

Títulos de Capitalización

Danny Morales

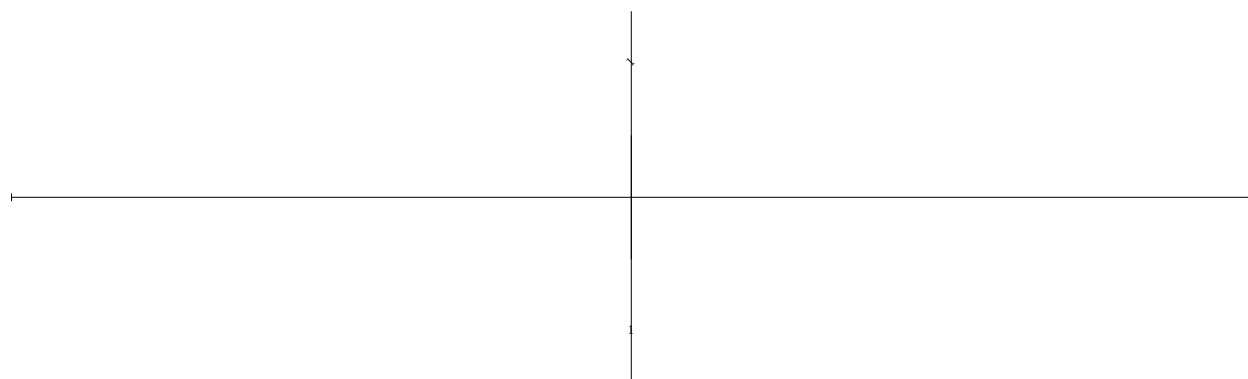
3/24/2019

Títulos de Capitalización

Es un instrumento financiero emitido por una empresa mercantil o sociedad de capitalización, mediante el cual una persona se compromete a pagar a la sociedad de capitalización un pago o prima, bien sea, única o sucesiva, durante el período de vigencia del título o un tiempo menor. La sociedad de capitalización por su parte, se compromete a entregarle al tenedor del título una varias sumas de dinero en fechas predeterminadas. Por motivos didácticos vamos a estudiar los 5 casos principales a través de ejemplos de títulos y compromisos.

Primas y Ecuaciones de Equilibrio.

Supongamos que una sociedad de capitalización se compromete a pagar 1 UM al final del año n y por su parte, el tenedor del título se compromete a pagar una prima única.



Caso 1

Denotamos:

$A_{\overline{n}|}$: Prima Única de un Título de Capitalización de duración n años.

Ecuación de Equilibrio Financiero

Prospectivo

$$A_{\overline{n}|} = V^n$$

Retrospectivo

$$A_{\overline{n}|}(1+i)^n = 1$$

Caso 2

En este caso se pagan primas anuales anticipadas por todo el período de vigencia del título.

$P_{\overline{n}|}$: Prima Anual Anticipada durante n años.

Prospectivo

$$P_{\overline{n}|} \ddot{a}_{\overline{n}|} = V^n$$

Retrospectivo

$$P_{\overline{n}|} \ddot{s}_{\overline{n}|} = 1$$

Prima

$$P_{\overline{n}|} = \frac{V^n}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} = \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}$$

Caso 3

Se pagan primas anuales anticipadas durante m años en un título de capitalización que dura n años, además $m < n$.

TODO recta

${}_mP_{\overline{n}|}$: Prima Anual Anticipada pagadera durante m años en un título de duración n años.

Prospectivo.

$${}_mP_{\overline{n}|} \ddot{a}_{\overline{m}|} = V^n$$

Retrospectivo.

$${}_mP_{\overline{n}|} \ddot{s}_{\overline{m}|} (1+i)^{n-m} = 1$$

Prima.

$${}_mP_{\overline{n}|} = \frac{V^n}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} = \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{m}|} (1+i)^{n-m}}$$

Caso 4.

Primas anticipadas pagaderas k -veces al año en un título de duración n años.

TODO recta

$P_{\overline{n}|}^{(k)}$: Prima Anual Anticipada pagadera k -veces al año en un título de capitalización de n años.

Prospectivo.

$$({}^kP_{\overline{n}|}) \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(k)} = V^n$$

Retrospectivo.

$$({}^kP_{\overline{n}|}) \ddot{s}_{\overline{n}|}^{(k)} = 1$$

Prima.

$$P_{\overline{n}|}^{(k)} = \frac{V^n}{(k)\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(k)}} = \frac{1}{(k)\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(k)}}$$

Caso 5.

Primas anticipadas pagaderas k -veces al año durante m años en un título de duración n años.

TODO recta

${}_mP_{\overline{n}|}^{(k)}$: Prima Anual Anticipada pagadera k -veces al año durante m años en un título de capitalización de n años.

Prospectivo.

$$(k)_mP_{\overline{n}|}^{(k)}\ddot{a}_{\overline{m}|}^{(k)} = V^n$$

Retrospectivo.

$$(k)_mP_{\overline{n}|}^{(k)}\ddot{s}_{\overline{m}|}^{(k)}(1+i)^{n-m} = 1$$

Prima.

$${}_mP_{\overline{n}|}^{(k)} = \frac{V^n}{(k)\ddot{a}_{\overline{m}|}^{(k)}} = \frac{1}{(k)\ddot{s}_{\overline{m}|}^{(k)}}(1+i)^{n-m}$$

Reservas de un Título de Capitalización.

La reserva de un Título de Capitalización es un fondo acumulado que corresponde a cada título con el objetivo de garantizar el cumplimiento de los compromisos con los tenedores de los títulos.

Métodos para el cálculo de las Reservas

Método Prospectivo.

La reserva por el método prospectivo, se define como la diferencia matemática entre el valor actual de los compromisos de la sociedad de capitalización en un punto t y el valor actual de los compromisos del tenedor del título.

Método Retrospectivo.

Es la diferencia matemática entre el valor acumulado de las primas efectuadas por el tenedor en un momento t y el valor acumulado de los pagos efectuados por la Sociedad de Capitalización.

a continuación mostramos la reserva para cada caso:

Caso 1

Método Prospectivo

$$\begin{aligned}
{}_0V &= 0 \\
{}_1V &= V^{n-1} - 0 \\
{}_2V &= V^{n-2} - 0 \\
&\vdots \\
{}_tV &= V^{n-t} - 0 \\
&\vdots \\
{}_nV &= V^{n-n} = 1
\end{aligned}$$

Método Retrospectivo

$$\begin{aligned}
{}_0V &= 0 \\
{}_1V &= A_{\overline{n}}(1+i) - 0 \\
{}_2V &= A_{\overline{n}}(1+i)^2 - 0 \\
&\vdots \\
{}_tV &= A_{\overline{n}}(1+i)^t - 0 \\
&\vdots \\
{}_nV &= A_{\overline{n}}(1+i)^n = 1
\end{aligned}$$

Caso 2

Método Prospectivo

$$\begin{aligned}
{}_0V &= 0 \\
{}_1V &= V^{n-1} - P_{\overline{n}}\ddot{a}_{\overline{n-1}|} \\
{}_2V &= V^{n-2} - P_{\overline{n}}\ddot{a}_{\overline{n-2}|} \\
&\vdots \\
{}_tV &= V^{n-t} - P_{\overline{n}}\ddot{a}_{\overline{n-t}|} \\
&\vdots \\
{}_nV &= V^{n-n} - P_{\overline{n}}\ddot{a}_{\overline{n-n}|}
\end{aligned}$$

Método Retrospectivo

$$\begin{aligned}
{}_0V &= 0 \\
{}_1V &= P_{\overline{n}}\ddot{s}_{\overline{1}|} \\
{}_2V &= P_{\overline{n}}\ddot{s}_{\overline{2}|} \\
&\vdots \\
{}_tV &= P_{\overline{n}}\ddot{s}_{\overline{t}|} \\
&\vdots \\
{}_nV &= P_{\overline{n}}\ddot{s}_{\overline{n}|}
\end{aligned}$$

Caso 3

Método Prospectivo

$$0 < t \leq m$$

$$\begin{aligned} {}_0V &= 0 \\ {}_1V &= V^{n-1} - {}_mP_{\overline{n}}|\ddot{a}_{\overline{m-1}}| \\ {}_2V &= V^{n-2} - {}_mP_{\overline{n}}|\ddot{a}_{\overline{m-2}}| \\ &\vdots \\ {}_tV &= V^{n-t} - {}_mP_{\overline{n}}|\ddot{a}_{\overline{m-t}}| \\ &\vdots \\ {}_nV &= V^{n-n} - {}_mP_{\overline{n}}|\ddot{a}_{\overline{m-n}}| \end{aligned}$$

$$m < t \leq n$$

$$\begin{aligned} {}_{m+1}V &= V^{n-(m+1)} \\ {}_2V &= V^{n-(m+2)} \\ &\vdots \\ {}_nV &= V^{n-n} \end{aligned}$$

Método Retrospectivo

$$0 < t \leq m$$

$$\begin{aligned} {}_0V &= 0 \\ {}_1V &= {}_mP_{\overline{n}}|\ddot{s}_{\overline{1}}| \\ {}_2V &= {}_mP_{\overline{n}}|\ddot{s}_{\overline{2}}| \\ &\vdots \\ {}_tV &= {}_mP_{\overline{n}}|\ddot{s}_{\overline{t}}| \\ &\vdots \\ {}_mV &= {}_mP_{\overline{n}}|\ddot{s}_{\overline{m}}| \end{aligned}$$

$$m < t \leq n$$

$$\begin{aligned} {}_{m+1}V &= {}_mP_{\overline{n}}|\ddot{s}_{\overline{m}}|(1+i) \\ {}_2V &= {}_mP_{\overline{n}}|\ddot{s}_{\overline{m}}|(1+i)^2 \\ &\vdots \\ {}_nV &= {}_mP_{\overline{n}}|\ddot{s}_{\overline{m}}|(1+i)^{n-m} \end{aligned}$$

Caso 4

Método Prospectivo

$$\begin{aligned}
{}_0V &= 0 \\
{}_1V &= V^{n-1} - (k)P_{\overline{n}}^{(k)} \ddot{a}_{\overline{n-1}}^{(k)} \\
{}_2V &= V^{n-2} - (k)P_{\overline{n}}^{(k)} \ddot{a}_{\overline{n-2}}^{(k)} \\
&\vdots \\
{}_tV &= V^{n-t} - (k)P_{\overline{n}}^{(k)} \ddot{a}_{\overline{n-t}}^{(k)} \\
&\vdots \\
{}_nV &= V^{n-n} - (k)P_{\overline{n}}^{(k)} \ddot{a}_{\overline{n-n}}^{(k)} = 1
\end{aligned}$$

Método Retrospectivo

$$\begin{aligned}
{}_0V &= 0 \\
{}_1V &= (k)P_{\overline{n}}^{(k)} \ddot{s}_{\overline{n}}^{(1)} \\
{}_2V &= (k)P_{\overline{n}}^{(k)} \ddot{s}_{\overline{n}}^{(2)} \\
&\vdots \\
{}_tV &= (k)P_{\overline{n}}^{(k)} \ddot{s}_{\overline{n}}^{(t)} \\
&\vdots \\
{}_nV &= (k)P_{\overline{n}}^{(k)} \ddot{s}_{\overline{n}}^{(n)}
\end{aligned}$$

Caso 5

Método Prospectivo

$$0 < t \leq m$$

$$\begin{aligned}
{}_0V &= 0 \\
{}_1V &= V^{n-1} - (k)_mP_{\overline{n}}^{(k)} \ddot{a}_{\overline{m-1}}^{(k)} \\
{}_2V &= V^{n-2} - (k)_mP_{\overline{n}}^{(k)} \ddot{a}_{\overline{m-2}}^{(k)} \\
&\vdots \\
{}_tV &= V^{n-t} - (k)_mP_{\overline{n}}^{(k)} \ddot{a}_{\overline{m-t}}^{(k)} \\
&\vdots \\
{}_nV &= V^{n-n} - (k)_mP_{\overline{n}}^{(k)} \ddot{a}_{\overline{m-n}}^{(k)}
\end{aligned}$$

$$m < t \leq n$$

$$\begin{aligned}
{}_{m+1}V &= V^{n-(m+1)} \\
{}_2V &= V^{n-(m+2)} \\
&\vdots \\
{}_nV &= V^{n-n}
\end{aligned}$$

Método Retrospectivo

$$0 < t \leq m$$

$$\begin{aligned} {}_0V &= 0 \\ {}_1V &= (k)_m P_{\overline{n}|}^{(k)} \ddot{s}_{\overline{1}|}^{(k)} \\ {}_2V &= (k)_m P_{\overline{n}|}^{(k)} \ddot{s}_{\overline{2}|}^{(k)} \\ &\vdots \\ {}_tV &= (k)_m P_{\overline{n}|}^{(k)} \ddot{s}_{\overline{t}|}^{(k)} \\ &\vdots \\ {}_mV &= (k)_m P_{\overline{n}|}^{(k)} \ddot{s}_{\overline{m}|}^{(k)} \end{aligned}$$

$$m < t \leq n$$

$$\begin{aligned} {}_{m+1}V &= (k)_m P_{\overline{n}|}^{(k)} \ddot{s}_{\overline{m}|}^{(k)} (1+i) \\ {}_2V &= (k)_m P_{\overline{n}|}^{(k)} \ddot{s}_{\overline{m}|}^{(k)} (1+i)^2 \\ &\vdots \\ {}_nV &= (k)_m P_{\overline{n}|}^{(k)} \ddot{s}_{\overline{m}|}^{(k)} (1+i)^{n-m} \end{aligned}$$

Prima Comercial de un Título de Capitalización.

Valor de Rescate de un Título de Capitalización.