



Analiza și Prognoza seriilor de timp

Seminar 3: Modele ARIMA



Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice din București

IDA Institute Digital Assets

Blockchain Research Center

AI4EFin Artificial Intelligence for Energy Finance

Academia Română, Institutul de Prognoză Economică

MSCA Digital Finance

Cuprins Seminar

Activitățile de Astăzi:

1. **Test de Recapitulare** — Verificarea înțelegerii conceptelor ARIMA
2. **Întrebări Adevărat/Fals** — Verificări conceptuale
3. **Probleme Practice** — Calcule cu ARIMA
4. **Exemple Rezolvate** — Aplicații din lumea reală
5. **Analiză pe Date Reale** — Studiu de caz PIB
6. **Exerciții AI** — Modelare om vs. AI

Test 1: Ordinul de Integrare

Întrebare

O serie de timp Y_t necesită două diferențe pentru a deveni staționară. Care este ordinul ei de integrare?

Variante de răspuns

(A) $I(0)$ indent (B) $I(1)$ indent (C) $I(2)$ indent (D) Nu poate fi determinat

Test 1: Ordinul de Integrare

Întrebare

O serie de timp Y_t necesită două diferențe pentru a deveni staționară. Care este ordinul ei de integrare?

Răspuns: $C - I(2)$

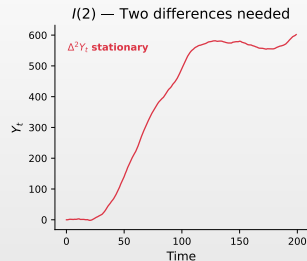
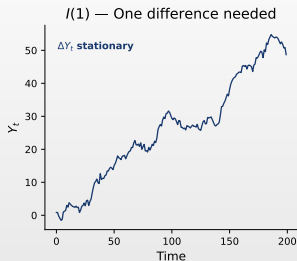
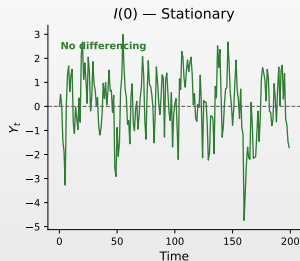
Definiție: $Y_t \sim I(d)$ dacă $\Delta^d Y_t$ este staționară dar $\Delta^{d-1} Y_t$ nu este.

Exemplu: Dacă Y_t urmează $\Delta^2 Y_t = \varepsilon_t$, atunci:

- $\Delta Y_t = \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$ (încă are rădăcină unitară)
- $\Delta^2 Y_t = \varepsilon_t$ (zgomot alb, staționară)

Lumea reală: Indicii de prețuri pot fi $I(2)$ când inflația însăși este nestaționară.

Vizual: Procese Integrate



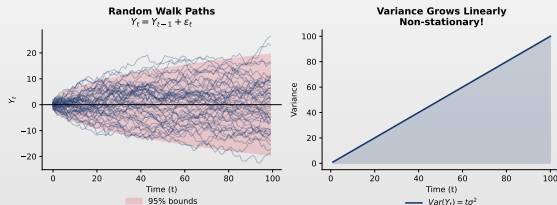
$I(0)$: staționară. $I(1)$: o diferență necesară. $I(2)$: două diferențe necesare pentru a deveni staționară.

 TSA_ch3_def_integrated

Test 2: Proprietățile Mersului Aleatoriu

Întrebare

Pentru un mers aleator $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$ cu $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$, care este $\text{Var}(Y_t)$?



 TSA_ch3_rw_variance

Test 3: Ipotezele Testului ADF

Întrebare

În testul Augmented Dickey-Fuller, care este ipoteza nulă?

Variante de răspuns

- (A) Seria este staționară indent (B) Seria are o rădăcină unitară indent (C) Seria nu are autocorelație indent (D) Seria este distribuită normal

Test 3: Ipotezele Testului ADF

Întrebare

În testul Augmented Dickey-Fuller, care este ipoteza nulă?

Răspuns: B – Seria are o rădăcină unitară

Regresia ADF: $\Delta Y_t = \alpha + \gamma Y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \delta_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t$

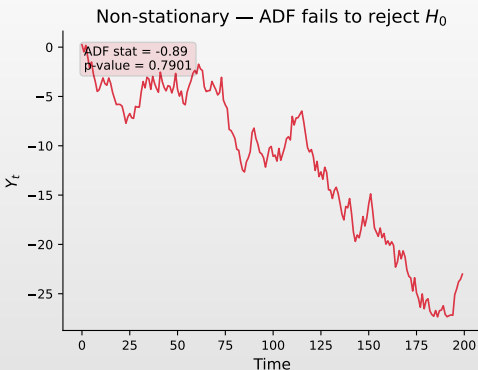
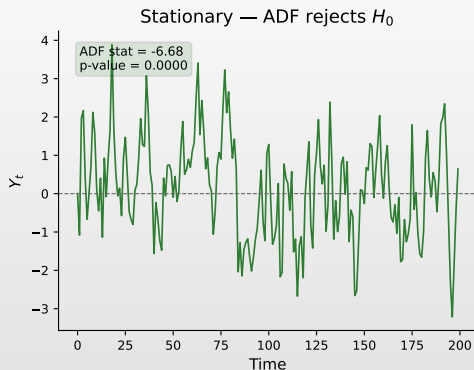
Ipoteze:

- ☐ $H_0 : \gamma = 0$ (rădăcină unitară, nestăționară)
- ☐ $H_1 : \gamma < 0$ (staționară)

Decizie: Respingem H_0 dacă statistica $t < \text{valoarea critică}$ (de ex., -2.86 la 5%)

Notă: Folosește distribuția specială Dickey-Fuller, nu t standard.

Vizual: Testul ADF



Stânga: staționară – ADF respinge rădăcina unitară. Dreapta: nestacionară – ADF nu respinge.

[TSA_ch3_def_adf](#)



Test 4: Notăția ARIMA

Întrebare

Ce înseamnă ARIMA(2,1,1)?

Variante de răspuns

- (A) AR(2) pe date diferențiate cu erori MA(1)
- (B) AR(1) cu 2 diferențe și MA(1)
- (C) MA(2) cu 1 diferență și AR(1)
- (D) 2 lag-uri, 1 trend, 1 componentă sezonieră

Test 4: Notăția ARIMA

Întrebare

Ce înseamnă ARIMA(2,1,1)?

Răspuns: A – AR(2) pe date diferențiate cu erori MA(1)

ARIMA(p, d, q): $\phi(L)(1 - L)^d Y_t = \theta(L)\varepsilon_t$

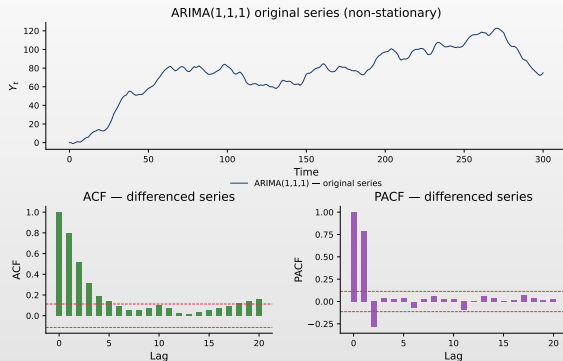
ARIMA(2,1,1) se expandează la:

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)(1 - L)Y_t = (1 + \theta_1 L)\varepsilon_t$$

Sau echivalent: $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)\Delta Y_t = (1 + \theta_1 L)\varepsilon_t$

Interpretare: Mai întâi diferențiem seria, apoi ajustăm ARMA(2,1) pe ΔY_t .

Vizual: Procesul ARIMA



Sus: seria ARIMA originală. Jos: după diferențiere, folosim ACF/PACF pentru a identifica ordinele AR și MA.

Test 5: Operatorul de Diferență

Întrebare

Care este $(1 - L)^2 Y_t$ expandat?

Variante de răspuns

- (A) $Y_t - Y_{t-1}$ indent (B) $Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$ indent (C) $Y_t + 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$ indent
(D) $Y_t - Y_{t-2}$

Test 5: Operatorul de Diferență

Întrebare

Care este $(1 - L)^2 Y_t$ expandat?

Răspuns: $B - Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$

Expandare folosind teorema binomială:

$$(1 - L)^2 = 1 - 2L + L^2$$

Aplicare lui Y_t :

$$(1 - L)^2 Y_t = Y_t - 2L \cdot Y_t + L^2 \cdot Y_t = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$$

Notă: Aceasta este egală cu $\Delta(\Delta Y_t) = \Delta Y_t - \Delta Y_{t-1}$, "schimbarea schimbărilor".

Test 6: KPSS vs ADF

Întrebare

Cum diferă testul KPSS de testul ADF?

Variante de răspuns

- (A) KPSS testează sezonalitatea, ADF testează trenduri
- (B) KPSS are staționaritatea ca nulă, ADF are rădăcina unitară ca nulă
- (C) KPSS este mai puternic decât ADF
- (D) Nu există diferență

 TSA_ch3_adf_kpss

Test 6: KPSS vs ADF

Întrebare

Cum diferă testul KPSS de testul ADF?

Răspuns: B – Ipoteze nule inversate

ADF Test	KPSS Test
H_0 : Unit Root	H_0 : Stationary
H_1 : Stationary	H_1 : Unit Root
Reject if $t\text{-stat} < \text{critical}$	Reject if $LM > \text{critical}$

Decision Matrix		
ADF rejects	KPSS fails to reject	→ Stationary
ADF fails to reject	KPSS rejects	→ Unit Root
Both reject	or both fail	→ Inconclusive

Strategie: Folosiți ambele teste împreună pentru inferență robustă!

Test 7: Supradiferențierea

Întrebare

Dacă $Y_t \sim I(1)$ și calculăm $\Delta^2 Y_t$, ce se întâmplă?

Variante de răspuns

- (A) Obținem o serie staționară mai bună
- (B) Introducem autocorelație negativă artificială
- (C) Varianța scade
- (D) Nu se schimbă nimic

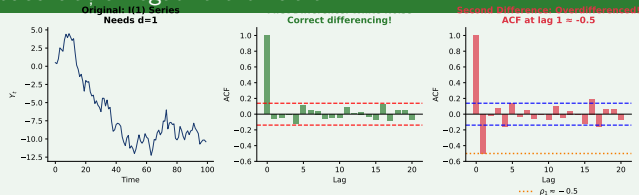
 TSA_ch3_overdifferencing

Test 7: Supradiferențierea

Întrebare

Dacă $Y_t \sim I(1)$ și calculăm $\Delta^2 Y_t$, ce se întâmplă?

Răspuns: B – Autocorelație negativă artificială



Diagnostic: ACF la lag 1 ≈ -0.5 semnalează supradiferențiere. Reduceți d cu 1!

Test 8: Variația Prognozei

Întrebare

Pentru un model ARIMA(0,1,0) (mers aleator), cum se comportă variația prognozei când orizontul h crește?

Variante de răspuns

- (A) Rămâne constantă indent (B) Scade la zero indent (C) Crește liniar cu h indent
(D) Convergă la o limită finită

Test 8: Variația Prognozei

Întrebare

Pentru un model ARIMA(0,1,0) (mers aleator), cum se comportă variația prognozei când orizontul h crește?

Răspuns: C – Crește liniar cu h

Prognoza mersului aleatoriu: $\hat{Y}_{T+h|T} = Y_T$ (cea mai bună prognoză este valoarea curentă)

Eroarea de prognoză: $Y_{T+h} - \hat{Y}_{T+h|T} = \sum_{i=1}^h \varepsilon_{T+i}$

Varianță:

$$\text{Var}(Y_{T+h} - \hat{Y}_{T+h|T}) = h\sigma^2$$

IC 95%: $Y_T \pm 1.96\sqrt{h}\sigma$ (se lărgeste cu \sqrt{h})

Test 9: Puterea Testului de Rădăcină Unitară

Întrebare

Testul ADF are putere scăzută când:

Variante de răspuns

- (A) Dimensiunea eşantionului este foarte mare
- (B) Rădăcina adevărată este aproape dar nu egală cu 1
- (C) Seria nu are trend
- (D) Seria este clar staţionară

Test 9: Puterea Testului de Rădăcină Unitară

Întrebare

Testul ADF are putere scăzută când:

Răspuns: B – Rădăcina aproape dar nu egală cu 1

Exemplu: AR(1) cu $\phi = 0.95$ vs mers aleator ($\phi = 1$)

Problemă: Ambele au modele ACF similare (descreștere lentă), dar una este staționară!

Putere scăzută înseamnă: Probabilitate mare de eroare de tip II (eșec în respingerea lui H_0 fals)

Soluții:

- ☐ Dimensiuni mai mari ale eșantionului
- ☐ Testul Phillips-Perron (robust la heteroscedasticitate)
- ☐ Teste de rădăcină unitară pe paneluri (serii multiple)

Test 10: Selecția modelului ARIMA

Întrebare

După o diferențiere, ACF arată un vârf doar la lag 1, și PACF descrește. Modelul potrivit este:

Variante de răspuns

(A) ARIMA(1,1,0) indent (B) ARIMA(0,1,1) indent (C) ARIMA(1,1,1) indent (D) ARIMA(0,2,1)

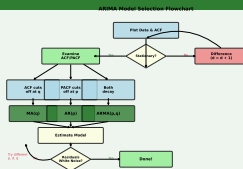
 TSA_ch3_arima_flowchart

Test 10: Selecția modelului ARIMA

Întrebare

După o diferențiere, ACF arată un vârf doar la lag 1, și PACF descrește. Modelul potrivit este:

Răspuns: B – ARIMA(0,1,1)



Model: ACF se anulează la lag 1, PACF descrește \Rightarrow MA(1) pentru seria diferențiată. Model complet: ARIMA(0,1,1) = IMA(1,1)

Test 11: Staționaritate în Trend vs Staționaritate în Diferențe

Întrebare

Un proces staționar în trend devine staționar prin:

Variante de răspuns

- (A) Luarea diferențelor de ordinul întâi
- (B) Eliminarea trendului determinist prin regresie
- (C) Luarea diferențelor de ordinul doi
- (D) Aplicarea ajustării sezoniere

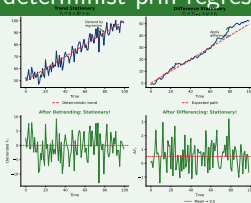
 TSA_ch3_trend_vs_diff

Test 11: Staționaritate în Trend vs Staționaritate în Diferențe

Întrebare

Un proces staționar în trend devine staționar prin:

Răspuns: B – Eliminarea trendului determinist prin regresie



Staționar în trend: Eliminarea trendului prin regresie (șocurile sunt temporare). **Staționar în diferențe:** Diferențiere (șocurile sunt permanente). Tratatamentul greșit afectează modelul!

Test 12: Invertibilitatea ARIMA

Întrebare

ARIMA(0,1,1) cu $\theta_1 = 1.2$ este:

Variante de răspuns

- (A) Staționară și invertibilă indent (B) Nestaționară dar invertibilă indent (C) Nestaționară și neinvertibilă indent (D) Staționară dar neinvertibilă

Test 12: Invertibilitatea ARIMA

Întrebare

ARIMA(0,1,1) cu $\theta_1 = 1.2$ este:

Răspuns: C – Nestaționară și neinvertibilă

Verificare staționaritate: $d = 1$ înseamnă o rădăcină unitară \Rightarrow **Nestaționară**

Verificare invertibilitate: Polinomul MA este $\theta(z) = 1 + 1.2z$

- ▣ Rădăcină: $z = -1/1.2 = -0.833$ (în interiorul cercului unitate)
- ▣ Invertibilitatea necesită rădăcina în afara cercului unitate
- ▣ $|\theta_1| = 1.2 > 1 \Rightarrow$ **Neinvertibilă**

Corecție: Rescrieți cu $\theta^* = 1/1.2 = 0.833$ și ajustați varianța.

Test 13: Regresia falsă

Întrebare

Regresând un mers aleator pe un alt mers aleator independent, de obicei se obține:

Variante de răspuns

- (A) Nicio relație semnificativă
- (B) R^2 ridicat și statistici t semnificative (fals)
- (C) Corelație negativă
- (D) Multicolinearitate perfectă

Test 13: Regresia falsă

Întrebare

Regresând un mers aleator pe un alt mers aleator independent, de obicei se obține:

Răspuns: B – R^2 ridicat și statistici t semnificative (fals)

Granger & Newbold (1974): Fenomenul regresiei false

Simptome:

- ☐ R^2 ridicat (adesea > 0.9) între serii neînrudite
- ☐ Statistici t semnificative
- ☐ Statistică Durbin-Watson foarte scăzută ($\ll 2$)
- ☐ Reziduuri nestaționare

Soluții: (1) Diferențiați ambele serii, sau (2) Testați pentru cointegrare

Test 14: Prognoza pe Termen Lung

Întrebare

Prognoza pe termen lung din ARIMA(1,1,0) cu $\phi_1 = 0.7$ convergă la:

Variante de răspuns

- (A) Zero
- (B) Media necondiționată
- (C) O extrapolare liniară a trendului
- (D) Ultima valoare observată

Test 14: Prognoza pe Termen Lung

Întrebare

Prognoza pe termen lung din ARIMA(1,1,0) cu $\phi_1 = 0.7$ convergă la:

Răspuns: C – O extrapolare liniară a trendului

Model: $(1 - \phi_1 L)(1 - L)Y_t = c + \varepsilon_t$

Prognoza pe termen lung: Pentru modelele I(1) cu derivă c:

$$\hat{Y}_{T+h} \approx Y_T + h \cdot \frac{c}{1 - \phi_1}$$

Diferențe cheie:

- ARMA staționară: Prognozele \rightarrow media necondiționată
- I(1) fără derivă: Prognozele \rightarrow ultima valoare (plată)
- I(1) cu derivă: Prognozele \rightarrow extrapolare liniară

Întrebări Adevărat/Fals

Întrebare

Determinați dacă fiecare afirmație este Adevărată sau Falsă:

1. Un proces $I(2)$ necesită două diferențe pentru a deveni staționar.
2. Testul ADF include întotdeauna un termen constant.
3. $ARIMA(0,1,0)$ este un alt nume pentru un mers aleator.
4. Diferențierea unei serii staționare o face “mai staționară.”
5. Testul KPSS are staționaritatea ca ipoteză nulă.
6. Modelele ARIMA pot captura doar dinamici liniare.

Răspunsul pe slide-ul următor...

Adevărat/Fals: Soluții

Răspunsuri

1. $I(2)$ necesită două diferențe. **ADEVĂRAT** d diferențe pt. $I(d)$. $I(2)$ = două rădăcini unitare.
2. ADF include întotdeauna un termen constant. **FALS** Alegeți: fără constantă, doar constantă, sau constantă + trend.
3. $ARIMA(0,1,0)$ = mers aleator. **ADEVĂRAT** $(1 - L)Y_t = \varepsilon_t \Rightarrow Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$.
4. Diferențierea unei serii staționare \rightarrow "mai staționară." **FALS** Supradiferențierea creează MA neinvertibil.
5. KPSS: H_0 = staționară. **ADEVĂRAT** Opus testului ADF (H_0 = rădăcină unitară).
6. $ARIMA$ captează doar modele liniare. **ADEVĂRAT** Liniar în parametri. Neliniare \rightarrow GARCH, rețele neuronale.

Problema 1: Testarea Rădăcinii Unitare

Exercițiu

Aveți date trimestriale de PIB pentru 80 de trimestre. Testul ADF (cu constantă și trend) dă o statistică de test de -2.85 . Valoarea critică la 5% este -3.41 .

1. Care este concluzia dumneavoastră despre staționaritate?
2. Ce ați face în continuare?

Problema 1: Testarea Rădăcinii Unitare

Exercițiu

Aveți date trimestriale de PIB pentru 80 de trimestre. Testul ADF (cu constantă și trend) dă o statistică de test de -2.85 . Valoarea critică la 5% este -3.41 .

1. Care este concluzia dumneavoastră despre staționaritate?
2. Ce ați face în continuare?

Soluție

1. Deoarece $-2.85 > -3.41$, **nu respingem** H_0 . Datele par să aibă o rădăcină unitară (nestaționare).
2. Luați prima diferență ΔY_t și repetați testul ADF pe seria diferențiată pentru a confirma că este acum staționară.

Problema 2: Identificarea modelului

Exercițiu

După diferențierea o dată a unei serii de timp, ACF arată:

- ▣ Vârf semnificativ la lag 1 ($\rho_1 = 0.4$)
- ▣ Toate celelalte lag-uri ne semnificative

PACF arată descreștere graduală.

Ce model ARIMA este sugerat?

Problema 2: Identificarea modelului

Exercițiu

După diferențierea o dată a unei serii de timp, ACF arată:

- ▣ Vârf semnificativ la lag 1 ($\rho_1 = 0.4$)
- ▣ Toate celelalte lag-uri ne semnificative

PACF arată descreștere graduală.

Ce model ARIMA este sugerat?

Soluție

- ▣ ACF se anulează după lag 1 \Rightarrow componentă MA(1)
- ▣ PACF descrește \Rightarrow Confirmă structura MA
- ▣ Deoarece am diferențiat o dată: $d = 1$

Model sugerat: ARIMA(0,1,1) sau IMA(1,1)

Problema 3: Ecuația ARIMA

Exercițiu

Scrieți ecuația completă pentru ARIMA(1,1,1):

$$(1 - \phi_1 L)(1 - L)Y_t = c + (1 + \theta_1 L)\varepsilon_t$$

Expandați complet în termenii Y_t , Y_{t-1} , Y_{t-2} , etc.

Problema 3: Ecuația ARIMA

Exercițiu

Scrieți ecuația completă pentru ARIMA(1,1,1):

$$(1 - \phi_1 L)(1 - L)Y_t = c + (1 + \theta_1 L)\varepsilon_t$$

Expandați complet în termenii Y_t , Y_{t-1} , Y_{t-2} , etc.

Soluție

Expandând $(1 - \phi_1 L)(1 - L) = 1 - L - \phi_1 L + \phi_1 L^2 = 1 - (1 + \phi_1)L + \phi_1 L^2$:

$$Y_t - (1 + \phi_1)Y_{t-1} + \phi_1 Y_{t-2} = c + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Sau echivalent:

$$Y_t = c + (1 + \phi_1)Y_{t-1} - \phi_1 Y_{t-2} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Problema 4: Calculul Prognozei

Exercițiu

Dat ARIMA(0,1,1): $\Delta Y_t = \varepsilon_t + 0.3\varepsilon_{t-1}$

La momentul T : $Y_T = 100$, $\hat{\varepsilon}_T = 2$, $\sigma^2 = 4$

Calculați:

1. $\hat{Y}_{T+1|T}$ (prognoza la un pas)
2. $\hat{Y}_{T+2|T}$ (prognoza la doi pași)

Problema 4: Calculul Prognozei

Exercițiu

Dat ARIMA(0,1,1): $\Delta Y_t = \varepsilon_t + 0.3\varepsilon_{t-1}$

La momentul T : $Y_T = 100$, $\hat{\varepsilon}_T = 2$, $\sigma^2 = 4$

Calculați:

1. $\hat{Y}_{T+1|T}$ (prognoza la un pas)
2. $\hat{Y}_{T+2|T}$ (prognoza la doi pași)

Soluție

1. $\hat{Y}_{T+1|T} = Y_T + 0.3\hat{\varepsilon}_T = 100 + 0.3(2) = 100.6$
2. $\hat{Y}_{T+2|T} = \hat{Y}_{T+1|T} + 0.3 \cdot 0 = 100.6 + 0 = 100.6$
(Șocurile viitoare $\varepsilon_{T+1}, \varepsilon_{T+2}$ se presupun egale cu 0)

Problema 5: Intervale de Încredere

Exercițiu

Continuând de la Problema 4, calculați intervalele de încredere de 95% pentru $\hat{Y}_{T+1|T}$ și $\hat{Y}_{T+2|T}$.
Reamintim: $\sigma^2 = 4$, $\theta_1 = 0.3$

Problema 5: Intervale de Încredere

Exercițiu

Continuând de la Problema 4, calculați intervalele de încredere de 95% pentru $\hat{Y}_{T+1|T}$ și $\hat{Y}_{T+2|T}$.
Reamintim: $\sigma^2 = 4$, $\theta_1 = 0.3$

Soluție

Pentru IMA(1,1), ponderile MA(∞) sunt $\psi_0 = 1$, $\psi_j = 1 + \theta_1$ pentru $j \geq 1$.

1 pas: $\text{Var}(e_{T+1}) = \sigma^2 \psi_0^2 = 4$, deci $SE = 2$

$$100.6 \pm 1.96(2) = [96.68, 104.52]$$

2 pași: $\text{Var}(e_{T+2}) = \sigma^2(\psi_0^2 + \psi_1^2) = 4(1 + 1.3^2) = 10.76$, $SE = 3.28$

$$100.6 \pm 1.96(3.28) = [94.17, 107.03]$$

Exemplu: Testarea Rădăcinii Unitare în Prețurile Acțiunilor

Scenariu

Aveți prețuri de închidere zilnice pentru o acțiune pe parcursul a 500 de zile. Vreți să determinați dacă prețurile urmează un mers aleator.

Abordare Pas cu Pas

1. **Inspecție vizuală:** Reprezentați grafic prețurile – probabil arată trend
2. **Testul ADF pe prețuri:** Așteptați să nu respingeți H_0 (rădăcină unitară)
3. **Luați randamentele logaritmice:** $r_t = \ln(P_t/P_{t-1}) = \Delta \ln(P_t)$
4. **Testul ADF pe randamente:** Ar trebui să respingeți H_0 (staționară)
5. **Concluzie:** Log prețurile sunt $I(1)$, randamentele sunt $I(0)$

Exemplu: Box-Jenkins pentru Date de Inflație

Scenariu

Rate lunare ale inflației pentru 10 ani. Construiți un model ARIMA.

Flux de lucru

1. **Reprezentare grafică și test:** ADF sugerează limită – încercați atât $d = 0$ cât și $d = 1$
2. **Dacă $d = 0$:** Ajustați modele ARMA, comparați AIC
3. **Dacă $d = 1$:** Examinați ACF/PACF ale lui ΔY_t
 - ▶ ACF: vârf la lag 1, apoi se anulează
 - ▶ PACF: descrește
 - ▶ \Rightarrow Încercați ARIMA(0,1,1)
4. **Estimare:** Ajustați ARIMA(0,1,1), verificați coeficienții
5. **Diagnostic:** Ljung-Box pe reziduuri (vrem $p > 0.05$)
6. **Comparare:** AIC al ARIMA(0,1,1) vs ARMA(1,1) pe seria originală

Exemplu: interpretarea Rezultatelor Python

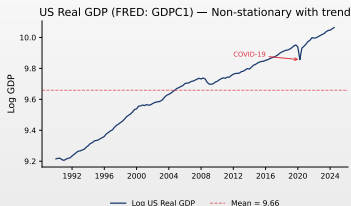
Rezultate ARIMA din statsmodels

```
=====
                        ARIMA Model Results
=====
Dep. Variable:          D.y    No. Observations:   99
Model:                 ARIMA(1,1,1)    AIC          285.32
                                   BIC          295.63
=====
                        coef    std err          z      P>|z|
-----
const                0.0521    0.048        1.085    0.278
ar.L1                 0.4532    0.102        4.443    0.000
ma.L1                -0.2891    0.118       -2.450    0.014
sigma2                1.2340    0.176        7.011    0.000
```

Interpretare

- AR (0.45) semnificativ, MA (-0.29) semnificativ
- Constanta (0.052) nesemnificativă – se poate seta $c = 0$
- Verificare: $|\phi_1| < 1$ (staționar), $|\theta_1| < 1$ (invertibil) – OK!

Studiu de Caz: PIB Real SUA (1990–2024)

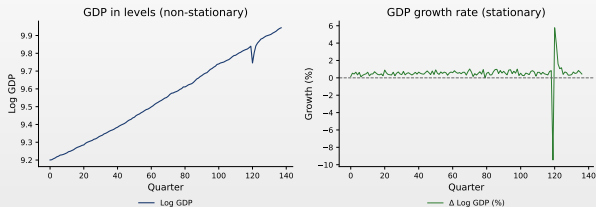


Observații

PIB Real SUA în miliarde \$ 2017 (trimestrial). **Trend ascendent** clar. Scăderi în recesiuni (2008–09, 2020).
Nestaționară: necesită diferențiere.

TSA_ch3_gdp_levels

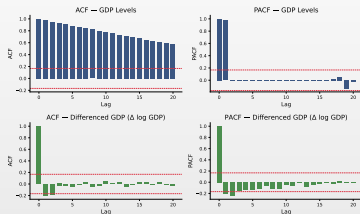
Staționaritate Prin Diferențiere



Observații

- **Stânga:** PIB (serie originală) — trend ascendent clar (nestaționară)
- **Dreapta:** Rata de creștere a PIB = $\Delta \log(Y_t) \times 100$ — staționară, fluctuează în jurul mediei ($\approx 0.6\%/trim.$)

ACF/PACF: Serie originală vs Diferențiată



Observații

- ▣ **Rândul de sus:** ACF/PACF ale seriei originale PIB — descreștere lentă \Rightarrow nestaționaritate
- ▣ **Rândul de jos:** ACF/PACF ale creșterii PIB — valori în limitele de încredere
- ▣ Un model ARIMA de ordin mic este potrivit

Rezultate Estimare ARIMA: Creșterea PIB SUA

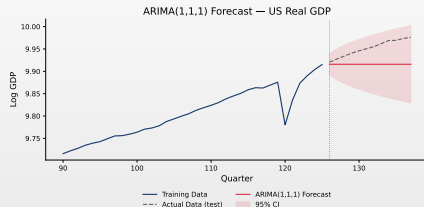
Model: ARIMA(1,1,1) pe log(PIB)

Parametru	Estimat	Eroare Std.	z-stat	valoare-p
ϕ_1 (AR.L1)	0.312	0.185	1.69	0.091
θ_1 (MA.L1)	-0.087	0.203	-0.43	0.668
σ^2	0.00012	—	—	—

Interpretare

- ▣ ARIMA de ordin mic captează rezonabil dinamica PIB
- ▣ Coeficientul AR(1) pozitiv – creșterea PIB arată persistență
- ▣ Alternativă: mersul aleatoriu simplu (ARIMA(0,1,0)) adesea competitiv

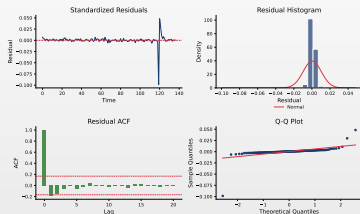
Proгноză: ARIMA vs Real



Observații

- ▣ **Albastru:** date istorice de antrenare; **Verde:** date reale de test
- ▣ **Roșu:** prognoze ARIMA cu IC 95% — IC se lărgesc cu orizontul de prognoză

Diagnostic Model: Analiza Reziduurilor



Observații

- Reziduurile fără tipare sistematice în timp; distribuție aproximativ normală (histogramă, Q-Q)
- ACF reziduuri în limite — fără autocorelare; modelul captează adecvat procesul generator de date

Discuție: Trenduri Deterministe vs Stochastice

Întrebare Cheie

De ce este important să distingem între trendurile deterministe și stochastice?

Puncte de Discuție

- **Consecințele tratamentului greșit:**
 - ▶ Eliminarea trendului prin regresie când seria are rădăcină unitară \Rightarrow staționaritate falsă
 - ▶ Diferențierea unei serii staționare în trend \Rightarrow supradiferențiere
- **Interpretare economică:**
 - ▶ Trend determinist: șocurile sunt temporare
 - ▶ Trend stohastic: șocurile au efecte permanente
- **Implicații de politică:**
 - ▶ O recesiune reduce permanent PIB-ul, sau economia revine la trend?

Discuție: Criterii de Selecție a Modelului

Întrebare Cheie

Când ar trebui să folosiți AIC vs BIC pentru selecția modelului ARIMA?

Considerații

- ▣ **AIC:** Minimizează eroarea de predicție, poate supraajusta
 - ▶ Mai bun pentru prognoză
 - ▶ Tinde să selecteze modele mai mari
- ▣ **BIC:** Selecție consistentă a modelului, mai simplu
 - ▶ Mai bun pentru identificarea modelului “adevărat”
 - ▶ Penalizează complexitatea mai puternic
- ▣ **Sfat practic:** Raportați ambele, preferați BIC dacă diferă substanțial

Discuție: Limitările ARIMA

Întrebare Cheie

Care sunt principalele limitări ale modelelor ARIMA?

Puncte de Discuție

- ▣ **Liniaritate:** Nu poate captura dinamici neliniare
- ▣ **Varianță constantă:** Presupune homoscedasticitate (fără GARCH)
- ▣ **Fără rupturi structurale:** Parametrii presupuși constanți
- ▣ **Univariat:** Ignoră relațiile cu alte variabile
- ▣ **Simetric:** Tratează șocurile pozitive și negative la fel
- ▣ **Prognoze pe termen lung:** Incertitudinea crește rapid

Extensii

Aceste limitări motivează GARCH (volatilitate), VAR (multivariat), modele cu schimbări de regim, etc.

Exercițiu AI 1: Critica unei Analize AI

Scenariu

Ați cerut unui AI: „Aplică cel mai bun model ARIMA pe datele PIB-ului României.” A returnat:

- ▣ A ajustat ARIMA(3,2,3) cu $AIC = 1542.7$
- ▣ Nu a efectuat testul ADF
- ▣ Ljung-Box p-value = 0.02 (raportat ca „acceptabil”)
- ▣ Prognoză pe 30 de ani cu intervale de încredere înguste

Critica voastră:

1. Este ARIMA(3,2,3) supra-parametrizat? Ce ar sugera BIC?
2. De ce Ljung-Box $p = 0.02$ **nu** este acceptabil la pragul de 5%?
3. Sunt prognozele pe 30 de ani fiabile pentru modele ARIMA? De ce?
4. Ce pași din metodologia Box-Jenkins au fost omis?

Exercițiu AI 2: Rafinarea Prompturilor pentru ARIMA

Sarcină

Îmbunătățiți iterativ prompturile pentru ajustarea unui model ARIMA pe date PIB.

Runda 1 (vag): „Ajustează un model de serie de timp pe PIB”

- Ce a produs AI-ul? Ce lipsește?

Runda 2 (mai bun): „Testează staționaritatea cu ADF și KPSS, diferențiază dacă e necesar, examinează ACF/PACF, ajustează ARIMA(p,d,q) folosind BIC, verifică reziduurile cu Ljung-Box”

- A urmat AI-ul metodologia Box-Jenkins?

Runda 3 (expert): „Urmează Box-Jenkins: (1) grafic & test staționaritate ADF+KPSS, (2) diferențiere, (3) identificare ordine din ACF/PACF, (4) estimare ARIMA(1,1,1), (5) Ljung-Box pe reziduuri, (6) prognoză 8 trimestre cu IC 95%”

- Comparați rezultatele din cele trei runde

Exercițiu AI 3: Competiție de Selecție a Modelului

Sarcină

Descărcați date trimestriale PIB real SUA de pe FRED (seria GDPC1).

Abordarea voastră (manuală):

- Test ADF + KPSS → diferențiere
- ACF/PACF → modele candidat
- AIC/BIC: ARIMA(0,1,0), (1,1,0), (0,1,1), (1,1,1)
- Diagnostice reziduuri + prognoză rolling 1-pas

Abordarea AI:

- Cereți AI-ului: „găsește cel mai bun ARIMA și fă prognoze"

Comparați:

- Ce model a selectat fiecare? Comparați RMSE
- Prognoze rolling vs multi-pas?
- **Predați:** reflexie 1 pagină despre AI

Rezumat Formule cheie

Concept	Formula
Mers aleatoriu	$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$
Varianța mersului aleatoriu	$\text{Var}(Y_t) = t\sigma^2$
ARIMA(p, d, q)	$\phi(L)(1-L)^d Y_t = \theta(L)\varepsilon_t$
Prima diferență	$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (1-L)Y_t$
A doua diferență	$\Delta^2 Y_t = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$
Regresia ADF	$\Delta Y_t = \alpha + \gamma Y_{t-1} + \sum \delta_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t$
Ipoteza nulă ADF	$H_0 : \gamma = 0$ (rădăcină unitară)
Proгноză mers aleator	$\hat{Y}_{T+h T} = Y_T$
IC прогноză mers aleator	$Y_T \pm z_{\alpha/2} \sqrt{h} \sigma$
AIC	$-2 \ln(\hat{L}) + 2k$
BIC	$-2 \ln(\hat{L}) + k \ln(n)$

Notății: \hat{L} = maximul funcției de verosimilitate, k = nr. parametri, n = dimensiunea eșantionului, σ^2 = varianța zgomotului alb

Întrebări?

Succes la exerciții!

Următorul Seminar: SARIMA și Modele Sezoniere

Bibliografie I

Manuale fundamentale

- ▣ Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*, 3rd ed., OTexts.
- ▣ Shumway, R.H., & Stoffer, D.S. (2017). *Time Series Analysis and Its Applications*, 4th ed., Springer.
- ▣ Brockwell, P.J., & Davis, R.A. (2016). *Introduction to Time Series and Forecasting*, 3rd ed., Springer.

Serii de timp financiare

- ▣ Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*, 3rd ed., Wiley.
- ▣ Franke, J., Härdle, W.K., & Hafner, C.M. (2019). *Statistics of Financial Markets*, 4th ed., Springer.

Bibliografie II

Abordări moderne și Machine Learning

- ▣ Nielsen, A. (2019). *Practical Time Series Analysis*, O'Reilly Media.
- ▣ Petropoulos, F., et al. (2022). *Forecasting: Theory and Practice*, International Journal of Forecasting.
- ▣ Makridakis, S., Spiliotis, E., & Assimakopoulos, V. (2020). The M4 Competition, International Journal of Forecasting.

Resurse online și cod

- ▣ **Quantlet**: <https://quantlet.com> — Platformă de cod pentru statistică
- ▣ **Quantinar**: <https://quantinar.com> — Platformă pentru metode cantitative
- ▣ **GitHub TSA**: https://github.com/QuantLet/TSA/tree/main/TSA_ch3 — Cod Python pentru acest capitol