

# Domácí série I

Vypracoval: Daniel Ransdorf

Podpis: \_\_\_\_\_

1. (a) **Dilemma:**

Pro  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$

$$\frac{a + b + c + d + e + f}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f}} = 2025$$

(b) **Řešení:**

$$a + b + c + d + e + f = \frac{2025}{a} + \frac{2025}{b} + \frac{2025}{c} + \frac{2025}{d} + \frac{2025}{e} + \frac{2025}{f}$$
$$a - \frac{2025}{b} + b - \frac{2025}{a} + c - \frac{2025}{d} + d - \frac{2025}{c} + e - \frac{2025}{f} + f - \frac{2025}{e} = 0$$

Chceme:

$$a - \frac{2025}{b} = 0 \wedge b - \frac{2025}{a} = 0 \wedge c - \frac{2025}{d} = 0 \wedge \dots \wedge f - \frac{2025}{e} = 0$$

$$ab = 2025 \wedge cd = 2025 \wedge ef = 2025$$

Hledáme 3 páry přirozených čísel, jejichž součin je 2025. Vypišme dělitele čísla 2025 a zvolme 3 dvojice.

1	3	5	9	15	25	27	45
2025	675	405	225	135	81	75	45

Zvolme například  $(9, 225)$ ,  $(15, 135)$ ,  $(25, 81)$ .

$$\underline{\underline{a = 9, b = 225, c = 15, d = 135, e = 25, f = 81}}$$

Tyto hodnoty splňují zadanou rovnost, zkouška:

$$\frac{9 + 225 + 15 + 135 + 25 + 81}{\frac{1}{9} + \frac{1}{225} + \frac{1}{15} + \frac{1}{135} + \frac{1}{25} + \frac{1}{81}} = 2025$$
$$\frac{490}{\frac{98}{405}} = 2025$$
$$2025 = 2025$$

2. (a) **Tvrzení:**

$\forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  není konstantní  $\exists x, y \in \mathbb{R} : f(x + y) < f(xy)$ .

(b) **Důkaz:**

Předpokládejme opak, že existuje taková funkce, kde vztah neplatí

$$\exists f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1 \text{ není konstantní } \forall x, y \in \mathbb{R} : f_1(x+y) \geq f_1(xy)$$

a dokažme, že  $f_1$  musí být konstantní. Tím sporem dokážeme původní tvrzení.

**1. krok** Ukázat, že  $f_1$  je konstantní na intervalu  $(-\infty, 0)$ , neboli  $\forall a < 0 : f_1(a) = f_1(0)$ .

- Zvolme a dosadíme  $x < 0, y = 0$ :

$$f_1(x) \geq f_1(0) \Rightarrow f_1(a) \geq f_1(0), a < 0$$

- Zvolme a dosadíme  $y = -x$ :

$$f_1(0) \geq f_1(-x^2) \Rightarrow f_1(0) \geq f_1(a), a < 0$$

- Z předešlých dvou bodů plyne:

$$(f_1(a) \geq f_1(0)) \wedge (f_1(0) \geq f_1(a)), a < 0 \\ \therefore f_1(a) = f_1(0), a < 0$$

**2. krok** Ukázat, že  $f_1$  je konstantní na intervalu  $[0, +\infty)$ , neboli  $\forall a \geq 0 : f_1(a) = f_1(0)$ .

- Zvolme a dosadíme  $x \geq 0, y = 0$ :

$$f_1(x) \geq f_1(0) \Rightarrow f_1(a) \geq f_1(0), a \geq 0$$

- Zvolme a dosadíme  $x \leq 0, y < 0$ :

$$f_1(x+y) \geq f_1(xy) \\ (x+y < 0, \text{ z 1. kroku plyne } f_1(x+y) = f_1(0)) \\ \Rightarrow f_1(0) \geq f_1(xy) \\ xy \geq 0 \Rightarrow f_1(0) \geq f_1(a), a \geq 0$$

- Z předešlých dvou bodů plyne:

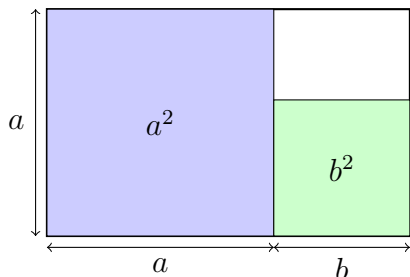
$$(f_1(a) \geq f_1(0)) \wedge (f_1(0) \geq f_1(a)), a \geq 0 \\ \therefore f_1(a) = f_1(0), a \geq 0$$

**Finální úvaha:** Z předešlých dvou kroků víme:

$$(\forall a < 0 : f_1(a) = f_1(0)) \wedge (\forall a \geq 0 : f_1(a) = f_1(0)) \\ \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} : f_1(a) = f_1(0) \\ \Rightarrow \forall a, b \in \mathbb{R} : f_1(a) = f_1(b) \\ \Rightarrow f_1 \text{ je konstantní na celém definičním oboru}$$

V podmínkách opačného tvrzení je uvedeno, že  $f_1$  není konstantní. Důkaz, že  $f_1$  je konstantní, je spor opačného tvrzení. Tím je dokázána pravdivost původního tvrzení.

3. (a) **Náčrt:** Označme délku hran čtverců  $a, b$ . Za  $a$  vždy zvolíme délku hrany většího čtverce, pokud čtverce nejsou stejné ( $a \geq b$ ). Čtverce položíme do obdelníku tak, aby čtverec o hraně  $a$  na výšku "obklopoval" čtverec o hraně  $b$ , abychom zbytečně neprotahovali hrany obdelníku a tím zvyšovali obsah.



- (b) **Pozorování:** Jelikož  $a \geq b$ , obsah obdelníku bude mít vždy obsah  $a(a + b)$ . Chceme najít nejmenší obsah, se kterým sestrojíme obdelník, do kterého se vejdou oba čtverce. Jelikož maximum je nejmenší horní závorou, stačí nám najít maximální možný obsah obdelníku  $a(a + b)$ . Do čehokoli s menším obsahem se čtverce nevejdou, aniž by se překrývaly. Do čehokoli s větším obsahem se sice všechny možnosti vejdou, ale bude tam nadbytečné místo. Příklad převedeme na tyto výrazy. ( $\uparrow$  znamená, že výraz chceme maximalizovat).

$$\begin{aligned} \uparrow a(a + b) & \quad , 0 < a, b < 1, a^2 + b^2 = 1 \\ \uparrow a(a + b) & \quad , 0 < a, b < 1, b = \sqrt{1 - a^2} \\ \uparrow a(a + \sqrt{1 - a^2}) & \quad , 0 < a < 1 \\ \uparrow a^2 + a\sqrt{1 - a^2} \end{aligned}$$

Nalezněme předpis změny hodnoty výrazu v závislosti na  $a$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} &= 2a + \frac{a}{2\sqrt{1 - a^2}}(-2a) + \sqrt{1 - a^2} \\ \frac{d}{da} &= 2a + \frac{-a^2 + (1 - a^2)}{\sqrt{1 - a^2}} \\ \frac{d}{da} &= 2a + \frac{1 - 2a^2}{\sqrt{1 - a^2}} \end{aligned}$$

V maximum musí být  $\frac{d}{da} = 0$ .

$$\begin{aligned}
2a_m + \frac{1 - 2a_m^2}{\sqrt{1 - a_m^2}} &= 0 \\
2a_m \sqrt{1 - a_m^2} + (1 - 2a_m^2) &= 0 \\
2a_m \sqrt{1 - a_m^2} &= 2a_m^2 - 1 \quad (\dots^2) \\
4a_m^2(1 - a_m^2) &= (2a_m^2 - 1)^2 \\
4a_m^2 - 4a_m^4 &= 4a_m^4 - 4a_m^2 + 1 \\
0 &= 8a_m^4 - 8a_m^2 + 1 \quad (u := a_m^2) \\
0 &= 8u^2 - 8u + 1 \\
a_m^2 = u_{1,2} &= \frac{8 \pm \sqrt{32}}{16} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \\
(a \text{ je hrana většího čtverce, vybereme tedy větší hodnotu}) \\
a_m^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} &\Rightarrow a_m = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}} \\
b_m = \sqrt{1 - a_m^2} &= \sqrt{1 - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4})} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}}
\end{aligned}$$

Dosazením bodů okolo zkontrolujeme, zda jsme skutečně našli maximum, ne minimum.

$$\begin{aligned}
a_1^2 + a_1 \sqrt{1 - a_1^2} &< a_m^2 + a_m \sqrt{1 - a_m^2} > a_2^2 + a_2 \sqrt{1 - a_2^2} \\
a_1 &< a_m < a_2
\end{aligned}$$

zvolme 0.1, 0.9

$$\begin{aligned}
0.1^2 + 0.1 \sqrt{1 - 0.1^2} &< \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}} \sqrt{1 - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4})} > 0.9^2 + 0.9 \sqrt{1 - 0.9^2} \\
\frac{1 + 3\sqrt{11}}{100} &< \frac{1 + \sqrt{2}}{2} > \frac{81 + 9\sqrt{19}}{100} \\
0.109... &< 1.207... > 1.202...
\end{aligned}$$

Skutečně jsme zvolili maximum, takže jsme našli nejvyšší možný obsah obalu těch dvou čtverců. Tím pádem řešením úlohy je:

$$S = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

5. (a) **Tvrzení:** Pro libovolná přirozená čísla  $a, b, c$  existuje přirozené číslo  $n$ , pro které výraz  $\sqrt{n^3 + an^2 + bn + c}$  není celé číslo.

(b) **Důkaz:**

Uvažujme polynom

$$P(n) = n^3 + an^2 + bn + c.$$

Chceme dokázat, že existuje  $n \in \mathbb{N}$ , pro které  $P(n)$  není dokonalý čtverec.

Protože každé celé číslo ve tvaru  $x^2$  dává po dělení 4 zbytek pouze 0 nebo 1, stačí ukázat, že existuje  $n$ , pro které  $P(n) \equiv 2$  nebo  $3 \pmod{4}$ .

Spočtěme zbytky polynomu  $P(n)$  modulo 4 pro několik po sobě jdoucích hodnot  $n$ :

$$\begin{aligned} P(1) &\equiv 1 + a + b + c \pmod{4}, \\ P(2) &\equiv 8 + 4a + 2b + c \equiv 2b + c \pmod{4}, \\ P(3) &\equiv 27 + 9a + 3b + c \equiv 3 + a - b + c \pmod{4}, \\ P(4) &\equiv 64 + 16a + 4b + c \equiv c \pmod{4}. \end{aligned}$$

Nyní rozlišíme případy podle zbytku čísla  $c$  po dělení 4.

- Pokud  $c \equiv 2$  nebo  $3 \pmod{4}$ , pak  $P(4) \equiv c \in \{2, 3\}$ , takže  $P(4)$  není kongruentní s žádným čtvercem modulo 4. Tedy  $\sqrt{P(4)}$  není celé číslo.
- Pokud  $c \equiv 0$  nebo  $1 \pmod{4}$ , rozlišíme podle parity  $b$ .
  - Je-li  $b$  liché, pak  $P(2) \equiv 2b + c \equiv 2 + c \in \{2, 3\}$ , tedy  $P(2)$  není čtverec modulo 4.
  - Je-li  $b$  sudé, potom  $P(2) \equiv c \in \{0, 1\}$ , takže se podívejme na  $P(1)$  a  $P(3)$ :

$$P(1) \equiv 1 + a + c \pmod{4}, \quad P(3) \equiv 3 + a + c \pmod{4}.$$

Tyto dva zbytky se liší o 2 modulo 4, tedy nemohou být oba v množině  $\{0, 1\}$ . Z toho plyne, že alespoň jeden z nich je  $\equiv 2$  nebo  $3 \pmod{4}$ , a tudíž odpovídající  $P(n)$  není čtverec modulo 4.

Ve všech případech jsme našli alespoň jedno  $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ , pro které  $P(n)$  není kongruentní s žádným čtvercem modulo 4. Proto  $\sqrt{P(n)}$  není celé číslo.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} : \sqrt{n^3 + an^2 + bn + c} \notin \mathbb{Z}.$$

□