



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

# Capitolul 4: Modele SARIMA


Serii de Timp Sezoniere



# Cuprins

- 1 Sezonalitatea in seriile de timp
- 2 Diferentierea sezoniera
- 3 Modelul SARIMA
- 4 Tipare ACF si PACF sezoniere
- 5 Estimare si diagnosticare
- 6 Prognoza cu SARIMA
- 7 Aplicatie pe date reale: Pasageri companiilor aeriene
- 8 Sumar
- 9 Quiz

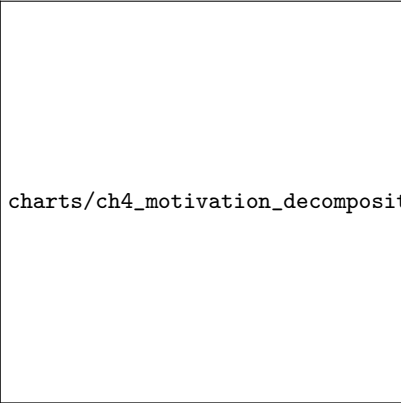
## Exemplu motivational: Sezonalitatea este peste tot



charts/ch4\_motivation\_seasonal.pdf

- Vanzarile cu amanuntul prezinta **tipare anuale** clare: varfuri in decembrie, minime in ianuarie
- Modelele ARIMA standard nu pot captura aceste **cicluri sezoniere repetitive**
- Ignorarea sezonality duce la erori sistematice de prognoza

## Intelegerea componentelor sezoniere



charts/ch4\_motivation\_decomposition.pdf

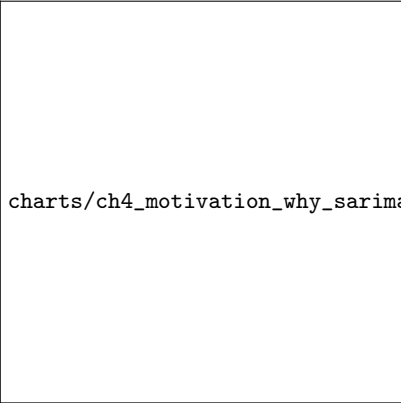
- Serie de timp sezoniera = **Trend** + **Tipar sezonier** + **Reziduuri**
- Descompunerea ajuta la vizualizarea separata a fiecarei componente
- Modelele SARIMA capteaza atat dinamica trendului, cat si comportamentul sezonier

## Aplicatie reala: Tipare lunare

charts/ch4\_motivation\_monthly.pdf

- Cererea de energie prezinta o **sezonalitate lunara** puternica (cicluri de incalzire/racire)
- Tiparul se repeta previzibil in fiecare an cu mici variatii
- Companiile de utilitati folosesc prognozele SARIMA pentru planificarea capacitatii

## De ce avem nevoie de SARIMA?



charts/ch4\_motivation\_why\_sarima.pdf

- **Stanga:** ACF sezoniera prezinta varfuri la lag-urile 12, 24, 36... (tipar anual)
- **Dreapta:** Reziduurile ARIMA inca prezinta autocorelatie sezoniera — modelul este incomplet
- SARIMA adauga **termeni AR si MA sezonieri** pentru a captura aceste tipare

## Ce vom invata astazi

### Concepte

- Identificarea tiparelor sezoniere
- Operatorul de diferentiere sezoniera
- Notatia  $SARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s$
- Celebrul "Model Airline"
- Selectia modelului pentru date sezoniere

### Abilitati

- Diagnosticarea sezonalitatii din ACF/PACF
- Determinarea perioadei sezoniere  $s$
- Alegerea ordinelor sezoniere  $(P, D, Q)$
- Implementarea SARIMA in Python/R
- Prognoza seriilor de timp sezoniere

### Ideea cheie

SARIMA = ARIMA aplicat la **doua frecvente**: nivelul obisnuit (pe termen scurt) si cel sezonier (pe termen lung)

## Ce este sezonalitatea?

### Definitie 1 (Sezonalitate)

O serie de timp prezinta **sezonalitate** cand arata fluctuatii regulate, periodice care se repeta pe o perioada fixa  $s$  (perioada sezoniera).

### Perioade sezoniere comune

- Date lunare:  $s = 12$  (ciclu anual)
- Date trimestriale:  $s = 4$  (ciclu anual)
- Date saptamanale:  $s = 52$  (anual) sau  $s = 7$  (tipar saptamanal)
- Date zilnice:  $s = 7$  (tipar saptamanal)



## Sezonalitatea: Ilustrare vizuala

charts/ch4\_def\_seasonality.pdf

## Exemple de date sezoniere

### Serii economice

- Vanzari cu amanuntul (varfuri de sarbatori)
- Turism (vara/iarna)
- Productie agricola
- Consum de energie
- Ocuparea fortei de munca (cicluri de angajare)

### Alte domenii

- Vreme/temperatura
- Trafic pe site-uri web
- Admisii la spital
- Utilizarea transportului
- Cererea de electricitate

### De ce conteaza

Ignorarea sezonalitatii duce la prognoze distorsionate si inferenta invalida!

## Exemplu: Datele privind pasagerii companiilor aeriene

charts/ch4\_airline\_data.pdf

- Pasageri internationali lunari ai companiilor aeriene (1949–1960)
- **Trend ascendent** clar si **amplitudine sezoniera crescatoare**
- Varfurile din vara reflecta tiparele calatoriilor de vacanta

## Vizualizarea tiparelor sezoniere

charts/ch4\_seasonal\_boxplot.pdf

- Diagrama box plot releva un tipar sezonier consistent de-a lungul anilor
- Iulie–August prezinta cele mai mari numere de pasageri (calatorii de vara)
- Noiembrie–Februarie prezinta cele mai mici numere (lunile de iarna)

# Sezonalitate determinista vs stochastica

## Sezonalitate determinista

Tipar sezonier fix:  $Y_t = \sum_{j=1}^s \gamma_j D_{jt} + \varepsilon_t$  unde  $D_{jt}$  sunt variabile dummy sezoniere.

### Proprietati:

- Tiparul constant in timp
- Eliminat prin regresie

## Sezonalitate stochastica

Tipar sezonier in evolutie:  $\Delta_s Y_t = Y_t - Y_{t-s}$  prezinta structura de dependenta.

### Proprietati:

- Tiparul evolueaza in timp
- Necesita diferentiere sezoniera

## Metode vizuale

- Graficul seriei de timp – cautati tipare repetitive
- Graficul sub-seriilor sezoniere – comparati aceleasi sezoane de-a lungul anilor
- Graficul ACF – varfuri la lag-uri sezoniere ( $s, 2s, 3s, \dots$ )


## Teste statistice

- Teste de radacina unitara sezoniera (HEGY, CH, OCSB)
- Testul F pentru variabile dummy sezoniere
- Testul Kruskal-Wallis (neparametric)

## Semnatura ACF

Sezonalitate puternica: ACF prezinta varfuri semnificative la lag-urile  $s, 2s, 3s, \dots$

## ACF releva structura sezoniera



charts/ch4\_acf\_seasonality.pdf

- **Descrestere lenta** la toate lag-urile indica nestationaritate (trend)
- **Varfuri la lag-urile 12, 24, 36** confirma tiparul sezonier ( $s = 12$ )
- ACF la lag-urile sezoniere prezinta descrestere lenta  $\Rightarrow$  necesita diferentiere sezoniera

## Testul F pentru variabile dummy sezoniere: Intuitie

### Ce face acest test?

Testeaza daca **valorile medii difera semnificativ intre sezoane**.

- Daca media din ianuarie  $\neq$  media din februarie  $\neq$  ...  $\neq$  media din decembrie  $\Rightarrow$  sezonalitate
- Compara un model CU variabile dummy sezoniere vs. un model FARA

### Modelele comparate

**Restrictionat:**  $Y_t = \alpha + \varepsilon_t$     **Nerestictionat:**  $Y_t = \alpha + \sum_{j=1}^{s-1} \gamma_j D_{jt} + \varepsilon_t$

unde  $D_{jt} = 1$  daca observatia  $t$  este in sezonul  $j$ , 0 altfel.

### Ideea cheie

Daca adaugarea variabilelor dummy sezoniere **reduce semnificativ** erorile de predictie, atunci sezonalitatea este prezenta.



## Testul F pentru variabile dummy sezoniere: Formula si exemplu

### Formula statisticii F

$$F = \frac{(SSR_R - SSR_U)/(s - 1)}{SSR_U/(n - s)} \sim F_{s-1, n-s}$$

- $SSR_R$  = Suma patratelor reziduurilor din modelul restrictionat (fara dummy)
- $SSR_U$  = Suma patratelor reziduurilor din modelul nerestricționat (cu dummy)
- $s - 1$  = numărul de restricții (lunar: 11, trimestrial: 3)

### Exemplu numeric (Date lunare, $n=120$ )

$SSR_R = 15000$ ,  $SSR_U = 8500$ ,  $s = 12$

$$F = \frac{(15000 - 8500)/11}{8500/108} = \frac{590.9}{78.7} = 7.51$$

Valoarea critica  $F_{0.05, 11, 108} \approx 1.87$ . Deoarece  $7.51 > 1.87$ : **Respingem  $H_0 \Rightarrow$  Sezonalitate prezenta!**

# Testul Kruskal-Wallis: Intuitie

## Ce face acest test?

Un test **neparametric** care verifica daca observatiile din diferite sezoane provin din aceeasi distributie.

- Functioneaza prin **ordonarea** tuturor observatiilor de la cea mai mica la cea mai mare
- Verifica daca rangurile sunt distribuite uniform intre sezoane
- Daca un sezon are in mod constant ranguri mai mari/mici  $\Rightarrow$  sezonalitate

## De ce sa-l folosim in locul testului F?

- **Fara ipoteza de normalitate** – functioneaza cu orice distributie
- **Robust la valori extreme** – valorile extreme nu distorsioneaza rezultatele

## Limitare

Mai putin puternic decat testul F cand datele SUNT distribuite normal.

# Testul Kruskal-Wallis: Formula si exemplu

## Statistica de test

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^s \frac{R_j^2}{n_j} - 3(N+1) \quad \text{unde } N = \text{total obs.}, n_j = \text{obs. in sezonul } j, R_j = \text{suma rangurilor.}$$

## Exemplu: Vanzari trimestriale (n=20, s=4)

Date ordonate 1-20. Sumele rangurilor: T1:  $R_1 = 15$ , T2:  $R_2 = 35$ , T3:  $R_3 = 70$ , T4:  $R_4 = 90$

$$H = \frac{12}{20 \times 21} \left( \frac{15^2}{5} + \frac{35^2}{5} + \frac{70^2}{5} + \frac{90^2}{5} \right) - 3(21) = 12.6$$

Valoarea critica  $\chi_{0.05,3}^2 = 7.81$ . Deoarece  $12.6 > 7.81$ : **Respingem  $H_0 \Rightarrow$  Sezonalitate!**

## In Python

```
scipy.stats.kruskal(q1, q2, q3, q4)
```

# Testul HEGY: Ce problema rezolva?

## Intrebarea cheie

Avand o serie de timp sezoniera, trebuie sa stim:

- 1 Are nevoie de **diferentiere obisnuita**  $(1 - L)$ ?  $\Rightarrow$  setam  $d = 1$
- 2 Are nevoie de **diferentiere sezoniera**  $(1 - L^s)$ ?  $\Rightarrow$  setam  $D = 1$

HEGY testeaza pentru **ambele** tipuri de radacini unitare simultan!

## De ce sa nu folosim doar ADF?

ADF testeaza doar pentru o radacina unitara **obisnuita** la frecventa zero. Datele sezoniere pot avea radacini unitare la **frecvente sezoniere** pe care ADF le omite!

## HEGY testeaza frecvente multiple

Trimestrial: testeaza la  $0, \pi, \pm\pi/2$ . Lunar: testeaza la  $0, \pi, \pm\pi/6, \pm\pi/3, \pm\pi/2, \pm2\pi/3, \pm5\pi/6$ .

# Testul HEGY: Formula de regresie (Trimestrial)

## Regresia auxiliara HEGY

Pentru date trimestriale ( $s = 4$ ), estimam:

$$\Delta_4 y_t = \pi_1 z_{1,t-1} + \pi_2 z_{2,t-1} + \pi_3 z_{3,t-2} + \pi_4 z_{4,t-2} + \sum_{j=1}^k \phi_j \Delta_4 y_{t-j} + \varepsilon_t$$

## Variabile transformate

$$z_{1t} = (1 + L + L^2 + L^3)y_t = y_t + y_{t-1} + y_{t-2} + y_{t-3}$$

$$z_{2t} = -(1 - L + L^2 - L^3)y_t = -y_t + y_{t-1} - y_{t-2} + y_{t-3}$$

$$z_{3t} = -(1 - L^2)y_t = -y_t + y_{t-2} \quad ; \quad z_{4t} = -(L - L^3)y_t = -y_{t-1} + y_{t-3}$$

## Ipoteze

$H_0 : \pi_1 = 0$  (frecv. 0),  $H_0 : \pi_2 = 0$  (frecv.  $\pi$ ),  $H_0 : \pi_3 = \pi_4 = 0$  (frecv.  $\pm\pi/2$ )

## Testul HEGY: Reguli de decizie cu exemple

### Valori critice HEGY (5%, $n=100$ , cu constanta)

Test	Statistica	Valoare critica	Daca NU este respins...
$t_1 (\pi_1 = 0)$	t-stat	-2.88	Necesita $d = 1$
$t_2 (\pi_2 = 0)$	t-stat	-2.88	Necesita $D = 1$
$F_{34} (\pi_3 = \pi_4 = 0)$	F-stat	6.57	Necesita $D = 1$

### Exemplu: PIB trimestrial

Sa presupunem ca HEGY da:  $t_1 = -1.52$ ,  $t_2 = -4.21$ ,  $F_{34} = 2.15$

- $t_1 = -1.52 > -2.88$ : Nu putem respinge  $\Rightarrow$  **necesita**  $d = 1$
- $t_2 = -4.21 < -2.88$ : Respingem  $\Rightarrow$  fara radacina unitara la  $\pi$
- $F_{34} = 2.15 < 6.57$ : Nu putem respinge  $\Rightarrow$  **necesita**  $D = 1$

**Concluzie:** Folosim SARIMA cu  $d = 1$ ,  $D = 1$

# Testul Canova-Hansen: Opusul testului HEGY

## HEGY vs Canova-Hansen: Ipoteze nule diferite!

	HEGY	Canova-Hansen
$H_0$	Radacina unitara sezoniera	<b>Fara</b> radacina unitara sezoniera
$H_1$	Fara radacina unitara sezoniera	Radacina unitara sezoniera
Respingem $H_0$	Folosim variabile dummy sezoniere	Folosim diferentiere $(1 - L^s)$
Nu respingem	Folosim diferentiere $(1 - L^s)$	Folosim variabile dummy sezoniere

## De ce conteaza?

- HEGY: "Demonstrati ca NU exista radacina unitara" (conservator fata de diferentiere)
- CH: "Demonstrati ca EXISTA radacina unitara" (conservator fata de variabile dummy)
- Folositi **ambele** teste pentru concluzii robuste!

## Procedura de testare

1. Regresam  $y_t$  pe variabile dummy sezoniere:  $y_t = \sum_{j=1}^s \gamma_j D_{jt} + u_t$
2. Calculam sumele partiale la frecventa sezoniera  $\lambda_i$ :  $S_{it}^{(c)} = \sum_{j=1}^t \hat{u}_j \cos(\lambda_i j)$ ,  $S_{it}^{(s)} = \sum_{j=1}^t \hat{u}_j \sin(\lambda_i j)$

## Statistica de test LM

$$LM_i = \frac{1}{T^2 \hat{\omega}_i} \left[ \sum_{t=1}^T (S_{it}^{(c)})^2 + \sum_{t=1}^T (S_{it}^{(s)})^2 \right]$$

unde  $\hat{\omega}_i$  = estimator consistent al densitatii spectrale la frecventa  $\lambda_i$ .

## Decizie

Respingem  $H_0$  (stationaritate) daca  $LM >$  valoare critica  $\Rightarrow$  este necesara diferentierea sezoniera.



## Sumar: Alegerea testului de sezonabilitate potrivit

Test	$H_0$	Daca respingem	Cel mai bun pentru
Test F Kruskal-Wallis	Fara sezonabilitate Fara dif. sezoniera	Sezonabilitate exista Sezonabilitate exista	Date normale Non-normale, valori extreme
HEGY	Radacina unitara exista	Folosim dummy	Determinarea $d$ , $D$
Canova-Hansen	Fara radacina unitara	Folosim $(1 - L^s)$	Confirmarea stabilitatii

### Ideea cheie

Test F/Kruskal-Wallis: "*Exista sezonabilitate?*"

HEGY/Canova-Hansen: "*Ce tip?*" (determinista vs stochastica)

## Operatorul de diferenta sezoniera

### Definitie 2 (Diferenta sezoniera)

Operatorul de diferenta sezoniera  $\Delta_s$  este definit ca:

$$\Delta_s Y_t = (1 - L^s) Y_t = Y_t - Y_{t-s}$$

unde  $L^s Y_t = Y_{t-s}$  este operatorul de lag sezonier.

### Exemple

- Date lunare ( $s = 12$ ):  $\Delta_{12} Y_t = Y_t - Y_{t-12}$   
Compara fiecare luna cu aceeași luna din anul trecut
- Date trimestriale ( $s = 4$ ):  $\Delta_4 Y_t = Y_t - Y_{t-4}$   
Compara fiecare trimestru cu același trimestru din anul trecut

## Diferenta sezoniera: Ilustrare vizuala

charts/ch4\_def\_seasonal\_diff.pdf

# Combinarea diferentierii obisnuite si sezoniere

## Diferentiere completa

Pentru serii cu atat trend cat si sezonalitate:

$$\Delta\Delta_s Y_t = (1 - L)(1 - L^s)Y_t$$

## Dezvoltare

$$(1 - L)(1 - L^s)Y_t = Y_t - Y_{t-1} - Y_{t-s} + Y_{t-s-1}$$

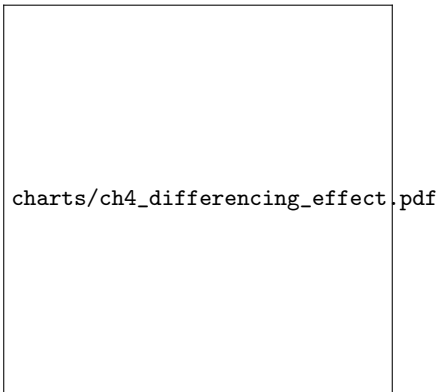
Pentru date lunare ( $s = 12$ ):

$$\Delta\Delta_{12} Y_t = Y_t - Y_{t-1} - Y_{t-12} + Y_{t-13}$$

## Ordinea diferentierii

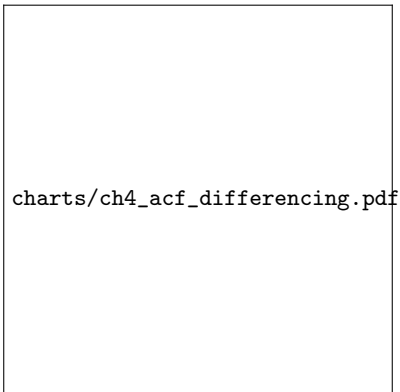
- $d$ : numarul de diferente obisnuite (eliminarea trendului)
- $D$ : numarul de diferente sezoniere (eliminarea trendului sezonier)

## Efectul operatiilor de diferentiere



- Diferentierea obisnuita elimina trendul dar tiparul sezonier ramane
- Diferentierea sezoniera elimina sezonalitatea dar tiparul de trend ramane
- **Ambele diferente** sunt necesare pentru a atinge stationaritatea

## ACF inainte si dupa diferente



- ACF originala: descrestere lenta indica nestationaritate
- Dupa  $\Delta$ : varfuri sezoniere raman la lag-urile 12, 24, 36
- Dupa  $\Delta_{12}$ : descresterea de trend ramane la lag-urile initiale
- Dupa  $\Delta\Delta_{12}$ : ACF se opreste brusc  $\Rightarrow$  **stationara**

### Definitie 3 (Proces integrat sezonier)

O serie  $Y_t$  este **integrata sezonier** de ordinul  $(d, D)_s$ , scrisa  $Y_t \sim I(d, D)_s$ , daca:

$$(1 - L)^d (1 - L^s)^D Y_t$$

este stationara.

### Cazuri comune

- $I(1, 0)_{12}$ : Doar radacina unitara obisnuita (lunara)
- $I(0, 1)_{12}$ : Doar radacina unitara sezoniera
- $I(1, 1)_{12}$ : Atat radacina unitara obisnuita cat si sezoniera

# Definitia modelului SARIMA

## Definitie 4 (SARIMA( $p, d, q$ ) $\times$ ( $P, D, Q$ ) $_s$ )

Modelul **Seasonal ARIMA** este:

$$\phi(L)\Phi(L^s)(1-L)^d(1-L^s)^DY_t = c + \theta(L)\Theta(L^s)\varepsilon_t$$

## Componente

- $\phi(L) = 1 - \phi_1L - \dots - \phi_pL^p$ : AR non-sezonier
- $\Phi(L^s) = 1 - \Phi_1L^s - \dots - \Phi_PL^{Ps}$ : AR sezonier
- $\theta(L) = 1 + \theta_1L + \dots + \theta_qL^q$ : MA non-sezonier
- $\Theta(L^s) = 1 + \Theta_1L^s + \dots + \Theta QL^{Qs}$ : MA sezonier
- $(1-L)^d$ : Diferentiere obisnuita;  $(1-L^s)^D$ : Diferentiere sezoniera



## SARIMA: Ilustrare vizuala

charts/ch4\_def\_sarima.pdf

## Specificatie completa

$SARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$  are 7 parametri de specificat:

Parametru	Semnificatie
$p$	Ordinul AR non-sezonier
$d$	Ordinul diferentierii non-sezoniere
$q$	Ordinul MA non-sezonier
$P$	Ordinul AR sezonier
$D$	Ordinul diferentierii sezoniere
$Q$	Ordinul MA sezonier
$s$	Perioada sezoniera

## Exemplu

$SARIMA(1, 1, 1) \times (1, 1, 1)_{12}$ : Date lunare cu AR(1), MA(1), AR sezonier(1), MA sezonier(1), si atat diferentiere obisnuita cat si sezoniera.

## Modele SARIMA comune

Modelul Airline:  $SARIMA(0, 1, 1) \times (0, 1, 1)_s$

$(1 - L)(1 - L^s)Y_t = (1 + \theta L)(1 + \Theta L^s)\varepsilon_t$  – Model clasic (Box & Jenkins, 1970)

$SARIMA(1, 0, 0) \times (1, 0, 0)_s$

$(1 - \phi L)(1 - \Phi L^s)Y_t = \varepsilon_t$  – AR sezonier si non-sezonier pur

$SARIMA(0, 1, 1) \times (0, 1, 0)_s$

$(1 - L)(1 - L^s)Y_t = (1 + \theta L)\varepsilon_t$  – Random walk + dif. sezoniera + MA(1)

# Structura multiplicativa

## De ce multiplicativa?

Partile sezoniera si non-sezoniera se **inmultesc**:

$$\phi(L)\Phi(L^s) \quad \text{si} \quad \theta(L)\Theta(L^s)$$

## Exemplu: SARIMA(1,0,0) $\times$ (1,0,0)<sub>12</sub>

$$(1 - \phi L)(1 - \Phi L^{12})Y_t = \varepsilon_t$$

$$\text{Dezvoltand: } Y_t - \phi Y_{t-1} - \Phi Y_{t-12} + \phi\Phi Y_{t-13} = \varepsilon_t$$

Termenul incrucist  $\phi\Phi Y_{t-13}$  capteaza interactiunea!

## Interpretare

Structura multiplicativa permite modelarea parsimoniasa a tiparelor sezoniere complexe cu putini parametri.

### Ideea cheie

Modelele sezoniere prezinta tipare la ambele:

- Lag-uri non-sezoniere:  $1, 2, 3, \dots$
- Lag-uri sezoniere:  $s, 2s, 3s, \dots$

Model	ACF	PACF
SAR( $P$ )	Descreste la $s, 2s, \dots$	Se opreste dupa $Ps$
SMA( $Q$ )	Se opreste dupa $Qs$	Descreste la $s, 2s, \dots$
SARMA	Descreste la lag-uri sezoniere	Descreste la lag-uri sezoniere

## Exemplu: ACF/PACF pentru modelul Airline

SARIMA(0, 1, 1)  $\times$  (0, 1, 1)<sub>12</sub>

Dupa diferentiere  $W_t = (1 - L)(1 - L^{12})Y_t$ :

$$W_t = (1 + \theta L)(1 + \Theta L^{12})\varepsilon_t$$

### Tiparul ACF asteptat

- Varf la lag-ul 1 (de la  $\theta$ )
- Varf la lag-ul 12 (de la  $\Theta$ )
- Varf la lag-ul 13 (de la interactiunea  $\theta \cdot \Theta$ )
- Toate celelalte lag-uri aproape de zero

### Tiparul PACF asteptat

- Descrestere exponentiala la lag-urile 1, 2, 3, ...
- Descrestere exponentiala la lag-urile 12, 24, 36, ...

## Proces pas cu pas

- 1 Examinati ACF pentru descrestere lenta la lag-uri sezoniere  $\Rightarrow$  diferentiere sezoniera
- 2 Dupa diferentiere, verificati tiparele ACF/PACF
- 3 Comportamentul non-sezonier la lag-urile  $1, 2, \dots, s - 1$
- 4 Comportamentul sezonier la lag-urile  $s, 2s, 3s, \dots$

## Sfaturi practice

- Incepeti cu  $d \leq 1$  si  $D \leq 1$
- De obicei  $P, Q \leq 2$  este suficient
- Folositi criterii informationale (AIC, BIC) pentru selectia finala
- Algoritmii Auto-SARIMA pot ajuta

### Estimare prin verosimilitate maxima

Abordare standard pentru SARIMA:

- MLE conditionata (conditionata de valorile initiale)
- MLE exacta (prin filtrul Kalman)

### Consideratii computationale

- Mai multi parametri decat ARIMA  $\Rightarrow$  mai multe date necesare
- Parametrii sezonieri estimati din lag-urile  $s, 2s, \dots$
- Necesita suficiente cicluri sezoniere (cel putin 3-4 ani de date lunare)



## Conditii de stationaritate

Atat polinoamele AR non-sezoniere cat si sezoniere trebuie sa aiba radacini in afara cercului unitate:

- $\phi(z) = 0 \Rightarrow |z| > 1$
- $\Phi(z^s) = 0 \Rightarrow |z| > 1$

## Conditii de invertibilitate

Atat polinoamele MA non-sezoniere cat si sezoniere trebuie sa aiba radacini in afara cercului unitate:

- $\theta(z) = 0 \Rightarrow |z| > 1$
- $\Theta(z^s) = 0 \Rightarrow |z| > 1$

### Analiza reziduurilor

Dupa ajustarea SARIMA, verificati ca reziduurile sunt zgomot alb:

- 1 Graficul reziduurilor in timp (fara tipare)
- 2 ACF a reziduurilor (fara varfuri semnificative)
- 3 Testul Ljung-Box la lag-uri multiple inclusiv sezoniere
- 4 Teste de normalitate (grafic Q-Q, Jarque-Bera)

### Important

Verificati ACF la **ambele** lag-uri non-sezoniere si sezoniere!

ACF semnificativa la lag-ul 12 sugereaza modelare sezoniera inadecvata.

### Criterii informationale

Comparati modelele SARIMA concurente folosind:

- $AIC = -2 \ln(L) + 2k$
- $BIC = -2 \ln(L) + k \ln(n)$
- $AICc = AIC + \frac{2k(k+1)}{n-k-1}$  (corectat pentru esantioane mici)

unde  $k = p + q + P + Q + 1$  (plus 1 pentru varianta).

### Auto-SARIMA

`pmdarima.auto_arima()` din Python cu `seasonal=True` cauta automat  $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$  optim.

### Calculul prognozei

Proгноzele SARIMA sunt calculate recursiv:

- Inlocuiti  $\varepsilon_{T+h}$  viitor cu 0
- Inlocuiti  $Y_{T+h}$  viitor cu prognozele  $\hat{Y}_{T+h|T}$
- Folositi valorile trecute cunoscute  $Y_T, Y_{T-1}, \dots$

### Tiparul sezonier in prognoze

Proгноzele SARIMA capteaza in mod natural sezonalitatea:

- Pe termen scurt: influentate de valorile recente
- Pe termen lung: revin la tiparul sezonier

## Intervale de prognoza

### Cuantificarea incertitudinii

Interval de predictie  $(1 - \alpha)\%$ :

$$\hat{Y}_{T+h|T} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(e_{T+h})}$$

Varianta calculata din reprezentarea  $\text{MA}(\infty)$ .

### Proprietati cheie

- Intervalele se largesc cu orizontul de prognoza
- Pentru serii  $I(1, 1)_s$ : intervalele cresc nelimitat
- Tiparul sezonier vizibil in prognozele punctuale
- Incertitudinea capteaza atat variatia de trend cat si cea sezoniera

### Comportamentul cand $h \rightarrow \infty$

- Proгноzele punctuale converg la tiparul sezonier determinist
- Daca exista deriva: trend linear + tipar sezonier
- Intervalele de prognoza continua sa se largeasca

### Implicatie practica

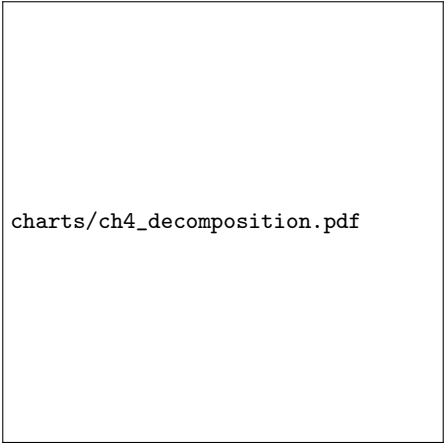
- Pe termen scurt: SARIMA capteaza atat nivelul cat si sezonul
- Pe termen mediu: Proгноze sezoniere bune, incertitudine crescatoare
- Pe termen lung: Reflecta in principal tiparul sezonier, intervale largi

## Datele privind pasagerii companiilor aeriene

`charts/ch4_airline_data.pdf`

- Set de date clasic: Pasageri internationali lunari ai companiilor aeriene (1949-1960)
- Trend ascendent clar si amplitudine sezoniera crescatoare

## Descompunerea sezoniera



charts/ch4\_decomposition.pdf

- Trend: Crestere puternica ascendenta
- Sezonalitate: Varfuri de vara (calatorii de vacanta)
- Rezidual: Variatie aleatoare dupa eliminarea trendului si sezonului



charts/ch4\_acf\_pacf.pdf

- După diferențierea  $\Delta\Delta_{12}$ : varfuri la lag-urile 1 și 12
- Sugerează  $\text{SARIMA}(0, 1, 1) \times (0, 1, 1)_{12}$  (Modelul Airline)

## Rezultatele prognozei SARIMA

`charts/ch4_sarima_forecast.pdf`

- SARIMA capteaza atat trendul cat si tiparul sezonier
- Prognozele prezinta varfuri si minime sezoniere corespunzatoare

## Diagnosticarea modelului

`charts/ch4_diagnostics.pdf`

- Reziduurile par aleatorii; ACF in limite la toate lag-urile
- Modelul capteaza adecvat structura sezoniera

## Ajustarea SARIMA in Python

```
from statsmodels.tsa.statespace.sarimax import SARIMAX  
model = SARIMAX(y, order=(0,1,1), seasonal_order=(0,1,1,12))  
results = model.fit()  
forecast = results.get_forecast(steps=24)
```

## Nota

Exemple complete in Python cu comentarii sunt furnizate in caietele Jupyter.

### Puncte principale

- 1 **Sezonalitatea** este comuna în datele economice și de afaceri
- 2 **Diferențierea sezoniera**  $(1 - L^s)$  elimină sezonalitatea stochastică
- 3 **SARIMA** $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$  extinde ARIMA pentru date sezoniere
- 4 **Structura multiplicativă** captează interacțiunile sezon-trend
- 5 **ACF/PACF** prezintă tipare la ambele lag-uri obișnuite și sezoniere
- 6 **Selectia modelului:** Folositi AIC/BIC sau algoritmi auto-SARIMA

### Pasii urmasori

Capitolul 5 va acoperi seriile de timp multivariate: modele VAR, cauzalitatea Granger și cointegrarea.

## Intrebarea 1

### Intrebare

Pentru date lunare cu sezonalitate anuala, care este perioada sezoniera  $s$ ?

- ☐ A  $s = 4$
- ☐ B  $s = 7$
- ☐ C  $s = 12$
- ☐ D  $s = 52$

## Intrebarea 1: Raspuns

Raspuns corect: (C)  $s = 12$  (12 luni pe an)

Perioade comune: Trimestrial=4, Lunar=12, Saptamanal=52, Zilnic=7, Orar=24

`charts/ch4_quiz1_seasonal_periods.pdf`

### Intrebare

Ce face operatorul de diferenta sezoniera  $(1 - L^{12})$  unei serii lunare?

- ☐ A Calculeaza  $Y_t - Y_{t-1}$  (schimbarea luna-la-luna)
- ☐ B Calculeaza  $Y_t - Y_{t-12}$  (schimbarea an-la-an)
- ☐ C Calculeaza media mobila pe 12 luni
- ☐ D Elimina doar componenta de trend



## Intrebarea 2: Raspuns

Raspuns corect: (B) Schimbarea an-la-an

$(1 - L^{12})Y_t = Y_t - Y_{t-12}$  elimina tiparul sezonier prin compararea acelorasi luni.

charts/ch4\_quiz2\_seasonal\_diff.pdf

### Intrebare

In notatia  $SARIMA(1, 1, 1) \times (1, 1, 1)_{12}$ , ce reprezinta partea  $(1, 1, 1)_{12}$ ?

- ☐ A AR(1), o diferentiere, MA(1) la nivelul obisnuit
- ☐ B AR sezonier(1), o diferentiere sezoniera, MA sezonier(1)
- ☐ C 12 termeni AR, 12 diferente, 12 termeni MA
- ☐ D Modelul are 12 parametri in total

### Intrebarea 3: Raspuns

Raspuns corect: (B)

AR sezonier(1), o diferentiere sezoniera, MA sezonier(1)

#### Descompunerea notatiei SARIMA

$SARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ :

$(p, d, q)$	Non-sezonier: AR( $p$ ), $d$ diferente, MA( $q$ )
$(P, D, Q)_s$	Sezonier: SAR( $P$ ), $D$ dif. sezoniere, SMA( $Q$ )

Pentru  $(1, 1, 1) \times (1, 1, 1)_{12}$ :

- Non-sezonier: AR(1), o diferenta obisnuita, MA(1)
- Sezonier: SAR(1) la lag-ul 12, un  $\Delta_{12}$ , SMA(1) la lag-ul 12

### Intrebare

“Modelul Airline” este  $\text{SARIMA}(0, 1, 1) \times (0, 1, 1)_{12}$ . Cati parametri trebuie estimati (excluzand varianta)?

- ☐ A 1
- ☐ B 2
- ☐ C 4
- ☐ D 12

## Intrebarea 4: Raspuns

Raspuns corect: (B)

2 parametri

### Structura modelului

SARIMA(0, 1, 1)  $\times$  (0, 1, 1)<sub>12</sub>:

$$(1 - L)(1 - L^{12})Y_t = (1 + \theta_1 L)(1 + \Theta_1 L^{12})\varepsilon_t$$

Parametri:

- $\theta_1$ : coeficient MA non-sezonier
- $\Theta_1$ : coeficient MA sezonier

Total: **2 parametri** (plus  $\sigma^2$ )

### De ce “Modelul Airline”?

Box & Jenkins (1970) au folosit acest model pentru a prognoza pasagerii companiilor aeriene internationale. Este remarcabil de eficient pentru multe serii economice sezoniere!

## Intrebarea 5

### Intrebare

Observati varfuri ACF semnificative la lag-urile 12, 24 si 36 intr-o serie lunara. Ce sugereaza aceasta?

- ☐ A Seria are o radacina unitara
- ☐ B Seria are sezonalitate anuala care necesita diferentiere sezoniera
- ☐ C Seria urmeaza un proces  $AR(36)$
- ☐ D Seria este deja stationara

## Intrebarea 5: Raspuns

Raspuns corect: (B) Necesita diferentiere sezoniera

Varfuri ACF la 12, 24, 36 = sezonalitate stochastica. Aplicati  $(1 - L^{12})$  pentru a o elimina.

charts/ch4\_quiz5\_seasonal\_acf.pdf

### Intrebare

Dupa aplicarea  $(1 - L)(1 - L^{12})$  unei serii lunare, ACF prezinta un varf semnificativ doar la lag-ul 1 si lag-ul 12. Ce model SARIMA este sugerat?

- ☐ A SARIMA(1, 1, 0)  $\times$  (1, 1, 0)<sub>12</sub>
- ☐ B SARIMA(0, 1, 1)  $\times$  (0, 1, 1)<sub>12</sub>
- ☐ C SARIMA(1, 1, 1)  $\times$  (1, 1, 1)<sub>12</sub>
- ☐ D SARIMA(0, 1, 0)  $\times$  (0, 1, 0)<sub>12</sub>



## Intrebarea 6: Raspuns

Raspuns corect: (B)

SARIMA(0, 1, 1)  $\times$  (0, 1, 1)<sub>12</sub> (Modelul Airline)

### Reguli de identificare ACF/PACF

Pentru procese MA, ACF se **opreste brusc** dupa lag-ul  $q$ :

Tipar	Sugereaza
Varf ACF doar la lag-ul 1	MA(1) pentru partea non-sezoniera
Varf ACF doar la lag-ul 12	SMA(1) pentru partea sezoniera

Combinat: MA(1)  $\times$  SMA(1) = (0,  $d$ , 1)  $\times$  (0,  $D$ , 1)<sub>12</sub>

Cu  $d = 1$  si  $D = 1$  (deja diferentiata): (0, 1, 1)  $\times$  (0, 1, 1)<sub>12</sub>

## Referinte



Box, G.E.P., Jenkins, G.M., Reinsel, G.C., & Ljung, G.M. (2015). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. 5th ed. Wiley.



Hyndman, R.J. & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*. 3rd ed. OTexts.



Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.



Brockwell, P.J. & Davis, R.A. (2016). *Introduction to Time Series and Forecasting*. 3rd ed. Springer.