Domácí úkol III

Vypracoval: Daniel *"Randál"* Ransdorf Podpis: ____________________

1. Cukrárna Je k dispozici 11 různých příchutí zmrzliny.

   (a) Naskládej 3 různé příchutě na sebe $\iff$ Sestav 3-znakový řetězec z 11-znakové abecedy bez opakování znaků.

   $$11^{\underline{3}} = 11 \cdot 10 \cdot 9 = \underline{\underline{990}}$$

   (b) Zvol 4 kopečky, mohou mít stejnou příchuť $\iff$ Z 11 různobarevných hromádek vyber 4 kuličky

   $$\binom{n+k-1}{k} = \binom{11+4-1}{4} = \binom{14}{4} = \underline{\underline{1001}}$$

   (c) Sestav dezert z 5 vrstev, příchutě se mohou opakovat $\iff$ Sestav 5-znakový řetězec z 11-znakové abecedy, můžeš opakovat znaky.

   $$11^5 = \underline{\underline{161051}}$$

   (d) Dezert, kde buď:

      i. 5 vrstev tvoří zmrlinové kopečky (mohou se opakovat příchutě) (zdůvodnění viz 1c)

      $$11^5 = 161051$$

      ii. nebo 3 vrstvy zmrzlinové a 2 crumble z 5 typů (mohou se opakovat) $\iff$ Udělej 5-znakový řetězec, kde 3 znaky budou z abecedy A o 11 znakách a 2 znaky budou z abecedy B o 5 znakách. Znaky se mohou opakovat

      $$11^3 \cdot 5^2 \cdot \binom{5}{3} = 332750$$

      *5 nad 3 přidáme, abychom započetli počet možností, které 3 z 5-ti vrstev mohou být zmrzlinové

   Případy se navzájem vylučují a pokrývají všechny možnosti, takže celkový výsledek bude součet $161051 + 332750 = \underline{\underline{493801}}$

2. **Rovnost**

   (a) Tvrzení:

   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}$$

   (b) **Důkaz 1** - kombinatorická úvaha:
   Mějme množiny N o n prvcích a M o m prvcích, které mají prázdný průnik. Chceme vybrat r prvků množin.

      i. Můžeme to vyjádřit, že vybíráme r prvků ze sjednocení množin N a M. Počet možností bude:

      $$\binom{n+m}{r}$$

      ii. Můžeme to také vyjádřit tak, že sečteme všechny možnosti, kolik vybereme prvků z které množiny. Takže z množiny N vybereme 0 prvků a z množiny M r prvků, pak z množiny N vybereme 1 prvek a z množiny M $r-1$ prvků. A tak dále, až vybereme z množiny N všech n prvků a z množiny M 0 prvků. Toto se dá zapsat jako suma pro všechny $k \leq n$, kde vybíráme k prvků z N a $r-k$ prvků z M, neboli:

      $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$$

      Nevadí, když bude $r-k$ záporné, protože se dané prvky vynulují.

   Když se dá výsledek tohoto příkladu vyjádřit dvěma způsoby, pak oba výrazy jsou si rovny:

   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}$$

   Q.E.D.

   (c) **Důkaz 2** - indukce podle n:

      i. $n = 0$:

      $$\binom{0}{0}\binom{m}{r} = \binom{0+m}{r}$$
      $$\binom{m}{r} = \binom{m}{r}$$

      ii. $n+1$:
      Indukční předpoklad (IP):

      $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}$$

      Chceme:

      $$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{n+1+m}{r}$$

Ekvivalentními úpravami dokažme vzorec pro $n+1$:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)\binom{m}{r-k}=\binom{n+1+m}{r} \\ \overset{\text{Pascal}}{\iff} &\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k-1}\binom{m}{r-k}+\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}=\binom{n+1+m}{r} \end{aligned}$$

Upravme oba členy levé strany

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k-1}\binom{m}{r-k}=\underbrace{\binom{n}{-1}\binom{m}{r}}_{0}+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\binom{m}{r-k}\overset{\text{j+1:=k}}{=}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{(j+1)-1}\binom{m}{r-(j+1)}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{m}{(r-1)-j}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}+\underbrace{\binom{n}{n+1}\binom{m}{r-k}}_{0}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m}{(r-1)-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}=\binom{n+1+m}{r} \\ \overset{IP}{\iff} &\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m}{(r-1)-k}+\binom{n+m}{r}=\binom{n+1+m}{r} \end{aligned}$$

Když IP platí pro libovolné r, pak platí i pro $r-1$

$$\begin{aligned} \overset{\text{IP pro r-1}}{\iff} &\binom{n+m}{r-1}+\binom{n+m}{r}=\binom{n+1+m}{r} \\ \overset{\text{Pascal}}{\iff} &\binom{n+m+1}{r}=\binom{n+1+m}{r} \end{aligned}$$

Q.E.D