Analiza și Prognoza Seriilor de Timp

Capitolul 3: Modele ARIMA pentru Date Nestaționare

Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București
IDA Institute Digital Assets
Blockchain Research Center
AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance
Academia Română, Institutul de Prognoză Economică
MSCA Digital Finance

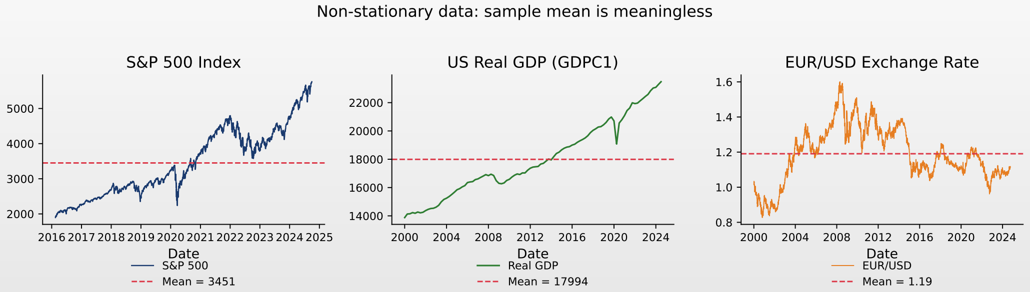
Obiective de învățare

La finalul acestui capitol, veți fi capabili să:

1. **Înțelegeți** conceptul de nestaționaritate și implicațiile sale
2. **Aplicați** diferențierea pentru a obține staționaritate
3. **Folosiți** testul Augmented Dickey-Fuller (ADF) pentru detectarea rădăcinii unitate
4. **Construiți**, estimați și prognozați cu modele ARIMA(p, d, q)
5. **Evaluați** prognozele prin metoda ferestrei rolling
6. **Aplicați** metodologia Box-Jenkins pe date reale (PIB SUA)

Cuprins

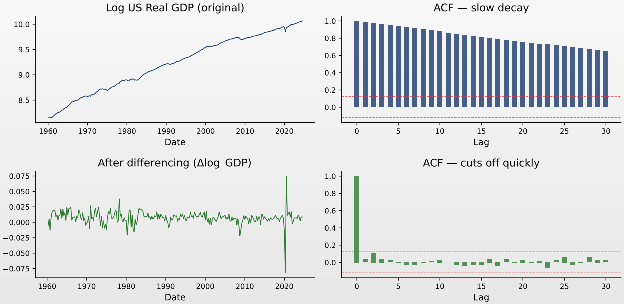
De ce ARIMA? Datele nestaționare sunt pretutindeni



- Prețurile acțiunilor, PIB, cursurile de schimb prezintă **trenduri** sau **mers aleatoriu**
- Media din eșantion (linia roșie) nu este un estimator consistent pentru un proces nestaționar
- Modelele ARMA standard **nu pot** gestiona aceste serii direct

TSA_ch3_motivation_nonstationary

Soluția: diferențierea



Observație cheie

- **Diferențierea** transformă o serie nestaționară într-una staționară: $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$
- ACF se schimbă de la descreștere lentă la descreștere rapidă!

TSA_ch3_motivation_differencing

De ce contează nestaționaritatea

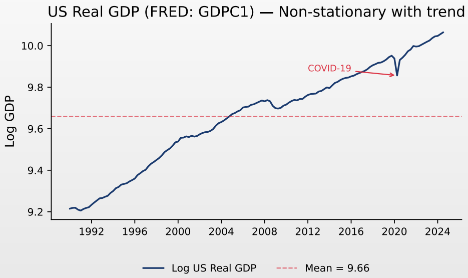
Problema

- Multe serii de timp economice și financiare sunt **nestaționare**:
  - PIB, prețuri de acțiuni, cursuri de schimb, indici de inflație
  - Prezintă trenduri, medii în schimbare sau variantă în creștere

Consecințele nestaționarității

- Modelele ARMA standard presupun staționaritate
- Regresia OLS cu date nestaționare duce la **regresie falsă**
- Momentele din eșantion (medie, variantă, ACF) nu sunt estimatori consistenți
- Inferența statistică devine invalidă

Exemplu: PIB real SUA



Observații

- **Trend** ascendent clar $\succ$ media nu este constantă
- Exemplu clasic de serie **nestaționară**
- Nu putem aplica modele ARMA direct

TSA_ch3_gdp_levels

Tipuri de nestaționaritate

Trend determinist

- **Model**: $Y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$
- **Trend**: funcție deterministă de timp
  - Poate fi eliminat prin regresie
- **Șocuri**: au efecte temporare

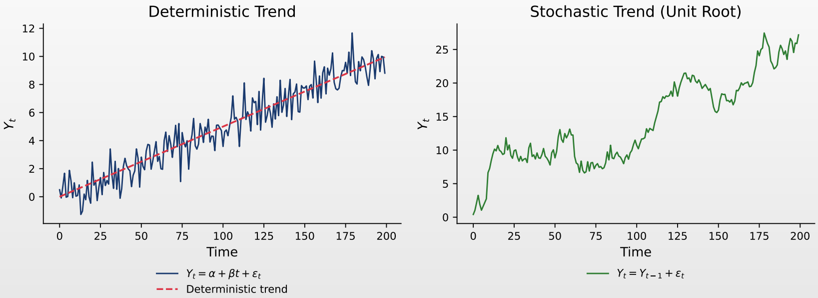
Trend stochastic (rădăcină unitate)

- **Model**: $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$
- **Tip**: proces de mers aleator
  - Trebuie eliminat prin diferențiere
- **Șocuri**: au efecte permanente

Distincție cheie

- Identificarea corectă este crucială: eliminarea trendului prin regresie pentru un proces cu rădăcină unitară sau diferențierea unui proces staționar în trend duc ambele la specificare greșită!

Vizualizarea diferenței



Observații

- **Stânga**: Trend determinist — abaterile de la trend sunt temporare
- **Dreapta**: Trend stochastic — șocurile se acumulează permanent
- Ambele arată similar, dar necesită tratamente **diferite**!

TSA_ch3_trend_comparison

Procesul de mers aleator

Definiție 1 (Mers aleatoriu)

- **Definiție**: $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$
- **Condiție inițială**: $Y_0 = 0 \succ Y_t = \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$

Proprietățile mersului aleatoriu

- $\mathbb{E}[Y_t] = 0$ (medie constantă)
- $\text{Var}(Y_t) = t\sigma^2$ (varianța crește în timp!)
- $\text{Cov}(Y_t, Y_{t-k}) = (t-k)\sigma^2$ pentru $k \leq t$
- ACF: $\rho_k = \sqrt{\frac{t-k}{t}} \to 1$ când $t \to \infty$

Demonstrație: varianța mersului aleatoriu

Afirmație

- Pentru $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$ cu $Y_0 = 0$: $\text{Var}(Y_t) = t\sigma^2$

Demonstrație

- Prin substituție recursivă: $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t = \cdots = \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$
- Luând varianța: $\text{Var}(Y_t) = \sum_{i=1}^{t} \text{Var}(\varepsilon_i) + 2\sum_{i<j} \text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$
- Deoarece ε_t sunt independente, toate covarianțele sunt zero
- $\succ$ $\text{Var}(Y_t) = \sum_{i=1}^{t} \sigma^2 = \boxed{t\sigma^2}$

Nestaționaritate

- Varianța depinde de t $\succ$ încalcă cerința staționarității ($\text{Var}(Y_t) = \gamma(0)$ constant)

Demonstrație: autocovarianța mersului aleatoriu

Afirmație

- $\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-k}) = (t-k)\sigma^2$ pentru $k \leq t$

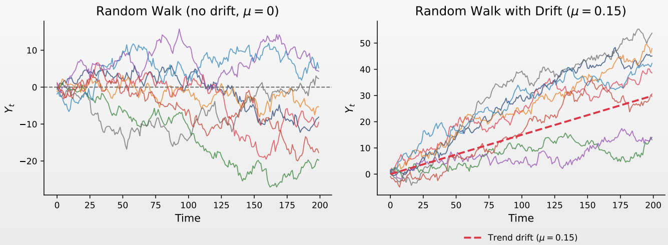
Demonstrație

- Folosind $Y_t = \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$ și $Y_{t-k} = \sum_{i=1}^{t-k} \varepsilon_i$:
$$\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-k}) = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{t-k} \mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sum_{i=1}^{t-k} \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \boxed{(t-k)\sigma^2}$$
- Doar termenii cu $i = j$ supraviețuiesc (când $i \leq t-k$)

ACF

- $\rho(k) = \frac{\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-k})}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y_t)\mathrm{Var}(Y_{t-k})}} = \frac{(t-k)\sigma^2}{\sqrt{t\sigma^2 \cdot (t-k)\sigma^2}} = \sqrt{\frac{t-k}{t}}$

Mers aleatoriu cu drift

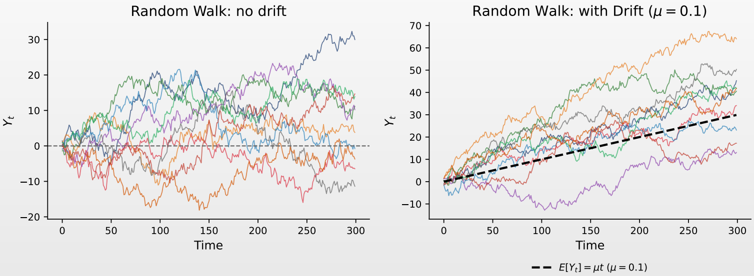


$$Y_t = \mu + Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \Leftrightarrow \quad Y_t = Y_0 + \mu t + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$$

- $\mathbb{E}[Y_t] = Y_0 + \mu t$ (media crește liniar); $\mathrm{Var}(Y_t) = t\sigma^2$ (varianța tot crește)
- **Fără drift** (albastru): rătăcește în jurul lui zero; **Cu drift** $\mu > 0$ (roșu): trend ascendent
- Ambele sunt nestaționare — drift-ul adaugă trend determinist la rătăcirea stochastică

TSA_ch3_def_random_walk_drift

Simularea mersurilor aleatorii



Observații

- **Stânga**: Mersuri aleatorii pure ≻ fără drift, rătăcesc imprevizibil
- **Dreapta**: Cu drift ≻ trend ascendent în medie
- Fiecare traiectorie este unică — incertitudinea crește în timp

TSA_ch3_random_walk

Procese integrate

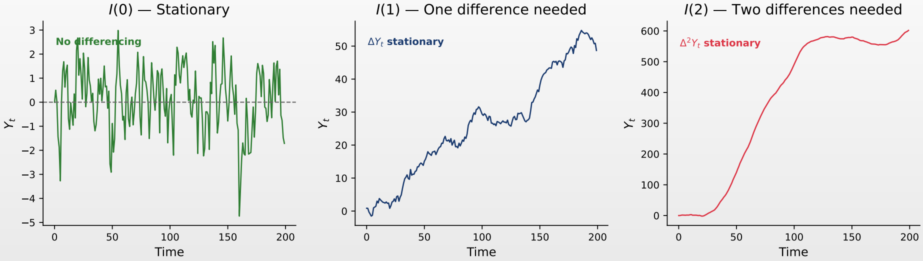
Definiție 2 (Proces Integrat de Ordin d)

- **Notație**: $Y_t \sim I(d)$ dacă:
  - Y_t este nestaționară
  - $(1-L)^d Y_t = \Delta^d Y_t$ este staționară
  - $(1-L)^{d-1} Y_t$ este încă nestaționară

Cazuri comune

- $I(0)$: Proces staționar (de ex., ARMA)
- $I(1)$: Prima diferență este staționară (cel mai frecvent pentru date economice)
- $I(2)$: A doua diferență este staționară (mai rar)

Proces integrat



Ordinul de integrare

- $I(0)$: Staționar $\succ$ nicio diferențiere necesară
- $I(1)$: O diferență necesară (mers aleator)
- $I(2)$: Două diferențe necesare
- Majoritatea seriilor economice sunt $I(0)$ sau $I(1)$

TSA_ch3_def_integrated

Operatorul diferență

Definiție 3 (Prima Diferență)

- **Operator**: $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (1 - L)Y_t$
- **Notație**: L este operatorul lag ($LY_t = Y_{t-1}$)

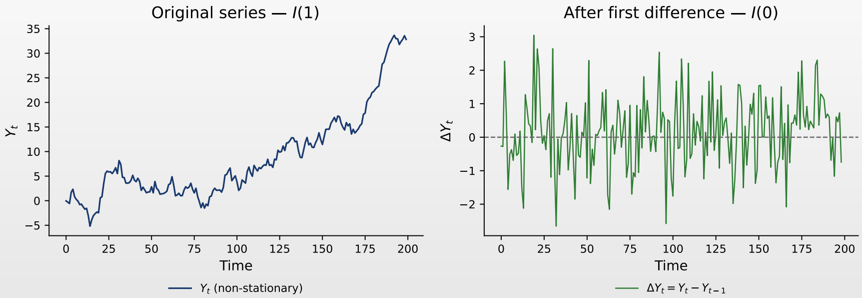
Diferențe de ordin superior

- A două diferență: $\Delta^2 Y_t = \Delta(\Delta Y_t) = (1 - L)^2 Y_t$
- $\Delta^2 Y_t = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$
- Diferența de ordin d: $\Delta^d Y_t = (1 - L)^d Y_t$

Rezultat cheie

- Dacă $Y_t \sim I(d)$, atunci $\Delta^d Y_t \sim I(0)$ (staționar)

Prima diferență



Observație

- **Stânga**: serie nestaționară
- **Dreapta**: după prima diferență, seria devine staționară

TSA_ch3_def_difference

Exemplu: diferențierea unui mers aleator

Mers aleatoriu la zgomot alb

- Fie $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$ (mers aleator). Luând prima diferență:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = \varepsilon_t$$

- Prima diferență este zgomot alb $\succ$ un proces staționar!

Interpretare

- Un mers aleator este $I(1)$
- O diferență îl transformă în $I(0)$
- "Schimbările" într-un mers aleator sunt staționare

Demonstrație: diferențierea induce staționaritatea

Afirmație

- Dacă $Y_t \sim I(1)$, atunci $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ este staționar

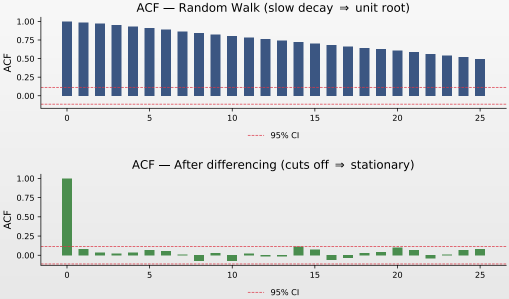
Demonstrație: Mers aleatoriu cu drift $Y_t = \mu + Y_{t-1} + \varepsilon_t$

- Prima diferență: $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = \mu + \varepsilon_t$
- **Media**: $\mathbb{E}[\Delta Y_t] = \mu$ (constantă) ✓
- **Varianța**: $\text{Var}(\Delta Y_t) = \sigma^2$ (constantă) ✓
- **Autocovarianța**: $\text{Cov}(\Delta Y_t, \Delta Y_{t-k}) = 0$ pentru $k \neq 0$ ✓

Principiu general

- Diferențierea elimină "memoria" care face varianța să se acumuleze
- Pentru procese $I(d)$, sunt necesare d diferențe

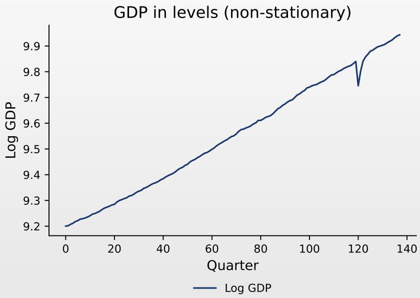
ACF: detectarea nestaționarității

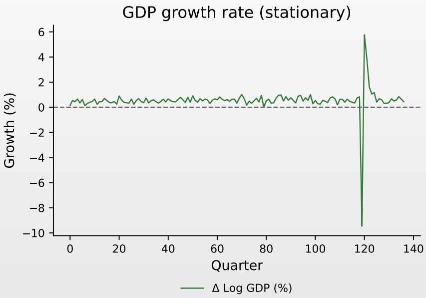


- **Sus**: ACF mers aleator scade foarte lent $\succ$ rădăcină unitate
- **Jos**: După diferențiere, ACF se anulează $\succ$ staționar

TSA_ch3_acf_nonstationary

Diferențierea în practică: exemplul PIB





- **Stânga**: PIB în valori absolute $\succ$ trend ascendent clar (nestaționar)
- **Dreapta**: Rata de creștere PIB (diferența logaritmică) $\succ$ fluctuează în jurul mediei (staționar)
- Diferențierea elimină trendul și obține staționaritate

TSA_ch3_differencing

Supra-diferențierea

Avertisment: Supra-diferențierea

- Diferențierea mai mult decât este necesar introduce probleme:
  - Creează autocorelație negativă artificială
  - Inflează varianța
  - Pierde informație

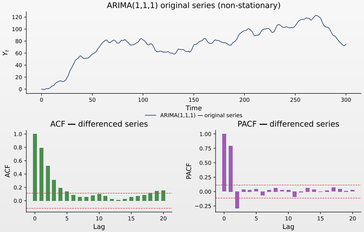
Exemplu

- Dacă $Y_t \sim I(1)$, atunci $\Delta Y_t \sim I(0)$. Dar dacă diferențiem din nou:

$$\Delta^2 Y_t = \Delta Y_t - \Delta Y_{t-1} = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

- Acesta este un MA(1) cu $\theta_1 = -1$ (la granița non-invertibilității)!

Definiția ARIMA



Definiție 4 (ARIMA(p,d,q): $\phi(L)(1-L)^d Y_t = c + \theta(L)\varepsilon_t$)

- **AR**: $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \cdots - \phi_p L^p$; **MA**: $\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \cdots + \theta_q L^q$; **I**: d diferențe
- **Sus**: seria ARIMA originală (nestaționară); **Jos**: după diferențiere — ACF/PACF dezvăluie p, q

TSA_ch3_def_arima

Componentele ARIMA

AR(p)	I(d)	MA(q)
Autoregresiv Memorie	Integrare Diferențiere	Medie Mobilă Șocuri

Cazuri speciale

- ARIMA(p,0,q) = ARMA(p,q) $\succ$ staționar
- ARIMA(0,1,0) = Mers aleatoriu
- ARIMA(0,1,1) = IMA(1,1) $\succ$ netezire exponențială
- ARIMA(1,1,0) = ARI(1,1) $\succ$ AR(1) diferențiat

Exemplu ARIMA(1,1,0)

Model ARI(1,1)

- $\Delta Y_t = c + \phi_1 \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$
- Echivalent: $(1 - \phi_1 L)(1 - L) Y_t = c + \varepsilon_t$

Interpretare

- **Schimbările** în Y_t urmează un proces AR(1)
- Dacă $|\phi_1| < 1$, schimbările sunt staționare
- Y_t în sine are un trend stochastic
- Model comun pentru multe serii de timp economice

Exemplu ARIMA(0,1,1)

Model IMA(1,1)

- $\Delta Y_t = c + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$
- Echivalent: $(1 - L) Y_t = c + (1 + \theta_1 L) \varepsilon_t$

Conexiunea cu netezirea exponențială

- Modelul IMA(1,1) este echivalent cu **netezirea exponențială simplă**:

$$\hat{Y}_{t+1} = \alpha Y_t + (1 - \alpha) \hat{Y}_t$$

- unde $\alpha = 1 + \theta_1$ (pentru $-1 < \theta_1 < 0$)

Rolul constantei în ARIMA

Termenul constant în ARIMA(p,d,q)

- Când $d > 0$, constanta c are o interpretare diferită:
- $\phi(L)(1-L)^d Y_t = c + \theta(L)\varepsilon_t$

Implicații importante

- Pentru $d = 1$: c reprezintă **drift-ul** (schimbarea medie): $\mathbb{E}[\Delta Y_t] = \frac{c}{1-\phi_1-\cdots-\phi_p}$
- Pentru $d = 2$: c afectează **curbura** trendului
- Adesea se presupune $c = 0$ când $d \geq 1$

Portret de cercetător: Dickey & Fuller

David Dickey (*1945)

W Wikipedia (en)

Wayne Fuller (1931–2022)

W Wikipedia (en)

Biografie

- **David Dickey**: statistician american la NC State University. Doctorand al lui Wayne Fuller la Iowa State
- **Wayne Fuller**: statistician american, profesor la Iowa State University
- Împreună au dezvoltat testul fundamental pentru rădăcini unitate în serii de timp

Contribuții principale

- **Testul Dickey-Fuller** (1979) — testul fundamental pentru rădăcini unitate
- **Testul ADF** (Augmented Dickey-Fuller) — extensie cu diferențe întârziate
- **Tabele de valori critice** — distribuții non-standard sub ipoteza nulă
- Testarea riguroasă a ordinului de integrare pentru modelarea ARIMA

Testarea pentru rădăcini unitate

De ce testăm?

- **Scop**: înainte de a potrivi un model ARIMA, trebuie să determinăm:
  - Este seria staționară? (Este $d = 0$?)
  - Dacă nu, câte diferențe sunt necesare? (Care este d?)

Teste comune de rădăcină unitate

- **Dickey-Fuller (DF)** și **Augmented Dickey-Fuller (ADF)**
- **Phillips-Perron (PP)**
- **KPSS** (test de staționaritate $\succ$ ipoteză nulă inversată)

Testul Dickey-Fuller

Configurare

- Considerăm modelul AR(1): $Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$. Scădem Y_{t-1}:
- $\Delta Y_t = (\phi - 1)Y_{t-1} + \varepsilon_t = \gamma Y_{t-1} + \varepsilon_t$, unde $\gamma = \phi - 1$

Ipoteze

- H_0: $\gamma = 0$ (rădăcină unitate, $\phi = 1$, nestaționar)
- H_1: $\gamma < 0$ (staționar, $|\phi| < 1$)

Problemă cheie

- Sub H_0, statistica t **nu** urmează o distribuție t standard!
- Trebuie folosite valorile critice Dickey-Fuller

Testul Augmented Dickey-Fuller (ADF)

Problema cu DF simplu

- **Limitare**: dacă există dinamică AR dincolo de AR(1), reziduurile DF vor fi autocorelate

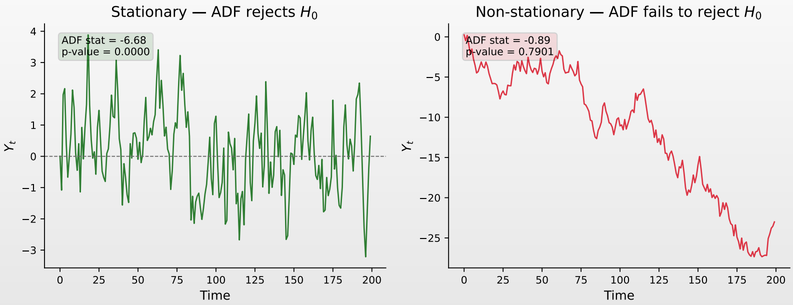
Definiție 5 (Testul ADF)

- **Ecuație**: $\Delta Y_t = \alpha + \beta t + \gamma Y_{t-1} + \sum_{j=1}^{k} \delta_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t$
- **Test**: $H_0 : \gamma = 0$ folosind valorile critice ADF

Alegerea lungimii lag-ului k

- Folosiți criterii informaționale (AIC, BIC)
- Începeți cu k_{max}, reduceți până ultimul lag este semnificativ

Testul ADF



Observație

- **Stânga**: serie staționară $\succ$ ADF respinge rădăcina unitate
- **Dreapta**: nestaționară $\succ$ ADF nu respinge

TSA_ch3_def_adf

Valori critice ADF

Model	**1%**	**5%**	**10%**
Fără constantă, fără trend	−2.58	−1.95	−1.62
Cu constantă	−3.43	−2.86	−2.57
Cu constantă și trend	−3.96	−3.41	−3.13

Regula de decizie

- Statistică de test $<$ valoare critică $\succ$ Respingem H_0 (staționar)
- Statistică de test $\geq$ valoare critică $\succ$ Nu respingem (rădăcină unitate)

Testul Phillips-Perron (PP)

Motivație

- **Ipoteze**: H_0: Rădăcină unitate vs H_1: Staționar (ca ADF)
- **Diferență**: folosește o corecție non-parametrică pentru corelația serială
  - Nu adaugă diferențe întârziate ca ADF

Statistică de Test

- **Formula**: $Z_t = t_{\hat{\gamma}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\lambda}^2}} - \frac{T(\hat{\lambda}^2 - \hat{\sigma}^2)(se(\hat{\gamma}))}{2\hat{\lambda}^2 \cdot s}$
- **Notație**: $\hat{\lambda}^2$ este estimarea consistentă a varianței pe termen lung (Newey-West)

Avantaje față de ADF

- Robust la heteroscedasticitate și corelație serială
- Nu necesită selectarea lungimii lag-ului (folosește lățime de bandă)

Testul KPSS

Ipoteze inversate

- **Spre deosebire de ADF**: H_0: Staționar vs H_1: Rădăcină unitate
  - Ipoteza nulă este inversată față de ADF/PP

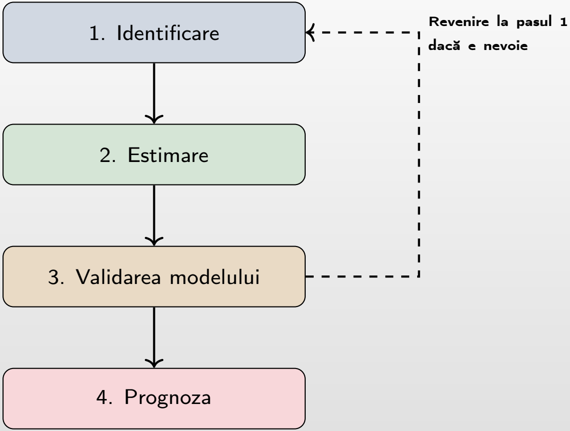
Procedura KPSS

- **Descompunere**: $Y_t = \xi t + r_t + \varepsilon_t$ unde $r_t = r_{t-1} + u_t$
- **Test**: verificăm dacă $\text{Var}(u_t) = 0$
  - Dacă da, componenta aleatoare r_t este constantă

Utilizare complementară cu ADF

- ADF respinge, KPSS nu respinge $\succ$ Staționar
- ADF nu respinge, KPSS respinge $\succ$ Rădăcină unitate
- Ambele resping sau niciunul $\succ$ Neconcludent

Metodologia Box-Jenkins



Pasul 1: Determinarea lui d

Procedură

1. Reprezentați grafic seria de timp $\succ$ căutați trenduri, varianță în schimbare
2. Examinați ACF $\succ$ descreștere lentă sugerează nestaționaritate
3. Aplicați teste de rădăcină unitate (ADF, KPSS)
4. Dacă nestaționară, diferențiați și repetăți

Ghiduri practice

- Majoritatea seriilor economice: $d = 1$ este suficient
- Rar avem nevoie de $d > 2$
- Dacă ACF al ΔY_t tot scade lent, încercați $d = 2$
- Atenție la supra-diferențiere (ACF cu $\rho_1 \approx -0.5$)

Pasul 2: Determinarea lui p și q

După diferențiere

- **Principiu**: odată ce $W_t = \Delta^d Y_t$ este staționar, folosiți ACF/PACF pentru a identifica ARMA(p,q)

Model	ACF	PACF
AR(p)	Scade exponențial	Se anulează după lag p
MA(q)	Se anulează după lag q	Scade exponențial
ARMA(p,q)	Scade	Scade

Criterii informaționale

- **Când**: tiparele ACF/PACF sunt neclare
- **AIC**: $-2\ln(L) + 2k$; **BIC**: $-2\ln(L) + k\ln(n)$ (L = verosimilitate, k = parametri, n = eșantion)
- Mai mic este mai bun; BIC penalizează complexitatea mai mult

Algoritmi Auto-ARIMA

Selecție automată a modelului

- Software-ul modern poate selecta automat (p, d, q):
  - Python: `pmdarima.auto_arima()`   R: `forecast::auto.arima()`

Cum funcționează Auto-ARIMA

1. Folosește teste de rădăcină unitate pentru a determina d
2. Potrivește modele pentru diverse combinații (p, q)
3. Selectează modelul cu cel mai mic AIC/BIC
4. Opțional folosește căutare pas cu pas pentru eficiență

Atenție: Selecția automată este utilă dar nu garantată — verificați întotdeauna validitatea modelului!

Metode de estimare

Estimarea prin metoda verosimilității maxime (MLE)

- Abordarea standard pentru ARIMA:
  - Presupune $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$
  - Maximizează funcția de verosimilitate
  - Oferă estimatori consistenți, eficienți
  - Furnizează erori standard pentru inferență

MLE condiționată vs exactă

- **MLE Condiționată**: Condiționează pe valorile inițiale
- **MLE Exactă**: Tratează valorile inițiale ca necunoscute
- Diferența diminuează pe măsură ce dimensiunea eșantionului crește

Log-verosimilitatea condiționată

Funcția de log-verosimilitate gaussiană

- $\ell(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2) = -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{T}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{T} e_t^2(\boldsymbol{\theta})$
- $e_t(\boldsymbol{\theta}) = X_t - \hat{X}_{t|t-1}$ sunt **erorile de predicție la un pas**
- $\boldsymbol{\theta} = (\phi_1, \ldots, \phi_p, \theta_1, \ldots, \theta_q, c)$

Exemplu: ARIMA(1,1,1)

- Erorile de predicție: $e_t = \Delta X_t - \phi_1 \Delta X_{t-1} - \theta_1 e_{t-1} - c$
- MLE condiționată: fixează $e_0 = 0$, calculează $e_1, \ldots, e_T$, maximizează ℓ

Estimarea lui σ^2

- La parametrii optimi $\hat{\boldsymbol{\theta}}$: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} e_t^2(\hat{\boldsymbol{\theta}})$

Restricții asupra parametrilor

Staționaritate și invertibilitate

- Modelul ARIMA estimat ar trebui să satisfacă:
  - **Staționaritate AR**: Rădăcinile lui $\phi(z) = 0$ în afara cercului unitate
  - **Invertibilitate MA**: Rădăcinile lui $\theta(z) = 0$ în afara cercului unitate

Verificare în practică

- Majoritatea software-ului raportează:
  - Coeficienți estimați cu erori standard
  - Rădăcinile polinoamelor AR și MA
  - Avertisment dacă este detectată aproape-rădăcină-unitate

Diagnosticul modelului ARIMA

Verificări esențiale (aceleași ca pentru ARMA, cf. Cap. 2)

- Dacă modelul este corect, reziduurile $\hat{\varepsilon}_t$ trebuie să fie zgomot alb:
  1. **ACF/PACF rezidual**: fără vârfuri semnificative
  2. **Testul Ljung-Box**: p-value $> 0.05 \succ$ fără autocorelare
  3. **Graficul Q-Q**: verificarea normalității
  4. **Heteroscedasticitate**: varianță constantă a reziduurilor

Aspecte specifice ARIMA

- Testul Ljung-Box: alegeți $m \approx \ln(n)$ sau $m = 10$ (trimestrial), $m = 20$ (lunar)
- Grade de libertate: $\chi^2(m - p - q)$, ajustate pentru p și q estimați
- Dacă testul eșuează: adăugați termeni AR/MA sau verificați rupturi structurale

Testul Ljung-Box

Definiție 6 (Statistica Q Ljung-Box)

$Q(m) = n(n+2)\sum_{k=1}^{m} \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k}$. Sub H_0 (fără autocorelare): $Q(m) \sim \chi^2(m-p-q)$

Utilizare

- Alegeți $m \approx \ln(n)$ sau $m = 10$ trimestrial, $m = 20$ lunar
- Gradele de libertate se ajustează pentru parametrii estimați
- Respingeți dacă $Q(m)$ depășește valoarea critică

Dacă testul eșuează

Luați în considerare adăugarea de termeni AR sau MA, sau verificați rupturile structurale.

Prognoze punctuale

Prognoza cu MSE minim

- Prognoză optimă la h pași: $\hat{Y}_{T+h|T} = \mathbb{E}[Y_{T+h}|Y_T, Y_{T-1}, \ldots]$

Prognoza ARIMA(1,1,1)

- **Model**: $(1-\phi_1 L)(1-L)Y_t = c + (1+\theta_1 L)\varepsilon_t$
- **Un pas**: $\hat{Y}_{T+1|T} = c + Y_T + \phi_1(Y_T - Y_{T-1}) + \theta_1\hat{\varepsilon}_T$
- **Multi-pas**: înlocuiți ε_{T+j} cu 0, Y_{T+j} cu $\hat{Y}_{T+j|T}$

Intervale de prognoză

Incertitudinea prognozei

- Varianța erorii la h pași: $\text{Var}(e_{T+h}) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2$, unde ψ_j sunt coeficienții MA(∞)

Intervale de încredere

- Sub normalitate, interval $(1-\alpha)\%$: $\hat{Y}_{T+h|T} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\text{Var}(e_{T+h})}$

Proprietate cheie pentru serii I(1)

- Pentru procese integrate, varianța prognozei crește nelimitat când $h \to \infty$
- Intervalele se lărgesc în timp!

Prognoze pe termen lung pentru ARIMA

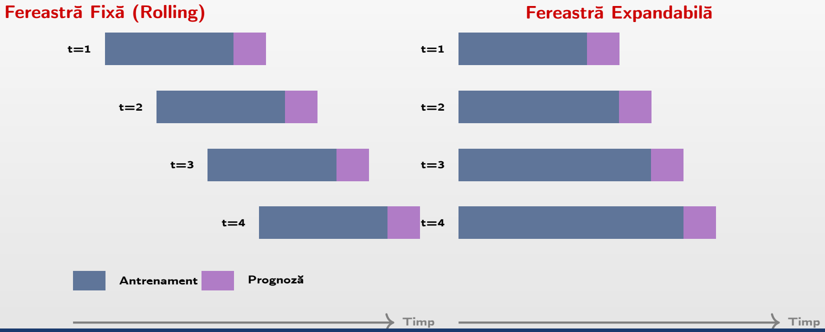
Comportament când $h \to \infty$

- **Cu drift** c: Prognoze punctuale $\succ$ trend liniar; IC $\succ$ lățimea crește cu $\sqrt{h}$
- **Fără drift**: Prognoze punctuale $\succ$ converg la ultima valoare observată; IC $\succ$ tot cresc nelimitat

Implicație practică

- Prognozele ARIMA sunt cele mai fiabile pentru orizonturi scurte
- Prognozele pe termen lung au benzi de incertitudine foarte largi

Prognoza rolling: fereastră fixă vs expandabilă



Evaluarea acurateții prognozei în afara eșantionului

- **Fixă**: fereastra alunecă, dimensiune constantă w — se adaptează la schimbări de regim
- **Expandabilă**: fereastra crește — folosește toate datele istorice
- Mimează scenariul de prognoză în timp real; oferă multiple erori pentru evaluare

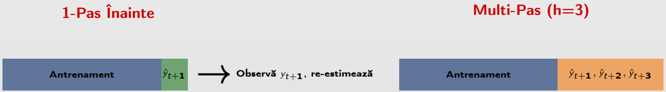
Prognoză 1-pas vs multi-pas

1-Pas înainte (recursiv)

- Prognozează doar perioada următoare
  - Re-estimează modelul după fiecare pas
  - Folosește valoarea reală odată observată
- Cea mai precisă pentru orizonturi scurte

Multi-Pas (direct)

- Prognozează mai multe perioade înainte
  - Fără re-estimare între pași
  - Folosește valori prognozate ca input
- Incertitudinea se acumulează cu orizontul



Prognoza rolling: exemplu pas cu pas

Configurare: ARIMA(1,1,0) cu $\phi_1 = 0.6$

- Model: $\Delta Y_t = \phi_1 \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$ unde $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$

Date la momentul T

- $Y_{T-2} = 100$, $Y_{T-1} = 103$, $Y_T = 108 \succ \Delta Y_{T-1} = 3$, $\Delta Y_T = 5$

Prognoza punctuală la 1 pas

$$\Delta \hat{Y}_{T+\mathbf{1}|T} = \phi_{\mathbf{1}} \cdot \Delta Y_T = 0.6 \times 5 = 3$$
$$\hat{Y}_{T+\mathbf{1}|T} = Y_T + \Delta \hat{Y}_{T+\mathbf{1}|T} = 108 + 3 = \boxed{111}$$

Prognoze punctuale multi-pas

Prognoza la 2 pași

$$\Delta\hat{Y}_{T+2|T} = \phi_1 \cdot \Delta\hat{Y}_{T+1|T} = 0.6 \times 3 = 1.8$$
$$\hat{Y}_{T+2|T} = \hat{Y}_{T+1|T} + \Delta\hat{Y}_{T+2|T} = 111 + 1.8 = \boxed{112.8}$$

Formula generală pentru prognoza la h pași (ARIMA(1,1,0))

$$\Delta\hat{Y}_{T+h|T} = \phi_1^h \cdot \Delta Y_T$$
$$\hat{Y}_{T+h|T} = Y_T + \Delta Y_T \cdot \frac{\phi_1(1-\phi_1^h)}{1-\phi_1}$$

Numeric: Prognoza la 3 pași

$\hat{Y}_{T+3|T} = 108 + 5 \times \frac{0.6(1-0.6^3)}{1-0.6} = 108 + 5 \times 1.176 = \boxed{113.88}$

Intervale de încredere: formule

Varianța erorii de prognoză

- Pentru ARIMA(1,1,0) la h pași: $\text{Var}(e_{T+h|T}) = \sigma^2 \left(1 + \sum_{j=1}^{h-1} \psi_j^2\right)$
- $\psi_j = 1 + \phi_1 + \cdots + \phi_1^j = \frac{1-\phi_1^{j+1}}{1-\phi_1}$ pentru $j \geq 0$

Interval de încredere $(1-\alpha)\%$

- $\hat{Y}_{T+h|T} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\text{Var}(e_{T+h|T})}$
- Pentru IC 95%: $z_{0.025} = 1.96$

Interval de încredere: exemplu numeric

Date: $\sigma^2 = 4,\ \phi_1 = 0.6,\ \hat{Y}_{T+1|T} = 111$

IC la 1 pas

$$\text{Var}(e_{T+\mathbf{1}|T}) = \sigma^{\mathbf{2}} = 4$$
$$\text{IC } 95\% = 111 \pm 1.96 \times \sqrt{4} = 111 \pm 3.92 = \boxed{[107.08,\ 114.92]}$$

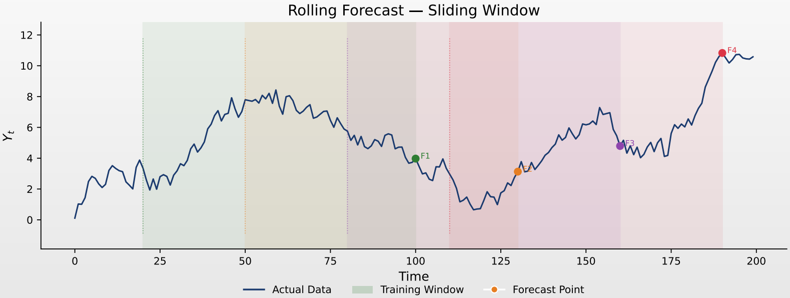
IC la 2 pași (pentru $\hat{Y}_{T+2|T} = 112.8$)

$$\psi_{\mathbf{1}} = 1 + \phi_{\mathbf{1}} = 1.6, \quad \text{Var}(e_{T+\mathbf{2}|T}) = 4(1 + 1.6^{\mathbf{2}}) = 14.24$$
$$\text{IC } 95\% = 112.8 \pm 1.96 \times \sqrt{14.24} = 112.8 \pm 7.40 = \boxed{[105.40,\ 120.20]}$$

Notă

- IC se lărgește pe măsură ce orizontul de predicție crește!

Ilustrație fereastră rolling



- Fiecare fereastră produce o prognoză la 1 pas
- Comparăm prognozele cu valorile reale pentru a calcula RMSE, MAE
- Fereastra rolling menține estimarea modelului actualizată

TSA_ch3_rolling_forecast

Studiu de caz: analiză ARIMA completă

Obiectiv

- Prognoză PIB Real al SUA folosind metodologia Box-Jenkins

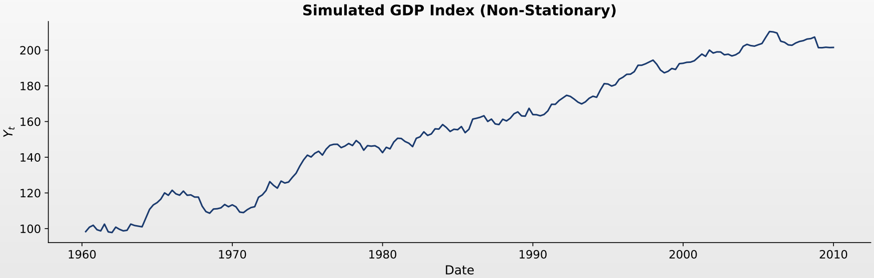
Etape

1. **Pasul 1**: vizualizarea datelor și verificarea staționarității
2. **Pasul 2**: Aplicarea testelor de rădăcină unitate (ADF, KPSS)
3. **Pasul 3**: Diferențiere dacă e necesar, identificare p și q
4. **Pasul 4**: Estimarea modelului ARIMA
5. **Pasul 5**: Diagnosticul modelului
6. **Pasul 6**: Generarea prognozelor cu intervale de încredere
7. **Pasul 7**: Evaluarea acurateții prognozei

Date

- PIB Real SUA (FRED: GDPC1), Trimestrial, 1990T1–2024T2, $n = 138$

Pasul 1: analiza inițială a datelor



Observații

- Trend ascendent clar $\succ$ medie neconstantă
- Scădere notabilă în 2020 (COVID-19)
- **Concluzie**: nestaționar, necesită diferențiere

TSA_ch3_case_raw_data

Pasul 2: testarea rădăcinii unitate

Test ADF pe log PIB (serie originală)

- Statistică test: -0.91
- Valori critice: -3.48 (1%), -2.88 (5%), -2.58 (10%)
- p-value: 0.79
- **Rezultat**: Nu putem respinge H_0 $\succ$ Rădăcină unitate prezentă

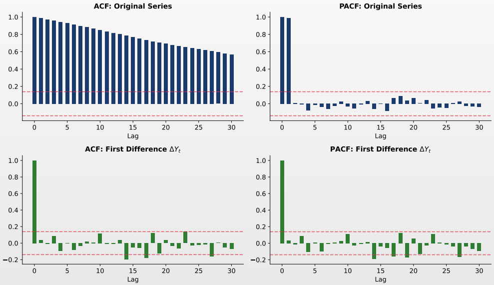
Test ADF pe prima diferență (rata de creștere)

- Statistică test: -13.24
- p-value: < 0.001
- **Rezultat**: Respingem H_0 la 1% $\succ$ Staționar după diferențiere

Concluzie

- PIB este $I(1)$ $\succ$ Folosim $d = 1$ în modelul ARIMA

Pasul 3: Identificarea modelului prin ACF/PACF



Analiza seriei diferențiate

- **ACF**: Vârf la lag 1, apoi se anulează — sugerează MA(1)
- **PACF**: Vârf la lag 1, scade — sugerează AR(1)
- **Candidate**: ARIMA(1,1,0), ARIMA(0,1,1), ARIMA(1,1,1)

TSA_ch3_case_acf_diff

Pasul 4: Estimarea modelului

Compararea modelelor folosind criterii informaționale

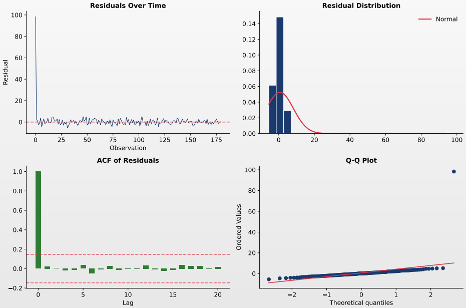
Model	AIC	BIC	Log-Lik
ARIMA(1,1,0)	−725.2	−719.5	364.6
ARIMA(0,1,1)	−724.8	−719.2	364.4
ARIMA(1,1,1)	−747.0	−738.5	376.5

Model selectat: ARIMA(1,1,1)

$$(1 - 0.35L)(1 - L)Y_t = (1 + 0.58L)\varepsilon_t, \quad \hat{\sigma}^2 = 0.000156$$

- $\hat{\phi}_1 = 0.35$ (SE $= 0.09$), semnificativ la 1%
- $\hat{\theta}_1 = 0.58$ (SE $= 0.08$), semnificativ la 1%

Pasul 5: diagnosticul modelului



Analiza reziduurilor

- Ljung-Box: $Q(10) = 5.8$, p-value $= 0.83$ — fără autocorelare
- JB: 156.4, p < 0.001 — non-normal (outlier COVID)
- **Concluzie**: trece verificările de autocorelare

TSA_ch3_case_diagnostics

Pasul 6: Prognoza cu intervale de încredere

Ultimele valori observate (log PIB)

- $Y_T = 9.973$ (2024T2), $Y_{T-1} = 9.956$ (2024T1)
- $\Delta Y_T = 0.017$, $\hat{\varepsilon}_T = 0.004$

Prognoza la 1 pas (2024T3)

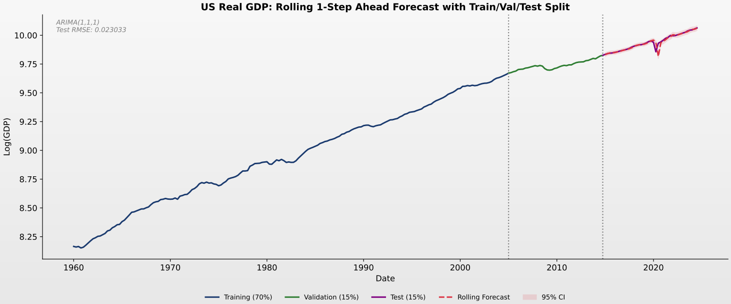
$$\Delta \hat{Y}_{T+1} = \hat{\phi}_1 \Delta Y_T + \hat{\theta}_1 \hat{\varepsilon}_T = 0.35(0.017) + 0.58(0.004) = 0.0083$$

$$\hat{Y}_{T+1} = 9.973 + 0.0083 = \boxed{9.981}$$

Interval de încredere 95%

- $\text{IC} = 9.981 \pm 1.96 \times \sqrt{0.000156} = [9.957,\ 10.006]$
- În valori absolute: Prognoză PIB = \$21,652 mld, IC = [\$21,142 mld, \$22,175 mld]

Pasul 7: Prognoză Rolling cu Train/Val/Test

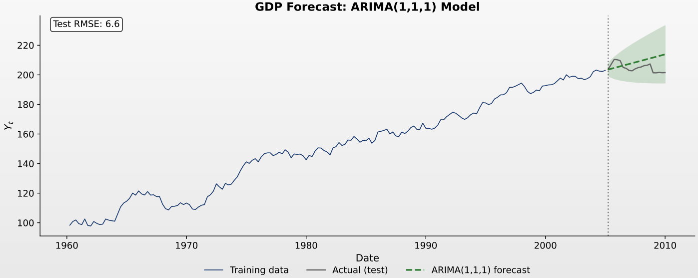


Prognoză Rolling 1-pas înainte (fereastră expandabilă, IC 95%)

Train 70% → Val 15% → Test 15% | Fereastră expandabilă re-estimează modelul la fiecare pas

TSA_ch3_case_rolling_forecast

Pasul 8: Evaluarea prognozei



Performanță out-of-sample (ultimele 12 trimestre)

- RMSE $= 0.0486 \approx 4.86\%$ eroare
- MAE $= 0.0430 \approx 4.30\%$ eroare
- Acuratețe direcție $= 91\%$ — a prezis corect creștere/scădere

TSA_ch3_case_forecast

Exercițiu AI: Gândire critică

Prompt de testat în ChatGPT / Claude / Copilot

"Descarcă de pe FRED PIB-ul trimestrial real al SUA (seria GDPC1) din 2000-Q1 până în 2024-Q4 (100 observații). Testează staționaritatea, diferențiază dacă e nevoie, estimează un model ARIMA și prognozează 8 trimestre. Vreau cod Python complet cu grafice."

Exercițiu:

1. Rulați prompt-ul într-un LLM la alegere și analizați critic răspunsul.
2. Testează staționaritatea cu ADF *înainte* de a estima ARIMA? Folosește și KPSS?
3. Cum determină ordinul de diferențiere d? Verifică supra-diferențierea?
4. Cum alege ordinele p și q? Folosește ACF/PACF sau doar auto_arima?
5. Intervalele de încredere se lărgesc cu orizontul? (proprietate cheie I(1))

Atenție: Codul generat de AI poate rula fără erori și arăta profesional. *Asta nu înseamnă că e corect.*

Rezumat

Ce am învățat în acest capitol

- Nestaționaritatea în seriile de timp
  - Trend determinist vs stochastic; consecințe asupra inferenței statistice
- Diferențierea și procesele integrate
  - $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$; dacă $Y_t \sim I(d)$, atunci $\Delta^d Y_t \sim I(0)$
- Modele ARIMA(p, d, q) și teste de rădăcină unitate
  - ADF, PP, KPSS; Box-Jenkins: identificare $\succ$ estimare $\succ$ validare
- Prognoze cu intervale de încredere
  - Pentru I(1): IC se lărgesc nelimitat cu orizontul ($\propto \sqrt{h}$)

Idee cheie

- **Diferențiați cu atenție**: O diferență este de obicei suficientă ($d = 1$). Supra-diferențierea creează autocorelație artificială.

Ce urmează?

Capitolul 4: Modele SARIMA pentru date sezoniere

- **Sezonalitatea**: tipare repetitive la intervale regulate
- **Diferențierea sezonieră**: operatorul $(1 - L^s)$
- **SARIMA$(p, d, q)(P, D, Q)_s$**: extensia sezonieră a ARIMA
- **Identificarea modelului**: ACF/PACF sezoniere
- **Studiu de caz**: Prognoza pasagerilor aerieni

Întrebări?

Întrebarea 1

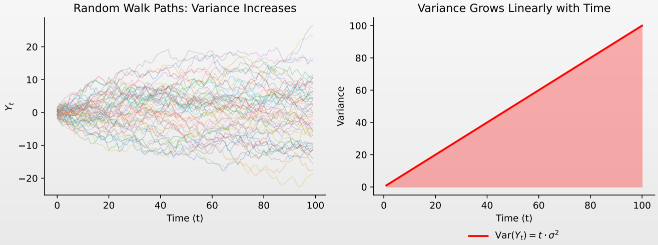
Întrebare

- O serie de timp Y_t urmează un mers aleator: $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$. Care este $\text{Var}(Y_t)$?

Variante de răspuns

(A) σ^2 (constantă)
(B) $t \cdot \sigma^2$ (crește liniar în timp)
(C) σ^2/t (scade în timp)
(D) σ^{2t} (crește exponențial)

Întrebarea 1: Răspuns



Răspuns corect: (B) $\mathrm{Var}(Y_t) = t \cdot \sigma^2$

- Varianța mersului aleatoriu crește liniar în timp $\succ$ de aceea mersurile aleatorii sunt nestaționare

TSA_ch3_quiz1_rw_variance

Întrebarea 2

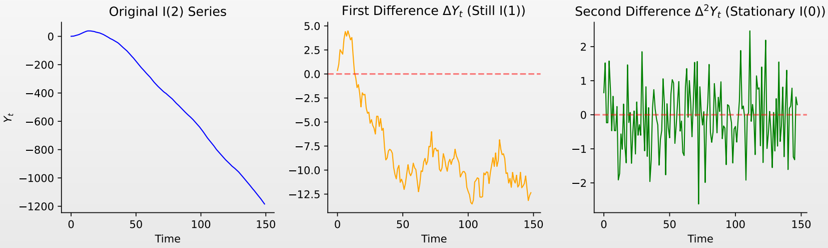
Întrebare

Dacă o serie Y_t este I(2), de câte ori trebuie diferențiată pentru a atinge staționaritatea?

Variante de răspuns

(A) 0 ori (deja staționară)
(B) 1 dată
(C) 2 ori
(D) Nu poate fi făcută staționară prin diferențiere

Întrebarea 2: Răspuns



Răspuns corect: (C) 2 ori

- I(d) înseamnă "integrată de ordin d" $\succ$ necesită d diferențe pentru staționaritate

TSA_ch3_quiz2_differencing

Întrebarea 3

Întrebare

- Rulați un test ADF și obțineți o statistică de test de -2.1 cu valori critice: -3.43 (1%), -2.86 (5%), -2.57 (10%). Ce concluzie trageți?

Variante de răspuns

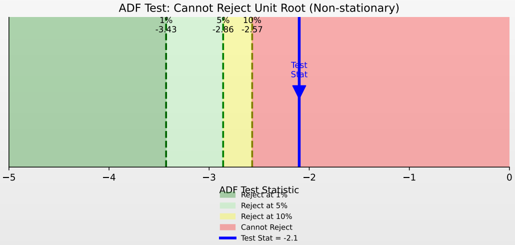
(A) Respingem H_0: seria este staționară la toate pragurile de semnificație

(B) Respingem H_0: seria este staționară doar la pragul de 10%

(C) Nu respingem H_0: seria probabil are rădăcină unitate

(D) Testul este neconcludent

Întrebarea 3: Răspuns



Răspuns corect: (C) Nu respingem H_0

- Statistică de test $-2.1 > -2.57$ (VC 10%) $\succ$ Nu putem respinge la niciun prag de semnificație
- Luați în considerare diferențierea

TSA_ch3_quiz3_adf_test

Întrebarea 4

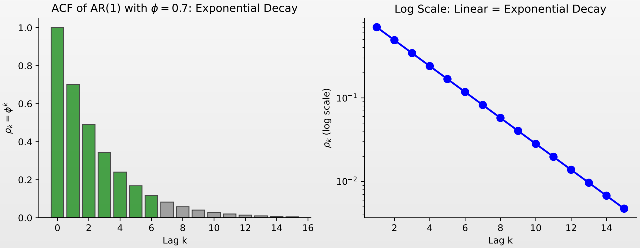
Întrebare

- Pentru un model ARIMA(1,1,0), care este tiparul ACF al seriei **diferențiate** ΔY_t?

Variante de răspuns

(A) Se anulează după lag 1 **(B)** Scade exponențial **(C)** Alternează în semn **(D)** Este zero la toate lag-urile

Întrebarea 4: Răspuns



Răspuns corect: (B) Scade exponențial

- ARIMA(1,1,0) $\succ$ ΔY_t urmează AR(1) cu ACF $\rho_k = \phi_1^k$ (descreștere geometrică)

TSA_ch3_quiz4_acf_decay

Întrebarea 5

Întrebare

Ce se întâmplă cu intervalele de încredere ale prognozei ARIMA pe măsură ce orizontul h crește pentru o serie I(1)?

Variante de răspuns

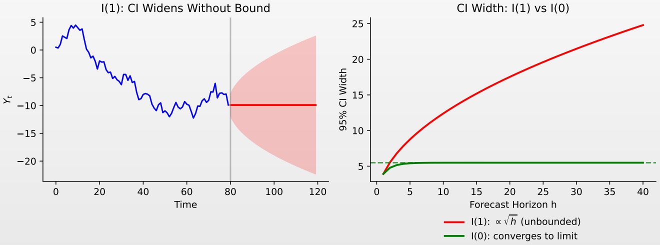
(A) Rămân constante

(B) Se îngustează (mai multă precizie)

(C) Se lărgesc nelimitat

(D) Se lărgesc dar converg la o limită

Întrebarea 5: Răspuns



Răspuns corect: (C) Se lărgesc nelimitat

- Pentru I(1): lățimea IC $\propto \sqrt{h}$ (nelimitată)
- Pentru I(0): IC converg la o limită

TSA_ch3_quiz5_forecast_ci

Bibliografie I

Teste de rădăcină unitate

- Dickey, D.A., & Fuller, W.A. (1979). Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root, *JASA*, 74(366), 427–431.
- Phillips, P.C.B., & Perron, P. (1988). Testing for a Unit Root in Time Series Regression, *Biometrika*, 75(2), 335–346.
- Kwiatkowski, D., Phillips, P.C.B., Schmidt, P., & Shin, Y. (1992). Testing the Null Hypothesis of Stationarity, *Journal of Econometrics*, 54(1-3), 159–178.

Modele ARIMA și selecție automată

- Box, G.E.P., & Jenkins, G.M. (1970). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden-Day.
- Hyndman, R.J., & Khandakar, Y. (2008). Automatic Time Series Forecasting: The `forecast` Package for R, *Journal of Statistical Software*, 27(3), 1–22.

Bibliografie II

Manuale și referințe suplimentare

- Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- Shumway, R.H., & Stoffer, D.S. (2017). *Time Series Analysis and Its Applications*, 4th ed., Springer.
- Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*, 3rd ed., OTexts.

Resurse online și cod

- **Quantlet**: `https://quantlet.com` ≻ Platformă de cod pentru metode cantitative
- **Quantinar**: `https://quantinar.com` ≻ Platformă de învățare pentru metode cantitative
- **GitHub TSA**: `https://github.com/QuantLet/TSA/tree/main/TSA_ch3` ≻ Cod Python pentru acest capitol

Întrebări?

Vă Mulțumim!

Întrebări?

Materialele cursului sunt disponibile la: https://danpele.github.io/Time-Series-Analysis/

Quantlet Quantinar