Métodos de Amortización

Danny Morales

3/11/2019

Métodos de Amortización.

Un Sistema de Amortización es un método a través de la cual un capital cedido en prestamo es reembolsado o pagado mediante un conjunto de cuotas o pagos sucesivos con el objetivo de condonar el capital más una proporción bajo el concepto de interés.

Con frecuencia la especificación de los métodos se basan en definir los elementos que conforma el capital y sus intereses siendo estos componentes fundamentales. Existen muchas formas en la cual un esquema de pago de prestamos puede ser configurado, cada uno especifica el pago de los intereses y el capital, por tanto vamos a considerar varios métodos de amortización.

la definición y las propiedades básicas de una deuda amortizada puede ser descrita en mejor forma con un ejemplo:

Supóngase un prestamo de 1000 unidades monetarias con una tasa de interés del 10% anual. Este será pagado con 2 cuotas de 200 um cada una, una cuota de 300 um al final del 3er año y el resto al final del 4to año.

Este pago de deuda se puede ver desde el punto de vista del saldo insoluto de la deuda o del punto de vista de la cuota. Nótese que los intereses se calculan con respecto al saldo insoluto de la deuda en el período considerado.

Analicemos este pago de deuda desde ambos elementos alternadamente (saldo insoluto y pago de cuotas)

Antes del pago al final del primer año la deuda es:

$$
\begin{aligned}
SI_0 &= 1000(1+10\%) = 1000+100 = 1100 \\
Q_1 &= 100+100 = 200 \\
SI_1 &= 900(1+10\%) = 900+90 = 990 \\
Q_2 &= 90+110 = 200 \\
SI_2 &= 790(1+10\%) = 790+79 = 869 \\
Q_3 &= 79+221 = 300 \\
SI_3 &= 569(1+10\%) = 569+56,9 = 625,9 \\
Q_4 &= 625,9
\end{aligned}
$$

Ahora supongamos que la deuda se pagará pactando el monto y la frecuencia con la que se cancela las cuotas de capital, en el ejemplo las cuatas se cancelarán de la siguiente forma: 2 cuotas de capital de monto 200 um al final de los dos primeros años y luego 2 cuotas de 300 um al final de los últimos 2 años.

Nótese que las cuotas están compuestas por capital e interés, en este caso debemos determinar la cantidad de interés dado la proporción y la forma en que se amortizará el capital, siempre tomando en consideración que el mismo debe calcularse a partir del saldo insoluto de la deuda en el período correpondiente.

$$Q_t = C_t + I_t = C_t + SI_{t-1} * i$$

donde;

C_t: representa las Cuotas de Capital del periódo "t"
I_t: representa la cuota o cantidad de Intereses del período "t"
SI_t: representa el Saldo Insoluto de la deuda en el período "t"
i: representa la Tasa de Interés.

luego calculamos las cuotas y determinamos los intereses en el mismo cálculo:

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= 200 + 1000 * (1 + 10\%) = 200 + 100 = 300 \\
Q_2 &= 200 + 800 * (1 + 10\%) = 200 + 80 = 280 \\
Q_3 &= 300 + 600 * (1 + 10\%) = 300 + 60 = 360 \\
Q_4 &= 300 + 300 * (1 + 10\%) = 300 + 30 = 330
\end{aligned}
$$

Nótese que: Sea M: el capital total de la deuda al inicio o monto del préstamo por convención también se puede denotar como Saldo Insoluto en "cero" entonces:

$$M = SI_0 = Q_t \sum_{t=1}^{n} V_i^t$$

donde:
V_i^t: es el factor de actualización financiera o $\dfrac{1}{1+i}$ para el momento "t"

para el ejemplo anterior esto sería:

$$1000 = 300V_{0,1} + 280V_{0,1}^2 + 360V_{0,1}^3 + 330V_{0,1}^4$$

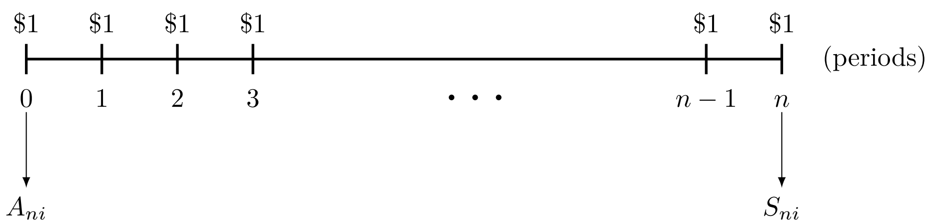
en el caso de el primer ejemplo la ecuación quedaría:

$$
\begin{aligned}
1000 &= 200V_{0,1} + 200V_{0,1}^2 + 300V_{0,1}^3 + XV_{0,1}^4 \\
&\Rightarrow 1000 - [200V_{0,1} + 200V_{0,1}^2 + 300V_{0,1}^3] = XV_{0,1}^4 \\
&\Rightarrow \frac{1000 - [200V_{0,1} + 200V_{0,1}^2 + 300V_{0,1}^3]}{V_{0,1}^4} = X \\
&\Rightarrow \frac{1000 - 200V_{0,1} - 200V_{0,1}^2 - 300V_{0,1}^3}{V_{0,1}^4} = X \\
&\Rightarrow X = 625,9
\end{aligned}
$$

Este cálculo lo vamos a verificar en R para ello utilizaremos un paquete especial para cálculo financieros y actuariales denominado `lifecontingencies`.


```r
CF <- c(300, 280, 360, 330)
YRS <- c(1,2,3,4)
P <- c(1,1,1,1)
presentValue(cashFlows = CF, interestRates = 0.1, timeIds = YRS, probabilities = P)
```

```
## [1] 1000
```




```r
CF <- c(200, 200, 300, 625.9)
YRS <- c(1,2,3,4)
P <- c(1,1,1,1)
presentValue(cashFlows = CF, interestRates = 0.1, timeIds = YRS, probabilities = P)
```

```
## [1] 1000
```

nótese que a pesar de que el flujo de efectivo es distinto, el valor actual es igual en ambos cásos, analicémos ahora a través de un esquema representativo de los elementos de amortización de deuda dicho esquema se denomina **Tabla de Amortización**, entonces:

Ejemplo 1

Períodos (t)	Cuotas Capital	Intereses	Cuota Total	Saldo Insoluto
0	0	0	0	1000
1	200	100	300	800
2	200	80	280	600
3	300	60	360	300
4	300	30	330	0

Ejemplo 2

Períodos (t)	Cuotas Capital	Intereses	Cuota Total	Saldo Insoluto
0	0	0	0	1000
1	100	100	200	900
2	110	90	200	790
3	221	79	300	569
4	569	56,9	625,9	0

En el gráfico se aprecia la velocidad con la que el pago es amortizado, nóte que cuando los pagos de capital son mayores la deuda es amortizada más velozmente y se cancelan menos intereses (linea azul), por el contrario si se amortiza el capital más lenta o conservadoramente se amortiza de forma más costosa o sea se pagan más intereses sobre el mismo valor de capital.

luego definiremos en términos genéricos todos los elementos de la deuda

$$\begin{aligned} I_t &= SI_{t-1} * i \\ C_t &= Q_t - I_t = Q_t - SI_{t-1} * i \\ SI_t &= SI_{t-1} - (Q_t - SI_{t-1} * i) \end{aligned}$$

para $n = 1$

$$SI_1 = SI_0 - (Q_1 - SI_0 * i) = SI_0 - (Q_1 - I_1) = SI_0 - C_1$$

para $n = 2$

$$SI_2 = SI_1 - (Q_2 - SI_1 * i) = SI_1 - (Q_2 - I_2) = SI_1 - C_2$$

para $n = n$

$$SI_n = SI_{n-1} - (Q_n - SI_{n-1} * i) = SI_{n-1} - (Q_n - I_n) = SI_{n-1} - C_n$$

De esta manera podemos definir la tabla de amortización de forma genérica

Períodos (t)	Cuotas Total	Intereses	Cuota Capital	Saldo Insoluto
0	-	-	-	$M = SI_0$
1	Q_1	$I_1 = SI_0 * i$	$C_1 = Q_1 - I_1$	$SI_1 = SI_0 - C_1$
2	Q_2	$I_2 = SI_1 * i$	$C_2 = Q_2 - I_2$	$SI_2 = SI_1 - C_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t	Q_t	$I_t = SI_{t-1} * i$	$C_t = Q_t - I_t$	$SI_t = SI_{t-1} - C_t$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	Q_n	$I_n = SI_{n-1} * i$	$C_n = Q_n - I_n$	0

Métodos para el Cálculo del Saldo Insoluto.

Forma Retrospectiva.

El Saldo Insoluto en términos retrospectivos se define como la diferencia del valor acumulado financieramente del monto de la deuda y las cuotas que se han cancelado hasta el momento del cálculo.

$$\begin{aligned} SI_1 &= SI_0(1+i) - Q_1 \\ SI_2 &= SI_1(1+i) - Q_2 \\ &= [SI_0(1+i) - Q_1](1+i) - Q_2 \\ &= SI_0(1+i)^2 - Q_1(1+i) - Q_2 \\ &\vdots \\ SI_t &= SI_{t-1}(1+i) - Q_t \\ &= SI_0(1+i)^t - Q_1(1+i)^{t-1} - Q_2(1+i)^{t-2} - \cdots - Q_{t-1}(1+i) - Q_t \\ SI_n &= SI_{n-1}(1+i) - Q_n \\ &= SI_0(1+i)^n - Q_1(1+i)^{n-1} - Q_2(1+i)^{n-2} - \cdots - Q_{n-1}(1+i) - Q_t = 0 \end{aligned}$$

para el ejemplo propuesto vamos a calcular el saldo insoluto por el método retrospectivopara el 3er año de la deuda:

$$\begin{aligned} SI_3^R &= 1000(1+10\%)^3 - 200(1+10\%)^2 - 200(1+10\%) - 300 \\ SI_3^R &= 1000 * 1,331 - 200 * 1,21 - 200 * 1,10 - 300 \\ SI_3^R &= 1331 - 242 - 220 - 300 = 569 \end{aligned}$$

Forma Prospectiva

la forma prospectiva consiste en determinar el valor actual de las cuotas o pagos pendientes en el instante de la evaluación.

$$SI_t = Q_{t+1}V + Q_{t+2}V^2 + Q_{t+3}V^3 + \cdots + Q_nV^{n-t}$$

a forma prospectiva consiste en determinar el valor actual de las cuotas o pagos pendientes en el instante de la evaluación.

$$SI_t = Q_{t+1}V + Q_{t+2}V^2 + Q_{t+3}V^3 + \cdots + Q_nV^{n-t}$$

en el ejemplo propuesto calcularemos el saldo insoluto por el método prospectivo al final del 2do año.

$$\begin{aligned} SI_2^P &= 360V + 330V^2 = 360 * 0,9 + 330 * 0,8264 \\ SI_2^p &= 327,27 + 272,7 = 600 \end{aligned}$$

Nótese que ambas formas son equivalentes.

Demostración:

partimos desde la ecuación general de pago amortizado

$$SI_0 = Q_1V + Q_2V^2 + Q_3V^3 + \cdots + Q_nV^n$$

y la forma retrospectiva.

$$SI_t^R = SI_0(1+i)^t - Q_1(1+i)^{t-1} - Q_2(1+i)^{t-2} - - \cdots - Q_{t-1}(1+i) - Q_t$$

luego sustituimos SI_0

$$SI_t = [Q_1V + Q_2V^2 + Q_3V^3 + \cdots + Q_nV^n](1+i)^t - Q_1(1+i)^{t-1} - Q_2(1+i)^{t-2} - - \cdots - Q_{t-1}(1+i) - Q_t$$

observe que:

$$V * (1+i)^t = \frac{1}{1+i} * (1+i)^t = (1+i)^{t-1}$$

luego

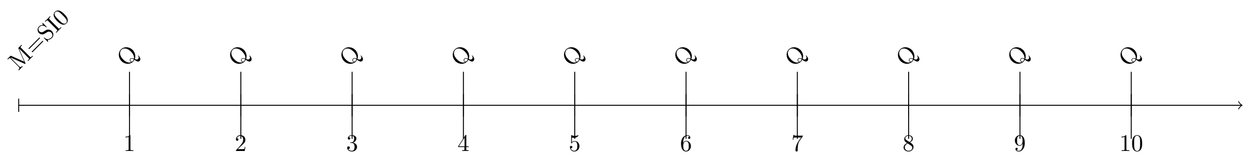
$$\begin{aligned} &SI_t = Q_1(1+i)^{t-1} + Q_2(1+i)^{t-2} + \cdots + Q_{t+1}V + Q_{t+2}V^2 + \cdots + Q_n(1+i)^{n-t} \\ &-Q_1(1+i)^{t-1} - Q_2(1+i)^{t-2} - - \cdots - Q_{t-1}(1+i) - Q_t \\ &SI_t = Q_{t+1}V + Q_{t+2}V^2 + \cdots + Q_n(1+i)^{n-t} \end{aligned}$$

Sistemas de Amortización.

Método Francés o Método de la Cuota Nivelada.

Supongamos que tenemos una deuda de monto M, que se va a pagar con cuotas iguales al final del período por n períodos a tasa i.

Por convención $M = SI_0$ y $Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_n$



$$M = SI_0 = Q[V + V^2 + V^3 + \cdots + V^n] = Qa_{\overline{n|}}$$

Saldo Insoluto por el método prospectivo es igual a:

$$\begin{aligned}
SI_1^P &= Q[V + V^2 + V^3 + \cdots + V^{n-1}] = Qa_{\overline{n-1|}} \\
SI_2^P &= Q[V + V^2 + V^3 + \cdots + V^{n-2}] = Qa_{\overline{n-2|}} \\
&\vdots \\
SI_t^P &= Q[V + V^2 + V^3 + \cdots + V^{n-t}] = Qa_{\overline{n-t|}}
\end{aligned}$$

Saldo Insoluto por el método retrospectivo:

$$\begin{aligned}
SI_1^R &= SI_0(1+i) - 0 \\
SI_2^R &= SI_1(1+i) - Q[1 + (1+i)] = SI_1(1+i) - Q\ddot{s}_{\overline{2|}} \\
&\vdots \\
SI_t^R &= SI_{t-1}(1+i) - Q[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^t] = SI_{t-1}(1+i) - Qs_{\overline{t|}}
\end{aligned}$$

Intereses o cuotas de interés

$$\begin{aligned}
I_1 &= SI_0 * i = Q[V + V^2 + V^3 + \cdots + V^n] * i = Q\left[\frac{1 - V^n}{i}\right] * i \\
&= Qa_{\overline{n|}} * i = Q[1 - V^n] \\
I_2 &= SI_1 * i = Q[V + V^2 + V^3 + \cdots + V^n] * i = Q\left[\frac{1 - V^{n-1}}{i}\right] * i \\
&= Qa_{\overline{n-1|}} * i = Q[1 - V^{n-1}] \\
&\vdots \\
I_t &= SI_{t-1} * i = Q[V + V^2 + V^3 + \cdots + V^{n-(t-1)}] * i = Q\left[\frac{1 - V^{n-(t-1)}}{i}\right] * i \\
&= Qa_{\overline{n-(t-1)|}} * i = Q[1 - V^{n-(t-1)}] \\
&\vdots \\
I_n &= SI_{n-1} * i = QV * i = Q\left[\frac{1 - V}{i}\right] * i \\
&= Qa_{\overline{1|}} * i = Q[1 - V]
\end{aligned}$$

De esta formulación se deduce el cálculo del total de intereses que es la suma de todas las cuotas de interés.

$$I_T = Q[(1-V^n) + (1-V^{n-1}) + \cdots + (1-v)]$$

ahora vamos a determinar la cuota de capital

tenemos que $Q = C + I$ luego despejando obtenemos $C = Q - I$ entonces podemos formular las cuotas de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
C_1 &= Q - I_1 = Q - Q[1 - V^n] = QV^n \\
C_2 &= Q - I_2 = Q - Q[1 - V^{n-1}] = QV^{n-1} \\
&\vdots \\
C_t &= Q - I_t = Q - Q[1 - V^{n-(t-1)}] = QV^{n-(t-1)} \\
&\vdots \\
C_n &= Q - I_n = Q - Q[1 - V] = QV
\end{aligned}$$

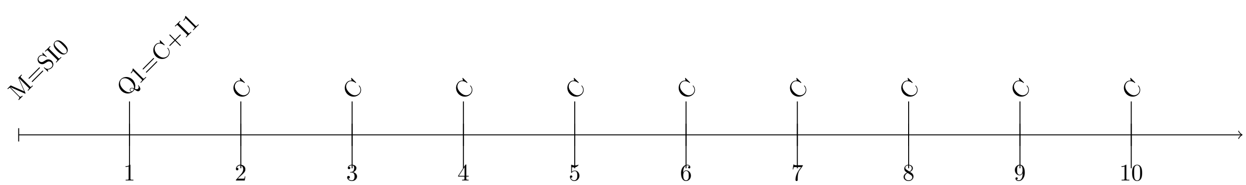
Una vez obtenidos todos estos elementos podemos elaborar la tabla de amortización bajo este sistema.

#TO DO

Método Alemán

Bajo este sistema la característica principal es que la cuota de capital son iguales o niveladas lo que implica que la cuota total a pagar (capital + intereses) es decreciente.

El monto total de la deuda se obtiene multiplicando el número de cuotas de capital por el término de la deuda.



$$\begin{aligned}
M = SI_0 &= n * C \\
\Rightarrow \quad & C = \frac{SI_0}{n}
\end{aligned}$$

Saldo Insoluto se calcula:

$$\begin{aligned}
SI_0 &= nC \\
SI_1 &= SI_0 - C \\
SI_2 &= SI_0 - 2C \\
&\vdots \\
SI_t &= SI_0 - tC \\
&\vdots \\
SI_{n-1} &= SI_0 - (n-1)C \\
SI_n &= SI_0 - nC = nC - nC = 0
\end{aligned}$$

luego la Cuota de Intereses es:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= SI_0 * i \\
I_2 &= SI_1 * i = [SI_0 - C] * i = \left[SI_0 - \frac{SI_0}{n}\right] * i \\
&= \left[\frac{n-1}{n}\right] SI_0 * i \\
I_3 &= SI_2 * i = [SI_0 - 2C] * i = \left[SI_0 - 2\frac{SI_0}{n}\right] * i \\
&= \left[\frac{n-2}{n}\right] SI_0 * i \\
&\vdots \\
I_t &= SI_{t-1} * i = [SI_0 - tC] * i = \left[SI_0 - t\frac{SI_0}{n}\right] * i \\
&= \left[\frac{n-t}{n}\right] SI_0 * i \\
&\vdots \\
I_{n-1} &= SI_{n-2} * i = [SI_0 - (n-2)C] * i = \left[SI_0 - (n-2)\frac{SI_0}{n}\right] * i \\
&= \left[\frac{2}{n}\right] SI_0 * i \\
I_n &= SI_{n-1} * i = [SI_0 - (n-1)C] * i = \left[SI_0 - (n-1)\frac{SI_0}{n}\right] * i \\
&= \left[\frac{1}{n}\right] SI_0 * i
\end{aligned}
$$

Y de esta forma podemos obtener la suma del total de intereses de la operación.

$$
\begin{aligned}
I_T &= \sum_{t=1}^{n} I_t \\
&= \sum_{t=1}^{n} \left[\frac{n-t+1}{n}\right] SI_0 * i \\
&= \left[\frac{SI_0 * i}{n}\right] \sum_{t=1}^{n} (n-t+1) \\
&= \left[\frac{SI_0 * i}{n}\right] (n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1) \\
&= \left[\frac{SI_0 * i}{n}\right] \left[\frac{n(n-1)}{2}\right] \\
I_T &= \left[\frac{n-1}{2}\right] SI_0 * i
\end{aligned}
$$

Tabla de Amortización

TO DO

Método Americano o Método del Fondo de Amortización.

Este sistema consiste en una deuda de un número de n pagos en la cual sólo se cancelan los intereses a tasa i durante los $n-1$ períodos, luego al final en el pago n se cancelan la última cuota de interés más todo el capital. Por otra parte, como estrategia financiera el deudor decide depositar en una cuenta (o fondo) una cantidad Q a tasa j tal que logre capitalizar la cantidad solicitada para asumir el compromiso al final de la deuda.

El saldo Insoluto de la deuda está formulado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
SI_0 &= M \\
SI_1 &= SI_0 - C_1 = SI_0 - 0 \\
SI_2 &= SI_0 - C_2 = SI_0 - 0 \\
&\vdots \\
SI_n &= SI_{n-1} - C_n = SI_0 - SI_0 = 0
\end{aligned}$$

la Cuota de l fonde de amortización viene dada por:

$$Q s_{\overline{n}|} j = SI_0 \Rightarrow Q = \frac{SI_0}{s_{\overline{n}|} j}$$

Nótese que:

i: Tasa de Interés Remunerativa (Tasa Activa).
j: Tasa de Interés Reproductiva (Tasa Pasiva).

ahora calculemos la cuota K que es el total de desembolso anual considerando el pago de intereses y el depósito del fondo.

$$\begin{aligned}
K_1 &= I + Q = M * i + \frac{M}{s_{\overline{n}|} j} = SI_0 \left[i + \frac{1}{s_{\overline{n}|} j} \right] \\
K_2 &= I + Q = M * i + \frac{M}{s_{\overline{n}|} j} = SI_0 \left[i + \frac{1}{s_{\overline{n}|} j} \right] \\
&\vdots \\
K_n &= I + Q + M = M * i + \frac{M}{s_{\overline{n}|} j} + M = SI_0 \left[1 + i + \frac{1}{s_{\overline{n}|} j} \right]
\end{aligned}$$

Tabla de Amortización

El Saldo Insoluto para cualquier momento t bajo el método Americano viene dado por:

$$SI_t = M - \frac{M}{s_{\overline{n}|} j} \times s_{\overline{t}|} j = M[1 - \frac{s_{\overline{t}|} j}{s_{\overline{n}|} j}]$$

Igualmente

$$SI_{t-1} = M[1 - \frac{s_{\overline{t-1}|} j}{s_{\overline{n}|} j}]$$

La Cuota de Capital podemos obtenerla a través de diferencia de saldos insolutos, esto es:

$$CC_t = SI_{t-1} - SI_t = M \left[\frac{s_{\overline{t-1}|} j - s_{\overline{t}|} j}{s_{\overline{n}|} j} \right] = \frac{M(1+j)^{t-1}}{s_{\overline{n}|} j}$$

Finalmente el interés neto cancelado en la n-ésima cuota viene dado por:

$$I_t = M.i - \frac{M.s_{\overline{t-1}|} j}{s_{\overline{n}|} j} \times j = M \left[i - \frac{(1+j)^{t-1} - 1}{s_{\overline{n}|} j} \right]$$