2ª Prova – F 328 – Questão 3
2S2020 – 02/12/2020

Nome: Daniel de Sousa Cipriano **RA:** 233228 **Turma:** K

Nome: Gabriel Pelizari **RA:** 234975 **Turma:** K

Nome: Guilherme Andrade Xavier **RA:** 235850 **Turma:** K

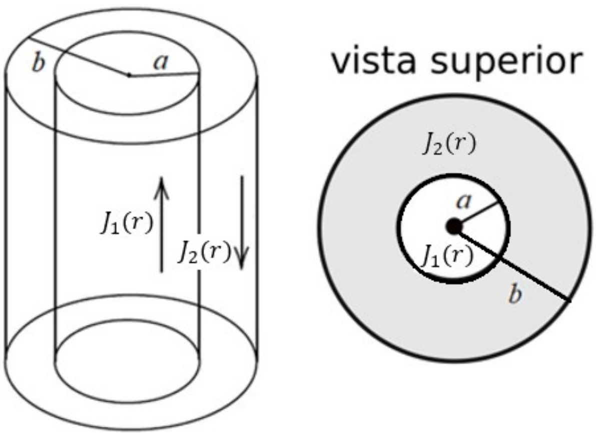
Façam todos os cálculos, e não pulem passagens. Justifiquem todas as respostas em detalhes. Deduzam todas as fórmulas usadas, ou, podem usar fórmulas prontas desde que estas sejam do Halliday – nesse caso, forneçam o número da equação do Halliday correspondente, e a edição do Halliday utilizada (p. ex., Eq. (24-1), 9ª ed.).

Atenção: Vocês usarão seus RAs ao longo da questão para obter alguns valores iniciais pedidos. Para isso, completem cada dígito dos seus RAs ($KMNXYZ$) na tabela abaixo:

RA	*K*	*M*	*N*	*X*	*Y*	*Z*
Alunx 1	2	3	3	2	2	8
Alunx 2	2	3	4	9	7	5
Alunx 3	2	3	5	8	5	0

Questão 3

A figura abaixo mostra um cilindro condutor muito longo de raio a, que possui uma densidade de corrente $J_1(r) = J_0$, e está circundado por uma camada cilíndrica condutora, de raio interno a e raio externo b, que possui uma densidade de corrente $J_2(r)$, no sentido oposto da corrente do cilindro interno.



i. Usem os 2 últimos dígitos dos seus RAs (considerem que estes formam um único número de 2 dígitos; p. ex., se o RA é 123456, o número a ser usado será 56), para calcular o valor do parâmetro r_1:

$$r_1 = \left(\frac{(YZ)1 + (YZ)2 + (YZ)3}{6}\right) \text{ cm} = \underline{\quad 25{,}5 \quad} \text{cm}$$

ii. Usem os 2 dígitos do meio dos seus RAs (considerem que estes formam um único número de 2 dígitos; p. ex., se o RA é 123456, o número a ser usado será 34), para calcular o valor do parâmetro r_2:

2ª Prova – F 328 – Questão 3
2S2020 – 02/12/2020

$$?_2 = \left(\frac{(NX)1 + (NX)2 + (NX)3}{3}\right) \text{ cm} = \underline{\qquad 46,3 \qquad} \text{cm}$$

Usem o menor valor dentre r_1 e r_2 para ser o valor de a e o maior para ser o valor de b. Caso $r_1 = r_2$, façam $a = r_1$ e $b = 2r_1$ (p. ex., se $r_1 = 30$ cm e $r_2 = 25$ cm, então $a = 25$ cm e $b = 30$ cm; e caso $r_1 = r_2 = 25$ cm, então $a = 25$ cm e $b = 50$ cm).

iii. Usem os últimos dígitos dos seus RAs (p. ex., se o RA é 123456, o número a ser usado será 6) para obter:

$$\frac{?_1 + Z_2 + Z_3}{3} = \underline{\quad 4 \quad}(\text{inteiro}) + \underline{\quad 1 \quad}(\text{resto})$$

- Se o resto da divisão for igual a **0** (múltiplo de 3), considerem $J_2(r) = J_0 r/a$.
- Se o resto da divisão for igual a **1**, considerem $J_2(r) = J_0 a/r$.
- Se o resto da divisão for igual a **2**, considerem $J_2(r) = J_0(1 - \frac{a}{r})$.

iv. Usem os penúltimos dígitos dos seus RAs (p. ex., se o RA é 123456, o número a ser usado será 5) para calcular para calcular o parâmetro J_0:

$$J_0 = \left(\frac{?_1 + Y_2 + Y_3 + 1}{3}\right) \text{A} = \underline{\qquad 5 \qquad} \text{A/m}^2$$

Resolvam os itens a seguir. Se necessário, usem $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m. Não se esqueçam de **detalhar todos os desenvolvimentos** e **não pular passagens**.

a) **(0.8)** Encontrem uma **expressão algébrica** para o módulo do campo magnético a uma distância r do eixo do conjunto cilíndrico para $0 \leq r \leq a$. Depois, calculem o módulo do campo magnético para $r = a/2$.

b) **(1.1)** Encontrem uma **expressão algébrica** para o módulo do campo magnético a uma distância r do eixo do conjunto cilíndrico para $a \leq r \leq b$. Depois, calculem o módulo do campo magnético para $r = (a + b)/2$.

c) **(0.8)** Encontrem uma expressão algébrica para o módulo do campo magnético a uma distância r do eixo do conjunto cilíndrico para $r \geq b$. Depois, calculem o módulo do campo magnético para $r = 2b$.

d) **(0.6)** Há valores finitos de r para os quais o campo magnético é zero? Se sim, quais? Justifiquem! Encontrem primeiro a **expressão algébrica**, e depois substituam os valores.

③ a) Para $0 \leq r < a$ temos que a densidade de corrente é dada por $j_1(r) = j_0$. ~~Utilizando os dados~~ Utilizando a expressão para a densidade de corrente:

$$j = \frac{dI}{dA} \rightarrow dI = j\,dA \rightarrow I = \int j\,dA$$

aplicando para a corrente I_1: $I_1 = \int_0^a j_1\,dA$

como A é a área da amperiana circular traçada com raio r:

$$A = \pi r^2 \rightarrow dA = 2\pi r\,dr$$

assim: $I_1 = j_1 \int_0^a 2\pi r\,dr \rightarrow I_1 = 2\pi j_1 \int_0^a r\,dr \rightarrow I_1 = 2\pi j_1 \frac{r^2}{2}\Big|_0^a$

$$I_1 = \cancel{2}\pi j_1 \left(\frac{a^2}{\cancel{2}}\right) \rightarrow \boxed{I_1 = \pi j_1 a^2}$$

assim, utilizando a equação para a lei de Ampère

$$\oint \vec{B}\,d\vec{l} = \mu_0 I_{int} \quad \text{Eq (29-14) da Halliday vol. 9}$$

como a corrente tem sentido para cima, ~~para~~ o campo está no sentido ~~do fora~~ anti-horário. Percorrendo a curva no mesmo sentido:

$\vec{B}\,d\vec{l} = B\,dl$ assim $B(2\pi r) = \mu_0 I_{int}$

Para o campo $B_1 \rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 \pi j_1 a^2}{2\pi r}$

$$\boxed{B_1(r) = \frac{\mu_0 j_1 a^2}{2r}}$$

Para $r = a/2$ e $j_1 = j_0 = 5\ A/m^2$ utilizando $a = 25{,}5\,cm$

$$\cancel{B_1(a/2) = \frac{4\pi \times 10^{-7} \cdot 5 \cdot 0{,}255}{4}} \rightarrow \cancel{\boxed{B_1(a/2) \cong 4 \times 10^{-7}\ T}}$$

$$B_1(a/2) = \frac{2\mu_0 j_0 a^2}{2a} = \mu_0 j_0 a = 4\pi \times 10^{-7} \cdot 5 \cdot 0{,}255$$

$$\boxed{B_1(a/2) \cong 1{,}6 \times 10^{-6}\ T}$$

b) Para $a \leq r \leq b$, utilizando os mesmos conceitos do item anterior:

$$I_2 = \int_a^b J_2 \, dA$$

como estamos no cilindro de densidade de corrente $J_2(r)$, a área A é dada por

$A = \pi r^2 - \pi a^2 \rightarrow A = \pi(r^2 - a^2)$

$dA = 2\pi r \, dr$

assim $I_2 = J_2 \int_a^r 2\pi r \, dr \rightarrow I_2 = 2\pi J_2 \left. \frac{r^2}{2} \right|_a^b$

$$I_2 = 2\pi J_2 \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right) \rightarrow \boxed{I_2 = \pi J_2 (b^2 - a^2)}$$

Aplicando novamente uma amperiana circular de raio r, mas dessa vez com a corrente dirigida para baixo, o campo gerado está no sentido horário, percorrendo a curva no sentido horário:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{int} \rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{l} = -B \, dl$$

assim $-B_2(2\pi r) = \mu_0 I_2 \rightarrow -B_2(2\pi r) = \mu_0 \pi J_2 (b^2 - a^2)$

$$B_2(r) = \frac{\mu_0 J_2 (b^2 - a^2)}{2r} \rightarrow \text{substituindo } J_2(r) = \frac{J_0 a}{r}$$

$$B_2(r) = \frac{\mu_0 J_0 a (b^2 - a^2)}{2r^2}$$

assim como o campo resultante é dado por:

$B_{res} = B_1 + B_2$

$$\boxed{B_{res} = \frac{\mu_0 J_0 a^2}{2r} - \frac{\mu_0 J_0 a (b^2 - a^2)}{2r^2}}$$

substituindo $r = \frac{(a+b)}{2}$; $a = 25 \text{ cm}$; $b = 46,3 \text{ cm}$; $J_0 = 5 \text{ A/m}^2$

$$B_{res} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \cdot 5 \cdot (0,255)^2}{2 \cdot \frac{(0,255 + 0,463)}{2}} - \frac{4\pi \times 10^{-7} \cdot 5 \cdot 0,255 \, (0,463^2 - 0,255^2)}{2 \left[\frac{(0,255 + 0,463)}{2} \right]^2}$$

$$B_{res} = 5,69030814 \times 10^{-7} - 9,283012495 \times 10^{-7}$$

$$\boxed{B_{res \, \left(\frac{a+b}{2}\right)} \cong -3,6 \times 10^{-7} \text{ T}}$$

c) Para $r \geq b$, temos que, traçando uma amperiana circular de raio r.

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{int}$ → a corrente no interior é dada pela soma das correntes obtidas nos itens (a) e (b)

assim $B(2\pi r) = \mu_0 (I_1 + I_2)$

$$\rightarrow B(2\pi r) = \mu_0 \left[\pi J_0 a^2 + \frac{\pi J_0 a (b^2 - a^2)}{r} \right]$$

$$\rightarrow \boxed{B_{(r)} = \frac{\mu_0 J_0 [a^2 + a(b^2 - a^2)]}{2r^2}}$$

Para $r = 2b$:

$$B(2b) = \frac{\mu_0 J_0 [a^2 + a(b^2 - a^2)]}{8b^2}$$ substituindo os valores

$$B(2b) = \frac{4\pi \times 10^{-7} \cdot 5 [0{,}255^2 + 0{,}255(0{,}463^2 - 0{,}255^2)]}{8 \cdot 0{,}463^2}$$

$$\boxed{B(2b) \cong 3{,}78 \times 10^{-7}\ T}$$

d) Igualando a expressão obtida no item (b) a 0.

$$\frac{\mu_0 J_0 a^2}{2r} - \frac{\mu_0 J_0 a(b^2 - a^2)}{2r^2} = 0$$

$$\frac{\cancel{\mu_0 J_0} a^{\cancel{2}}}{\cancel{2r}} = \frac{\cancel{\mu_0 J_0 a}(b^2 - a^2)}{\cancel{2r}^2}$$

$$a = \frac{(b^2 - a^2)}{r} \rightarrow r = \frac{(b^2 - a^2)}{a}$$, substituindo os valores

$$r = \frac{(0,463^2 - 0,255^2)}{0,255} \rightarrow \boxed{r = 0,586\ m}$$ valor finito de r para qual o campo é nulo.