



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 5: Modele de Volatilitate

ARCH, GARCH, EGARCH, TGARCH



Cuprins

- 1 Introducere în Modelarea Volatilității
- 2 Modelul ARCH
- 3 Modelul GARCH
- 4 Modele GARCH Asimetrice
- 5 Selectarea și Diagnosticarea Modelelor
- 6 Prognoza Volatilității
- 7 Implementare în Python
- 8 Studiu de Caz: S&P 500
- 9 Rezumat

La finalul acestui capitol, veți fi capabili să:

- ① Înțelegeți **volatility clustering** și faptele stilizate ale randamentelor financiare
- ② Estimați și interpretați modele **ARCH** și **GARCH**
- ③ Aplicați modele asimetrice (**EGARCH**, **GJR-GARCH**) pentru efectul de levier
- ④ Efectuați diagnosticarea și selectarea modelelor
- ⑤ Prognozați volatilitatea și calculați **Value at Risk (VaR)**

Competențe Practice

- Implementare Python cu pachetul `arch`
- Interpretarea parametrilor și a persistenței volatilității
- Calculul VaR pentru managementul riscului

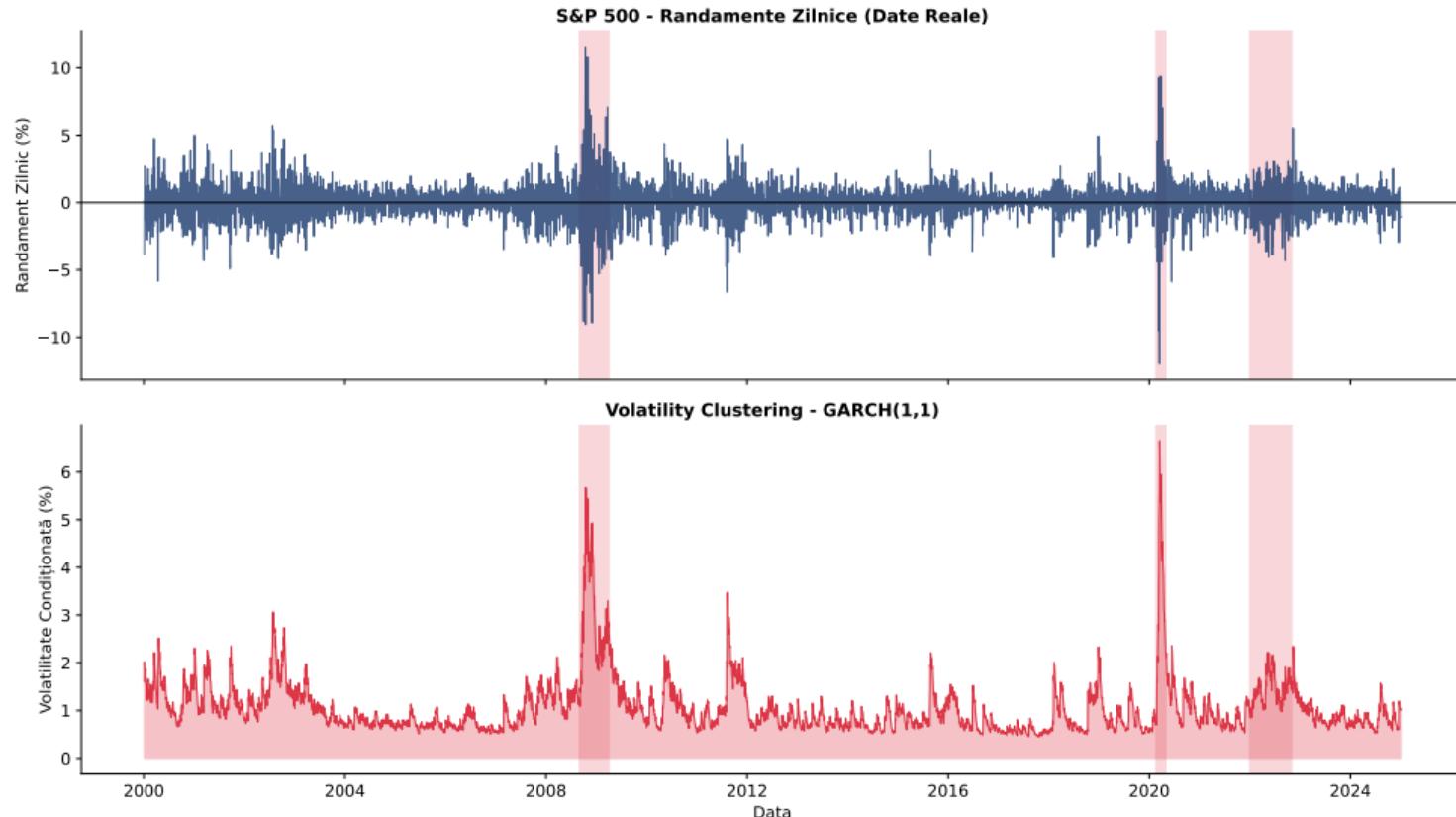
Observații Empirice în Seriile Financiare

- Randamentele financiare prezintă **volatility clustering** — perioadele de volatilitate ridicată tind să fie urmate de perioade de volatilitate ridicată
- Distribuția randamentelor are **cozi groase** (leptokurtosis)
- Corelația randamentelor este aproape zero, dar corelația pătratelor este semnificativă
- Volatilitatea răspunde **asimetric** la șocuri (leverage effect)

Limitarea Modelelor ARIMA

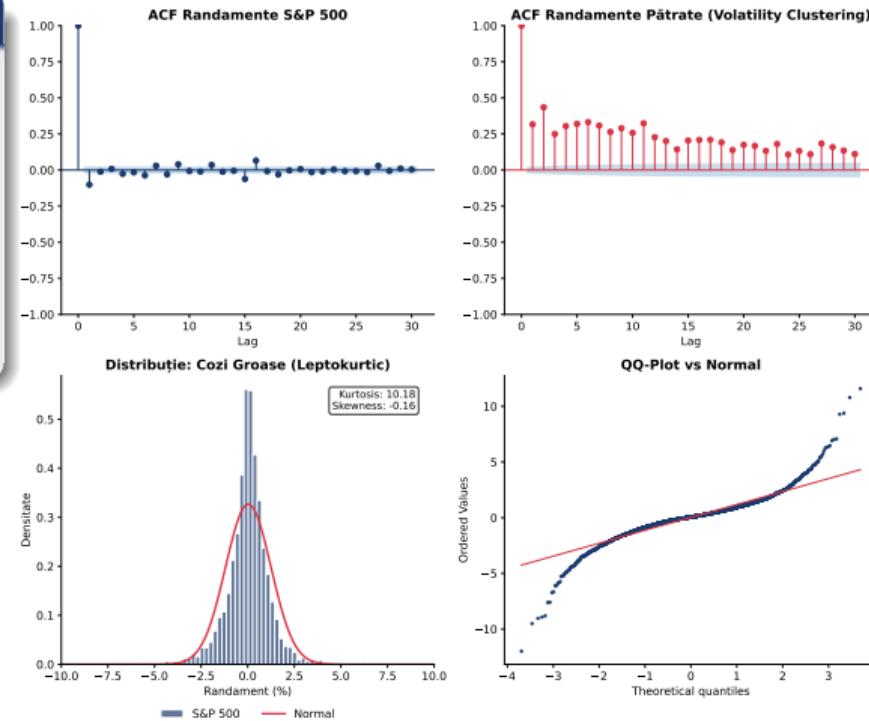
Modelele ARIMA presupun **variantă constantă** (homoscedasticitate), ceea ce nu este realist pentru seriile financiare!

Volatility Clustering



Proprietăți Observate

- ① Absența autocorrelației în randamente
- ② Autocorrelație semnificativă în r_t^2 și $|r_t|$
- ③ Cozi groase (kurtosis > 3)
- ④ Leverage effect — corelație negativă între randamente și volatilitate
- ⑤ Volatility clustering



Definitie 1 (Varianță Condiționată)

Fie $\{r_t\}$ o serie de randamente. **Varianța condiționată** la momentul t este:

$$\sigma_t^2 = \text{Var}(r_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}[(r_t - \mu_t)^2 | \mathcal{F}_{t-1}]$$

unde \mathcal{F}_{t-1} reprezintă informația disponibilă până la momentul $t - 1$.

Modelul General

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \text{i.i.d.}(0, 1)$$

unde:

- μ_t = media condiționată (poate fi modelată ARMA)
- σ_t^2 = varianța condiționată (modelată ARCH/GARCH)
- z_t = inovații standardizate (Normal, Student-t, GED)

Modelul ARCH(q) — Engle (1982)

Definitie 2 (ARCH(q))

Modelul **Autoregressive Conditional Heteroskedasticity** de ordin q :

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \text{i.i.d.}(0, 1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2$$

Restricții pentru Stationaritate

- $\omega > 0$ (varianță de bază pozitivă)
- $\alpha_i \geq 0$ pentru $i = 1, \dots, q$ (non-negativitate)
- $\sum_{i=1}^q \alpha_i < 1$ (stationaritate)

Observatie 1

Robert Engle a primit **Premiul Nobel pentru Economie** în 2003 pentru dezvoltarea modelului ARCH!

Proprietăți ale Modelului ARCH(1)

ARCH(1): $\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$

- **Varianța necondiționată:** $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \frac{\omega}{1 - \alpha_1}$ (dacă $\alpha_1 < 1$)
- **Kurtosis:** $\kappa = 3 \cdot \frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2}$ (dacă $\alpha_1^2 < 1/3$)
- Kurtosis > 3 pentru $\alpha_1 > 0 \Rightarrow$ cozi groase!

Exemplu Numeric

Dacă $\omega = 0.0001$ și $\alpha_1 = 0.3$:

- Varianța necondiționată: $\sigma^2 = \frac{0.0001}{1 - 0.3} = 0.000143$
- Kurtosis: $\kappa = 3 \cdot \frac{1 - 0.09}{1 - 0.27} = 3.74 > 3$

Testul Engle pentru Efecte ARCH

Procedură:

- ① Estimează modelul pentru medie și obține reziduurile $\hat{\varepsilon}_t$
- ② Calculează $\hat{\varepsilon}_t^2$
- ③ Regresează $\hat{\varepsilon}_t^2$ pe lag-urile sale:

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \cdots + \beta_q \hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + u_t$$

- ④ Calculează statistica $LM = T \cdot R^2 \sim \chi^2(q)$

Ipoteze

- H_0 : Nu există efecte ARCH ($\alpha_1 = \cdots = \alpha_q = 0$)
- H_1 : Există efecte ARCH (cel puțin un $\alpha_i \neq 0$)

Probleme Practice

- ① **Ordine mare** — de obicei sunt necesare multe lag-uri (q mare)
- ② **Mulți parametri** — dificultăți de estimare
- ③ **Restricții de non-negativitate** — greu de impus pentru q mare
- ④ **Nu capturează persistența** — volatilitatea observată este foarte persistentă

Soluția

Modelul GARCH — introduce lag-uri ale varianței condiționate pentru a captura persistența cu mai puțini parametri!

Modelul GARCH(p,q) — Bollerslev (1986)

Definitie 3 (GARCH(p,q))

Modelul **Generalized ARCH**:

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \text{i.i.d.}(0, 1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Interpretare

- ω = nivel de bază al volatilității
- α_i = reacția la șocuri recente (news coefficients)
- β_j = persistența volatilității (memory)
- $\alpha + \beta$ = persistența totală

Modelul GARCH(1,1)

Cel Mai Popular Model de Volatilitate

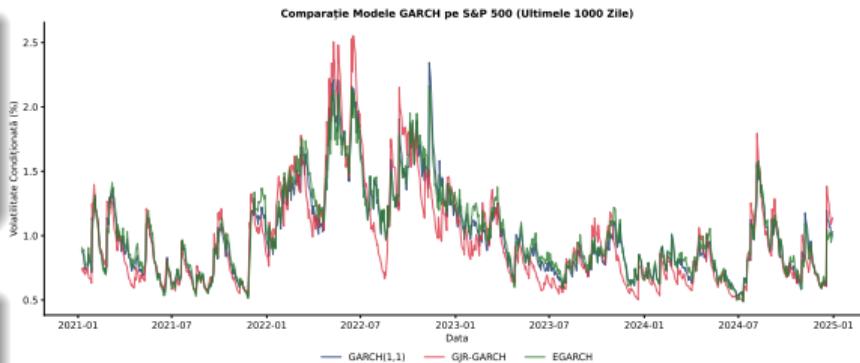
$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

Restricții

- $\omega > 0$
- $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$
- $\alpha + \beta < 1$ (stationaritate)

Proprietăți

- Varianța necondiționată: $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$
- Half-life: $HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha + \beta)}$



GARCH(1,1) ca ARMA pentru ε_t^2

Reprezentare ARMA(1,1)

Definim $\nu_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ (șocul varianței). Atunci:

$$\varepsilon_t^2 = \omega + (\alpha + \beta)\varepsilon_{t-1}^2 + \nu_t - \beta\nu_{t-1}$$

Aceasta este un **ARMA(1,1)** pentru ε_t^2 !

Implicații

- ACF al ε_t^2 decinde exponențial (ca ARMA)
- Persistența este dată de $\alpha + \beta$
- PACF poate ajuta la identificarea ordinului

Metoda Verosimilității Maxime (MLE)

Funcția de log-verosimilitate (distribuție normală):

$$\ell(\theta) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[\ln(\sigma_t^2) + \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} \right]$$

Distribuții Alternative pentru z_t

- **Student-t**: capturează cozile groase

$$f(z; \nu) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{(\nu-2)\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{z^2}{\nu-2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

- **GED (Generalized Error Distribution)**: flexibilitate pentru kurtosis
- **Skewed Student-t**: asimetrie și cozi groase

Valori Tipice pentru GARCH(1,1)

Serie	α	β	$\alpha + \beta$
S&P 500 zilnic	0.05–0.10	0.85–0.95	0.95–0.99
EUR/USD zilnic	0.03–0.08	0.90–0.95	0.95–0.99
Bitcoin zilnic	0.10–0.20	0.75–0.85	0.90–0.98
Obligațiuni	0.02–0.05	0.90–0.97	0.95–0.99

Observații

- $\alpha + \beta$ aproape de 1 \Rightarrow volatilitate foarte persistentă
- α mic, β mare \Rightarrow reacție lentă la șocuri, memorie lungă
- Bitcoin: α mai mare \Rightarrow reacție mai rapidă la news

Definitie 4 (IGARCH(1,1))

Când $\alpha + \beta = 1$:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + (1 - \alpha) \sigma_{t-1}^2$$

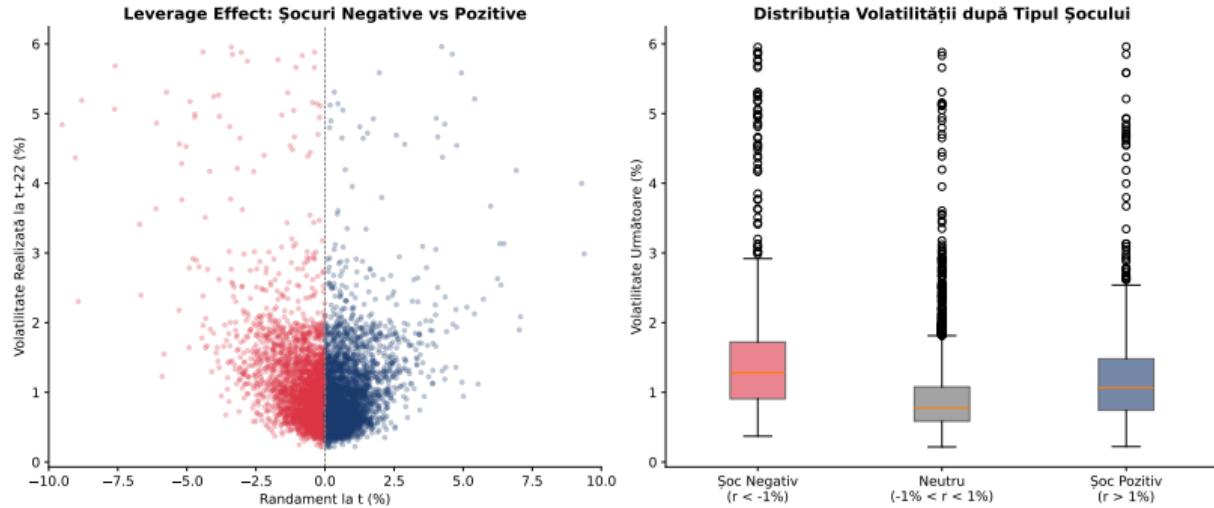
Proprietăți

- Varianța necondiționată nu există (infinită)
- řocurile au efect **permanent** asupra volatilității
- Folosit pentru serii cu persistență extremă
- Util pentru **RiskMetrics** (J.P. Morgan): $\alpha = 0.06$, $\beta = 0.94$

Observatie 2

IGARCH este analog cu o rădăcină unitară în varianță!

Leverage Effect



Definiție

Leverage effect: řourile negative (scăderi de preț) tend să crească volatilitatea **mai mult** decât řourile pozitive de aceeași magnitudine.

Problema GARCH Standard

GARCH(p, q) depinde de σ^2

dacă tratează řourile pozitive și negative simetric

Definitie 5 (EGARCH(1,1))

Exponential GARCH:

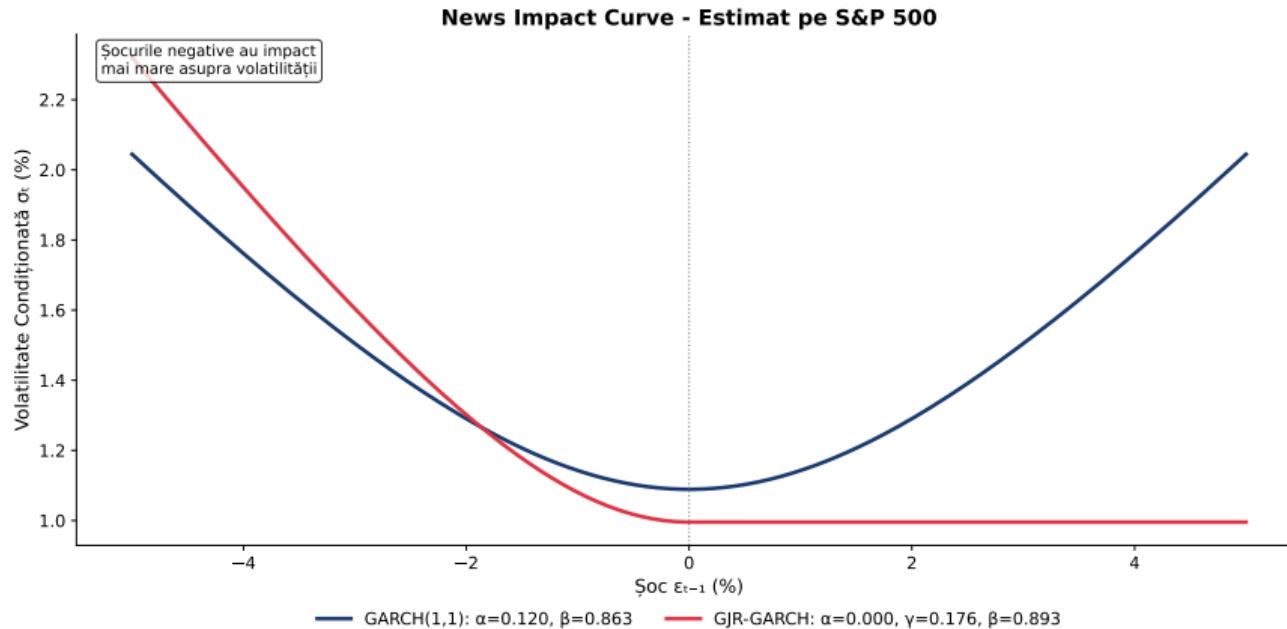
$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \alpha(|z_{t-1}| - \mathbb{E}[|z_{t-1}|]) + \gamma z_{t-1} + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2)$$

unde $z_t = \varepsilon_t / \sigma_t$.

Avantaje EGARCH

- Nu necesită restricții de non-negativitate — modelează $\ln(\sigma_t^2)$
- Captură leverage effect prin parametrul γ
 - $\gamma < 0$: șocuri negative \Rightarrow volatilitate mai mare
 - $\gamma = 0$: efect simetric (ca GARCH)
- Persistența este dată de β

News Impact Curve — EGARCH



Interpretare

News Impact Curve: arată cum volatilitatea viitoare σ_{t+1}^2 depinde de şocul curent ε_t , menținând σ_t^2 constant.

Modelul GJR-GARCH (TGARCH)

Definitie 6 (GJR-GARCH(1,1))

Glosten, Jagannathan & Runkle (1993):

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 \cdot I_{t-1} + \beta \sigma_{t-1}^2$$

unde $I_{t-1} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \varepsilon_{t-1} < 0 \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$

Interpretare

- řouri pozitive ($\varepsilon_{t-1} > 0$): impact = α
- řouri negative ($\varepsilon_{t-1} < 0$): impact = $\alpha + \gamma$
- Leverage effect prezent dacă $\gamma > 0$

Stationaritate

$$\alpha + \gamma/2 + \beta < 1$$

Definitie 7 (TGARCH(1,1))

Zakoian (1994) — modelează deviația standard:

$$\sigma_t = \omega + \alpha^+ \varepsilon_{t-1}^+ + \alpha^- \varepsilon_{t-1}^- + \beta \sigma_{t-1}$$

unde $\varepsilon_t^+ = \max(\varepsilon_t, 0)$ și $\varepsilon_t^- = \max(-\varepsilon_t, 0)$.

Comparatie Modele Asimetrice

Model	Specificație	Leverage
GARCH	σ_t^2	Nu
EGARCH	$\ln(\sigma_t^2)$	Da ($\gamma < 0$)
GJR-GARCH	σ_t^2 cu indicator	Da ($\gamma > 0$)
TGARCH	σ_t	Da ($\alpha^- > \alpha^+$)

Criterii Informaționale

- **AIC** = $-2\ell + 2k$
- **BIC** = $-2\ell + k \ln(T)$
- **HQIC** = $-2\ell + 2k \ln(\ln(T))$

unde ℓ = log-verosimilitate maximizată, k = nr. parametri.

Recomandări Practice

- GARCH(1,1) este suficient în 90% din cazuri
- Verifică dacă modelul asimetric îmbunătățește semnificativ fit-ul
- Alege distribuția inovațiilor care minimizează AIC/BIC

Reziduuri Standardizate

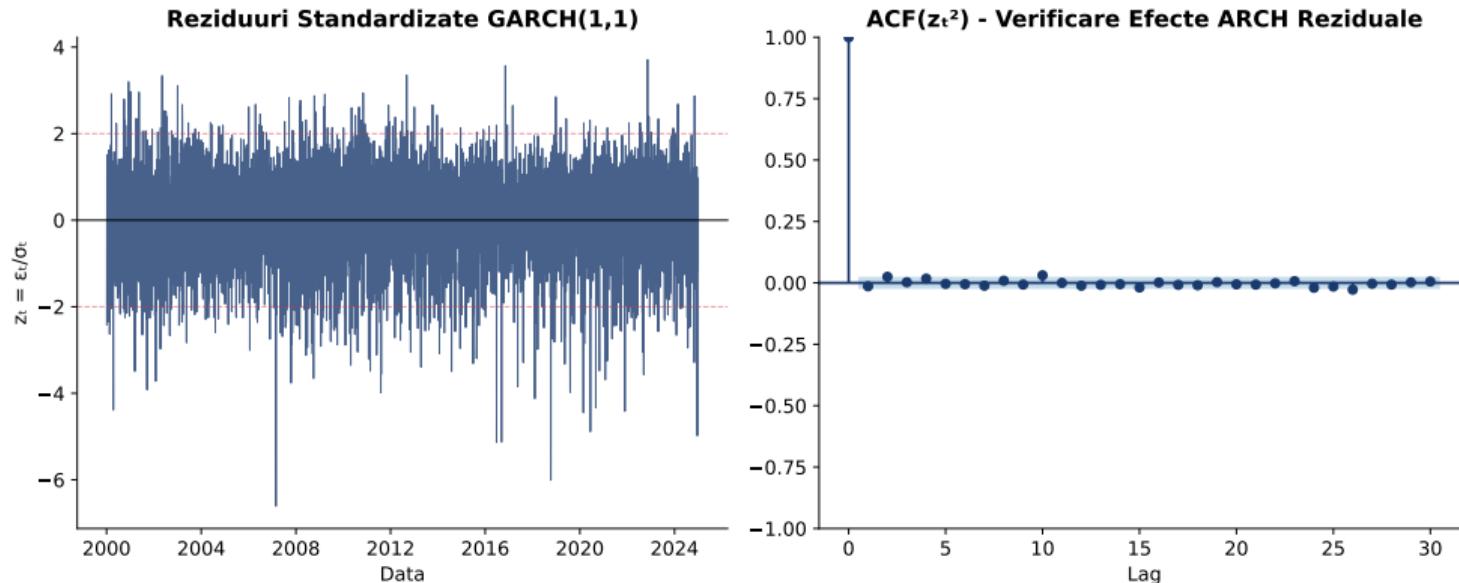
$$\hat{z}_t = \frac{\hat{\varepsilon}_t}{\hat{\sigma}_t}$$

Dacă modelul este corect specificat, \hat{z}_t ar trebui să fie i.i.d.(0,1).

Verificări Diagnostic

- ① **Ljung-Box pe \hat{z}_t :** verifică absența autocorrelației în medie
- ② **Ljung-Box pe \hat{z}_t^2 :** verifică absența efectelor ARCH reziduale
- ③ **Test ARCH-LM pe \hat{z}_t :** confirmare absența heteroscedasticitate
- ④ **Histogramă + QQ-plot:** verifică distribuția asumată

Exemplu Diagnostic



Distribuția Reziduurilor Standardizate



QQ-Plot Reziduuri vs Normal



Prognoza cu GARCH(1,1)

Prognoză Un Pas Înainte

$$\hat{\sigma}_{T+1}^2 = \omega + \alpha \varepsilon_T^2 + \beta \sigma_T^2$$

Prognoză Multi-Pas

Pentru $h > 1$:

$$\mathbb{E}_T[\sigma_{T+h}^2] = \bar{\sigma}^2 + (\alpha + \beta)^{h-1}(\sigma_{T+1}^2 - \bar{\sigma}^2)$$

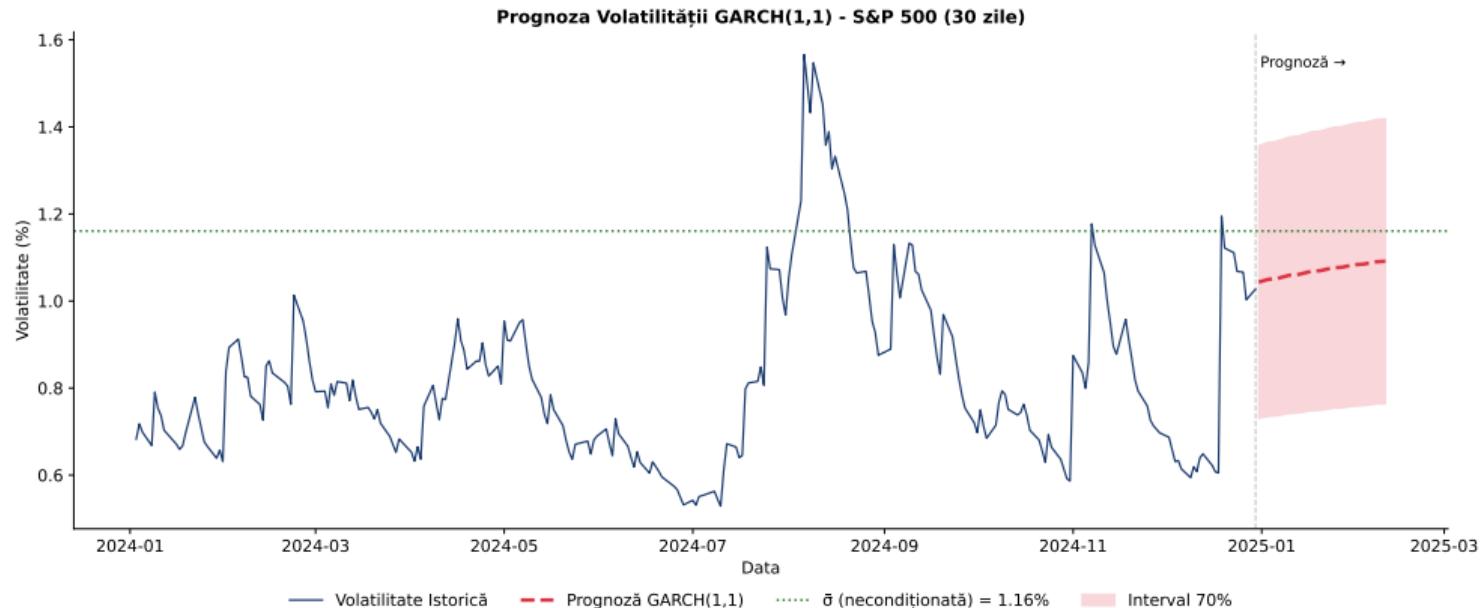
unde $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$ = varianța necondiționată.

Convergență

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{E}_T[\sigma_{T+h}^2] = \bar{\sigma}^2$$

Prognoza converge către varianța necondiționată!

Prognoza Volatilității — Vizualizare



- Prognoza converge exponențial către $\bar{\sigma}^2$
- Viteza de convergență depinde de $\alpha + \beta$
- Cu cât $\alpha + \beta$ mai aproape de 1, cu atât convergența mai lentă

Value at Risk (VaR)

$$\text{VaR}_\alpha = -\mu_{T+1} + z_\alpha \cdot \sigma_{T+1}$$

Probabilitatea de a pierde mai mult decât VaR este α (ex: 1%, 5%).

Expected Shortfall

$$\text{ES}_\alpha = \mathbb{E}[-r_{T+1} | r_{T+1} < -\text{VaR}_\alpha]$$

Alte Aplicații

- Prețul opțiunilor
- Hedging dinamic
- Alocarea portofoliului
- Stress testing
- Analiza scenariilor

Calculul VaR pentru un Portofoliu

Date: Portofoliu de **1.000.000 EUR**, volatilitate prognozată $\hat{\sigma}_{T+1} = 1.5\%$

VaR cu Distribuție Normală

Nivel	z_α	VaR (%)	VaR (EUR)
95% (1 zi)	1.645	2.47%	24.675
99% (1 zi)	2.326	3.49%	34.890
99% (10 zile)	$2.326 \cdot \sqrt{10}$	11.03%	110.314

Scalare pentru Perioade Mai Lungi

$$\text{VaR}_h \text{ zile} = \text{VaR}_1 \text{ zi} \cdot \sqrt{h}$$

Această regulă presupune randamente i.i.d. — o aproximare pentru orizonturi scurte.

De ce Student-t?

- Distribuția normală **subestimează** riscul de coadă
- Randamentele financiare au **cozi groase** ($kurtosis > 3$)
- Student-t cu ν grade de libertate capturează mai bine extremele

Comparație VaR 99% (1 zi) pentru $\sigma = 1.5\%$, Portofoliu = 1M EUR

Distribuție	Cuantilă	VaR (EUR)
Normal	2.326	34.890
Student-t ($\nu = 10$)	2.764	41.460
Student-t ($\nu = 6$)	3.143	47.145
Student-t ($\nu = 4$)	3.747	56.205

Observație

Cu $\nu = 6$ (tipic pentru acțiuni), VaR este cu **35% mai mare** decât cel normal!

Procedura de Calcul VaR

- ❶ Estimează modelul GARCH(1,1) cu distribuție Student-t
- ❷ Obține prognoza volatilității: $\hat{\sigma}_{T+1}$
- ❸ Calculează VaR: $VaR_{\alpha} = t_{\alpha}(\nu) \cdot \hat{\sigma}_{T+1} \cdot \sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}}$

Exemplu: S&P 500

- Parametri estimați: $\alpha = 0.088$, $\beta = 0.900$, $\nu = 6.4$
- Volatilitate prognozată: $\hat{\sigma}_{T+1} = 1.2\%$
- Portofoliu: 10.000.000 EUR

VaR 99% (1 zi):

$$VaR = 3.05 \times 0.012 \times 10.000.000 = \mathbf{366.000 \text{ EUR}}$$

Instalare și Import

```
pip install arch

import numpy as np
import pandas as pd
from arch import arch_model
from arch.univariate import GARCH, EGARCH, ConstantMean
```

Estimare GARCH(1,1)

```
# Presupunem returns = seria de randamente (%)
model = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, q=1,
                    dist='normal')
results = model.fit(disp='off')
print(results.summary())
```

Modele Asimetrice în Python

EGARCH

```
model_egarch = arch_model(returns, vol='EGARCH', p=1, q=1)
res_egarch = model_egarch.fit(disp='off')
```

GJR-GARCH

```
model_gjr = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, o=1, q=1)
res_gjr = model_gjr.fit(disp='off')
```

Distribuții Alternative

```
# Student-t
model_t = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, q=1,
                     dist='t')

# Skewed Student-t
model_skewt = arch_model(returns, vol='Garch', p=1, q=1,
                          dist='skewt')
```

Prognosă Volatilitate

```
# Prognosă 10 pași înainte
forecasts = results.forecast(horizon=10)
volatility_forecast = np.sqrt(forecasts.variance.values[-1, :])
```

Reziduuri Standardizate

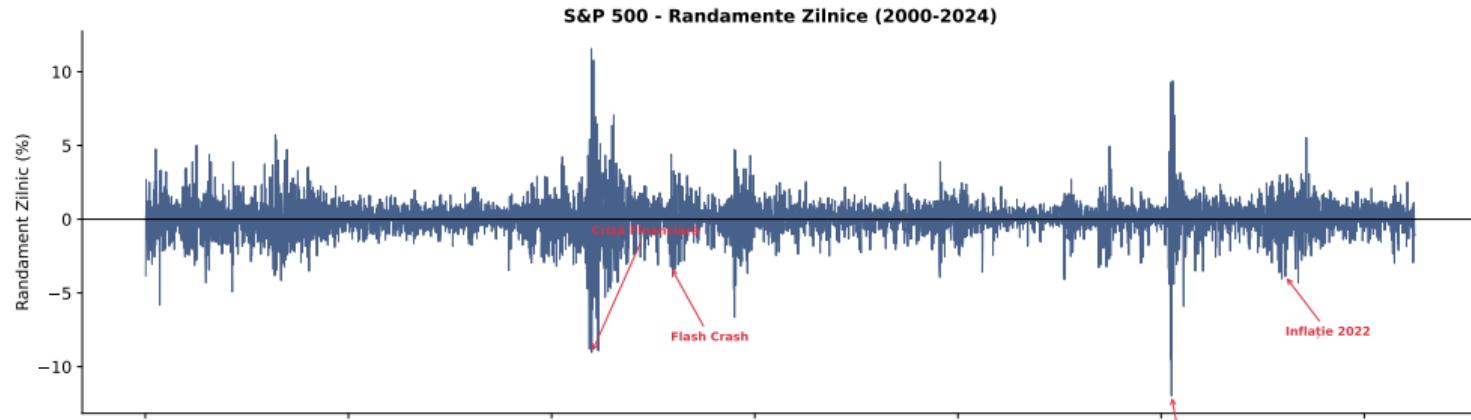
```
std_resid = results.std_resid

# Test Ljung-Box
from statsmodels.stats.diagnostic import acorr_ljungbox
lb_test = acorr_ljungbox(std_resid**2, lags=10)
```

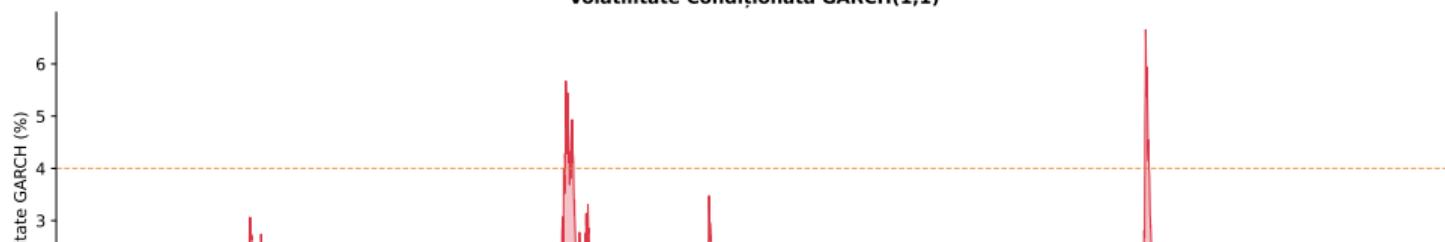
VaR Calculat

```
sigma_forecast = np.sqrt(forecasts.variance.values[-1, 0])
VaR_95 = 1.645 * sigma_forecast # pentru alpha = 5%
```

Analiza Volatilității S&P 500



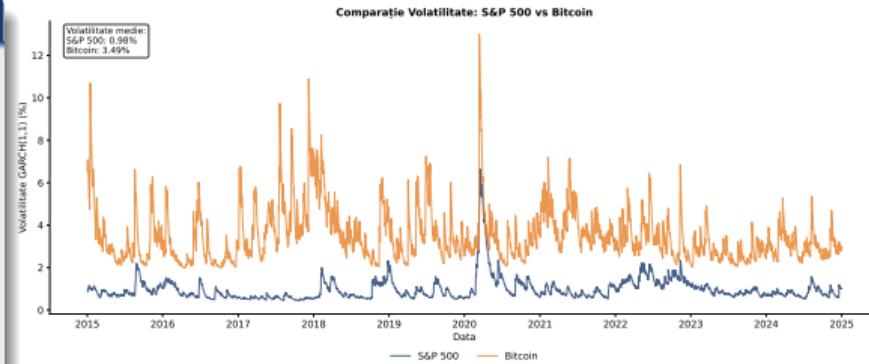
Volatilitate Condiționată GARCH(1,1)



Estimare GARCH(1,1) — S&P 500

Rezultate Estimare

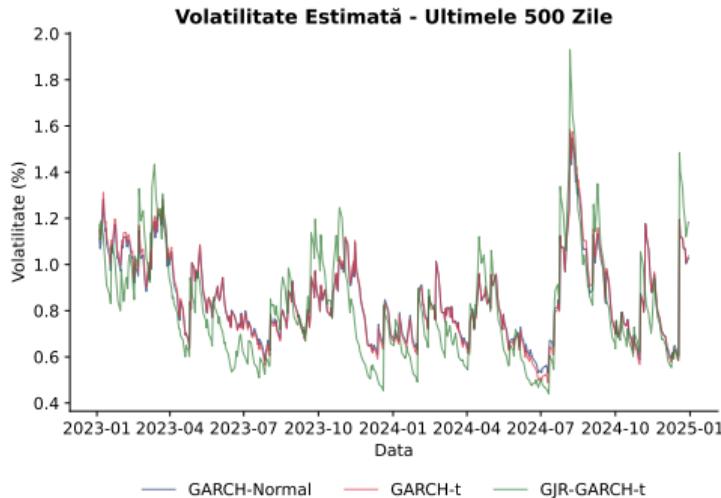
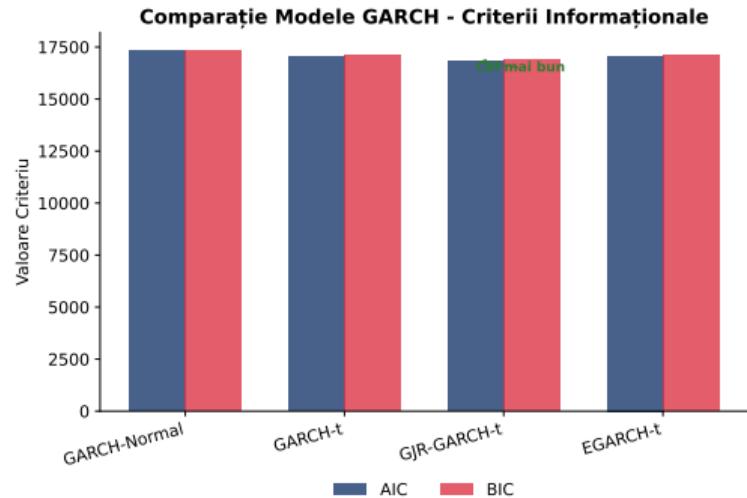
Parametru	Valoare
ω	0.0108
α	0.0883
β	0.9002
$\alpha + \beta$	0.9885
ν (Student-t df)	6.42



Interpretare

- Volatilitate foarte persistentă
- Half-life ≈ 60 zile
- Cozi groase (Student-t)

Comparație GARCH vs EGARCH — S&P 500



Leverage Effect Confirmat

EGARCH: $\gamma = -0.12$ (semnificativ negativ) \Rightarrow şocurile negative amplifică volatilitatea mai mult decât cele pozitive

Modele de Volatilitate

- **ARCH(q):** $\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$
- **GARCH(1,1):** $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$
- **EGARCH:** $\ln(\sigma_t^2) = \omega + \alpha(|z_{t-1}| - \mathbb{E}[|z|]) + \gamma z_{t-1} + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2)$
- **GJR-GARCH:** $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 I_{t-1} + \beta \sigma_{t-1}^2$

Proprietăți și Măsuri

- **Varianță necondiționată:** $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$
- **Half-life:** $HL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha + \beta)}$
- **VaR:** $\text{VaR}_\alpha = z_\alpha \cdot \sigma_{T+1}$
- **Stationaritate:** $\alpha + \beta < 1$

Test ARCH-LM

$LM = T \cdot R^2 \sim \chi^2(q)$ unde R^2 provine din regresia $\hat{\varepsilon}_t^2$ pe lagurile sale

Concepte Cheie

- **ARCH(q)**: varianța condiționată depinde de pătratele erorilor trecute
- **GARCH(p,q)**: adaugă lag-uri ale varianței pentru persistență
- **EGARCH**: permite leverage effect, fără restricții de pozitivitate
- **GJR-GARCH/TGARCH**: captură asimetria cu variabile indicator

Aplicații

- Măsurarea și prognoza riscului (VaR, ES)
- Prețul derivatelor
- Managementul portofoliului

Sfat Practic

Începe cu GARCH(1,1), verifică leverage effect, alege distribuția inovațiilor care minimizează AIC/BIC!

-  Engle, R.F. (1982). *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*. *Econometrica*, 50(4), 987-1007.
-  Bollerslev, T. (1986). *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307-327.
-  Nelson, D.B. (1991). *Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach*. *Econometrica*, 59(2), 347-370.
-  Glosten, L.R., Jagannathan, R., & Runkle, D.E. (1993). *On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks*. *The Journal of Finance*, 48(5), 1779-1801.
-  Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*. 3rd Edition, Wiley.