Domácí úkol I

Vypracoval: Daniel *”Randál”* Ransdorf Podpis: ____________________

1. **Řešení**: Zobrazení bude dle definice ”na”, když:

$$\forall (c,d) \in \mathbb{R}^2 \exists x, y \quad : \quad f_a(x,y) = (c,d)$$

neboli soustava rovnic níže musí mít řešení pro libovolné $c, d \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} (a+2)x + ay = c, \\ ax + y = d. \end{cases}$$

Z druhé rovnice: $y = d - ax$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (a+2)x + a(d-ax) &= c \\ (a+2)x + ad - a^2x &= c \\ x(a+2-a^2) &= c - ad \end{aligned}$$

$$x = \frac{c-ad}{a+2-a^2} = \frac{ad-c}{a^2-a-2}$$

$$y = d - a\left(\frac{ad-c}{a^2-a-2}\right)$$

Podmínka pro existenci řešení pro všechny $c, d \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} a^2 - a - 2 &\neq 0 \\ \Rightarrow (a-2)(a+1) &\neq 0 \\ \Rightarrow a \neq 2 \wedge a &\neq -1 \end{aligned}$$

Řešení pro libovolné $c, d \in \mathbb{R}$ existuje pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$. Z toho plyne, že <u>$f_a$ je ”na”, právě když $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.</u>

Ověření vyloučených možností:

$$a = -1 : \quad \begin{cases} x - y = c, \\ -x + y = d. \end{cases} \quad \Rightarrow c + d = 0$$

$$a = 2 : \quad \begin{cases} 4x + 2y = c, \\ 2x + y = d. \end{cases} \quad \Rightarrow c - 2d = 0$$

U obou možností existuje c, d takové, že soustava nemá řešení (např. $c = 0, d = 1$). Tedy existuje c, d takové, že pro všechna x, y platí $f_a(x,y) \neq (c,d)$.