



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 3: Modele ARIMA

Seminar



Cuprins Seminar

- 1 Test de Recapitulare
- 2 Întrebări Adevărat/Fals
- 3 Probleme Practice
- 4 Exemple Rezolvate
- 5 Analiză pe Date Reale
- 6 Subiecte de Discuție
- 7 Rezumat

Întrebare

O serie de timp Y_t necesită două diferențe pentru a deveni staționară. Care este ordinul ei de integrare?

- A) $I(0)$
- B) $I(1)$
- C) $I(2)$
- D) Nu poate fi determinat

Test 1: Ordinul de Integrare

Întrebare

O serie de timp Y_t necesită două diferențe pentru a deveni staționară. Care este ordinul ei de integrare?

- A) $I(0)$
- B) $I(1)$
- C) $I(2)$
- D) Nu poate fi determinat

Răspuns: C – $I(2)$

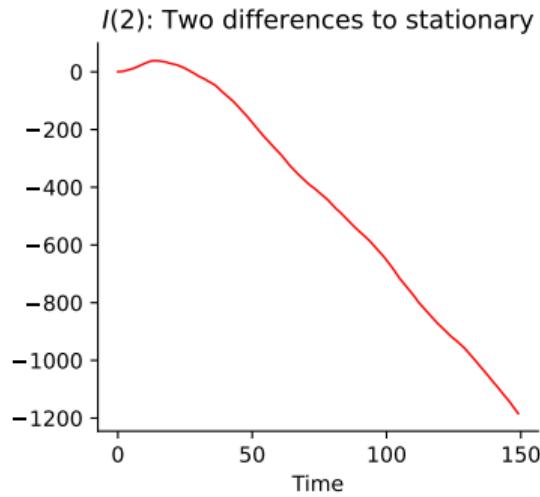
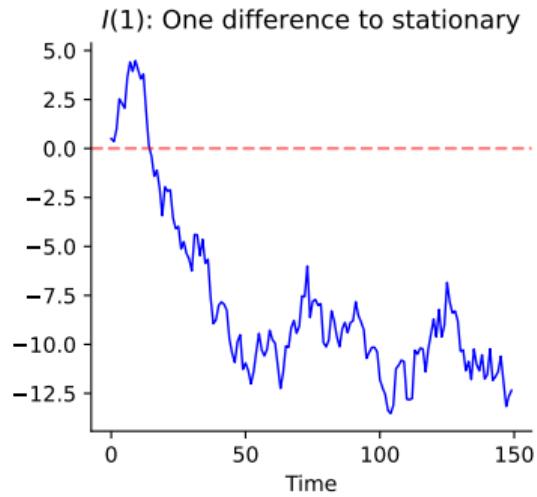
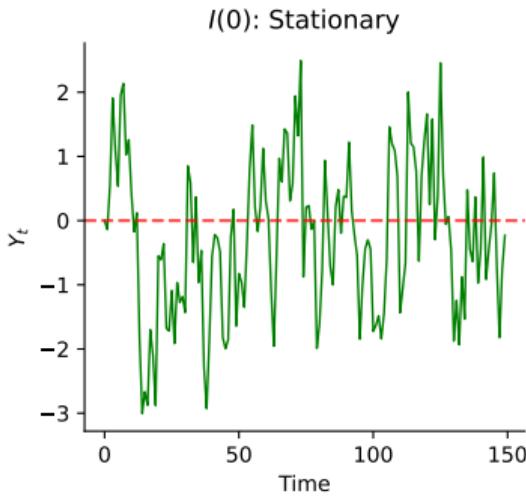
Definiție: $Y_t \sim I(d)$ dacă $\Delta^d Y_t$ este staționară dar $\Delta^{d-1} Y_t$ nu este.

Exemplu: Dacă Y_t urmează $\Delta^2 Y_t = \varepsilon_t$, atunci:

- $\Delta Y_t = \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$ (încă are rădăcină unitară)
- $\Delta^2 Y_t = \varepsilon_t$ (zgomot alb, staționară)

Lumea reală: Nivelurile prețurilor pot fi $I(2)$ când inflația însăși este nestacionară.

Vizual: Procese Integrate



I(0): staționară. I(1): o diferență necesară. I(2): două diferențe necesare pentru a deveni staționară.

Test 2: Proprietățile Mersului Aleatoriu

Întrebare

Pentru un mers aleatoriu $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$ cu $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$, care este $\text{Var}(Y_t)$?

- A) σ^2
- B) $t \cdot \sigma^2$
- C) σ^2/t
- D) $\sigma^2/(1 - \phi^2)$

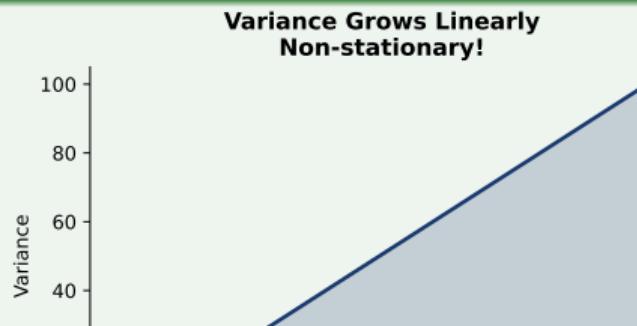
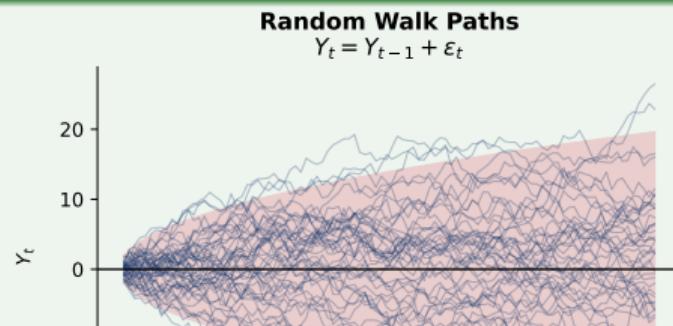
Test 2: Proprietățile Mersului Aleatoriu

Întrebare

Pentru un mers aleatoriu $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$ cu $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$, care este $\text{Var}(Y_t)$?

- A) σ^2
- B) $t \cdot \sigma^2$
- C) σ^2/t
- D) $\sigma^2/(1 - \phi^2)$

Răspuns: B – $t \cdot \sigma^2$



Întrebare

În testul Augmented Dickey-Fuller, care este ipoteza nulă?

- A) Seria este staționară
- B) Seria are o rădăcină unitară
- C) Seria nu are autocorelație
- D) Seria este distribuită normal

Test 3: Ipotezele Testului ADF

Întrebare

În testul Augmented Dickey-Fuller, care este ipoteza nulă?

- A) Seria este staționară
- B) Seria are o rădăcină unitară
- C) Seria nu are autocorelație
- D) Seria este distribuită normal

Răspuns: B – Seria are o rădăcină unitară

Regresia ADF: $\Delta Y_t = \alpha + \gamma Y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \delta_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t$

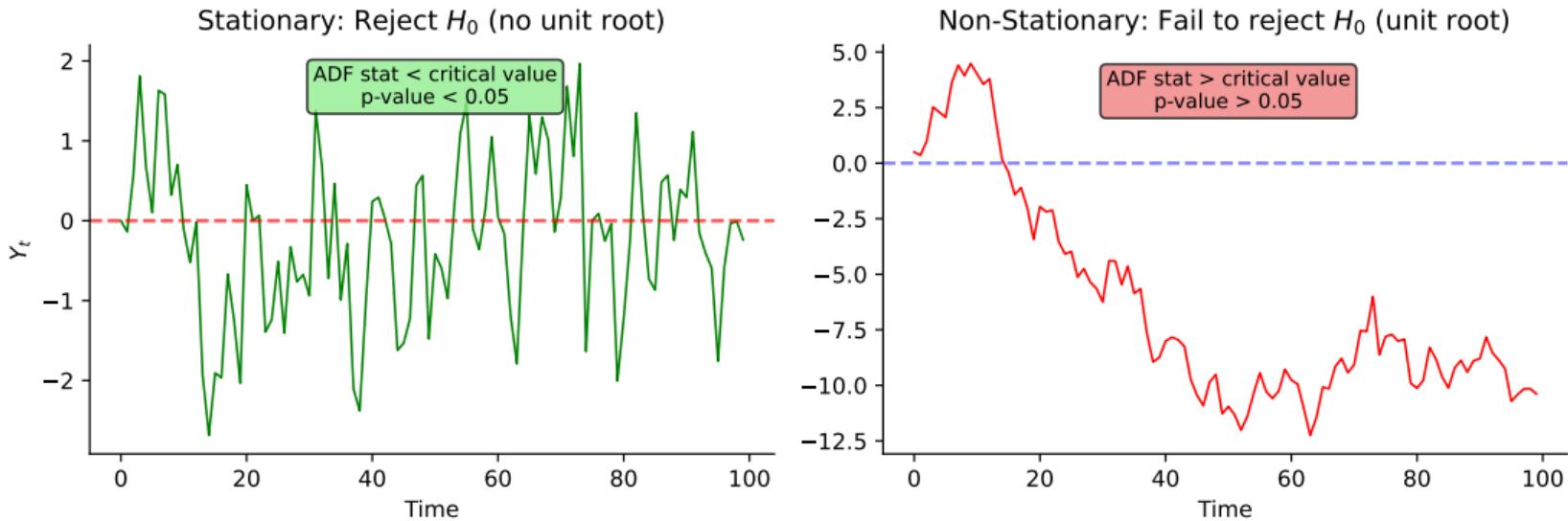
Ipoteze:

- $H_0 : \gamma = 0$ (rădăcină unitară, nestaționară)
- $H_1 : \gamma < 0$ (staționară)

Decizie: Respingem H_0 dacă statistica $t <$ valoarea critică (de ex., -2.86 la 5%)

Notă: Folosește distribuția specială Dickey-Fuller, nu t standard.

Vizual: Testul ADF



Stânga: staționară – ADF respinge rădăcina unitară. Dreapta: nestaționară – ADF nu respinge.

Întrebare

Ce înseamnă ARIMA(2,1,1)?

- A) AR(2) pe date diferențiate cu erori MA(1)
- B) AR(1) cu 2 diferențe și MA(1)
- C) MA(2) cu 1 diferență și AR(1)
- D) 2 lag-uri, 1 trend, 1 componentă sezonieră

Test 4: Notația ARIMA

Întrebare

Ce înseamnă ARIMA(2,1,1)?

- A) AR(2) pe date diferențiate cu erori MA(1)
- B) AR(1) cu 2 diferențe și MA(1)
- C) MA(2) cu 1 diferență și AR(1)
- D) 2 lag-uri, 1 trend, 1 componentă sezonieră

Răspuns: A – AR(2) pe date diferențiate cu erori MA(1)

ARIMA(p, d, q): $\phi(L)(1 - L)^d Y_t = \theta(L)\varepsilon_t$

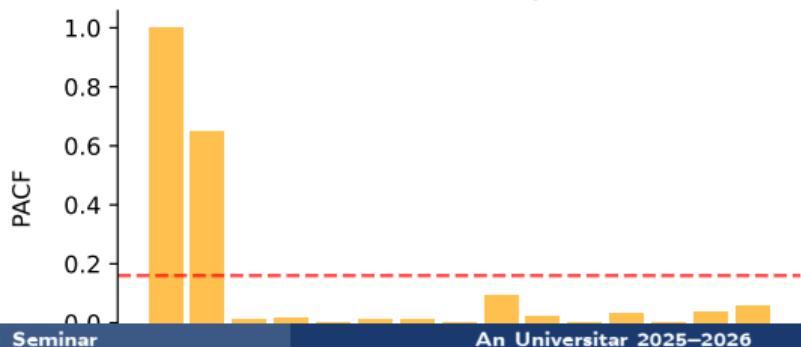
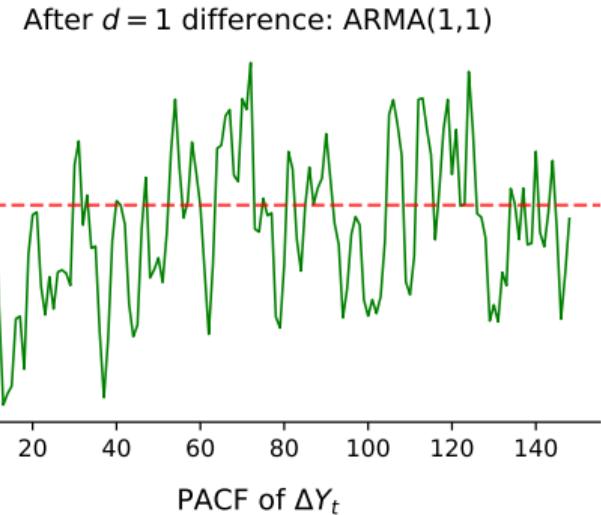
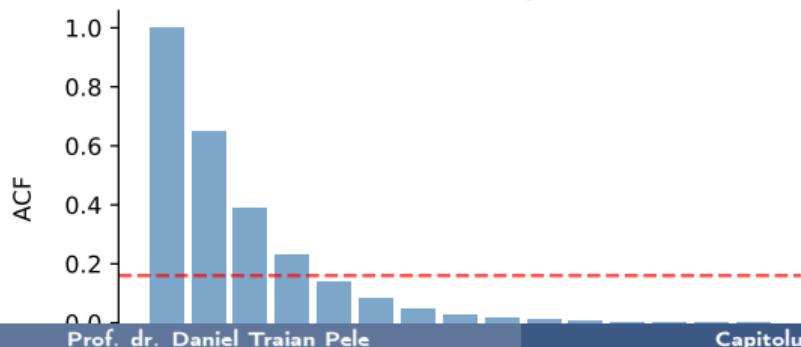
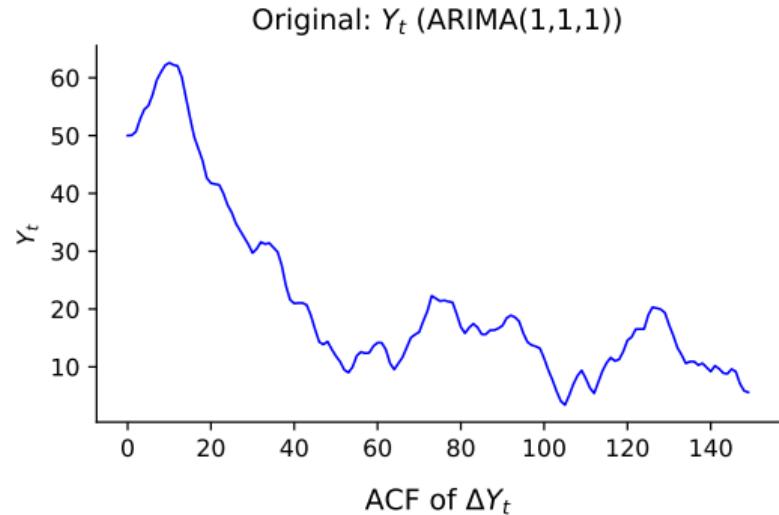
ARIMA(2,1,1) se expandează la:

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)(1 - L)Y_t = (1 + \theta_1 L)\varepsilon_t$$

Sau echivalent: $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)\Delta Y_t = (1 + \theta_1 L)\varepsilon_t$

Interpretare: Mai întâi diferențiem seria, apoi ajustăm ARMA(2,1) pe ΔY_t .

Vizual: Procesul ARIMA



Test 5: Operatorul de Diferență

Întrebare

Care este $(1 - L)^2 Y_t$ expandat?

- A) $Y_t - Y_{t-1}$
- B) $Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$
- C) $Y_t + 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$
- D) $Y_t - Y_{t-2}$

Test 5: Operatorul de Diferență

Întrebare

Care este $(1 - L)^2 Y_t$ expandat?

- A) $Y_t - Y_{t-1}$
- B) $Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$
- C) $Y_t + 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$
- D) $Y_t - Y_{t-2}$

Răspuns: B – $Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$

Expandare folosind teorema binomială:

$$(1 - L)^2 = 1 - 2L + L^2$$

Aplicare lui Y_t :

$$(1 - L)^2 Y_t = Y_t - 2L \cdot Y_t + L^2 \cdot Y_t = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$$

Notă: Aceasta este egală cu $\Delta(\Delta Y_t) = \Delta Y_t - \Delta Y_{t-1}$, "schimbarea schimbărilor".

Întrebare

Cum diferă testul KPSS de testul ADF?

- A) KPSS testează sezonalitatea, ADF testează trenduri
- B) KPSS are staționaritatea ca nulă, ADF are rădăcina unitară ca nulă
- C) KPSS este mai puternic decât ADF
- D) Nu există diferență

Întrebare

Cum diferă testul KPSS de testul ADF?

- A) KPSS testează sezonalitatea, ADF testează trenduri
- B) KPSS are staționaritatea ca nulă, ADF are rădăcina unitară ca nulă
- C) KPSS este mai puternic decât ADF
- D) Nu există diferență

Răspuns: B – Ipoteze nule inverse

ADF Test

H_0 : Unit Root

H_1 : Stationary

Reject if t-stat < critical

KPSS Test

H_0 : Stationary

H_1 : Unit Root

Reject if LM > critical

Decision Matrix

Întrebare

Dacă $Y_t \sim I(1)$ și calculăm $\Delta^2 Y_t$, ce se întâmplă?

- A) Obținem o serie staționară mai bună
- B) Introducem autocorelație negativă artificială
- C) Varianța scade
- D) Nu se schimbă nimic

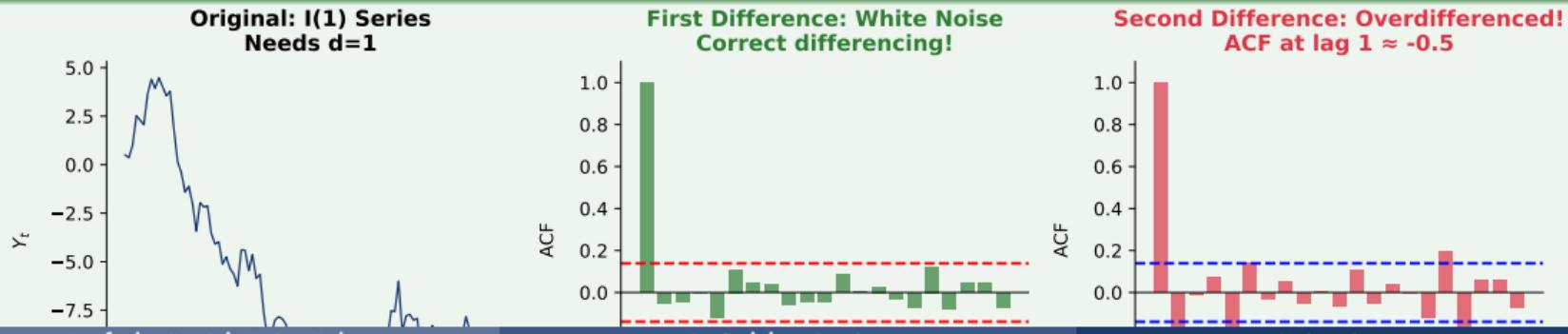
Test 7: Supradiferențierea

Întrebare

Dacă $Y_t \sim I(1)$ și calculăm $\Delta^2 Y_t$, ce se întâmplă?

- A) Obținem o serie staționară mai bună
- B) Introducem autocorelație negativă artificială
- C) Varianța scade
- D) Nu se schimbă nimic

Răspuns: B – Autocorelație negativă artificială



Întrebare

Pentru un model ARIMA(0,1,0) (mers aleatoriu), cum se comportă varianța prognozei când orizontul h crește?

- A) Rămâne constantă
- B) Scade la zero
- C) Crește liniar cu h
- D) Convergă la o limită finită

Test 8: Varianța Prognozei

Întrebare

Pentru un model ARIMA(0,1,0) (mers aleatoriu), cum se comportă varianța prognozei când orizontul h crește?

- A) Rămâne constantă
- B) Scade la zero
- C) Crește liniar cu h
- D) Convergă la o limită finită

Răspuns: C – Crește liniar cu h

Prognoza mersului aleatoriu: $\hat{Y}_{T+h|T} = Y_T$ (cea mai bună prognoză este valoarea curentă)

Eroarea de prognoză: $Y_{T+h} - \hat{Y}_{T+h|T} = \sum_{i=1}^h \varepsilon_{T+i}$

Varianță:

$$\text{Var}(Y_{T+h} - \hat{Y}_{T+h|T}) = h\sigma^2$$

IC 95%: $Y_T \pm 1.96\sqrt{h}\sigma$ (se largeste cu \sqrt{h})

Întrebare

Testul ADF are putere scăzută când:

- A) Dimensiunea eșantionului este foarte mare
- B) Rădăcina adevărată este aproape dar nu egală cu 1
- C) Seria nu are trend
- D) Seria este clar staționară

Test 9: Puterea Testului de Rădăcină Unitară

Întrebare

Testul ADF are putere scăzută când:

- A) Dimensiunea eșantionului este foarte mare
- B) Rădăcina adevărată este aproape dar nu egală cu 1
- C) Seria nu are trend
- D) Seria este clar staționară

Răspuns: B – Rădăcina aproape dar nu egală cu 1

Exemplu: AR(1) cu $\phi = 0.95$ vs mers aleatoriu ($\phi = 1$)

Problemă: Ambele au modele ACF similare (descreștere lentă), dar una este staționară!

Putere scăzută înseamnă: Probabilitate mare de eroare de tip II (eșec în respingerea lui H_0 fals)

Soluții:

- Dimensiuni mai mari ale eșantionului
- Testul Phillips-Perron (robust la heteroscedasticitate)
- Teste de rădăcină unitară pe paneluri (serii multiple)

Întrebare

După o diferențiere, ACF arată un vârf doar la lag 1, și PACF descrește. Modelul potrivit este:

- A) ARIMA(1,1,0)
- B) ARIMA(0,1,1)
- C) ARIMA(1,1,1)
- D) ARIMA(0,2,1)

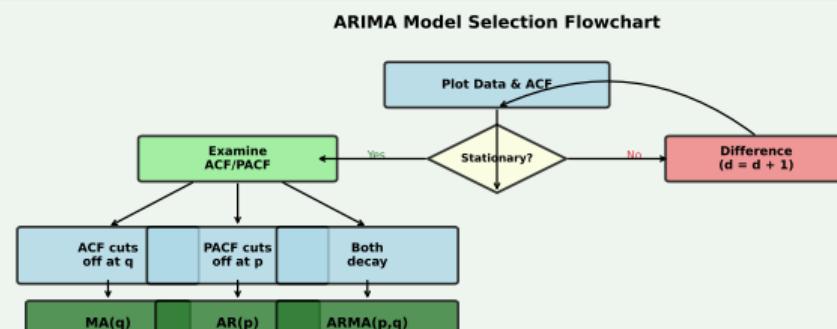
Test 10: Selecția Modelului ARIMA

Întrebare

După o diferențiere, ACF arată un vârf doar la lag 1, și PACF descrește. Modelul potrivit este:

- A) ARIMA(1,1,0)
- B) ARIMA(0,1,1)
- C) ARIMA(1,1,1)
- D) ARIMA(0,2,1)

Răspuns: B – ARIMA(0,1,1)



Test 11: Staționaritate în Trend vs Staționaritate în Diferențe

Întrebare

Un proces staționar în trend devine staționar prin:

- A) Luarea diferențelor de ordinul întâi
- B) Eliminarea trendului determinist prin regresie
- C) Luarea diferențelor de ordinul doi
- D) Aplicarea ajustării sezoniere

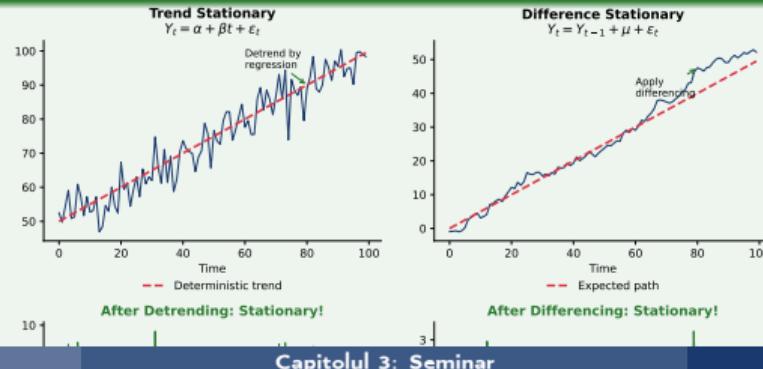
Test 11: Staționaritate în Trend vs Staționaritate în Diferențe

Întrebare

Un proces staționar în trend devine staționar prin:

- A) Luarea diferențelor de ordinul întâi
- B) Eliminarea trendului determinist prin regresie
- C) Luarea diferențelor de ordinul doi
- D) Aplicarea ajustării sezoniere

Răspuns: B – Eliminarea trendului determinist prin regresie



Întrebare

ARIMA(0,1,1) cu $\theta_1 = 1.2$ este:

- A Staționară și invertibilă
- B Nestaționară dar invertibilă
- C Nestaționară și neinvertibilă
- D Staționară dar neinvertibilă

Test 12: Invertibilitatea ARIMA

Întrebare

ARIMA(0,1,1) cu $\theta_1 = 1.2$ este:

- A) Staționară și invertibilă
- B) Nestaționară dar invertibilă
- C) Nestaționară și neinvertibilă
- D) Staționară dar neinvertibilă

Răspuns: C – Nestaționară și neinvertibilă

Verificare staționaritate: $d = 1$ înseamnă o rădăcină unitară \Rightarrow Nestaționară

Verificare invertibilitate: Polinomul MA este $\theta(z) = 1 + 1.2z$

- Rădăcină: $z = -1/1.2 = -0.833$ (în interiorul cercului unitate)
- Invertibilitatea necesită rădăcina în afara cercului unitate
- $|\theta_1| = 1.2 > 1 \Rightarrow$ Neinvertibilă

Corecție: Rescrieți cu $\theta^* = 1/1.2 = 0.833$ și ajustați varianța.

Întrebare

Regresând un mers aleatoriu pe un alt mers aleatoriu independent, de obicei se obține:

- A) Nicio relație semnificativă
- B) R^2 ridicat și statistici t semnificate (fals)
- C) Corelație negativă
- D) Multicolinearitate perfectă

Întrebare

Regresând un mers aleatoriu pe un alt mers aleatoriu independent, de obicei se obține:

- A) Nicio relație semnificativă
- B) R^2 ridicat și statistici t semnificate (fals)
- C) Corelație negativă
- D) Multicolinearitate perfectă

Răspuns: B – R^2 ridicat și statistici t semnificate (fals)

Granger & Newbold (1974): Fenomenul regresiei false

Sимптомы:

- R^2 ridicat (adesea > 0.9) între serii neînrudite
- Statistici t semnificate
- Statistică Durbin-Watson foarte scăzută ($\ll 2$)
- Reziduuri nestaționare

Test 14: Prognoza pe Termen Lung

Întrebare

Prognoza pe termen lung din ARIMA(1,1,0) cu $\phi_1 = 0.7$ convergă la:

- A) Zero
- B) Media necondiționată
- C) O extrapolare liniară a trendului
- D) Ultima valoare observată

Test 14: Prognoza pe Termen Lung

Întrebare

Prognoza pe termen lung din ARIMA(1,1,0) cu $\phi_1 = 0.7$ convergă la:

- A) Zero
- B) Media necondiționată
- C) O extrapolare liniară a trendului
- D) Ultima valoare observată

Răspuns: C – O extrapolare liniară a trendului

Model: $(1 - \phi_1 L)(1 - L)Y_t = c + \varepsilon_t$

Prognoza pe termen lung: Pentru modelele I(1) cu derivă c:

$$\hat{Y}_{T+h} \approx Y_T + h \cdot \frac{c}{1 - \phi_1}$$

Diferențe cheie:

- ARMA staționară: Prognozele \rightarrow media necondiționată

Întrebare

Determinați dacă fiecare afirmație este Adevărată sau Falsă:

- ① Un proces I(2) necesită două diferențe pentru a deveni staționar.
- ② Testul ADF include întotdeauna un termen constant.
- ③ ARIMA(0,1,0) este un alt nume pentru un mers aleatoriu.
- ④ Diferențierea unei serii staționare o face "mai staționară."
- ⑤ Testul KPSS are staționaritatea ca ipoteză nulă.
- ⑥ Modelele ARIMA pot captura doar modele liniare.

Răspunsul pe slide-ul următor...

Răspunsuri

- ① Un proces $I(2)$ necesită două diferențe pentru a deveni staționar.
 $I(d)$ înseamnă că d diferențe sunt necesare. $I(2) =$ două rădăcini unitare.

ADEVĂRAT

- ② Testul ADF include întotdeauna un termen constant.
Alegeți: fără constantă, doar constantă, sau constantă + trend.

FALS

- ③ ARIMA(0,1,0) este un alt nume pentru un mers aleatoriu.
 $(1 - L)Y_t = \varepsilon_t \Rightarrow Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t.$

ADEVĂRAT

- ④ Diferențierea unei serii staționare o face "mai staționară."
Supradiferențierea creează MA neinvertibil; afectează performanța modelului.

FALS

- ⑤ Testul KPSS are staționaritatea ca ipoteză nulă.
KPSS: $H_0 =$ staționară. Opus testului ADF.

ADEVĂRAT

- ⑥ Modelele ARIMA pot captura doar modele liniare.
ARIMA este liniar în parametri. Modelele neliniare necesită GARCH, rețele neuronale, etc.

ADEVĂRAT

Exercițiu

Aveți date trimestriale de PIB pentru 80 de trimestre. Testul ADF (cu constantă și trend) dă o statistică de test de -2.85 . Valoarea critică la 5% este -3.41 .

- ❶ Care este concluzia dumneavoastră despre staționaritate?
- ❷ Ce ati face în continuare?

Problema 1: Testarea Rădăcinii Unitare

Exercițiu

Aveți date trimestriale de PIB pentru 80 de trimestre. Testul ADF (cu constantă și trend) dă o statistică de test de -2.85 . Valoarea critică la 5% este -3.41 .

- ① Care este concluzia dumneavoastră despre staționaritate?
- ② Ce ați face în continuare?

Soluție

- ① Deoarece $-2.85 > -3.41$, **nu respingem H_0** . Datele par să aibă o rădăcină unitară (nestaționare).
- ② Luați prima diferență ΔY_t și repetați testul ADF pe seria diferențiată pentru a confirma că este acum staționară.

Problema 2: Identificarea Modelului

Exercițiu

După diferențierea o dată a unei serii de timp, ACF arată:

- Vârf semnificativ la lag 1 ($\rho_1 = 0.4$)
- Toate celelalte lag-uri nesemnificative

PACF arată descreștere graduală.

Ce model ARIMA este sugerat?

Problema 2: Identificarea Modelului

Exercițiu

După diferențierea o dată a unei serii de timp, ACF arată:

- Vârf semnificativ la lag 1 ($\rho_1 = 0.4$)
- Toate celelalte lag-uri nesemnificative

PACF arată descreștere graduală.

Ce model ARIMA este sugerat?

Soluție

- ACF se întrerupe după lag 1 \Rightarrow componentă MA(1)
- PACF descrește \Rightarrow Confirmă structura MA
- Deoarece am diferențiat o dată: $d = 1$

Model sugerat: **ARIMA(0,1,1) sau IMA(1,1)**

Problema 3: Ecuăția ARIMA

Exercițiu

Scrieti ecuația completă pentru ARIMA(1,1,1):

$$(1 - \phi_1 L)(1 - L)Y_t = c + (1 + \theta_1 L)\varepsilon_t$$

Expandați complet în termenii Y_t , Y_{t-1} , Y_{t-2} , etc.

Problema 3: Ecuăția ARIMA

Exercițiu

Scrieti ecuația completă pentru ARIMA(1,1,1):

$$(1 - \phi_1 L)(1 - L)Y_t = c + (1 + \theta_1 L)\varepsilon_t$$

Expandați complet în termenii Y_t , Y_{t-1} , Y_{t-2} , etc.

Soluție

Expandând $(1 - \phi_1 L)(1 - L) = 1 - L - \phi_1 L + \phi_1 L^2 = 1 - (1 + \phi_1)L + \phi_1 L^2$:

$$Y_t - (1 + \phi_1)Y_{t-1} + \phi_1 Y_{t-2} = c + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Sau echivalent:

$$Y_t = c + (1 + \phi_1)Y_{t-1} - \phi_1 Y_{t-2} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Problema 4: Calculul Prognozei

Exercițiu

Dat ARIMA(0,1,1): $\Delta Y_t = \varepsilon_t + 0.3\varepsilon_{t-1}$

La momentul T : $Y_T = 100$, $\hat{\varepsilon}_T = 2$, $\sigma^2 = 4$

Calculați:

- ① $\hat{Y}_{T+1|T}$ (prognoza la un pas)
- ② $\hat{Y}_{T+2|T}$ (prognoza la doi pași)

Problema 4: Calculul Prognozei

Exercițiu

Dat ARIMA(0,1,1): $\Delta Y_t = \varepsilon_t + 0.3\varepsilon_{t-1}$

La momentul T : $Y_T = 100$, $\hat{\varepsilon}_T = 2$, $\sigma^2 = 4$

Calculați:

- ① $\hat{Y}_{T+1|T}$ (prognoza la un pas)
- ② $\hat{Y}_{T+2|T}$ (prognoza la doi pași)

Soluție

① $\hat{Y}_{T+1|T} = Y_T + 0.3\hat{\varepsilon}_T = 100 + 0.3(2) = 100.6$

② $\hat{Y}_{T+2|T} = \hat{Y}_{T+1|T} + 0.3 \cdot 0 = 100.6 + 0 = 100.6$

(Socurile viitoare $\varepsilon_{T+1}, \varepsilon_{T+2}$ sunt prognozate ca 0)

Problema 5: Intervale de Încredere

Exercițiu

Continuând de la Problema 4, calculați intervalele de încredere de 95% pentru $\hat{Y}_{T+1|T}$ și $\hat{Y}_{T+2|T}$.
Reamintim: $\sigma^2 = 4$, $\theta_1 = 0.3$

Problema 5: Intervale de Încredere

Exercițiu

Continuând de la Problema 4, calculați intervalele de încredere de 95% pentru $\hat{Y}_{T+1|T}$ și $\hat{Y}_{T+2|T}$.
Reamintim: $\sigma^2 = 4$, $\theta_1 = 0.3$

Soluție

Pentru IMA(1,1), ponderile MA(∞) sunt $\psi_0 = 1$, $\psi_j = 1 + \theta_1$ pentru $j \geq 1$.

1 pas: $\text{Var}(e_{T+1}) = \sigma^2 \psi_0^2 = 4$, deci $SE = 2$

$$100.6 \pm 1.96(2) = [96.68, 104.52]$$

2 pasi: $\text{Var}(e_{T+2}) = \sigma^2(\psi_0^2 + \psi_1^2) = 4(1 + 1.3^2) = 10.76$, $SE = 3.28$

$$100.6 \pm 1.96(3.28) = [94.17, 107.03]$$

Exemplu: Testarea Rădăcinii Unitare în Prețurile Acțiunilor

Scenariu

Aveți prețuri de închidere zilnice pentru o acțiune pe parcursul a 500 de zile. Vreți să determinați dacă prețurile urmează un mers aleatoriu.

Abordare Pas cu Pas

- ① **Inspeție vizuală:** Reprezentați grafic prețurile – probabil arată trend
- ② **Testul ADF pe prețuri:** Așteptați să nu respingeți H_0 (rădăcină unitară)
- ③ **Luați randamentele logaritmice:** $r_t = \ln(P_t/P_{t-1}) = \Delta \ln(P_t)$
- ④ **Testul ADF pe randamente:** Ar trebui să respingeți H_0 (staționară)
- ⑤ **Concluzie:** Log prețurile sunt $I(1)$, randamentele sunt $I(0)$

Exemplu: Box-Jenkins pentru Date de Inflație

Scenariu

Rate lunare ale inflației pentru 10 ani. Construiți un model ARIMA.

Flux de lucru

- ① Reprezentare grafică și test: ADF sugerează limită – încercați atât $d = 0$ cât și $d = 1$
- ② Dacă $d = 0$: Ajustați modele ARMA, comparați AIC
- ③ Dacă $d = 1$: Examinați ACF/PACF ale lui ΔY_t
 - ACF: vârf la lag 1, apoi se întrerupe
 - PACF: descrește
 - \Rightarrow Încercați ARIMA(0,1,1)
- ④ Estimare: Ajustați ARIMA(0,1,1), verificați coeficienții
- ⑤ Diagnostic: Ljung-Box pe reziduuri (vrem $p > 0.05$)
- ⑥ Comparare: AIC al ARIMA(0,1,1) vs ARMA(1,1) pe niveluri

Exemplu: Interpretarea Rezultatelor Python

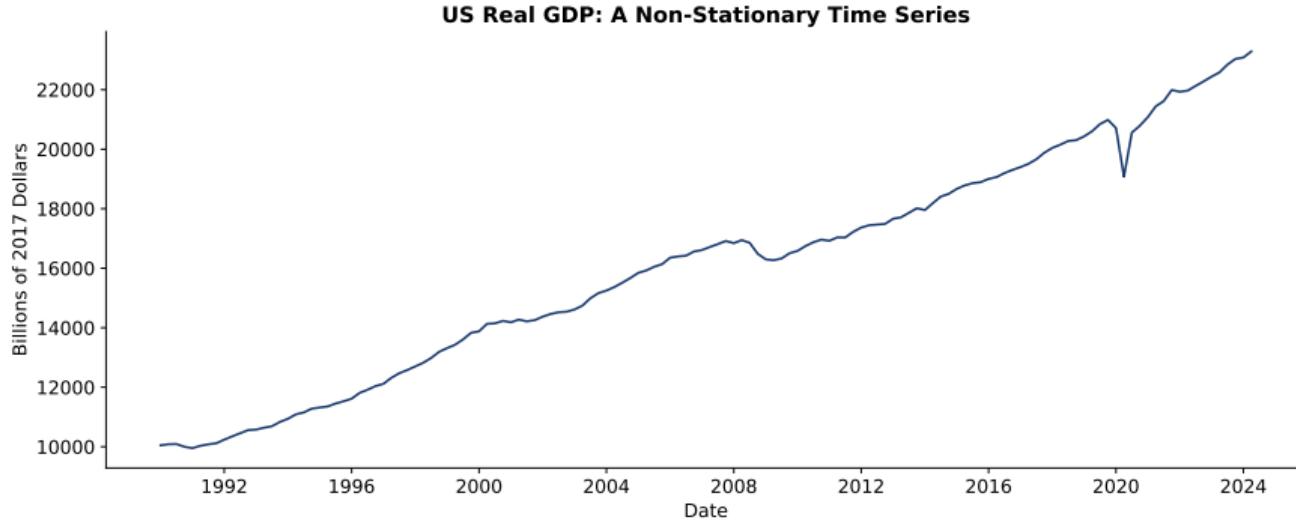
Rezultate ARIMA din statsmodels

```
ARIMA Model Results
=====
Dep. Variable:      D.y    No. Observations:     99
Model:             ARIMA(1,1,1)    AIC:            285.32
                           BIC:            295.63
=====
                                         coef    std err        z     P>|z|
-----
const           0.0521      0.048     1.085     0.278
ar.L1            0.4532      0.102     4.443     0.000
ma.L1           -0.2891      0.118    -2.450     0.014
sigma2          1.2340      0.176     7.011     0.000
```

Interpretare

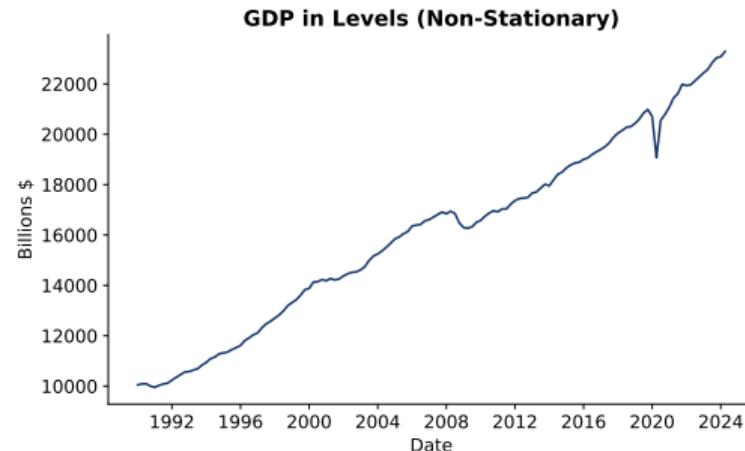
- Coeficientul AR (0.45) este semnificativ, coeficientul MA (-0.29) este semnificativ
- Constanta (0.052) nesemnificativă – am putea seta $c = 0$
- Verificare: $|\phi_1| < 1$ (staționară), $|\theta_1| < 1$ (invertibilă) – OK!

Studiu de Caz: PIB Real SUA (1990–2024)



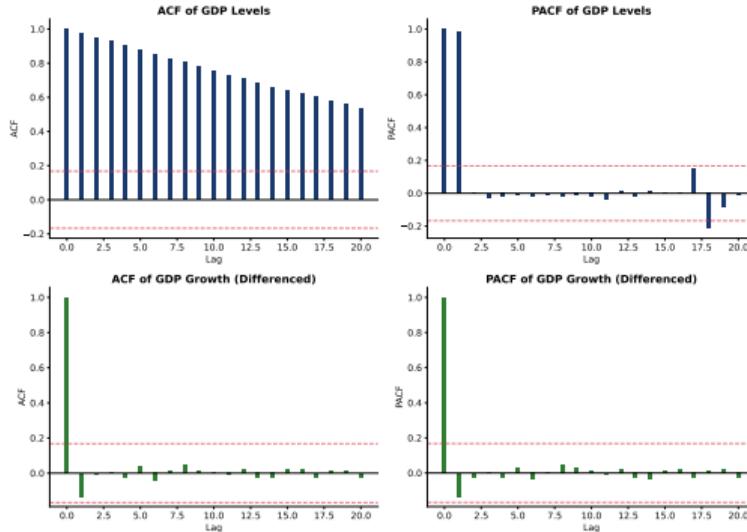
- PIB Real SUA în miliarde de dolari 2017 (date trimestriale)
- Trend ascendent clar – tipic pentru seriile macroeconomice
- Scăderi notabile în timpul recesiunilor (2008-2009, 2020)
- Nestaționară: necesită diferențiere înainte de modelarea ARIMA

Stationaritate Prin Diferențiere



- Stânga: PIB în niveluri – trend ascendent clar (nestaționară)
- Dreapta: Rata de creștere a PIB = $\Delta \log(Y_t) \times 100$ – staționară
- Prima diferențiere a log PIB elimină trendul stochastic
- Rata de creștere fluctuează în jurul unei medii constante ($\approx 0.6\%$ trimestrial)

ACF/PACF: Niveluri vs Diferențiate



- **Rândul de sus:** ACF/PACF ale nivelurilor PIB – descreștere lentă indică nestaționaritate
- **Rândul de jos:** ACF/PACF ale creșterii PIB – mai ales în limitele de încredere
- Modelul sugerează că un model ARIMA de ordin mic este potrivit

Rezultate Estimare ARIMA: Creșterea PIB SUA

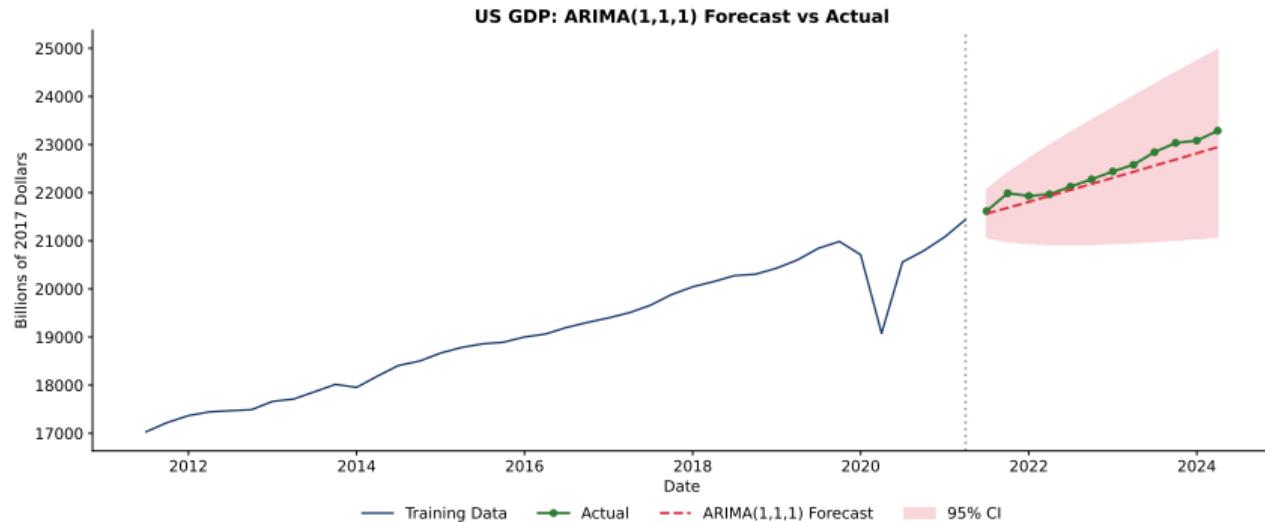
Model: ARIMA(1, 1, 1) pe log(PIB)

Parametru	Estimat	Eroare Std.	z-stat	valoare-p
ϕ_1 (AR.L1)	0.312	0.185	1.69	0.091
θ_1 (MA.L1)	-0.087	0.203	-0.43	0.668
σ^2	0.00012	-	-	-

Interpretare

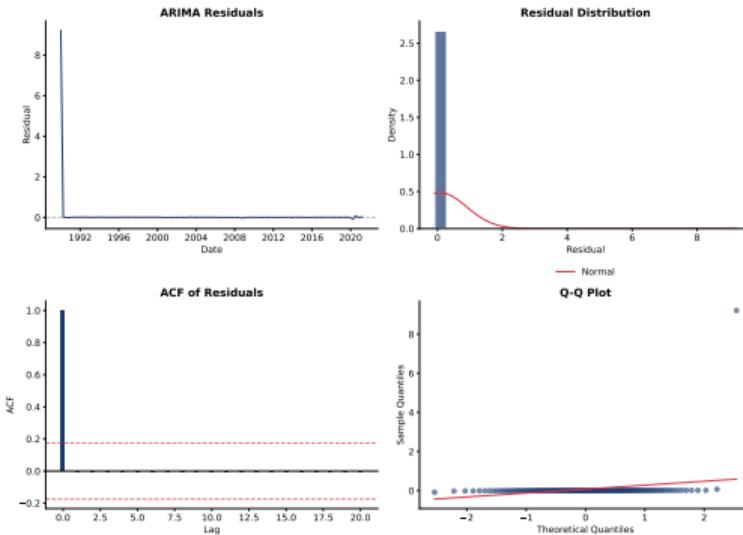
- ARIMA de ordin mic captează rezonabil dinamica PIB
- Coeficientul AR(1) pozitiv – creșterea PIB arată persistență
- Alternativă: mersul aleatoriu simplu (ARIMA(0,1,0)) adesea competitiv

Prognoză: ARIMA vs Real



- Albastru: date istorice de antrenare; Verde: date reale de test
- Roșu întrerupt: prognoze ARIMA cu interval de încredere 95%
- Prognozele captează direcția generală a trendului
- Intervalele de încredere se lărgesc pe măsură ce orizontul de prognoză crește

Diagnostice Model: Analiza Reziduurilor



- Reziduurile nu arată modele sistematice în timp
- Distribuție aproximativ normală (histogramă și grafic Q-Q)
- ACF-ul reziduurilor în limite – fără autocorelație semnificativă rămasă
- Modelul captează adevarat procesul generator de date

Întrebare Cheie

De ce este important să distingem între trendurile deterministe și stochastice?

Puncte de Discuție

- **Consecințele tratamentului greșit:**
 - Eliminarea trendului prin regresie la o rădăcină unitară \Rightarrow staționaritate falsă
 - Diferențierea unei serii staționare în trend \Rightarrow supradiferențiere
- **Interpretare economică:**
 - Trend determinist: șocurile sunt temporare
 - Trend stochastic: șocurile au efecte permanente
- **Implicații de politică:**
 - O recesiune reduce permanent PIB-ul, sau economia revine la trend?

Întrebare Cheie

Când ar trebui să folosiți AIC vs BIC pentru selecția modelului ARIMA?

Considerații

- **AIC:** Minimizează eroarea de predicție, poate supraajusta
 - Mai bun pentru prognoză
 - Tinde să selecteze modele mai mari
- **BIC:** Selección consistentă a modelului, mai simplu
 - Mai bun pentru identificarea modelului "adevărat"
 - Penalizează complexitatea mai puternic
- **Sfat practic:** Raportați ambele, preferați BIC dacă diferă substanțial

Întrebare Cheie

Care sunt principalele limitări ale modelelor ARIMA?

Puncte de Discuție

- **Liniaritate:** Nu poate captura dinamici neliniare
- **Varianță constantă:** Presupune homoscedasticitate (fără efecte GARCH)
- **Fără rupturi structurale:** Parametrii presupuși constanți
- **Univariat:** Ignoră relațiile cu alte variabile
- **Simetric:** Tratează řocurile pozitive și negative la fel
- **Prognoze pe termen lung:** Incertitudinea crește rapid

Extensii

Aceste limitări motivează GARCH (volatilitate), VAR (multivariat), modele cu schimbări de regim, etc.

Ce am Acoperit

- ① **Integrare și diferențiere:** Procesele $I(d)$ necesită d diferențe
- ② **Testarea rădăcinii unitare:** ADF testează H_0 : rădăcină unitară; KPSS testează H_0 : staționară
- ③ **ARIMA(p,d,q):** Combină ARMA cu diferențierea
- ④ **Identificarea modelului:** Folosiți modelele ACF/PACF și criteriile informaționale
- ⑤ **Prognoză:** Prognoze punctuale și intervale de încredere în creștere

Următorul Seminar

Exerciții practice Python cu date economice reale:

- Testarea rădăcinii unitare cu statsmodels
- Auto-ARIMA cu pmdarima
- Prognoză și diagnostice model