



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 6: Modele VAR și Cauzalitate Granger



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

Obiective de învățare

La finalul acestui capitol, veți fi capabili să:

1. Înțelegeți **motivația** pentru analiza multivariată a seriilor de timp
2. Specificați și estimați modele **VAR(p)**
3. Aplicați teste de **cauzalitate Granger**
4. Interpretați **funcțiile de răspuns la impuls (IRF)**
5. Efectuați **descompunerea varianței erorii de prognoză (FEVD)**
6. Selectați ordinul optimal al lag-urilor folosind criterii informaționale
7. Implementați analiza VAR în **Python**

Cuprins

Fundamente

- Motivație
- Introducere în seriile de timp multivariate
- Vector Autoregresiv (VAR)
- Cauzalitate Granger
- Funcții de răspuns la impuls
- Descompunerea varianței erorii de prognoză

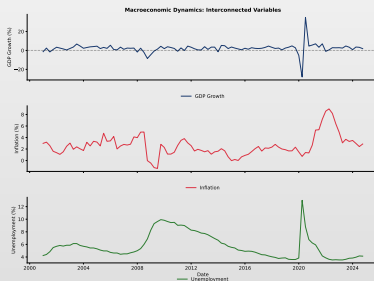
Aplicații

- Diagnosticarea VAR
- Prognoza VAR
- Exemplu practic
- Studiu de caz: PIB și Șomaj
- Rezumat și Quiz

Exemplu motivant: Dinamica macroeconomică

Observații

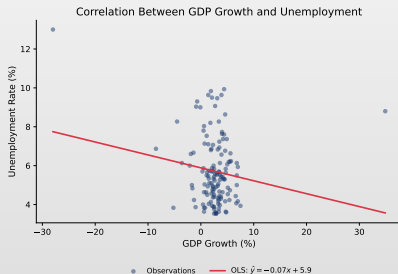
- ▣ Variabilele economice sunt **interconectate**: PIB afectează șomajul, inflația afectează ratele dobânzii
- ▣ Schimbările într-o variabilă se **propagă** prin sistem
- ▣ Înțelegerea acestor dinamici necesită analiză **multivariată**



Ideea cheie: variabilele interacționează

Exemple

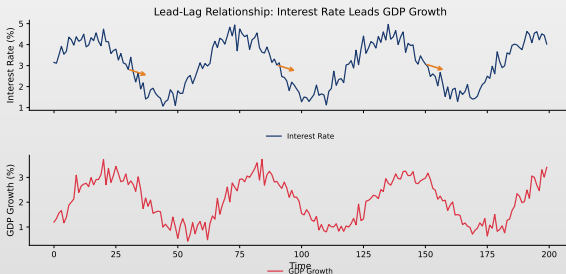
- **Legea lui Okun:** PIB $\uparrow \Rightarrow$ șomaj \downarrow
- **Regula Taylor:** Inflație $\uparrow \Rightarrow$ dobândă \uparrow
- **Curba Phillips:** Compromis șomaj-inflație



Relații de avans-întârziere

Observații

- ▣ Unele variabile **preced** altele: creșterea PIB prezice scăderea șomajului
 - ▶ Corelația încrucișată relevă **sincronizarea** relațiilor
 - ▶ Corelație maximă la lag-ul 4: PIB-ul precede șomajul cu ~ 4 trimestre



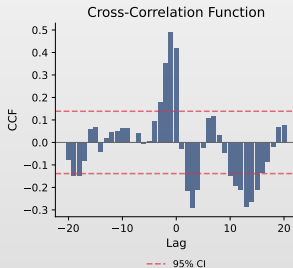
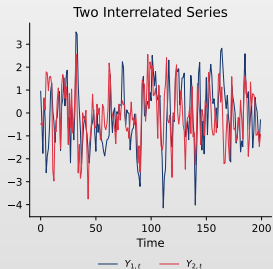
De ce modelele univariate nu sunt suficiente

Problema

ARIMA tratează fiecare variabilă **izolat**; ignoră **interacțiunile** și **efectele de feedback**

Exemple

PIB–Șomaj, Dobândă–Inflație, Acțiuni–Volum, Curs–Balanță comercială



Univariate AR(1)

$$Y_{1,t} = \phi_1 Y_{1,t-1} + \varepsilon_t$$

→ Ignores Y_2

VAR(1)

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{A}\mathbf{Y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

→ Captures all cross-dynamics

Ce vom învăța astăzi

Concepte fundamentale

1. **Modele VAR:** Cum să modelăm mai multe serii de timp împreună
2. **Cauzalitate Granger:** Ajută X la prezicerea lui Y ?
3. **Funcții de răspuns la impuls:** Cum se propagă șocurile?
4. **Descompunerea varianței:** Ce determină fiecare variabilă?

Exemplu recurent: Creșterea PIB și șomajul

- Y_{1t} : **Creșterea PIB** și Y_{2t} : **Rata șomajului** (*Legea lui Okun*)
- Întrebare centrală: Cauzează PIB-ul șomajul, sau invers, sau ambele?

Aplicații

- Politică macroeconomică
- Piețe financiare
- Ciclul de afaceri
- Managementul riscului

Notăția seriilor de timp multivariate

Vector de variabile

- $Y_t = (Y_{1t}, Y_{2t}, \dots, Y_{Kt})'$
 - ▶ Vector $K \times 1$ de serii de timp
- Exemplu cu $K = 2$:

$$Y_t = \begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Creștere PIB}_t \\ \text{Șomaj}_t \end{pmatrix}$$

Întrebări cheie

1. Ajută Y_1 la prezicerea lui Y_2 ? (Cauzalitate Granger)
2. Cum afectează șocurile în Y_1 pe Y_2 ? (Răspunsuri la impuls)
3. Ce proporție din varianța lui Y_2 se datorează lui Y_1 ? (Descompunerea varianței)

Staționaritate multivariată

Definiție: Staționaritate slabă

- O serie de timp K -dimensională Y_t este **slab staționară** dacă:
 - ▶ $\mathbb{E}[Y_t] = \mu$ (vector de medie constant)
 - ▶ $\text{Cov}(Y_t, Y_{t-h}) = \Gamma(h)$ depinde doar de h , nu de t

Matricea de autocovarianță

- **Formula:** $\Gamma(h) = \mathbb{E}[(Y_t - \mu)(Y_{t-h} - \mu)'] = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(h) & \gamma_{12}(h) \\ \gamma_{21}(h) & \gamma_{22}(h) \end{pmatrix}$
- **Proprietate:** $\Gamma(-h) = \Gamma(h)'$ (transpusa, nu egală!)

Proprietăți ale covarianței încrucișate

Funcția de covarianță încrucișată

Pentru variabilele Y_{it} și Y_{jt} : $\gamma_{ij}(h) = \text{Cov}(Y_{it}, Y_{j,t-h}) = \mathbb{E}[(Y_{it} - \mu_i)(Y_{j,t-h} - \mu_j)]$

Diferența cheie față de cazul univariat

- În general: $\gamma_{ij}(h) \neq \gamma_{ij}(-h)$
- Dar: $\gamma_{ij}(h) = \gamma_{ji}(-h)$
- Matricea de covarianță încrucișată **nu este simetrică** pentru $h \neq 0$

Exemplu

- Dacă Y_1 precede Y_2 :
 - ▶ $\gamma_{12}(h) > 0$ pentru $h > 0$
 - ▶ $\gamma_{12}(h) \approx 0$ pentru $h < 0$

Matricea funcției de corelație

Definiție

- Matricea de autocorelație la lag-ul h :

$$R(h) = D^{-1}\Gamma(h)D^{-1}$$

- $D = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_K)$ și $\sigma_i = \sqrt{\gamma_{ii}(0)}$

Pentru cazul bivariat

- Matricea: $R(h) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(h) & \rho_{12}(h) \\ \rho_{21}(h) & \rho_{22}(h) \end{pmatrix}$, unde $\rho_{ij}(h) = \frac{\gamma_{ij}(h)}{\sigma_i \sigma_j}$
- Interpretare:
 - ▶ Diagonale: ACF obișnuite
 - ▶ Extra-diagonale: corelații încrucișate

Portret de cercetător: Sims & Granger



Christopher Sims (*1942)

Premiul Nobel 2011

 [Wikipedia \(en\)](#)



Clive Granger (1934–2009)

Premiul Nobel 2003

 [Wikipedia \(en\)](#)

Biografie

- **Christopher Sims:** econometrist american la Princeton. Premiul Nobel (2011) „pentru cercetări empirice privind cauza și efectul în macroeconomie”
- **Clive Granger:** economist britanic-american la UC San Diego. Premiul Nobel (2003) „pentru metode de analiză a seriilor economice cu tendințe comune (cointegrare)”

Contribuții principale

- **Modele VAR** (Sims, 1980) — vectori autoregresivi pentru macroeconomie
- **Cauzalitatea Granger** (Granger, 1969) — concept de cauzalitate predictivă
- **Funcții impuls-răspuns** și identificarea VAR structural
- **Cointegrarea** (Granger, 1981) — relații de echilibru pe termen lung

Modelul VAR(p)

Definiție

- Un model **VAR(p)** pentru K variabile:

$$Y_t = c + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \cdots + A_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

- Y_t : vector $K \times 1$ de variabile endogene
- c : vector $K \times 1$ de constante
- A_i : matrice de coeficienți $K \times K$
- ε_t : vector $K \times 1$ de termeni de eroare cu $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$, $\mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_t'] = \Sigma$

VAR(1) cu două variabile

VAR(1) bivariat

▣ Forma matriceală:

$$\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

Ecuatie cu ecuație

- ▣ **Ecuatia 1:** $Y_{1t} = c_1 + a_{11} Y_{1,t-1} + a_{12} Y_{2,t-1} + \varepsilon_{1t}$
- ▣ **Ecuatia 2:** $Y_{2t} = c_2 + a_{21} Y_{1,t-1} + a_{22} Y_{2,t-1} + \varepsilon_{2t}$
- ▣ **Ideea cheie:** Fiecare ecuație include lag-uri ale **tuturor** variabilelor!

Exemplu numeric: VAR(1)

Model VAR(1) specific

Exemplu numeric:

$$\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

Interpretarea coeficienților

- ▣ $a_{11} = 0.7$: Creștere de 1 în Y_1 la $t-1 \Rightarrow Y_1$ la t crește cu 0.7
- ▣ $a_{12} = 0.2$: Creștere de 1 în Y_2 la $t-1 \Rightarrow Y_1$ la t crește cu 0.2
- ▣ $a_{21} = -0.1$: Creștere de 1 în Y_1 la $t-1 \Rightarrow Y_2$ la t **scade** cu 0.1
- ▣ $a_{22} = 0.6$: Creștere de 1 în Y_2 la $t-1 \Rightarrow Y_2$ la t crește cu 0.6

VAR(2): dinamică de ordin superior

Specificația VAR(2)

- Forma generală: $Y_t = c + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$
- Pentru $K = 2$, $p = 2$: fiecare ecuație are $1 + pK = 5$ parametri, total $K(1 + pK) = 10$

Dezvoltat

- Ecuațiile individuale:

$$Y_{1t} = c_1 + a_{11}^{(1)} Y_{1,t-1} + a_{12}^{(1)} Y_{2,t-1} + a_{11}^{(2)} Y_{1,t-2} + a_{12}^{(2)} Y_{2,t-2} + \varepsilon_{1t}$$

$$Y_{2t} = c_2 + a_{21}^{(1)} Y_{1,t-1} + a_{22}^{(1)} Y_{2,t-1} + a_{21}^{(2)} Y_{1,t-2} + a_{22}^{(2)} Y_{2,t-2} + \varepsilon_{2t}$$

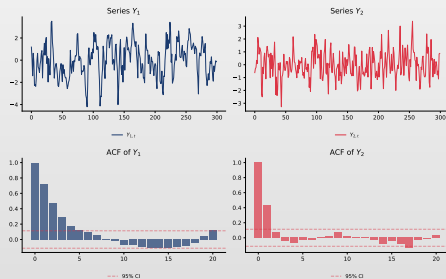
Blestemul dimensionalității

- VAR(p) cu K variabile are $K + pK^2$ parametri; cu $K = 5$, $p = 4$: $5 + 4 \times 25 = 105$ parametri!

Proces VAR simulat

Observații

- Proces VAR(1) bivariat simulat — interdependența dintre serii
- Fiecare variabilă răspunde la propriul trecut și trecutul celeilalte variabile
- Dinamica încrucișată vizibilă



Forma companion

Conversia VAR(p) la VAR(1)

Orice VAR(p) poate fi scris ca VAR(1) în **forma companion**: $\xi_t = A\xi_{t-1} + v_t$

Pentru VAR(2)

Forma: $\underbrace{\begin{pmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \end{pmatrix}}_{\xi_t} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ I_K & 0 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} Y_{t-1} \\ Y_{t-2} \end{pmatrix}}_{\xi_{t-1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_t}$ Dimensiune: A este $Kp \times Kp$

Produsul Kronecker \otimes

Dacă A este $m \times n$ și B este $p \times q$, atunci $A \otimes B$ este matricea $mp \times nq$:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

Utilizare: $\text{vec}(\Sigma_Y) = (I_{K^2} - A \otimes A)^{-1} \text{vec}(\Sigma_\varepsilon)$ — matricea de covarianță a VAR staționar.

Staționaritatea VAR

Condiția de stabilitate

- VAR(p) este **stabil** (staționar) dacă toate rădăcinile lui:

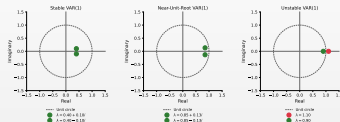
$$\det(I_K - A_1 z - A_2 z^2 - \dots - A_p z^p) = 0$$

- Se află **în afara** cercului unitate (adică $|z| > 1$)

Pentru VAR(1)

- Modelul este stabil dacă toate **valorile proprii** ale lui A_1 sunt mai mici decât 1 în valoare absolută
- Exemplu: Pentru $A_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$, valorile proprii sunt $\lambda_1 \approx 0.54$ și $\lambda_2 \approx 0.26$
 - ▶ Ambele < 1 ➤ stabil!

Condiția de stabilitate: interpretare vizuală



Pentru $A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$

Polinomul caracteristic: $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} 0.7 - \lambda & 0.2 \\ -0.1 & 0.6 - \lambda \end{pmatrix} = (0.7 - \lambda)(0.6 - \lambda) + 0.02 = 0 \implies \lambda^2 - 1.3\lambda + 0.44 = 0$$

Soluție

$$\lambda = \frac{1.3 \pm \sqrt{1.69 - 1.76}}{2} = 0.65 \pm 0.132i, \quad |\lambda| = \sqrt{0.65^2 + 0.132^2} = \sqrt{0.44} = 0.663 < 1 \quad \checkmark \text{ Stabil!}$$

Media unui VAR staționar

Media necondiționată

- ▣ Pentru un VAR(1) staționar: $Y_t = c + AY_{t-1} + \varepsilon_t$
- ▣ Luând medii: $\mathbb{E}[Y_t] = c + A\mathbb{E}[Y_{t-1}]$
- ▣ Deoarece $\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[Y_{t-1}] = \mu$ (staționaritate):

$$\mu = c + A\mu \quad \Rightarrow \quad \mu = (I_K - A)^{-1}c$$

Exemplu

Dacă $c = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$:

$$\mu = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.2 \\ 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix} = \frac{1}{0.14} \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ -0.1 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.86 \\ 0.29 \end{pmatrix}$$

Structura covarianței pentru VAR(1)

Matricea varianță-covarianță $\Gamma(0)$

Pentru VAR(1), varianța satisface **ecuația discretă Lyapunov**: $\Gamma(0) = A\Gamma(0)A' + \Sigma$

Autocovarianța la lag-ul h

Formula: $\Gamma(h) = A^h\Gamma(0)$, $h \geq 0$. Autocovarianțele scad geometric cu valorile proprii ale lui A .

Rezolvarea ecuației Lyapunov

Se rezolvă prin vectorizare: $\text{vec}(\Gamma(0)) = (I_{K^2} - A \otimes A)^{-1}\text{vec}(\Sigma)$, unde \otimes denotă produsul Kronecker.

Estimarea VAR

Estimarea OLS

- Fiecare ecuație poate fi estimată prin **OLS separat**:

$$\hat{A} = \left(\sum_{t=1}^T Y_{t-1} Y'_{t-1} \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^T Y_{t-1} Y'_t \right)$$

- Eficientă deoarece toate ecuațiile au **aceiași regresori**

Matricea de covarianță

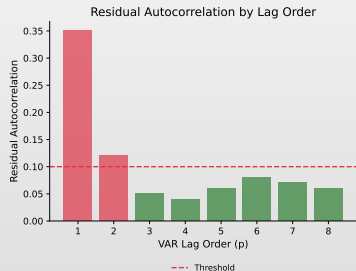
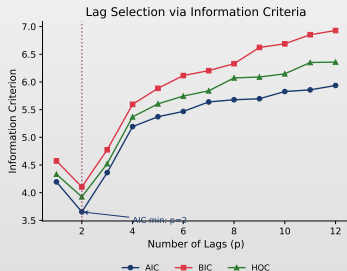
Estimatorul: $\hat{\Sigma} = \frac{1}{T-Kp-1} \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}'_t$

Erorile ε_{1t} și ε_{2t} pot fi **corelate contemporan**.

Selecția lag-ului: exemplu

Observații

- Date reale SUA (FRED): PIB și Șomaj, $T = 140$ trimestre
- Criterii informaționale: AIC și BIC pentru lag $p = 1, \dots, 10$ (pot sugera ordine diferite)
- Interpretare: valori mici = ajustare mai bună; ambele selectează $p = 2$



Selecția ordinului lag-ului

Criterii informaționale

Alegem p care minimizează:

$$\text{AIC}(p) = \ln |\hat{\Sigma}_p| + \frac{2pK^2}{T}$$

$$\text{BIC}(p) = \ln |\hat{\Sigma}_p| + \frac{pK^2 \ln T}{T}$$

$$\text{HQ}(p) = \ln |\hat{\Sigma}_p| + \frac{2pK^2 \ln \ln T}{T}$$

unde: $\hat{\Sigma}_p$ = matricea de covarianță a reziduurilor, K = nr. variabile, p = nr. lag-uri, T = dimensiunea eșantionului

Îndrumări

- Comportamentul criteriilor:
 - ▶ AIC tinde să selecteze modele **mai mari** (mai bune pentru prognoză)
 - ▶ BIC tinde să selecteze modele **mai mici** (selecție consistentă)
- Începeți cu p_{\max} bazat pe frecvența datelor (ex. 4 pentru trimestrial, 12 pentru lunar)

Modele VAR restricționate

De ce restricționăm?

- ▣ Modelele VAR complete pot fi **supraparametrizate**:
 - ▶ Mulți coeficienți pot fi ne semnificativi
 - ▶ Prognoze slabe
 - ▶ Pierdere de grade de libertate

Restricții comune

- ▣ **Restricții de zero**: Setăm coeficienți mici la zero
- ▣ **Exogenitate de bloc**: Unele variabile nu afectează altele
- ▣ **Excluderea lag-urilor**: Excludem anumite lag-uri

Testarea restricțiilor

- ▣ Folosim testul raportului de verosimilitate:
- ▣ $LR = T(\ln |\hat{\Sigma}_R| - \ln |\hat{\Sigma}_U|) \sim \chi_r^2$, unde r = numărul de restricții

Ce este cauzalitatea Granger?

Clive Granger (1969, premiul Nobel 2003)

- “X **cauzează Granger** pe Y” dacă valorile trecute ale lui X ajută la prezicerea lui Y, **dincolo de** ce pot prezice valorile trecute ale lui Y singure

Distincție importantă: Cauzalitate Granger \neq cauzalitate reală

- Cauzalitatea Granger este despre **conținut predictiv**
- NU implică cauzare economică/structurală
- “X cauzează Granger pe Y” înseamnă: X conține informații utile pentru prognoza lui Y

Definiție formală

Cauzalitate Granger

- X **nu cauzează Granger** pe Y dacă:

$$\mathbb{E}[Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots] = \mathbb{E}[Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots]$$

- Adăugarea istoricului lui X nu îmbunătățește predicția lui Y

În contextul VAR

- VAR(1): $Y_{1t} = c_1 + a_{11}Y_{1,t-1} + a_{12}Y_{2,t-1} + \varepsilon_{1t}$
 - Y_2 **nu cauzează Granger** pe Y_1 dacă $a_{12} = 0$
- VAR(p): nu cauzează dacă $a_{12}^{(1)} = a_{12}^{(2)} = \dots = a_{12}^{(p)} = 0$

Testarea cauzalității Granger

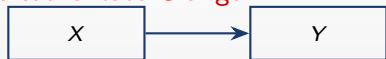
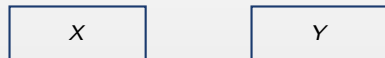
Ipotezele testului

- H_0 : Y_2 **nu** cauzează Granger pe Y_1
 - ▶ $a_{12}^{(1)} = a_{12}^{(2)} = \dots = a_{12}^{(p)} = 0$
- H_1 : Cel puțin un $a_{12}^{(i)} \neq 0$
 - ▶ Există cauzalitate Granger

Statistica testului: Testul Wald

- **Formula:** $F = \frac{(RSS_R - RSS_U)/p}{RSS_U/(T - 2p - 1)} \sim F_{p, T - 2p - 1}$
- RSS_R : Reziduuri model restricționat (fără lag-urile lui Y_2)
- RSS_U : Reziduuri model nerestricționat (VAR complet)

Tipuri de cauzalitate Granger

Unidirecțională: $X \succ Y$ Unidirecțională: $Y \succ X$ Bidirecțională: $X \succ Y$ 

Fără cauzalitate

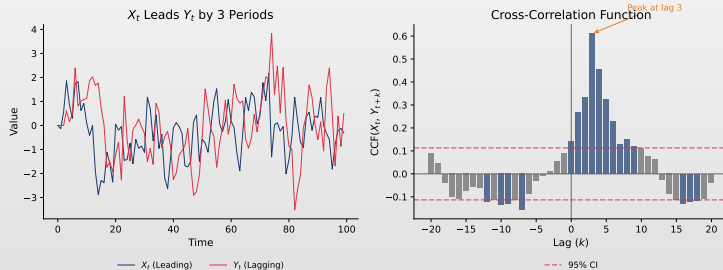
Exemple economice

- ▣ Masa monetară \succ Producție? (viziunea monetaristă)
- ▣ Prețurile acțiunilor \succ Volumul tranzacționat (bidirecțională)
- ▣ Vremea \succ Recolta (unidirecțională, evident)

Corelație încrucișată: ilustrare vizuală

Interpretare

- Stânga: două serii înrudite; Dreapta: CCF relevă că X precede Y (corelații semnificative la lag-uri pozitive)



Funcția de corelație încrucișată

Definiție 1 (Funcția de corelație încrucișată)

- Corelația încrucișată între X_t și Y_t la lag-ul k :

$$\rho_{XY}(k) = \frac{\gamma_{XY}(k)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\text{Cov}(X_t, Y_{t+k})}{\sqrt{\text{Var}(X_t)\text{Var}(Y_t)}}$$

Interpretare

- $\rho_{XY}(k) > 0$ la $k > 0$: X este corelat pozitiv cu Y viitor (X poate precede Y)
- $\rho_{XY}(k) > 0$ la $k < 0$: X este corelat pozitiv cu Y trecut (Y poate precede X)

Notă

- Spre deosebire de ACF, corelația încrucișată **nu este simetrică**: $\rho_{XY}(k) \neq \rho_{XY}(-k)$ în general

Cauzalitate Granger: considerații practice

Capcane comune

1. **Variabile omise:** O a treia variabilă Z poate cauza atât X cât și Y
2. **Nestaționaritate:** Testul necesită date staționare (sau cointegrare)
3. **Selecția lag-ului:** Rezultatele pot fi sensibile la p
4. **Mărimea eșantionului:** Necesită suficiente observații

Bune practici

- ☐ Pregătirea datelor: testați pentru rădăcini unitare; folosiți criterii multiple pentru selecția lag-ului
- ☐ Robustețe: verificați la diferite ordine ale lag-ului; raportați rezultatele pentru ambele direcții

Test cauzalitate Granger: exemplu numeric

Testare: Cauzează creșterea masei monetare Granger producția?

- Model nerestricționat (VAR cu 2 lag-uri):

$$\Delta Y_t = c + \alpha_1 \Delta Y_{t-1} + \alpha_2 \Delta Y_{t-2} + \beta_1 \Delta M_{t-1} + \beta_2 \Delta M_{t-2} + \varepsilon_t$$

- Model restricționat ($H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$):

$$\Delta Y_t = c + \alpha_1 \Delta Y_{t-1} + \alpha_2 \Delta Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

Calculul testului

$T = 100$, $RSS_U = 45.2$, $RSS_R = 52.8$:

$$F = \frac{(52.8 - 45.2)/2}{45.2/(100 - 5)} = \frac{3.8}{0.476} = 7.98$$

$F_{0.05}(2, 95) = 3.09 > \text{Respingem } H_0$: Bani cauzează Granger producția!

Procedura Toda-Yamamoto

Problema cu datele nestăționare

- ▣ Testul Granger standard are **distribuții non-standard** când:
 - ▶ Variabilele au rădăcini unitare
 - ▶ Variabilele sunt cointegrate

Soluția Toda-Yamamoto (1995)

1. Determinăm ordinul maxim de integrare d_{max}
2. Estimăm $VAR(p + d_{max})$ în **niveluri**
3. Testăm restricții doar pe primele p lag-uri
4. Lag-urile suplimentare d_{max} **nu sunt** testate (doar pentru distribuția corectă)

Avantaj

- ▣ Testul Wald are distribuție asimptotică χ^2 indiferent de cointegrare!

Cauzalitate instantanee

Definiție

- ▣ X **cauzează instantaneu** pe Y dacă:
 - ▶ $\mathbb{E}[Y_t | \Omega_{t-1}, X_t] \neq \mathbb{E}[Y_t | \Omega_{t-1}]$
 - ▶ Ω_{t-1} : toate informațiile trecute

Testarea în VAR

Testăm $\sigma_{12} \neq 0$ în $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$. $\sigma_{12} = 0 \rightarrow$ fără cauzalitate instantanee.

Interpretare

Cauze posibile: șocuri comune sau agregarea datelor — nu neapărat efecte contemporane reale.

Cauzalitate Granger în sisteme multiple

Testul exogenității de bloc

- Într-un VAR cu $K > 2$ variabile, testăm dacă un **grup** de variabile cauzează Granger un alt grup
- Exemplu: Cauzează variabilele financiare (rate ale dobânzii, prețuri acțiuni) Granger variabilele reale (PIB, șomaj)?

Statistica testului

$\chi^2 = T \left(\ln |\hat{\Sigma}_R| - \ln |\hat{\Sigma}_U| \right) \sim \chi^2_{K_1 \cdot K_2 \cdot p}$, unde K_1 = variabile “cauzate”, K_2 = variabile “cauzatoare”.

Ce sunt funcțiile de răspuns la impuls?

Definiție

▣ Funcție de Răspuns la Impuls (IRF)

- ▶ Efectul unui șoc punctual la o variabilă
- ▶ Asupra valorilor curente și viitoare ale tuturor variabilelor

Întrebarea la care răspund IRF-urile

- ▣ “Dacă apare un șoc de 1 unitate la Y_1 astăzi, ce se întâmplă cu Y_1 și Y_2 în următoarele h perioade?”

Reprezentarea $MA(\infty)$

Un VAR(p) stabil: $Y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i \varepsilon_{t-i}$, unde $\Phi_i =$ **răspunsurile la impuls** la orizontul i .

Calculul IRF pentru VAR(1)

Pentru VAR(1): $Y_t = c + AY_{t-1} + \varepsilon_t$

▣ Matricele de răspuns la impuls sunt:

$$\Phi_0 = I_K, \quad \Phi_1 = A, \quad \Phi_2 = A^2, \quad \dots, \quad \Phi_h = A^h$$

Interpretare

- ▣ $[\Phi_h]_{ij}$: Efectul asupra lui Y_i la $t + h$
 - ▶ Al unui șoc unitar la Y_j la momentul t
- ▣ VAR stabil: $\Phi_h \rightarrow 0$ când $h \rightarrow \infty$
 - ▶ Șocurile dispar în timp

Calculul IRF pentru VAR(p) general

Formula recursivă pentru VAR(p)

- Pentru $Y_t = c + A_1 Y_{t-1} + \dots + A_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$:

$$\Phi_h = \sum_{j=1}^{\min(h,p)} A_j \Phi_{h-j}, \quad h = 1, 2, 3, \dots$$

- Cu $\Phi_0 = I_K$ și $\Phi_h = 0$ pentru $h < 0$

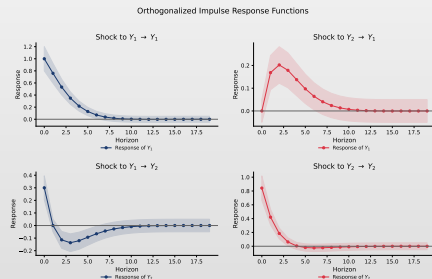
Exemplu: IRF pentru VAR(2)

- $\Phi_0 = I_K$
- $\Phi_1 = A_1 \Phi_0 = A_1$
- $\Phi_2 = A_1 \Phi_1 + A_2 \Phi_0 = A_1^2 + A_2$
- $\Phi_3 = A_1 \Phi_2 + A_2 \Phi_1 = A_1(A_1^2 + A_2) + A_2 A_1$

Funcții de răspuns la impuls: exemplu

Observații

- ▣ Răspunsul fiecărei variabile la un șoc unitar
- ▣ Zonele umbrite = intervale de încredere
- ▣ VAR stabil: răspunsurile converg la zero



IRF ortogonalizate

Problema: Erori corelate

- Σ nu este diagonală
 - ▶ Șocurile ε_{1t} și ε_{2t} sunt corelate
 - ▶ Un șoc la “ Y_1 ” implică și un șoc la “ Y_2 ”

Soluție: Descompunerea Cholesky

- Factorizare: $\Sigma = PP'$ (P: inferior triunghiulară)
- Șocuri ortogonalizate: $u_t = P^{-1}\varepsilon_t$ cu $\mathbb{E}[u_t u_t'] = I$
- IRF ortogonalizate: $\Theta_h = \Phi_h P$

Ordinea contează!

- De la “cea mai exogenă” la “cea mai endogenă”
 - ▶ Rezultatele depind de ordinea variabilelor

Descompunerea Cholesky: Cum funcționează

Exemplu numeric

Fie matricea de covarianță a reziduurilor VAR: $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Factorul Cholesky P (inferior triunghiular) cu $\Sigma = PP'$:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow PP' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \Sigma \checkmark$$

Interpretare: Ce implică ordinea

- $P_{21} = 1 \neq 0$: Un șoc unitar la Y_1 are **efect imediat asupra** Y_2 (impact = 1)
- $P_{12} = 0$: Un șoc la Y_2 **nu afectează contemporan** pe Y_1
- Y_1 este “mai exogenă” — afectează Y_2 instantaneu, dar nu și invers

Inversarea ordinii (Y_2 primul)

Schimbarea ordinii variabilelor dă un P diferit și IRF-uri diferite. De aceea **teoria economică** trebuie să ghideze ordinea — ex., PIB înainte de șomaj (legea lui Okun: șocurile de producție afectează piața muncii, nu invers pe termen scurt).

Exemplu numeric IRF

Pentru $A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$

Calculul matricelor IRF:

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_1 = A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 = A^2 = \begin{pmatrix} 0.47 & 0.26 \\ -0.13 & 0.34 \end{pmatrix}$$

Interpretare

- ▣ $[\Phi_2]_{12} = 0.26$: Un șoc unitar la Y_2 crește Y_1 cu 0.26 după 2 perioade
- ▣ $[\Phi_2]_{21} = -0.13$: Un șoc unitar la Y_1 scade Y_2 cu 0.13 după 2 perioade

Răspunsuri la impuls cumulative

Definiție

- ▣ **IRF cumulativ** până la orizontul H : $\Psi_H = \sum_{h=0}^H \Phi_h$
- ▣ Măsoară **efectul total acumulat** al unui șoc

Multiplicatorul pe termen lung

- ▣ Pentru VAR stabil: $\Psi_\infty = (I_K - A_1 - A_2 - \dots - A_p)^{-1}$
- ▣ Aceasta dă **efectul permanent** al unui șoc punctual

Când să folosim

- ▣ IRF cumulative sunt utile când ne interesează impactul total (ex. pierderea cumulată de PIB după un șoc)

Intervale de încredere pentru IRF

Surse de incertitudine

- IRF sunt funcții de parametri estimați $\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_p$, deci au **incertitudine de eșantionare**

Metode pentru benzi de încredere

1. **Asimptotice:** Folosim metoda delta pentru a deriva erorile standard
2. **Monte Carlo:** Simulăm din distribuția asimptotică a lui \hat{A}
3. **Bootstrap:** Reeșantionăm reziduurile și reestimăm VAR

Procedura Bootstrap

1. Estimăm VAR, salvăm reziduurile $\{\hat{\varepsilon}_t\}$
2. Extragem cu înlocuire pentru a crea $\{\hat{\varepsilon}_t^*\}$
3. Generăm eșantion bootstrap folosind VAR estimat
4. Reestimăm și calculăm IRF
5. Repetăm de B ori; folosim percentilele pentru IC

VAR structural (SVAR)

Motivație

- Șocurile VAR standard ε_t sunt inovații de **formă redusă** \succ combinații liniare de șocuri structurale
- Vrem să identificăm **șocuri structurale** semnificative economic

Forma structurală

- Modelul structural:

$$B_0 Y_t = \Gamma_0 + B_1 Y_{t-1} + \cdots + B_p Y_{t-p} + u_t$$

- u_t sunt **șocuri structurale** cu $\mathbb{E}[u_t u_t'] = I_K$

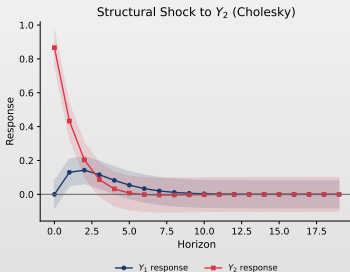
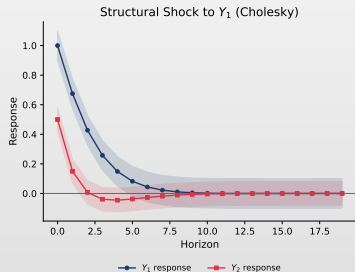
Relația cu forma redusă

- $\varepsilon_t = B_0^{-1} u_t \quad \succ \quad \Sigma = B_0^{-1} (B_0^{-1})'$

Exemplu IRF structural

Observații

- IRF structurale (Cholesky) — ordinea variabilelor afectează interpretarea
- Restricții contemporane: prima variabilă reacționează doar la propriile șocuri



Identificare în SVAR

Problema identificării

- ▣ Σ are $K(K + 1)/2$ elemente unice, dar B_0^{-1} are K^2 elemente
- ▣ Avem nevoie de $K(K - 1)/2$ restricții suplimentare!

Scheme comune de identificare

1. **Restricții pe termen scurt:** Efecte de impact zero (Cholesky)
2. **Restricții pe termen lung:** Efecte zero pe termen lung (Blanchard-Quah)
3. **Restricții de semn:** Constrângeri de inegalitate pe IRF
4. **Instrumente externe:** Folosim informații din afară

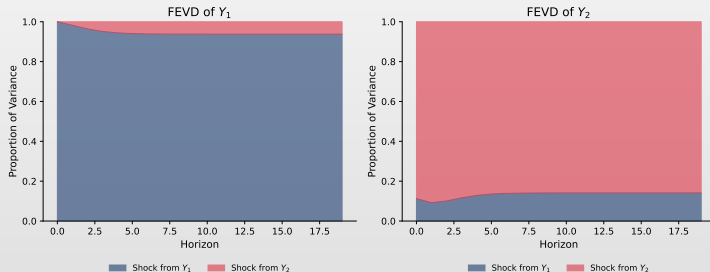
Exemplu: Ordonare Cholesky (recursivă)

- ▣ Pentru $K = 2$: $B_0^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$
- ▣ Variabila 1 nu răspunde la șocul 2 contemporan

FEVD: Exemplu

Observații

- Proporția varianței prognozei atribuibilă fiecărui șoc structural
- Dinamica temporală: orizonturi scurte — șocuri proprii domină; efectele încrucișate cresc în timp



Descompunerea varianței

Întrebare

- Ce proporție din varianța erorii de prognoză a lui Y_i la orizontul h se datorează șocurilor la Y_j ?

Formula FEVD

$$\text{FEVD}_{ij}(h) = \frac{\sum_{s=0}^{h-1} [\Theta_s]_{ij}^2}{\sum_{s=0}^{h-1} \sum_{k=1}^K [\Theta_s]_{ik}^2}$$

- Dă **procentul** din varianța prognozei la h pași a lui Y_i explicat de șocurile la Y_j

Proprietăți

- $0 \leq \text{FEVD}_{ij}(h) \leq 1$
- $\sum_{j=1}^K \text{FEVD}_{ij}(h) = 1$ (suma la 100%)
- La $h = 1$: Șocurile proprii domină (prin construcția Cholesky)

FEVD: Exemplu numeric

Calculul FEVD pentru VAR bivariat

☐ Folosind IRF ortogonalizate Θ_h , FEVD la orizontul H :

$$\text{FEVD}_{11}(H) = \frac{\sum_{h=0}^{H-1} \theta_{11}^2(h)}{\sum_{h=0}^{H-1} [\theta_{11}^2(h) + \theta_{12}^2(h)]}$$

Exemplu de calcul

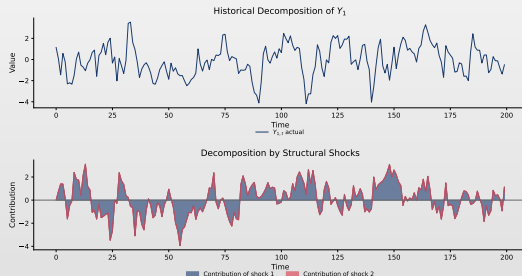
h	$\theta_{11}(h)$	$\theta_{12}(h)$	$\theta_{11}^2(h)$	$\theta_{12}^2(h)$
0	1.00	0.00	1.00	0.00
1	0.70	0.20	0.49	0.04
2	0.47	0.26	0.22	0.07

☐ $\text{FEVD}_{11}(3) = \frac{1.00+0.49+0.22}{1.00+0.49+0.22+0.00+0.04+0.07} = \frac{1.71}{1.82} = 94\%$

Descompunerea istorică: Exemplu

Observații

- Contribuții structurale: fiecare culoare = un șoc diferit, stivuite însumează abaterea de la medie
- Utilitate: identifică șocurile din episoadele istorice



Descompunerea istorică

Definiție

- ▣ **Descompunerea istorică** descompune fiecare valoare observată în contribuții de la fiecare șoc structural:

$$Y_{it} - \bar{Y}_i = \sum_{j=1}^K \sum_{s=0}^{t-1} \theta_{ij}(s) \cdot u_{j,t-s}$$

Aplicație

- ▣ “Cât din scăderea PIB din 2008 s-a datorat șocurilor financiare vs. șocurilor petroliere?”
 - ▶ Atribuire mișcările istorice unor șocuri identificate specifice
 - ▶ Util pentru analiza politicilor și interpretarea narativă

Diagnosticarea reziduurilor

Ce trebuie verificat

- După estimarea VAR, verificăm că reziduurile \hat{e}_t se comportă ca zgomot alb:
 - ▶ Fără corelație serială
 - ▶ varianță constantă (homoscedasticitate)
 - ▶ Normalitate (pentru inferență)

De ce contează

- Reziduuri autocorelate \succ estimări inefficiente
- Heteroscedasticitate \succ erori standard invalide
- Non-normalitate \succ inferența poate fi nesigură

Testarea corelației seriale

Testul Portmanteau (Ljung-Box)

Statistica de test: $Q_h = T(T+2) \sum_{j=1}^h \frac{1}{T-j} \text{tr}(\hat{C}_j' \hat{C}_0^{-1} \hat{C}_j \hat{C}_0^{-1})$

$\hat{C}_j = \frac{1}{T} \sum_{t=j+1}^T \hat{\epsilon}_t \hat{\epsilon}_{t-j}'$. Sub H_0 : $Q_h \sim \chi_{K^2(h-p)}^2$

Testul LM Breusch-Godfrey

Regresăm $\hat{\epsilon}_t$ pe $\hat{\epsilon}_{t-1}, \dots, \hat{\epsilon}_{t-h}$ și regresorii originali. $LM = T \cdot R^2 \sim \chi_{K^2 h}^2$ sub H_0 .

Dacă este respins

Creșterea ordinului lag-ului p sau adăugarea de variabile suplimentare.

Testarea heteroscedasticității

Testul ARCH-LM

- ▣ Testează pentru heteroscedasticitate condiționată autoregresivă:

$$\hat{\varepsilon}_{it}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}_{i,t-1}^2 + \cdots + \alpha_q \hat{\varepsilon}_{i,t-q}^2 + v_t$$

- ▣ $H_0: \alpha_1 = \cdots = \alpha_q = 0$ (homoscedasticitate)
- ▣ $LM = TR^2 \sim \chi_q^2$

Versiunea multivariată

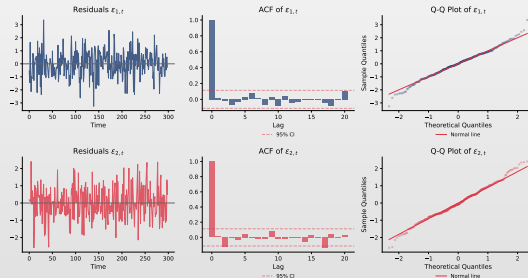
- ▣ Testăm toate ecuațiile împreună folosind:

$$\text{vech}(\hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t') = c + \sum_{j=1}^q B_j \text{vech}(\hat{\varepsilon}_{t-j} \hat{\varepsilon}_{t-j}') + v_t$$

Grafic rezumat diagnostic

Observații

- ACF reziduurilor: fără autocorelație semnificativă
- Distribuția reziduurilor: histograma \approx normală, Q-Q: linia de 45°



Testarea normalității

Testul Jarque-Bera (univariat)

- Statistica de test: $JB = \frac{T}{6} \left(S^2 + \frac{(\kappa-3)^2}{4} \right) \sim \chi^2_2$, unde S = asimetrie, κ = curtoză

Normalitate multivariată (doornik-Hansen)

- Transformăm reziduurile și testăm asimetria și curtoza comune:

$$DH = s_1'(\Omega^{-1/2})'(\Omega^{-1/2})s_1 + s_2'(\Omega^{-1/2})'(\Omega^{-1/2})s_2 \sim \chi^2_{2K}$$

Notă

- Normalitatea este adesea respinsă în datele financiare
- Luați în considerare erori standard robuste dacă non-normalitatea este severă

Proгноze punctuale din VAR

Proгноză iterativă

- ▣ Pentru VAR(1): $Y_t = c + AY_{t-1} + \varepsilon_t$
- ▣ **Proгноză la 1 pas:** $\hat{Y}_{T+1|T} = c + AY_T$
- ▣ **Proгноză la 2 pași:** $\hat{Y}_{T+2|T} = c + A\hat{Y}_{T+1|T}$
- ▣ **Proгноză la h pași:** $\hat{Y}_{T+h|T} = c + A\hat{Y}_{T+h-1|T}$

Formula directă

- ▣ $\hat{Y}_{T+h|T} = (I + A + A^2 + \dots + A^{h-1})c + A^h Y_T$
- ▣ Pentru VAR stabil: converge la $\mu = (I - A)^{-1}c$ când $h \rightarrow \infty$

Eroarea de prognoză și MSE

Eroarea de prognoză la h pași

$$\mathbf{e}_{T+h|T} = \mathbf{Y}_{T+h} - \hat{\mathbf{Y}}_{T+h|T} = \sum_{j=0}^{h-1} \mathbf{A}^j \boldsymbol{\varepsilon}_{T+h-j}$$

Matricea erorii medii pătratice

$$\text{MSE}(\hat{\mathbf{Y}}_{T+h|T}) = \mathbb{E}[\mathbf{e}_{T+h|T} \mathbf{e}_{T+h|T}'] = \sum_{j=0}^{h-1} \mathbf{A}^j \boldsymbol{\Sigma} (\mathbf{A}^j)'$$

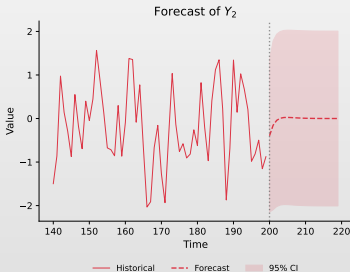
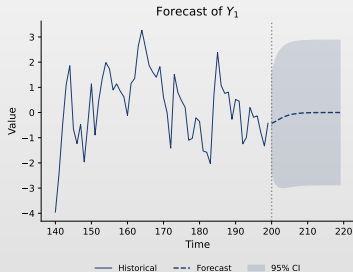
Ideea cheie

- MSE crește cu orizontul h
- Pentru VAR stabil: MSE converge la varianța necondiționată $\boldsymbol{\Gamma}(0)$
- Prognoze pe termen lung \rightarrow media necondiționată cu incertitudine $= \boldsymbol{\Gamma}(0)$

Proгноze VAR: Exemplu

Observații

- Proгноze punctuale: linie continuă dincolo de date, converg la media necondiționată
- Intervale de încredere: se lărgesc cu orizontul de prognoză



Intervale de încredere pentru prognoză

Construirea intervalelor

- Pentru erori distribuite normal, IC $(1 - \alpha)$: $\hat{Y}_{i,T+h|T} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{[\text{MSE}(\hat{Y}_{T+h|T})]_{ii}}$

Regiuni de încredere comune

- Pentru mai multe variabile, folosim elipsoizi:

$$(Y_{T+h} - \hat{Y}_{T+h|T})' [\text{MSE}(\hat{Y}_{T+h|T})]^{-1} (Y_{T+h} - \hat{Y}_{T+h|T}) \leq \chi_{K,\alpha}^2$$

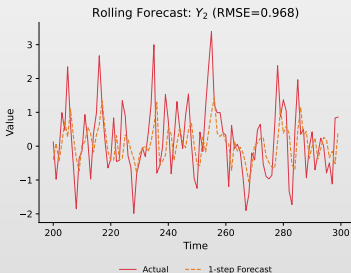
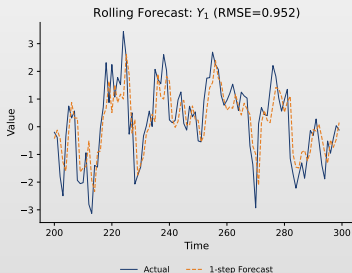
Notă

- Acestea presupun parametri cunoscuți
- Metodele bootstrap țin cont de incertitudinea parametrilor

Evaluare out-of-sample: VAR vs. AR

Metodologie generală

- Train / Test Split: împărțim datele antrenare + test; estimăm pe train, evaluăm pe test
- De ce VAR vs. AR? AR ignoră celelalte variabile; VAR exploatează interdependențele
- Metrică: $RMSE = \sqrt{\frac{1}{h} \sum e_i^2}$



Evaluarea prognozei

Evaluare out-of-sample

Împărțim datele: eșantion de estimare (1 la T_1) și eșantion de testare ($T_1 + 1$ la T). Erorile de prognoză:

$$e_{t+h} = Y_{t+h} - \hat{Y}_{t+h|t}$$

Metrice comune

$$\text{RMSE: } \sqrt{\frac{1}{n} \sum e_{t+h}^2} \quad \text{MAE: } \frac{1}{n} \sum |e_{t+h}| \quad \text{MAPE: } \frac{100}{n} \sum \left| \frac{e_{t+h}}{Y_{t+h}} \right|$$

Testul Diebold-Mariano

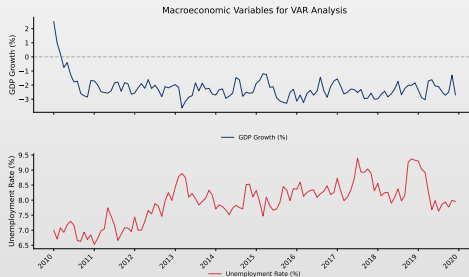
Testează dacă prognozele VAR sunt semnificativ mai bune decât alternativa: $DM = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\hat{\sigma}_d^2/n}} \sim N(0, 1)$ unde

$$d_t = L(e_{1t}) - L(e_{2t})$$

PIB și șomaj: Date trimestriale

Observații

- Creșterea PIB și rata șomajului: Legea lui Okun, tipare ciclice comune
- Sistem bivariat ideal pentru analiză VAR + cauzalitate Granger



Exemplu: PIB și șomaj

Legea lui Okun

- Există o relație negativă între creșterea PIB și șomaj:

$$\Delta U_t \approx -\beta(\Delta Y_t - \bar{g})$$

- \bar{g} = creșterea tendențială a PIB, $\beta \approx 0.4$

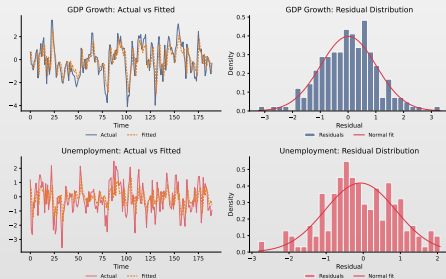
Întrebări pentru analiza VAR

1. Cauzează creșterea PIB Granger modificările șomajului?
2. Cauzează șomajul Granger creșterea PIB?
3. Cum se propagă șocurile între variabile?

Rezultate VAR estimate

Observații

- Coeficienți estimați cu erori standard și statistici t
- Selecția modelului: criterii informaționale (AIC, BIC) și diagnostic reziduuri



Fluxul de lucru VAR

Etapele analizei VAR

1. **Pregătirea datelor:** Verificăm staționaritatea (teste de rădăcină unitară); transformăm dacă este necesar (diferențe, logaritmi)
2. **Selectia lag-ului:** Folosim criteriile AIC, BIC, HQ; verificăm autocorelația reziduurilor
3. **Estimare:** OLS ecuație cu ecuație; verificăm stabilitatea (valori proprii)
4. **Analiză:** Teste de cauzalitate Granger; funcții de răspuns la impuls; descompunerea varianței
5. **Prognoză:** Prognoze punctuale și intervale de încredere

Rezultate cauzalitate Granger

Rezultatele testului: PIB și șomaj

Ipoteza nulă	Statistica F	df	p-valoare	Decizie
PIB \nrightarrow Șomaj	8.42	(2, 95)	0.0004	Respingem
Șomaj \nrightarrow PIB	2.15	(2, 95)	0.1220	Nu respingem

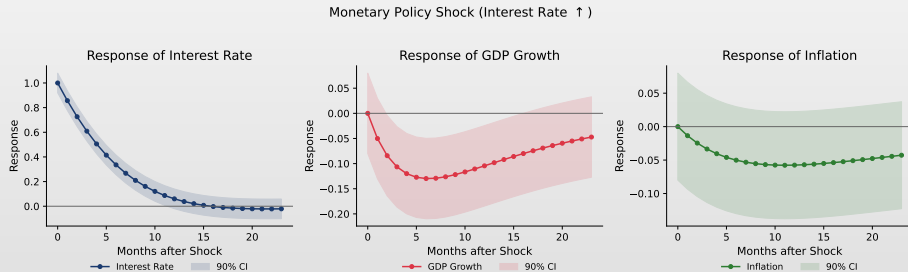
Interpretare

- ▣ Creșterea PIB cauzează Granger șomajul (în acord cu Legea lui Okun)
- ▣ Șomajul nu cauzează semnificativ Granger PIB (în acest eșantion)
- ▣ Pe date reale, cauzalitatea poate fi **bidirecțională** (a se vedea studiul de caz)

VAR politică monetară: IRF

Observații

- Șoc monetar contracționist: creșterea ratei dobânzii
- Răspunsul variabilelor: producția — efect maxim la 4–6 trim.; inflația — răspuns mai lent



Exemplu: Analiza politicii monetare

VAR cu trei variabile

- ▣ Studiem mecanismul de transmisie monetară cu:
 - ▶ Y_1 : Gap-ul de producție (devierea PIB de la trend)
 - ▶ Y_2 : Rata inflației
 - ▶ Y_3 : Rata dobânzii (instrument de politică)

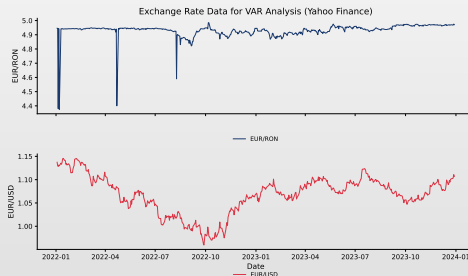
Întrebări cheie

1. Cum afectează un șoc al ratei dobânzii producția și inflația?
2. Cât timp trece până se simte efectul maxim?
3. Ce fracțiune din varianța producției se datorează șocurilor monetare?

Studiu de caz: Relația dintre PIB și șomaj

Date

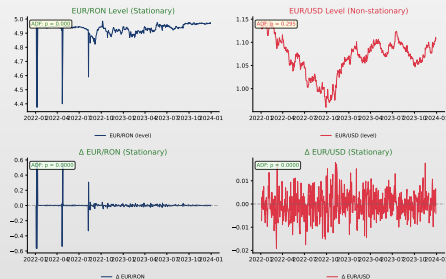
- Date reale SUA (FRED, 1990–2024): Creștere PIB și Rata Șomajului ($T = 140$ trimestre)
- Corelație negativă vizibilă între serii (Legea lui Okun); dinamică bidirecțională



Pasul 1: Analiză preliminară

Rezultate

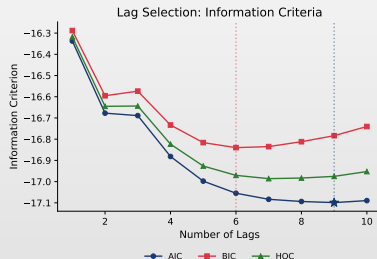
- PIB: ACF scade rapid \succ staționar; Șomaj: ACF persistent (ADF: $p = 0.02$)
- Corelație negativă PIB-Șomaj ($\rho = -0.17$); cross-corelație sugerează relații bidirecționale



Pasul 2: Selecția ordinului VAR

Rezultate

- Criteriile AIC și BIC sugerează VAR(2); compromis între complexitate și ajustare



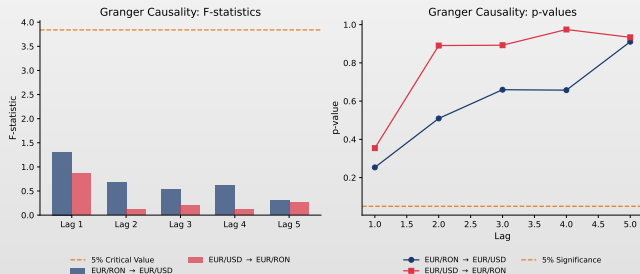
Optimal Lag Summary

Criterion	Optimal Lag
AIC	p = 9
BIC	p = 6
HQC	p = 7
FPE	p = 9

Pasul 3: Testul Granger de cauzalitate

Rezultate

- PIB \rightarrow Șomaj: $F = 17.35$, $p < 0.001$ \rightarrow PIB "cauzează Granger" Șomajul
- Șomaj \rightarrow PIB: $F = 38.93$, $p < 0.001$ \rightarrow cauzalitate bidirecțională (Legea lui Okun)

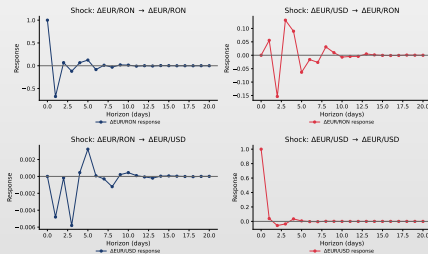


Pasul 4: Funcții de răspuns la impuls (IRF)

Rezultate IRF

- Șoc PIB \rightarrow efect negativ persistent asupra șomajului (Legea lui Okun, >20 trim.)
- Șoc Șomaj \rightarrow efect pozitiv de scurtă durată asupra PIB (recuperare, 2–3 trim.)

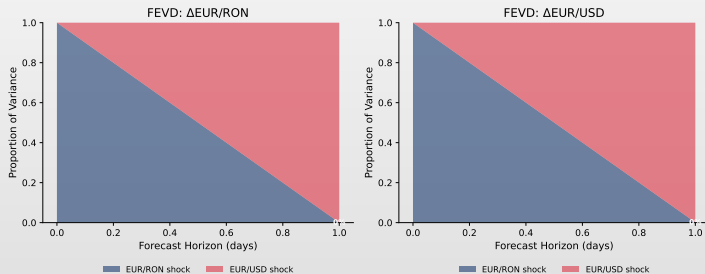
Impulse Response Functions (Real VAR)



Pasul 5: Descompunerea varianței (FEVD)

Rezultate FEVD

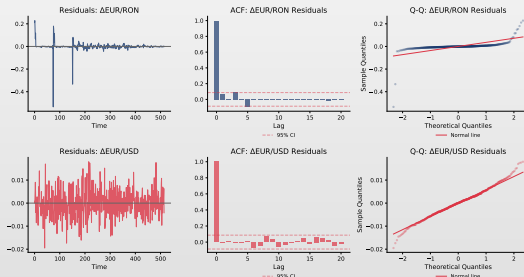
- PIB: ~65% din varianță explicată de propriile șocuri, ~35% de șocurile Șomaj
- Șomaj: dominat de șocurile PIB (~65% la $h = 1$, crescând la ~92% la $h = 20$)



Pasul 6: Diagnosticarea reziduurilor

Diagnostic

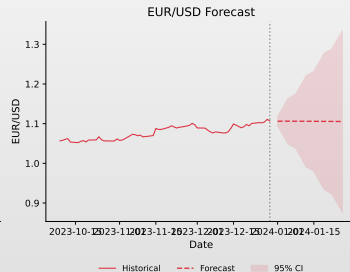
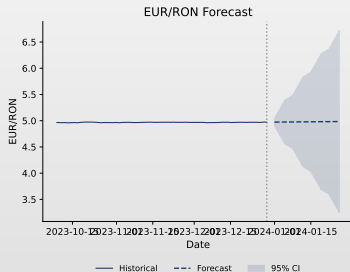
- Reziduurile nu prezintă autocorelație semnificativă (ACF în limite)
- Non-normalitate semnificativă (JB respins) > datorită valorilor extreme COVID-19



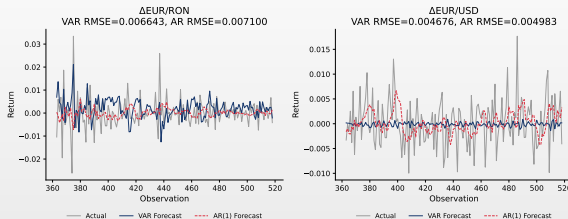
Pasul 7: Prognoza VAR

Rezultate prognoză

- Prognoză pe 12 trimestre; VAR captează interdependențele dintre serii
- Prognozele converg spre valorile de echilibru pe termen lung



Pasul 8: Rolling forecast – VAR vs AR



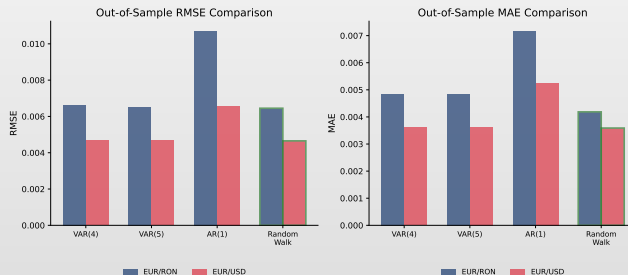
Procedura

- Train/Test recursiv: $W = 80$, re-estimare la fiecare pas; modele AR(2) vs VAR(2)
- RMSE expanding: $RMSE_t = \sqrt{\frac{1}{t} \sum_{s=1}^t e_s^2}$; intervale de încredere 95%
- Rezultate mixte:
 - ▶ Șomaj — VAR -10% RMSE față de AR (informația din PIB ajută)
 - ▶ PIB — VAR +6% RMSE față de AR (informația din șomaj nu aduce beneficii)

Pasul 9: Comparație out-of-sample – AR vs VAR

Metodologie

- Prognoză recursivă: estimare pe $[1, \dots, t]$, prognoză $\hat{y}_{t+1|t}$
- RMSE: $RMSE_t = \sqrt{\frac{1}{t} \sum_{s=1}^t e_s^2}$
- VAR reduce RMSE pentru Șomaj ($\sim 10\%$), nu și pentru PIB



Exercițiu AI: Gândire critică

Prompt de testat în ChatGPT / Claude / Copilot

"Descarcă de pe FRED: rata trimestrială de creștere a PIB real SUA (A191RL1Q225SBEA) și rata lunară a șomajului (UNRATE, agregată trimestrial) din 2000-Q1 până în 2024-Q4 (100 observații). Testează cauzalitatea Granger în ambele direcții, estimează un model VAR și calculează funcțiile impuls-răspuns ortogonalizate. Vreau cod Python complet."

Exercițiu:

1. Rulați prompt-ul într-un LLM la alegere și analizați critic răspunsul.
2. Testează staționaritatea fiecărei variabile înainte de a estima VAR?
3. Cum selectează ordinul lag-urilor? Compară AIC, BIC, HQIC?
4. Funcțiile impuls-răspuns sunt ortogonalizate? Discută ordonarea Cholesky?
5. Verifică condiția de stabilitate (valorile proprii în interiorul cercului unitate)?

Atenție: Codul generat de AI poate rula fără erori și arăta profesional. *Asta nu înseamnă că e corect.*

Concluzii cheie

Modele VAR

- ▣ Modelează **mai multe** serii de timp împreună
- ▣ Fiecare variabilă depinde de propriile lag-uri ȘI lag-urile altor variabile
- ▣ Estimate prin OLS ecuație cu ecuație; necesită staționaritate

Cauzalitate Granger

- ▣ Testează dacă X ajută la prezicerea lui Y dincolo de istoricul propriu al lui Y
- ▣ **Nu** este la fel cu cauzalitatea reală; test F asupra restricțiilor coeficienților

IRF și FEVD

- ▣ IRF: Cum se propagă șocurile prin sistem
- ▣ FEVD: Ce proporție din varianță se datorează fiecărui șoc
- ▣ Ambele depind de ordonarea variabilelor (descompunerea Cholesky)

Lista de verificare pentru selecția modelului VAR

Înainte de estimare

- ☐ Testați pentru rădăcini unitare în fiecare variabilă
- ☐ Aduceți seria la forma staționară dacă este necesar (diferențe, logaritmi)
- ☐ Verificați pentru valori extreme și rupturi structurale

Specificarea modelului

- ☐ Selectați ordinul lag-ului folosind AIC/BIC
- ☐ Estimați VAR prin OLS
- ☐ Verificați stabilitatea (valori proprii în interiorul cercului unitate)

După estimare

- ☐ Testați reziduurile pentru autocorelație
- ☐ Testați pentru efecte ARCH
- ☐ Testați pentru normalitate
- ☐ Calculați IRF, FEVD, teste Granger

Greșeli comune de evitat

Capcane în analiza VAR

1. **Ignorarea nestaționarității:** Testați întotdeauna mai întâi pentru rădăcini unitare
2. **Supraajustare:** Prea multe lag-uri \succ prognoze slabe
3. **Ordonare greșită:** Rezultatele Cholesky depind de ordinea variabilelor
4. **Confundarea corelației cu cauzalitatea:** Cauzalitate Granger \neq cauzalitate reală
5. **Ignorarea incertitudinii parametrilor:** Folosiți IC bootstrap pentru IRF
6. **Eșantioane mici:** VAR necesită multe observații ($T > 50$)

Ce urmează?

Subiecte pentru studiu aprofundat

- ▣ **Cointegrare:** Relații pe termen lung între variabile nestaționare
- ▣ **VECM:** Modele cu corecția erorii pentru sisteme cointegrate
- ▣ **VAR Structural:** Impunerea restricțiilor din teoria economică
- ▣ **Panel VAR:** VAR pentru date panel
- ▣ **VAR Bayesian:** Distribuții prior de shrinkage pentru sisteme de dimensiuni mari

Întrebări?

Întrebarea 1

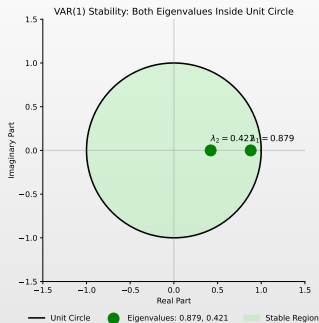
Întrebare

☐ Pentru un model VAR(1) cu matricea de coeficienți $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$, este modelul stabil?

Variante de răspuns

- (A) Da, deoarece toate elementele diagonale sunt mai mici decât 1
- (B) Da, deoarece toate valorile proprii sunt în interiorul cercului unitate
- (C) Nu, deoarece suma coeficienților depășește 1
- (D) Nu poate fi determinat fără a cunoaște Σ

Întrebarea 1: Răspuns



Răspuns: (B)

□ $\lambda_1 = 0.879, \lambda_2 = 0.421 \succ$ ambele $|\lambda| < 1 \succ$ stabil!

Întrebarea 2

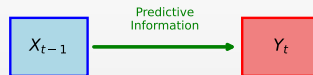
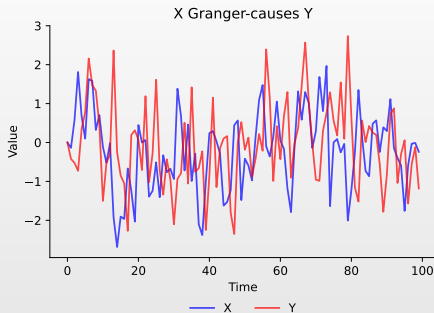
Întrebare

- ☐ Dacă X cauzează Granger pe Y la nivelul de semnificație de 5%, care dintre următoarele afirmații este ADEVĂRATĂ?

Variante de răspuns

- (A) X este cauza economică a lui Y
- (B) Valorile trecute ale lui X conțin informații utile pentru prezicerea lui Y
- (C) Y nu poate cauza Granger pe X
- (D) Corelația între X și Y este pozitivă

Întrebarea 2: Răspuns



*Past X helps predict Y
(beyond Y's own past)*

Răspuns: (B)

- ▣ Cauzalitate Granger = conținut predictiv, nu cauzare economică reală
- ▣ X trecut ajută la prezicerea lui Y

Întrebarea 3

Întrebare

□ Într-un VAR cu IRF identificate Cholesky, ce determină ordinea variabilelor?

Variante de răspuns

- (A) Magnitudinea răspunsurilor la impuls
- (B) Viteza cu care șocurile dispar
- (C) Care variabile pot răspunde contemporan la care șocuri
- (D) Numărul de lag-uri în VAR

Întrebarea 3: Răspuns

Ordering: (GDP, Interest Rate)



GDP shock → IR responds at $t=0$
IR shock → GDP responds at $t=1$

Ordering: (Interest Rate, GDP)



IR shock → GDP responds at $t=0$
GDP shock → IR responds at $t=1$

Răspuns: (C)

- ☐ Ordonarea determină care variabile răspund imediat la care șocuri

Întrebarea 4

Întrebare

- ☐ Pentru un VAR(1) bivariat, câți parametri trebuie estimați (excluzând matricea de covarianță a erorilor)?

Variante de răspuns

- (A) 4
- (B) 6
- (C) 8
- (D) 10

Întrebarea 4: Răspuns

Răspuns: (B)

- ▣ $K + K^2 = 2 + 4 = 6$ parametri (vezi detalii mai jos)

Numărare detaliată

- ▣ VAR(1) cu $K = 2$ variabile:

$$\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{2 \text{ param}} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{4 \text{ param}} \begin{pmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

- ▣ Constant c: $K = 2$; matrice A: $K^2 = 4$; total: 6 parametri

Formula generală

- ▣ VAR(p) cu K variabile: $K + pK^2$ parametri (excluzând Σ)

Întrebarea 5

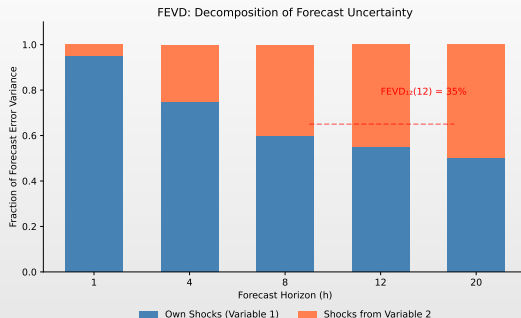
Întrebare

▣ Ce înseamnă $FEVD_{12}(h) = 0.35$?

Variante de răspuns

- (A) 35% din varianța totală a variabilei 1 este explicată de variabila 2
- (B) 35% din varianța erorii de prognoză la h pași a variabilei 1 se datorează șocurilor la variabila 2
- (C) Corelația între variabilele 1 și 2 la lag-ul h este 0.35
- (D) Variabila 2 explică 35% din răspunsul la impuls al variabilei 1

Întrebarea 5: Răspuns



Răspuns: (B)

- ☐ 35% din varianța erorii de prognoză la h pași a variabilei 1 se datorează șocurilor de la variabila 2

Formule cheie – Rezumat

Model VAR(p)

- ▣ $Y_t = c + \sum_{i=1}^p A_i Y_{t-i} + \varepsilon_t$
- ▣ $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$, i.i.d.

Cauzalitate Granger

- ▣ H_0 : X nu cauzează Granger Y
- ▣ Test F sau Wald pe coeficienții lag-urilor lui X

Selecția lag-urilor

- ▣ $AIC = \ln |\hat{\Sigma}| + \frac{2pK^2}{T}$
- ▣ $BIC = \ln |\hat{\Sigma}| + \frac{pK^2 \ln T}{T}$

Funcții răspuns la impuls

- ▣ $Y_{t+h} = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i \varepsilon_{t+h-i}$
- ▣ Φ_i = multiplicatori la orizontul i

FEVD

- ▣ $FEVD_{jk}(h) = \frac{\sum_{i=0}^{h-1} (e_j' \Phi_i P e_k)^2}{\sum_{i=0}^{h-1} e_j' \Phi_i \Sigma \Phi_i' e_j}$
- ▣ Contribuția șocului k la varianța lui j

Staționaritate VAR

- ▣ Toate valorile proprii ale A în interiorul cercului unitate

Bibliografie I

Lucrări fundamentale VAR și cauzalitate

- ▣ Sims, C.A. (1980). Macroeconomics and Reality, *Econometrica*, 48(1), 1–48.
- ▣ Granger, C.W.J. (1969). Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-Spectral Methods, *Econometrica*, 37(3), 424–438.
- ▣ Toda, H.Y., & Yamamoto, T. (1995). Statistical Inference in Vector Autoregressions with Possibly Integrated Processes, *Journal of Econometrics*, 66(1-2), 225–250.

Manuale VAR

- ▣ Lütkepohl, H. (2005). *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer.
- ▣ Kilian, L., & Lütkepohl, H. (2017). *Structural Vector Autoregressive Analysis*, Cambridge University Press.

Bibliografie II

Funcții impuls-răspuns și descompunere varianță

- ▣ Pesaran, H.H., & Shin, Y. (1998). Generalized Impulse Response Analysis in Linear Multivariate Models, *Economics Letters*, 58(1), 17–29.
- ▣ Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- ▣ Tsay, R.S. (2014). *Multivariate Time Series Analysis with R and Financial Applications*, Wiley.

Resurse online și cod

- ▣ **Quantlet**: <https://quantlet.com> > Repozitoriu de cod pentru statistică
- ▣ **Quantinar**: <https://quantinar.com> > Platformă de învățare metode cantitative
- ▣ **GitHub TSA**: https://github.com/QuantLet/TSA/tree/main/TSA_ch6 > Cod Python pentru acest capitol

Vă Mulțumim!

Întrebări?

Materialele cursului sunt disponibile la: <https://danpele.github.io/Time-Series-Analysis/>



Quantlet



Quantinar