

Daniel Pele, PhD

Academia de Studii Economice din Bucuresti
Facultatea de Cibernetică, Statistică și Informatică Economică

2025-2026

Cuprins

1 Sezonalități Multiple

2 Modelul TBATS

3 Facebook Prophet

4 Comparație și Ghid de Selección

5 Studiu de Caz

6 Sumar

Problema: Tipare Sezoniere Complexe

Exemple din Lumea Reală

- **Cerere de electricitate pe oră:** Tipare zilnice + săptămânaile + anuale
- **Trafic web:** Zilnic + săptămânal + efecte de sărbători
- **Vânzări retail:** Săptămânal + lunar + anual + sărbători
- **Volum call center:** Pe oră + zilnic + săptămânal

Limitarea SARIMA

SARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s standard gestionează doar o singură perioadă sezonieră s .

Pentru date orare cu tipare zilnice și săptămânaile, avem nevoie de $s_1 = 24$ și $s_2 = 168$.

Soluții pentru Sezonalități Multiple

Abordări Tradiționale

- **Termeni Fourier:** Adăugare regresori sin/cos
- **Variabile dummy:** Multi parametri
- **Modele nested:** Specificare complexă

Abordări Moderne

- **TBATS:** Automat, gestionează multe perioade
- **Prophet:** Flexibil, interpretabil
- **Metode neurale:** Deep learning

Metodă	Nr. Max Sezonalități	Interpretabil
SARIMA	1	Da
Fourier + ARIMA	Multiple	Moderat
TBATS	Multiple	Moderat
Prophet	Multiple	Da

TBATS: Ce Înseamnă?

Componentele TBATS

- T** Sezonalitate **Trigonometrică** folosind termeni Fourier
- B** Transformare **Box-Cox** pentru stabilizarea varianței
- A** Erori **ARMA** pentru autocorelația reziduală
- T** Componentă de **Trend** (posibil amortizat)
- S** Componente **Sezoniere** (multiple permise)

Inovația Cheie

TBATS folosește **reprezentare trigonometrică** pentru sezonalitate:

$$s_t^{(i)} = \sum_{j=1}^{k_i} \left[s_j^{(i)} \cos\left(\frac{2\pi j t}{m_i}\right) + s_j^{*(i)} \sin\left(\frac{2\pi j t}{m_i}\right) \right]$$

unde m_i este perioada sezonieră i și k_i este numărul de armonici.

Specificația Completă a Modelului

$$y_t^{(\omega)} = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \sum_{i=1}^T s_{t-m_i}^{(i)} + d_t \quad (1)$$

$$\ell_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha d_t \quad (2)$$

$$b_t = \phi b_{t-1} + \beta d_t \quad (3)$$

$$d_t = \sum_{i=1}^p \varphi_i d_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \quad (4)$$

Unde:

- $y_t^{(\omega)}$ este seria transformată Box-Cox (dacă $\omega \neq 1$)
- ℓ_t este nivelul local, b_t este trendul cu amortizare ϕ
- $s_t^{(i)}$ sunt T componente sezoniere cu perioade m_1, \dots, m_T
- d_t este procesul de eroare ARMA(p, q)

De Ce Termeni Fourier/Trigonometrici?

- ① **Parcimonios:** Mai puțini parametri decât variabilele dummy
- ② **Neted:** Captează natural tiparele sezoniere netede
- ③ **Flexibil:** Numărul de armonici k controlează complexitatea
- ④ **Perioade non-întregi:** Poate gestiona $s = 365.25$ pentru date zilnice

k mic (puține armonici)

- Tipar neted
- Mai puțini parametri
- Poate rata vârfuri abrupte

k mare (multe armonici)

- Poate capta orice tipar
- Mai mulți parametri
- Risc de supraajustare

Implementare Python

Pachetul `tbats` oferă selecție automată a modelului:

- Selectează automat parametrul Box-Cox ω
- Alege numărul de armonici k_i pentru fiecare perioadă sezonieră
- Selectează ordinele ARMA (p, q)
- Testează trend amortizat vs neamortizat

Exemplu de Cod

```
from tbats import TBATS
estimator = TBATS(seasonal_periods=[7, 365.25])
model = estimator.fit(y)
forecast = model.forecast(steps=30)
```

Notă: BATS este versiunea mai simplă fără termeni trigonometrici (folosește stări sezoniere tradiționale).

TBATS: Avantaje și Limitări

Avantaje

- Gestionează **multiple** perioade sezoniere
- Selectie **automată** a modelului
- Gestionează perioade **non-întregi** (365.25)
- **Box-Cox** pentru heteroscedasticitate
- Bun pentru date de **frecvență înaltă**

Limitări

- Intensiv **computațional**
- Fără **regresori externi**
- Mai puțin **interpretabil** decât Prophet
- Poate fi **lent** pentru serii foarte lungi
- Necesită **suficiente date** per sezon

Ce este Prophet?

Prophet este o procedură de prognoză dezvoltată de Facebook (Meta) în 2017.

Proiectat pentru **serii de timp de business** cu:

- Efecte sezoniere puternice (zilnice, săptămâna, anuale)
- Efecte de sărbători
- Schimbări de trend (changepoints)
- Date lipsă și outlieri

Filosofia Cheie

"Analyst-in-the-loop" forecasting

Prophet este proiectat pentru a fi ajustat de analiști cu cunoștințe de domeniu, dar care nu sunt neapărat experți în serii de timp.

Abordare prin Descompunere

Prophet folosește o descompunere aditivă:

$$y(t) = g(t) + s(t) + h(t) + \varepsilon_t$$

$g(t)$: Trend

- Liniar sau logistic
- Changepoints automate
- Saturație de creștere

$s(t)$: Sezonalitate

- Serii Fourier
- Perioade multiple
- Sezonalitate custom

$h(t)$: Sărbători

- Sărbători pe țară
- Evenimente custom
- Efecte de fereastră

Trend Liniar cu Changepoints

$$g(t) = (k + \mathbf{a}(t)^T \boldsymbol{\delta}) \cdot t + (m + \mathbf{a}(t)^T \boldsymbol{\gamma})$$

unde:

- k este rata de creștere de bază
- $\boldsymbol{\delta}$ este un vector de ajustări de rată la changepoints
- $\mathbf{a}(t)$ indică ce changepoints sunt active la momentul t
- m este offset-ul, $\boldsymbol{\gamma}$ asigură continuitatea

Creștere Logistică (pentru trenduri cu saturatie)

$$g(t) = \frac{C(t)}{1 + \exp(-(k + \mathbf{a}(t)^T \boldsymbol{\delta})(t - (m + \mathbf{a}(t)^T \boldsymbol{\gamma})))}$$

unde $C(t)$ este capacitatea maximă (posibil variabilă în timp).

Reprezentare prin Serii Fourier

Pentru o perioadă sezonieră P , Prophet folosește:

$$s(t) = \sum_{n=1}^N \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{P}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{P}\right) \right]$$

Setări Implicite

Sezonalitate	Perioadă	Ordin Fourier
Anuală	365.25 zile	10
Săptămânală	7 zile	3
Zilnică	1 zi	4

Ordin Fourier N mai mare = mai multă flexibilitate (poate ajusta tipare mai complexe) dar risc mai mare de supraajustare.

Modelul de Sărbători

$$h(t) = Z(t) \cdot \kappa$$

unde $Z(t)$ este o matrice indicator pentru sărbători și κ sunt efectele sărbătorilor.

Caracteristici

- **Sărbători integrate:** 60+ țări suportate
- **Sărbători custom:** Adăugați propriile evenimente (Black Friday, evenimente companie)
- **Efecte de fereastră:** Sărbătorile pot afecta zilele înainte/după
- **Prior scale:** Controlează regularizarea efectelor de sărbătoare

Exemplu de Cod

```
holidays = pd.DataFrame({'holiday': 'black_friday', ....})  
model = Prophet(holidays=holidays)
```

Utilizare de Bază

```
from prophet import Prophet
import pandas as pd

# Datele trebuie să aibă coloane 'ds' (dată) și 'y' (valoare)
df = pd.DataFrame({'ds': dates, 'y': values})

model = Prophet()
model.fit(df)

future = model.make_future_dataframe(periods=365)
forecast = model.predict(future)
```

Adăugare Sezonalitate Custom

```
model = Prophet(weekly_seasonality=False)
model.add_seasonality(name='monthly', period=30.5, fourier_order=5)
model.add_seasonality(name='quarterly', period=91.25, fourier_order=3)
```

Trei Surse de Incertitudine

- ❶ **Incertitudine de trend:** Changepoints viitoare sunt incerte
- ❷ **Incertitudine de sezonalitate:** Incertitudine în estimarea parametrilor
- ❸ **Zgomot de observație:** Aleatorietate inherentă

Intervale de Predicție

Prophet oferă:

- Prognoză punctuală: y_{hat}
- Limita inferioară: $y_{\text{hat_lower}}$
- Limita superioară: $y_{\text{hat_upper}}$

Implicit este interval de 80%.

Schimbați cu `interval_width=0.95`

Notă

Incertitudinea crește cu orizontul de prognoză, în special pentru incertitudinea de trend.

Parametri Cheie

Parametru	Efect
changepoint_prior_scale	Flexibilitate trend (implicit: 0.05)
seasonality_prior_scale	Flexibilitate sezonalitate (implicit: 10)
holidays_prior_scale	Mărime efect sărbători (implicit: 10)
seasonality_mode	'additive' sau 'multiplicative'
changepoint_range	Porțiune din istoric pentru changepoints

Sfaturi Practice

- **Supraajustare pe trend?** Micșorați `changepoint_prior_scale`
- **Subajustare pe sezonalitate?** Măriți `seasonality_prior_scale`
- **Amplitudinea sezonieră variază?** Folosiți `seasonality_mode='multiplicative'`

Avantaje

- **Ușor de folosit:** Ajustare minimă necesară
- **Interpretabil:** Descompunere clară
- **Gestionează date lipsă bine**
- **Efecte sărbători integrate**
- **Sezonalități multiple**
- **Regresori externi suportați**
- **Ajustare rapidă**

Limitări

- **Nu bazat pe ARIMA:** Fără modelare autocorelație
- **Focus pe date zilnice:** Mai puțin potrivit pentru frecvență foarte înaltă
- **Ipoteze de trend:** Liniar/logistic poate să nu se potrivească
- **Fără CV integrat:** Trebuie implementat manual
- **Risc supraajustare cu multe sezonalități**

TBATS vs Prophet: Comparație Directă

Caracteristică	TBATS	Prophet
Sezonalități multiple	Da (automat)	Da (manual sau auto)
Efecte sărbători	Nu	Da (integrat)
Regresori externi	Nu	Da
Changepoints trend	Nu (neted)	Da (automat)
Date lipsă	Necesită interpolare	Gestionează nativ
Interpretabilitate	Moderată	Înaltă
Viteză calcul	Lent	Rapid
Date frecvență înaltă	Bun	Moderat
Perioade non-întregi	Da (ex: 365.25)	Da
Intervale incertitudine	Da	Da

Folosiți TBATS când:

- Date de frecvență înaltă (orare, sub-zilnice)
- Multiple perioade sezoniere complexe
- Nu sunt necesari regresori externi
- Se preferă selecție automată a modelului
- Se dorește framework tradițional state-space

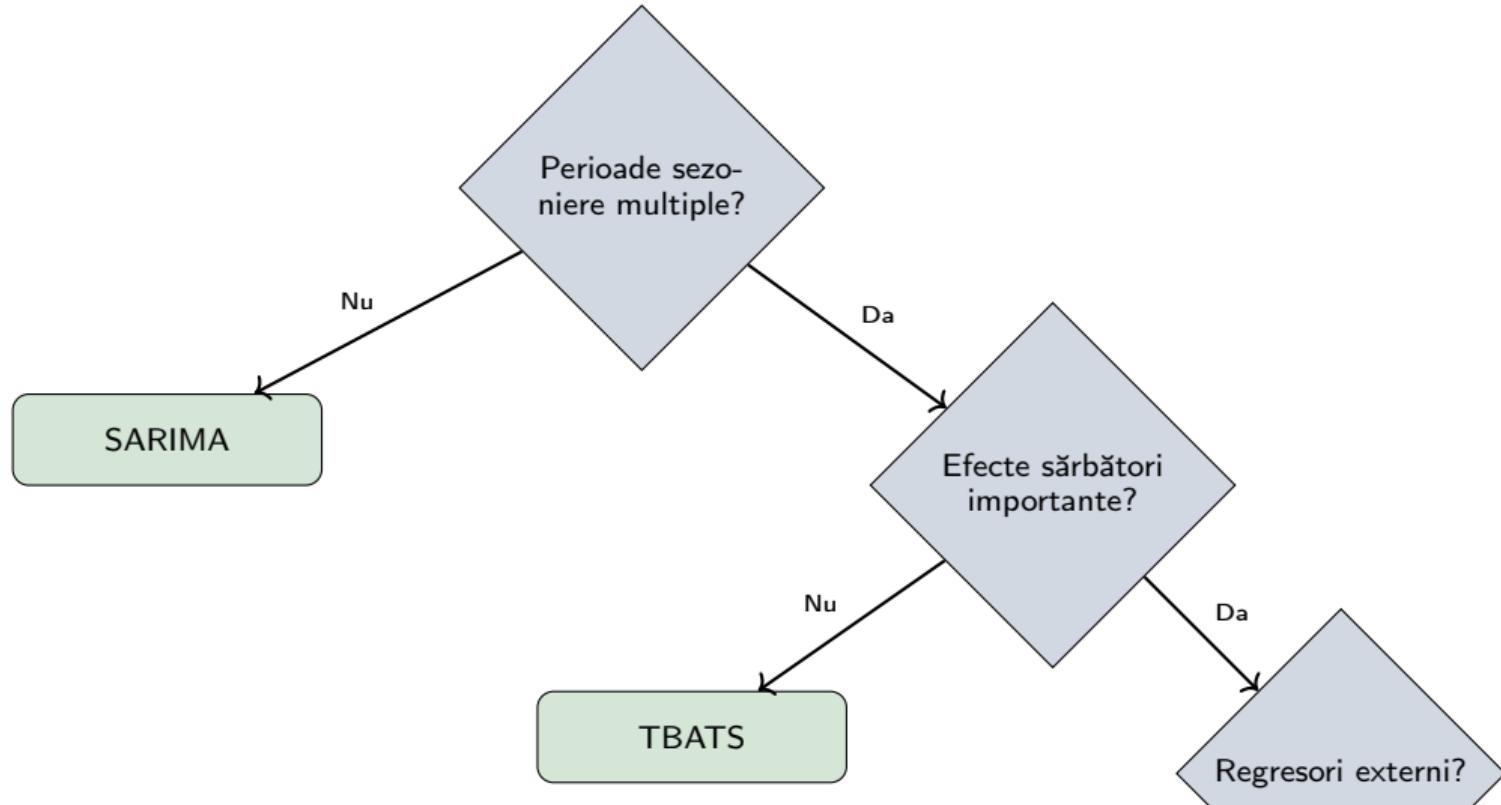
Folosiți Prophet când:

- Prognoză de business (zilnic/săptămânal)
- Efectele sărbătorilor sunt importante
- Trendul are rupturi structurale
- Sunt prezente date lipsă
- Interpretabilitatea este cheie
- Sunt disponibili regresori externi

Ghid General

Prophet pentru aplicații de business cu date zilnice
TBATS pentru aplicații tehnice cu date de frecvență înaltă

Diagramă de Decizie



Problema

Prognozați cererea de electricitate pe oră cu:

- **Tipar zilnic:** Vârf la prânz și seara
- **Tipar săptămânal:** Mai scăzut în weekend
- **Tipar anual:** Mai mare vara (AC) și iarna (încălzire)
- **Efecte sărbători:** Cerere mai mică în sărbători

Abordare

- ➊ Încercați TBATS cu perioade [24, 168, 8766]
- ➋ Încercați Prophet cu sezonalitate zilnică, săptămânală, anuală + sărbători
- ➌ Comparați folosind cross-validation

Metrici de Evaluare

- **MAPE**: Mean Absolute Percentage Error
- **RMSE**: Root Mean Square Error
- **Acoperire**: % din valori reale în intervalul de predicție

Rezultate Tipice

Model	MAPE	RMSE	Acoperire
SARIMA (doar zilnic)	8.5%	450 MW	75%
TBATS	4.2%	220 MW	82%
Prophet	4.8%	250 MW	85%
Prophet + sărbători	3.9%	200 MW	88%

Modelele cu sezonalități multiple depășesc semnificativ SARIMA cu o singură sezonialitate.

Sezonalități Multiple

- Datele din lumea reală au adesea tipare sezoniere multiple
- SARIMA standard gestionează doar o perioadă sezonieră
- TBATS și Prophet sunt proiectate pentru această provocare

Selectia Modelului

- **TBATS:** Automat, gestionează frecvență înaltă, fără regresori externi
- **Prophet:** Interpretabil, efecte sărbători, regresori externi
- Ambele folosesc termeni Fourier pentru reprezentare eficientă a sezonalității

De Reținut

Validați întotdeauna cu cross-validation adecvat pentru serii de timp!

Întrebări?

Pași Următori:

- Exersați cu notebook-ul Jupyter
- Încercați Prophet pe propriile date
- Explorați NeuralProphet pentru extensia deep learning