



Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 7: Cointegrare și Modele VECM



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

Cuprins

Fundamente

- ▣ Motivație
- ▣ Regresia Falsă
- ▣ Conceptul de Cointegrare
- ▣ Metoda Engle-Granger
- ▣ Metoda Johansen

Aplicații

- ▣ Estimarea VECM
- ▣ Considerații Practice
- ▣ Exemple Practice
- ▣ Studiu de caz: Rate de dobândă
- ▣ Rezumat și Quiz

Obiective de învățare

La finalul acestui capitol, veți fi capabili să:

- ▣ **Cointegrare:** Înțelegeți conceptul și relațiile de echilibru pe termen lung
- ▣ **Regresia falsă:** Recunoașteți și evitați problema rezultatelor spurioase
- ▣ **Engle-Granger:** Aplicați metoda în doi pași pentru testarea cointegrării
- ▣ **Johansen:** Efectuați testul pentru cointegrare multiplă
- ▣ **VECM:** Estimați și interpretați modele cu corecția erorilor
- ▣ **Viteza de ajustare:** Analizați coeficienții α și vectorii de cointegrare β
- ▣ **Python:** Implementați analiza de cointegrare cu aplicații practice

De ce contează cointegrarea?

Provocarea

- ▣ **Nestaționaritate:** Multe serii economice/financiare sunt $I(1)$
 - ▶ PIB, prețuri acțiuni, cursuri valutare, rate ale dobânzii au rădăcini unitare
- ▣ **Regresia standard:** Cu variabile $I(1)$ \succ rezultate false
 - ▶ Diferențierea elimină nestaționaritatea dar pierde informația pe termen lung

Soluția: Cointegrarea

- ▣ **Trend stochastic comun:** Unele serii nestaționare se mișcă împreună pe termen lung
 - ▶ Această relație pe termen lung poate fi modelată!

Premiul Nobel 2003

- ▣ Clive Granger a primit Premiul Nobel în Economie (împreună cu Robert Engle) pentru dezvoltarea analizei de cointegrare \succ “metode pentru analiza seriilor de timp economice cu tendințe comune.”

Aplicații practice

Finanțe

- ▣ **Pairs Trading:** Tranzacționarea spread-ului între acțiuni cointegrate
- ▣ **Structura pe Termene:** Rate dobânzi pe termen scurt și lung
- ▣ **Spot-Futures:** Prețurile spot și futures converg la maturitate

Macroeconomie

- ▣ **Consum și Venit:** Ipoteza venitului permanent
- ▣ **Bani și Prețuri:** Teoria cantitativă a banilor
- ▣ **PPP:** Cursuri valutare și niveluri de prețuri

Analiza Politicilor

- ▣ **Politica Fiscală:** Cheltuieli guvernamentale și venituri fiscale
- ▣ **Politica Monetară:** Transmiterea ratelor dobânzii
- ▣ **Piața Muncii:** Salarii și productivitate

Problema regresiei false

Granger & Newbold (1974)

- ▣ **Configurare:** Regresarea unui mers aleatoriu pe un alt mers aleatoriu independent
 - ▶ $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$, unde Y_t și X_t sunt procese $I(1)$ independente

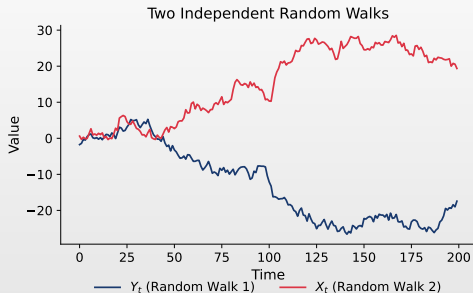
Simptomele regresiei false

- ▣ **Coeficienți:** R^2 ridicat (adesea > 0.9) și statistici t semnificative
 - ▶ Chiar dacă variabilele sunt complet necorelate!
- ▣ **Diagnostic:** Statistica Durbin-Watson foarte mică ($DW \approx 0$)
 - ▶ Reziduurile sunt nestaționare (au rădăcină unitară)

Regulă Practică (Granger)

- ▣ Dacă $R^2 > DW$, suspectați regresie falsă!

Regresia falsă: exemplu vizual



Atenție

- ▣ **Rezultat:** Două măsuri aleatorii complet independente prezintă corelație ridicată ($R^2 > 0.8$) doar din întâmplare! De aceea avem nevoie de analiza cointegrării

Corelații false în lumea reală

Explorarea datelor poate produce corelații fără sens

Cu suficiente variabile și serii lungi de timp, apar tipare pur întâmplătoare:

- Distanța dintre Neptun și Uranus \leftrightarrow Prețul acțiunilor SAP SE (2002–2023)
- Utilizarea porumbului OMG în South Dakota \leftrightarrow Căutări Google “i cant even” (2004–2023)
- Ratingurile serialului *Two and a Half Men* \leftrightarrow Combustibil pentru avioane în Serbia (2006–2015)
- Popularitatea meme-ului “Its Wednesday my dudes” \leftrightarrow Prețul acțiunilor Boeing (2006–2023)

Lecție

Corelație ridicată \neq cauzalitate. Seriile nestaționare cu tendințe comune produc R^2 ridicat prin construcție. Testați întotdeauna staționaritatea și cointegrarea înainte de a interpreta rezultatele regresiei!

🌐 Explorați mai multe exemple: tylervigen.com/spurious-correlations

Definiția cointegrării

Definiție 1 (Cointegrare (Engle & Granger, 1987))

- ▣ **Definiție:** Variabilele Y_{1t}, \dots, Y_{kt} sunt **cointegrate de ordinul** (d, b) , notat $CI(d, b)$, dacă:
 1. Toate variabilele sunt integrate de ordinul d : $Y_{it} \sim I(d)$
 2. Există o combinație liniară $\beta'Y_t$ care este integrată de ordinul $(d - b)$, unde $b > 0$

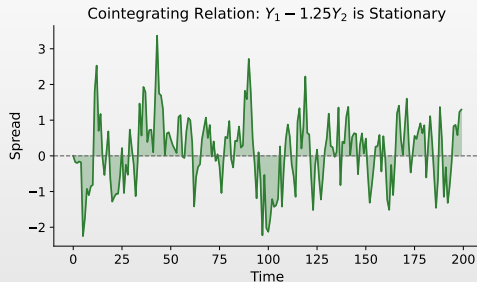
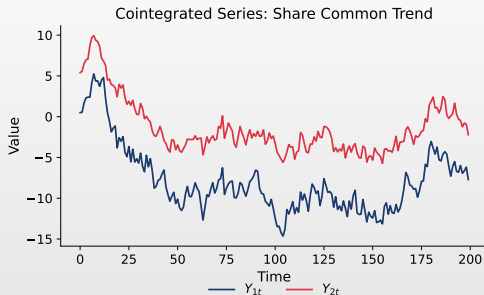
Cazul Cel Mai Comun: $CI(1, 1)$

- ▣ **Variabile:** Sunt $I(1)$ (au rădăcini unitare) \succ combinația liniară este $I(0)$
- ▣ **Vectorul de cointegrare:** $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)'$ \succ definește echilibrul pe termen lung

Observație

- ▣ **Unicitate:** Vectorul de cointegrare este unic doar până la înmulțire scalară. Se normalizează: $\beta_1 = 1$

Cointegrarea: exemplu vizual



Ideea cheie

- **Cointegrare:** Ambele serii sunt $I(1)$ și evoluează împreună, dar combinația lor liniară (spread-ul) este staționară ➤ aceasta este cointegrarea!

Intuiție: tendințe stocastice comune

De ce Apare Cointegrarea?

- **Tendințe stocastice comune:** Variabilele cointegrate împart un trend comun
 - ▶ $Y_{1t} = \gamma_1 \tau_t + S_{1t}, \quad Y_{2t} = \gamma_2 \tau_t + S_{2t}$
 - ▶ τ_t este un mers aleatoriu comun și S_{it} sunt componente staționare

Combinăția Liniară Elimină Tendința

- $\gamma_2 Y_{1t} - \gamma_1 Y_{2t} = \gamma_2 S_{1t} - \gamma_1 S_{2t} \sim I(0)$

Interpretare Economică

- Cointegrarea reprezintă o **relație de echilibru pe termen lung**
 - ▶ Variabilele pot devia pe termen scurt
 - ▶ Dar sunt “trase înapoi” spre echilibru în timp
- Vectorul de cointegrare definește echilibrul

Rangul de cointegrare

Câte Relații de Cointegrare?

- ▣ **Condiție:** Pentru k variabile $I(1) \succ$ maximum $r = k - 1$ relații de cointegrare
- ▣ **Cazuri posibile:**
 - ▶ $r = 0$: Nu există cointegrare (variabilele divergează)
 - ▶ $r = k$: Toate variabilele sunt $I(0)$ (contradicție)

Exemplu: 3 Variabile

- ▣ **Rangul de cointegrare:**
 - ▶ $r = 0$: Nu există cointegrare
 - ▶ $r = 1$: O relație de cointegrare
 - ▶ $r = 2$: Două relații de cointegrare (doar 1 tendință comună)

Observație

- ▣ **Relația:** Numărul de tendințe stocastice comune $= k - r$

Metoda în doi pași Engle-Granger

Pasul 1: Estimarea Regresiei de Cointegrare

- ▣ **Regresia OLS:** $Y_t = \alpha + \beta X_t + e_t$
- ▣ **Reziduuri:** $\hat{e}_t = Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_t$

Pasul 2: Testarea Staționarității Reziduurilor

- ▣ **Testul ADF:** $\Delta \hat{e}_t = \rho \hat{e}_{t-1} + \sum_{j=1}^p \gamma_j \Delta \hat{e}_{t-j} + v_t$
- ▣ **Ipoteze:**
 - ▶ $H_0: \rho = 0$ (rădăcină unitară \succ nu există cointegrare)
 - ▶ $H_1: \rho < 0$ (staționare \succ există cointegrare)

Important

- ▣ Folosiți **valorile critice Engle-Granger**, nu cele ADF standard! (mai negative deoarece reziduurile sunt estimate)

Valorile critice Engle-Granger

Valori Critice pentru Testul de Cointegrare

Număr de Variabile	1%	5%	10%
2	-3.90	-3.34	-3.04
3	-4.29	-3.74	-3.45
4	-4.64	-4.10	-3.81
5	-4.96	-4.42	-4.13

Sursa: Bazat pe estimările MacKinnon (1991), $T = 100$

Limitările Metodei Engle-Granger

- **Un singur vector:** Testează doar pentru o singură relație de cointegrare
 - ▶ Rezultatele depind de variabila aleasă ca dependentă
- **Eșantioane mici:** Bias pentru vectorul de cointegrare estimat
 - ▶ Nu se pot testa ipoteze asupra vectorului de cointegrare

Testul de cointegrare Johansen

Avantaje față de Engle-Granger

- ▣ **Vectori multipli:** Testează pentru multiple relații de cointegrare
 - ▶ Permite testarea restricțiilor asupra vectorilor de cointegrare
- ▣ **Estimare MLE:** Maxima verosimilitate (mai eficientă)
 - ▶ Nu necesită alegerea unei variabile dependente

Punct de Plecare: VAR în Niveluri

- ▣ $Y_t = c + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \dots + A_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$

Următorul pas

- ▣ **Transformare:** Rescriem în forma Vector Error Correction (VECM)

Derivare: De la VAR la VECM

Punct de plecare: VAR(p) în niveluri

$$\square Y_t = A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \dots + A_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Pasul 1: Scădem Y_{t-1} din ambii membri

\square Transformare:

$$\blacktriangleright Y_t - Y_{t-1} = A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \dots + A_p Y_{t-p} - Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\blacktriangleright \Delta Y_t = (A_1 - I) Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \dots + A_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Obiectiv

\square Rescriem astfel încât toți termenii să fie fie în **niveluri** (Y_{t-1}), fie în **diferențe** (ΔY_{t-j})

Derivare: De la VAR la VECM (cont.)

Pasul 2: Adunăm și scădem termeni strategici

- ▣ **Manipulare:** Adunăm și scădem $A_2 Y_{t-1}$
- ▣ **Rezultat:** $\Delta Y_t = (A_1 + A_2 - I)Y_{t-1} - A_2 \Delta Y_{t-1} + A_3 Y_{t-3} + \dots + \epsilon_t$
- ▣ **Procedură:** Continuăm cu $A_3 Y_{t-1}$, etc.

Pasul 3: Forma generală VECM

- ▣ **Rezultat:** $\Delta Y_t = \Pi Y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta Y_{t-j} + \epsilon_t$

Matricele cheie

- ▣ **Impact termen lung:**

$$\Pi = \sum_{i=1}^p A_i - I$$

- ▣ **Dinamică termen scurt:**

$$\Gamma_j = - \sum_{i=j+1}^p A_i, \quad j = 1, \dots, p-1$$

Derivare: Verificare cu VAR(2)

Exemplu: VAR(2)

- ▣ **Punct de plecare:** $Y_t = A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$
 - ▶ Scădem Y_{t-1} : $\Delta Y_t = (A_1 - I)Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$
 - ▶ Adunăm și scădem $A_2 Y_{t-1}$: $\Delta Y_t = (A_1 + A_2 - I)Y_{t-1} + A_2(Y_{t-2} - Y_{t-1}) + \varepsilon_t$
- ▣ **Rezultat VECM:**
 - ▶ $\Delta Y_t = \underbrace{(A_1 + A_2 - I)}_{\Pi} Y_{t-1} - \underbrace{A_2}_{\Gamma_1} \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$

Verificare

- ▣ **VAR(2):** $\Pi = A_1 + A_2 - I$ și $\Gamma_1 = -A_2$
 - ▶ Folosind formula: $\Gamma_1 = -\sum_{i=2}^2 A_i = -A_2$ ✓

Reprezentarea VECM

Modelul Vectorial de Corecție a Erorilor

▣ Ecuația VECM:

$$\blacktriangleright \Delta Y_t = c + \Pi Y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t$$

▣ Componente:

$$\blacktriangleright \Pi = A_1 + A_2 + \dots + A_p - I \text{ (matricea impactului pe termen lung)}$$

$$\blacktriangleright \Gamma_j = -(A_{j+1} + \dots + A_p) \text{ (dinamica pe termen scurt)}$$

Ideea Cheie: Rangul lui Π

▣ Rangul lui Π determină cointegrarea:

$$\blacktriangleright \text{rank}(\Pi) = 0: \text{Nu există cointegrare (VAR în diferențe)}$$

$$\blacktriangleright \text{rank}(\Pi) = k: \text{Toate variabilele sunt } I(0) \text{ (VAR în niveluri)}$$

$$\blacktriangleright 0 < \text{rank}(\Pi) = r < k: \text{Cointegrare cu } r \text{ vectori de cointegrare}$$

Descompunerea lui Π

Când $\text{rank}(\Pi) = r < k$

- ▣ **Descompunere:** $\Pi = \alpha\beta'$
 - ▶ β : matricea $k \times r$ a vectorilor de cointegrare
 - ▶ α : matricea $k \times r$ a coeficienților de ajustare

Interpretare

- ▣ **Termenul de corecție:** $\beta'Y_{t-1}$ = deviații de la echilibrul pe termen lung
- ▣ **Viteza de ajustare:** α = cât de repede se revine la echilibru

Formula VECM

- ▣ **Ecuția:** $\Delta Y_t = c + \alpha(\beta'Y_{t-1}) + \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t$

Statisticile testului Johansen

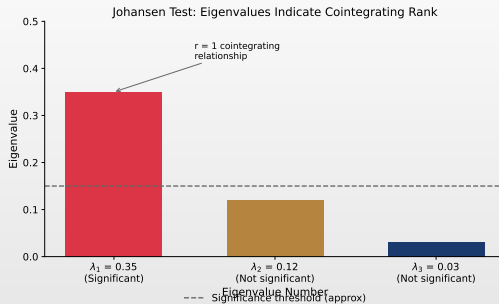
Două Statistici de Test

- ▣ **Bază:** Valorile proprii $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \dots > \hat{\lambda}_k$ ale unei anumite matrici
- ▣ **Testul Trace:** Testează $H_0: \text{rang} \leq r$ vs $H_1: \text{rang} > r$
 - ▶ $\lambda_{\text{trace}}(r) = -T \sum_{i=r+1}^k \ln(1 - \hat{\lambda}_i)$
- ▣ **Testul Valorii Proprii Maxime:** Testează $H_0: \text{rang} = r$ vs $H_1: \text{rang} = r + 1$
 - ▶ $\lambda_{\text{max}}(r, r + 1) = -T \ln(1 - \hat{\lambda}_{r+1})$

Observație

- ▣ **Valori critice:** Din Johansen & Juselius (1990), depind de numărul de variabile k și componentele deterministe (constante, trend)

Testul Johansen: interpretare vizuală



Interpretare

- ▣ **Valorile proprii:** Cele semnificative (peste pragul critic) indică relații de cointegrare. În acest exemplu, doar prima valoare proprie este semnificativă, sugerând $r = 1$ vector de cointegrare

Procedura de testare

Testare Secvențială (Testul Trace)

1. Testați $H_0: r = 0$ vs $H_1: r > 0$
 - ▶ Dacă nu se respinge: Nu există cointegrare. Stop.
 - ▶ Dacă se respinge: Cel puțin un vector de cointegrare. Continuăm.
2. Testați $H_0: r \leq 1$ vs $H_1: r > 1$
 - ▶ Dacă nu se respinge: $r = 1$. Stop.
 - ▶ Dacă se respinge: Cel puțin doi vectori de cointegrare. Continuăm.
3. Continuăm până când H_0 nu se respinge...

Componentele Deterministe

- ☐ **Alegere:** Specificația trebuie aleasă cu atenție
 - ▶ Fără constantă, fără trend (rar utilizat)
 - ▶ Constantă doar în relația de cointegrare
 - ▶ Constantă în ambele (cel mai comun)
 - ▶ Constantă + trend în relația de cointegrare
 - ▶ Constantă + trend în ambele

Structura VECM

Specificația Completă VECM

- Pentru $k = 2$ variabile cu $r = 1$ relație de cointegrare:

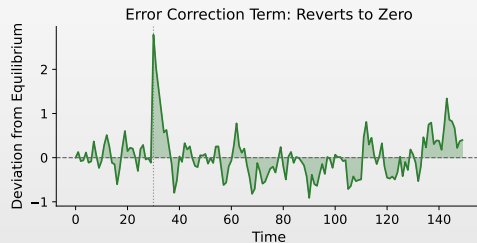
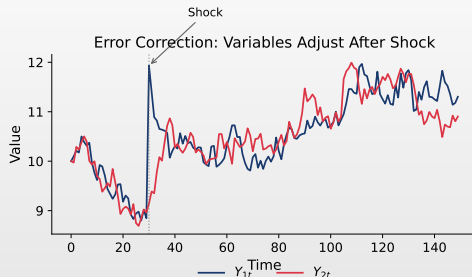
$$\Delta Y_{1t} = c_1 + \alpha_1(Y_{1,t-1} - \beta Y_{2,t-1}) + \gamma_{11}\Delta Y_{1,t-1} + \gamma_{12}\Delta Y_{2,t-1} + \varepsilon_{1t}$$

$$\Delta Y_{2t} = c_2 + \alpha_2(Y_{1,t-1} - \beta Y_{2,t-1}) + \gamma_{21}\Delta Y_{1,t-1} + \gamma_{22}\Delta Y_{2,t-1} + \varepsilon_{2t}$$

Componente

- **Corecția erorilor:** $(Y_{1,t-1} - \beta Y_{2,t-1}) =$ deviație de la echilibru
 - $\alpha_1, \alpha_2 =$ viteze de ajustare (ar trebui să aibă semne opuse)
- **Dinamica pe termen scurt:** $\gamma_{ij} =$ coeficienți lag-uri diferențiate
 - $\varepsilon_{it} =$ inovații

Mecanismul de corecție a erorilor: vizualizare



Interpretare

- **Corecția erorilor:** Când seriile deviază de la echilibru (zonele umbrite), mecanismul de ajustare le trage înapoi. Deviațiile pozitive duc la ajustare în jos, deviațiile negative duc la ajustare în sus

Interpretarea coeficienților de ajustare

Coeficienții α

▣ **Relația de echilibru:** $Y_1 - \beta Y_2 = 0$

- ▶ $\alpha_1 < 0$: Y_1 se ajustează în jos când este deasupra echilibrului
- ▶ $\alpha_2 > 0$: Y_2 se ajustează în sus când Y_1 este deasupra echilibrului

Exogenitate Slabă

- ▣ Dacă $\alpha_i = 0$, variabila Y_i **nu** răspunde la dezechilibru
 - ▶ Y_i este **slab exogenă** pentru parametrii pe termen lung
 - ▶ Cealaltă variabilă face toată ajustarea
- ▣ Poate simplifica estimarea (abordare cu o singură ecuație)

Testare

- ▣ **Exogenitate slabă:** $H_0 : \alpha_i = 0$ folosind testul raportului de verosimilitate

VECM vs VAR în diferențe

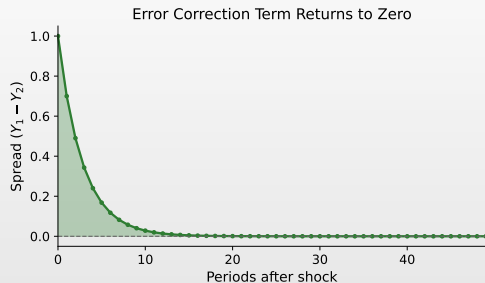
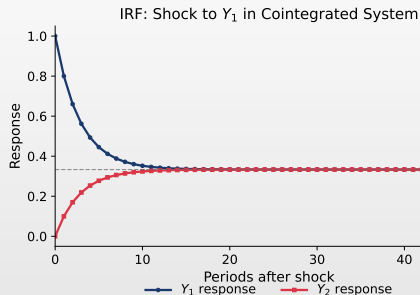
Când Variabilele sunt Cointegrate

	VAR în Diferențe	VECM
Info pe termen lung	Pierdută	Păstrată
Dinamică pe termen scurt	Da	Da
Corecție a erorilor	Nu	Da
Proгноză	Slabă (termen lung)	Mai bună
Interpretare IRF	Doar termen scurt	Ambele

Teorema Reprezentării Granger

- ▣ **Implicație:** Dacă variabilele sunt cointegrate, trebuie să existe o reprezentare de corecție a erorilor
 - Ignorarea cointegrării = specificare greșită a modelului!

Funcțiile de răspuns la impuls VECM



Interpretare IRF

- **Efecte permanente:** Într-un sistem cointegrat, șocurile au efecte permanente asupra nivelurilor, dar sistemul revine la echilibru \succ convergesc către o nouă valoare pe termen lung

Flux de lucru practic

Procedură Pas cu Pas

1. **Teste de Rădăcină Unitară:** Verificați că toate variabilele sunt $I(1)$
 - ▶ ADF, KPSS pe niveluri și prime diferențe
2. **Selectarea Numărului de Lag-uri:** Alegeți p pentru VAR în niveluri
 - ▶ Folosiți AIC, BIC sau teste LR secvențiale
3. **Testul de Cointegrare:** Teste trace/valoare proprie maximă Johansen
 - ▶ Determinați rangul de cointegrare r
4. **Estimați VECM:** Dacă $0 < r < k$
 - ▶ Estimați α , β , Γ_j
5. **Diagnostic:** Verificați reziduurile pentru autocorelație, normalitate
6. **Analiză:** IRF, FEVD, teste de ipoteze

Capcane frecvente

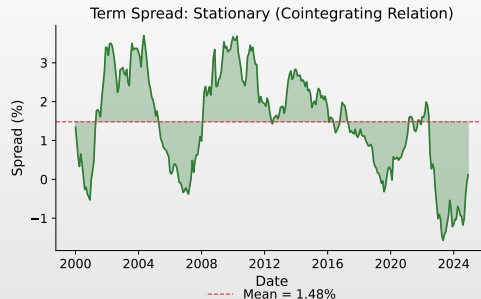
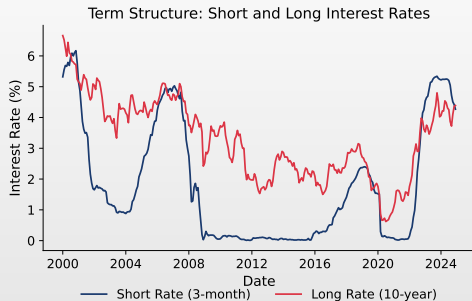
Lucruri de Care Trebuie să Fiți Atenți

- ▣ **Rupturi structurale:** Pot cauza rădăcini unitare sau cointegrare false
- ▣ **Procese aproape de rădăcină unitară:** Testele au putere scăzută
- ▣ **Selectarea lag-urilor:**
 - ▶ **Prea multe lag-uri:** Supraparametrizare, pierdere de eficiență
 - ▶ **Prea puține lag-uri:** Autocorelație reziduală, estimări distorsionate
- ▣ **Specificație deterministă greșită:** Afectează valorile critice
- ▣ **Eșantioane mici:** Testul Johansen supradimensionat în eşantioane mici

Recomandare

- ▣ **Verificați întotdeauna:**
 - ▶ Diagnosticalele reziduale (testul Portmanteau, normalitatea)
 - ▶ Stabilitatea relației de cointegrare estimate în timp
 - ▶ Sensibilitatea la lungimea lag-urilor și specificația deterministă

Exemplu 1: structura pe termen a ratelor dobânzii



Ipoteza Așteptărilor

- **Concluzie:** Ratele pe termen scurt și lung împart o tendință comună. Spread-ul (prima de termen) este staționar > dovadă de cointegrare!

Ratele dobânzii: teoria economică

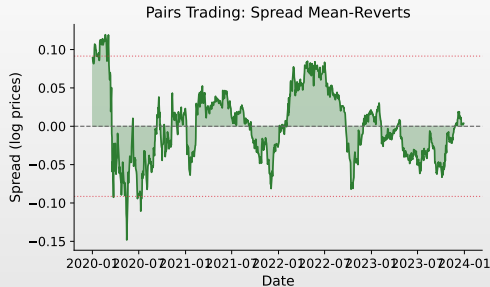
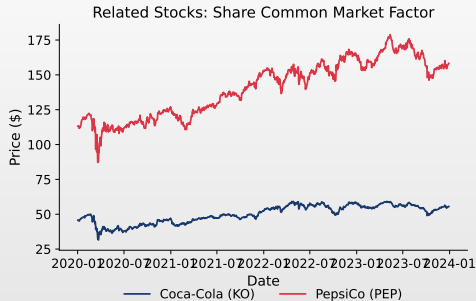
Ipoteza Așteptărilor în Structura pe Termen

- **Formula:** Rata pe termen lung ca medie a ratelor viitoare așteptate
 - ▶ $R_t^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E_t[r_{t+i}] + \text{prima de termen}$
- **Implicație:** Dacă prima de termen este constantă, r_t și R_t sunt cointegrate
 - ▶ Vectorul de cointegrare: $(1, -1)$

Rezultate Empirice

- **Teste de rădăcină unitară:** Ambele rate sunt $I(1)$
 - ▶ O relație de cointegrare (testul Johansen)
- **Vectorul de cointegrare:** $\approx (1, -1)$, spread-ul este staționar
 - ▶ Rata pe termen scurt se ajustează la dezechilibru (rata pe termen lung este slab exogenă)

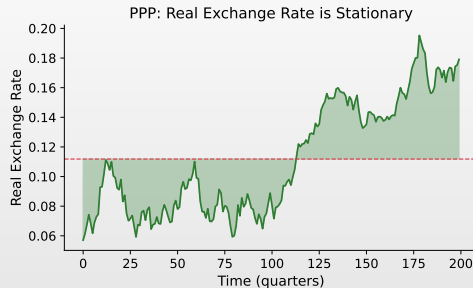
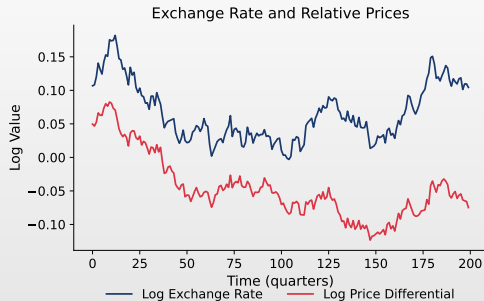
Exemplu 2: pairs trading în finanțe



Strategie

- ▣ **Pairs trading:** Găsiți perechi de acțiuni cointegrate (ex., Coca-Cola & Pepsi). Când spread-ul deviază de la medie, tranzacționați așteptând revenirea la medie

Exemplu 3: paritatea puterii de cumpărare (PPP)



Teoria PPP

- **Formula:** $e_t = p_t - p_t^*$ (cursul de schimb logaritmic este egal cu diferențialul de preț). Cursul de schimb real ar trebui să fie staționar pe termen lung

Rezultate VECM pentru rate de dobândă

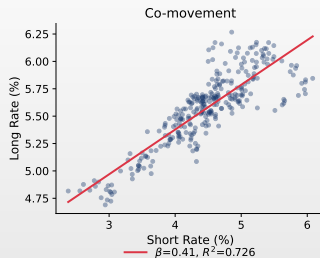
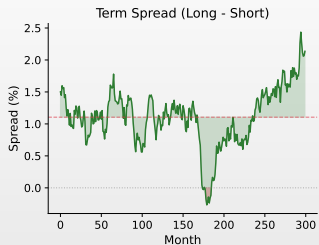
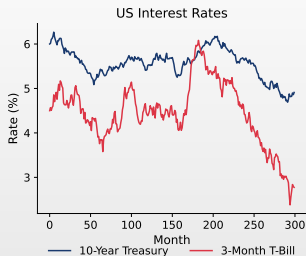
Rezultate Tipice

- **Integrare:** Ambele rate sunt $I(1)$, o relație de cointegrare identificată
 - ▶ Vectorul de cointegrare apropiat de $(1, -1)$: spread-ul este staționar
- **Ajustare:** Rata pe termen scurt se ajustează la rata pe termen lung
 - ▶ Rata pe termen lung nu se ajustează (slab exogenă)

Ecuatii VECM (stilizate)

- **Sistem estimat:**
 - ▶ $\Delta r_t = 0.02 - 0.15(r_{t-1} - R_{t-1}) + \text{lag-uri} + \varepsilon_{1t}$
 - ▶ $\Delta R_t = 0.01 - 0.02(r_{t-1} - R_{t-1}) + \text{lag-uri} + \varepsilon_{2t}$
- **Interpretare:** Rata pe termen scurt se ajustează mai rapid ($\alpha_1 = -0.15$)
 - ▶ Rata pe termen lung aproape slab exogenă ($\alpha_2 \approx 0$)

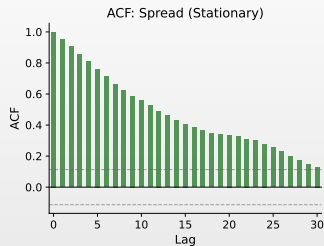
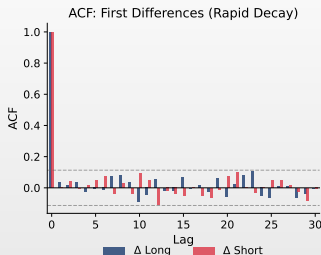
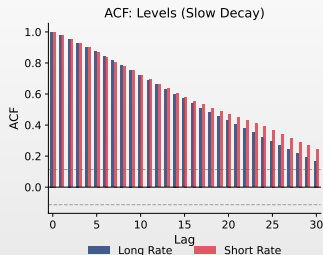
Studiu de caz: Cointegrarea ratelor dobânzii



Date

- ▣ **Rate dobândă SUA:** Pe termen lung (10 ani) și scurt (3 luni)
- ▣ **Observație:** Ambele serii sunt $I(1)$, dar spread-ul pare staționar

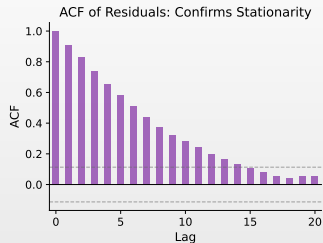
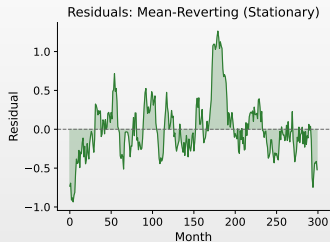
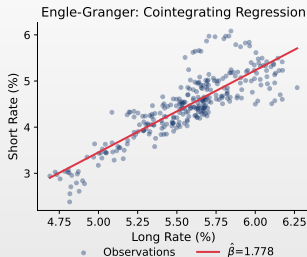
Pasul 1: Teste de rădăcină unitară



Rezultate

- ACF niveluri: Descreștere lentă \rightarrow nestaționaritate; după diferențiere: scădere rapidă \rightarrow $I(1)$
- ACF spread: Staționar \rightarrow posibilă cointegrare!

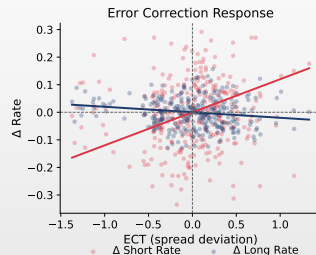
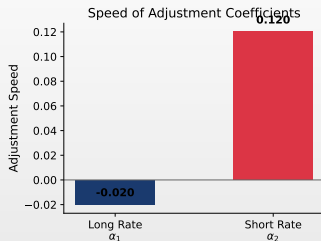
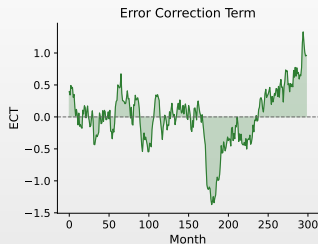
Pasul 2: Testul Engle-Granger de cointegrare



Rezultate

- ▣ **Regresie Engle-Granger:** Rata scurtă = $\alpha + \beta \times \text{Rata lungă} + \varepsilon_t$
- ▣ **Concluzie:** Seriile sunt cointegrate \succ există relație de echilibru pe termen lung

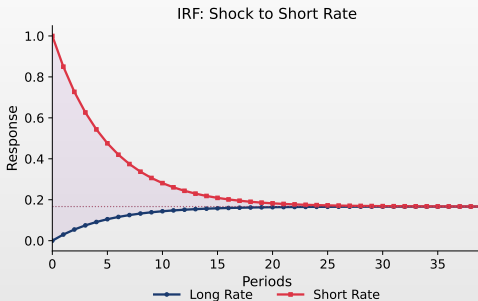
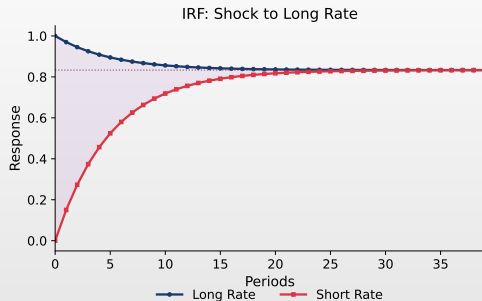
Pasul 3: Estimare VECM



Model

- **VECM(2):** Rang de cointegrare = 1
- **Ajustare:** Coeficienții α indică viteza de revenire la echilibru

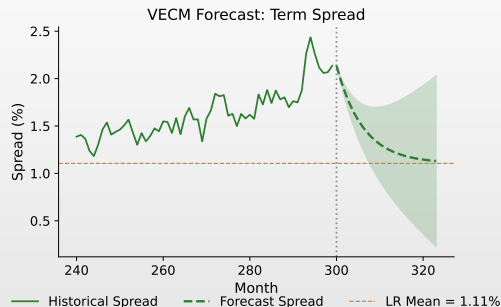
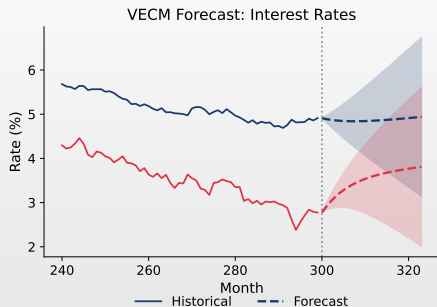
Pasul 4: Funcții de răspuns la impuls



Interpretare

- ▣ **Efecte permanente:** Șocuri în rata lungă afectează persistent ambele rate
- ▣ **Cointegrare:** Efectele nu converg la zero \succ caracteristică a seriilor cointegrate

Pasul 5: Prognoza VECM



Prognoză

- **Orizont:** 24 de luni pentru ambele rate simultan
- **Avantaj:** VECM menține relația de cointegrare în prognoză

Concluzii principale

Concepte Principale

- ▣ **Cointegrare:** Variabile $I(1)$ cu combinație liniară staționară (trend stochastic comun)
- ▣ **Regresie falsă:** R^2 ridicat cu variabile $I(1)$ necorelate
- ▣ **Corecție a erorilor:** VECM \succ VAR cu termeni de corecție pentru sisteme cointegrate

Metode de Testare

- ▣ **Engle-Granger:** Simplu, doi pași, un singur vector de cointegrare
- ▣ **Johansen:** Vectori multipli, bazat pe MLE (teste trace + max-eigen)

De Reținut

- ▣ **Putere scăzută:** Testele au putere scăzută în eșantioane mici
- ▣ **Teorie:** Teoria economică ar trebui să ghideze specificația
- ▣ **Validare:** Verificați întotdeauna validitatea modelului!

Ce urmează?

Extensii și Subiecte Conexе

- ▣ **VECM Structural:** Identificarea șocurilor structurale
- ▣ **Cointegrare cu prag:** Ajustare neliniară
- ▣ **Cointegrare de panel:** Secțiuni transversale multiple
- ▣ **Cointegrare fracționară:** Memorie lungă
- ▣ **Cointegrare variabilă în timp:** Schimbări de regim

- ▣ **Întrebări?**

Formule cheie – Rezumat

Cointegrare

- ▣ **Definiție:** $Y_t - \beta X_t = u_t \sim I(0)$
- ▣ **Interpretare:** Echilibru pe termen lung

Test Engle-Granger

- ▣ **Pas 1:** $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$
- ▣ **Pas 2:** Test ADF pe \hat{u}_t
- ▣ **Notă:** Valori critice speciale

Rang de Cointegrare

- ▣ **Rangul r :** $0 \leq r \leq K - 1$ relații

Model VECM

- ▣ **Ecuatie:** $\Delta Y_t = \Pi Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t$
- ▣ **Factorizare:** $\Pi = \alpha \beta'$

Interpretare α și β

- ▣ β : Vectori de cointegrare
- ▣ α : Viteza de ajustare

Test Johansen

- ▣ **Trace:** $\lambda_{trace} = -T \sum_{i=r+1}^K \ln(1 - \hat{\lambda}_i)$
- ▣ **Max-Eigen:** $\lambda_{max} = -T \ln(1 - \hat{\lambda}_{r+1})$

Quiz rapid

Întrebări

1. Ce înseamnă că două variabile $I(1)$ sunt cointegrate?
2. Care este problema “regresiei false”?
3. În VECM, ce reprezintă coeficienții α ?
4. Care este avantajul principal al metodei Johansen față de Engle-Granger?
5. Dacă $\alpha_i = 0$ pentru variabila Y_i , ce implică aceasta?

Răspunsuri quiz

Răspunsuri

1. **Cointegrare:** O combinație liniară a variabilelor este $I(0)$ (staționară). Ele au un trend stocastic comun
2. **Regresie falsă:** Regresarea unei variabile $I(1)$ pe alta $I(1)$ necorelată dă R^2 mare și coeficienți semnificativi deși nu există relație reală
3. **Coeficienții α :** Viteza de ajustare \succ cât de repede răspunde fiecare variabilă la deviații de la echilibrul pe termen lung
4. **Avantajul Johansen:** Poate testa relații multiple de cointegrare, folosește MLE (mai eficient), nu necesită alegerea variabilei dependente
5. $\alpha_i = 0$: Variabila Y_i este slab exogenă \succ nu răspunde la dezechilibru. Alte variabile fac toată ajustarea

Bibliografie I

Lucrări fundamentale cointegrare

- ▣ Engle, R.F., & Granger, C.W.J. (1987). Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing, *Econometrica*, 55(2), 251–276.
- ▣ Johansen, S. (1988). Statistical Analysis of Cointegration Vectors, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12(2-3), 231–254.
- ▣ Johansen, S. (1991). Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models, *Econometrica*, 59(6), 1551–1580.

Manuale VECM și cointegrare

- ▣ Juselius, K. (2006). *The Cointegrated VAR Model: Methodology and Applications*, Oxford University Press.
- ▣ Lütkepohl, H. (2005). *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer.

Bibliografie II

Teste și aplicații

- ▣ Phillips, P.C.B., & Ouliaris, S. (1990). Asymptotic Properties of Residual Based Tests for Cointegration, *Econometrica*, 58(1), 165–193.
- ▣ Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- ▣ Banerjee, A., Dolado, J.J., Galbraith, J.W., & Hendry, D.F. (1993). *Co-Integration, Error-Correction, and the Econometric Analysis of Non-Stationary Data*, Oxford University Press.

Resurse online și cod

- ▣ **Quantlet**: <https://quantlet.com> > Depozit de cod pentru statistică
- ▣ **Quantinar**: <https://quantinar.com> > Platformă de învățare metode cantitative
- ▣ **GitHub TSA**: <https://github.com/QuantLet/TSA> > Cod Python pentru acest curs

Vă Mulțumim!

Întrebări?

Materialele cursului sunt disponibile la: <https://danpele.github.io/Time-Series-Analysis/>



Quantlet



Quantinar