov}(e_t, e_{t-k}) = 0$
 - ▶ Nu rămâne informație neexploatață
- **Varianță constantă:** $\text{Var}(e_t) = \sigma^2$
- **Distribuite normal:** pentru intervale de încredere

Teste de diagnostic

- **Testul Ljung-Box (autocorelație):**
 - ▶ $Q = T(T+2) \sum_{k=1}^h \frac{\hat{\rho}_k^2}{T-k} \sim \chi_h^2$
- **Testul Jarque-Bera (normalitate):**
 - ▶ $JB = \frac{T}{6} \left(S^2 + \frac{(K-3)^2}{4} \right) \sim \chi_2^2$
 - ▶ S = asimetrie, K = kurtosis

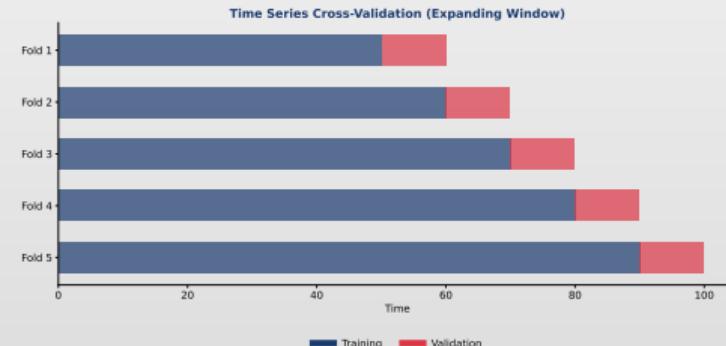
Validarea încrucișată pentru serii de timp

De ce nu CV standard?

- Dependență temporală**: observațiile sunt corelate
- Ordinea contează**: trebuie respectată cronologia
- K-fold standard** \succ scurgere de date

CV (cross-validation) cu origine mobilă

- Pasul 1**: antrenare pe $\{X_1, \dots, X_t\}$
- Pasul 2**: prognoză \hat{X}_{t+h}
- Pasul 3**: incrementare t , repetare



Separarea antrenare / validare / test

Set de antrenare

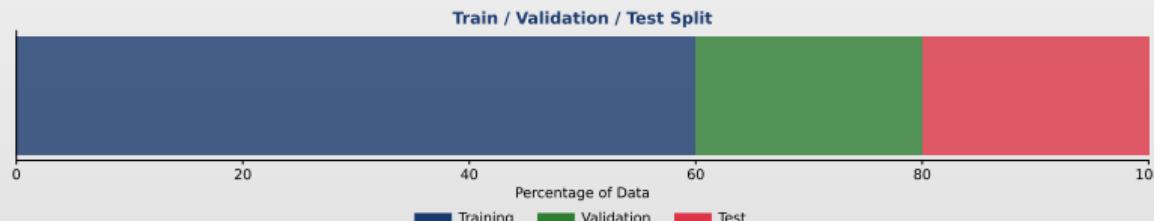
- Estimarea parametrilor modelului
- Cea mai mare porțiune (60–80%)
- Folosit pentru estimare

Set de validare

- Ajustarea hiperparametrilor
- Compararea modelelor
- Selectarea celei mai bune abordări

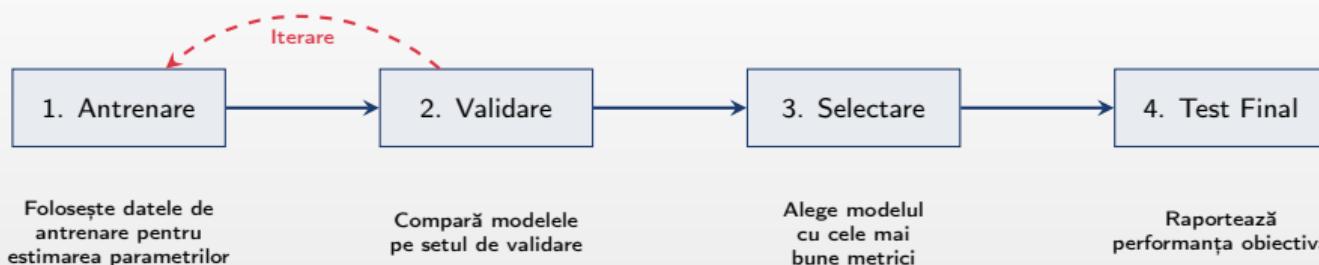
Set de Test

- Doar evaluare finală
- Nu se folosește pentru ajustare
- Evaluare obiectivă a performanței



Q TSA_ch0_forecast_eval

Fluxul de lucru pentru dezvoltarea modelului

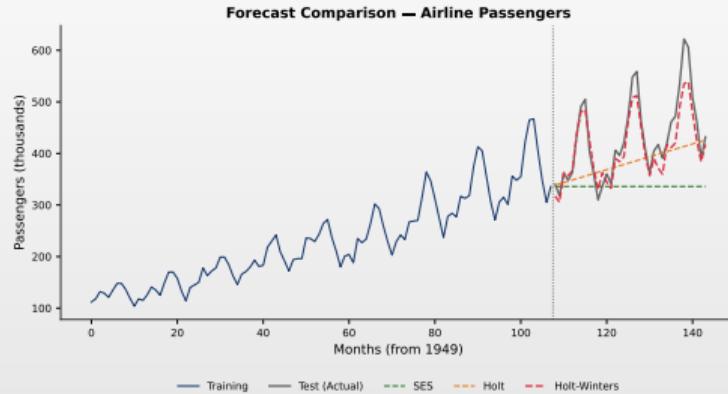


Regulă critică

- Nu folosiți setul de test pentru selecție!**
 - ▶ Folosiți doar pentru evaluare finală
- Evitați surgereala de date**
 - ▶ Estimări prea optimiste ale performanței



Date reale: compararea prognozelor



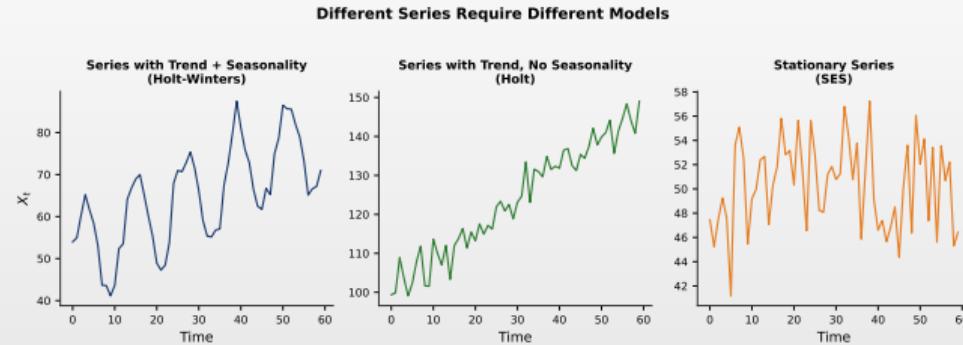
 TSA_ch0_forecast_eval

Interpretare

- Date: pasageri companii aeriene
- Cel mai bun: Holt-Winters multiplicativă
- Ideal pentru date cu sezonalitate crescătoare



Performanța prognozei pe diferite seturi de date



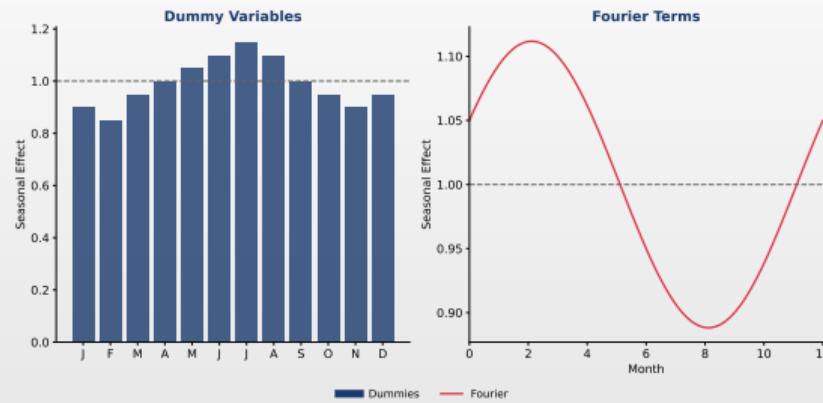
 **TSA_ch0_forecast_eval**

Interpretare

- Serii diferite:** necesită modele diferite
- Date sezoniere:** preferați metode sezoniere
- Nu există model universal:** testați mai multe abordări



Variabile dummy vs termeni Fourier



TSA_ch0_seasonal

Comparație

- **Variabile dummy:** captează orice formă, necesită $s - 1$ parametri
- **Termeni Fourier:** doar $2K$ parametri, tipare netede, sinusoidale



Modelarea sezonalității: două abordări

1. Variabile dummy

- Model:** $X_t = \mu + \sum_{j=1}^{s-1} \gamma_j D_{jt} + \varepsilon_t$
- $D_{jt} = 1$ dacă t în sezonul j
- $s - 1$ parametri
- Orice tipar sezonier

2. Termeni Fourier

- Model:**
$$X_t = \mu + \sum_{k=1}^K \left[\alpha_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{s}\right) + \beta_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{s}\right) \right]$$
- Funcții sinusoidale
- $2K$ parametri
- Tipare netede

Alegerea între dummy și Fourier

| Criteriu | Dummy | Fourier |
|-----------------------------|-------------------------|-------------------------|
| Parametri (lunar) | 11 | $2K$ (adesea 4–6) |
| Tipar sezonier | Orice formă | Neted/sinusoidal |
| Interpretare | Directă (efekte lunare) | Componente de frecvență |
| Sezoane de înaltă frecvență | Mulți parametri | Eficient |
| Sezonalitate multiplă | Complex | Ușor (adăugați termeni) |

Recomandări

- Folosiți Dummy**
 - ▶ Tipare neregulate, coeficienți interpretabili
- Folosiți Fourier**
 - ▶ Tipare netede, sezonalitate de înaltă frecvență
 - ▶ Utilizat în TBATS și Prophet
 - ▶ TBATS: Trigonometric seasonality, Box-Cox, ARMA errors, Trend, Seasonal



De ce eliminăm trendul și sezonalitatea?

Motive pentru eliminarea trendului

- Cerința de staționaritate
- Focus pe fluctuații
- Evitarea regresiei false
- Permiterea inferenței valide

Motive pentru desezonalizare

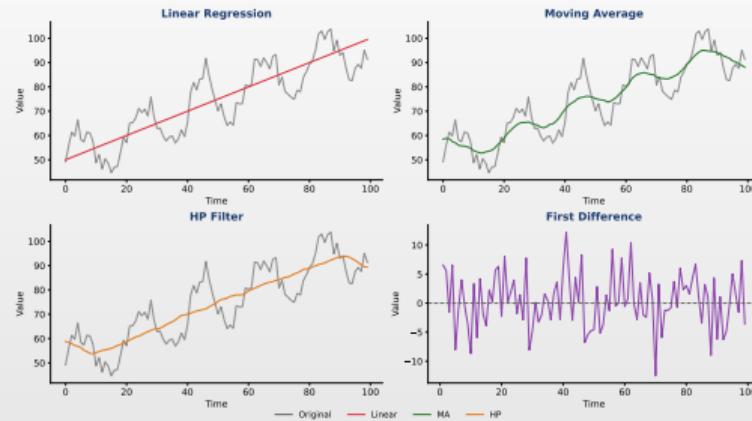
- Dezvăluirea trendului subiacent
- Comparații între sezoane
- Simplificarea modelării
- Focus pe componenta neregulată

Important

- Modelăm seria transformată**
 - ▶ Cu trendul și sezonalitatea eliminate
- Inversăm transformarea**
 - ▶ Readucem prognoza la scala originală



Metode de eliminare a trendului: comparație



Q TSA_cho_detrending

De reținut

- **Metode diferite:** produc reziduuri diferite
- **Alegere după tipul de trend:** considerați obiectivele analizei



Metode de eliminare a trendului

Șase abordări comune de eliminare a trendului

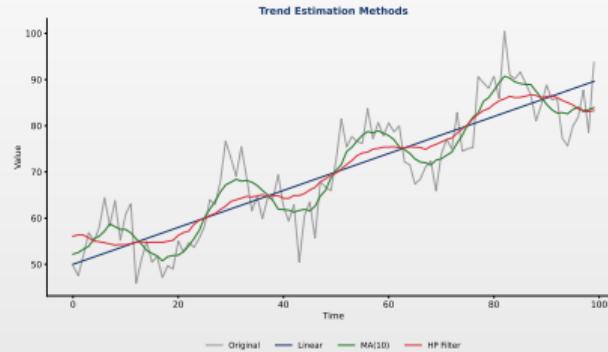
- Diferențiere:** $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$
 - ▶ Cea mai utilizată, elimină trend stochastic
- Regresie liniară:** $\hat{T}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t$
- Polinomială:** polinom de ordin superior
- Filtru HP (Hodrick-Prescott):** echilibru estimare vs netezime
- Media mobilă:** $\hat{T}_t = MA_q(X_t)$
- LOESS:** regresie polinomială locală

Alegerea depinde de

- Natura trendului**
 - ▶ Determinist vs stochastic
- Scopul analizei**
 - ▶ Prognoză vs analiză descriptivă



Estimarea trendului: abordări multiple



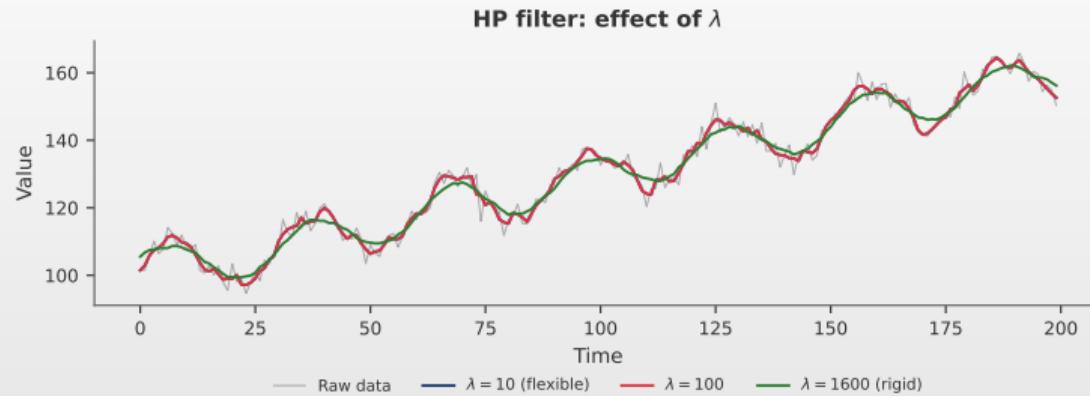
Q TSA_ch0_detrending

Comparație metode

- Media mobilă:** simplă dar cu întârziere
- Regresie polinomială:** flexibilă, parametrică
- Filtrul HP:** standard macroeconomic



Filtrul HP: efectul lui λ



 TSA_cho_detrending

Compromis

- λ mic:** trend flexibil — urmează datele îndeaproape
- λ mare:** trend neted — se apropie de trend liniar



Filtrul Hodrick-Prescott (HP)

Definiție 5 (Filtrul HP)

- Filtrul HP:** descompune X_t în trend τ_t și ciclu c_t : $X_t = \tau_t + c_t$

$$\min_{\{\tau_t\}} \left\{ \sum_{t=1}^T (X_t - \tau_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} [(\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1})]^2 \right\}$$

Interpretare

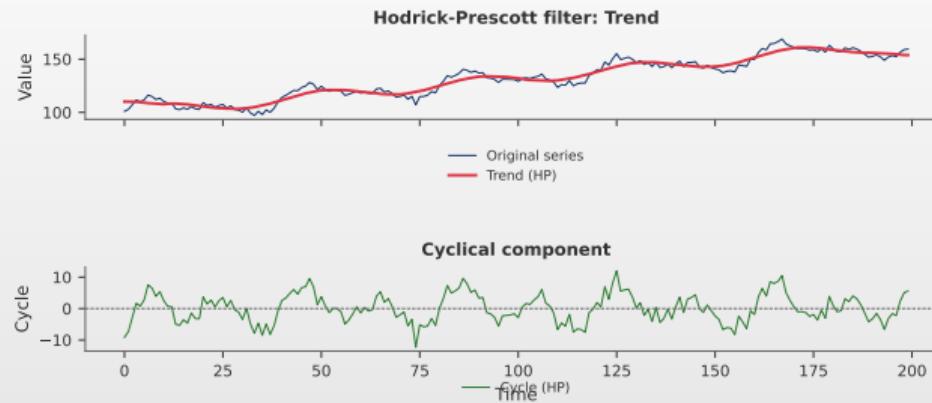
- Primul termen**
 - Ajustare la date
- Al doilea termen**
 - Penalizare netezime
- λ
 - Controlează echilibrul între fidelitate și netezime

Valori standard λ (Ravn-Uhlig)

- Anual**
 - $\lambda = 6.25$
- Trimestrial**
 - $\lambda = 1600$ (standard macroeconomic)
- Lunar**
 - $\lambda = 129600$



Filtrul HP: extragerea ciclului de afaceri



 TSA_ch0_detrending

Aplicație

- Macroeconomie:** extragerea ciclurilor de afaceri
- Serii comune:** PIB, șomaj, inflație



Filtrul HP: limitări

Probleme cunoscute

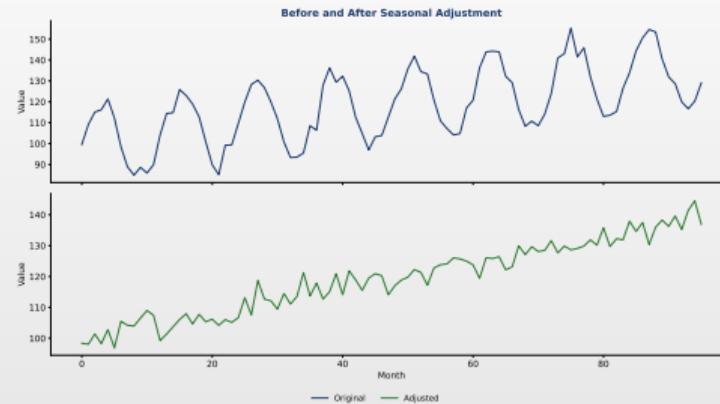
- Instabilitate la extremități**
 - ▶ Estimările trendului nesigure la început și sfârșit
- Cicluri false**
 - ▶ Poate crea dinamici artificiale
- Alegerea λ**
 - ▶ Rezultatele sensibile la parametru

Alternative

- Filtre bandă:** Baxter-King, Christiano-Fitzgerald
 - ▶ Izolează frecvențe specifice
- Filtrul Hamilton:** bazat pe regresie
- Componente neobservate:** modele cu spațiu de stări



Ajustare sezonieră: vizualizare



 TSA_ch0_seasonal

Rezultat

- Seria ajustată sezonieră:** dezvăluie trendul subiacent
- Elimină fluctuațiile periodice din seria originală



Metode de eliminare a sezonalității

Patru abordări pentru eliminarea sezonalității

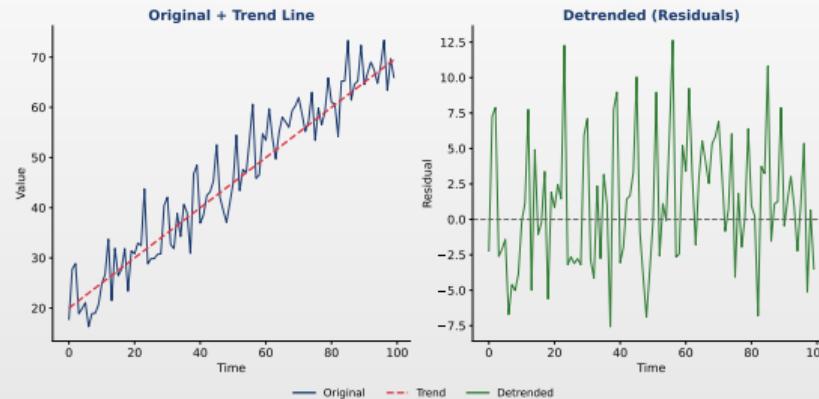
- Diferențiere sezonieră:** $\Delta_s X_t = X_t - X_{t-s}$
 - ▶ Elimină tipar periodic, simplu de aplicat
- Împărțire (multiplicativ):** $X_t^{adj} = X_t / \hat{S}_t$
- Scădere (aditiv):** $X_t^{adj} = X_t - \hat{S}_t$
- X-13ARIMA-SEATS:** standard oficial US Census Bureau
 - ▶ Metodă sofisticată, utilizată de institutele de statistică

Perioada sezonieră s

- Lunar: $s = 12$ | Trimestrial: $s = 4$



Exemplu: trend determinist



Q TSA_ch0_detrending

Cheie

- Metodă:** regresie
- Rezultat:** reziduuri staționare, ACF scade rapid



Trend determinant vs stochastic

Trend determinant

- Model:** $X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$
- Caracteristici:**
 - ▶ Trendul este o funcție de timp
 - ▶ ε_t este staționar
- Metodă:** eliminarea trendului prin regresie

Trend stochastic

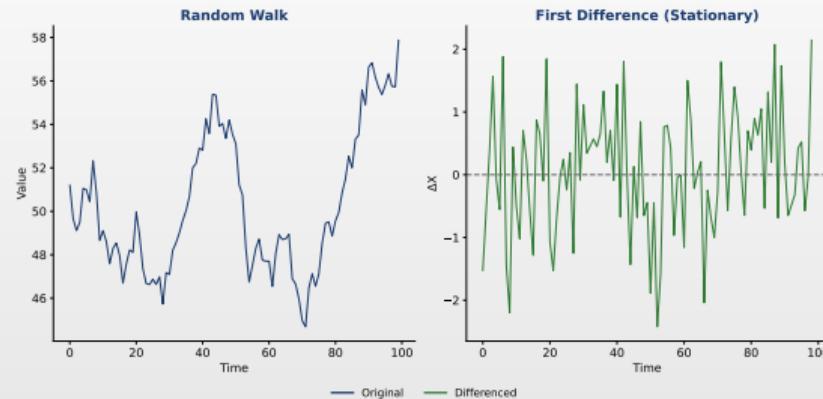
- Model:** $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$
- Caracteristici:**
 - ▶ Componentă de mers aleatoriu
 - ▶ ΔX_t este staționar
- Metodă:** eliminarea trendului prin diferențiere

Metodă greșită = probleme

- Diferențiere pe trend determinant** \succ supra-diferențiere
 - ▶ Introduce dependență artificială în serie
- Regresie pe trend stochastic** \succ regresie falsă
 - ▶ Rezultate statistice invalide



Exemplu: trend stochastic (mers aleatoriu)



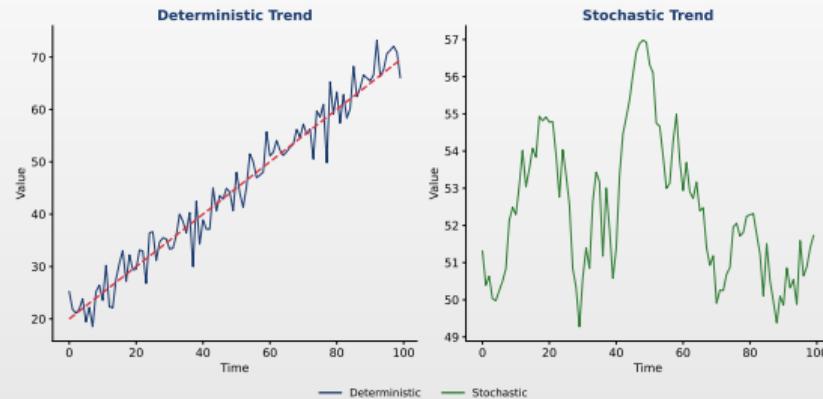
TSA_ch0_detrending

Cheie

- Metodă:** diferențiere
- Rezultat:** diferențele sunt staționare (zgomot alb)



Comparație alăturată



 TSA_ch0_detrending

Rețineți

- **Trend determinist:** folosiți regresie — trendul este o funcție predictibilă de timp
- **Trend stochastic:** folosiți diferențiere — trendul conține o componentă aleatoare



Exercițiu AI: Gândire critică

Prompt de testat în ChatGPT / Claude / Copilot

"Folosind yfinance, descarcă prețurile lunare de închidere ale acțiunii Apple (AAPL) din 2015-01 până în 2024-12 (120 observații). Descompune seria în trend, sezonalitate și reziduuri. Determină dacă e mai potrivită descompunerea aditivă sau multiplicativă și progoazează prețul pentru următoarele 12 luni. Vreau cod Python complet cu grafice profesionale."

Exercițiu

1. Rulați prompt-ul într-un LLM la alegere și analizați critic răspunsul.
2. Ce tip de descompunere alege modelul? E corect? Justificați.
3. Cum evaluează calitatea progozei? Metrica e calculată corect?
4. Verifică reziduurile — prezintă structură neexplicată?
5. Rescrieți analiza corect și comparați cu un model de referință sezonier naiv.

Atenție: Codul generat de AI poate rula fără erori și arăta profesional. *Asta nu înseamnă că e corect.*



Rezumat

Ce am învățat în acest capitol

- Definiția și Caracteristicile Seriei de Timp
 - ▶ Secvență de observații ordonate temporal cu dependență
- Descompunere (Aditivă vs multiplicativă)
 - ▶ Componente: Trend-Ciclu + Sezonier + Reziduu
- Metode de Netezire Exponențială
 - ▶ SES (nivel), Holt (+ trend), Holt-Winters (+ sezonalitate), ETS
- Evaluarea și Validarea Prognozei
 - ▶ Metrici: MAE, RMSE, MAPE; Cross-Validation cu origine mobilă

Concluzie

- Înțelegeți înainte de a modela:
 - ▶ Vizualizați și descompuneți datele mai întâi
 - ▶ Alegeți aditiv vs multiplicativ în funcție de comportamentul varianței



Ce urmează?

Capitolul 1: Procese stochastice și staționaritate

- Procese Stochastice:** fundament matematic, variabile aleatoare indexate după timp
- Staționaritate:** strictă (distribuție invariantă) vs slabă (momente invariante)
- Procese Fundamentale:** zgomot alb și mers aleatoriu
- Blocuri fundamentale pentru modelele ARIMA (AutoRegressive Integrated Moving Average)
- ACF și PACF (Partial Autocorrelation Function):** instrumente pentru identificarea modelului

Întrebări?



Bibliografie I

Fundamente ale seriilor de timp

- Wold, H. (1938). *A Study in the Analysis of Stationary Time Series*, Almqvist & Wiksell.
- Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- Brockwell, P.J., & Davis, R.A. (2016). *Introduction to Time Series and Forecasting*, 3rd ed., Springer.

Descompunere și analiză exploratorie

- Cleveland, R.B., Cleveland, W.S., McRae, J.E., & Terpenning, I. (1990). STL: A Seasonal-Trend Decomposition Procedure Based on Loess, *Journal of Official Statistics*, 6(1), 3–33.
- Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*, 3rd ed., OTexts.



Bibliografie II

Netezire exponențială și fundamente ETS

- Holt, C.C. (1957/2004). Forecasting Seasonals and Trends by Exponentially Weighted Moving Averages, *International Journal of Forecasting*, 20(1), 5–10.
- Winters, P.R. (1960). Forecasting Sales by Exponentially Weighted Moving Averages, *Management Science*, 6(3), 324–342.
- Hyndman, R.J., Koehler, A.B., Ord, J.K., & Snyder, R.D. (2008). *Forecasting with Exponential Smoothing: The State Space Approach*, Springer.

Resurse online și cod

- **Quantlet:** <https://quantlet.com> ➔ Platformă de cod pentru metode cantitative
- **Quantinar:** <https://quantinar.com> ➔ Platformă de învățare pentru metode cantitative
- **GitHub TSA:** https://github.com/QuantLet/TSA/tree/main/TSA_ch0 ➔ Cod Python pentru acest capitol



Vă Mulțumim!

Întrebări?

Materialele cursului sunt disponibile la: <https://danpele.github.io/Time-Series-Analysis/>

