Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Postgrado en Modelos Aleatorios

Proyecto de Trabajo de Grado de la Maestría en Modelos Aleatorios

Estudiar y Aplicar los métodos de Inmunización al riesgo de tasas de interés y reinversión a las Carteras de Bonos de Venezuela

A ser desarrollado por:
Lic. Daysi L. Febles R.
C.I. 19.410.444
Tutor:
Dr. Rafael León.

Caracas - Venezuela
Enero/2018

1. Introducción

Invertir como lo define Alexander, Sharper y Bailey, significa ”sacrificar dinero actual por dinero futuro”, cuando realizamos una inversión estamos colocando cierto capital de dinero para luego recibir una cantidad superior, inferior o igual a la inversión realizada. Podemos destacar dos tipos de inversiones: las que se realizan sobre activos tangibles (maquinarias, materiales, inmuebles, entre otros) o sobre activos financieros como acciones, bonos.

Aunque lo que se espera sobre una inversión es que el capital que se está invirtiendo hoy, tenga un mayor valor en un tiempo futuro, no es siempre cierto porque puede que dicha inversión nos de pérdidas. En realidad el valor futuro de la inversión siempre es incierto y en base a esto se tienen que tomar decisiones adecuadas al momento de realizar la inversión para obtener los resultados que se quieren en el futuro.

Como ejemplo de esto supongamos que cierta compañia necesita hacer una construcción de una ampliación de su infraestructura, además supongamos que el capital con el que cuenta no es suficiente para cubrirlo, entonces tiene que recurrir a agentes externos para levantar el capital suficiente. La inversión en la construcción de la infraestructura es claramente un inversión tangible, que seguramente será para obtener un mayor capital, ahora como la compañia no cuenta con el dinero suficiente tiene que recurrir a otros agentes, un ejemplo de estos agentes son las instituciones bancarias, las cuales prestarían dinero bajo ciertas tasas de interés, muchas veces denominados créditos bancarios, pero estos suelen ser de díficil adquisición o con tasas de interés muy altas; existe otra manera de obtener el dinero requerido, ésta es vender títulos con ciertas garantías, estos títulos son préstamos que la compañia estará dispuesta a pagar más cierto interés sobre un tiempo establecido; en esta última opción los que prestarían el dinero realizarían inversiones financieras, es decir, invertir en instrumentos financieros que pagan ciertas tasas de interés sobre tiempos establecidos.

Las inversiones financieras se hacen en los mercados de capitales, estos están compuestos por entes que regulan las inversiones que se trazan en el mismo, hacen que las reglas del juego se cumplan a cabalidad, es decir, que los compromisos de pagos se realicen y de no ser así lograr penalizar a los que no cumplen.

El mercado de capitales se divide en dos mercados, el mercado primario y el mercado segundario, en el mercado primario es donde se ofrecen públicamente nuevas emisiones; continuando con el ejemplo en este mercado la compañia hace la venta de títulos para obtener el capital deseado, ahora quienes adquieren dichos títulos podrían luego negociarlos y es allí donde entra el mercado segundario, en este último se hacen negociaciones y transferencias de títulos emitidos y colocados previamente en el mercado primario, este mercado es más líquido y por lo tanto más llamativo a la hora de realizar inversiones financieras.

Ahora, dentro del mercado segundario podemos destacar otros mercados y estos dependerán del tiempo de maduración (tiempo en el que se paga el capital invertido más las obligaciones) de los títulos o intrumentos, podemos encontrar el mercado de dinero, el cual está compuesto principalmente por aquellos instrumentos que tienen un vencimiento menor a un año, y el mercado de bonos y obligaciones, éste está compuesto por aquellos instrumentos que tienen un vencimiento mayor a un año.

Dentro de estos mercados están los intrumentos llamados bonos, los cuales son contratos que pagan intereses sobre el capital recibido de parte del suscriptor del contrato. De este modo el suscriptor, o acreedor del contrato, paga por el contrato y a cambio recibe los intereses, u otros beneficios, durante un período de tiempo definido.

Cuando se conocen los pagos que se recibirán por los instrumentos, se les llama instrumentos de renta fija, fijaremos esta investigación en estos instrumentos, estos son muy llamativos porque los inversionistas pueden hacer cálculos sobre las rentabilidades que esperan en un futuro sobre el dinero invertido. Sin embargo, este hecho no quiere decir que la rentabilidad siempre será positiva, puede ser negativa (Los precios suben, bajan o se mantienen) o simplemente puede variar con respecto a lo que se espera recibir.

Centraremos nuestro estudio en inversiones que constan de varios bonos, a estos se les llama carteras o portafolios, que no es más que una combinación de varios instrumentos para producir algún efecto deseado de rentabilidad o riesgo. Una cartera de bonos es la combinación de varios bonos para producir un efecto deseado de flujo de caja o rentabilidad y con políticas definidas sobre la rentabilidad y el tiempo objetivo. Como política se pueden reinvertir los cupones en los mismos instrumentos u otros.

Como en todas las inversiones, además del rendimiento el inversionista debe tomar previsiones sobre el riesgo. Como señala Miguel Mato, "existen dos tipos de riesgos en las inversiones en instrumentos de renta fija, riesgos exógenos y endógenos".

Dentro de los riesgos endógenos podemos contar con:

- La calidad del emisor, incumplimiento de pagos, la liquidez del instrumento, los riesgos políticos, entre otros.

Dentro de los riesgos exógenos tenemos:

-**El riesgo de tipos de interés**: Éste se define como la posible pérdida o ganancia de valor que puede sufrir un instrumento, provocado por las variaciones de las tasas de interés. Cuando los tipos de interés suben, los flujos futuros de una cartera se descuentan a una tasa de interés mayor, por lo cual el precio baja, en el caso de que lo tipos de interés bajen, los flujos futuros se descuentan a una tasa menor, entonces el valor actual aumenta, es decir el precio sube. A este riesgo se le suele llamar **efecto precio**.

- **El riesgo de reinversión**: Se manifiesta cuando la reinversión de los flujos (cupones o principal) no se realiza a la tasa de rendimiento del momento en el cual se compró el bono. Es decir, es el riesgo de obtener un rendimiento diferente al rendimiento al vencimiento del momento de la compra, también llamado **efecto de reinversión**.

Entonces, en las carteras de renta fija tenemos estos dos riesgos, y están asociado a los cambios en las tasas de interés, comunmente llamado riesgo de interés, éste interfiere directamente en la rentabilidad esperada. Cuando se invierte en una cartera de renta fija se está esperando recibir una cantidad fija en un tiempo de especificado, y cada vez que se realiza un pago de cupón de los instrumentos se espera reinvertirlos de modo que en el horizonte fijado se consiga la rentabilidad que se espera, es una inversión dinámica, el dinero se va reinvirtiendo a medida que se va recibiendo, el riesgo que se presenta en esta situación es debido a los cambios en las tasas de interés, ya que la rentabilidad que se espera recibir se hace mediante la tasa de interés del momento de la inversión y en teoría se espera que ésta se mantenga en el tiempo de horizonte fijado, pero en la realidad esto es muy poco probable debido a muchos factores que intervienen en el mercado, entonces si las tasas de interés suben o bajan la rentabilidad esperada variaría obteniendo así una ganancia o una pérdida sobre lo invertido.

Debido a que se está expuesto a estos riesgos se buscan estrategias que nos ayuden a compensarlos de manera que estos sean mínimos y las ganancias que se tengan sean las más optimas. Una forma muy usual para disminuir los riesgos asociados a estas inversiones es generar carteras de instrumentos que realicen un equilibrio entre los riesgos de interés y de reinversión.

La inmunización es una estrategia pasiva, cuyo principal objetivo es anticipar una rentabilidad debido a desplazamientos en las tasas de interés, es decir, fijar un rendimiento en un horizonte fijado evaluando si hay cambios en las tasas de interés sobre el horizonte planificado. La inmunización busca compensar los efectos de precio y de reinversión debido a los cambios posibles en las tasas de interés.

Queremos aplicar la técnica de inmunización de carteras basándonos en medidas como la duración, la convexidad, la medida Ñ y la medida M^2.

2. Antecedentes y Motivación

La inmunización es una técnica de gestión pasiva de carteras de renta fija, desarrollada a partir del concepto de duración, que permite a un inversor estar relativamente seguro de poder hacer frente a una determinada corriente de pagos en el futuro.

La innmunización busca lograr un equilibrio entre los dos efectos contrapuestos de reinversión y precio, de manera que desplazamientos de la curva de tipos de interés no den lugar a la obtención de rendimientos inferiores a la rentabilidad inicialmente ofrecida por el mercado.

F.M. Reddington definió inmunización, en 1952, como la inversión de los activos de tal manera que la misma este inmune ante cambios generales en las tasas de interés.

Lawrence Fisher and Roman Weil, la definieron como: un portafolio de inversiones está inmunizado por un período definido, si su valor al final del período, independientemente de la dirección de las tasas de interés durante el período de inversión, debe ser al menos tan grande como hubiera sido si las tasas de interés hubiesen sido constantes durante el período de tenencia.

Fisher y Weil, demostraron que para lograr el resultado de inmunización, el promedio de la duración de la cartera de obligaciones debe ser igual al tiempo restante en la planificación; y el valor de mercado de los activos debe ser mayor o igual que el valor presente de los pasivos descontados a la tasa interna de rentabilidad de la cartera.

La inmunización busca compensar o igualar las ganancias de una parte con las pérdidas de otra, para proteger la cartera de inversión a las variaciones de los tipos de interés. Sin embargo, hay que aclarar, que la inmunización no garantiza la obtención como mínimo, del rendimiento que se esperaba al momento de la conformación del portafolio, sino que trata de buscar una cartera cuya sensibilidad a las variaciones de los tipos de interés sea mínima.

La inmunización clásica se basa en que los cambios de las tasas de interés se mueven de forma paralela, y en caso de no ser así se tendrá un comportamiento diferente, afectando así la inmunización de la cartera, pudiendo obtener rendimientos más bajos que los esperados. Cuando los cambios son paralelos unas medidas eficientes son la duración y la convexidad y en casos cuando estos no son paralelos Balbás e Ibañez, propusieron la medida Ñ para obtener una inmunización y Fong y Vasicek, propusieron la medida M-Cuadrado M^2.

En Venezuela los principales bonos públicos del estado venezolano en el mercado de valores son los siguientes: letras del tesoro, bonos de deuda pública nacional, bonos del sur, bonos soberanos, bonos globales, bonos de PDVSA, euro bonos, bonos venezolanos, vebonos, bonos globales, bonos brady, bonos cero cupón, entre otros.

En este proyecto de invertigación buscamos generar carteras con bonos Soberanos y de PDVSA, denominados en dólares, con el objetivo de aplicar las medidas de inmunización, y con ello generar carteras inmunes a los cambios en los tipos de interés.

3. Metodología

Lo primero que se realizará es una exploración sobre los conceptos relacionados a los bonos, características, clasificación y la forma en que podemos medir los riesgos asociados para invertir en ellos, seguidamente estudiaremos de manera detallada, con un desarrollo matemático, las medidas utilizadas para realizar la inmunización de una cartera, generando algoritmos para aplicar su uso.

Seguidamente recolectaremos datos históricos del mercado Venezolano, en específico los precios de los bonos Soberanos y de PDVSA, para crear con ellos carteras y aplicar los algoritmos para lograr una inmunización y así poder generar estrategias eficientes de inversión, es decir, aquellas que nos garanticen un rendimiento en un horizonte planificado.

Finalmente vamos a generar una aplicación Web interactiva en donde se puedan aplicar las medidas para obtener una cartera inmunizada.

Con este proyecto se busca una documentación detallada, con rigurosidad matemática, sobre inmunización de cateras compuestas por bonos Venezolanos, aplicando medidas como la duración, convexidad, Ñ y M^2.

4. Definiciones Básicas

En esta sección definiremos las medidas que se usaran para realizar la inmunización de una cartera de bonos.

4.1. Precio de un Bono

El precio de un bono, con vencimiento en el tiempo n, viene definido por la fórmula

$$\text{Precio} = \sum_{t=1}^{n} \frac{\text{Cupon}_t}{(1+\text{rendimiento})^t} + \frac{\text{Nominal}}{(1+\text{rendimiento})^n}$$

Sea P el precio de un bono, los cupones pagados en un tiempo i-ésimo por C_i donde $i = 1, ..., n$, la tasa de interés del mercado o rendimiento por r y el valor nominal por N. De modo que:

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r)^t} + \frac{N}{(1+r)^n}$$

En el caso de tener un bono cupón cero, los flujos de caja, o mejor dicho el pago de los cupones en todo tiempo serían cero, ya que estos bonos tienen un único pago al vencimiento y es el valor del nominal.

$$P = \frac{N}{(1+r)^n}$$

Ejemplo:

Supongamos que tenemos un bono con valor nominal de 1000 dólares, con un tiempo de vencimiento de tres años y una tasa cupón de 7 % y que actualmente en el mercado éste tiene un rendimiento de 3 %, calculemos su precio usando la fórmula anterior.

Por los datos tenemos $N = 1000$, $C_t = 1000 \times 0{,}07 =$ para $t = 1, 2, 3$, $r = 0{,}03$ y $n = 3$, entonces el precio nos queda

$$\begin{aligned}
P &= \sum_{t=1}^{3} \frac{70}{(1+0{,}03)^t} + \frac{1000}{(1+0{,}03)^3} \\
&= \frac{70}{(1+0{,}03)^1} + \frac{70}{(1+0{,}03)^2} + \frac{70}{(1+0{,}03)^3} + \frac{1000}{(1+0{,}03)^3} \\
&= \frac{70}{(1{,}03)^1} + \frac{70}{(1{,}03)^2} + \frac{70}{(1{,}03)^3} + \frac{1000}{(1{,}03)^3} \\
&= 67{,}96117 + 65{,}98171 + 64{,}05992 + 915{,}1417 \\
P &= 1113{,}145
\end{aligned}$$

Obtenemos que el precio del bono en el mercado sería de 1113.145 dólares.

4.2. Duración

A la hora de hacer la inversión en un bono, se estaría interesado en saber el valor futuro de dicho bono, y este valor puede variar si las tasas de interés en el mercado cambian, llevando a un valor superior o quizas inferior que el precio del momento cuando se adquier el bono. Una medida de la sensibilidad del precio, o variación del precio a cambios en las tasas de interés es la duración.

F. Macaulay (1938) definió **la duración** como, "un número único para cada bono que resume todos los factores que afectan la sensibilidad del precio del bono ante cambios en la tasa de interés", la duración es entonces una medida ponderada de los flujos o pagos de cupones de un bono, ésta coincide con la primera derivada del precio en función de las tasas de interés dividida entre el precio.

Si calculamos la primera derivada del precio en relación a las tasas de interés nos queda:

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dr} &= \frac{d}{dr}\left(\frac{C_1}{(1+r)^1}+\frac{C_2}{(1+r)^2}+...+\frac{C_n}{(1+r)^n}+\frac{N}{(1+r)^n}\right)\\
&= \frac{d}{dr}\left(C_1(1+r)^{-1}+C_2(1+r)^{-2}+...+C_n(1+r)^{-n}+N(1+r)^{-n}\right)\\
&= \frac{d}{dr}(C_1(1+r)^{-1})+\frac{d}{dr}(C_2(1+r)^{-2})+...+\frac{d}{dr}(C_n(1+r)^{-n})+\\
&\quad +\frac{d}{dr}(C_t(1+r)^{-n})\\
&= (-1)C_1(1+r)^{-1-1}+(-2)C_2(1+r)^{-2-1}+...+(-n)C_n(1+r)^{-n-1}+\\
&\quad +(-n)N(1+r)^{-n-1}\\
&= (-1)C_1(1+r)^{-2}+(-2)C_2(1+r)^{-3}+...+(-n)C_n(1+r)^{-(n+1)}+\\
&\quad +(-n)C_n(1+r)^{-(n+1)}\\
&= \frac{(-1)C_1}{(1+r)^2}+\frac{(-2)C_2}{(1+r)^3}+...+\frac{(-n)C_n}{(1+r)^{n+1}}+\frac{(-n)N}{(1+r)^{n+1}}\\
&= \frac{1}{1+r}\frac{(-1)C_1}{(1+r)}+\frac{1}{1+r}\frac{(-2)C_2}{(1+r)^2}+...+\frac{1}{1+r}\frac{(-n)C_n}{(1+r)^n}+\frac{1}{1+r}\frac{(-n)N}{(1+r)^n}\\
\frac{dP}{dr} &= -\frac{1}{1+r}\left[\frac{(1)C_1}{(1+r)}+\frac{(2)C_2}{(1+r)^2}+...+\frac{(n)C_n}{(1+r)^n}+\frac{(n)N}{(1+r)^n}\right]
\end{aligned}$$

Dividiendo esta última expresión entre el precio nos queda:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{P}\frac{dP}{dr} &= -\frac{1}{P}\frac{1}{1+r}\left[\frac{(1)C_1}{(1+r)}+\frac{(2)C_2}{(1+r)^2}+...+\frac{(n)C_t}{(1+r)^n}+\frac{(n)N}{(1+r)^n}\right]\\
\frac{1}{P}\frac{dP}{dr} &= -\frac{1}{1+r}\left[\frac{\frac{(1)C_1}{(1+r)}+\frac{(2)C_2}{(1+r)^2}+...+\frac{(n)C_t}{(1+r)^n}+\frac{(n)N}{(1+r)^n}}{P}\right]
\end{aligned}$$

La expresión que tenemos dentro del parentesis nos dice el tiempo en que se recuperará el dinero invertido, Freddy Macaulay (1938) la llamó **duración** y la definió como la media ponderada del tiempo que cada flujo (Cupones y Nominal) tiene en el bono. La ecuación de Macaulay calcula el valor actual de cada uno de los flujos de caja y los pondera por el tiempo hasta el vencimiento, la denotaremos por D_{mac}, es decir:

$$
\begin{aligned}
D_{mac} &= \frac{\frac{(1)C_1}{(1+r)} + \frac{(2)C_2}{(1+r)^2} + ... + \frac{(n)C_t}{(1+r)^n} + \frac{(n)N}{(1+r)^n}}{P} \\
D_{mac} &= \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{(t)C_t}{(1+r)^t}}{P} + \frac{\frac{(n)N}{(1+r)^n}}{P}
\end{aligned}
$$

Ejemplo:
Calculemos la duración del bono utilizado en el ejemplo anterior

$$
\begin{aligned}
D_{mac} &= \frac{\sum_{t=1}^{3} \frac{(t)70}{(1+0{,}03)^t}}{1113{,}145} + \frac{\frac{(3)1000}{(1+0{,}03)^3}}{1113{,}145} \\
&= \frac{1}{1113{,}145} \left(\frac{(1)70}{(1+0{,}03)^1} + \frac{(2)70}{(1+0{,}03)^2} + \frac{(3)70}{(1+0{,}03)^3} + \frac{(3)1000}{(1+0{,}03)^3} \right) \\
&= \frac{1}{1113{,}145} \left(\frac{70}{(1{,}03)^1} + \frac{140}{(1{,}03)^2} + \frac{210}{(1{,}03)^3} + \frac{3000}{(1{,}03)^3} \right) \\
&= \frac{1}{1113{,}145} (67{,}96117 + 131{,}9634 + 192{,}1797 + 2745{,}425) \\
&= \frac{3137{,}529}{1113{,}145} \\
D_{mac} &= 2{,}818617
\end{aligned}
$$

En 2.818617 años la reinversión de los flujos de caja compensa la variación en el precio del mismo.

4.3. Convexidad

La **Convexidad** se define como la segunda derivada del precio con respecto al rendimiento dividido entre el precio del bono, al hacer esto se tiene la aproximación de cambios en el precio de un bono cuando las tasas de rendimiento son mayores.

Calculemos la segunda derivada de la variación del precio con respecto a cambios en las tasas de rendimiento.

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2P}{dr^2} &= \frac{dP}{dr}\left[-\frac{1}{1+r}\left(\frac{(1)C_1}{(1+r)} + \frac{(2)C_2}{(1+r)^2} + ... + \frac{(n)C_n}{(1+r)^n} + \frac{(n)N}{(1+r)^n}\right)\right] \\
&= \frac{dP}{dr}\left[-(1)C_1(1+r)^{-2} - (2)C_2(1+r)^{-3} - ... - (n)C_n(1+r)^{-(n+1)} \right. \\
&\quad \left. - (n)N(1+r)^{-(n+1)}\right] \\
&= \frac{dP}{dr}(-(1)C_1(1+r)^{-2}) + \frac{dP}{dr}(-(2)C_2(1+r)^{-3}) + ... \\
&\quad \frac{dP}{dr}(-(n)C_n(1+r)^{-(n+1)}) + \frac{dP}{dr}(-(n)N(1+r)^{-(n+1)}) \\
&= -(1)(-2)C_1(1+r)^{-2-1} - (2)(-3)C_2(1+r)^{-3-1} - ... \\
&\quad -(n)(-(n+1))C_n(1+r)^{-(n+1)-1} - (n)(-(n+1))N(1+r)^{-(n+1)-1} \\
&= (1)(2)C_1(1+r)^{-3} + (2)(3)C_2(1+r)^{-4} + ... + (n)(n+1)C_n(1+r)^{-(n+2)} \\
&\quad +(n)(n+1)N(1+r)^{-(n+2)} \\
&= \frac{(1)(2)C_1}{(1+r)^3} + \frac{(2)(3)C_2}{(1+r)^4} + ... + \frac{(n)(n+1)C_n}{(1+r)^{n+2}} + \frac{(n)(n+1)N}{(1+r)^{n+2}} \\
\frac{d^2P}{dr^2} &= \frac{1}{(1+r)^2}\left[\frac{(1)(2)C_1}{(1+r)} + \frac{(2)(3)C_2}{(1+r)^2} + ... + \frac{(n)(n+1)C_n}{(1+r)^n} + \frac{(n)(n+1)N}{(1+r)^n}\right]
\end{aligned}
$$

Dividiendo entre el precio nos queda:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{P}\frac{d^2P}{dr^2} &= \frac{1}{(1+r)^2}\frac{1}{P}\left[\frac{(1)(2)C_1}{(1+r)} + \frac{(2)(3)C_2}{(1+r)^2} + ... + \frac{(n)(n+1)C_n}{(1+r)^n} + \frac{(n)(n+1)N}{(1+r)^n}\right] \\
\frac{1}{P}\frac{d^2P}{dr^2} &= \frac{1}{(1+r)^2}\frac{1}{P}\left[\sum_{t=1}^{n}\frac{(t)(t+1)C_t}{(1+r)^t} + \frac{(n)(n+1)N}{(1+r)^n}\right]
\end{aligned}
$$

Obtenemos la definición de convexidad, es decir

$$
\text{Convexidad} = \frac{1}{P}\frac{d^2P}{dr^2} = \frac{1}{(1+r)^2}\frac{1}{P}\left[\sum_{t=1}^{n}\frac{(t)(t+1)C_t}{(1+r)^t} + \frac{(n)(n+1)N}{(1+r)^n}\right]
$$

Ejemplo:

Calculemos el valor de la convexidad de un bono que tiene un tiempo de vencimiento de 4 años, una tasa cupón de 3 % un rendimiento de 10 % y un valor nominal de 1000 dólares.

Con estos datos tenemos $N = 1000$, $C_t = 1000 \times 0{,}03 = 30$ para $t = 1, 2, 3, 4$, $r = 0{,}10$ y $n = 4$.

Primero calculemos el precio de este bono

$$\begin{aligned}
P &= \sum_{t=1}^{4} \frac{30}{(1+0{,}10)^t} + \frac{1000}{(1+0{,}10)^4} \\
&= \frac{30}{(1+0{,}10)^1} + \frac{30}{(1+0{,}10)^2} + \frac{30}{(1+0{,}10)^3} + \frac{30}{(1+0{,}10)^4} + \frac{1000}{(1+0{,}10)^4} \\
&= \frac{30}{(1{,}10)^1} + \frac{30}{(1{,}10)^2} + \frac{30}{(1{,}10)^3} + \frac{30}{(1{,}10)^4} + \frac{1000}{(1{,}10)^4} \\
&= 27{,}27273 + 24{,}79339 + 22{,}53944 + 20{,}4904 + 683{,}0135 \\
P &= 778{,}1095
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\text{Convexidad} &= \frac{1}{(1+r)^2} \frac{1}{P} \left[\sum_{t=1}^{n} \frac{(t)(t+1)C_t}{(1+r)^t} + \frac{(n)(n+1)N}{(1+r)^n} \right] \\
&= \frac{1}{(1+0{,}10)^2} \frac{1}{778{,}1095} \left[\sum_{t=1}^{4} \frac{(t)(t+1)30}{(1+0{,}10)^t} + \frac{(4)(5)1000}{(1+0{,}10)^4} \right] \\
&= \frac{1}{(1{,}10)^2} \frac{1}{778{,}1095} \left[\sum_{t=1}^{4} \frac{(t)(t+1)30}{(1{,}10)^t} + \frac{20000}{(1{,}10)^4} \right] \\
&= \frac{1}{(1{,}10)^2} \frac{1}{778{,}1095} \left[\frac{(1)(2)30}{(1{,}10)^1} + \frac{(2)(3)30}{(1{,}10)^2} + \frac{(3)(4)30}{(1{,}10)^3} + \frac{(4)(5)30}{(1{,}10)^4} + \frac{20000}{(1{,}10)^4} \right] \\
&= \frac{1}{1{,}21} \frac{1}{778{,}1095} \left[\frac{60}{1{,}10} + \frac{180}{1{,}21} + \frac{36}{1{,}331} + \frac{600}{1{,}4641} + \frac{20000}{1{,}4641} \right] \\
&= \frac{1}{1{,}21} \frac{1}{778{,}1095} \left[\frac{60}{1{,}10} + \frac{180}{1{,}21} + \frac{36}{1{,}331} + \frac{600}{1{,}4641} + \frac{20000}{1{,}4641} \right] \\
&= \frac{1}{941{,}5125} [54{,}54545 + 148{,}7603 + 27{,}04733 + 409{,}8081 + 13660{,}27] \\
&= \frac{14300{,}43}{941{,}5125} \\
\text{Convexidad} &= 15{,}18878
\end{aligned}$$

La convexidad es una medida de segundo orden, ante bonos con igual duración, el de mayor convexidad será el que mayor beneficio aporte al inversor ante el riesgo de tipos de interés.

5. Medida M^2

Gifford Fong and Oldrich A. Vasicek en su artículo "A Risk Minimizing Strategy for Portfolio Immunization" define la medida de dispersión M^2, para ello suponen que los intereses tienen un cambio de $i(t)$ a $i'(t) = i(t) + \Delta i(t)$ donde $\Delta i(t)$ es una función arbitraria y $\dfrac{d\Delta i(t)}{dt} \leq K$ para todo $t \geq 0$, dado esto encuentran una cota inferior a los cambios de los precios de la cartera en el horizonte que depende de dos término uno es $-\frac{1}{2}K$ y el otro es la medida de dispersión

$$M^2 = \sum_{j=1}^{m} (j - H)^2 C_j \frac{P_0(j)}{I_0}$$

Donde:
- m corresponde al tiempo de mayor duración de los instrumentos que tiene la cartera.
- C_j corresponde al flujo de caja en el tiempo j.
- H es el horizonte de inversión.
- $P_0(j)$ es una función de descuento presente en el tiempo j.
- I_0 es el precio de inversión al momento de adquirirla.
- S_j es el tiempo cuando ocurren los flujos de caja.

Esta definición de M^2 es muy similar a la definición de duración de Macaulay, y se puede ver como una suma ponderada de las varianzas sobre la fecha del horizonte.

Si los pagos de los flujos ocurren cerca de la fecha horizonte entonces M^2 es bajo, ahora si estos están distribuidos en el tiempo como pasa con las carteras que están compuestas por bonos de corto y largo plazo entonces M^2 será muy grande. En el caso de que la cartera esté completamente inmunizada M^2 será igual a cero. Esto únicamente ocurrirá cuando la cartera está conformada por bonos cero cupón con vencimientos al final del horizonte de inversión, en este caso el riesgo de inmunización es nulo.

M^2 consigue su valor más pequeño cuando la cartera está compuesta por un único bono con igual vencimiento que el horizonte, entonces esta medida nos dice cuan distante está nuestra cartera de inversión de una cartera compuesta por un único bono.

Ejemplo:

Vamos a suponer que conocemos el valor inicial del precio de la cartera $I_0 = P$, el horizonte de inversión H, que los flujos de caja C_j son anuales y que la función de descuento presente es $\frac{1}{(1+r)^t}$ para el tiempo t donde r es el rendimiento. Entonces

$$
\begin{aligned}
M^2 &= \frac{\sum_{j=1}^{m} C_j P_0(S_j)(j-H)^2}{I_0} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^{m} C_j \frac{1}{(1+r)^j}(j-H)^2}{P} \\
M^2 &= \frac{1}{P}\sum_{j=1}^{m} \frac{C_j(j-H)^2}{(1+r)^j}
\end{aligned}
$$

En las carteras de inversión m es el tiempo de vencimiento del instrumento con mayor tiempo de vencimiento, ya que después del último pago correspondiente al horizonte se deben vender los bonos y este precio de venta depende de los flujos de caja que le queden y del pago del nominal.

Supongamos que dentro de cinco años se debe realizar un pago de 1.000.000 de dólares, para ello va invertir 680.583 dólares en una cartera que consta de los siguientes dos bonos

- Un bono del estado a tres años, al 8 % de interés.

- Una obligación del estado que paga 7 % de interés a la que le quedan 10 años de vida.

Supongamos además que se va invertir 52 % del total a invertir (es decir $680{,}583 \times 0{,}52 = 353{,}9032$ dólares) en el primer bono y 48 % (es decir $680{,}583 \times 0{,}48 = 326{,}6798$ dólares) en la obligación. Nuestro horizonte de inversión es de 5 años. Supondremos un rendimiento hasta el vencimiento de 8 %.

Los pagos de cupones del bono son a una tasa de interés de 8 %, suponiendo que estos pagos son anuales, serán entonces $353{,}9032 \times 0{,}08 = 28{,}31226$ dólares los primeros dos años y el último pago de ese bono será el nominal de dicho bono más el cupón $353{,}9032 + 28{,}31226 = 382{,}2155$

Con respecto a la obligación los 5 pagos coincidirán con los pagos de cupones de dicha obligación, ya que el vencimiento del mismo ocurriría cinco años después, y como la tasa de interés de éste es de 7 % tenemos que los pagos de cupones son $326{,}6798 \times 0{,}07 = 22{,}86759$, en el quinto año se venderá y para ello tenemos que calcular el precio de venta, éste dependerá de los pagos que queden y del pago del nominal, por lo tanto el último pago de éste será $326{,}6798 + 22{,}86759 = 349{,}5474$

En la siguiente tabla presentaremos los flujos de caja de cada bono y los flujos de caja de la cartera de inversión

Con estos resultados calculemos el riesgo de inmunización (M^2)

Año	**Bono**	**Obligación**	**Flujo de Caja**
1	28.31226	22.86759	51.17985
2	28.31226	22.86759	51.17985
3	382.2155	22.86759	405.0831
4		22.86759	22.86759
5		22.86759	22.86759
6		22.86759	22.86759
7		22.86759	22.86759
8		22.86759	22.86759
9		22.86759	22.86759
10		349.5474	349.5474

$$\begin{aligned}
M^2 &= \frac{1}{P}\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j(H-S_j)^2}{(1+r)^j} \\
&= \frac{1}{680{,}583}\sum_{j=1}^{10}\frac{C_j(j-5)^2}{(1+0{,}08)^j} \\
&= \frac{1}{680{,}583}\left[\frac{51{,}17985(1-5)^2}{(1{,}08)^1}+...+\frac{349{,}5474(10-5)^2}{(1{,}08)^{10}}\right] \\
&= \frac{1}{680{,}583}\left[758{,}22+...+4047{,}702\right] \\
&= \frac{6865{,}915}{680{,}583} \\
M^2 &= 10{,}08828
\end{aligned}$$

6. Medida $\tilde{N}$

Supongamos que el valor presente del cupón viene dada por

$$c(t,0)=c(t)e^{-\int_0^t g(s)ds}$$

H un horizonte planificado de una inversión y C es el capital invertido, la medida de dispersión $\tilde{N}$ se define como

$$\tilde{N}=\int_0^T\frac{c(t,0)}{C}|t-H|dt$$

7. Cronograma de trabajo

Cronograma de Trabajo						
Actividad	Mes 1	Mes 2	Mes 3	Mes 4	Mes 5	Mes 6
Recopilación bibliográfica	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Recopilación de datos	✓	✓				
Estudio de desempeño y comparativo			✓	✓		
Desarrollo de la aplicación Shiny				✓	✓	
Presentación					✓	✓
Redacción del Tomo	✓	✓	✓	✓	✓	✓

- **Recopilación bibliográfica**: Consiste en la recolección de papers, artículos, libros, documentos o trabajos de grado con referencia a la Inmunización de Carteras, la aplicación y resultados.
- **Recopilación de datos**: Se obtendrán los datos sobre los precios de los Bonos Soberados y de PDVSA del mercado Venezolano.
- **Aplicación y comparación**: Se realizará la aplicación de las estrategias de inmunización a carteras compuestas con los bonos Soberanos y PDVSA, para luego comparar las más eficientes que garanticen las rentabilidades deseadas.
- **Desarrollo de la aplicación Shiny**: Se construira una aplicación Shiny para aplicar inmunización.
- **Presentación**: Elaboración de la presentación del trabajo realizado.
- **Redacción del Tomo**: Redacción del libro con todos los detalles del trabajo realizado.

Referencias

[1] Oldrich A. Vasicek. *Finance, economics and mathematics*. Wiley, United States of Ameriza, 2016.

[2] Balbás Alejandro and Ibáñez Alfredo. *When can you inmunize a bond portfolio*. Journal of Banking & Finance. Vol. 22, nº 12, December 1998, p. 1571-1595

[3] Gordon Alexander J., Sharpe William F. y Bailey Jeffery V. *Fundamentos de inversiones Teoría y práctica*. Tercera edición. Editorial Pearson, Mexico 2003.

[4] Grinblatt Mark y Titman Sheridan. *Mercados financieros y estrategia empresarial*. Segunda edición. Editorial McGRAW-HILL/INTERAMERICANA DE ESPAÑA, S. A. U, España 2003.

[5] Mascareñas Juan. *La gestión pasiva de las carteras de renta fija*. Universidad Complutense de Madrid, 1991.

[6] Miguel Angel Martín Mato. *Inversiones Instrumentos de renta fija, valoración de bonos y análisis de cartera*. Primera edicion, Editorial Pearson, México, 2007.