Daniel Cipriano 233228 MS211C atividade 4

(1) a) Transformando o sistema na matriz de coeficientes A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

utilizando o critério das linhas:

$$\alpha_1 = \frac{3 + (1)}{1} = 4$$

$$\alpha_2 = \frac{5 + 2}{2} = 7/2 = 3,5$$

$$\alpha_3 = \frac{0 + 6}{8} = 6/8 = 3/4 = 0,75$$

Para $\alpha = \max(4; 3,5; 0,75) \rightarrow \underline{\alpha = 4}$

Nesse caso $\alpha > 1$, porém, não é possível confirmar que o sistema converge ou não converge, pois, o método diz que, caso $\alpha < 1$, o sistema converge, porém, a recíproca não é verdadeira.

b) Permutando as duas primeiras equações obtemos a matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Pelo critério das linhas:

$$\alpha_1 = \frac{2 + 2}{5} = 4/5 = 0,8$$

$$\alpha_2 = \frac{1 + 1}{3} = 2/3 = 0,666$$

$$\alpha_3 = \frac{0 + 6}{8} = 6/8 = 0,75$$

Como $\alpha = \max(0,8; 0,666; 0,75) = 0,8 < 1$

Podemos dizer que o sistema é convergente//

Falta o item 2c.

② Obtemos a matriz dos coeficientes do sistema:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & -1 \\ 2 & 10 & 8 \\ 7 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

Pelo critério de Sassenfeld

$$\beta_1 = \frac{1+1}{10} = 2/10 = 1/5 = 0,2$$

$$\beta_2 = \frac{(1/5)2 + 8}{10} = 0,84$$

$$\beta_3 = \frac{(0,2)7 + (0,84)1}{10} = 0,224$$

$$\beta = \max(0,2;\ 0,84;\ 0,224) = \underline{0,84 < 1}$$

Portanto o sistema é convergente para o método de Gauss-Seidel

b) Transformando o sistema em função iterativa:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{10 - x_2^{(k)} + x_3^{(k)}}{10}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{20 - 2x_1^{(k+1)} - 8x_3^{(k)}}{10}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{30 - 7x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}}{10}$$

Digitalizado com CamScanner

p 1ª: Para $X^0 = [0,7 ; -1,6 ; 0,6]^T$ e $\varepsilon = 10^{-2}$

$$X_1^{(1)} = \frac{10 - (-1,6) + 0,6}{10} = 1,22$$

$$X_2^{(1)} = \frac{20 - (2 \cdot 1,22) - (8 \cdot 0,6)}{10} = \frac{20 - 2,44 - 4,8}{10} = 1,276$$

$$X_3^{(1)} = \frac{30 - (7 \cdot 1,22) - 1,276}{10} = \frac{30 - 8,54 - 1,276}{10} = 2,0184$$

calculando a distância relativa:

$$D_r = \frac{\| X^{(1)} - X^{(0)} \|_\infty}{\| X^{(1)} \|_\infty} =$$

$$X^{(1)} - X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1,22 - 0,7 \\ 1,276 + 1,6 \\ 2,0184 - 0,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,52 \\ 2,876 \\ 1,4184 \end{bmatrix}$$

$$\| X^{(1)} - X^{(0)} \|_\infty = \max(0,52 ; 2,876 ; 1,4184) = 2,876$$

$$\| X^{(1)} \|_\infty = \max(1,22 ; 1,276 ; 2,0184) = 2,0184$$

$$D_r = \frac{2,876}{2,0184} \cong \cancel{1,442}\ 1,425 > 10^{-2}$$ continua a iteração

Para $X^{(1)} = [1{,}22\ ;\ 1{,}276\ ;\ 2{,}0184]^T$

$$X_1^{(2)} = \frac{10 - (1{,}276) + 2{,}0184}{10} = 1{,}07424$$

$$X_2^{(2)} = \frac{20 - (2 \cdot 1{,}07424) - (8 \cdot 2{,}0184)}{10} = 0{,}170432$$

$$X_3^{(2)} = \frac{30 - (7 \cdot 1{,}07424) - 0{,}170432}{10} = 2{,}2309888$$

$$D_r = \frac{\| X^{(2)} - X^{(1)} \|_\infty}{\| X^{(2)} \|_\infty} \ ; \quad X^{(2)} - X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1{,}07424 - 1{,}22 \\ 0{,}170432 - 1{,}276 \\ 2{,}2309888 - 2{,}0184 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}14576 \\ -1{,}105568 \\ 0{,}2125888 \end{bmatrix}$$

$\| X^{(2)} - X^{(1)} \|_\infty = 1{,}105568$

$\| X^{(2)} \|_\infty = 2{,}2309888$

$$D_r = \frac{1{,}105568}{2{,}2309888} \cong 0{,}495 > 10^{-2}$$

continua a iteração

3ª. Para $X^{(2)} = [1{,}07424\ ;\ 0{,}170432\ ;\ 2{,}2309888]^T$

$$X_1^{(3)} = \frac{10 - 0{,}170432 + 2{,}2309888}{10} = 1{,}20605568$$

$$x_2^{(3)} = \frac{20 - (2 \cdot 1{,}2060556 8) - (8 \cdot 2{,}2309888)}{10} = -0{,}026002176$$

$$x_3^{(3)} = \frac{30 - (7 \cdot 1{,}20605568) - (-0{,}026002176)}{10} = 3{,}841638758$$

$$D_1 = \frac{\| x^{(3)} - x^{(2)} \|_\infty}{\| x^{(3)} \|_\infty}$$

$$x^{(3)} - x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1{,}20605568 - 1{,}07424 \\ -0{,}026002176 - 0{,}170432 \\ 3{,}841638758 - 2{,}2309888 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}13181568 \\ -0{,}196434176 \\ 1{,}610649958 \end{bmatrix}$$

$$\| x^{(3)} - x^{(2)} \|_\infty = 1{,}610649958$$

$$\| x^{(3)} \|_\infty = 3{,}841638758$$

$$D_1 = \frac{1{,}610649958}{3{,}841638758} \cong 0{,}419 > 10^{-2}$$ continua a iteração.

4ª:

Para $x_0^{(3)} = [1{,}20605568 ; -0{,}026002176 ; 3{,}841638758]$

$$x_1^{(4)} = \frac{10 - (-0{,}026002176) + 3{,}841638758}{10} = 1{,}386764093$$

$$x_2^{(4)} = \frac{20 - (2 \cdot 1{,}386764093) - (8 \cdot 3{,}841638758)}{10} = -1{,}350663825$$

$$x_3^{(4)} = \frac{30 - (7 \cdot 1{,}386764093) - (-1{,}350663825)}{10} = 2{,}164331517$$

$$D_r = \frac{\|x^{(4)} - x^{(3)}\|_\infty}{\|x^{(4)}\|_\infty}$$

$$x^{(4)} - x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1{,}386764093 - 1{,}20605568 \\ -1{,}350663825 + 0{,}026002176 \\ 2{,}164331517 - 3{,}841638758 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}180708413 \\ -1{,}324661649 \\ -1{,}677307241 \end{bmatrix}$$

$$\|x^{(4)} - x^{(3)}\|_\infty = 1{,}677307241$$

$$\|x^{(4)}\|_\infty = 2{,}164331517$$

$$D_r = \frac{\cancel{2{,}164331517}\ 1{,}677307241}{2{,}164331517} \cong 0{,}774 > 10^{-2}$$

5º: $$x_1^{(5)} = \frac{10 - (-1{,}350663825) + 2{,}164331517}{10}$$

$$= 1{,}348499534$$

$$x_2^{(5)} = \frac{20 - (2 \cdot 1{,}348499534) - (8 \cdot 2{,}164331517)}{10}$$

$$= -0{,}001165120 4$$

$$x_3^{(5)} = \frac{30 - (7 \cdot 1{,}348499534) - (-0{,}001165 1204)}{10}$$

$$\simeq 2{,}056166838$$

$$D_r = \frac{\| x^{(5)} - x^{(4)} \|_\infty}{\| x^{(5)} \|_\infty} =$$

$$x^{(5)} - x^{(4)} = \begin{bmatrix} 1{,}348499534 - 1{,}386764093 \\ -0{,}001165 1204 + 1{,}350663825 \\ 2{,}056166838 - 2{,}164331517 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}038264559 \\ 1{,}349498705 \\ -0{,}108164679 \end{bmatrix}$$

$$\| x^{(5)} - x^{(4)} \|_\infty = 1{,}349498705$$

$$\| x^{(5)} \|_\infty = 2{,}056166838$$

$$D_r = \frac{1{,}349498705}{2{,}056166838} \simeq 0{,}656 > 10^{-2}$$

6ª: Para $x^{(5)} = [1{,}348499534; -0{,}001165 1204; 2{,}056166838]^T$

$$x_1^{(6)} = \frac{10 - (-0{,}001165 1204) + 2{,}056166838}{10}$$

$$= 1{,}205733196$$

$$x_2^{(6)} = \frac{20 - (2 \cdot 1{,}205733196) - (8 \cdot 2{,}056166838)}{10}$$

$$= 0{,}11391989$$

$$x_3^{(6)} = \frac{30-(7 \cdot 1{,}205733196) - 0{,}1139 1989}{10}$$

$$= 2{,}144594774$$

$$D_r = \frac{\|x^{(6)} - x^{(5)}\|_\infty}{\|x^{(6)}\|_\infty}$$

$$x^{(6)} - x^{(5)} = \begin{bmatrix} 1{,}205733196 - 1{,}348499534 \\ 0{,}11391989 + 0{,}001165 1204 \\ 2{,}144594774 - 2{,}056166838 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}142766338 \\ 0{,}11508501 \\ 0{,}08842 7936 \end{bmatrix}$$

$$\|x^{(6)} - x^{(5)}\|_\infty = 0{,}142766338$$

$$\|x^{(6)}\|_\infty = 2{,}144594774$$

$$D_r = \frac{0{,}142766338}{2{,}144594774} \cong 0{,}0666 > 10^{-2}$$

7ª: Para $x^{(6)} = [1{,}205733196;\ 0{,}11391999;\ 2{,}144594774]$

$$x_1^{(7)} = \frac{10 - 0{,}11391989 + 2{,}144594774}{10} = 1{,}203067488$$

$$x_2^{(7)} = \frac{20-(2 \cdot 1{,}203067488)-(8 \cdot 2{,}144594774)}{10}$$

$$= 0{,}043710683$$

$$x_3^{(7)} = \frac{30-(7 \cdot 1{,}203067488) - 0{,}043710683}{10}$$

$$= 2{,}15348169$$

$$D_1 = \frac{\| x^{(7)} - x^{(6)} \|_\infty}{\| x^{(7)} \|_\infty}$$

$$x^{(7)} - x^{(6)} = \begin{bmatrix} 1{,}203067488 - 1{,}205733196 \\ 0{,}043710683 - 0{,}113919889 \\ 2{,}15348169 - 2{,}144594774 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}002665708 \\ -0{,}070209207 \\ 0{,}008886916 \end{bmatrix}$$

$$\| x^{(7)} - x^{(6)} \|_\infty = 0{,}070209207$$

$$\| x^{(7)} \| = 2{,}15348169$$

$$D_1 = \frac{0{,}070209207}{2{,}15348169} \cong 0{,}0326 > 10^{-2}$$

8ª: Para $x^{(7)} = [1{,}203067488 ; 0{,}043710683 ; 2{,}15348169]^T$

$$x_1^{(8)} = \frac{10 - 0{,}043710683 + 2{,}15348169}{10} = 1{,}210977101$$

$$x_2^{(8)} = \frac{20 - (2 . 1{,}210977101) - (8 . 2{,}15348169)}{10}$$

$$= 0{,}035019227$$

$$x_3^{(8)} = \frac{30 - (7 . 1{,}210977101) - 0{,}035019227}{10}$$

$$= 2{,}148814107$$

$$D_r = \frac{\| x^{(8)} - x^{(7)} \|_\infty}{\| x^{(8)} \|_\infty}$$

$$x^{(8)} - x^{(7)} = \begin{bmatrix} 1{,}210977101 - 1{,}203067488 \\ 0{,}035019227 - 0{,}043710683 \\ 2{,}148814107 - 2{,}15348169 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}007909613 \\ -0{,}008691456 \\ -0{,}004667583 \end{bmatrix}$$

$$\| x^{(8)} - x^{(7)} \|_\infty = 0{,}008691456$$

$$\| x^{(8)} \|_\infty = 2{,}148814107$$

$$D_r = \frac{0{,}008691456}{2{,}148814107} \cong 0{,}00405 < 10^{-2}$$

Portanto

$$S: \begin{cases} x_1 \cong 1{,}210977101 \\ x_2 \cong 0{,}035019227 \\ x_3 \cong 2{,}148814107 \end{cases}$$