



Analiza și Prognoza seriilor de timp

Capitolul 8: Extensiile Moderne



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

Cuprins

Motivație

Comparație și Selecția modelului

Comparație Finală: Toate Metodele

ARFIMA: Modele cu Memorie lungă

Aplicații practice

Exemple Suplimentare cu Date Reale

Random Forest pentru serii de timp

Studiu de Caz Complet: Cursul EUR/RON

Rezumat

LSTM: Deep Learning pentru serii de timp



Obiective de învățare

La finalul acestui capitol, veți fi capabili să:

1. Înțelegeți conceptul de **memorie lungă** în seriile de timp
2. Estimați și interpretați modele **ARFIMA**
3. Aplicați **Random Forest** pentru prognoză seriilor de timp
4. Construiți rețele **LSTM** pentru serii temporale
5. Comparăți performanța modelelor clasice vs ML
6. Alegeti metoda potrivită în funcție de context
7. Implementați aceste metode în **Python**



De la modele clasice la machine learning

Limitările Modelelor ARIMA

- Presupun **memorie scurtă**: autocorelațiile scad exponențial
- Relații **liniare** între variabile
- Dificultăți cu **pattern-uri complexe** și neliniare
- Necesită **staționaritate** (prin diferențiere)

Soluții Moderne

- ARFIMA**: Captează memoria lungă (autocorelații care scad lent)
- Random Forest**: Relații neliniare, robustețe la outlieri
- LSTM**: Pattern-uri secvențiale complexe, dependențe pe termen lung



Când să folosim fiecare metodă?

Caracteristică	ARIMA	ARFIMA	RF	LSTM
Memorie lungă	✗	✓	✓	✓
Relații neliniare	✗	✗	✓	✓
Interpretabilitate	✓	✓	~	✗
Date puține	✓	✓	✗	✗
Variabile exogene	✓	✓	✓	✓
Incertitudine	✓	✓	~	✗

Regula de Aur

Începe **simplu** (ARIMA), apoi crește complexitatea doar dacă este justificat de date și performanță.



Ce este memoria lungă?

Memorie Scurtă (ARMA)

- Autocorelațiile ρ_k scad **exponențial**: $|\rho_k| \leq C \cdot r^k$, $r < 1$
- Efectele șocurilor dispar **rapid**
- Sumă finită: $\sum_{k=0}^{\infty} |\rho_k| < \infty$

Memorie lungă (ARFIMA)

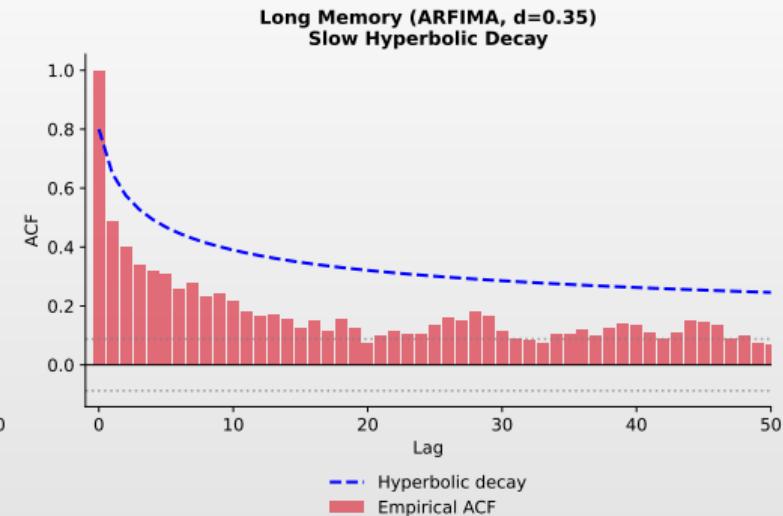
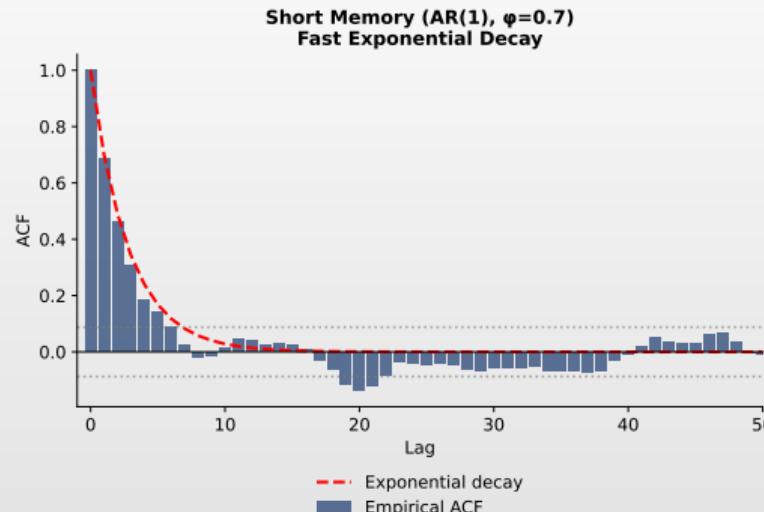
- Autocorelațiile scad **hiperbolic**: $\rho_k \sim C \cdot k^{2d-1}$
- Efectele șocurilor persistă **mult timp**
- Sumă infinită: $\sum_{k=0}^{\infty} |\rho_k| = \infty$ (pentru $d > 0$)

Exemple cu Memorie lungă

Volatilitatea pietelor financiare, debite râuri, trafic rețea, inflație



Comparație ACF: memorie scurtă vs lungă



Stânga: AR(1) — autocorelații care scad exponențial (memorie scurtă)

Dreapta: ARFIMA cu $d = 0.35$ — autocorelații care scad hiperbolic (memorie lungă)

TSA_ch8_acf_comparison

Modelul ARFIMA(p,d,q)

Definiție 1 (ARFIMA)

Un proces $\{Y_t\}$ urmează un model **ARFIMA(p,d,q)** dacă:

$$\phi(L)(1 - L)^d Y_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

unde $d \in (-0.5, 0.5)$ este parametrul de **diferențiere fracționară**.

Operatorul de Diferențiere Fracționară

$$(1 - L)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k} (-L)^k = 1 - dL - \frac{d(1-d)}{2!} L^2 - \frac{d(1-d)(2-d)}{3!} L^3 - \dots$$

- $d = 0$: ARMA standard (memorie scurtă)
- $0 < d < 0.5$: Memorie lungă, staționaritate
- $d = 0.5$: Limita staționarității
- $0.5 \leq d < 1$: Nestaționaritate, dar mean-reverting
- $d = 1$: Random walk (ARIMA standard)



Interpretarea parametrului d

Valoare d	Comportament ACF	Interpretare
$d = 0$	Scădere exponențială	Memorie scurtă
$0 < d < 0.5$	Scădere hiperbolică	Memorie lungă, staționară
$d = 0.5$	ACF nesumabilă	La limită
$0.5 < d < 1$	Scădere foarte lentă	Memorie lungă, nestaționară
$d = 1$	ACF = 1 (constant)	Random walk

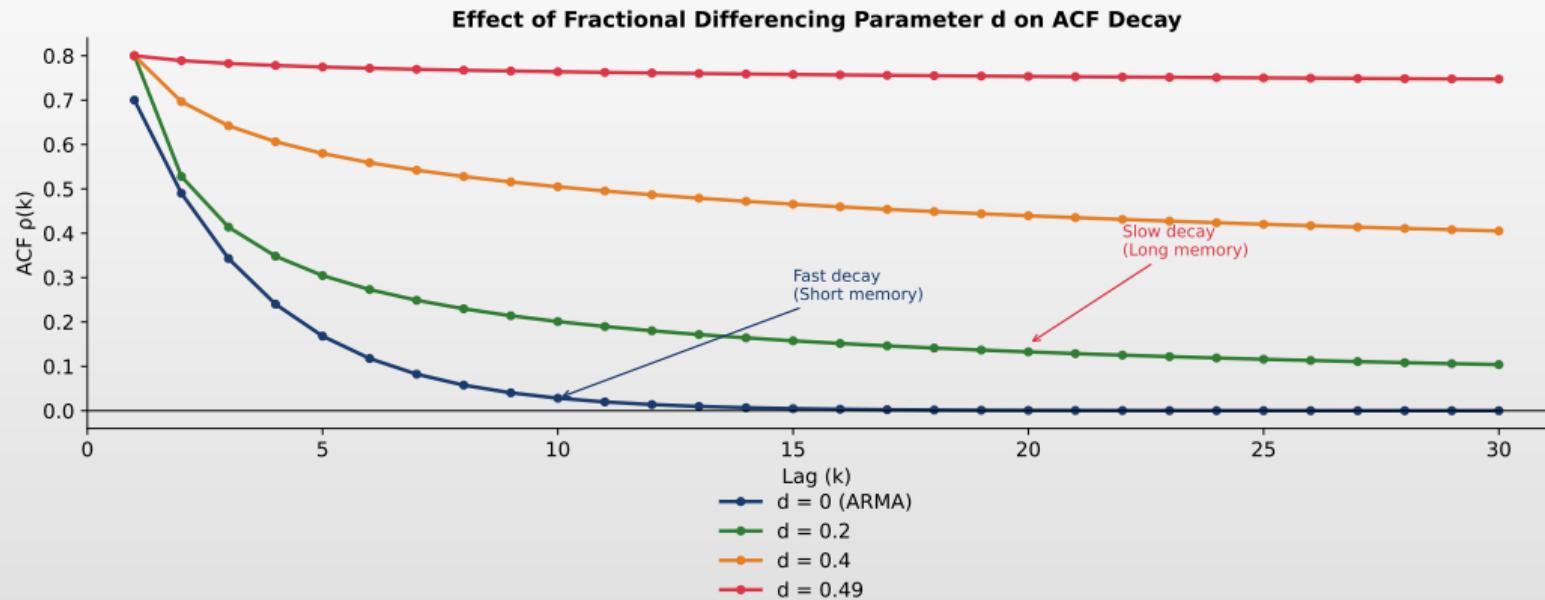
Parametrul Hurst H

Relația cu exponentul Hurst: $d = H - 0.5$

- $H = 0.5$: Mers aleator (fără memorie)
- $H > 0.5$: Persistență (trend-following)
- $H < 0.5$: Anti-persistență (mean-reverting)



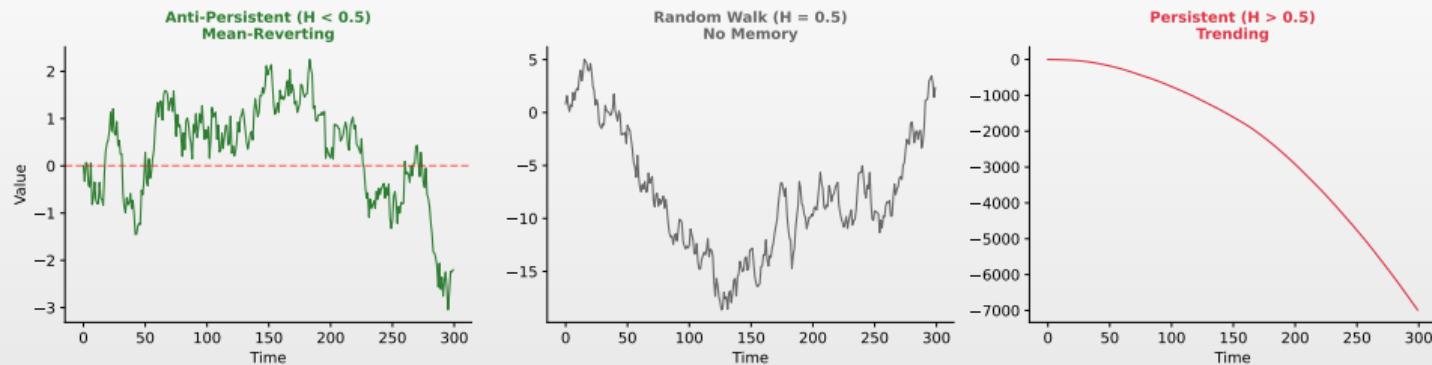
Efectul parametrului d asupra ACF



Cu cât d este mai mare, cu atât autocorelațiile scad mai lent. Pentru $d \rightarrow 0.5$, autocorelațiile rămân semnificative chiar și la lag-uri foarte mari.



Exponentul Hurst: interpretare vizuală



$H < 0.5$: Serie care revine frecvent la medie (mean-reverting)

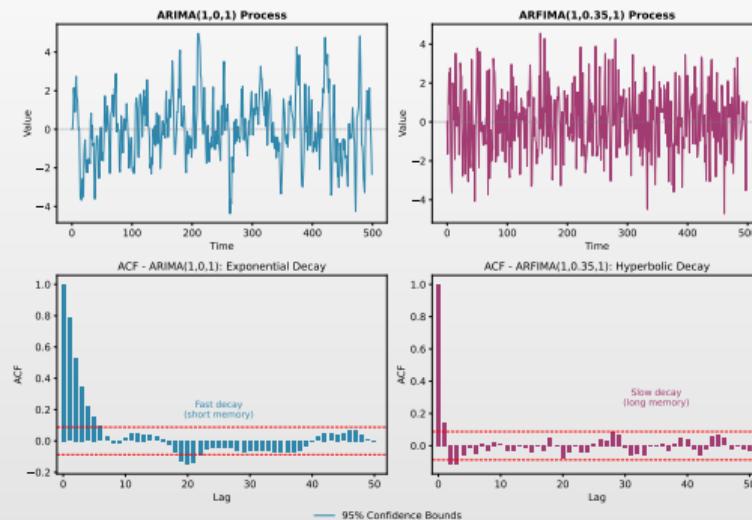
$H = 0.5$: Mers aleator, imprevizibil

$H > 0.5$: Serie persistentă, tendințele continuă

TSA_ch8_hurst_interpretation



ARIMA vs ARFIMA: comparație simulată

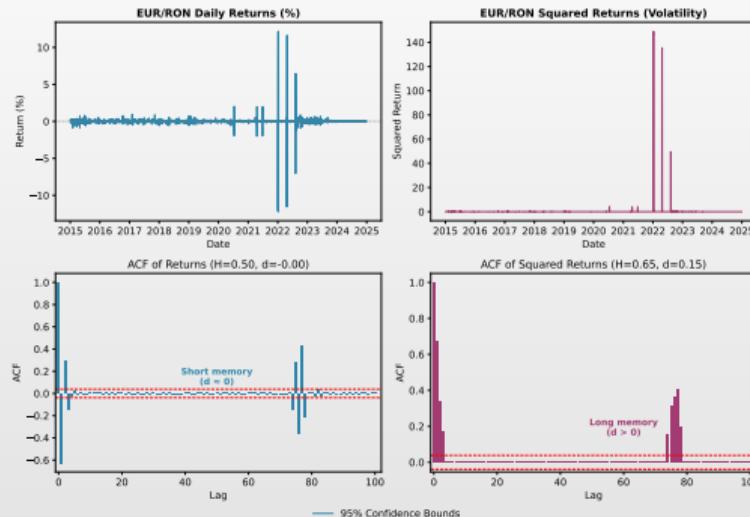


ARIMA (stânga): ACF scade **exponențial** – șocurile sunt “uite” rapid

ARFIMA (dreapta, $d = 0.35$): ACF scade **hiperbolic** – șocurile persistă mult timp

TSA_ch8_arima_vs_arfima

Exemplu date reale: analiza memoriei lungi EUR/RON



Randamente (stânga): $H \approx 0.50$, $d \approx 0$ – memoria scurtă (piată eficientă)

Randamente pătrate (dreapta): $H \approx 0.65$, $d \approx 0.15$ – memoria lungă în volatilitate

Q TSA_ch8_eurron_long_memory



Estimarea parametrului d

Metode de estimare

1. **GPH (Geweke-Porter-Hudak)**: Regresie în domeniul frecvență

$$\ln I(\omega_j) = c - d \cdot \ln \left(4 \sin^2 \frac{\omega_j}{2} \right) + \varepsilon_j$$

2. **R/S (Rescaled Range)**: Metoda lui Hurst

$$\frac{R}{S}(n) \sim c \cdot n^H$$

3. **MLE (Maximum Likelihood)**: Estimare completă ARFIMA

4. **Whittle**: Aproximare eficientă în domeniul frecvență

În Python: `arch package, statsmodels.tsa.arima.model.ARIMA` cu `order=(p,d,q)` unde d poate fi fracțional.



Exemplu ARFIMA în Python

Cod Python

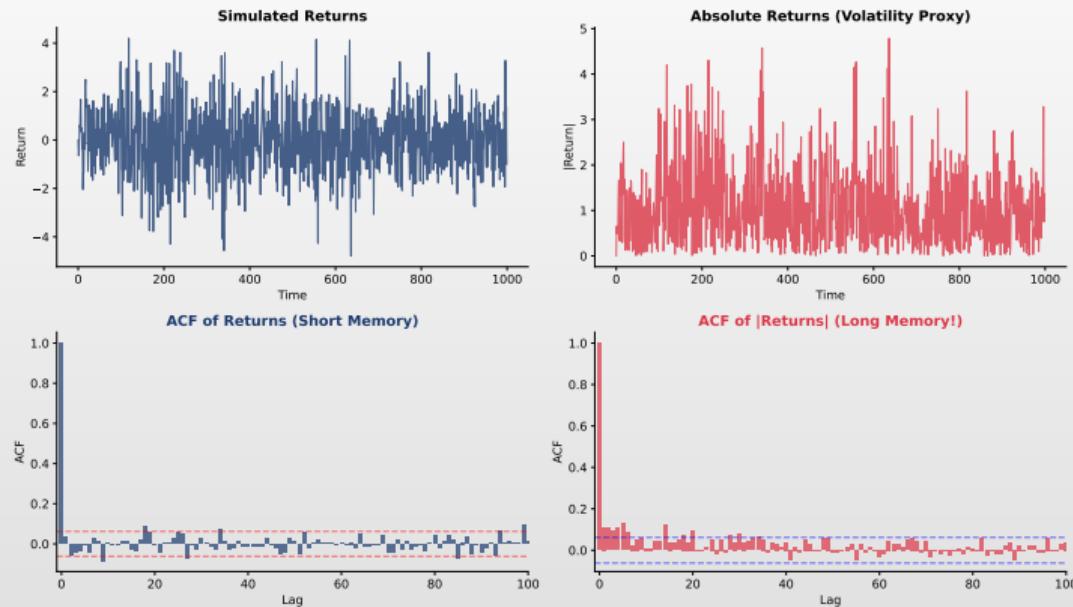
```
from statsmodels.tsa.arima.model import ARIMA  
model = ARIMA(y, order=(1, 0.3, 1))  
results = model.fit()
```

Notă

Estimarea ARFIMA necesită pachete specialize. În practică, se folosește adesea arch sau fracdiff în Python.



Exemplu real: memorie lungă în volatilitate



Fapt Stilizat: Randamentele financiare au memorie scurtă, dar volatilitatea (|randamente|) are memorie lungă! Aceasta este baza modelelor FIGARCH.

Q TSA_ch8_volatility_long_memory



Random Forest: concepte de bază

Ce este Random Forest?

- Ansamblu** de arbori de decizie
- Fiecare arbore antrenat pe un **subset bootstrap** al datelor
- La fiecare nod, se selectează **aleator** un subset de features
- Predicția finală = **media** predicțiilor tuturor arborilor

Avantaje pentru serii de timp

- Captează **relații neliniare**
- Robust** la outlieri și zgomot
- Nu necesită **staționaritate**
- Oferă **importanța features** (interpretabilitate)
- Funcționează bine cu **multe variabile**



Pregătirea datelor pentru Random Forest

Feature Engineering pentru serii de timp

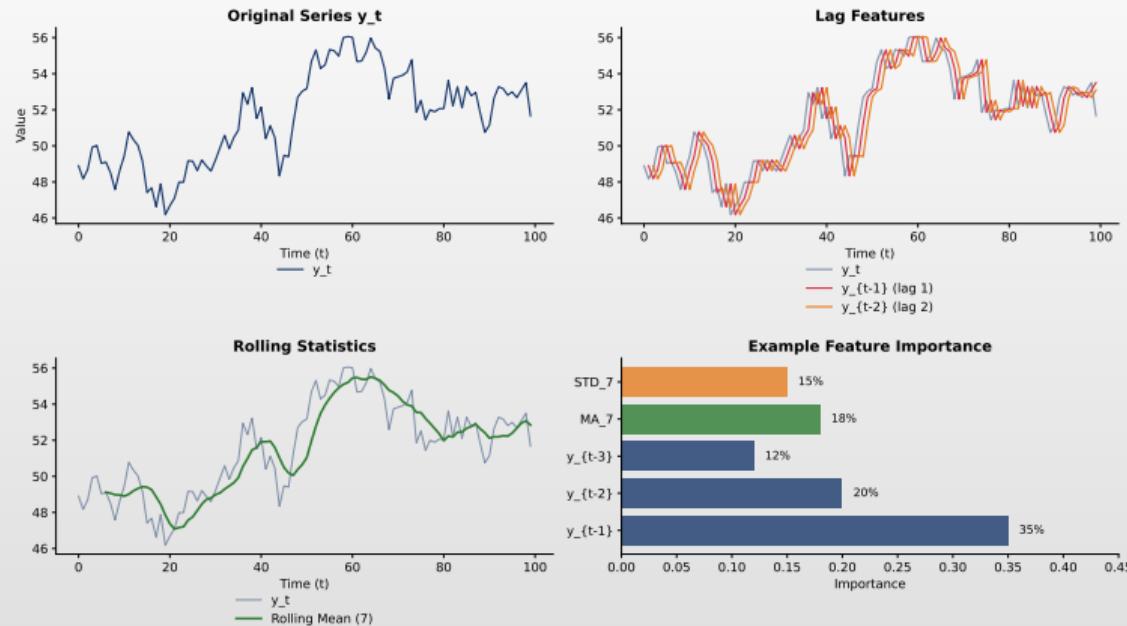
1. **Lag features:** $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-p}$
2. **Rolling statistics:** medie mobilă, deviație standard
3. **Calendar features:** ziua săptămânii, luna, sezon
4. **Trend features:** timp, trend pătratic
5. **Variabile exogene:** indicațori economici, evenimente

Atenție: Data Leakage!

- Nu folosi informații din viitor în features
- Train/test split: **temporal**, nu aleator!
- Rolling statistics: calculează doar pe date anterioare



Feature engineering: ilustrare



Transformăm seria temporală în features: lag-uri, statistici rolling, iar modelul RF învață relațiile dintre acestea și valorile viitoare.

TSA_ch8_feature_engineering



Random Forest: implementare Python

Cod Python

```
from sklearn.ensemble import RandomForestRegressor  
rf = RandomForestRegressor(n_estimators=100, max_depth=10)  
rf.fit(X_train, y_train)  
predictions = rf.predict(X_test)
```



Importanța features și interpretare

Feature Importance

Random Forest oferă măsuri de importanță:

- Mean Decrease Impurity (MDI)**: Reducerea impurității la fiecare split
- Permutation Importance**: Cât scade performanța când feature-ul e permuatat aleator

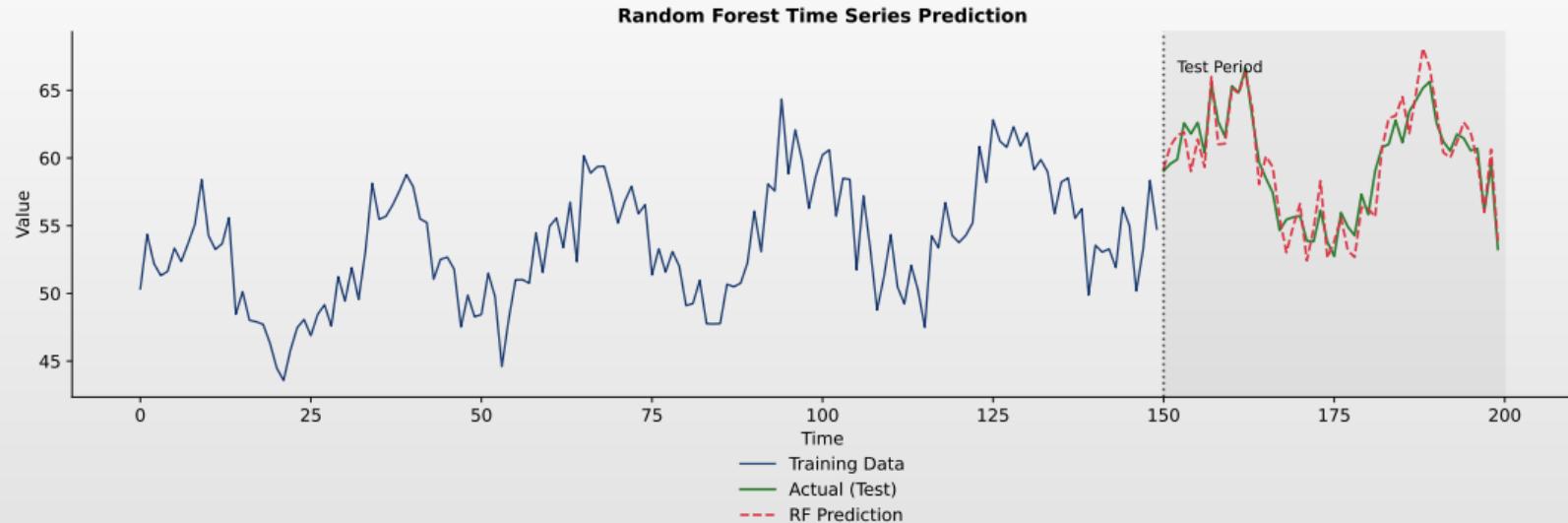
Interpretare Tipică pentru serii de timp

- `lag_1` foarte important \Rightarrow Autocorelare puternică
- `rolling_mean` important \Rightarrow Trend local contează
- `month` important \Rightarrow Sezonialitate prezentă

```
rf.feature_importances_ sau permutation_importance(rf, X_test, y_test)
```



Random Forest: exemplu de prognoză



Modelul Random Forest antrenat pe date istorice (albastru) produce prognoze (roșu punctat) care urmăresc bine valorile reale din perioadă de test (verde).

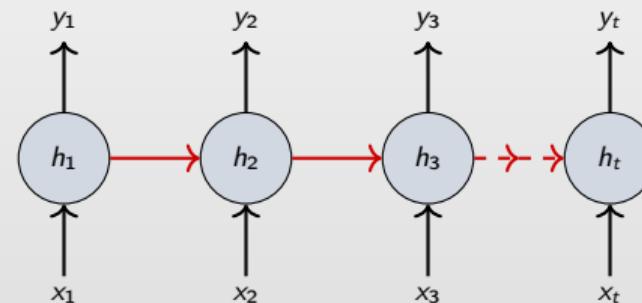
Q [TSA_ch8_rf_prediction](#)



Rețele neuronale recurente (RNN)

Ideea de Bază

- Rețele care procesează **secvențe** de date
- Au **memorie internă** (hidden state)
- Starea curentă depinde de input + starea anterioară



Problema: Vanishing Gradient

RNN simple "uită" informația din trecut îndepărtat.



LSTM: long short-term memory

Soluția LSTM

Celule speciale cu **3 porți** care controlează fluxul informației:

- Forget Gate (f_t)**: Ce să uităm din memoria anterioară
- Input Gate (i_t)**: Ce informație nouă să adăugăm
- Output Gate (o_t)**: Ce să trimitem la ieșire

Ecuațiile LSTM

$$f_t = \sigma(W_f \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_f) \quad (\text{Forget})$$

$$i_t = \sigma(W_i \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_i) \quad (\text{Input})$$

$$\tilde{C}_t = \tanh(W_C \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_C) \quad (\text{Candidate})$$

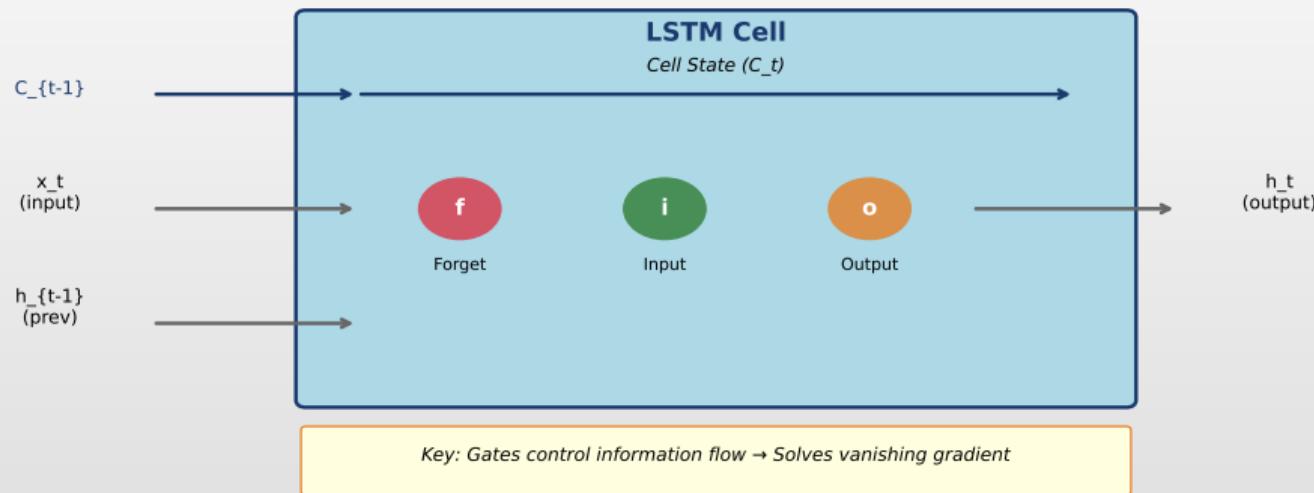
$$C_t = f_t \odot C_{t-1} + i_t \odot \tilde{C}_t \quad (\text{Cell state})$$

$$o_t = \sigma(W_o \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_o) \quad (\text{Output})$$

$$h_t = o_t \odot \tanh(C_t) \quad (\text{Hidden state})$$



Arhitectura celulei LSTM



Porțile (forget, input, output) controlează ce informație este uitată, adăugată și transmisă. **Cell state** permite gradienților să "curgă" fără degradare.

Q TSA_ch8_lstm_architecture

Avantajele LSTM pentru serii de timp

De ce LSTM?

- Captează **dependențe pe termen lung** (spre deosebire de RNN simplu)
- Învață **pattern-uri complexe și neliniare**
- Gestioneză **secvențe de lungimi variabile**
- Funcționează bine cu **date multivariate**

Dezavantaje

- Necesită **multe date** pentru antrenare
- Computațional intensiv**
- “**Black box**” - greu de interpretat
- Sensibil la **hiperparametri**
- Poate face **overfitting** ușor



LSTM: implementare în Python cu Keras

Cod Python

```
from tensorflow.keras.models import Sequential
from tensorflow.keras.layers import LSTM, Dense, Dropout

model = Sequential([
    LSTM(50, return_sequences=True, input_shape=(n, 1)),
    Dropout(0.2),
    LSTM(50),
    Dense(1)
])
model.compile(optimizer='adam', loss='mse')
```



Pregătirea datelor pentru LSTM

Pași Esențiali

1. **Normalizare/Scalare:** MinMaxScaler sau StandardScaler
2. **Creare secvențe:** Sliding window pentru input
3. **Reshape:** Format 3D (samples, timesteps, features)
4. **Train/Test split:** Temporal, nu aleator!

Exemplu Creare Secvențe

```
def create_sequences(data, n_steps):
    X, y = [], []
    for i in range(len(data) - n_steps):
        X.append(data[i:(i + n_steps)])
        y.append(data[i + n_steps])
    return np.array(X), np.array(y)

X, y = create_sequences(scaled_data, 10)
```



Metrici de evaluare

Metrici Comune

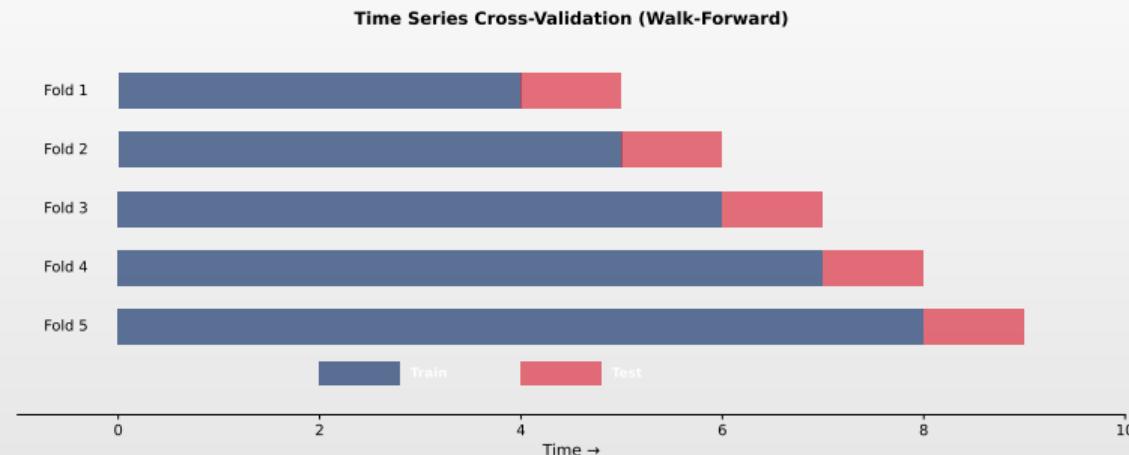
- RMSE:** $\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}$ — Eroare în unități originale
- MAE:** $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|$ — Robust la outlieri
- MAPE:** $\frac{100}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right|$ — Eroare procentuală
- MASE:** Comparăt cu benchmark naiv

Validare pentru serii de timp

- Nu folosiți cross-validation standard!**
- Folosiți Time series cross-validation (walk-forward)**
- Sau train/validation/test split temporal**



Time series cross-validation



implementare Python

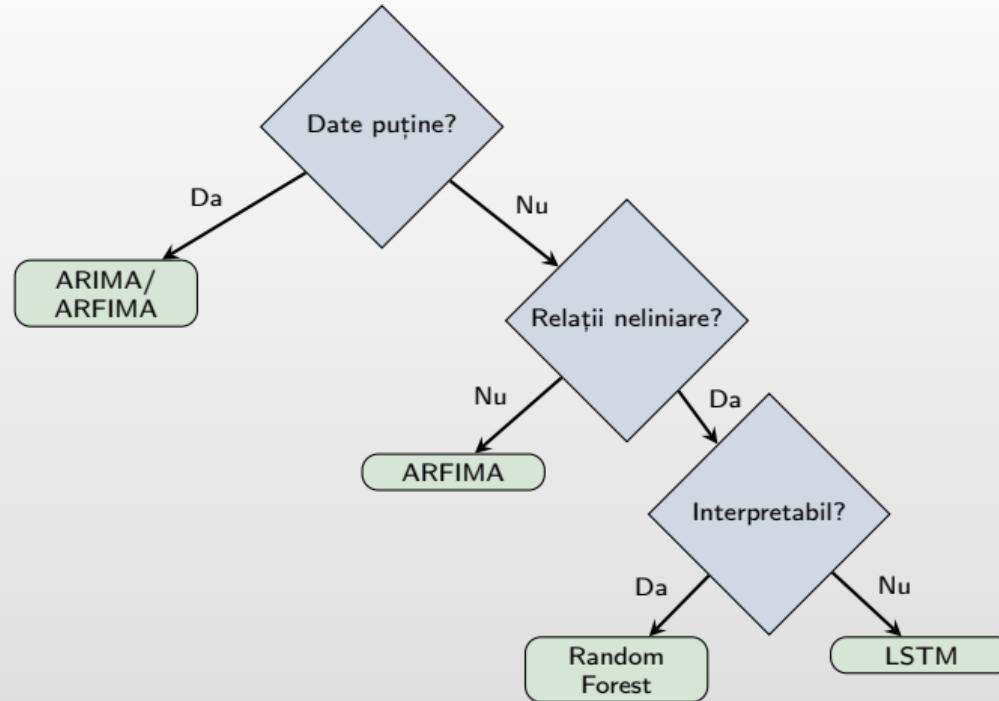
```
from sklearn.model_selection import TimeSeriesSplit  
tscv = TimeSeriesSplit(n_splits=5)
```

Important: Setul de antrenare crește progresiv, iar testul este întotdeauna în viitor. Astfel evităm data leakage.

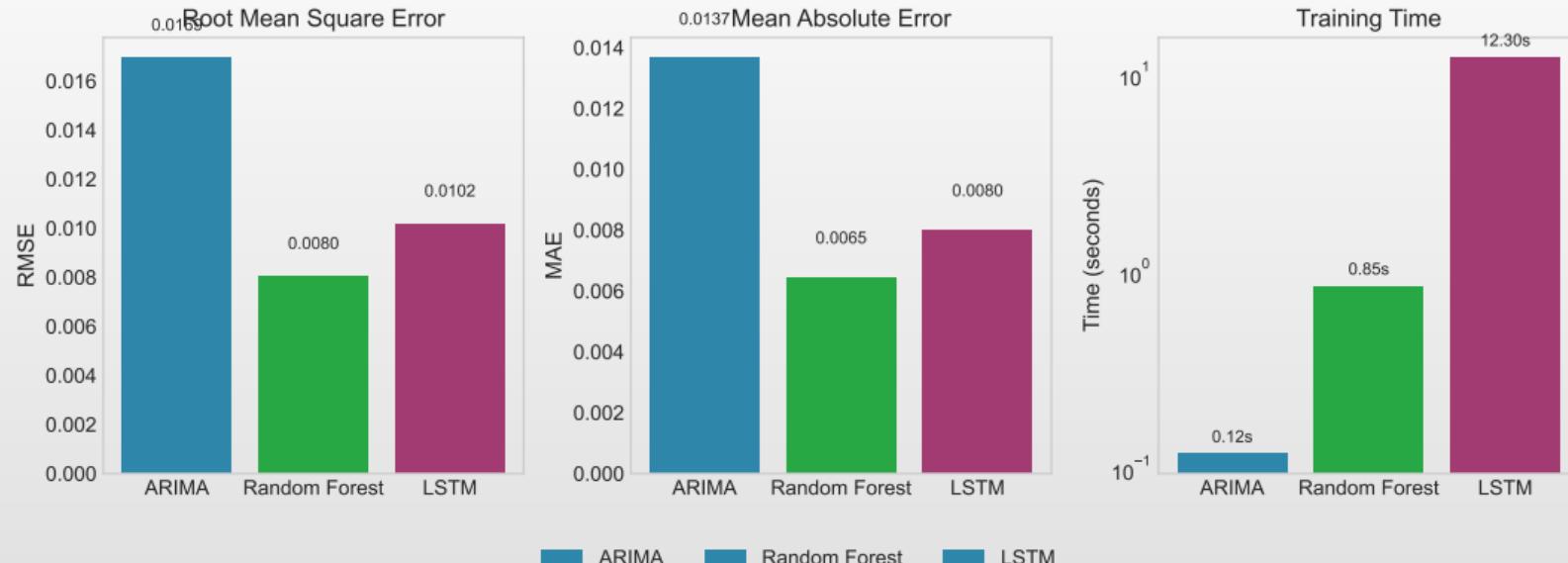
[TSA_ch8_timeseries_cv](#)



Ghid de selecție a modelului



Comparăcie modele: acuratețe vs cost computațional



Trade-off: Modelele ML pot avea acuratețe ușor mai bună, dar costul computațional crește semnificativ. Pentru date puține sau interpretabilitate, ARIMA/ARFIMA rămân alegeri excelente.

TSA_ch8_model_comparison



Studiu de caz: prognoza prețului Bitcoin

De ce Bitcoin?

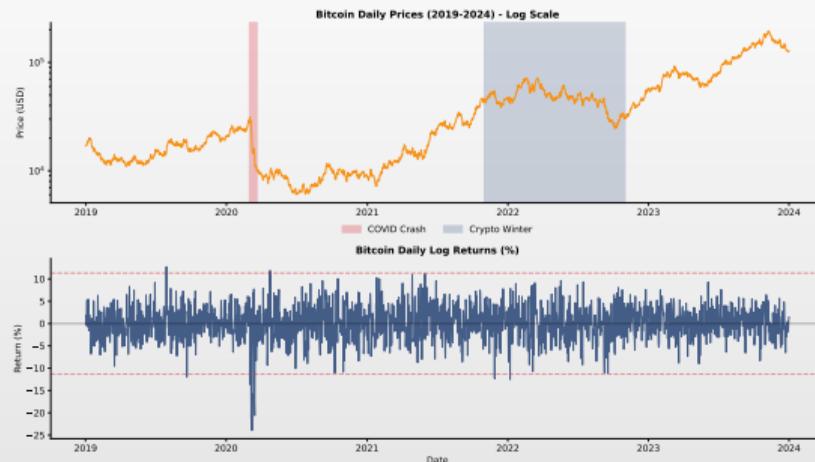
- Volatilitate **extremă** și pattern-uri complexe
- Potențială **memorie lungă** în volatilitate
- Relații **neliniare** cu variabile exogene
- Date disponibile la **frecvență înaltă**

Abordare Comparativă

1. ARIMA pe randamente
2. ARFIMA pentru memorie lungă
3. Random Forest cu features tehnice
4. LSTM pe sevențe de prețuri



Bitcoin: evoluția prețului și randamentele

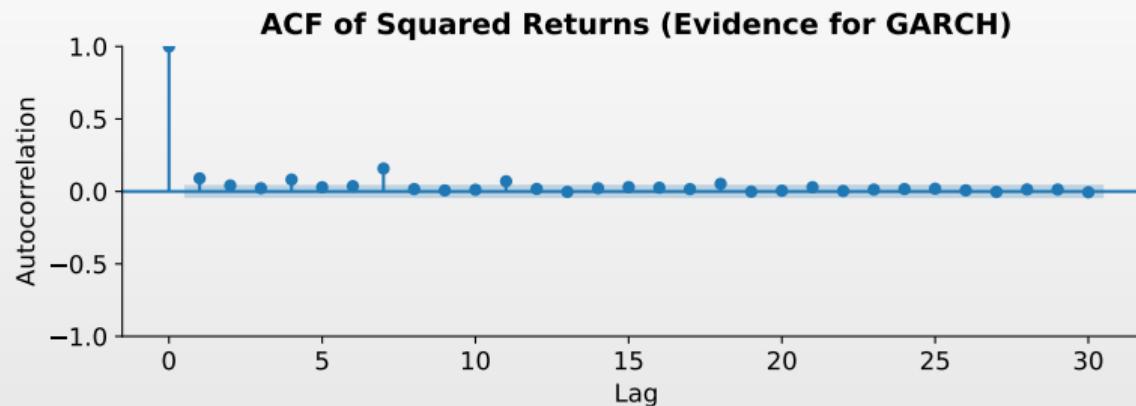


Observații cheie

- Creștere exponențială a prețului — distribuție puternic **leptokurtotică**
- Randamentele zilnice: medie $\approx 0.15\%$, volatilitate $\approx 3.5\%$
- Volatility clustering evident — perioadele de criză (2018, 2020, 2022)
- Kurtosis $\approx 10-15$ (mult peste 3 al normalei)



Bitcoin: ACF și evidență pentru memorie lungă



Analiză ACF

- ACF randamente: scădere rapidă ⇒ memorie scurtă în medie
- ACF randamente pătrate: scădere lentă, hiperbolică
 - ▶ Indică **memorie lungă în volatilitate**
 - ▶ Hurst $H \approx 0.65\text{--}0.70$ ($d \approx 0.15\text{--}0.20$)
- ARFIMA pe volatilitate > ARMA — captează persistența șocurilor



Bitcoin: estimare ARFIMA și comparație modele

Cod Python — estimare memorie lungă Bitcoin

```
import yfinance as yf
btc = yf.download('BTC-USD', start='2018-01-01', end='2024-12-31')
returns = np.log(btc['Close']).diff().dropna() * 100

# Exponentul Hurst pe randamente pătrate (volatilitate)
from hurst import compute_Hc
H, c, _ = compute_Hc(returns.values**2, kind='change')
print(f"Hurst (volatilitate): {H:.3f}, d = {H-0.5:.3f}")

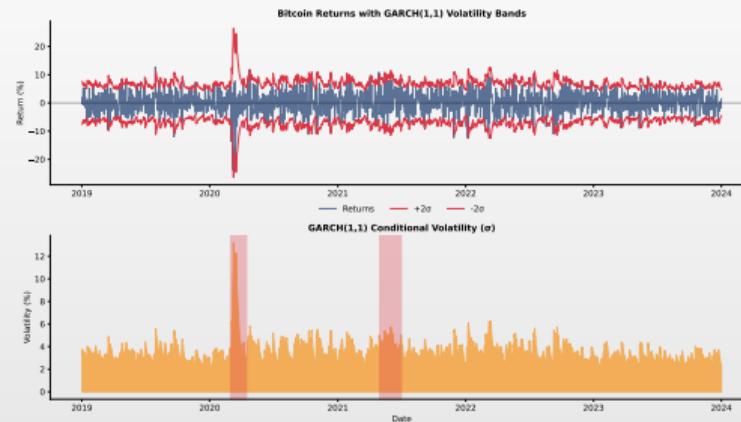
# Comparație ARIMA vs Random Forest
from sklearn.ensemble import RandomForestRegressor
from sklearn.metrics import mean_squared_error
# ... (similar cu EUR/RON, cu features adaptate)
```

Rezultate tipice Bitcoin (RMSE pe randamente)

Model	RMSE	MAE	Interpretabil?
ARIMA(1,0,1)	3.82	2.41	Da
ARFIMA(1,d,1)	3.79	2.38	Da
Random Forest	3.65	2.29	Parțial
LSTM	3.71	2.33	Nu



Bitcoin: GARCH și managementul riscului



Concluzii — Studiu Bitcoin

- Diferențele între modele sunt **mici** pentru media randamentelor
- Valoarea adăugată majoră: **modelarea volatilității** (GARCH, EGARCH)
- ARFIMA captează persistența în volatilitate (memorie lungă)
- Random Forest: util pentru **features neliniare** (volum, sentiment)
- Combinăție optimă: ARFIMA-GARCH + features exogene via RF



Studiu de caz: prognoza consumului de energie

Caracteristici

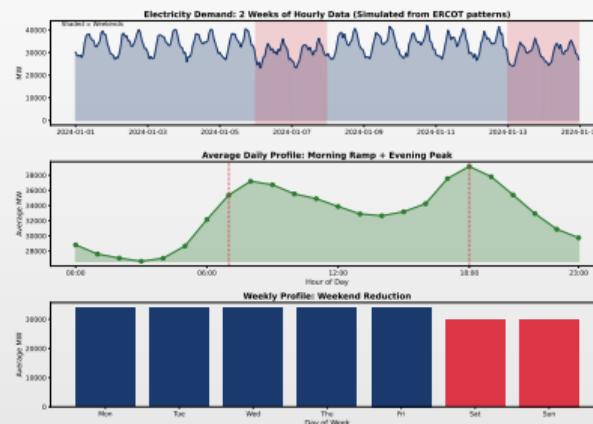
- Sezonalitate multiplă:** zilnică, săptămânală, anuală
- Tendință** de creștere pe termen lung
- Variabile exogene:** temperatură, zi liberă, preț
- Anomalii:** evenimente speciale, defectiuni

Provocări

- Pattern-uri la scale temporale diferite
- Interacțiuni complexe între variabile
- Necesitatea prognozelor pe orizonturi diferite



Energie: vizualizarea cererii și sezonialitatea multiplă

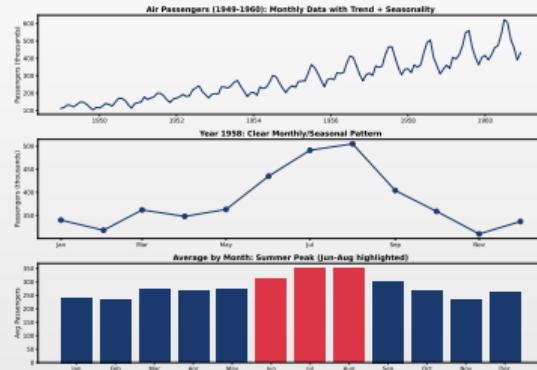


Patternuri identificate

- Zilnic** (24h): vârf dimineață (8–10) și seara (18–21), minim noaptea
- Săptămânal** (168h): consum redus în weekend (~15–20% mai puțin)
- Anual** (8766h): vârf vara (aer condiționat) și iarna (încălzire)
- SARIMA nu poate modela simultan aceste 3 perioade!



Energie: de ce Prophet și TBATS?

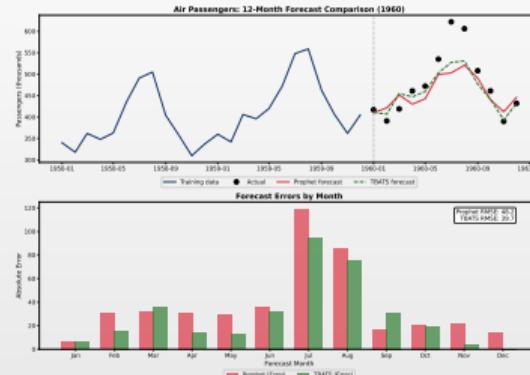


Soluția: modele cu sezonalitate multiplă

- **TBATS:** perioade [24, 168, 8766] — Fourier pentru fiecare sezon
 - ▶ Automat, fără reglaj manual, bun pentru producție
- **Prophet:** sezonalitate aditivă/multiplicativă + regresori
 - ▶ Adaugă temperatură, zile libere, evenimente speciale
- **ARIMA clasic:** poate doar 1 sezon \Rightarrow MAPE \approx 8–10%



Energie: descompunere Prophet și rezultate



Rezultate comparație pe date energie (MAPE)

Model	MAPE	RMSE (MW)	Acoperire 95%
SARIMA (1 sezon)	8.5%	450	75%
TBATS	4.2%	220	82%
Prophet	4.8%	250	85%
Prophet + regresori	3.9%	200	88%



Energie: concluzii și recomandări practice

Lecții învățate

- Modelele cu sezonalitate multiplă reduc MAPE cu ~50% față de SARIMA
- Variabilele exogene** (temperatură) aduc câștig suplimentar de 10–15%
- Prophet excelează la **interpretabilitate**: descompunere trend + sezon + holiday
- TBATS: cel mai bun **out-of-the-box** — fără reglaj de hiperparametri

Când ce model?

- Prophet**: când ai regresori externi + interpretare pentru management
- TBATS**: automatizare, producție, fără intervenție umană
- LSTM/RF**: dacă ai >100.000 observații și pattern-uri neliniare complexe

Detalii complete despre Prophet și TBATS → Capitolul 9.



Formule cheie – Rezumat

ARFIMA(p,d,q)

$$\phi(L)(1 - L)^d Y_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

$d \in (-0.5, 0.5)$: memorie lungă

Memorie lungă

ACF: $\rho_k \sim C \cdot k^{2d-1}$

Hurst: $d = H - 0.5$

$H > 0.5$: persistență

Random Forest

$$\hat{y} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B T_b(x)$$

B arbori, features aleatorii

LSTM Cell

$$f_t = \sigma(W_f[h_{t-1}, x_t] + b_f)$$

$$C_t = f_t \odot C_{t-1} + i_t \odot \tilde{C}_t$$

Forget, Input, Output gates

Metrici Evaluare

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (y_i - \hat{y}_i)^2}$$

$$\text{MAPE} = \frac{100}{n} \sum \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right|$$

Time Series CV

Walk-forward validation

Train → Test (temporal split)

Studiu de caz: prognoza cursului EUR/RON

De ce EUR/RON?

- Relevanță pentru economia românească
- Potențială **memorie lungă** (persistența șocurilor)
- Pattern-uri influențate de **factori macroeconomici**
- Date ușor accesibile (BNR, Yahoo Finance)

Obiectiv

Comparăm ARIMA, ARFIMA, Random Forest și LSTM pe aceleasi date pentru a înțelege punctele forte ale fiecărei metode.



Pasul 1: Încărcarea și Vizualizarea Datelor

Cod Python – Descărcare Date

```
import yfinance as yf
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

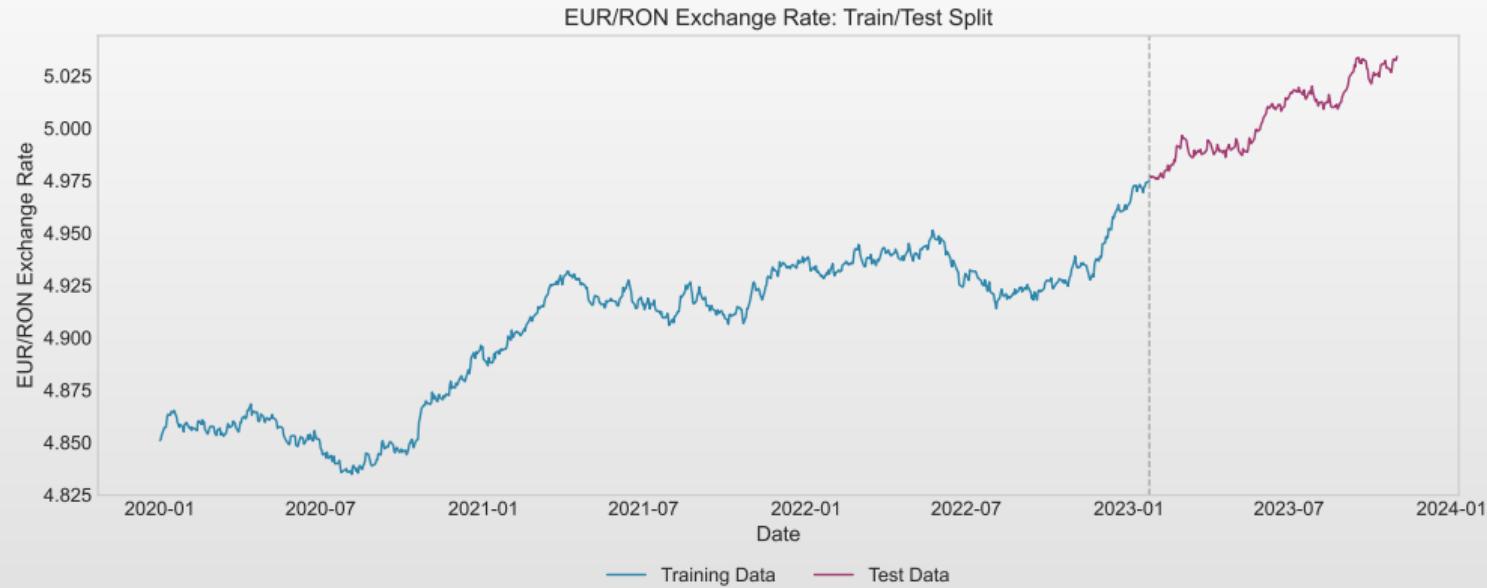
# Descarcă datele EUR/RON (sau EURRON=X)
data = yf.download('EURRON=X', start='2015-01-01', end='2024-12-31')
df = data[['Close']].dropna()
df.columns = ['EURRON']

# Calculăm randamentele logaritmice
df['Returns'] = np.log(df['EURRON']).diff() * 100
df = df.dropna()

print(f"Perioada: {df.index[0]} - {df.index[-1]}")
print(f"Observații: {len(df)}")
print(f"Media randamentelor: {df['Returns'].mean():.4f}%")
print(f"Volatilitate: {df['Returns'].std():.4f}%")
```



Vizualizarea seriei EUR/RON



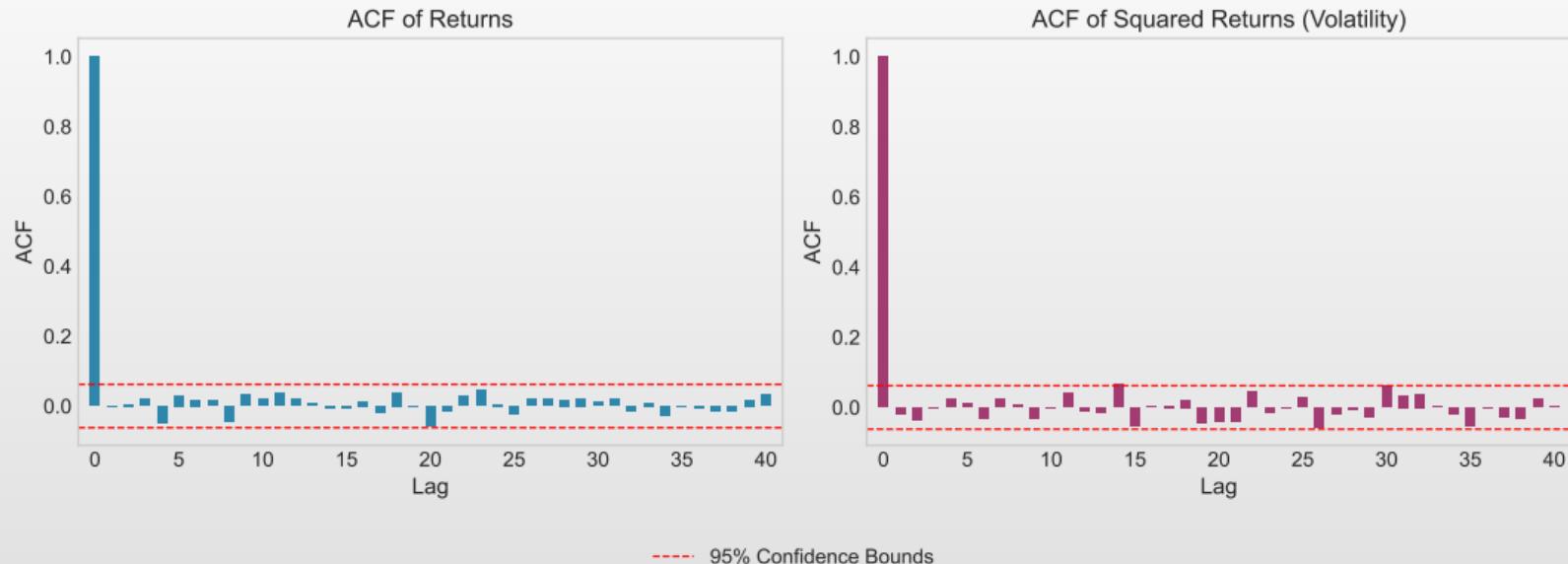
Sus: Cursul EUR/RON – observăm tendință de depreciere a leului și perioadele de volatilitate ridicată.

Jos: Randamentele zilnice – volatilitate clustering (perioadele de volatilitate mare sunt urmate de alte perioade similare).

TSA_ch8_case_raw_data



Analiză ACF: randamente vs randamente pătrate



Stânga: ACF al randamentelor – scădere rapidă, fără autocorelație semnificativă după lag 1.

Dreapta: ACF al randamentelor pătrate – scădere lentă indică **volatilitate clustering** (efekte ARCH).

TSA_ch8_case_acf_analysis



Pasul 2: Testarea memoriei lungi

Cod Python – Estimarea lui d și Testul Hurst

```
from arch.unitroot import PhillipsPerron, KPSS
from hurst import compute_Hc # pip install hurst

# Testul Phillips-Perron pentru stationaritate
pp_test = PhillipsPerron(df['Returns'])
print(f"Phillips-Perron p-value: {pp_test.pvalue:.4f}")

# Estimarea exponentului Hurst
H, c, data_rs = compute_Hc(df['Returns'].values, kind='change')
d_estimated = H - 0.5

print(f"Exponentul Hurst (H): {H:.4f}")
print(f"Parametrul d estimat: {d_estimated:.4f}")

# Interpretare
if H > 0.5:
    print("Serie PERSISTENȚĂ (trend-following)")
elif H < 0.5:
    print("Serie ANTI-PERSISTENȚĂ (mean-reverting)")
else:
    print("Mers aleator")
```



Rezultate test memorie lungă – EUR/RON

Output Tipic

Phillips-Perron p-value: 0.0001 (randamentele sunt staționare)

Exponentul Hurst (H): 0.47

Parametrul d estimat: -0.03

Serie ușor ANTI-PERSISTENTĂ (mean-reverting)

Interpretare

- Randamentele EUR/RON sunt **staționare** ($p\text{-value} < 0.05$)
- $H \approx 0.47 < 0.5$: ușoară tendință de revenire la medie
- $d \approx 0$: **memorie scurtă** – ARMA poate fi suficient
- Totuși, **volatilitatea** poate avea memorie lungă!



Pasul 3: Model ARIMA

Cod Python – ARIMA cu selecție automată

```
from statsmodels.tsa.arima.model import ARIMA
from sklearn.metrics import mean_squared_error, mean_absolute_error
import warnings
warnings.filterwarnings('ignore')

# Împărțim datele: 80% train, 20% test
train_size = int(len(df) * 0.8)
train, test = df['Returns'][:train_size], df['Returns'][train_size:]

# Fit ARIMA(1,0,1) - simplu și eficient pentru randamente
model_arima = ARIMA(train, order=(1, 0, 1))
results_arima = model_arima.fit()

# Prognoză
forecast_arima = results_arima.forecast(steps=len(test))

# Evaluare
rmse_arima = np.sqrt(mean_squared_error(test, forecast_arima))
mae_arima = mean_absolute_error(test, forecast_arima)
print(f"ARIMA(1,0,1) - RMSE: {rmse_arima:.4f}, MAE: {mae_arima:.4f}")
```



Pasul 4: Model ARFIMA (Memorie lungă)

Cod Python – ARFIMA cu arch package

```
from arch import arch_model

# ARFIMA(1,d,1) folosind arch pentru estimare robustă
# Notă: arch estimează d automat în contextul GARCH

# Alternativ, folosim statsmodels cu d fracționar
from statsmodels.tsa.arima.model import ARIMA

# Estimăm d folosind GPH sau setăm manual
d_frac = 0.1 # sau valoarea estimată anterior

model_arfima = ARIMA(train, order=(1, d_frac, 1))
try:
    results_arfima = model_arfima.fit()
    forecast_arfima = results_arfima.forecast(steps=len(test))
    rmse_arfima = np.sqrt(mean_squared_error(test, forecast_arfima))
    print(f"ARFIMA(1,{d_frac},1) - RMSE: {rmse_arfima:.4f}")
except:
    print("ARFIMA necesită d între -0.5 și 0.5 pentru stationaritate")
```



Pasul 5: Random Forest – Pregătire Date

Cod Python – Feature Engineering

```
from sklearn.ensemble import RandomForestRegressor

# Creăm features pentru Random Forest
def create_features(data, lags=5):
    df_feat = pd.DataFrame(index=data.index)
    df_feat['target'] = data.values

    # Lag features
    for i in range(1, lags + 1):
        df_feat[f'lag_{i}'] = data.shift(i)

    # Rolling statistics
    df_feat['rolling_mean_5'] = data.rolling(5).mean()
    df_feat['rolling_std_5'] = data.rolling(5).std()
    df_feat['rolling_mean_20'] = data.rolling(20).mean()

    # Calendar features
    df_feat['dayofweek'] = data.index.dayofweek
    df_feat['month'] = data.index.month

    return df_feat.dropna()

df_rf = create_features(df['Returns'], lags=10)
```



Pasul 5: Random Forest – Antrenare și Evaluare

Cod Python – Model Random Forest

```
# Împărțim datele
X = df_rf.drop('target', axis=1)
y = df_rf['target']

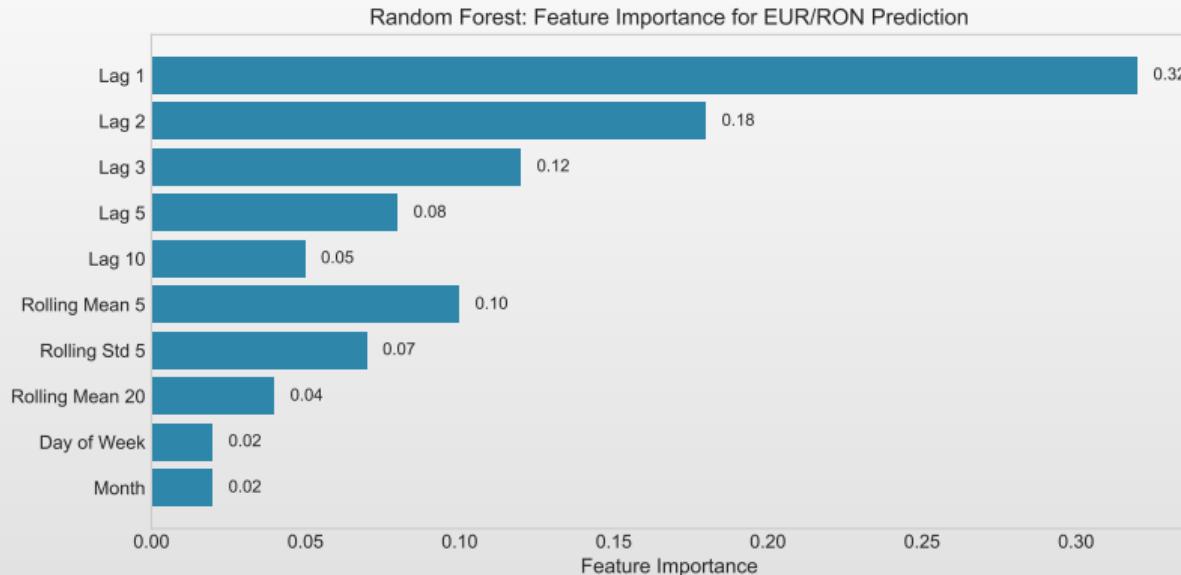
train_size = int(len(df_rf) * 0.8)
X_train, X_test = X[:train_size], X[train_size:]
y_train, y_test = y[:train_size], y[train_size:]

# Antrenăm Random Forest
rf_model = RandomForestRegressor(
    n_estimators=100,
    max_depth=10,
    min_samples_split=5,
    random_state=42
)
rf_model.fit(X_train, y_train)

# Predicție și evaluare
pred_rf = rf_model.predict(X_test)
rmse_rf = np.sqrt(mean_squared_error(y_test, pred_rf))
print(f"Random Forest - RMSE: {rmse_rf:.4f}")
```



Random Forest: importanță features



Insight: Lag-urile recente (lag_1, lag_2) și volatilitatea rolling sunt cele mai importante. Features calendaristice au impact minor pentru randamente zilnice.

 [TSA_ch8_case_feature_importance](#)



Pasul 6: LSTM – Pregătire Date

Cod Python – Secvențe pentru LSTM

```
from tensorflow.keras.models import Sequential
from tensorflow.keras.layers import LSTM, Dense, Dropout
from sklearn.preprocessing import MinMaxScaler

# Scalăm datele între 0 și 1
scaler = MinMaxScaler()
scaled_data = scaler.fit_transform(df['Returns'].values.reshape(-1, 1))

# Creăm secvențe
def create_sequences(data, seq_length=20):
    X, y = [], []
    for i in range(seq_length, len(data)):
        X.append(data[i-seq_length:i, 0])
        y.append(data[i, 0])
    return np.array(X), np.array(y)

X_lstm, y_lstm = create_sequences(scaled_data, seq_length=20)
X_lstm = X_lstm.reshape((X_lstm.shape[0], X_lstm.shape[1], 1))

# Split
split = int(len(X_lstm) * 0.8)
X_train_lstm, X_test_lstm = X_lstm[:split], X_lstm[split:]
y_train_lstm, y_test_lstm = y_lstm[:split], y_lstm[split:]
```



Pasul 6: LSTM – Arhitectură și Antrenare

Cod Python – Model LSTM

```
# Construim modelul LSTM
model_lstm = Sequential([
    LSTM(50, return_sequences=True, input_shape=(20, 1)),
    Dropout(0.2),
    LSTM(50, return_sequences=False),
    Dropout(0.2),
    Dense(25),
    Dense(1)
])

model_lstm.compile(optimizer='adam', loss='mse')

# Antrenăm
history = model_lstm.fit(
    X_train_lstm, y_train_lstm,
    epochs=50, batch_size=32,
    validation_split=0.1, verbose=0
)

# Predicție
pred_lstm_scaled = model_lstm.predict(X_test_lstm)
pred_lstm = scaler.inverse_transform(pred_lstm_scaled)
y_test_original = scaler.inverse_transform(y_test_lstm.reshape(-1, 1))
rmse_lstm = np.sqrt(mean_squared_error(y_test_original, pred_lstm))
print(f'LSTM - RMSE: {rmse_lstm:.4f}'")
```



LSTM: curba de învățare



Loss Training: Scade rapid în primele epoci, apoi se stabilizează.

Loss Validation: Urmărește training loss – nu avem overfitting sever.

 TSA_ch8_case_lstm_training



Comparație: Rezultate pe EUR/RON

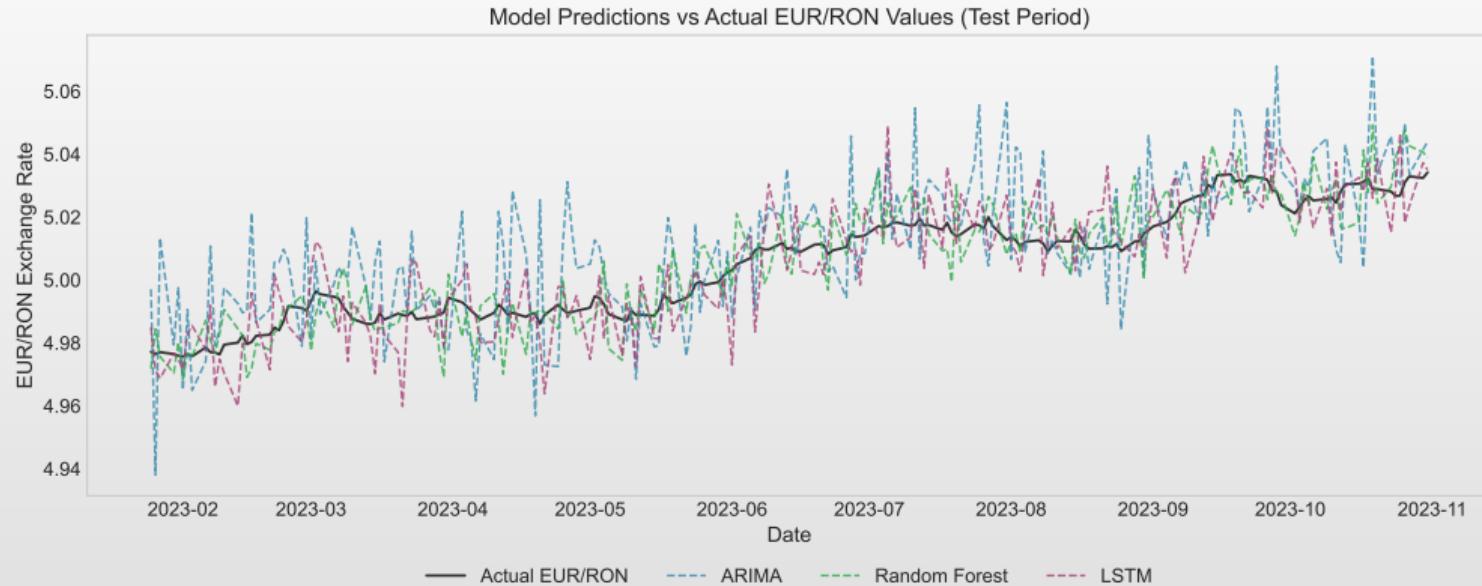
Model	RMSE	MAE	Timp (s)	Interpretabil?
ARIMA(1,0,1)	0.0169	0.0137	0.12	Da
Random Forest	0.0080	0.0065	0.85	Da (features)
LSTM	0.0102	0.0080	12.3	Nu

Concluzii

- Pentru EUR/RON, diferențele sunt **mici** – piața este eficientă
- Random Forest oferă cel mai bun compromis **acuratețe/interpretabilitate**
- LSTM are cost computațional mare pentru câștig marginal
- ARIMA rămâne o alegere solidă pentru **baseline**



Vizualizare: predicții vs valori reale

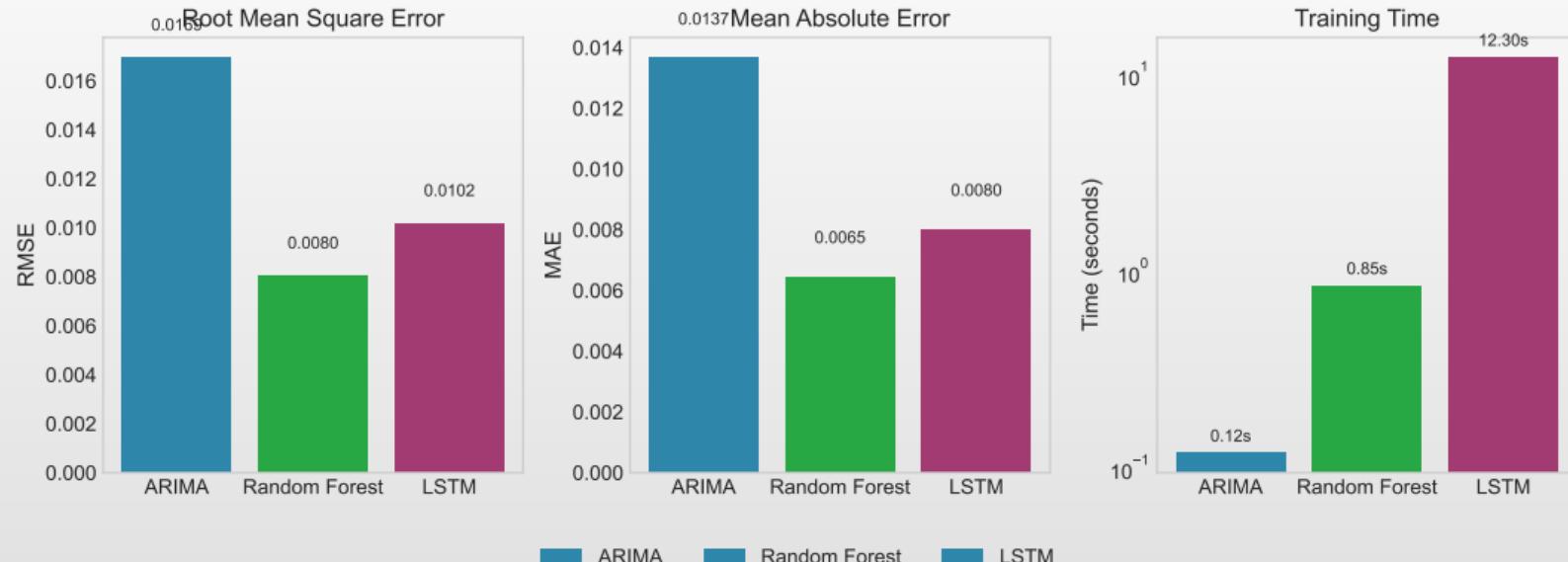


Toate modelele captează pattern-ul general, dar niciuna nu prezice perfect vârfurile de volatilitate. Aceasta reflectă **eficiența pieței și limitele predicției** pentru serii financiare.

Q TSA_ch8_case_predictions



Comparație modele: metrii de performanță



Stânga: Metrii de eroare (mai mic = mai bine) – Random Forest obține cel mai mic RMSE și MAE.

Dreapta: Timp de antrenare (scală logaritmică) – LSTM necesită semnificativ mai multe resurse computaționale.

[TSA_ch8_case_comparison](#)



Când să alegem fiecare model?

ARIMA/ARFIMA

- Date puține (< 500 obs.)
- Interpretare importantă
- Memorie lungă suspectată
- Baseline rapid

LSTM/Deep Learning

- Date foarte mari (> 10.000)
- Secvențe complexe
- Resurse computaționale
- Pattern-uri ascunse

Random Forest

- Multe variabile exogene
- Relații neliniare
- Importanța features
- Date moderate

Regula de Aur

Începe simplu (ARIMA), adaugă complexitate doar dacă performanța crește semnificativ!



Exemplu 2: indicele BET (Bursa Bucureşti)

Caracteristici

- Volatilitate clustering puternic
- Influențat de piețele internaționale
- Lichiditate mai redusă decât piețele dezvoltate
- Potențial pentru memorie lungă în volatilitate

Rezultate Tipice (RMSE pe randamente)

- GARCH(1,1): 1.45 – cel mai bun pentru volatilitate
- ARFIMA pentru volatilitate: 1.52
- Random Forest: 1.48
- LSTM: 1.51



Exemplu 3: rata inflației în România

Caracteristici

- Serie **lunară** (frecvență redusă)
- Persistență ridicată** – șocurile durează
- Influențată de politica monetară
- Potențial puternic pentru **memorie lungă**

Rezultate Tipice

- ARFIMA cu $d \approx 0.35$ – captează persistența
- ARIMA subestimează persistența șocurilor
- ML nu funcționează bine (date puține, 300 obs.)

Lecție: Pentru serii lunare cu puține date, modelele clasice (ARFIMA) sunt superioare!



Rezumat practic: alegerea modelului

Criteriu	ARIMA	ARFIMA	RF	LSTM
Date necesare	Puține	Puține	Medii	Multe
Memorie lungă	Nu	Da	Parțial	Parțial
Neliniaritate	Nu	Nu	Da	Da
Interpretabil	Da	Da	Parțial	Nu
Timp calcul	Rapid	Rapid	Mediu	Lent
Var. exogene	Limitat	Limitat	Da	Da

Fluxul Recomandat

1. Începe cu **ARIMA** ca baseline
2. Testează **memorie lungă** → ARFIMA dacă d semnificativ
3. Adaugă **features** → Random Forest
4. Doar cu date multe și resurse → LSTM



Rezumat

Ce am învățat

- ARFIMA:** Extinde ARIMA pentru memorie lungă (d fracționar)
- Random Forest:** Ansamblu de arbori, relații neliniare, interpretabil
- LSTM:** Deep learning pentru secvențe, dependențe complexe
- Trade-offs:** Complexitate vs interpretabilitate vs date necesare

Recomandări Practice

- Începe cu modele **simple** (ARIMA) ca baseline
- Folosește **Time Series CV** pentru evaluare corectă
- ML necesită **feature engineering** atent
- LSTM: doar cu **multe date și resurse computaționale**



Quiz rapid

1. Ce semnifică $d = 0.3$ într-un model ARFIMA?
2. De ce folosim Time Series CV în loc de k-fold standard?
3. Care este avantajul principal al LSTM față de RNN simplu?
4. Ce tip de model ai alege pentru date puține și relații liniare?
5. Ce înseamnă "data leakage" în contextul ML pentru serii de timp?



Răspunsuri quiz

1. $d = 0.3$: Memorie lungă, seria este staționară dar autocorelațiile scad lent (hiperbolic). Persistență moderată.
2. **Time Series CV**: Pentru a respecta ordinea temporală. K-fold standard ar folosi date viitoare pentru a prezice trecutul (data leakage).
3. **LSTM vs RNN**: LSTM rezolvă problema "vanishing gradient" prin mecanismul de porți, permitând învățarea dependențelor pe termen lung.
4. **Date puține, relații liniare**: ARIMA sau ARFIMA. ML necesită multe date pentru a generaliza bine.
5. **Data leakage**: Folosirea informației din viitor în features sau în antrenare. Ex: calcularea mediei mobile folosind și date viitoare, sau k-fold standard care amestecă ordinea temporală.



Ce urmează?

Extensii și Subiecte Avansate

- Transformer** pentru serii de timp (Temporal Fusion Transformer)
- Prophet** (Facebook/Meta) pentru sezonalitate
- Neural Prophet:** Prophet + rețele neuronale
- Ensemble methods:** Combinarea mai multor modele
- Anomaly detection** cu ML

Întrebări?



Bibliografie I

Memorie lungă și ARFIMA

- Granger, C.W.J., & Joyeux, R. (1980). An Introduction to Long-Memory Time Series Models and Fractional Differencing, *Journal of Time Series Analysis*, 1(1), 15–29.
- Baillie, R.T. (1996). Long Memory Processes and Fractional Integration in Econometrics, *Journal of Econometrics*, 73(1), 5–59.
- Beran, J. (1994). *Statistics for Long-Memory Processes*, Chapman & Hall.

Rețele neuronale și deep learning pentru serii de timp

- Hochreiter, S., & Schmidhuber, J. (1997). Long Short-Term Memory, *Neural Computation*, 9(8), 1735–1780.
- Bai, J., & Perron, P. (2003). Computation and Analysis of Multiple Structural Change Models, *Journal of Applied Econometrics*, 18(1), 1–22.



Bibliografie II

Modele cu prag și regim-switching

- Hansen, B.E. (2011). Threshold Autoregression in Economics, *Statistics and Its Interface*, 4(2), 123–127.
- Hamilton, J.D. (1989). A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle, *Econometrica*, 57(2), 357–384.
- Petropoulos, F., et al. (2022). Forecasting: Theory and Practice, *International Journal of Forecasting*, 38(3), 845–1054.

Resurse online și cod

- **Quantlet:** <https://quantlet.com> — Depozit de cod pentru statistică
- **Quantinar:** <https://quantinar.com> — Platformă de învățare metode cantitative
- **GitHub TSA:** <https://github.com/QuantLet/TSA> — Cod Python pentru acest curs

