Domácí úkol I

Daniel Ransdorf

Vypracoval: Daniel *"Randál"* Ransdorf Podpis: ____________________

1. **Vlastnosti součtu:**

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(a) **Teze:** Když je S_n liché, pak $n \equiv 1 \lor n \equiv 2 \pmod 4$.

(b) **Důkaz:**

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k$$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n$$

$$S_n \equiv \underbrace{1 + 0 + 1 + 0 + 1 + ... + n}_{\text{počet jedniček } = \lceil \frac{n}{2} \rceil} \pmod 2$$

$$S_n \equiv \lceil \frac{n}{2} \rceil \pmod 2$$

Nyní rozdělíme podle zbytku $n \pmod 4$:

$$\begin{aligned}
n = 4m : \quad & \lceil \tfrac{n}{2} \rceil = 2m \equiv 0 \pmod 2 \Rightarrow S_n \equiv 0 \pmod 2,\\
n = 4m + 1 : \quad & \lceil \tfrac{n}{2} \rceil = 2m + 1 \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow S_n \equiv 1 \pmod 2,\\
n = 4m + 2 : \quad & \lceil \tfrac{n}{2} \rceil = 2m + 1 \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow S_n \equiv 1 \pmod 2,\\
n = 4m + 3 : \quad & \lceil \tfrac{n}{2} \rceil = 2m + 2 \equiv 0 \pmod 2 \Rightarrow S_n \equiv 0 \pmod 2.
\end{aligned}$$

Když je $n \equiv 0$ nebo $3 \pmod 4$, pak je S_n sudé. Z toho plyne, že když je S_n liché, pak $n \equiv 1$ nebo $2 \pmod 4$. $\square$

2. **Trojúhelníková nerovnost:**

   (a) **Teze:** Pro všechna reálná a, b platí:

   $$|a+b| \leq |a| + |b|$$

   (b) **Důkaz:**
   Vycházejíce z vlastnosti ...

   $$\forall x, y \geq 0 : \quad \big(x \leq y \iff x^2 \leq y^2\big)$$

   ... umocněme nerovnici na druhou:

   $$\begin{aligned} (|a+b|)^2 &\leq (|a|+|b|)^2 && \text{(roznásobení)} \\ a^2 + 2ab + b^2 &\leq a^2 + 2|a||b| + b^2 && (-a^2 - b^2) \\ 2ab &\leq 2|a||b| && \left(\frac{\cdots}{2}\right) \\ ab &\leq |a||b| \\ ab &\leq |ab| \end{aligned}$$

   A to platí vždy, neboť $x \leq |x|$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Tím je nerovnost dokázána. $\square$

   (c) **Pozorování rovnosti:**
   V každém kroku výše šlo o ekvivalence, proto ...

   $$|a+b| = |a| + |b| \iff ab = |ab| \iff ab \geq 0.$$

   ... z toho plyne, že $|a+b| = |a| + |b|$ platí pouze, když $ab \geq 0$