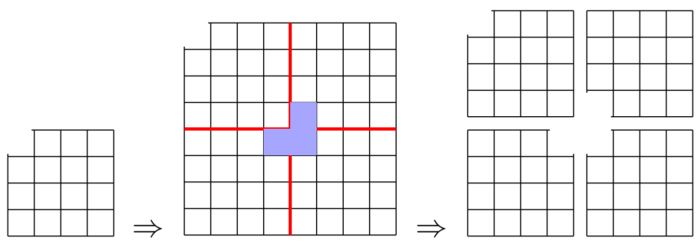
Domácí úkol I

Vypracoval: Daniel *"Randál"* Ransdorf Podpis: ____________________

1. **Šachovnice:**

   Šachovnici $2^1 \times 2^1$ složím, protože se z ní odebráním rohů stane mnohoúhelník ve tvaru L ze zadání. S předpokladem, že umíme složit šachovnici $2^n \times 2^n$ můžeme indukovat, že složíme $2^{n+1} \times 2^{n+1}$. Uděláme to tak, že šachovnici $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ rozdělíme na čtyři šachovnice $2^n \times 2^n$. Veprostřed odebereme L dílek tak, aby sebral jeden čtvereček třem šachovnicím bez odebraného rohu. Vzniknou nám 4 šachovnice $2^n \times 2^n$, které víme, že umíme složit.

   Proto lze pokrýt i $2^{n+1} \times 2^{n+1}$. Indukcí podle n je tvrzení dokázáno.

2. **Suma:**

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i \right)^2$$

   $n = 0$ splňuje rovnost:

$$0 = 0$$

   $n = 1$ splňuje rovnost:

$$1^3 = (1)^2$$

   Chceme dokázat, že když rovnost platí pro n, pak i pro $n + 1$:

$$\text{IP: } \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$$

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$$

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = (1 + 2 + ... + n)^2 + (n+1)^3$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n+1} i\right)^2$$

Rovnost platí pro $n+1$, tím pádem pro všechny $n \in \mathbb{N}$