



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 9: Prophet și TBATS



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

Cuprins

Fundamente

- Sezonalități Multiple
- Modelul TBATS
- Facebook Prophet

Aplicații

- Comparație și Ghid de Selecție
- Studiu de Caz
- Rezumat și Quiz



Problema: tipare sezoniere complexe

Exemple din Lumea Reală

- **Cerere de electricitate pe oră:** Tipare zilnice + săptămânaile + anuale
- **Trafic web:** Zilnic + săptămânal + efecte de sărbători
- **Vânzări retail:** Săptămânal + lunar + anual + sărbători
- **Volum call center:** Pe oră + zilnic + săptămânal

Limitarea SARIMA

- SARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s standard gestionează doar o singură perioadă sezonieră s
- Pentru date orare cu tipare zilnice și săptămânaile, avem nevoie de $s_1 = 24$ și $s_2 = 168$

Soluții pentru sezonalități multiple

Abordări Tradiționale

- Termeni Fourier:** Adăugare regresori sin/cos
- Variabile dummy:** Mulți parametri
- Modele nested:** Specificare complexă

Abordări Moderne

- TBATS:** Automat, gestionează multe perioade
- Prophet:** Flexibil, interpretabil
- Metode neurale:** Deep learning

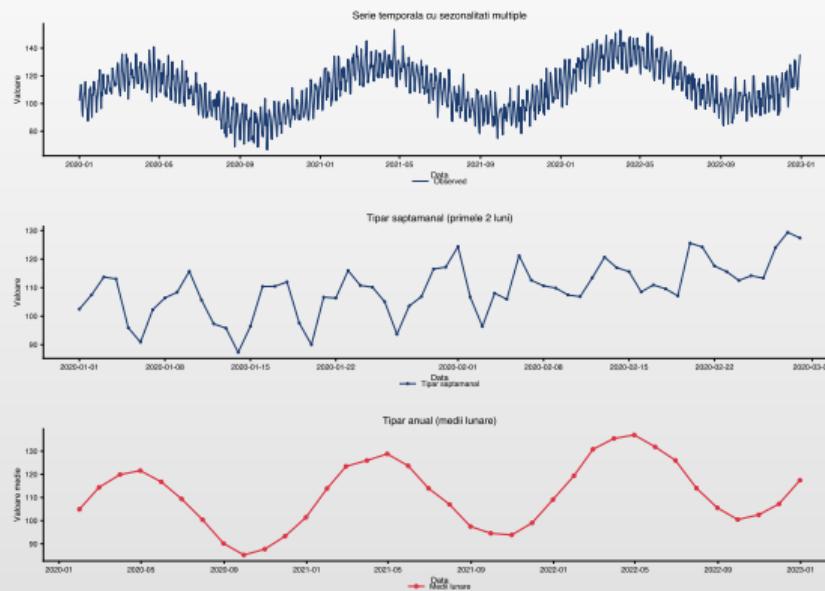
Comparație

- Rezumat comparativ:

Metodă	Nr. Max Sezonalități	Interpretabil
SARIMA	1	Da
Fourier + ARIMA	Multiple	Moderat
TBATS	Multiple	Moderat
Prophet	Multiple	Da



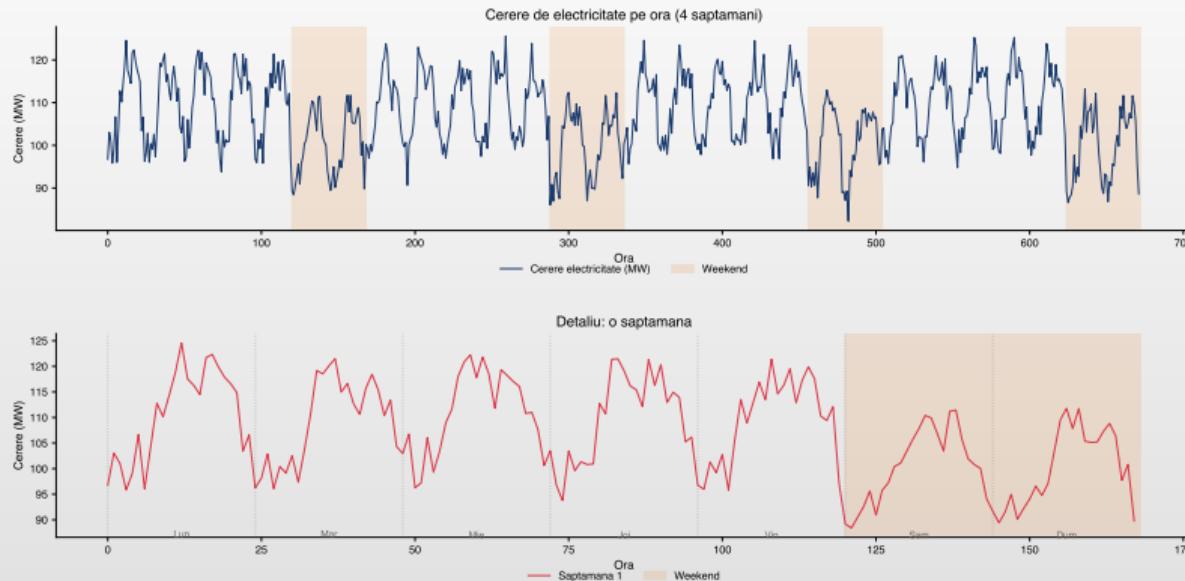
Exemplu: date orare cu sezonalități multiple



Q TSA_ch9_multiple_seasonality



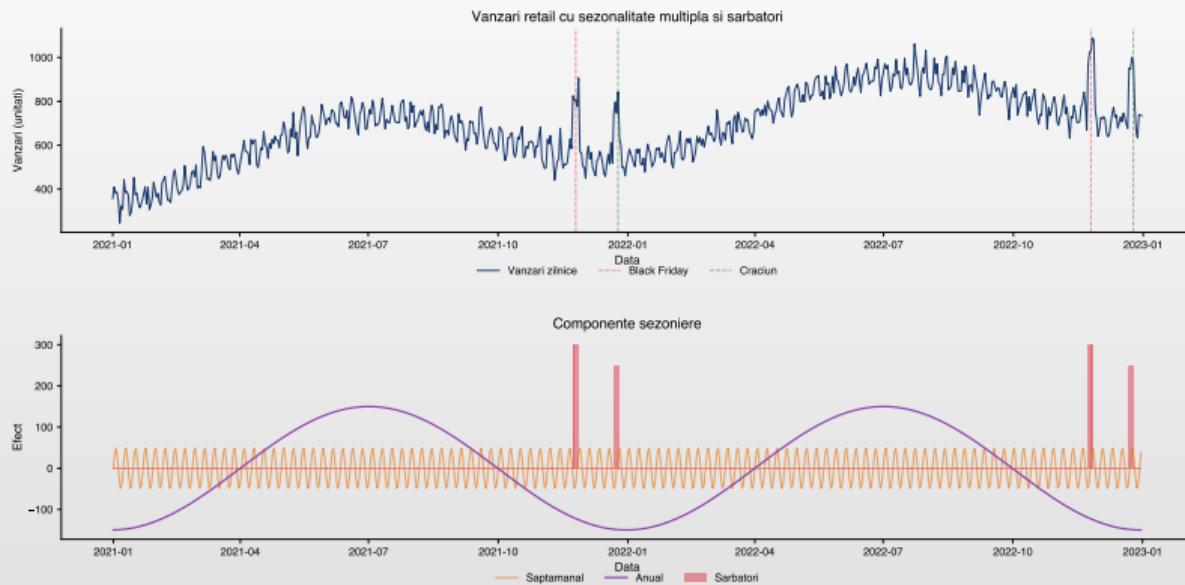
Exemplu real: cerere de electricitate



TSA_ch9_electricity_demand



Exemplu real: vânzări retail cu sărbători



Q TSA_ch9_retail_sales

TBATS: ce înseamnă?

Componentele TBATS

- T** ∵ Sezonalitate **Trigonometrică** folosind termeni Fourier
- B** ∵ Transformare **Box-Cox** pentru stabilizarea varianței
- A** ∵ Erori **ARMA** pentru autocorelația reziduală
- T** ∵ Componentă de **Trend** (posibil amortizat)
- S** ∵ Componente **Sezoniere** (multiple permise)

Inovația Cheie

- TBATS folosește **reprezentare trigonometrică** pentru sezonalitate:

$$s_t^{(i)} = \sum_{j=1}^{k_i} \left[s_j^{(i)} \cos\left(\frac{2\pi j t}{m_i}\right) + s_j^{*(i)} \sin\left(\frac{2\pi j t}{m_i}\right) \right]$$

- m_i este perioadă sezonieră i și k_i este numărul de armonici



Structura modelului TBATS

Specificația Completă a modelului

- Ecuatiile modelului TBATS:

$$y_t^{(\omega)} = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \sum_{i=1}^M s_t^{(i)} + d_t \quad (1)$$

$$\ell_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha d_t \quad (2)$$

$$b_t = \phi b_{t-1} + \beta d_t \quad (3)$$

$$d_t = \sum_{i=1}^p \varphi_i d_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \quad (4)$$

Notări

- $y_t^{(\omega)}$ ~ seria transformată Box-Cox (dacă $\omega \neq 1$)
- ℓ_t ~ nivelul local, b_t ~ trendul cu amortizare ϕ
- $s_t^{(i)}$ ~ M componente sezoniere cu perioade m_1, \dots, m_M
- d_t ~ procesul de eroare ARMA(p, q)

TBATS: sezonalitate trigonometrică

De ce Termeni Fourier/Trigonometrici?

- Simplu:** Mai puțini parametri decât variabilele dummy
- Neted:** Captează natural tiparele sezoniere netede
- Flexibil:** Numărul de armonici k controlează complexitatea
- Perioade non-întregi:** Poate gestiona $s = 365.25$ pentru date zilnice

k mic (puține armonici)

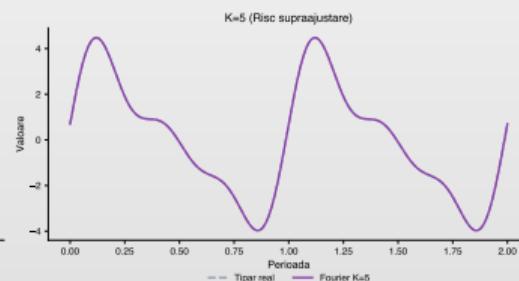
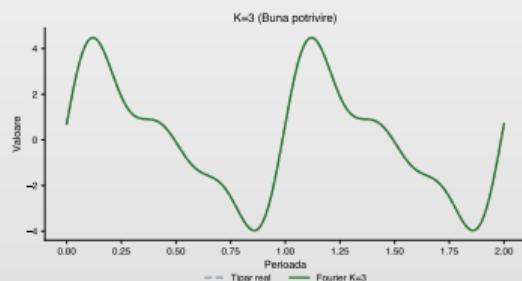
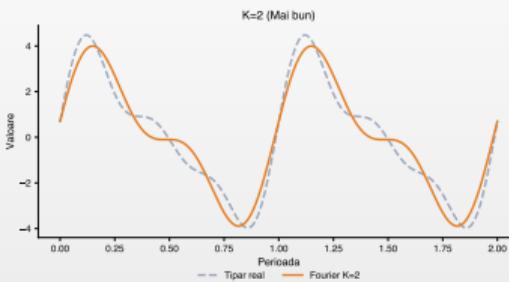
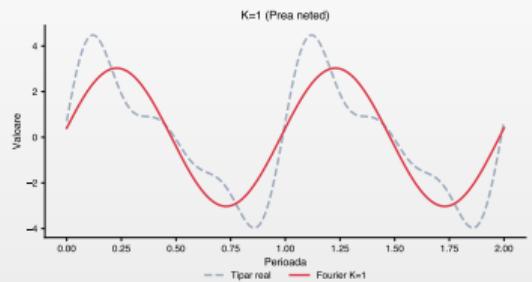
- Tipar neted
- Mai puțini parametri
- Poate rata vârfuri abrupte

k mare (multe armonici)

- Poate capta orice tipar
- Mai mulți parametri
- Risc de supraajustare



Aproximarea Fourier a sezonalității



Q TSA_ch9_fourier_approximation



TBATS în practică

Implementare Python

- **Pachet tbats:** Oferă selecție automată a modelului
 - ▶ Selectează automat parametrul Box-Cox ω
 - ▶ Alege numărul de armonici k_i pentru fiecare perioadă sezonieră
 - ▶ Selectează ordinele ARMA (p, q)
 - ▶ Testează trend amortizat vs neamortizat

Exemplu de Cod

- **Cod Python:**

```
from tbats import TBATS
estimator = TBATS(seasonal_periods=[7, 365.25])
model = estimator.fit(y)
forecast = model.forecast(steps=30)
```

Notă

- BATS este versiunea mai simplă fără termeni trigonometrici (folosește stări sezoniere tradiționale)



TBATS: avantaje și limitări

Avantaje

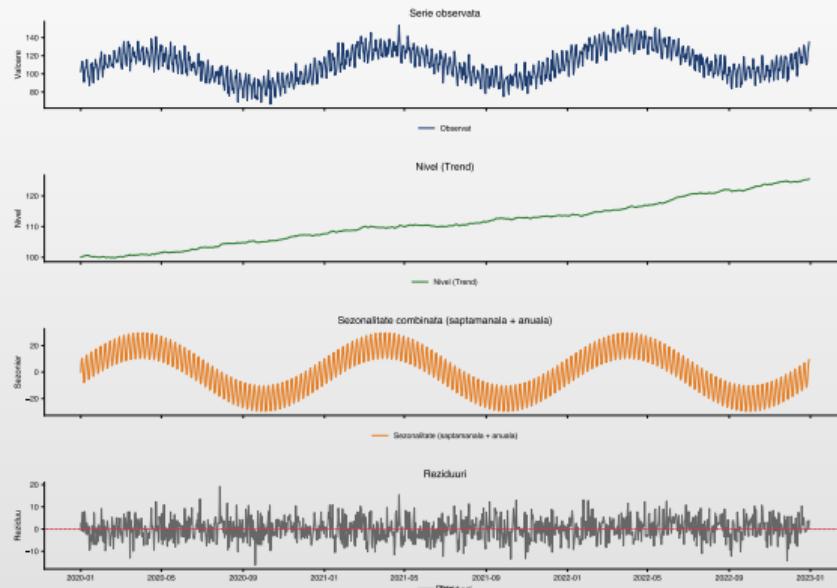
- Gestionează **multiple** perioade sezoniere
- Selecție **automată** a modelului
- Gestionează perioade **non-întregi** (365.25)
- Box-Cox pentru heteroscedasticitate
- Bun pentru date de **frecvență înaltă**

Limitări

- **Intensiv computațional**
- Fără **regresori externi**
- Mai puțin **interpretabil** decât Prophet
- Poate fi **lent** pentru serii foarte lungi
- Necesită **suficiente date** per sezon



Exemplu descompunere TBATS



 TSA_ch9_tbats_decomposition



Prophet: prezentare generală

Ce este Prophet?

- Origine:** Procedură de prognoză dezvoltată de Facebook (Meta) în 2017
- Proiectat pentru serii de timp de business cu:**
 - ▶ Efecte sezoniere puternice (zilnice, săptămâna, anuale)
 - ▶ Efecte de sărbători
 - ▶ Schimbări de trend (changepoints)
 - ▶ Date lipsă și outlieri

Filosofia Cheie

- “Analyst-in-the-loop” forecasting*
- Prophet este proiectat pentru a fi ajustat de analiști cu cunoștințe de domeniu, dar care nu sunt neapărat experți în serii de timp



Structura modelului Prophet

Abordare prin Descompunere

- Prophet folosește o **descompunere aditivă**:

$$y(t) = g(t) + s(t) + h(t) + \varepsilon_t$$

$g(t)$: Trend

- Liniar sau logistic
- Changepoints automate
- Saturație de creștere

$s(t)$: Sezonalitate

- Serii Fourier
- Perioade multiple
- Sezonialitate custom

$h(t)$: Sărbători

- Sărbători pe țară
- Evenimente custom
- Efecte de fereastră



Prophet: componenta de trend

Trend Liniar cu Changepoints

- Ecuăția: $g(t) = (k + \mathbf{a}(t)^T \boldsymbol{\delta}) \cdot t + (m + \mathbf{a}(t)^T \boldsymbol{\gamma})$

Parametri:

- ▶ $k \succ$ rata de creștere de bază
- ▶ $\boldsymbol{\delta} \succ$ vector de ajustări de rată la changepoints
- ▶ $\mathbf{a}(t) \succ$ indică ce changepoints sunt active la momentul t
- ▶ $m \succ$ offset-ul, $\boldsymbol{\gamma}$ asigură continuitatea

Creștere Logistică (pentru trenduri cu saturatie)

- Ecuăția de creștere logistică:

$$g(t) = \frac{C(t)}{1 + \exp(-(k + \mathbf{a}(t)^T \boldsymbol{\delta})(t - (m + \mathbf{a}(t)^T \boldsymbol{\gamma})))}$$

- $C(t)$ este capacitatea maximă (posibil variabilă în timp)



Prophet: componenta de sezonalitate

Reprezentare prin Serii Fourier

- Pentru o perioadă sezonieră P , Prophet folosește:

$$s(t) = \sum_{n=1}^N \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{P}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{P}\right) \right]$$

Setări Implicite

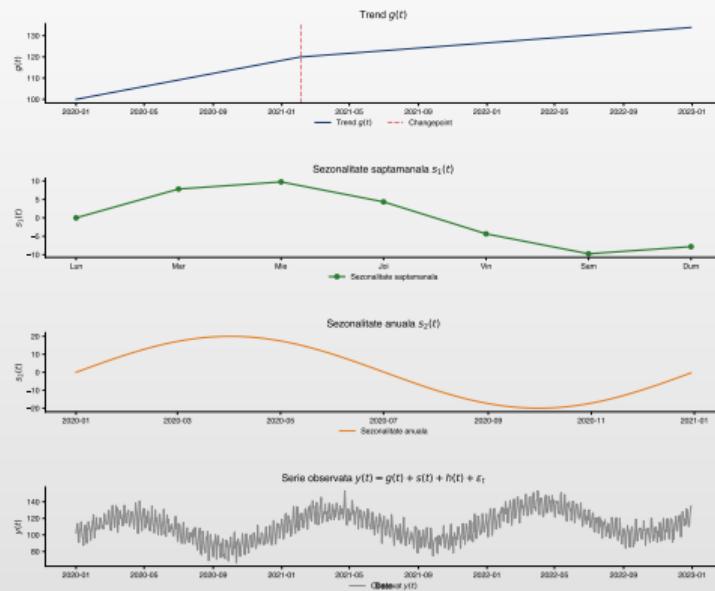
- **Anuală:** perioadă 365.25 zile, ordin Fourier 10
- **Săptămânală:** perioadă 7 zile, ordin Fourier 3
- **Zilnică:** perioadă 1 zi, ordin Fourier 4

Atenție

- Ordin Fourier N mai mare \succ mai multă flexibilitate (tipare mai complexe) dar risc mai mare de supraajustare



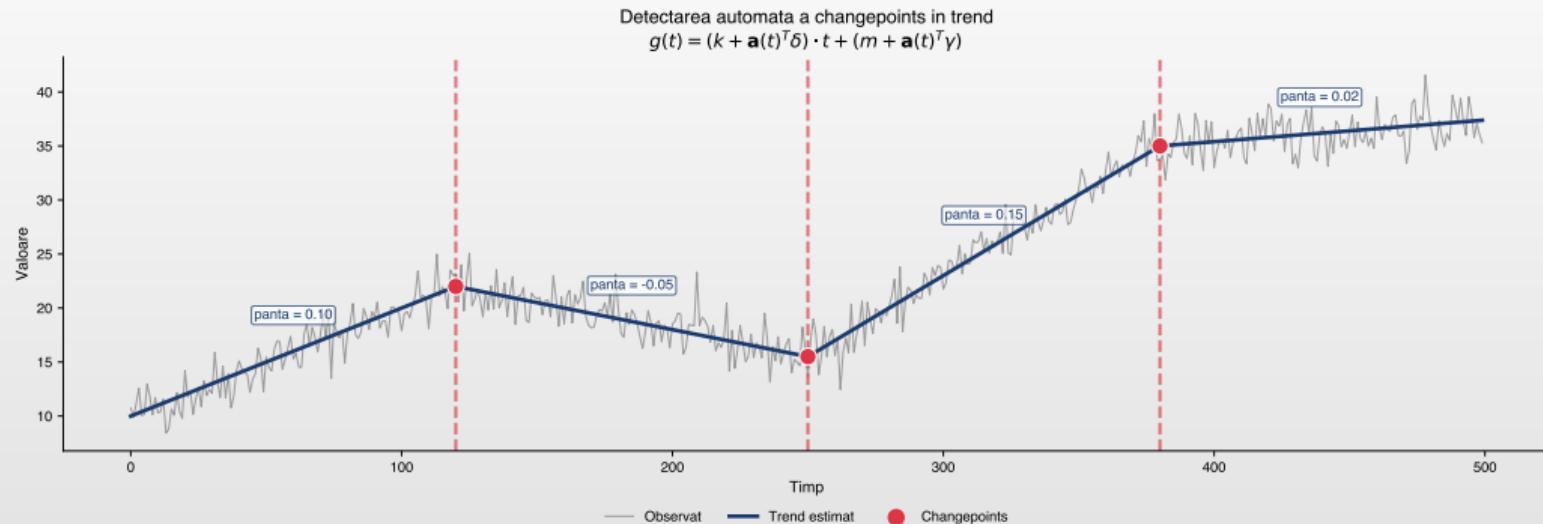
Descompunerea componentelor Prophet



 TSA_ch9_prophet_components



Detectarea changepoints în trend



Q TSA_ch9_changepoint_detection



Prophet: efecte de sărbători

Modelul de Sărbători

- Ecuația efectelor de sărbătoare:

$$h(t) = Z(t) \cdot \kappa$$

- $Z(t)$ este o matrice indicător pentru sărbători și κ sunt efectele sărbătorilor

Caracteristici

- **Sărbători integrate:** 60+ țări suportate
- **Sărbători custom:** Adăugați propriile evenimente (Black Friday, evenimente companie)
- **Efecte de fereastră:** Sărbătorile pot afecta zilele înainte/după
- **Prior scale:** Controlează regularizarea efectelor de sărbătoare

Exemplu de Cod

- **Cod Python:**

```
holidays = pd.DataFrame({'holiday': 'black_friday', ....})  
model = Prophet(holidays=holidays)
```



Prophet în practică

Utilizare de Bază

- Cod Python:

```
from prophet import Prophet
import pandas as pd

# Datele trebuie să aibă coloane 'ds' (dată) și 'y' (valoare)
df = pd.DataFrame({'ds': dates, 'y': values})

model = Prophet()
model.fit(df)

future = model.make_future_dataframe(periods=365)
forecast = model.predict(future)
```

Adăugare Sezonalitate Custom

- Cod Python:

```
model = Prophet(weekly_seasonality=False)
model.add_seasonality(name='monthly', period=30.5, fourier_order=5)
model.add_seasonality(name='quarterly', period=91.25, fourier_order=3)
```



Prophet: cuantificarea incertitudinii

Trei Surse de Incertitudine

- Incertitudine de trend:** Changepoints viitoare sunt incerte
- Incertitudine de sezonalitate:** Incertitudine în estimarea parametrilor
- Zgomot de observație:** Aleatorietate inerentă

Intervale de Predicție

- Prophet oferă:**
 - ▶ Prognoză punctuală: `yhat`
 - ▶ Limita inferioară: `yhat_lower`
 - ▶ Limita superioară: `yhat_upper`
- Implicit:** interval de 80%, schimbați cu `interval_width=0.95`

Notă

- Incertitudinea crește cu orizontul de prognoză, în special pentru incertitudinea de trend



Prophet: parametri de ajustare

Parametri Cheie

- `changepoint_prior_scale`: Flexibilitate trend (implicit: 0.05)
- `seasonality_prior_scale`: Flexibilitate sezonalitate (implicit: 10)
- `holidays_prior_scale`: Mărime efect sărbători (implicit: 10)
- `seasonality_mode`: 'additive' sau 'multiplicative'
- `changepoint_range`: Porțiune din istoric pentru changepoints

Sfaturi Practice

- Supraajustare pe trend?** Micșorați `changepoint_prior_scale`
- Subajustare pe sezonalitate?** Măriți `seasonality_prior_scale`
- Amplitudinea sezonieră variază?** Folosiți `seasonality_mode='multiplicative'`



Prophet: avantaje și limitări

Avantaje

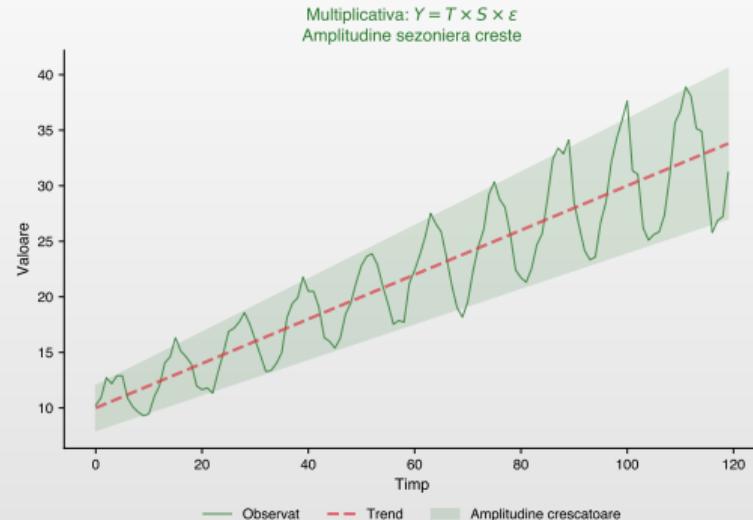
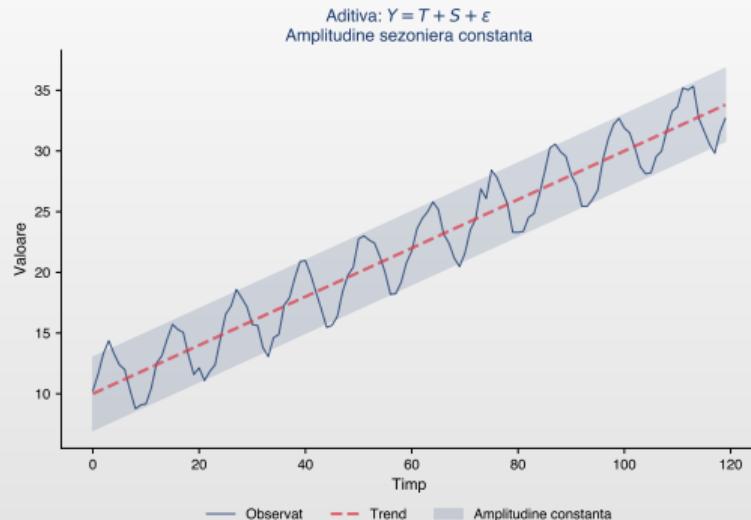
- Ușor de folosit:** Ajustare minimă necesară
- Interpretabil:** Descompunere clară
- Gestionează date lipsă bine**
- Efecte sărbători integrate**
- Sezonalități multiple**
- Regresori externi suportați**
- Ajustare rapidă**

Limitări

- Nu bazat pe ARIMA:** Fără modelare autocorelație
- Focus pe date zilnice:** Mai puțin potrivit pentru frecvență foarte înaltă
- Ipoteze de trend:** Liniar/logistic poate să nu se potrivească
- CV integrat:** `cross_validation()` disponibil, dar necesită configurare atentă
- Risc supraajustare cu multe sezonalități**



Sezonalitate aditivă vs multiplicativă



Q TSA_ch9_additive_vs_multiplicative



TBATS vs Prophet: comparație directă

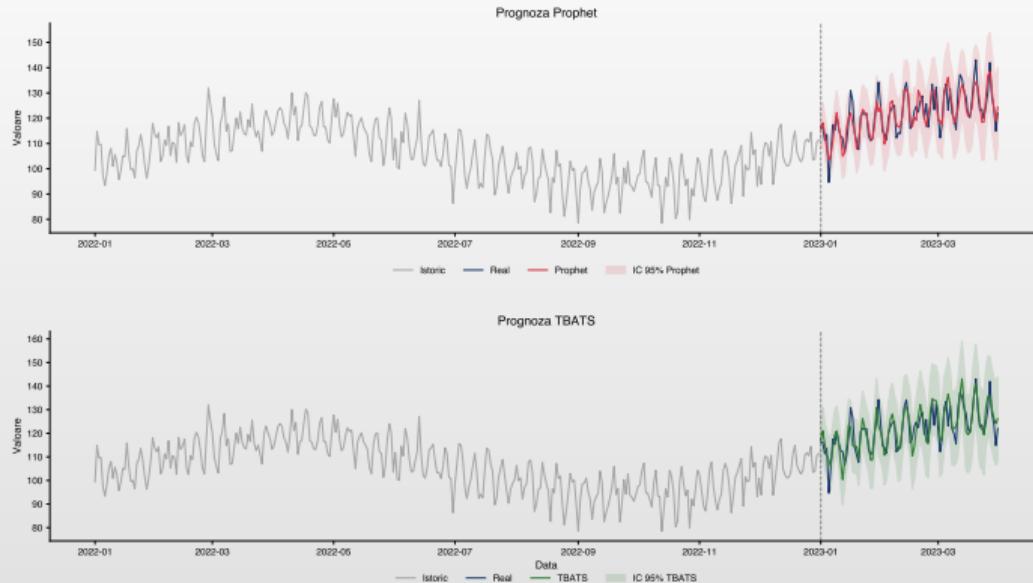
Comparație detaliată

- Rezumat al diferențelor cheie:

Caracteristică	TBATS	Prophet
Sezonalități multiple	Da (automat)	Da (manual sau auto)
Efecte sărbători	Nu	Da (integrat)
Regresori externi	Nu	Da
Changepoints trend	Nu (neted)	Da (automat)
Date lipsă	Necesită interpolare	Gestionează nativ
Interpretabilitate	Moderată	Înaltă
Viteză calcul	Lent	Rapid
Date frecvență înaltă	Bun	Moderat
Perioade non-întregi	Da (ex: 365.25)	Da
Intervale incertitudine	Da	Da



Comparație Prophet vs TBATS: programe



Q TSA_ch9_prophet_vs_tbats



Când să folosim fiecare model

Folosiți TBATS când:

- Date de frecvență înaltă (orare, sub-zilnice)
- Multiple perioade sezoniere complexe
- Nu sunt necesari regresori externi
- Se preferă selecție automată a modelului
- Se dorește framework tradițional state-space

Folosiți Prophet când:

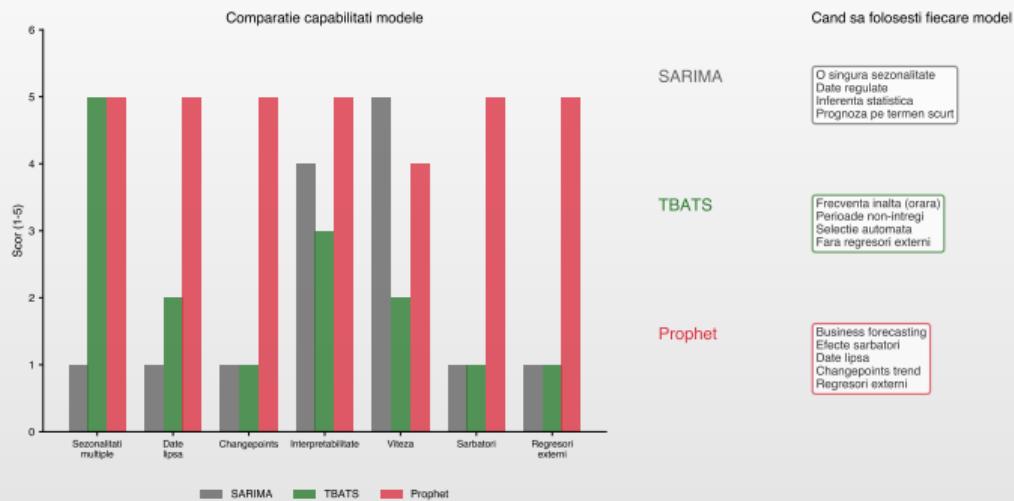
- Prognoză de business (zilnic/săptămânal)
- Efectele sărbătorilor sunt importante
- Trendul are rupturi structurale
- Sunt prezente date lipsă
- Interpretabilitatea este cheie
- Sunt disponibili regresori externi

Ghid General

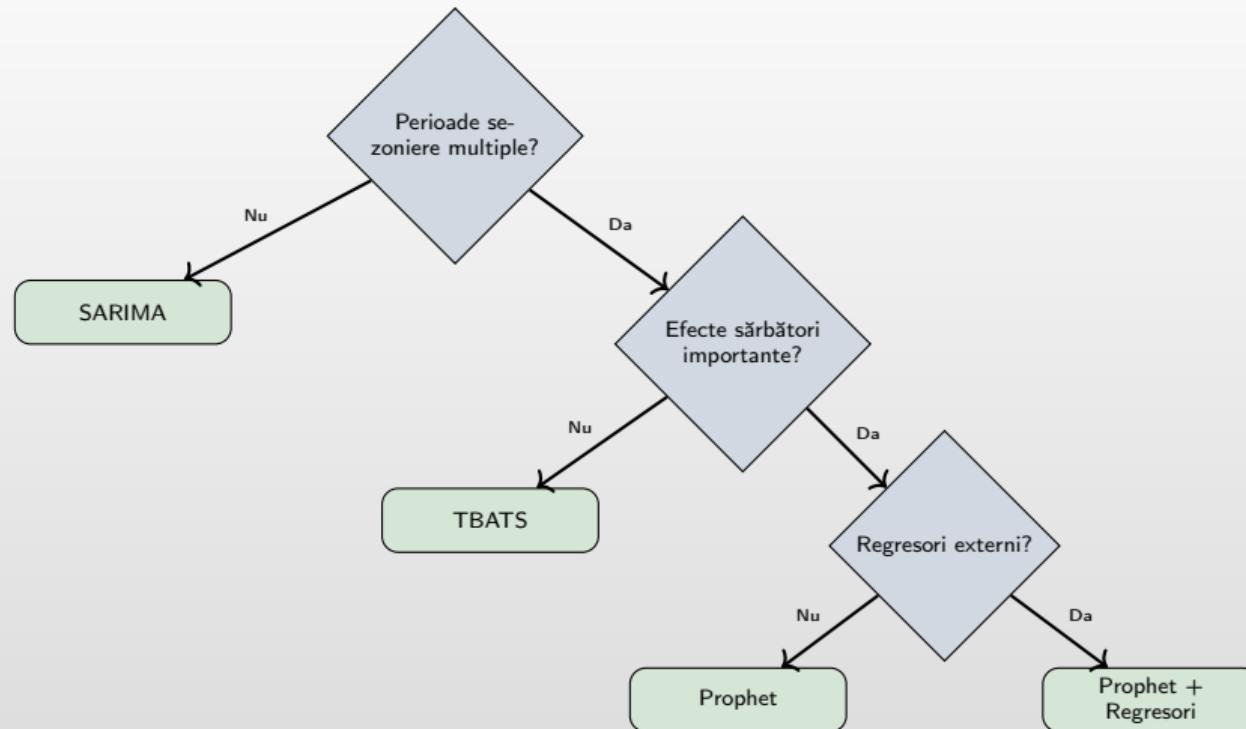
- Prophet:** pentru aplicații de business cu date zilnice
- TBATS:** pentru aplicații tehnice cu date de frecvență înaltă



Ghid selecție model



Diagramă de decizie



Studiu de caz: prognoza cererii de energie

Problema

- Obiectiv:** Prognozați cererea de electricitate pe oră
- Provocări:**
 - ▶ Tipar zilnic \succ vârf la prânz și seara
 - ▶ Tipar săptămânal \succ mai scăzut în weekend
 - ▶ Tipar anual \succ mai mare vara (AC) și iarna (încălzire)
 - ▶ Efecte sărbători \succ cerere mai mică în sărbători

Abordare

- Pas 1:** Încercați TBATS cu perioade [24, 168, 8766]
- Pas 2:** Încercați Prophet cu sezonalitate zilnică, săptămânală, anuală + sărbători
- Pas 3:** Comparați folosind cross-validation



Studiu de caz: interpretarea rezultatelor

Metrici de Evaluare

- MAPE**: Mean Absolute Percentage Error
- RMSE**: Root Mean Square Error
- Acoperire**: % din valori reale în intervalul de predicție

Rezultate Tipice

- Comparație performanță:

Model	MAPE	RMSE	Acoperire
SARIMA (doar zilnic)	8.5%	450 MW	75%
TBATS	4.2%	220 MW	82%
Prophet	4.8%	250 MW	85%
Prophet + sărbători	3.9%	200 MW	88%

Concluzie

- Modelele cu sezonalități multiple depășesc semnificativ SARIMA cu o singură sezonalitate



Concluzii cheie

Sezonalități Multiple

- Datele din lumea reală au adesea tipare sezoniere multiple
- SARIMA standard gestionează doar o perioadă sezonieră
- TBATS și Prophet sunt proiectate pentru această provocare

Selectia modelului

- TBATS:** Automat, gestionează frecvență înaltă, fără regresori externi
- Prophet:** Interpretabil, efecte sărbători, regresori externi
- Ambele folosesc termeni Fourier pentru reprezentare eficientă a sezonalității

De Reținut

- Validare:** Folosiți întotdeauna cross-validation adecvat pentru serii de timp!



Întrebări?

Întrebări?

Pași Următori

- Exersați cu notebook-ul Jupyter
- Încercați Prophet pe propriile date
- Explorați NeuralProphet pentru extensia deep learning



Quiz rapid

Întrebări

- Q1:** Ce sunt sezonalitățile multiple și de ce SARIMA standard nu le poate gestiona?
- Q2:** Cum aproximează termenii Fourier o componentă sezonieră?
- Q3:** Ce reprezintă acronimul TBATS?
- Q4:** Ce sunt *changepoints* în modelul Prophet?
- Q5:** Când alegeți Prophet în loc de TBATS (și invers)?



Răspunsuri quiz

Răspunsuri

- R1: O serie prezintă mai multe cicluri periodice suprapuse (ex: zilnic + săptămânal + anual). SARIMA acceptă doar o singură perioadă sezonieră s
- R2: Aproximează sezonalitatea prin combinații de $\sin(2\pi kt/s)$ și $\cos(2\pi kt/s)$. Cu K armonici se captează forme complexe fără a estima un coeficient pentru fiecare perioadă
- R3: Trigonometric seasonality, Box-Cox transformation, ARMA errors, Trend, Seasonal components
- R4: Puncte în timp unde rata de creștere a trendului se modifică brusc. Prophet le detectează automat prin parametrul `changepoint_prior_scale`
- R5: Prophet > regresori externi, efecte de sărbători, date lipsă sau rupturi structurale. TBATS > frecvență foarte înaltă sau abordare complet automată fără intervenție manuală



Bibliografie I

Prophet

- Taylor, S.J., & Letham, B. (2018). Forecasting at Scale, *The American Statistician*, 72(1), 37–45.
- Harvey, A.C. (1989). *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge University Press.

TBATS și netezire exponențială

- De Livera, A.M., Hyndman, R.J., & Snyder, R.D. (2011). Forecasting Time Series with Complex Seasonal Patterns Using Exponential Smoothing, *JASA*, 106(496), 1513–1527.
- Hyndman, R.J., Koehler, A.B., Ord, J.K., & Snyder, R.D. (2008). *Forecasting with Exponential Smoothing: The State Space Approach*, Springer.
- Taylor, J.W. (2003). Short-term Electricity Demand Forecasting Using Double Seasonal Exponential Smoothing, *Journal of the Operational Research Society*, 54(8), 799–805.

Bibliografie II

Comparații și competiții de prognoză

- Makridakis, S., Spiliotis, E., & Assimakopoulos, V. (2020). The M4 Competition, *International Journal of Forecasting*, 36(1), 54–74.
- Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*, 3rd ed., OTexts.
- Petropoulos, F., et al. (2022). Forecasting: Theory and Practice, *International Journal of Forecasting*, 38(3), 845–1054.

Resurse online și cod

- **Quantlet:** <https://quantlet.com> ➔ Depozit de cod pentru statistică
- **Quantinar:** <https://quantinar.com> ➔ Platformă de învățare metode cantitative
- **GitHub TSA:** <https://github.com/QuantLet/TSA> ➔ Cod Python pentru acest curs



Vă Mulțumim!

Întrebări?

Grafcile au fost generate folosind Python (statsmodels, matplotlib)

Materialele cursului sunt disponibile la: <https://danpele.github.io/Time-Series-Analysis/>

