



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 10: Recapitulare Comprehensivă



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

Obiective de învățare

La finalul acestui capitol, veți fi capabili să:

1. Aplicați fluxul complet de prognoză, de la date la evaluare
2. Selectați modelul potrivit în funcție de caracteristicile datelor
3. Evaluați acuratețea prognozelor folosind metrici și validare încrucișată
4. Integrați cunoștințele din toate capitolele anterioare în practică

Cuprins

Fundamente

- ▣ Metodologia Prognozei
- ▣ Studiu de Caz 1: Volatilitatea Bitcoin (GARCH)
- ▣ Studiu de Caz 2: Ciclurile Petelor Solare (Fourier)

Aplicații

- ▣ Studiu de Caz 3: Șomajul (Prophet)
- ▣ Studiu de Caz 4: Analiză Multivariată (VAR)
- ▣ Sinteză și Ghid
- ▣ Quiz

Abordarea științifică a prognozei

Întrebarea de cercetare

- Cum putem **evalua riguros** performanța prognozei evitând supraajustarea?

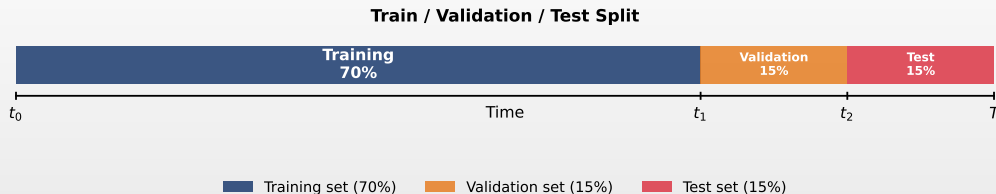
Problema fundamentală

- Ajustarea în eșantion \neq Performanța în afara eșantionului
- Modelele pot “memora” datele de antrenament fără a învăța tipare
- **Soluție:** Metodologia corectă train/validation/test

Principiu cheie

- “Setul de test trebuie să rămână **neatins** până la evaluarea finală.”
- Practică standard în machine learning și econometrie

Cadrul Train/Validation/Test



 TSA_ch10_train_val_test_split

Metrici de evaluare

Definiție 1 (Metrici ale Erorii de Prognoză)

▣ **Date:** Fie y_t valorile reale, \hat{y}_t prognozele

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_t (y_t - \hat{y}_t)^2}, \quad \text{MAE} = \frac{1}{n} \sum_t |y_t - \hat{y}_t|, \quad \text{MAPE} = \frac{100\%}{n} \sum_t \left| \frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t} \right|$$

Când să folosim

- ▣ **RMSE:** Penalizează erorile mari
- ▣ **MAE:** Robust la outlieri
- ▣ **MAPE:** Independent de scală (%)

Atenție

- ▣ MAPE nedefinit când $y_t = 0$
- ▣ Comparați pe **același** set test
- ▣ Raportați metrice **out-of-sample**

Evaluarea prognozelor dincolo de RMSE

Metrice alternative

- ▣ **MASE**: comparație cu naïve forecast
- ▣ **Directional Accuracy**: direcția corectă
- ▣ **Quantile Loss**: pentru VaR
- ▣ **CRPS**: distribuție completă

Exemplu: Quantile Loss

$$QL_{\alpha} = \begin{cases} \alpha(y_t - \hat{q}_t), & y_t > \hat{q}_t \\ (1 - \alpha)(\hat{q}_t - y_t), & y_t \leq \hat{q}_t \end{cases}$$

Rezultate Bitcoin (GARCH volatilitate)

Metrică	Valoare
RMSE	2.21
MAE	1.89
MASE	0.98
Dir. Accuracy	28.7%

- ▣ $MASE < 1$: GARCH bate naïve
- ▣ DA 28.7%: direcția volatilității e dificilă

Compararea formală a prognozelor: Diebold–Mariano

Definiție 2 (Testul Diebold–Mariano)

Diferența de pierdere: $d_t = L(e_{1t}) - L(e_{2t})$, Statistica: $DM = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\bar{d})}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$

Ipoteze

- H_0 : performanță predictivă egală
- H_1 : un model e semnificativ mai bun
- $|DM|$ mare \Rightarrow respingem H_0

Rezultat Bitcoin (GARCH volatilitate)

- Normal vs Student-t: $DM = -0.51$
- $p = 0.612$ — **nu respingem** H_0
- Acuratețe similară, dar Student-t preferabil prin AIC ($\Delta = 509$)

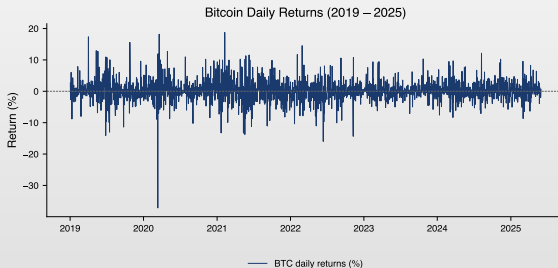
Mesaj cheie

- RMSE mai mic \neq diferență semnificativă — testarea formală este **obligatorie**

Bitcoin: volatility clustering

Observație

- Randamentele mari tind să urmeze randamente mari, cele mici urmează cele mici
- Acesta este **volatility clustering** > fenomenul pe care GARCH îl captează



Bitcoin: definirea problemei

Întrebarea de cercetare

- Putem prognoza **volatilitatea** Bitcoin folosind modele GARCH?

Caracteristicile Datelor

- Sursă: Yahoo Finance (BTC-USD)
- Perioadă: Ian 2019 – Ian 2025
- Frecvență: Zilnică
- Observații: ≈ 2.200 zile

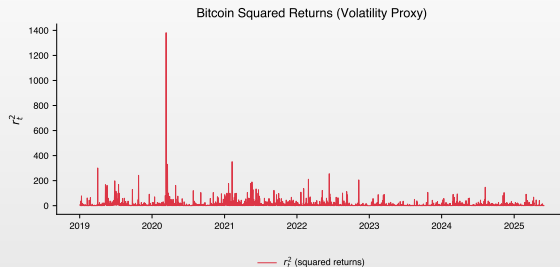
Fapte stilizate

- Randamente: medie aproape zero
- Cozi groase (curtosis > 3)
- Clustering al volatilității

Insight cheie

- Randamentele financiare sunt de obicei:
 - Impredictibile în medie
 - Predictibile în varianță
- Focus pe **prognoza volatilității**

Bitcoin: dovezi pentru GARCH



 TSA_ch10_btc_acf_squared

Specificarea modelului GARCH

Definiție 3 (Modelul GARCH(p,q))

▣ **Date:** Fie r_t randamentele. Modelul GARCH(p,q) este:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim N(0, 1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

▣ **Condiții:** $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, și $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$

Variante de model

- ▣ **GARCH(1,1):** Cel mai comun
- ▣ **GJR-GARCH:** Efect de levier
- ▣ **EGARCH:** Șocuri asimetrice

Interpretare

- ▣ α : Impactul șocurilor trecute
- ▣ β : Persistența volatilității
- ▣ $\alpha + \beta \approx 1$: Persistență înaltă

GARCH: Staționaritate și varianța necondiționată

Teoremă 1 (Staționaritatea în Covarianță a GARCH(1,1))

Dacă $\alpha_1 + \beta_1 < 1$, atunci $\{\varepsilon_t\}$ este staționar în covarianță cu:

$$\bar{\sigma}^2 = \mathbb{E}[\sigma_t^2] = \frac{\omega}{1 - \alpha_1 - \beta_1}$$

Derivare

Luăm speranța ambelor părți ale ecuației varianței:

$$\mathbb{E}[\sigma_t^2] = \omega + \alpha_1 \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] + \beta_1 \mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2]$$

$$\bar{\sigma}^2 = \omega + (\alpha_1 + \beta_1) \bar{\sigma}^2 \quad (\text{staționaritate})$$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha_1 - \beta_1}$$

Prognozele multi-step converg la $\bar{\sigma}^2$

Când $h \rightarrow \infty$: $\mathbb{E}_t[\sigma_{t+h}^2] \rightarrow \bar{\sigma}^2$ cu rata $(\alpha_1 + \beta_1)^h$.

Bitcoin: selectarea modelului pe setul de validare

Metodologie

- Estimăm fiecare model pe **datele de antrenament**, evaluăm pe **setul de validare**

Model	AIC	BIC	Val MAE	Selectare
GARCH(1,1)	6.994,8	7.020,6	2,638	Cel mai bun
GARCH(2,1)	6.993,7	7.024,6	2,640	
GJR-GARCH(1,1)	6.983,7	7.014,6	2,669	Eșuat*
EGARCH(1,1)	—	—	—	

*Proгноze analitice indisponibile pentru $h > 1$

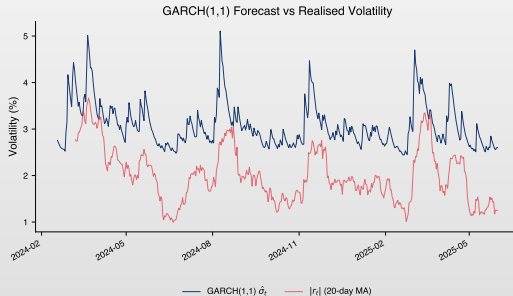
Rezultat

- GARCH(1,1)** selectat pe baza celui mai mic MAE de validare pentru prognozele de volatilitate

Bitcoin: prognoza volatilității

Interpretare

- Zona umbrită: interval de încredere 95% al prognozei de volatilitate
- GARCH(1,1) captează bine dinamica volatilității Bitcoin



Bitcoin: împărțirea datelor și staționaritate

Împărțirea datelor

Set	Perioadă	N
Antrenament (70%)	2019-01 – 2023-03	1.543
Validare (20%)	2023-03 – 2024-06	441
Test (10%)	2024-06 – 2025-01	221
Total		2.205

Teste de staționaritate

Serie	ADF	Rezultat
Prețuri	$p = 0.50$	Non-staționară
Randamente	$p < 0.01$	Staționară

➤ Modelăm **randamente**, nu prețuri

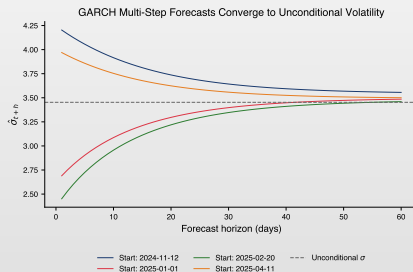
De ce contează staționaritatea

- ▣ **GARCH**: necesită input slab staționar
- ▣ **Prețuri vs Randamente**: Prețurile urmează random walk, randamentele sunt staționare

GARCH: prognozele multi-step converg

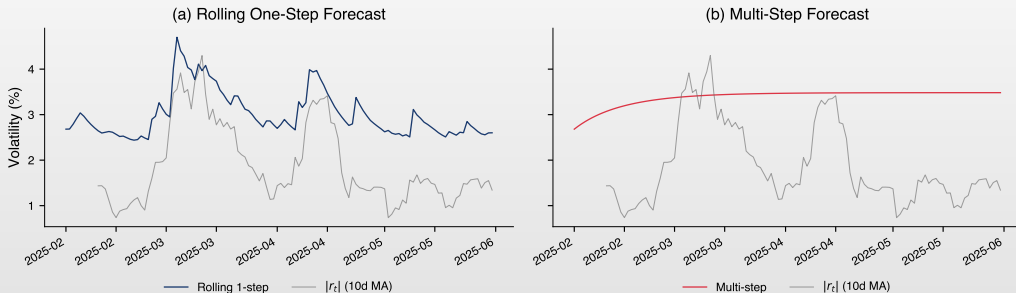
Insight cheie

- Prognozele multi-step converg la $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$
- Soluția: prognoze rolling one-step-ahead



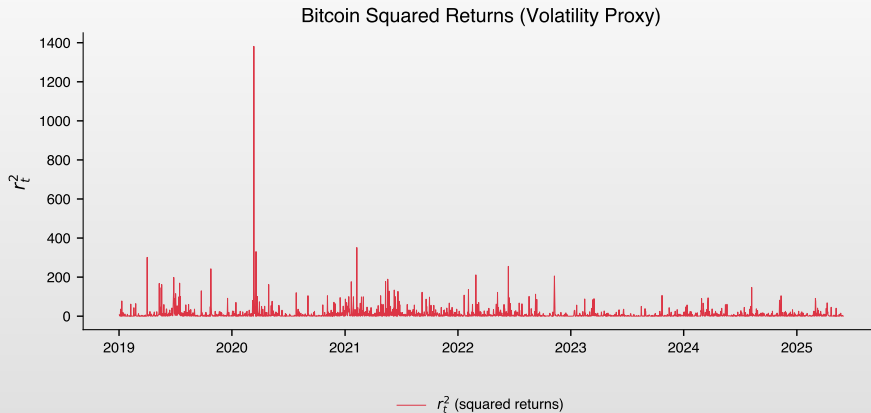
GARCH: soluția rolling one-step-ahead

Rolling vs Multi-Step GARCH Forecasts



TSA_ch10_rolling_vs_multistep

Bitcoin: Fapte stilizate GARCH



GARCH: Distribuții pentru inovații

Model

$$r_t = \mu + \sigma_t Z_t$$

- ▣ Variante pentru z_t : $\mathcal{N}(0, 1)$ (normală) sau t_ν (cozi groase)

Bitcoin: dovezi empirice

- ▣ Kurtosis reziduuri: **13.81** (Normal = 3)
- ▣ Skewness: -0.29
- ▣ Jarque-Bera: 9085, $p < 0.001$
- ▣ Normalitatea **subestimează** riscul extrem

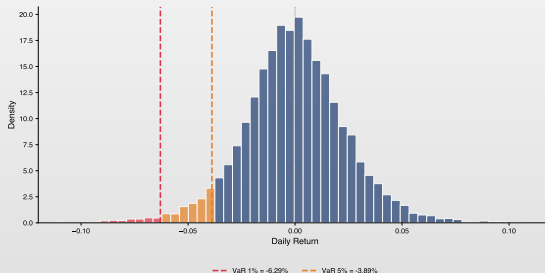
Student-t: alegerea corectă

- ▣ $\hat{\nu} = 2.96$ grade de libertate
- ▣ AIC Normal: 9769 vs Student-t: **9260**
- ▣ $\Delta AIC = 509$ — dovadă **copleșitoare**
- ▣ Cozi groase = estimări VaR **mai realiste**

VaR și ES: ilustrație grafică

Interpretare

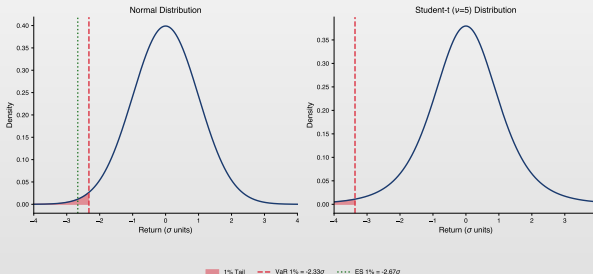
- VaR 1% = pierderea depășită doar în 1% din cazuri
- Zona roșie = pierderi extreme (dincolo de VaR)



VaR vs expected shortfall: normal vs Student-t

Interpretare

- ES măsoară pierderea medie când VaR este depășit
- Student-t: VaR și ES mai mari decât sub distribuția normală



Value at risk \succ exemplu numericCalculul VaR: Portofoliu 1M EUR, $\hat{\sigma}_{T+1} = 1.5\%$

Nivel	z_{α}	VaR (%)	VaR (EUR)
5% (1 zi)	1.645	2.47%	24.675
1% (1 zi)	2.326	3.49%	34.890
1% (10 zile)	$2.326 \cdot \sqrt{10}$	11.03%	110.314

Scalare pentru perioade mai lungi

$$\square \text{ VaR}_{h \text{ zile}} = \text{VaR}_{1 \text{ zi}} \cdot \sqrt{h} \quad (\text{presupune randamente i.i.d.})$$

Value at risk \succ distribuție Student-t

De ce Student-t?

- ▣ Normala **subestimează** riscul de coadă; randamentele au **cozi groase** (kurtosis > 3)
- ▣ Student-t capturează mai bine extremele

Comparație VaR 1% (1 zi) pentru $\sigma = 1.5\%$, portofoliu = 1M EUR

Distribuție	Cuantilă	VaR (EUR)
Normal	2.326	34.890
Student-t ($\nu = 10$)	2.764	41.460
Student-t ($\nu = 6$)	3.143	47.145
Student-t ($\nu = 4$)	3.747	56.205

- ▣ Cu $\nu = 6$ (tipic pentru acțiuni), VaR este cu **35% mai mare** decât cel normal!

VaR ➤ exemplu complet cu GARCH

Procedura de calcul VaR

1. Estimează modelul GARCH(1,1) cu distribuție Student-t
2. Obține prognoza volatilității: $\hat{\sigma}_{T+1}$
3. Calculează VaR: $\text{VaR}_\alpha = t_\alpha(\nu) \cdot \hat{\sigma}_{T+1} \cdot \sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}}$

Exemplu: S&P 500

- ▣ Parametri estimați: $\alpha = 0.088$, $\beta = 0.900$, $\nu = 6.4$
- ▣ Volatilitate prognozată: $\hat{\sigma}_{T+1} = 1.2\%$, Portofoliu: 10.000.000 EUR
- ▣ **VaR 1% (1 zi):** $\text{VaR} = 3.05 \times 0.012 \times 10.000.000 = \mathbf{366.000 \text{ EUR}}$

Ce este VaR backtesting?

Definiție

- ▣ **Backtesting** = verificarea ex-post a calității modelului VaR
- ▣ Compară pierderile realizate cu pragul VaR prognozat
 - ▶ O **încălcare** (violation) apare când $r_t < -\text{VaR}_t$

Principiul Backtesting-ului

- ▣ Indicatorul de încălcare: $I_t = 1(r_t < -\text{VaR}_{\alpha,t})$
- ▣ Pentru un model corect la nivel α :
 - ▶ Frecvența: $\hat{p} = \frac{1}{T} \sum I_t \approx \alpha$; încălcări **independente**
- ▣ VaR 1% pe 250 zile \succ așteptăm ~ 2.5 încălcări/an

Importanță

- ▣ Cerință regulamentară **Basel III/IV** pentru bănci: backtesting obligatoriu

Testul Kupiec (1995) \succ acoperire necondiționată

Ipoteze

- ▣ H_0 : Rata de încălcare este egală cu nivelul VaR ($p = \alpha$)
- ▣ H_1 : Rata de încălcare diferă de nivelul VaR ($p \neq \alpha$)

Statistica de test (Likelihood Ratio)

- ▣ **Formula:** $LR_{uc} = -2 \ln \left[\frac{\alpha^x (1-\alpha)^{T-x}}{\hat{p}^x (1-\hat{p})^{T-x}} \right] \sim \chi^2(1)$
- ▣ **Notăție:** x = nr. încălcări, T = nr. observații, $\hat{p} = x/T$

Exemplu

- ▣ VaR 1%, $T = 250$ zile, $x = 5$ încălcări: $\hat{p} = 2\%$
 - Prea multe încălcări \succ modelul **subestimează** riscul
- ▣ VaR 1%, $T = 250$ zile, $x = 1$ încălcare: $\hat{p} = 0.4\%$ \succ acceptabil

Testul Christoffersen (1998) \succ acoperire condiționată

Motivație

- ▣ Kupiec testează doar **frecvența** încălcărilor
- ▣ Nu detectează **clusterizarea** încălcărilor (încălcări consecutive)
 - ▶ Dacă încălcările apar în clustere \succ modelul nu captează dinamica volatilității

Testul de independență + acoperire condiționată

- ▣ **Formula:** $LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind} \sim \chi^2(2)$
- ▣ LR_{ind} testează dacă $P(I_t = 1 | I_{t-1} = 1) = P(I_t = 1 | I_{t-1} = 0)$
- ▣ Un model bun: încălcări rare **și** distribuite uniform în timp

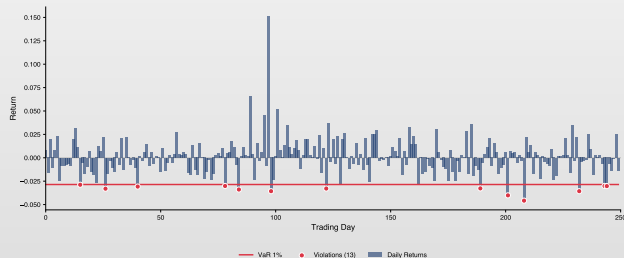
Recomandare

- ▣ Folosește **ambele** teste: Kupiec (frecvență) + Christoffersen (independență)

VaR backtesting: vizualizare

Interpretare

- ▣ Linia roșie: pragul VaR 1% estimat cu GARCH(1,1)
- ▣ Punctele roșii: 13 încălcări din 250 zile ($\hat{p} = 5.2\%$)
 - ▶ **Zonă roșie Basel** \succ modelul subestimează semnificativ riscul
 - ▶ Soluții: distribuție Student-t, model EGARCH, sau nivel VaR mai conservator



Backtesting VaR: semaforul Basel

Zonele de semaforizare Basel III/IV

Zonă	Încălcări/250 zile	Interpretare	Penalizare
Verde	0–4	Model acceptabil	Fără penalizare
Galben	5–9	Necesită investigare	Factor k crește
Roșu	≥ 10	Model inadecvat	Penalizare maximă

Exemplu practic

- Portofoliu cu VaR 1%: 250 zile de backtesting
- 3 încălcări \succ **Zonă verde** \succ model acceptabil
- 7 încălcări \succ **Zonă galbenă** \succ revizuire necesară
- 13 încălcări \succ **Zonă roșie** \succ model respins

Aplicație: Value-at-Risk condiționat

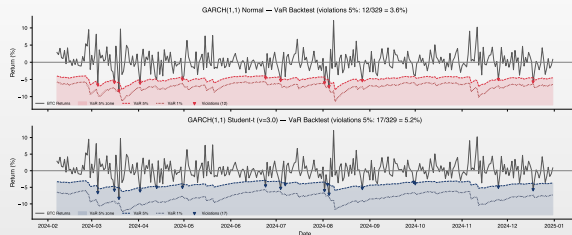
Definiție 4 (VaR condiționat la nivel α)

$$\text{VaR}_{t+1}^{\alpha} = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} \cdot z_{\alpha}$$

Rezultate Bitcoin (test: 329 zile)

	Normal	Student-t
Încălcări 5%	12 (3.6%)	17 (5.2%)
Încălcări 1%	1 (0.3%)	0 (0.0%)
Kupiec p (5%)	0.238	0.890

Student-t: 5.2% \approx 5% — acoperire perfectă. Normal: prea conservator (3.6%).



Validarea modelului de risc: Backtesting

Kupiec Test (Unconditional Coverage)

$$LR_{uc} = -2 \ln \left(\frac{(1 - \alpha)^{T-x} \alpha^x}{(1 - \hat{p})^{T-x} \hat{p}^x} \right) \sim \chi^2(1)$$

Christoffersen (Independență)

- ▣ Verifică **independența** încălcărilor
- ▣ $LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind} \sim \chi^2(2)$

Rezultate Bitcoin (VaR 5%)

	Normal	Student-t
Încălcări	12/329	17/329
Rata	3.6%	5.2%
Kupiec LR	1.39	0.02
Kupiec p	0.238	0.890
Chr. LR_{ind}	0.00	1.20
Chr. p	1.000	0.272

Concluzie

- ▣ Ambele trec Kupiec ($p > 0.05$)
- ▣ Student-t: acoperire **mai precisă**

Limitările GARCH și extensii moderne

Limitări

- Nu captează **jump-uri** (salturi bruște)
- Parametri constanți în timp
- Sensibil la distribuția aleasă
- Nu modelează **regimuri** diferite

Extensii

- **GJR-GARCH**: efect de levier
- **EGARCH**: șocuri asimetrice
- **Markov-Switching GARCH**: regimuri
- Volatilitate realizată (HAR)
- Hybrid GARCH + ML

Mesaj cheie

- GARCH este un **punct de plecare**, nu finalul modelării riscului

Bitcoin: Concluzii cheie

Sumar

1. **Randamentele sunt staționare**; prețurile nu
2. **GARCH(1,1)** depășește variantele mai complexe
3. **Persistență înaltă** ($\alpha + \beta = 0,93$)
4. Volatilitatea este **predictibilă** chiar când randamentele nu sunt

Implicații practice

- ▣ Managementul riscului: VaR, Expected Shortfall
- ▣ Evaluarea opțiunilor necesită prognoze de volatilitate
- ▣ Optimizarea portofoliului cu risc variabil în timp

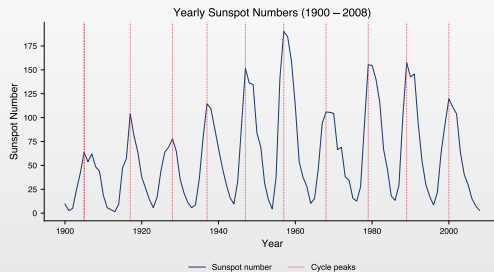
Limitări

- ▣ GARCH presupune șocuri **simetrice**
- ▣ Nu captează **salturi**
- ▣ Distribuția normală poate fi restrictivă

Extensii

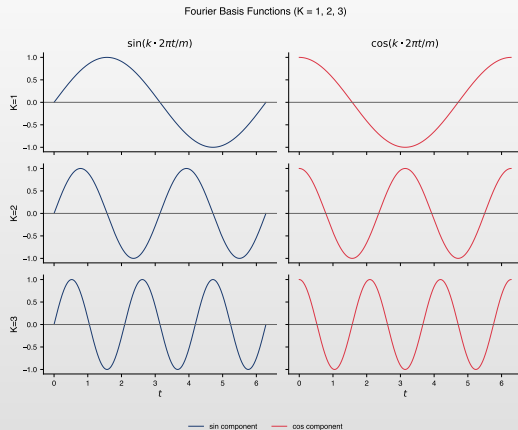
- ▣ Inovații Student-t
- ▣ Volatilitate realizată
- ▣ Modele HAR

Pete solare: ciclul solar de 11 ani



TSA_ch10_sunspots_acf

Termeni Fourier pentru sezonabilitate



Pete solare: selectarea modelului

Metodologie

- **Comparație:** $K = 1, 2, 3, 4$ armonici Fourier pe setul de validare

Împărțirea Datelor

Set	Perioadă	N
Antrenament (70%)	1900–1975	76
Validare (20%)	1976–1997	22
Test (10%)	1998–2008	11
Total		109

Comparație Modele

K	AIC	Val RMSE	
1	665,9	87,15	
2	668,0	86,92	
3	671,8	86,81	Cel mai bun
4	674,5	87,93	

Rezultat

- $K = 3$ armonici Fourier selectate (6 parametri pentru ciclul de 11 ani)

Overfitting în alegerea lui K

Riscul de overfitting

- ▣ K prea mare = memorare ciclu istoric
- ▣ Modelul se potrivește pe zgomot, nu pe semnal
- ▣ Performanța pe test se **degradează**

Fourier \approx regresie periodică

- ▣ Fiecare armonic adaugă 2 parametri (sin, cos)
- ▣ $K = 3$: 6 parametri suplimentari
- ▣ $K = 6$: 12 parametri — risc supraajustare

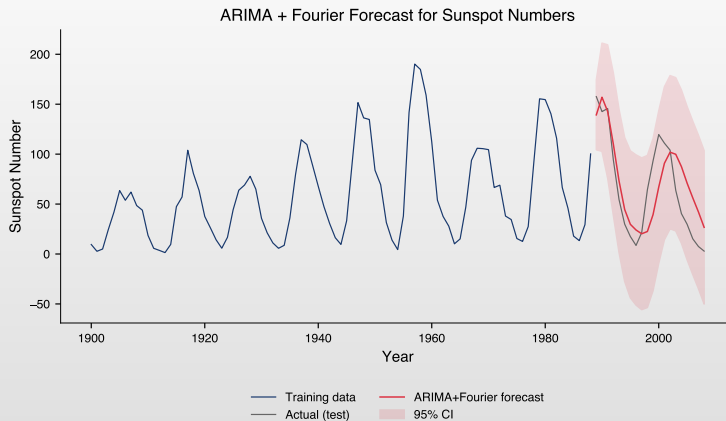
Soluția: validare

- ▣ Selectăm K pe setul de **validare**
- ▣ Evaluăm pe **test** — neatins
- ▣ Trade-off: complexitate vs generalizare

La noi

- ▣ $K = 3$ minimizează Val RMSE
- ▣ $K = 4$ crește eroarea \succ overfitting

Pete solare: rezultate prognoză



Pete solare: concluzii cheie

Când să folosiți termeni Fourier

- Perioada sezonieră s este **lungă** (ex: 11 ani, 52 săptămâni)
- SARIMA ar necesita prea multe lag-uri sezoniere
- Tiparul este **neted și periodic**
- Trebuie capturate cicluri multiple

Alegerea lui K

- **Strategie:** Începeți cu $K = 1$, creșteți progresiv
 - ▶ Opriți când eroarea de validare nu mai scade
 - ▶ K prea mare = supraajustare

Fourier vs SARIMA

	Fourier	SARIMA
Sezoane lungi	✓	×
Sezoane scurte	OK	✓
Parametri	$2K$	Mulți
Flexibilitate	Fixă	Adaptivă

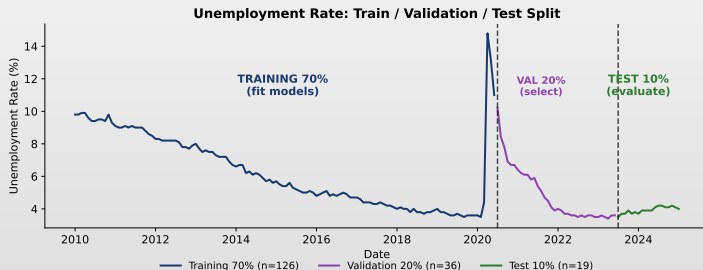
Aplicații

- **Domenii:** Cicluri climatice, cicluri de afaceri, fenomene astronomice

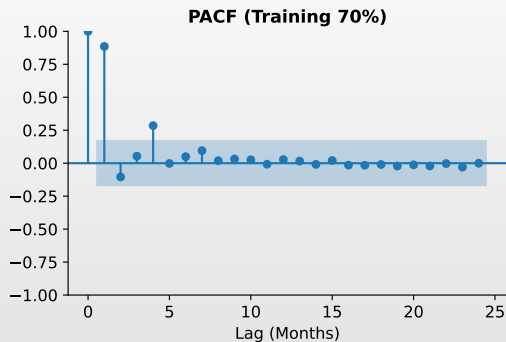
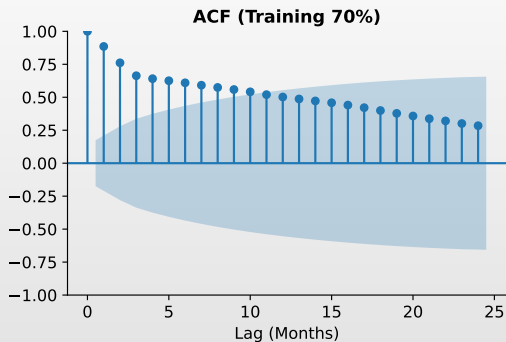
Șomajul: Train / Validation / Test Split

Metodologie

- ▣ **Training (70%):** Estimare modele
- ▣ **Validare (20%):** Selecție model
- ▣ **Test (10%):** Evaluare finală

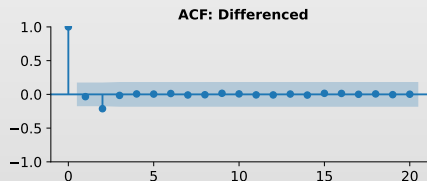
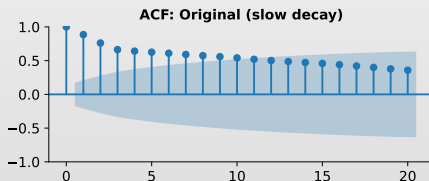
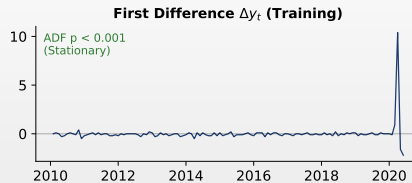
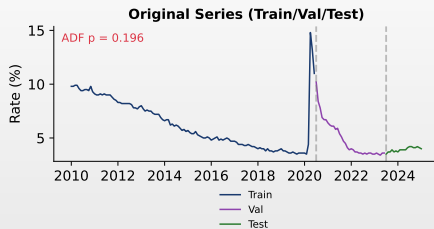


Șomajul: analiză preliminară



TSA_ch10_unemployment_acf_pacf

Șomajul: teste de staționaritate



Rupturi structurale: abordare formală

Metode clasice

- ▣ **Chow Test:** ruptură la punct cunoscut
- ▣ **Bai–Perron:** rupturi multiple, necunoscute
- ▣ **CUSUM:** detectare secvențială

Problemă

- ▣ ADF poate confunda **break** cu **unit root**
- ▣ Test Zivot–Andrews: ADF cu ruptură endogenă

Rezultat: Șomaj la COVID (martie 2020)

- ▣ Chow Test: $F = 21.73$, $p < 0.001$
- ▣ Ruptură structurală **confirmată**
- ▣ SARIMA: parametri constanți — risc
- ▣ Prophet: detectează changepoints automat

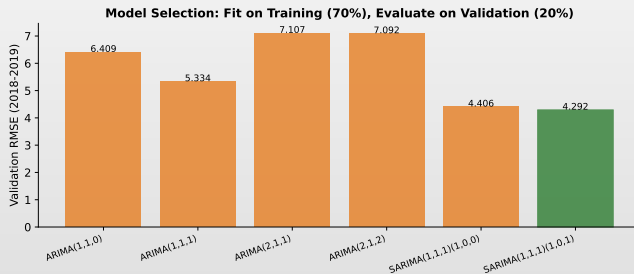
Mesaj cheie

- ▣ Modelul trebuie adaptat la **stabilitatea parametrilor**

Șomajul: selecția modelului (set validare)

Best: SARIMA(1,1,1)(1,0,0)₁₂

- Fit pe training (70%), evaluare pe validare (20%)
- Cel mai bun model selectat după Val RMSE minim



Șomajul: parametrii SARIMA

SARIMA(1,1,1)(1,0,0)₁₂ estimat pe Train+Val (2010-2019)

- ▣ AR(1): $\phi_1 = -0,86$
- ▣ MA(1): $\theta_1 = 0,78$
- ▣ SAR(12): $\Phi_1 = -0,08$ (n.s.)

SARIMA(1,1,1)(1,0,1) - Fitted on Train+Val (85%)

Parameter	Coef	Std Err	P-value	Sig
ar.L1	0.8423	0.2084	0.0001	***
ma.L1	-0.9540	0.1973	0.0000	***
ar.S.L12	0.0326	4.5951	0.9943	
ma.S.L12	-0.0113	4.6087	0.9980	
sigma2	0.8122	0.0608	0.0000	***

Testul Ljung-Box pentru autocorelația reziduurilor

Definiție 5 (Testul Ljung-Box)

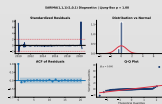
Pentru reziduurile $\hat{\varepsilon}_t$ cu autocorelații eșantion $\hat{\rho}_k$, statistica de test:

$$Q(h) = n(n+2) \sum_{k=1}^h \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k} \stackrel{H_0}{\sim} \chi^2(h-p-q)$$

unde p, q sunt ordinele ARMA. H_0 : Reziduurile sunt zgomot alb.

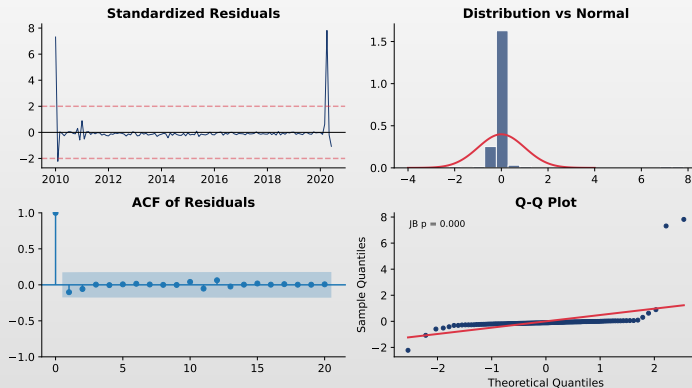
Interpretare

- ▣ Q mare (p-value mic): Respingem H_0 , reziduurile au structură
- ▣ Q mic (p-value mare): Nu respingem H_0 , modelul este adecvat
- ▣ Regulă practică: Folosiți $h = \min(10, n/5)$ pentru ordinul lag-ului



Şomajul: Diagnosticare SARIMA

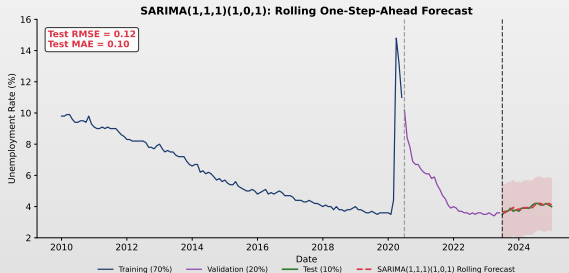
SARIMA(1,1,1)(1,0,1) Diagnostics | Ljung-Box $p = 1.00$



Șomajul: prognoza rolling SARIMA

Problemă: Ruptura structurală

- Prognoză rolling one-step-ahead (re-estimare la fiecare t)
- **Test RMSE = 0,12**



Modelul Prophet

Definiție 6 (Descompunerea Prophet)

- **Model:** $y_t = g(t) + s(t) + h(t) + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$
- **Componente:** $g(t) = \text{trend}$, $s(t) = \text{sezonalitate}$, $h(t) = \text{sărbători}$

Detectare puncte de schimbare

- Selectare automată a locațiilor
- `changepoint_prior_scale` controlează flexibilitatea

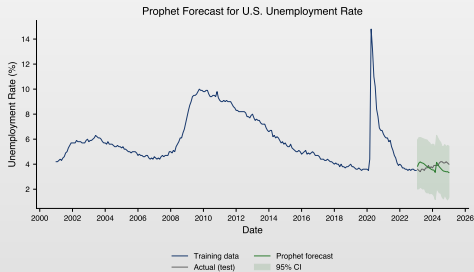
Avantaje

- Gestionează date lipsă
- Componente interpretabile
- Robust la outlieri

Șomajul: rezultate prognoză Prophet

Concluzie cheie

- **Prophet:** se adaptează prin detectare changepoint
- **Test RMSE** = 0,58



Șomajul: Ajustarea modelului

Ajustarea hiperparametrilor

- Ajustăm `changepoint_prior_scale` pe setul de validare

Împărțirea Datelor		
Set	Perioadă	N
Antrenament (70%)	2010-01 – 2020-06	126
Validare (20%)	2020-07 – 2023-06	36
Test (10%)	2023-07 – 2025-01	19
Total		181

Comparație Scale

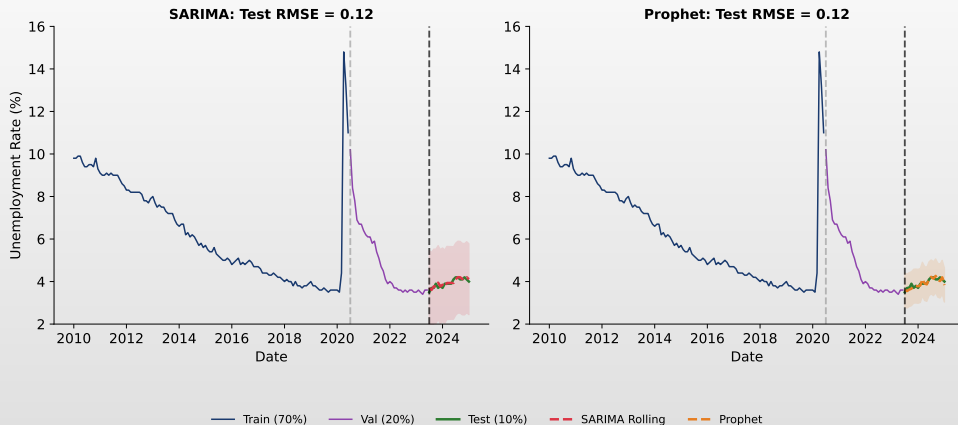
Scale	Val RMSE
0,01	4,21
0,05	3,89
0,10	3,52
0,30	3,67
0,50	3,81

Cel mai bun

Interpretare

- Scale = 0,10 echilibrează flexibilitatea (captarea șocului COVID) cu stabilitatea

Șomaj: comparație SARIMA vs Prophet



Prophet: când să-l folosești

Cazuri de utilizare ideale

- Date de business cu **sărbători**
- **Valori lipsă** prezente
- Nevoie de componente **interpretabile**
- Prognoze cu **benzi de incertitudine**

Atenție: Rupturi structurale

- Prophet gestionează rupturile prin changepoints, dar **SARIMA l-a depășit** la șomaj (0,12 vs 0,58)
- Validați întotdeauna!

Prophet vs ARIMA

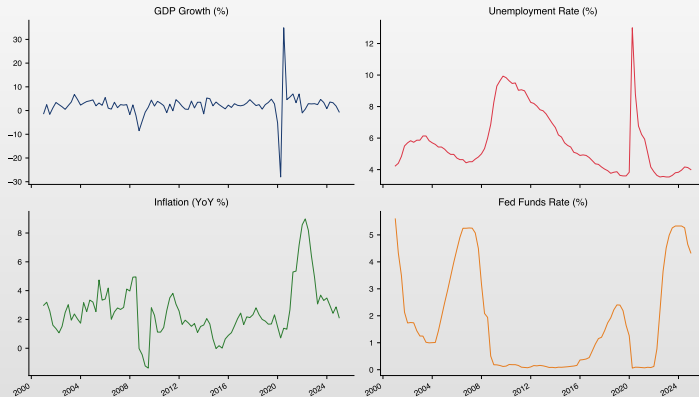
	Prophet	ARIMA
Changepoints	✓	×
Date lipsă	✓	×
Sărbători	✓	×
Viteză	Rapidă	Moderată
Interpretabil	✓	×

Parametri cheie

- `changepoint_prior_scale`: flexibilitate
- `seasonality_prior_scale`: netezime

VAR: date economice multivariate

U.S. Macroeconomic Variables (2001 – 2025)



Specificarea modelului VAR

Definiție 7 (Autoregresie Vectorială VAR(p))

- **Date:** Pentru K variabile $y_t = (y_{1t}, \dots, y_{Kt})'$:
$$y_t = c + A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + \dots + A_p y_{t-p} + u_t$$
- **Notăție:** A_i sunt matrici de coeficienți $K \times K$, $u_t \sim N(0, \Sigma)$

Pentru sistemul nostru cu 4 variabile

- **VAR(2):** 4 constante
- $2 \times 4 \times 4 = 32$ coeficienți AR
- **36 parametri total**

Selectarea lag-ului

- Folosim criterii informaționale:
 - ▶ AIC: Tinde să supraajusteze
 - ▶ BIC: Mai simplu
 - ▶ Cross-validare pe date păstrate

Criterii informaționale pentru selectarea modelului

Definiție 8 (Criteriile Informaționale Akaike și Bayesian)

Pentru un model cu log-verosimilitate \mathcal{L} , k parametri și n observații:

$$\text{AIC} = -2\mathcal{L} + 2k$$

$$\text{BIC} = -2\mathcal{L} + k \ln(n)$$

AIC

- Asimptotic eficient
- Poate supraajusta cu n mic
- Minimizează eroarea de predicție

BIC

- Consistent (găsește modelul adevărat)
- Penalizare mai mare: $\ln(n) > 2$ dacă $n > 7$
- Mai parcimonios

VAR: selectarea lag-ului și estimare

Criterii informaționale

Lag	BIC	
1	-4,810	
2	-5,178	Cel mai bun
3	-4,633	
4	-4,614	

Împărțirea datelor

Set	Perioadă	N
Antrenament (70%)	2001-T1 – 2017-T4	67
Validare (20%)	2018-T1 – 2022-T4	20
Test (10%)	2023-T1 – 2025-T1	10
Total		97

Verificare validare

- VAR(2) obține și cel mai mic RMSE de validare

Stabilitatea modelului VAR

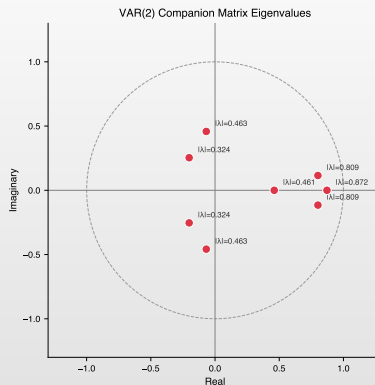
Condiția de stabilitate

- ☐ Toate valorile proprii ale **matricei companion**:
 $|\lambda_i| < 1, \quad \forall i$

Rezultate VAR(2) — date economice

$ \lambda_1 , \lambda_2 $	0.324
$ \lambda_3 , \lambda_4 $	0.463
$ \lambda_5 $	0.461
$ \lambda_6 $	0.872
$ \lambda_7 , \lambda_8 $	0.810

- ☐ $\text{Max } |\lambda| = 0.872 < 1$ — **stabil**



VAR vs VECM: cointegrare

Problemă

- Dacă variabilele sunt $I(1) \succ$ VAR pe niveluri produce regresii spurioase

Definiție 9 (VECM)

$$\Delta y_t = \Pi y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \Delta y_{t-i} + u_t, \quad \Pi = \alpha \beta'$$

Mesaj cheie

- VAR pe diferențe: pierde relația pe termen lung; VECM: o păstrează prin $\Pi = \alpha \beta'$

Johansen Test — date economice

r	Trace	CV 5%	Respins?
0	64.09	47.85	Da
1	24.03	29.80	Nu
2	11.89	15.49	Nu
3	1.28	3.84	Nu

- **1 relație de cointegrare** găsită
- VECM e mai adecvat decât VAR pe niveluri

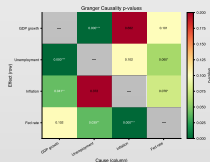
Cauzalitatea Granger: Rezultate empirice

Interpretare

Fiecare celulă arată p-value-ul pentru testarea dacă variabila din rând Granger-cauzează variabila din coloană. Verde: $p < 0,10$. Citire: rând cauzează coloană.

Concluzii economice

- ☐ Șomaj \rightarrow PIB ($p = 0,045$): Legea lui Okun
- ☐ Fed \rightarrow Inflație ($p = 0,087$): Transmisia politicii monetare
- ☐ PIB \rightarrow Șomaj: Dovezi slabe



Cauzalitatea Granger: Definiție formală

Definiție 10 (Cauzalitatea Granger)

X **Granger-cauzează** Y dacă, pentru un $h > 0$:

$$\text{MSE} \left[\mathbb{E}[Y_{t+h} | \mathcal{F}_t^{X,Y}] \right] < \text{MSE} \left[\mathbb{E}[Y_{t+h} | \mathcal{F}_t^Y] \right]$$

unde $\mathcal{F}_t^{X,Y}$ include valorile trecute ale lui X și Y , iar \mathcal{F}_t^Y include doar trecutul lui Y .

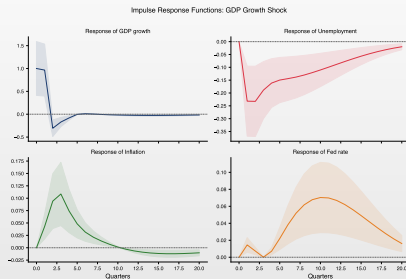
Observație importantă

Cauzalitatea Granger este **cauzalitate predictivă**, nu cauzalitate reală. “ X Granger-cauzează Y ” înseamnă că X conține informație utilă pentru prognoza lui Y , nu că X cauzează Y structural.

Procedura de testare

Folosim testul F (sau Wald) pentru a testa H_0 : coeficienții lag-urilor lui X sunt simultan zero în ecuația lui Y .

Funcții de răspuns la impuls (IRF)

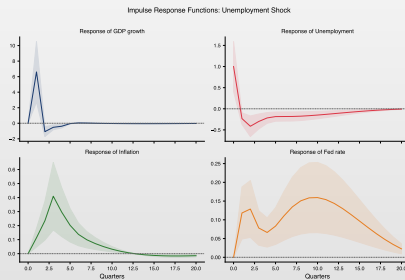


 TSA_ch10_irf_gdp_shock

IRF: șoc șomaj

Efecte

- ↑ Șomaj \succ ↓ PIB (Okun), ↓ Inflație (Phillips), Fed reduce rata

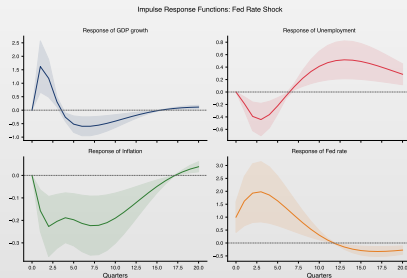


TSA_ch10_irf_unemp_shock

IRF: șoc rată Fed

Politică monetară

- Creștere rată \rightarrow PIB \downarrow , Șomaj \uparrow , Inflație \downarrow

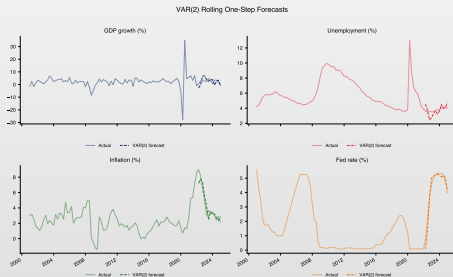


TSA_ch10_irf_fed_shock

VAR: Prognoza (Train/Val/Test)

Prognoză Rolling one-step-ahead

- VAR captează dinamică PIB-Șomaj
- Șocul COVID vizibil în perioadă validare (2020)



VAR: rezultate set test

Performanță set Test pe variabile

Variabilă	RMSE	MAE	Acur. Direcție
Creștere PIB	1,33	0,99	50%
Șomaj	0,64	0,52	50%
Inflație	1,56	1,12	60%
Rata Fed	2,59	2,45	80%
Medie	1,53	1,27	60%

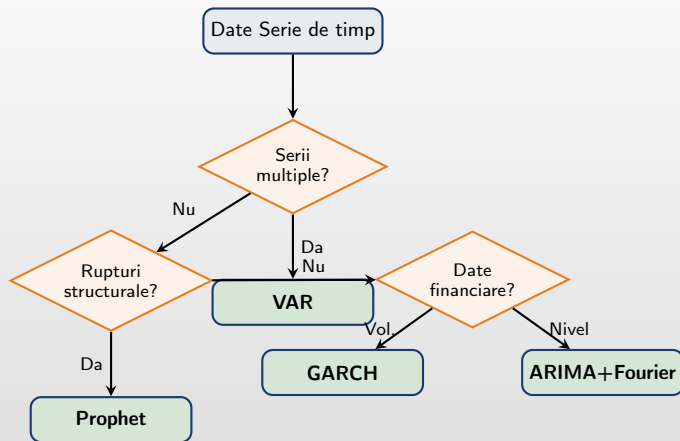
Puncte forte

- Captează dinamică între variabile
- Acuratețe direcțională bună
- Relații interpretabile

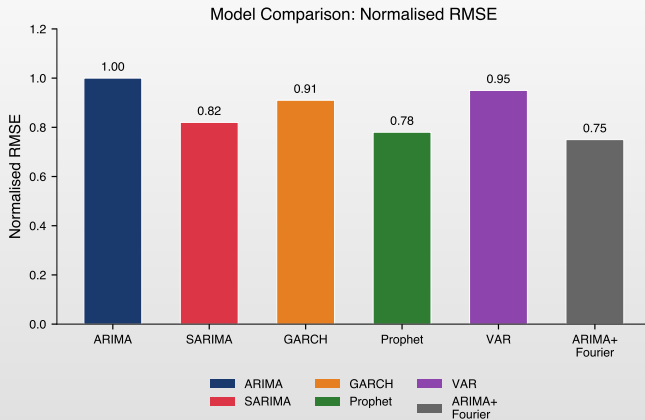
Limitări

- Mulți parametri (blestemul dimensionalității)
- Sensibil la selectarea lag-ului
- Perioada COVID dificilă

Cadrul de selectare a modelului



Sumar: comparație modele



Sinteză: Comparația modelelor

Caracteristică	GARCH	Fourier	Prophet	VAR
Țintă	Volatilitate	Nivel	Nivel	Multiple
Sezonalitate	Nu	Da (lungă)	Da (multiplă)	Nu
Rupturi structurale	Nu	Nu	Da	Nu
Serii multiple	Nu	Nu	Nu	Da
Interpretabil	Mediu	Ridicat	Ridicat	Ridicat
Parametri	Puțini	2K	Auto	Mulți
Date lipsă	Nu	Nu	Da	Nu
Ideal pentru	Finanțe	Cicluri	Business	Macro

Rezultatele noastre

- GARCH: MAE=1,82 (volatilitate)
- Fourier: RMSE=31,10 (cicluri)
- SARIMA: RMSE=0,12 (rupturi)
- VAR: RMSE mediu=1,53 (multi)

Insight cheie

- Fiecare model excelează în domeniul său
- Arta constă în alegerea modelului potrivit caracteristicilor datelor

Bune practici pentru prognoza aplicată

Metodologie

1. **Explorați** datele temeinic
2. **Testați** staționaritatea
3. **Împărțiți** train/validation/test
4. **Comparați** modele pe validare
5. **Raportați** metrice pe test

Greșeli frecvente

- Privirea în datele de test
- Supraajustare pe setul de antrenament
- Ignorarea ipotezelor modelului
- Neraportarea incertitudinii

Sfaturi practice

- Începeți simplu (random walk, naiv)
- Adăugați complexitate doar dacă e necesar
- Vizualizați prognoze vs. valori reale
- Verificați reziduurile pentru tipare
- Raportați intervale de încredere

Amintiți-vă

- “Toate modelele sunt greșite, dar unele sunt utile.”
— George E. P. Box

Prognoză vs Cauzalitate vs Decizie

Obiectiv	Model	Focalizare
Predicție pură	ARIMA / ML	Acuratețe out-of-sample
Risc financiar	GARCH	Volatilitate, VaR
Dinamici macro	VAR	Interacțiuni multivariate
Relații structurale	SVAR / VECM	Identificare cauzală
Regimuri	Markov Switching	Schimbări de regim

Mesaj cheie

- Nu există model universal
- Există **potrivire între model și problemă**

Concluzii cheie

1. Metodologie Riguroasă

- ▶ Împărțirea train/validation/test previne supraajustarea
- ▶ Setul de test trebuie să rămână neatins până la evaluarea finală

2. Potriviți Modelul cu Datele

- ▶ Volatilitate financiară \succ GARCH
- ▶ Sezonalitate lungă \succ Termeni Fourier
- ▶ Rupturi structurale \succ Prophet
- ▶ Serii multiple \succ VAR

3. Interpretați Rezultatele cu Grijă

- ▶ Cauzalitate Granger \neq cauzalitate adevărată
- ▶ Performanța out-of-sample contează cel mai mult
- ▶ Modelele mai simple funcționează adesea mai bine

Rolul AI în modelarea seriilor de timp

AI poate

- ▣ Genera cod pentru estimare și prognoză
- ▣ Selecta modele (AutoML, grid search)
- ▣ Combina prognoze (ensemble)
- ▣ Detecta anomalii și pattern-uri

Dar nu poate

- ▣ Înlocui validarea statistică
- ▣ Detecta automat **data leakage**
- ▣ Garanta interpretare economică corectă
- ▣ Verifica ipotezele modelului

Principiu

- ▣ AI este **instrument**, nu autoritate
- ▣ Validarea statistică rămâne responsabilitatea cercetătorului

Exercițiu AI: Gândire critică

Prompt de testat în ChatGPT / Claude / Copilot

"Descarcă de pe FRED vânzările lunare cu amănuntul din SUA (seria RSXFS) din 2010-01 până în 2024-12 (180 observații). Fă o analiză completă a seriei de timp: descompunere, teste de staționaritate, selecție model (compară ETS, SARIMA și Prophet), prognoză pe 12 luni, evaluare cu RMSE/MAE/MASE pe un split temporal 70/15/15. Vreau cod Python de calitate publicabilă."

Exercițiu:

1. Rulați prompt-ul într-un LLM la alegere și analizați critic răspunsul.
2. Urmează fluxul corect? (grafic → descompunere → test → model → diagnostic → prognoză)
3. Compară mai multe modele (ETS, ARIMA, SARIMA) cu benchmark-uri adecvate?
4. Împărțirea train/test este făcută corect? Există scurgeri de date (data leakage)?
5. Discută limitările și ipotezele modelului ales?

Atenție: Codul generat de AI poate rula fără erori și arăta profesional. *Asta nu înseamnă că e corect.*

Întrebarea 1

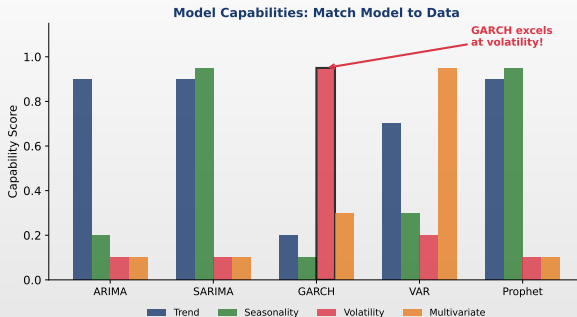
Întrebare

☐ Ce model alegeți pentru a prognoza volatilitatea randamentelor financiare?

Variante de răspuns

- (A) ARIMA — captează tendințe și autocorelații
- (B) GARCH — modelează varianța condiționată
- (C) Prophet — detectează puncte de schimbare
- (D) VAR — model multivariat pentru interdependențe

Întrebarea 1: Răspuns



Răspuns: (B)

- GARCH captează volatility clustering și riscul variabil în timp. ARIMA modelează nivelul, Prophet sezonalitatea, VAR relațiile între serii — niciunul nu modelează varianța direct.

Întrebarea 2

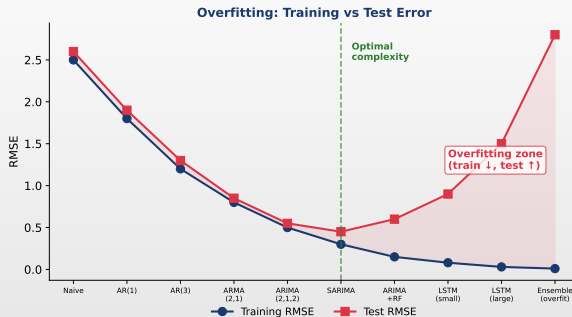
Întrebare

- ☐ Un model SARIMA obține $RMSE = 0,05$ pe antrenament, dar $RMSE = 2,30$ pe test. Ce indică aceasta?

Variante de răspuns

- (A) Modelul este excelent — eroare mică pe antrenament
- (B) Modelul suferă de overfitting — memorează zgomotul
- (C) Setul de test este greșit — trebuie schimbat
- (D) Diferența este normală — nu e nicio problemă

Întrebarea 2: Răspuns



Răspuns: (B)

- Un raport de $46\times$ între RMSE test și train semnalează overfitting sever. Modelul se potrivește zgomotului din antrenament și nu generalizează. Soluție: model mai simplu, validare.

Întrebarea 3

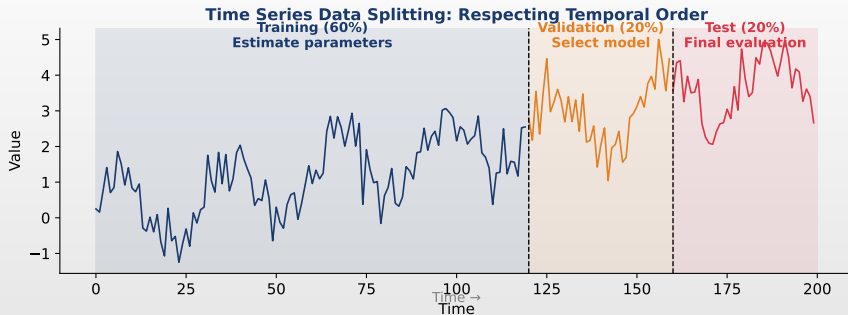
Întrebare

☐ De ce este importantă separarea datelor în train/validation/test?

Variante de răspuns

- (A) Pentru a avea mai multe date de antrenament
- (B) Pentru a preveni supraajustarea și a evalua corect
- (C) Este doar o convenție, nu are importanță reală
- (D) Pentru a reduce timpul de calcul

Întrebarea 3: Răspuns



Răspuns: (B)

- Train: estimează parametrii. Validare: selectează modelul. Test: evaluare finală nebiasată. Amestecarea acestor roluri duce la estimări optimiste ale performanței.

Întrebarea 4

Întrebare

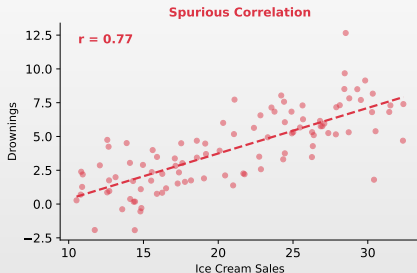
☐ Cauzalitatea Granger este echivalentă cu cauzalitatea reală (structurală)?

Variante de răspuns

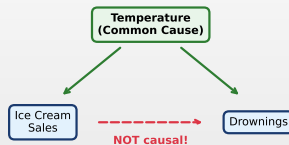
- (A) Da — dacă X prezice Y , atunci X cauzează Y
- (B) Nu — testează doar conținut predictiv, nu cauzalitate
- (C) Depinde de numărul de lag-uri selectate
- (D) Da, dacă $p\text{-value} < 0,05$

Întrebarea 4: Răspuns

Granger Causality \neq True Causality



True Causal Structure



Răspuns: (B)

- Testul Granger verifică dacă trecutul lui X îmbunătățește predicția lui Y . Corelații false (ex: vânzări de înghețată și înecuri) pot trece testul din cauza cauzelor comune.

Întrebarea 5

Întrebare

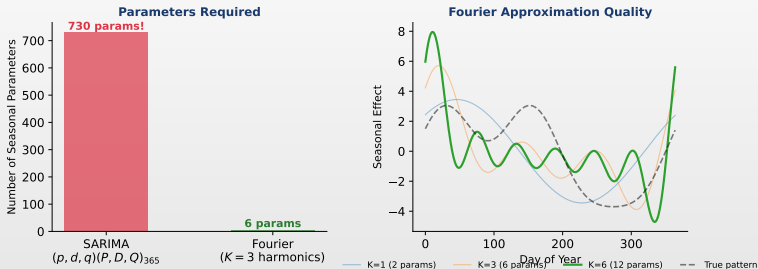
▣ Ce model folosiți pentru o serie cu sezonalitate lungă (ex: $s = 365$ zile)?

Variante de răspuns

- (A) $\text{SARIMA}(p, d, q)(P, D, Q)_{365}$
- (B) GARCH — modelează variația
- (C) ARIMA + Termeni Fourier sau Prophet/TBATS
- (D) VAR cu 365 lag-uri

Întrebarea 5: Răspuns

Long Seasonality ($s = 365$): Fourier Terms vs SARIMA



Răspuns: (C)

- SARIMA₃₆₅ necesită ~ 730 parametri sezonieri — imposibil. Termenii Fourier cu $K = 3$ folosesc doar 6 parametri. Prophet și TBATS gestionează sezonalități multiple automat.

Bibliografie I

Manuale fundamentale (referințe comune tuturor capitolelor)

- Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*, 3rd ed., OTexts.
- Shumway, R.H., & Stoffer, D.S. (2017). *Time Series Analysis and Its Applications*, 4th ed., Springer.

Lucrări de referință pe domenii

- Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*, 3rd ed., Wiley. (GARCH, VAR)
- Lütkepohl, H. (2005). *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer. (VAR, VECM)
- Francq, C., & Zakoïan, J.-M. (2019). *GARCH Models*, 2nd ed., Wiley. (Volatilitate)

Bibliografie II

Abordări moderne și competiții de prognoză

- ▣ Petropoulos, F., et al. (2022). Forecasting: Theory and Practice, *International Journal of Forecasting*, 38(3), 845–1054.
- ▣ Makridakis, S., Spiliotis, E., & Assimakopoulos, V. (2020). The M4 Competition, *International Journal of Forecasting*, 36(1), 54–74.
- ▣ Taylor, S.J., & Letham, B. (2018). Forecasting at Scale, *The American Statistician*, 72(1), 37–45.

Concluzii esențiale

Ce am învățat

- ▣ Selectarea modelului depinde de caracteristicile datelor: staționaritate, sezonalitate, volatilitate
- ▣ Metodologia Box-Jenkins oferă un cadru sistematic pentru modelarea seriilor de timp
- ▣ Evaluarea corectă necesită testare out-of-sample și validare încrucișată

Important

- ▣ Niciun model nu câștigă peste tot — potriviți modelul cu datele:
 - ▶ ARIMA pentru tendințe
 - ▶ SARIMA pentru sezonalitate
 - ▶ GARCH pentru volatilitate
 - ▶ VAR/VECM pentru dinamici multivariate
 - ▶ Prophet/TBATS pentru tipare complexe
- ▣ Validați întotdeauna out-of-sample!

Referințe



Box, G.E.P., Jenkins, G.M., Reinsel, G.C., & Ljung, G.M. (2015). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. 5th ed., Wiley.



Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.



Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*. 3rd ed., Wiley.



Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*. 3rd ed., OTexts.



Taylor, S.J., & Letham, B. (2018). Forecasting at Scale. *The American Statistician*, 72(1), 37-45.



Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307-327.





Sims, C.A. (1980). Macroeconomics and Reality. *Econometrica*, 48(1), 1-48.

Vă Mulțumim!

Întrebări?

Materialele cursului sunt disponibile la: <https://danpele.github.io/Time-Series-Analysis/>

 Quantlet

 Quantinar