Domácí úkol I

Vypracoval: Daniel *"Randál"* Ransdorf Podpis: ____________________

2. **Řešení**:

$$p = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ : \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

(a) Pro která $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ obsahuje rovina s obecnou rovnicí $ax + by + cz = d$ přímku p?

Taková rovina musí splňovat dvě kritéria: musí být rovnoběžná s přímkou, musí v rovině ležet alespoň jeden bod přímky.

Rovnoběžnost vyšetříme porovnáním normálového vektoru roviny a směrového vektoru přímky. Tyto vektory na sebe musí být kolmé. Zda v rovině leží alespoň jeden bod přímky zjistíme dosazením pevného bodu $(1, 2, 4)$ do obecné rovnice roviny.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \\ a + c &= 0 \\ c &= -a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \cdot 1 + b \cdot 2 + c \cdot 4 &= d \\ a \cdot 1 + b \cdot 2 + (-a) \cdot 4 &= d \\ 2b - 3a &= d \end{aligned}$$

Pomocí proměnných a, b dokážeme vyjádřit c, d. a, b, c nesmí být 0, protože by pak útvar nebyl rovina. Zvolme tedy parametry $t_1, t_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a dosaďme je za a, b:

$$\begin{aligned} a &= t_1 \\ b &= t_2 \\ c &= -a = -t_1 \\ d &= 2b - 3a = 2t_2 - 3t_1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ -t_1 \\ 2t_2 - 3t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ 0 \\ -t_1 \\ -3t_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t_2 \\ 0 \\ 2t_2 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \left\{ t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \ \middle| \ t_1, t_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}}}$$

(b) Dosazením $t_1, t_2 = 1$ získáme první rovnici roviny, která obsahuje přímku. Dosazením $t_1 = 1, t_2 = 2$ dostaneme druhou.

$$t_1, t_2 = 1 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; x + y - z = -1$$

$$t_1 = 1, t_2 = 2 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; x + 2y - z = 1$$

Našli jsme soustavu dvou lineárních rovnic o třech neznámých:

$$\begin{aligned} x + y - z &= -1 \\ x + 2y - z &= 1 \end{aligned}$$