Domácí úkol IV

Vypracoval: Daniel *"Randál"* Ransdorf Podpis: ____________________

1. **Kombinační zmrzlina**

   Vypočítáme, kolik je celkových možností, jak vybrat kopečky. Počet bude velikost množiny možností, jak vybrat 8 kopečků ze čtyř příchutí. Velikost množiny našeho jevu bude počet možností, jak vybrat 8 kopečků z přesně tří příchutí. Pravděpodobnost, že vybereme přesně tři různé příchutě, bude poměr velikosti množiny našeho jevu ku velikosti množiny všech možností.

   (a) Celkové možnosti se dají vypočítat stejně jako příklad ze cvičení: Ze 4 různobarevných hromádek vyber 8 kuliček

   $$\binom{n+k-1}{k} = \binom{4+8-1}{8} = \binom{11}{8}$$

   (b) Počet možností, jak vybrat 8 kopečků přesně ze tří příchutí, se dá interpretovat takto: Ze čtyř příchutí si vyberme tři příchutě (p_1, p_2, p_3), které použijeme (zjevně 4 možnosti). Dejme si 8 kopečků vedle sebe a oddělme je dvěma oddělovači do tří hromádek, každá hromádka reprezentuje počet kopečků z dané příchuti.

   $$\underbrace{\circ\ \circ\ \circ\ \circ}_{p_1}\ |\ \underbrace{\circ\ \circ}_{p_2}\ |\ \underbrace{\circ\ \circ}_{p_3}$$

   Oddělovače mohu dát mezi kopečky na 7 pozic, nemůžu je dát na kraje, protože z každé ze tří příchutí musíme udělat, alespoň jeden kopeček. Ilustrace možných pozic oddělovačů:

   $$\circ | \circ | \circ | \circ | \circ | \circ | \circ | \circ$$

   Vybírám tedy 2 místa ze 7, kam oddělovače umístím, čili:

   $$\binom{7}{2}$$

   Započtěme ještě ty čtyři možnosti, kteréma můžeme vybrat tři příchutě ze čtyř, získáme:

   $$4 \cdot \binom{7}{2}$$

   Pravděpodobnost získáme poměrem (vysvětlení na začátku):

   $$\frac{4 \cdot \binom{7}{2}}{\binom{11}{8}} = \underline{\underline{\frac{28}{55}}} \qquad (\approx 0.509 = 50.9\%)$$

2. **Nezávislost**

   (a) Pravděpodobnost jevu A je zjevně $\frac{1}{2}$ (26 z 52 karet jsou červené), pravděpodobnost jevu B je $\frac{3}{13}$, protože máme 52 karet, z toho 12 jich má obrázek (3 hodnoty · 4 barvy). Pokud by byly jevy nezávislé, pravděpodobnost jejich průniku by měla vyjít $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{13} = \frac{3}{26}$. Kdyby tomu mělo tak být, vynásobením 52 zjistíme, že by muselo existovat přesně 6 karet, jejichž vytažení patří do obou jevů.

   Jev A a zároveň jev B splňují pouze srdcové J, Q, K a kárové J, Q, K — 6 karet, čímž se nám potvrdilo, že jsou jevy **nezávislé**. Pro kontrolu:

   $$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{6}{52} = \frac{3}{26} = P(A) \cdot P(B)$$

   (b) Pravděpodobnost jevu A je $\frac{1}{2}$ (viz 2.a). Když vytáhneme první kartu obrázkovou (pravděpodobnost $\frac{3}{13}$), zbývá v balíčku 11 obrázkových karet z 51 karet celkově, pravděpodobnost jevu B by byla tedy $\frac{11}{51}$. Když první kartu nevytáhneme obrázkovou (pravděpodobnost $1 - \frac{3}{13} = \frac{10}{13}$), v balíčku by zbývalo stále 12 obrázkových karet, pravděpodobnost jevu B by byla $\frac{12}{51}$. Sečtením obou možností, když první kartu vytáhneme/nevytáhneme obrázkovou získáme:

   $$P(B) = \frac{3}{13} \cdot \frac{11}{51} + \frac{10}{13} \cdot \frac{12}{51} = \frac{3}{13}$$
   $$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{13} = \frac{3}{26}$$

   Průnik obou jevů spočítáme podobně součtem pravděpodobnosti B na základě dvou možností vytažení první karty:

   i. Označme A_{bo} jev vytažení červené karty bez obrázku (20 karet z 52): Pravděpodobnost A_{bo} je $\frac{20}{52} = \frac{5}{13}$, zbývá 12 karet s obrázkem mezi 51 kartami.

   $$P(B \mid A_{bo}) = \frac{12}{51}$$

   ii. Označme A_{so} jev vytažení červené karty s obrázkem (6 karet z 52): Pravděpodobnost A_{so} je $\frac{6}{52} = \frac{3}{26}$, zbývá 11 karet s obrázkem mezi 51 kartami.

   $$P(B \mid A_{so}) = \frac{11}{51}$$

   Započítáním obou možností získáme:

   $$P(A \cap B) = P(A_{bo}) \cdot P(B \mid A_{bo}) + P(A_{so}) \cdot P(B \mid A_{so})$$
   $$P(A \cap B) = \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{51} + \frac{3}{26} \cdot \frac{11}{51}$$
   $$P(A \cap B) = \frac{3}{26}$$

   Závěrem je, že jevy jsou **nezávislé**, protože:

   $$P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{26} = P(A \cap B)$$