



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 0: Fundamente



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

Obiective de învățare

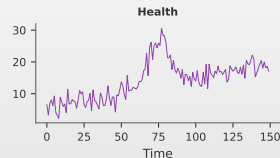
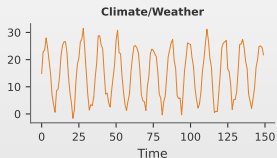
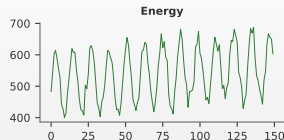
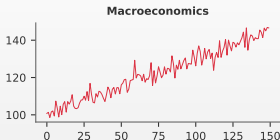
La sfârșitul acestui capitol, veți putea să:

1. **Definiți** seriile de timp și să le distingeți de datele transversale și de panel
2. **Descompuneți** seriile de timp în componente de trend-ciclu, sezonabilitate și reziduuri
3. **Aplicați** metodele de netezire exponențială (SES, Holt, Holt-Winters, ETS)
4. **Evaluați** prognozele folosind MAE, RMSE, MAPE, sMAPE
5. **Implementați** separarea train/validare/test și validarea încrucișată
6. **Modelați** sezonabilitatea folosind variabile dummy sau termeni Fourier
7. **Eliminați** trendul și sezonabilitatea prin metode adecvate
8. **Distingeți** între trendurile deterministe și stochastice

Cuprins

- ▣ Motivație
- ▣ Ce Este o Serie de timp?
- ▣ Descompunerea seriilor de timp
- ▣ Metode de Netezire Exponențială
- ▣ Evaluarea prognozei
- ▣ Modelarea sezonalityi
- ▣ Gestionarea Trendului și Sezonalityi
- ▣ Utilizare IA
- ▣ Rezumat

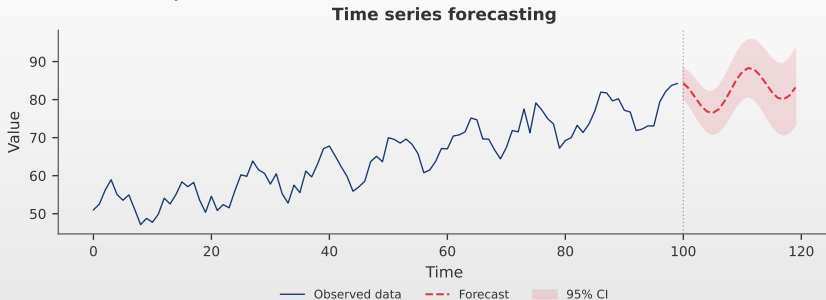
Seriile de timp sunt pretutindeni



 TSA ch0 real data

- ▣ **Finanțe:** Prețuri acțiuni, cursuri valutare, volume
- ▣ **Economie:** PIB, șomaj, rate ale inflației
- ▣ **Business:** Vânzări, trafic website, cerere
- ▣ **Știință:** Temperatură, poluare, semne vitale

De ce studiem seriile de timp?

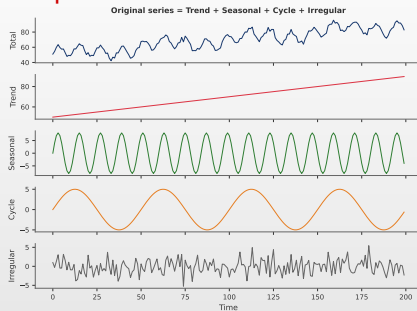


TSA ch0 real data

Obiectiv principal: prognoza

- ☐ Folosim tiparele istorice pentru a prezice valori viitoare ➤ esențial pentru planificarea afacerilor, managementul riscului și deciziile de politică

Înțelegerea structurii seriilor de timp

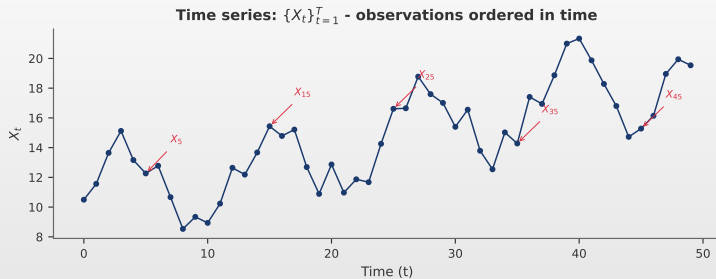


TSA ch0 real data

Descompunere

- Orice serie de timp poate fi descompusă în: **trend-ciclu + sezonabilitate + zgomot**

Serie de timp: ilustrație conceptuală



TSA_ch0_definition

Elemente fundamentale

- Notăție formală: X_t = valoarea la momentul t , $t \in \{1, 2, \dots, T\}$
- Autocorelație: $\rho_k = \text{Corr}(X_t, X_{t-k})$ — măsoară dependența temporală

Definiția unei serii de timp

Definiție 1 (Serie de timp)

- ▣ **Serie de timp:** secvență de observații $\{X_t\}$ indexate după timp: $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ unde \mathcal{T} este o mulțime de indici reprezentând momente de timp

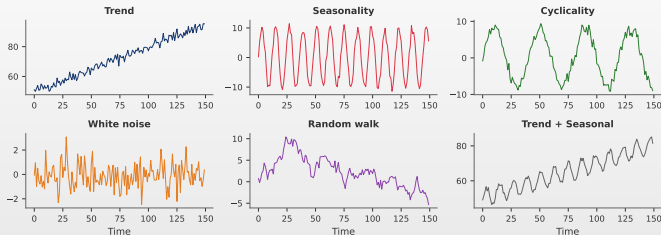
Caracteristici cheie

- ▣ **Ordonate:** ordine temporală naturală
- ▣ **Dependente:** observațiile consecutive sunt corelate
- ▣ **Discrete/Continue:** $t = 1, 2, 3, \dots$

Notație

- ▣ X_t : observația la momentul t
- ▣ $\{X_t\}_{t=1}^T$: serie cu T observații

Tipare comune în seriile de timp

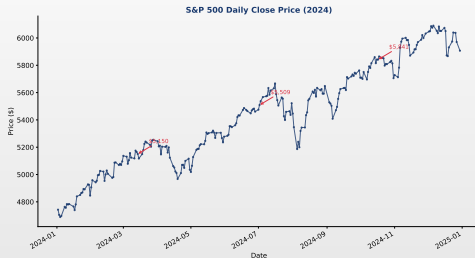


TSA_ch0_definition

Tipuri de tipare

- ▣ **Trend:** creștere sau scădere pe termen lung
- ▣ **Sezonier:** tipare periodice regulate
- ▣ **Ciclic:** fluctuații pe termen mediu (2–10 ani)
- ▣ **Aleatoriu:** fluctuații imprevizibile

Exemplu practic: date financiare reale

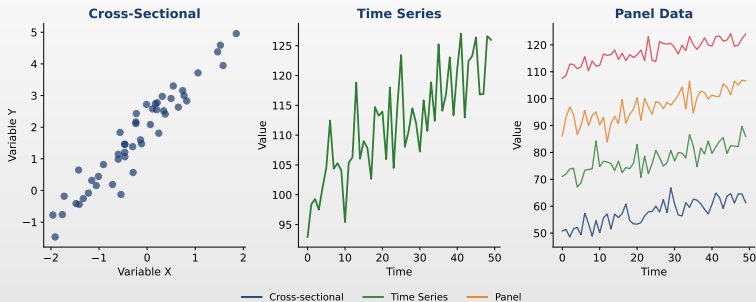


TSA_ch0_definition

S&P 500 (2024)

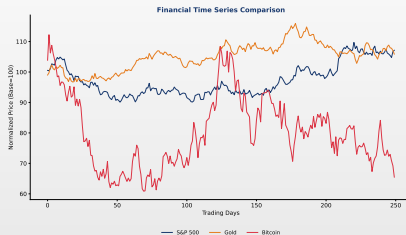
- **Frecvență zilnică:** ≈ 252 zile de tranzacționare/an
- **Caracteristici observate:** trend ascendent, volatilitate în clustere, persistență (momentum)

Tipuri de date: comparație



Tip de Date	Unități (N)	Time (T)	Exemplu
Transversale	Multe	1	Sondaj pe 1000 gospodării
Serie de timp	1	Multe	Prețuri zilnice S&P 500
Panel	Multe	Multe	PIB-ul a 50 țări, 20 ani

Exemple de date de tip serie de timp

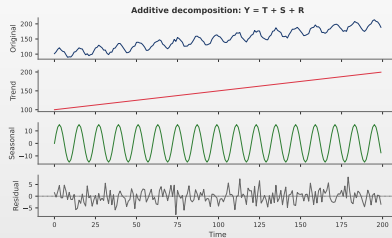


 TSA_ch0_real_data

Date financiare reale

- ▣ **Sursă:** Yahoo Finance (2019–2025), normalizate la baza 100
- ▣ **Bitcoin:** cel mai volatil
- ▣ **Aur:** cel mai stabil

Descompunerea seriilor de timp: exemplu vizual



 TSA_ch0_decomposition

Componente explicate

- **Original:** seria observată
- **Trend-Ciclu:** mișcare pe termen lung
- **Sezonier:** tipar periodic
- **Reziduu:** zgomot aleatoriu

De ce descompunem o serie de timp?

Obiective

- Înțelegerea tiparelor subiacente
- Eliminarea sezonality pentru modelare
- Identificarea direcției trendului
- Izolarea fluctuațiilor neregulate
- Îmbunătățirea acurateții prognozei

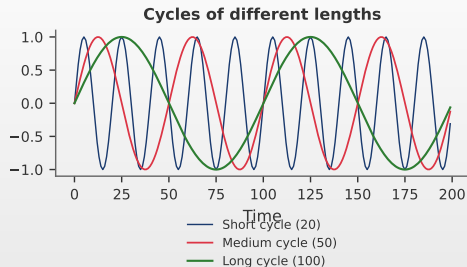
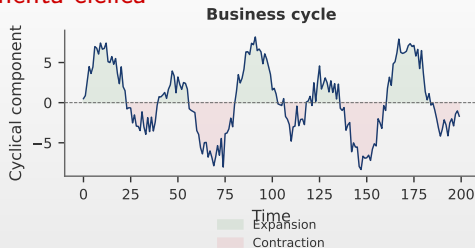
Componente

- T_t : Trend-Ciclu
 - ▶ Mișcare pe termen lung
- S_t : Sezonier
 - ▶ Tipar periodic regulat
- ε_t : Reziduu
 - ▶ Zgomot aleatoriu

Modele clasice de descompunere

- **Aditiv:** $X_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$
 - ▶ Amplitudine sezonieră constantă
- **Multiplicativ:** $X_t = T_t \times S_t \times \varepsilon_t$
 - ▶ Amplitudine sezonieră crește cu nivelul

Componenta ciclică



 TSA_ch0_decomposition

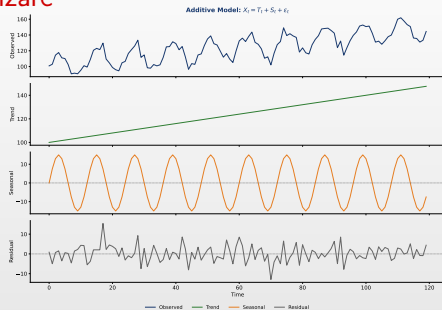
Caracteristici

- **Durată:** fluctuații pe termen mediu (2–10 ani)
- **Aperiodic:** fără perioadă fixă (vs sezonaltate)
- **Origine:** reflectă ciclurile economice

În practică

- **Combinare:** ciclul combinat cu trendul
- **Dificultate:** greu de identificat în serii scurte
- **Soluție:** de obicei absorbit în trend-ciclu

Descompunere aditivă: vizualizare



TSA_ch0_decomposition

Interpretare

- **Descompunere:** Original = Trend + Sezonier + Reziduu
- **Proprietate:** amplitudine sezonieră constantă, nu depinde de nivel

Modelul de descompunere aditivă

Model

- ▣ **Ecuatie:** $X_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$
 - ▶ Componentele se adună pentru a forma seria observată

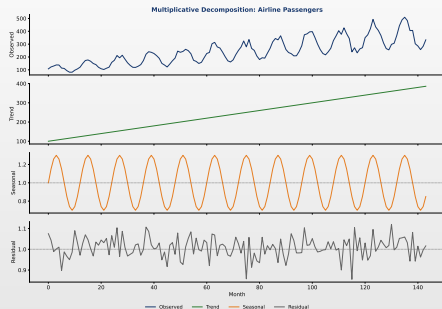
Când să folosim

- ▣ **Fluctuații sezoniere constante**
 - ▶ Amplitudinea nu depinde de nivel
- ▣ **Varianța seriei stabilă**
 - ▶ Măsoară dispersia în jurul mediei
 - ▶ Estimator: $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

Proprietăți

- ▣ **Eroare:** $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$ (medie zero)
- ▣ **Sezonier:** $\sum_{j=1}^s S_j = 0$ (suma sezonă e zero)
- ▣ **Unități:** S_t sunt aceleași ca X_t

Descompunere multiplicativă: date reale



Exemplu

- Date Box-Jenkins: pasageri lunari (1949–1960). Amplitudinea sezonieră crește cu nivelul

Modelul de descompunere multiplicativă

Model

- ▣ **Ecuatie:** $X_t = T_t \times S_t \times \varepsilon_t$ \succ componentele se înmulțesc

Când să folosim

- ▣ **Fluctuații crescătoare:** sezonabilitatea crește cu nivelul
- ▣ **Heteroscedasticitate:** varianța crește în timp
- ▣ **Exemple:** date economice/financiare

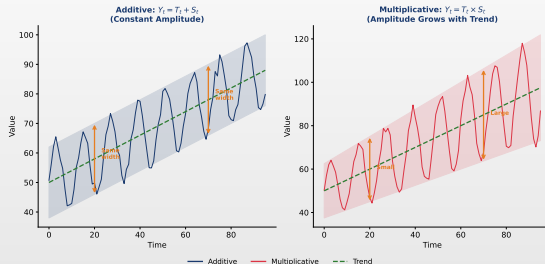
Proprietăți

- ▣ **Eroare:** $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 1$ (centrat la 1)
- ▣ **Sezonier:** $\frac{1}{s} \sum_{j=1}^s S_j = 1$ (media e 1)
- ▣ **Unități:** S_t este raport adimensional

Sfat

- ▣ **Transformare logaritmică:** multiplicativ \succ aditiv: $\log X_t = \log T_t + \log S_t + \log \varepsilon_t$

Aditivă vs multiplicativă: comparație

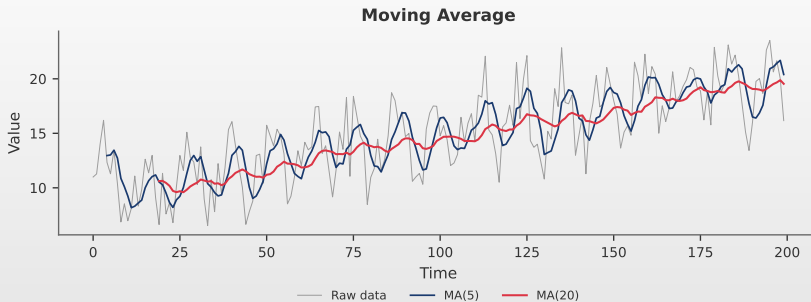


Q TSA_ch0_decomposition

Diferența cheie

- **Multiplicativ:** componenta sezonieră este un *raport*, centrată la valoarea 1
- **Aditiv:** componenta sezonieră în *unități absolute*, centrată la valoarea 0

Media mobilă centrată: ilustrație vizuală



Interpretare

- ▣ **Netezire:** elimină fluctuațiile pe termen scurt
- ▣ **Rezultat:** dezvăluie trendul subiacent

Estimarea trendului: media mobilă

Definiție 2 (media mobilă centrată)

- Media mobilă centrată de ordin $2q + 1$:

$$\hat{T}_t = \frac{1}{2q + 1} \sum_{j=-q}^q X_{t+j} \quad (1)$$

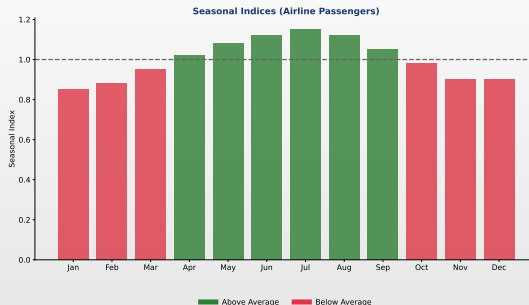
Pentru date sezoniere

- Perioada s impară
 - Se folosește medie simplă
- Perioada s pară
 - $2 \times s$ MA cu ponderi jumătate

Proprietăți

- Netezire: elimină sezonierul & aleatoriul
- Fereastră mare \succ estimare mai netedă
- Dezavantaj: pierdere de date la extremități

Indici sezonieri: interpretare



Interpretare

□ $S_t > 1$: activitate peste medie; $S_t < 1$: sub medie. Vârf de călătorii în iulie–august

Algoritmul descompunerii clasice

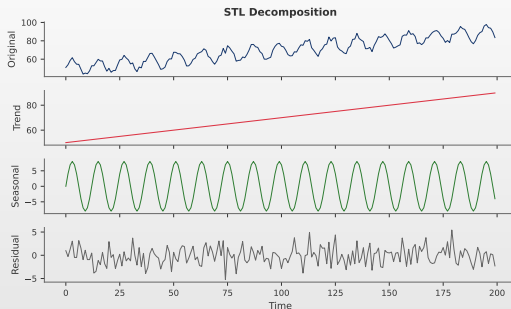
Pași pentru descompunerea multiplicativă

- ▣ **Pasul 1** ∨ **Estimare Trend:** $\hat{T}_t = MA_s(X_t)$
 - ▶ Medie mobilă centrată de ordinul perioadei sezoniere
- ▣ **Pasul 2** ∨ **Eliminarea trendului:** $D_t = X_t / \hat{T}_t$
- ▣ **Pasul 3** ∨ **Estimare Sezonier:** $\hat{S}_j = \text{media}(D_t \text{ pentru sezonul } j)$
- ▣ **Pasul 4** ∨ **Normalizare:** scalare astfel încât $\frac{1}{s} \sum_{j=1}^s \hat{S}_j = 1$
- ▣ **Pasul 5** ∨ **Calcul Reziduuri:** $\hat{\varepsilon}_t = X_t / (\hat{T}_t \times \hat{S}_t)$

Notă

- ▣ **Pentru descompunere aditivă:** operațiile se modifică
 - ▶ Împărțire ∨ scădere
 - ▶ Înmulțire ∨ adunare

Descompunerea STL: ilustrație vizuală



Idee cheie

- STL (Seasonal-Trend-Loess): separă trend + sezonier + rest folosind regresie LOESS

Descompunerea STL: o abordare modernă

Definiție 3 (STL - Descompunere Sezonier-Trend folosind LOESS)

□ **STL**: folosește regresie locală ponderată (LOESS): $X_t = T_t + S_t + R_t$

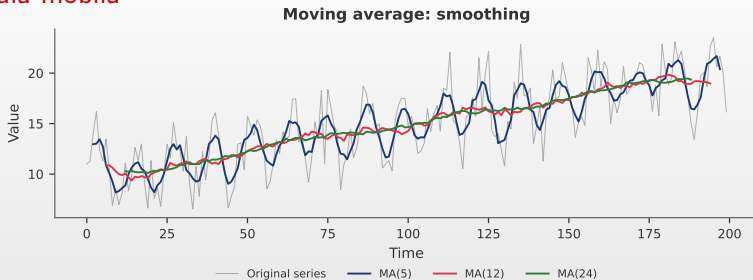
Avantaje

- **Flexibilitate**: orice perioadă sezonieră
- **Variabilitate**: sezonality poate evolua în timp
- **Robustețe**: rezistentă la valori extreme
- **Netezire**: estimări netede ale trendului

Parametri cheie

- **period**: perioada sezonieră
 - ▶ Ex: 12 pentru date lunare, 4 pentru trimestriale
- **seasonal**: fereastra de netezire
- **robust**: ponderare redusă pentru outlieri

Netezirea cu media mobilă



Compromisul dimensiunii ferestrei

- **Fereastră mică:** reactivă dar zgomotoasă
 - ▶ Captează schimbări rapide, dar amplifică zgomotul
- **Fereastră mare:** netedă dar cu întârziere
 - ▶ Elimină zgomotul, dar reacționează lent

Netezirea exponențială: prezentare generală

Definiție

- **Netezirea exponențială:** medii ponderate ale observațiilor trecute
 - ▶ Ponderile scad exponențial în timp
 - ▶ Observațiile recente primesc ponderi mai mari

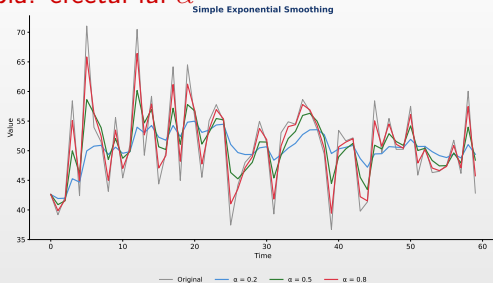
De ce netezire exponențială?

- **Simplă:** ușor de implementat și înțeles
 - ▶ Un singur parametru de netezire
- **Adaptivă:** ponderi mai mari pentru date recente
- **Versatilă:** gestionează trend și sezonalitate

Trei metode principale

- **SES** (Simple Exponential Smoothing): doar nivel
 - ▶ Cea mai simplă metodă exponențială
- **Holt:** nivel + trend
 - ▶ Captează direcția de evoluție
- **Holt-Winters:** + sezonalitate
 - ▶ Model complet cu toate componentele

Netezirea exponențială simplă: efectul lui α



Compromis

- α **mic** \succ prognoze netede
 - ▶ Mai multă pondere pe istoria îndepărtată
- α **mare** \succ urmărește datele
 - ▶ Reacție rapidă la schimbări recente

Netezirea exponențială simplă (SES)

Model

- **Ecuatie:** $\hat{X}_{t+1|t} = \alpha X_t + (1 - \alpha)\hat{X}_{t|t-1}$
 - ▶ $\alpha \in (0, 1)$ este parametrul de netezire

Cum funcționează

- **Principiu:** ponderile scad exponențial
- α mare
 - ▶ Prognoză reactivă la schimbări
- α mic
 - ▶ Prognoză mai netedă, stabilă

Forma cu nivel

- **Ecuatie:** $\ell_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)\ell_{t-1}$
 - ▶ ℓ_t = nivelul estimat la momentul t
 - ▶ Prognoză: $\hat{X}_{t+h|t} = \ell_t$ (constantă)

SES: exemplu numeric pas cu pas

Date: Vânzări lunare (mii EUR)

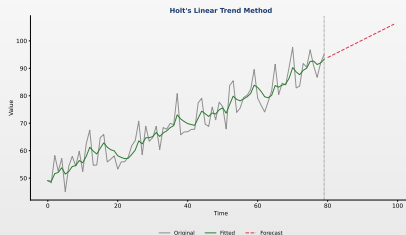
□ **Date:** $X_1 = 100$, $X_2 = 110$, $X_3 = 105$, $X_4 = 115$, $X_5 = 120$ ($\alpha = 0.3$, $\hat{X}_{1|0} = 100$)Calcul iterativ: $\hat{X}_{t+1|t} = \alpha X_t + (1 - \alpha) \hat{X}_{t|t-1}$

t	X_t	$\hat{X}_{t t-1}$	e_t	Calcul $\hat{X}_{t+1 t}$
1	100	100.00	0.00	$0.3 \times 100 + 0.7 \times 100 = 100.00$
2	110	100.00	10.00	$0.3 \times 110 + 0.7 \times 100 = 103.00$
3	105	103.00	2.00	$0.3 \times 105 + 0.7 \times 103 = 103.60$
4	115	103.60	11.40	$0.3 \times 115 + 0.7 \times 103.6 = 107.02$
5	120	107.02	12.98	$0.3 \times 120 + 0.7 \times 107.02 = 110.91$

Prognoză și evaluare

 $\hat{X}_{6|5} = 110.91$ MAE = 7.28 RMSE = 8.97

Metoda Holt: vizualizare



TSA_ch0_smoothing

Interpretare

- ▣ **Metoda Holt:** captează nivelul și trendul, le proiectează în orizontul de prognoză
- ▣ α : controlează schimbări de nivel
- ▣ β^* : controlează schimbări de trend

Metoda Holt cu trend liniar

Ecuatii

- **Nivel:** $\ell_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1})$
- **Trend:** $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1}$
- **Prognost:** $\hat{X}_{t+h|t} = \ell_t + h \cdot b_t$
 - ▶ Extrapolează trendul liniar pe h pași

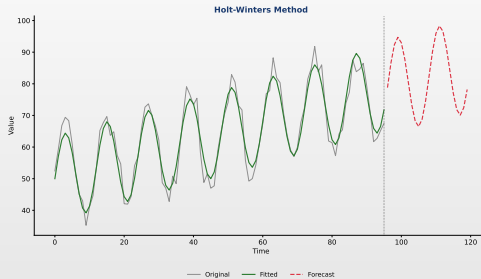
Parametri

- α : netezire nivel
 - ▶ Controlează reactivitatea la schimbări de nivel
- β^* : netezire trend
 - ▶ Controlează reactivitatea la schimbări de pantă

Componente

- ℓ_t : nivel estimat
 - ▶ Media locală a seriei
- b_t : trend estimat (pantă)
 - ▶ Rata de creștere/descreștere

Holt-Winters: captarea sezonaliității



TSA_ch0_smoothing

Caracteristică cheie

- ▣ **Descompunere completă:** separă nivel, trend și sezonier
- ▣ **Proгноze sezoniere:** include atât trend cât și tipar periodic

Metoda sezonieră Holt-Winters

Ecuatii (sezonalitate aditivă)

- ▣ **Nivel:** $\ell_t = \alpha(X_t - S_{t-s}) + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1})$
- ▣ **Trend:** $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1}$
- ▣ **Sezonier:** $S_t = \gamma(X_t - \ell_t) + (1 - \gamma)S_{t-s}$
- ▣ **Prognost:** $\hat{X}_{t+h|t} = \ell_t + h \cdot b_t + S_{t+h-s(k+1)}$
 - ▶ Unde $k = \lfloor (h-1)/s \rfloor$

Parametri

- ▣ α — nivel
- ▣ β^* — trend
- ▣ γ — sezonier
- ▣ s — perioadă sezonieră
 - ▶ Toți în $(0, 1)$; estimați prin minimizarea erorii

Cadrul ETS: eroare-trend-sezonalitate

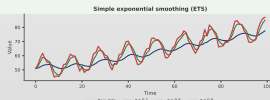
Definiție 4 (Modele ETS)

- ▣ **Cadrul ETS:** generalizează netezirea exponențială: $ETS(E, T, S)$

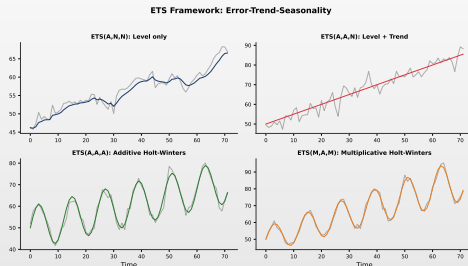
Componentă	N	A	M
Eroare (E)	–	aditivă	multiplicativă
Trend (T)	Niciunul	Aditiv	Multiplicativ
Sezonier (S)	Niciunul	Aditiv	Multiplicativ

Exemple

- ▣ **ETS(A,N,N):** Netezire exponențială simplă \succ doar nivel, fără trend sau sezonalitate
- ▣ **ETS(A,A,N):** Metoda Liniară Holt \succ nivel + trend aditiv
- ▣ **ETS(A,A,A):** Holt-Winters aditivă \succ nivel + trend + sezonalitate aditivă



Selecția modelului ETS



TSA_ch0_smoothing

Selecție automată

- **Criterii informaționale:** AIC (Akaike Information Criterion), BIC (Bayesian Information Criterion)
- **Selecție optimă:** balanță între ajustare și complexitate

Metode cu trend amortizat

Parametrul de amortizare

- ▣ **Parametru:** $\phi \in (0, 1)$
 - ▶ Previne supra-proiecția trendului
 - ▶ Trendul converge către o constantă

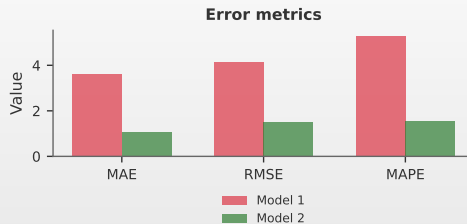
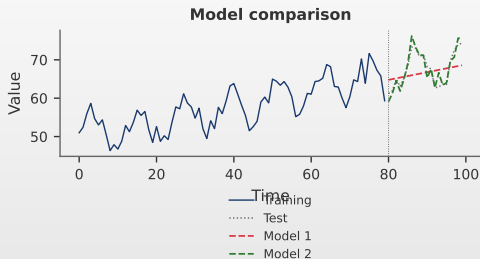
Ecuatii

- ▣ **Nivel:** $\ell_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})$
- ▣ **Trend:** $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)\phi b_{t-1}$
- ▣ **Prognoză:** $\hat{X}_{t+h|t} = \ell_t + \phi \frac{1-\phi^h}{1-\phi} b_t$

Idee cheie

- ▣ **Asimptotic:** când $h \rightarrow \infty$, prognoza \rightarrow constantă
 - ▶ Previne extrapolare nerealistă pe termen lung
- ▣ **Avantaj:** adesea mai bună pentru orizonturi lungi

Evaluarea prognozei: exemplu vizual



Observații

- ☐ **Sus**: actual vs. prognoză — evaluare vizuală a calității prognozei
- ☐ **Jos**: reziduuri — medie zero, varianță constantă, fără tipar

Metrici de acuratețe a prognozei

Eroarea de prognoză

- ▣ **Definiție:** $e_t = X_t - \hat{X}_t$ (actual minus prezis)
 - Pozitivă \Rightarrow subestimează; Negativă \Rightarrow supraestimează

Dependente de scală

- ▣ **MAE:** $\frac{1}{n} \sum |e_t|$
- ▣ **MSE:** $\frac{1}{n} \sum e_t^2$
- ▣ **RMSE:** $\sqrt{\text{MSE}}$

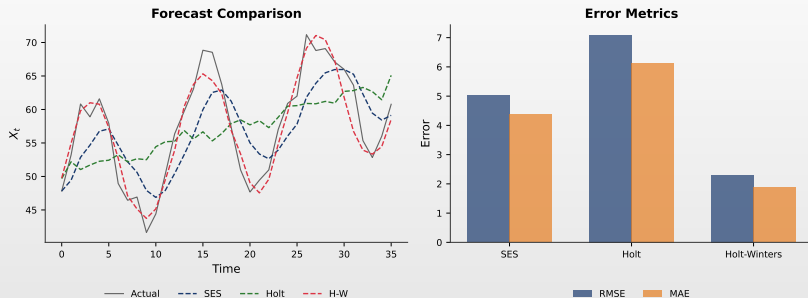
Independente de scală

- ▣ **MAPE:** $\frac{100}{n} \sum \left| \frac{e_t}{\hat{X}_t} \right|$
- ▣ **sMAPE:** $\frac{100}{n} \sum \frac{|e_t|}{(|X_t| + |\hat{X}_t|)/2}$

Ce să folosim?

- ▣ **Aceeași serie:** RMSE, MAE \succ comparare modele pe aceleași date
- ▣ **Între serii diferite:** MAPE, sMAPE \succ metrici procentuale, independente de scală

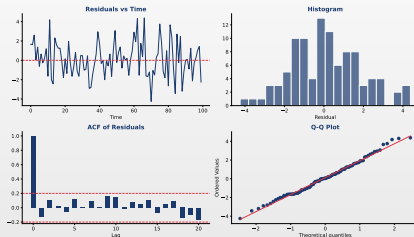
Compararea metodelor de prognoză



Interpretare

- **Stânga:** Prognoze SES, Holt, Holt-Winters. **Dreapta:** Metrici de eroare. Comparație vizuală și cantitativă

Diagnosticarea reziduurilor: vizualizare



Q TSA_ch0_forecast_eval

Ce să verificăm

- **Grafic temporal:** fără tipare sistematice
- **Histogramă:** verificare normalitate
- **ACF:** fără autocorelație semnificativă
- **Grafic Q-Q:** confirmare normalitate

Diagnosticarea reziduurilor

Proprietăți ale reziduurilor

- **Medie zero:** $\mathbb{E}[e_t] = 0$
 - ▶ Prognoza nu are bias sistematic
- **Necorelate:** $\text{Cov}(e_t, e_{t-k}) = 0$
 - ▶ Nu rămâne informație neexploatăă
- **Varianță constantă:** $\text{Var}(e_t) = \sigma^2$
- **Normal distribuite:** pentru intervale de încredere

Teste de diagnostic

- **Testul Ljung-Box** (autocorelație):
 - ▶ $Q = T(T+2) \sum_{k=1}^h \frac{\hat{\rho}_k^2}{T-k} \sim \chi_h^2$
- **Testul Jarque-Bera** (normalitate):
 - ▶ $JB = \frac{T}{6} \left(S^2 + \frac{(K-3)^2}{4} \right) \sim \chi_2^2$
 - ▶ S = asimetrie, K = kurtosis

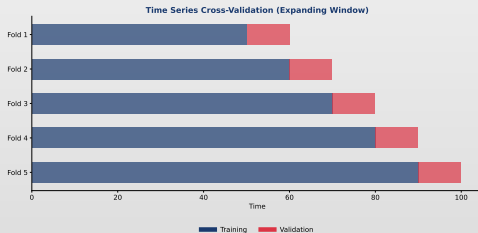
Validarea încrucișată pentru serii de timp

De ce nu CV standard?

- **Dependență temporală:** observațiile sunt corelate
- **Ordinea contează:** trebuie respectată cronologia
- **K-fold standard** \succ data leakage

CV (cross-validation) cu origine mobilă

- **Pasul 1:** antrenare pe $\{X_1, \dots, X_t\}$
- **Pasul 2:** prognoză \hat{X}_{t+h}
- **Pasul 3:** incrementare t , repetare



Separarea train / validare / test

Set de antrenare

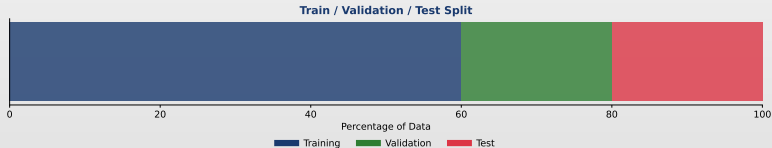
- Potrivirea parametrilor modelului
- Cea mai mare porțiune (60–80%)
- Folosit pentru estimare

Set de validare

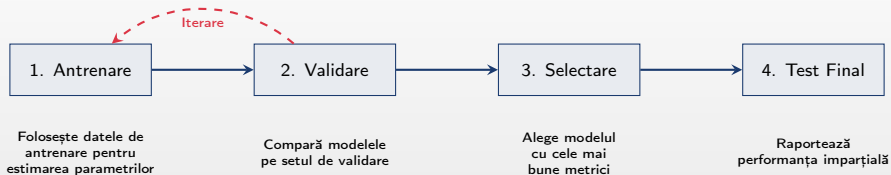
- Ajustarea hiperparametrilor
- Compararea modelelor
- Selectarea celei mai bune abordări

Set de Test

- Doar evaluare finală
- Nu se folosește pentru ajustare
- Performanță imparțială



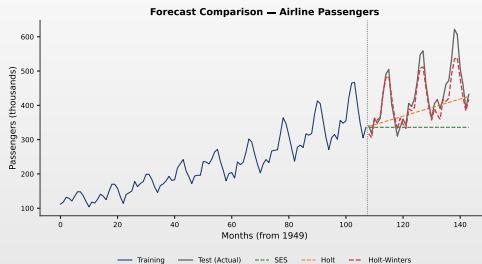
Fluxul de lucru pentru dezvoltarea modelului



Regulă critică

- ❑ **Niciodată testul pentru selecție!**
 - ▶ Folosiți doar pentru evaluare finală
- ❑ **Evitați scurgerea de date**
 - ▶ Estimări prea optimiste ale performanței

Date reale: compararea prognozelor

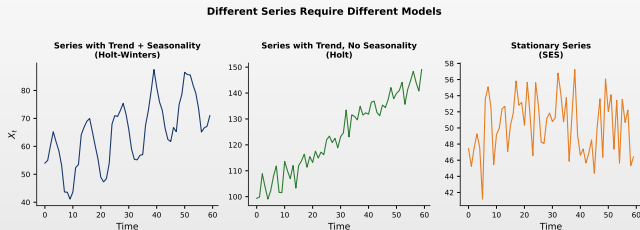


TSA_ch0_forecast_eval

Interpretare

- **Date:** pasageri companii aeriene
- **Cel mai bun:** Holt-Winters multiplicativă — ideal pentru date cu sezonabilitate crescătoare

Performanța prognozei pe diferite seturi de date

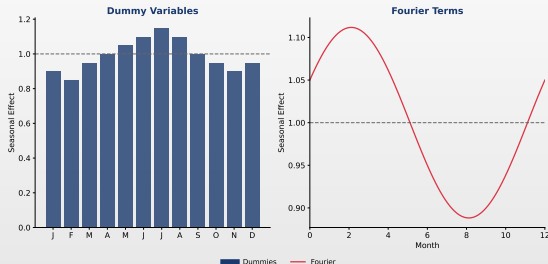


 TSA_ch0_forecast_eval

Interpretare

- ▣ **Serii diferite:** necesită modele diferite
- ▣ **Date sezoniere:** preferați metode sezoniere
- ▣ **Nu există model universal:** testați mai multe abordări

Variabile dummy vs termeni Fourier



TSA_ch0_seasonal

Comparație

- ▣ **Variabile dummy:** captează orice formă, necesită $s - 1$ parametri
- ▣ **Termeni Fourier:** doar $2K$ parametri, tipare netede, sinusoidale

Modelarea sezonality: două abordări

1. Variabile dummy

- **Model:** $X_t = \mu + \sum_{j=1}^{s-1} \gamma_j D_{jt} + \varepsilon_t$
- $D_{jt} = 1$ dacă t în sezonul j
- $s - 1$ parametri
- Orice tipar sezonier

2. Termeni Fourier

- **Model:**
$$X_t = \mu + \sum_{k=1}^K \left[\alpha_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{s}\right) + \beta_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{s}\right) \right]$$
- Funcții sinusoidale
- $2K$ parametri
- Tipare netede

Compromis

- **Variabile dummy**
 - ▶ Orice tipar sezonier, dar mai mulți parametri
- **Termeni Fourier**
 - ▶ Tipare netede, mai puțini parametri

Alegerea între dummy și Fourier

Criteriu	Dummy	Fourier
Parametri (lunar)	11	$2K$ (adesea 4–6)
Tipar sezonier	Orice formă	Neted/sinusoidal
Interpretare	Directă (efecte lunare)	Componente de frecvență
Sezoane de înaltă frecvență	Mulți parametri	Eficient
Sezonality multiplă	Complex	Ușor (adăugați termeni)

Recomandări

□ Folosiți Dummy

- ▶ Tipare neregulate, coeficienți interpretabili

□ Folosiți Fourier

- ▶ Tipare netede, sezonality de înaltă frecvență
- ▶ Utilizat în TBATS și Prophet

De ce eliminăm trendul și sezonalitatea?

Motive pentru eliminarea trendului

- Cerința de staționaritate
- Focus pe fluctuații
- Evitarea regresiei false
- Permitearea inferenței valide

Motive pentru desezonalizare

- Dezvăluirea trendului subiacent
- Comparații între sezoane
- Simplificarea modelării
- Focus pe componenta neregulată

Important

- **Modelăm seria transformată**
 - ▶ Cu trendul și sezonalitatea eliminate
- **Inversăm transformarea**
 - ▶ Readucem prognoza la scala originală

Metode de eliminare a trendului: comparație



TSA_ch0_detrending

Idee cheie

- ▣ Metode diferite: produc reziduuri diferite
- ▣ Alegere după tipul de trend: considerați obiectivele analizei

Metode de eliminare a trendului

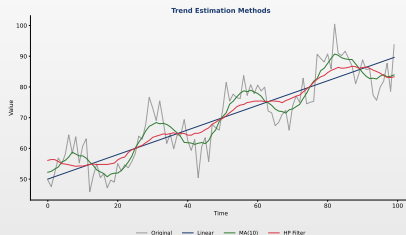
Șase abordări comune de eliminare a trendului

- ▣ **Diferențiere:** $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$
 - ▶ Cea mai utilizată, elimină trend stochastic
- ▣ **Regresie liniară:** $\hat{T}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t$
- ▣ **Polinomială:** polinom de ordin superior
- ▣ **Filtru HP:** echilibru estimare vs netezime
- ▣ **Media mobilă:** $\hat{T}_t = MA_q(X_t)$
- ▣ **LOESS:** regresie polinomială locală

Alegerea depinde de

- ▣ **Natura trendului**
 - ▶ Determinist vs stochastic
- ▣ **Scopul analizei**
 - ▶ Prognoză vs analiză descriptivă

Estimarea trendului: abordări multiple

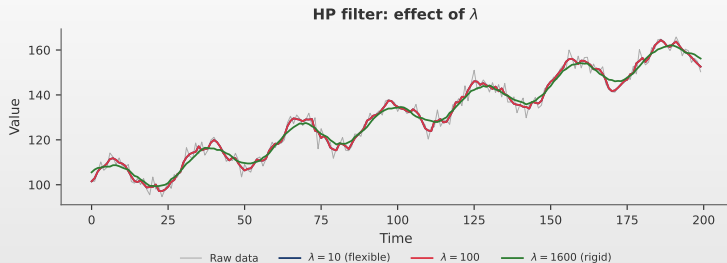


TSA_ch0_detrending

Comparație metode

- ▣ **Media mobilă:** simplă dar cu lag
- ▣ **Regresie polinomială:** flexibilă, parametrică
- ▣ **HP filter:** standard macroeconomic

Filtrul HP: efectul lui λ



TSA_ch0_detrending

Compromis

- λ **mic**: trend flexibil — urmează datele îndeaproape
- λ **mare**: trend neted — se apropie de trend liniar

Filtrul Hodrick-Prescott (HP)

Definiție 5 (Filtrul HP)

- **Filtrul HP:** descompune X_t în trend τ_t și ciclu c_t : $X_t = \tau_t + c_t$

$$\min_{\{\tau_t\}} \left\{ \sum_{t=1}^T (X_t - \tau_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} [(\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1})]^2 \right\}$$

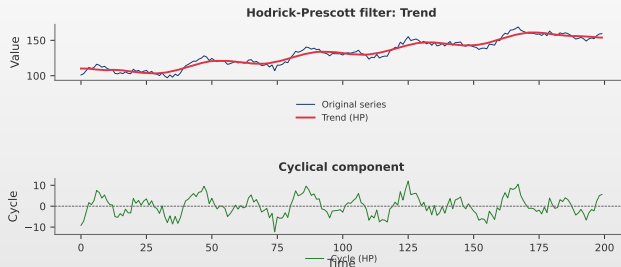
Interpretare

- **Primul termen**
 - ▶ Ajustare la date
- **Al doilea termen**
 - ▶ Penalizare netezime
- λ
 - ▶ Controlează echilibrul între fidelitate și netezime

Valori standard λ (Ravn-Uhlig)

- **Annual**
 - ▶ $\lambda = 6.25$
- **Trimestrial**
 - ▶ $\lambda = 1600$ (standard macroeconomic)
- **Lunar**
 - ▶ $\lambda = 129600$

Filtrul HP: extragerea ciclului de afaceri



TSA_ch0_detrending

Aplicație

- **Macroeconomie:** extragerea ciclurilor de afaceri
- **Serii comune:** PIB, șomaj, inflație

Filtrul HP: limitări

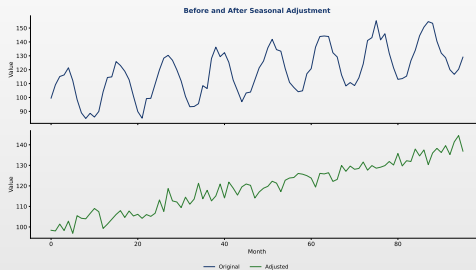
Probleme cunoscute

- ▣ **Instabilitate la extremități**
 - ▶ Estimările trendului nesigure la început și sfârșit
- ▣ **Cicluri false**
 - ▶ Poate crea dinamici artificiale
- ▣ **Alegerea λ**
 - ▶ Rezultatele sensibile la parametru

Alternative

- ▣ **Filtre bandă:** Baxter-King, Christiano-Fitzgerald
 - ▶ Izolează frecvențe specifice
- ▣ **Filtrul Hamilton:** bazat pe regresie
- ▣ **Componente neobservate:** modele state-space

Ajustare sezonieră: vizualizare



TSA_ch0_seasonal

Rezultat

- **Seria ajustată sezonier:** dezvăluie trendul subiacent, elimină fluctuațiile periodice

Metode de eliminare a sezonaliității

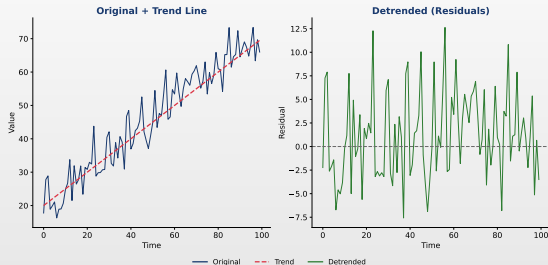
Patru abordări pentru eliminarea sezonaliității

- ▣ **Diferențiere sezonieră:** $\Delta_s X_t = X_t - X_{t-s}$
 - ▶ Elimină tipar periodic, simplu de aplicat
- ▣ **Împărțire** (multiplicativ): $X_t^{adj} = X_t / \hat{S}_t$
- ▣ **Scădere** (aditiv): $X_t^{adj} = X_t - \hat{S}_t$
- ▣ **X-13ARIMA-SEATS:** standard oficial US Census Bureau
 - ▶ Metodă sofisticată, utilizată de institutele de statistică

Perioada sezonieră s

- ▣ Lunar: $s = 12$ | Trimestrial: $s = 4$

Exemplu: trend determinist



TSA_ch0_detrending

Cheie

- Metodă: regresie
- Rezultat: reziduuri staționare, ACF scade rapid

Trend determinist vs stochastic

Trend determinist

- ▣ **Model:** $X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$
- ▣ **Caracteristici:**
 - ▶ Trendul este o funcție de timp
 - ▶ ε_t este staționar
- ▣ **Metodă:** eliminarea trendului prin regresie

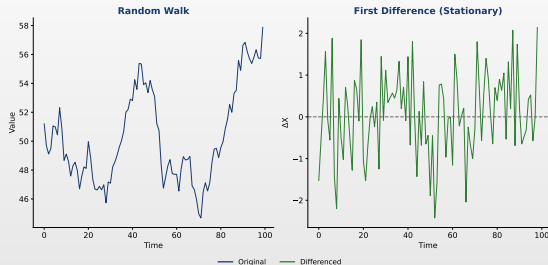
Trend stochastic

- ▣ **Model:** $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$
- ▣ **Caracteristici:**
 - ▶ Componentă de mers aleatoriu
 - ▶ ΔX_t este staționar
- ▣ **Metodă:** eliminarea trendului prin diferențiere

Metodă greșită = probleme

- ▣ **Diferențiere pe trend determinist** \succ supra-diferențiere
 - ▶ Introduce dependență artificială în serie
- ▣ **Regresie pe trend stochastic** \succ regresie falsă
 - ▶ Rezultate statistice invalide

Exemplu: trend stochastic (mers aleatoriu)

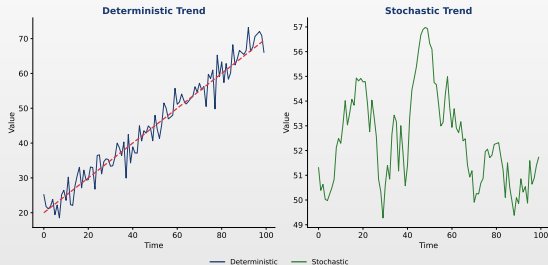


TSA_ch0_detrending

Cheie

- Metodă: diferențiere
- Rezultat: diferențele sunt staționare (zgomot alb)

Comparație alăturată



TSA_ch0_detrending

Rețineți

- ▣ **Trend determinist:** folosiți regresie — trendul este o funcție predictibilă de timp
- ▣ **Trend stochastic:** folosiți diferențiere — trendul conține o componentă aleatoare

Exercițiu AI: Gândire critică

Prompt de testat în ChatGPT / Claude / Copilot

"Folosind yfinance, descarcă prețurile lunare de închidere ale acțiunii Apple (AAPL) din 2015-01 până în 2024-12 (120 observații). Descompune seria în trend, sezonabilitate și reziduuri. Determină dacă e mai potrivită descompunerea aditivă sau multiplicativă și prognozează prețul pentru următoarele 12 luni. Vreau cod Python complet cu grafice profesionale."

Exercițiu:

1. Rulați prompt-ul într-un LLM la alegere și analizați critic răspunsul.
2. Ce tip de descompunere alege modelul? E corect? Justificați.
3. Cum evaluează calitatea prognozei? Metrica e calculată corect?
4. Verifică reziduurile — prezintă structură neexplicată?
5. Rescrieți analiza corect și comparați cu un benchmark sezonier naiv.

Atenție: Codul generat de AI poate rula fără erori și arăta profesional. *Asta nu înseamnă că e corect.*

Rezumat

Ce am învățat în acest capitol

- Definiția și Caracteristicile Seriei de Timp
 - ▶ Secvență de observații ordonate temporal cu dependență
- Descompunere (Aditivă vs multiplicativă)
 - ▶ Componente: Trend-Ciclu + Sezonier + Reziduu
- Metode de Netezire Exponențială
 - ▶ SES (nivel), Holt (+ trend), Holt-Winters (+ sezonaliitate), ETS
- Evaluarea și Validarea Prognozei
 - ▶ Metrici: MAE, RMSE, MAPE; Cross-Validation cu origine mobilă

Idee cheie

- **Înțelegeți înainte de a modela:**
 - ▶ Vizualizați și descompuneți datele mai întâi
 - ▶ Alegeți aditiv vs multiplicativ în funcție de comportamentul varianței

Ce urmează?

Capitolul 1: Procese stochastice și staționaritate

- ▣ **Procese Stochastice:** fundament matematic, variabile aleatoare indexate după timp
- ▣ **Staționaritate:** strictă (distribuție invariantă) vs slabă (momente invariante)
- ▣ **Procese Fundamentale:** zgomot alb și mers aleatoriu > blocuri pentru ARIMA
- ▣ **ACF și PACF:** instrumente pentru identificarea modelului

Întrebări?

Bibliografie I

Fundamente ale seriilor de timp

- Wold, H. (1938). *A Study in the Analysis of Stationary Time Series*, Almqvist & Wiksell.
- Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- Brockwell, P.J., & Davis, R.A. (2016). *Introduction to Time Series and Forecasting*, 3rd ed., Springer.

Descompunere și analiză exploratorie

- Cleveland, R.B., Cleveland, W.S., McRae, J.E., & Terpenning, I. (1990). STL: A Seasonal-Trend Decomposition Procedure Based on Loess, *Journal of Official Statistics*, 6(1), 3–33.
- Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*, 3rd ed., OTexts.

Bibliografie II

Netezire exponențială și fundamente ETS

- Holt, C.C. (1957/2004). Forecasting Seasonals and Trends by Exponentially Weighted Moving Averages, *International Journal of Forecasting*, 20(1), 5–10.
- Winters, P.R. (1960). Forecasting Sales by Exponentially Weighted Moving Averages, *Management Science*, 6(3), 324–342.
- Hyndman, R.J., Koehler, A.B., Ord, J.K., & Snyder, R.D. (2008). *Forecasting with Exponential Smoothing: The State Space Approach*, Springer.

Resurse online și cod

- **Quantlet:** <https://quantlet.com> > Platformă de cod pentru metode cantitative
- **Quantinar:** <https://quantinar.com> > Platformă de învățare pentru metode cantitative
- **GitHub TSA:** https://github.com/QuantLet/TSA/tree/main/TSA_ch0 > Cod Python pentru acest capitol

Vă Mulțumim!

Întrebări?

Materialele cursului sunt disponibile la: <https://danpele.github.io/Time-Series-Analysis/>

Quantlet > Platformă de cod pentru metode cantitative

Quantinar > Platformă de învățare pentru metode cantitative