# Domácí úkol IV

Vypracoval: Daniel *"Randál"* Ransdorf Podpis: ____________________

1. **Různé cesty** Musíme dojít z levého dolního rohu do pravého horního, tedy musíme udělat $m$ kroků nahoru a $n$ kroků doprava. Dohromady uděláme $m+n$ kroků. Musíme tedy vypočítat, kolika způsoby můžeme do sekvence $m+n$ kroků zařadit $n$ kroků doprava, nebo $m$ kroků nahoru (výsledek bude stejný). Máme tedy vybrat $m/n$ míst z $m+n$, tedy:

$$\binom{m+n}{m} \quad \text{nebo} \quad \binom{m+n}{n}$$

Dvě varianty jsou si rovny kvůli rovnosti, kterou známe z přednášky:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

2. **Slova** Písmen od A do P je 16 (CH a háčky nepočítáme). Celkových možností, jak seřadit čísla je zjevně 16!. Odečteme od toho počet možných seřazení PONK, DOBA, COP. Nazpět příčteme průniky seřazení PONK, DOBA, COP.

- **PONK**: Předpokládejme, že písmena jsou takto za sebou, počítáme kolika způsoby mohou v sekvenci být? Vybíráme tedy 4 místa z 16 a pak započítám seřazení zbylých 12 čísel (12!), takže
$$\binom{16}{4} \cdot 12! = \frac{16!}{4!}$$
- **DOBA**: Stejný případ jako PONK, máme 4 písmena seřazena
$$\binom{16}{4} \cdot 12! = \frac{16!}{4!}$$
- **COP**: Pro cop vybíráme 3 místa z 16 a seřadíme zbylých 13 písmen, takže
$$\binom{16}{3} \cdot 13! = \frac{16!}{3!}$$
- **PONK ∩ DOBA**: Předpokládejme, že 7 unikátních písmen z těchto dvou slov jsou uspořádané tak, že jsou obě slova splněny. Před O můžeme P a D uspořádat dvěma způsoby, za O můžeme N,K,B,A uspořádat NKBA, NBKA, NBAK, BNAK, BANK, čili šesti způsoby. Protože jsou tyto dva podproblemy na sobě zjevně nezávislé, počet možností, jak můžeme seřadit PONKDBA je $6 \cdot 2 = 12$. Pro těchto sedm písmen můžeme stejným způsobem, jako u minulých případů, vybrat 7 míst z 16 a zbylých 9 písmen libovolně seřadit.
$$12 \cdot \binom{16}{7} \cdot 9! = \frac{12 \cdot 16!}{7!}$$
- **DOBA ∩ COP**: Předpokládejme, že 6 unikátních písmen z těchto dvou slov jsou uspořádané tak, že jsou obě slova splněny. Před O můžeme C a D uspořádat dvěma způsoby, za O můžeme P,B,A uspořádat PBA, BPA, BAP, čili třemi způsoby. Protože jsou tyto dva podproblemy na sobě zjevně nezávislé, počet možností, jak můžeme seřadit DOBACP je $2 \cdot 3 = 6$. Pro těchto šest písmen můžeme stejným způsobem, jako u minulých případů, vybrat 6 míst z 16 a zbylých 10 písmen libovolně seřadit.
$$6 \cdot \binom{16}{6} \cdot 10! = \frac{6 \cdot 16!}{6!} = \frac{16!}{5!}$$
- **PONK ∩ COP**: Tyto dvě slova mají prázdný průnik, protože jedno má P před O a druhé O před P.

Podle původní úvahy můžeme postavit jednoduchý "pseudovzorec" pro výpočet chtěných pořadí.

$$\begin{aligned}&\#\text{ chtěných pořadí} = \#\text{ celkových pořadí} - (|PONK| + |DOBA| + |COP| - (|PONK \cap DOBA| + |DOBA \cap COP| + |PONK \cap COP|))\\ \Leftrightarrow\ &\#\text{ chtěných pořadí} = \#\text{ celkových pořadí} - |PONK| - |DOBA| - |COP| + |PONK \cap DOBA| + |DOBA \cap COP| + |PONK \cap COP|\end{aligned}$$

Dosazením dostaneme

$$\begin{aligned}&6! - \frac{16!}{4!} - \frac{16!}{4!} - \frac{16!}{3!} + \frac{12 \cdot 16!}{7!} + \frac{16!}{5!} + 0\\ &= 16!(1 - \frac{1}{4!} - \frac{1}{4!} - \frac{1}{3!} + \frac{12}{7!} + \frac{1}{5!})\\ &= \underline{\underline{15916265164800}}\end{aligned}$$