Domácí série I

Vypracoval: Daniel Ransdorf Podpis: ____________________

1. (a) **Dilemma:**
   Pro $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$
   $$\frac{a+b+c+d+e+f}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}} = 2025$$

   (b) **Řešení:**
   $$a+b+c+d+e+f = \frac{2025}{a}+\frac{2025}{b}+\frac{2025}{c}+\frac{2025}{d}+\frac{2025}{e}+\frac{2025}{f}$$
   $$a-\frac{2025}{b}+b-\frac{2025}{a}+c-\frac{2025}{d}+d-\frac{2025}{c}+e-\frac{2025}{f}+f-\frac{2025}{e}=0$$
   Chceme:
   $$a-\frac{2025}{b}=0 \wedge b-\frac{2025}{a}=0 \wedge c-\frac{2025}{d}=0 \wedge \ldots \wedge f-\frac{2025}{e}=0$$
   $$ab = 2025 \wedge cd = 2025 \wedge ef = 2025$$
   Hledáme 3 páry přirozených čísel, jejichž součin je 2025. Vypišme dělitele čísla 2025 a zvolme 3 dvojice.

1	3	5	9	15	25	27	45
2025	675	405	225	135	81	75	45

   Zvolme například $(9, 225)$, $(15, 135)$, $(25, 81)$.
   $$\underline{\underline{a = 9, b = 225, c = 15, d = 135, e = 25, f = 81}}$$
   Tyto hodnoty splňují zadanou rovnost, zkouška:
   $$\frac{9+225+15+135+25+81}{\frac{1}{9}+\frac{1}{225}+\frac{1}{15}+\frac{1}{135}+\frac{1}{25}+\frac{1}{81}} = 2025$$
   $$\frac{490}{\frac{98}{405}} = 2025$$
   $$2025 = 2025$$

2. (a) **Tvrzení:**
   $$\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{ není konstantní } \exists x, y \in \mathbb{R} : f(x+y) < f(xy).$$

(b) **Důkaz:**

Předpokládejme opak, že existuje taková funkce, kde vztah neplatí

$$\exists f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1 \text{ není konstantní } \forall x, y \in \mathbb{R} : f_1(x+y) \geq f_1(xy)$$

a dokažme, že f_1 musí být konstantní. Tím sporem dokážeme původní tvrzení.

1. krok Ukázat, že f_1 je konstantní na intervalu $(-\infty, 0)$, neboli $\forall a < 0 : f_1(a) = f_1(0)$.

- Zvolme a dosaďme $x < 0, y = 0$:

$$f_1(x) \geq f_1(0) \quad \Rightarrow \quad f_1(a) \geq f_1(0),\ a < 0$$

- Zvolme a dosaďme $y = -x$:

$$f_1(0) \geq f_1(-x^2) \quad \Rightarrow \quad f_1(0) \geq f_1(a),\ a < 0$$

- Z předešlých dvou bodů plyne:

$$\begin{aligned} (f_1(a) \geq f_1(0)) \wedge (f_1(0) \geq f_1(a)),\ a < 0 \\ \therefore f_1(a) = f_1(0),\ a < 0 \end{aligned}$$

2. krok Ukázat, že f_1 je konstantní na intervalu $[0, +\infty)$, neboli $\forall a \geq 0 : f_1(a) = f_1(0)$.

- Zvolme a dosaďme $x \geq 0, y = 0$:

$$f_1(x) \geq f_1(0) \quad \Rightarrow \quad f_1(a) \geq f_1(0),\ a \geq 0$$

- Zvolme a dosaďme $x \leq 0, y < 0$:

$$\begin{aligned} & f_1(x+y) \geq f_1(xy) \\ & (x+y < 0, \text{ z 1. kroku plyne } f_1(x+y) = f_1(0)) \\ & \Rightarrow f_1(0) \geq f_1(xy) \\ xy \geq 0 & \Rightarrow f_1(0) \geq f_1(a),\ a \geq 0 \end{aligned}$$

- Z předešlých dvou bodů plyne:

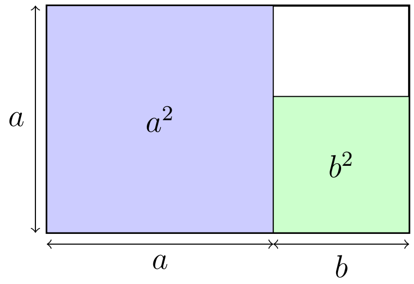
$$\begin{aligned} (f_1(a) \geq f_1(0)) \wedge (f_1(0) \geq f_1(a)),\ a \geq 0 \\ \therefore f_1(a) = f_1(0),\ a \geq 0 \end{aligned}$$

Finální úvaha: Z předešlých dvou kroků víme:

$$\begin{aligned} & (\forall a < 0 : f_1(a) = f_1(0)) \wedge (\forall a \geq 0 : f_1(a) = f_1(0)) \\ \Rightarrow\ & \forall a \in \mathbb{R} : f_1(a) = f_1(0) \\ \Rightarrow\ & \forall a, b \in \mathbb{R} : f_1(a) = f_1(b) \\ \Rightarrow\ & f_1 \text{ je konstantní na celém definičním oboru} \end{aligned}$$

V podmínkách opačného tvrzení je uvedeno, že f_1 není konstantní. Důkaz, že f_1 je konstantní, je spor opačného tvrzení. Tím je dokázana pravdivost původního tvrzení.

3. (a) **Náčrt:** Označme délku hran čtvreců a, b. Za a vždy zvolíme délku hrany většího čtverce, pokud čtverce nejsou stejné ($a \geq b$). Čtverce položíme do obdelníku tak, aby čtverec o hraně a na výšku "obklopoval" čtverec o hraně b, abychom zbytečně neprotahovali hrany obdelníku a tím zvyšovali obsah.



(b) **Pozorování:** Jelikož $a \geq b$, obsah obdelníku bude mít vždy obsah $a(a+b)$. Chceme najít nejmenší obsah, se kterým sestrojíme obdelník, do kterého se vejdou oba čtverce. Jelikož maximum je nejmenší horní závorou, stačí nám najít maximální možný obsah obdelníku $a(a+b)$. Do čehokoli s menším obsahem se čtverce nevejdou, aniž by se překrývaly. Do čehokoli s větším obsahem se sice všechny možnosti vejdou, ale bude tam nadbytečné místo. Příklad převedeme na tyto výrazy. ($\uparrow$ znamená, že výraz chceme maximalizovat).

$$\begin{aligned}
&\uparrow a(a+b) \quad , 0 < a, b < 1, a^2 + b^2 = 1 \\
&\uparrow a(a+b) \quad , 0 < a, b < 1, b = \sqrt{1-a^2} \\
&\uparrow a(a+\sqrt{1-a^2}) \quad , 0 < a < 1 \\
&\uparrow a^2 + a\sqrt{1-a^2}
\end{aligned}$$

Nalezněme předpis změny hodnoty výrazu v závislosti na a:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{da} &= 2a + \frac{a}{2\sqrt{1-a^2}}(-2a) + \sqrt{1-a^2} \\
\frac{d}{da} &= 2a + \frac{-a^2 + (1-a^2)}{\sqrt{1-a^2}} \\
\frac{d}{da} &= 2a + \frac{1-2a^2}{\sqrt{1-a^2}}
\end{aligned}$$

V maximu musí být $\frac{d}{da} = 0$.

$$\begin{aligned}
2a_m + \frac{1-2a_m^2}{\sqrt{1-a_m^2}} &= 0 \\
2a_m\sqrt{1-a_m^2} + (1-2a_m^2) &= 0 \\
2a_m\sqrt{1-a_m^2} &= 2a_m^2 - 1 \quad (...^2) \\
4a_m^2(1-a_m^2) &= (2a_m^2-1)^2 \\
4a_m^2 - 4a_m^4 &= 4a_m^4 - 4a_m^2 + 1 \\
0 &= 8a_m^4 - 8a_m^2 + 1 \quad (u := a_m^2) \\
0 &= 8u^2 - 8u + 1 \\
a_m^2 = u_{1,2} &= \frac{8 \pm \sqrt{32}}{16} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

(a je hrana většího čtverce, vybereme tedy větší hodnotu)

$$a_m^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \Rightarrow \quad a_m = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}}$$

$$b_m = \sqrt{1-a_m^2} = \sqrt{1 - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4})} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}}$$

Dosazením bodů okolo zkontrolujeme, zda jsme skutečně našli maximum, ne minimum.

$$a_1^2 + a_1\sqrt{1-a_1^2} \;<\; a_m^2 + a_m\sqrt{1-a_m^2} \;>\; a_2^2 + a_2\sqrt{1-a_2^2}$$

$$a_1 < a_m < a_2$$

zvolme 0.1, 0.9

$$0.1^2 + 0.1\sqrt{1-0.1^2} \;<\; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}}\sqrt{1 - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4})} \;>\; 0.9^2 + 0.9\sqrt{1-0.9^2}$$

$$\frac{1+3\sqrt{11}}{100} < \frac{1+\sqrt{2}}{2} > \frac{81+9\sqrt{19}}{100}$$

$$0.109... < 1.207... > 1.202...$$

Skutečně jsme zvolili maximum, takže jsme našli nejvyšší možný obsah obalu těch dvou čtverců. Tím pádem řešením úlohy je:

$$S = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

5. (a) **Tvrzení:** Pro libovolná přirozená čísla a, b, c existuje přirozené číslo n, pro které výraz $\sqrt{n^3 + an^2 + bn + c}$ není celé číslo.

(b) **Důkaz:**

Uvažujme polynom
$$P(n) = n^3 + an^2 + bn + c.$$

Chceme dokázat, že existuje $n \in \mathbb{N}$, pro které $P(n)$ není dokonalý čtverec. Protože každé celé číslo ve tvaru x^2 dává po dělení 4 zbytek pouze 0 nebo 1, stačí ukázat, že existuje n, pro které $P(n) \equiv 2$ nebo $3 \pmod 4$.

Spočtěme zbytky polynomu $P(n)$ modulo 4 pro několik po sobě jdoucích hodnot n:

$$\begin{aligned}
P(1) &\equiv 1 + a + b + c \pmod 4,\\
P(2) &\equiv 8 + 4a + 2b + c \equiv 2b + c \pmod 4,\\
P(3) &\equiv 27 + 9a + 3b + c \equiv 3 + a - b + c \pmod 4,\\
P(4) &\equiv 64 + 16a + 4b + c \equiv c \pmod 4.
\end{aligned}$$

Nyní rozlišíme případy podle zbytku čísla c po dělení 4.

- Pokud $c \equiv 2$ nebo $3 \pmod 4$, pak $P(4) \equiv c \in \{2, 3\}$, takže $P(4)$ není kongruentní s žádným čtvercem modulo 4. Tedy $\sqrt{P(4)}$ není celé číslo.
- Pokud $c \equiv 0$ nebo $1 \pmod 4$, rozlišíme podle parity b.
  - Je-li b liché, pak $P(2) \equiv 2b+c \equiv 2+c \in \{2, 3\}$, tedy $P(2)$ není čtverec modulo 4.
  - Je-li b sudé, potom $P(2) \equiv c \in \{0, 1\}$, takže se podívejme na $P(1)$ a $P(3)$:

    $$P(1) \equiv 1 + a + c \pmod 4, \qquad P(3) \equiv 3 + a + c \pmod 4.$$

    Tyto dva zbytky se liší o 2 modulo 4, tedy nemohou být oba v množině $\{0, 1\}$. Z toho plyne, že alespoň jeden z nich je $\equiv 2$ nebo $3 \pmod 4$, a tudíž odpovídající $P(n)$ není čtverec modulo 4.

Ve všech případech jsme nalezli alespoň jedno $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, pro které $P(n)$ není kongruentní s žádným čtvercem modulo 4. Proto $\sqrt{P(n)}$ není celé číslo.

$$\boxed{\forall a, b, c \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} : \sqrt{n^3 + an^2 + bn + c} \notin \mathbb{Z}.}$$

$\square$