MC358 - 1s2024 - Lista de exercícios 2

1. Para cada um dos itens abaixo, demonstre a veracidade da proposição ou apresente um contraexemplo.

(a) Existe $x \in N$ tal que x é um cubo perfeito e $x + 1$ é um quadrado perfeito.

Temos que a definição de quadrado perfeito é, um número natural cuja raiz quadrada é também um número natural. Portanto, podemos definir, seja a um quadrado perfeito, então: $a \in \mathbb{N}$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$, $a = n^2$.

Da mesma forma, podemos definir um cubo perfeito como um número natural cuja raiz cúbica resulta em um número natural. Seja b um cubo perfeito:
$b \in \mathbb{N}$, $\exists\, k \in \mathbb{N}$, $b = k^3$.

Assim, definimos a proposição: $\exists\, x \in \mathbb{N}, \exists\, n \in \mathbb{N}, \exists\, k \in \mathbb{N}$ ($x+1 = n^2$ □ $x = k^3$).
Provando de forma construtiva, podemos utilizar os valores $n = 3$ e $k = 2$:
$3^2 = 9$ e $2^3 = 8$. Portanto com $x = 8$ e $x+1 = 9$, provamos a proposição.

(b) Se a e b são números racionais, então a^b é racional.

Por definição, números racionais são números que podem ser escritos como uma fração irredutível de dois números inteiros, com o denominador não nulo. Portanto, seguindo a proposição dada, podemos definir:

$a \in \mathbb{Q}$ então $a = p/q$, para $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$ (inteiros exceto zero)
$b \in \mathbb{Q}$ então $b = m/n$, para $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}^*$ (inteiros exceto zero)

Tomando como exemplo $a = 2$ e $b = 1/2$:

a^b = 2^(1/2) = $\sqrt{2}$, sabemos que raiz de 2 é irracional. Portanto, utilizando um contraexemplo, provamos que a proposição nem sempre será verdadeira.

(c) Todo inteiro positivo pode ser escrito como a soma dos quadrados de três inteiros.

Definindo a proposição: $\forall\, x \in \mathbb{Z}+$ ($\exists\, a,b,c \in \mathbb{Z}$ ($x = a^2 + b^2 + c^2$)).
Utilizando um contraexemplo $x = 7$, temos que os quadrados menores que 7 são 0, 1 e 4. Portanto, não é possível escrever o número 7 como a soma de nenhuma combinação de quadrados de inteiros, a proposição é falsa.

2. Prove que não existe inteiro positivo n tal que $n^2 + n^3 = 100$.

Temos que se $n^3 >= 100$, não pode existir n^2 que somado com esse valor resulte em 100, $n^3 > 100$ para todo $n > 4$, portanto podemos verificar a veracidade da proposição para os números no intervalo {0,1,2,3,4}:

para $n = 0$, $n^2 + n^3 = 0 + 0 = 0$
para $n = 1$, $n^2 + n^3 = 1 + 1 = 2$

para $n = 2$, $n^2 + n^3 = 4 + 8 = 12$
para $n = 3$, $n^2 + n^3 = 9 + 27 = 36$
para $n = 4$, $n^2 + n^3 = 16 + 64 = 80$

Portanto, não existe nenhum inteiro positivo n tal que $n^2 + n^3 = 100$.

3. Sejam x e y tais que x é racional, $x \neq 0$ e y é irracional. Prove por contradição que xy é irracional.

Por definição, racionais são números que podem ser formados por uma fração irredutível de dois números inteiros, com o denominador diferente de zero, podemos escrever:

$k \in \mathbb{Q}$ então $k = a/b$, para $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$ (inteiros exceto zero)

Provando por redução ao absurdo, supomos que se x é racional e diferente de zero e y é irracional, então xy é racional. Portanto:

$xy \in \mathbb{Q}$ então $xy = p/q$, para $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$ (inteiros exceto zero)
$x \in \mathbb{Q}$ então $x = s/t$, para $s \in \mathbb{Z}$ e $t \in \mathbb{Z}^*$ (inteiros exceto zero)

Podemos escrever:
$xy = p/q$
$x = s/t$, como x e t são diferentes de zero e $x = s/t$, s é diferente de zero
$(s/t)y = p/q$
$y = (p/q)/(s/t)$
$y = (pt)/(qs)$, como s, q e t são inteiros diferentes de zero e p é inteiro, temos que y pode ser escrito como um número racional. Como consideramos y irracional, isso é uma contradição. Portanto, por redução ao absurdo, provamos que se x é racional e diferente de 0 e y é irracional, xy é irracional.

4. Seja $x \in R$ tal que $x \neq 0$. Prove por contraposição que se x é irracional, então 1/x é irracional.

Definindo a proposição:
$x \in \mathbb{R}^*$, x é irracional $\rightarrow$ 1/x é irracional

Definindo a contrapositiva:
$x \in \mathbb{R}^*$, 1/x é racional $\rightarrow$ x é racional

Portanto podemos escrever:
$1/x \in \mathbb{Q}$ então $1/x = p/q$ para $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$ (inteiros exceto zero)
$xp = q$, temos que q é diferente de zero e x é diferente de zero, portanto p deve ser diferente de zero

$x = q/p$, podemos escrever x como uma fração de inteiros tal que o denominador p não é nulo. Portanto x é racional. Assim, pela equivalência com a contrapositiva, provamos que a implicação original é verdadeira.

5. Aplicando o seguinte lema (você não precisa demonstrá-lo!), prove que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é irracional:

Lema: Se n $\in$ N+ não é um quadrado perfeito, então √n é irracional.

Temos que a definição de quadrado perfeito é, um número natural tal que sua raiz quadrada também é um número natural. Podemos definir:

a é um quadrado perfeito se, e somente se: $a \in \mathbb{N}, \exists\, k \in \mathbb{N}, a = k^2$

Podemos verificar se 3 é um quadrado perfeito. Supomos que a proposição, "3 é um quadrado perfeito", é verdadeira:

$3 = k^2$

$k = \sqrt{3}$

Sabemos que a raiz quadrada de 3 não é exata e portanto não existe um número natural k igual a raiz de 3. Portanto, por contradição, provamos que 3 não é um quadrado perfeito.

Com isso, podemos utilizar o lema dado. Se 3 pertence aos naturais positivos e 3 não é um quadrado perfeito, então raiz quadrada de 3 é irracional.

Podemos provar que raiz quadrada de 2 é irracional. Supomos que a raiz quadrada de 2 é racional, portanto podemos escrever:

$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ então $\sqrt{2} = p/q$, para $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$ (inteiros exceto zero)

$((\sqrt{2})^2) = (p/q)^2$

$2 = p^2/q^2$

$p^2 = 2q^2$, como p^2 resulta de um inteiro multiplicado por 2, p^2 é par.

Podemos provar que se um inteiro x^2 é par, então x é par. Provando pela equivalência com a contrapositiva:

x é ímpar $\rightarrow$ x^2 é ímpar

$x = 2s + 1$ para $s \in \mathbb{Z}$

$x^2 = (2s+1)^2$

$x^2 = 4s^2 + 4s + 1$

$x^2 = 2(2s^2 + 2s) + 1$, x^2 é um número par somado com 1. Portanto x^2 é ímpar

Assim, podemos dizer que se p^2 é par, então p é par. Podemos escrever:

$2q^2 = (2t)^2$ para $t \in \mathbb{Z}$

$2q^2 = 4t^2$

$q^2 = 2t^2$, como q^2 também resulta de um inteiro multiplicado por 2, q^2 também é par e q também é par. Porém, pela definição de número racional, temos que os dois membros da fração não podem ser ambos pares, já que se forem, ambos terão 2 como fator comum de divisão e a fração não será irredutível, isso é uma contradição. Portanto, por redução ao absurdo, provamos que raiz de 2 é irracional.

Sabendo que $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ são irracionais, podemos provar que a soma dos dois resulta em um número irracional. Provando por contradição, supomos que a soma resulta em um número racional:

$\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ então $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ = c/d, para c $\in \mathbb{Z}$ e d $\in \mathbb{Z}^*$ (inteiros exceto zero)

$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ = c/d

$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = (c/d)^2$

$2 + 2\sqrt{6} + 3 = c^2/d^2$

$(c^2/d^2 - 5)/2 = \sqrt{6}$, pelo lema fornecido, temos que 6 não pode ser escrito como um quadrado perfeito, pois não existe y natural tal que $y^2 = 6$. Portanto, como 6 está nos naturais positivos e não é um quadrado perfeito, então $\sqrt{6}$ é irracional. Como supomos que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ gera um número racional, chegamos a uma contradição. Assim, por redução ao absurdo, provamos que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ tem resultado irracional.

6. Prove por indução que para todo n ∈ ℕ+ vale que 6 | (7^n - 1).

Definindo a proposição P(n) = ∀ n ∈ ℕ+, 6 | 7^n - 1

Caso base:

provando para P(1):

6 | 7^1 - 1

6 | 6 , é verdadeiro pois 6 . 1 = 7^1 - 1

Hipótese indutiva:

supomos que P(k) = 6 | 7^k - 1 é verdadeiro para k ∈ ℕ+

Passo indutivo:

queremos provar P(k) → P(k+1)

P(k+1) = 6 | 7^(k+1) - 1

pela hipótese de indução, se 6 | 7^k - 1, então podemos escrever

∃ u ∈ ℤ tal que 6u = 7^k - 1, portanto

6u = 7^k - 1

7^k = 6u + 1

multiplicando ambos lados por 7 e subtraindo 1

7^(k+1) - 1 = 7(6u + 1) - 1

7^(k+1) - 1 = 42u + 6

7^(k+1) - 1 = 6(7u + 1).

Com isso, provamos que 7^(k+1) - 1 pode ser escrito como 6v, onde v = 7u + 1 é um inteiro. Portanto 6 | 7^(k+1) - 1 é verdadeiro.

Assim vale, pela regra de inferência da indução, a proposição:
$P(n) = \forall\ n \in \mathbb{N}+, 6 \mid 7^n - 1$

7. Prove por indução que para todo inteiro n ≥ 4, vale que n! > 2^n.
Definindo a proposição:
$P(n) = \forall\ n \in \mathbb{Z}, n >= 4, n! > 2^n$

Caso base:
vamos provar P(4):
$P(4) = 4! > 2^4$
$24 > 16$ é verdadeiro

Hipótese indutiva:
supomos que $P(k) = k! > 2^k$ é verdadeiro para todo k inteiro, maior ou igual a 4.

Passo indutivo:
queremos provar $P(k) \rightarrow P(k+1)$. Definindo:
$P(k+1) = (k+1)! > 2^{(k+1)}$
podemos escrever
$(k+1)! = (k+1)(k+1-1)! = (k+1)k!$
Pela hipótese de indução
$k!(k+1) > 2^k$
$k!(k+1) > 2^k . 2$, pois $k >= 4$
$k!(k+1) > 2^{(k+1)}$
$(k+1)! > 2^{(k+1)}$

Portanto, provamos que vale, pela regra de inferência da indução, a proposição: $P(n) = \forall\ n \in \mathbb{Z}, n >= 4, n! > 2^n$

8. Prove por indução em n que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n ≥ 3 lados é igual a (n − 2) · 180°.
Definindo a proposição:
Seja P(n) a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados para $n >= 3$, $P(n) = (n-2).180°$

Caso base:
Vamos provar P(3)
Um polígono de 3 lados é um triângulo. Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180°. Portanto:
$P(3) = (3-2).180° = 180°$, CQD(Base)

Hipótese indutiva:

Supomos que $P(k) = (k-2).180°$ é válido para representar a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de k lados, para $k >= 3$.

Passo indutivo:

Queremos provar $P(k) \rightarrow P(k+1)$. Definimos:

$P(k+1) = ((k+1)-2).180° = (k-1).180°$

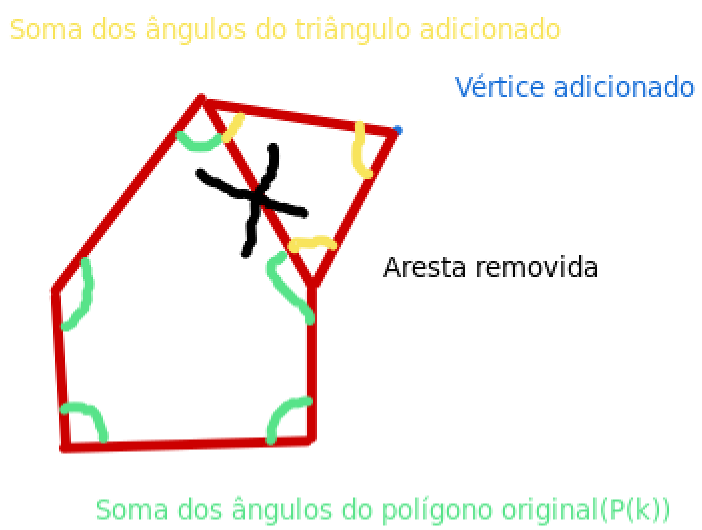
Temos que, para adicionar um lado a um polígono convexo, adicionamos um vértice e conectamos duas arestas desse vértice nos vértices do polígono original. Com isso, ganhamos dois lados e perdemos um lado que passa a cortar o polígono pelo meio, ganhando um lado ao fim.

Pela hipótese de indução, a soma dos ângulos internos desse polígono vale P(k). Ao adicionarmos um novo lado, preservamos a soma P(k) do polígono original e acrescentamos a soma dos ângulos internos de um triângulo, que representa a porção adicionada. Como sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180°, podemos escrever:

$P(k+1) = (k-1).180° = P(k) + 180° = (k-2).180° + 180°$, colocando 180° em evidência

$P(k+1) = 180°((k-2+1) = 180°(k-1)$.

Exemplo:



Portanto, provamos a tese $P(k+1) = 180°(k-1)$ e pela regra de inferência da indução, provamos que $P(n) = (n-2).180°$ vale para representar a soma dos ângulos internos de um polígono convexo, para $n >= 3$.

9. Prove por indução que para todo $n \in N+$, vale que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

Definindo a proposição:

$P(n) = \forall\ n \in \mathbb{N}+,\ 1+3+5+...+(2n-1) = n^2$

Caso base:

$P(1) = (2.1 - 1) = 1 = 1^2$, CQD(Base)

Hipótese indutiva:

Supomos que $P(k) = \forall\ k \in \mathbb{N}+,\ 1+3+5+...+(2k-1) = k^2$ é válido

Passo indutivo:

Queremos provar $P(k) \rightarrow P(k+2)$

Definindo: $P(k+2) = 1+3+5+...+(2(k+2)-1) = (k+2)^2$

$1+3+5+...+(2k+3) = 1+3+5+...+2k-1+4 = k^2 + 4$ (pela hipótese de indução)

$k^2 + 4 = ()$

10. Prove por indução que para todo $n \in N$, vale que $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{(n+1)} - 1$.

11. Sejam $A1, A2, \ldots, An$ e B conjuntos quaisquer.

(a) Prove que $(A1 \setminus B) \cup (A2 \setminus B) = (A1 \cup A2) \setminus B$.

(b) Prove por indução que para todo inteiro $n \geq 2$ vale que
$(A1 \setminus B) \cup (A2 \setminus B) \cup \cdots \cup (An \setminus B) = (A1 \cup A2 \cup \cdots \cup An) \setminus B$.

12. Sejam $2n$ pontos no espaço, para algum $n \geq 2$. Considere que são desenhadas $n^2 + 1$ arestas distintas, de modo que cada aresta conecta dois pontos distintos. Prove por indução em n que há pelo menos três pontos que estão ligados dois a dois por arestas (isto é, mostre que existe um triângulo*). *Note que o triângulo pode ser degenerado no caso em que seus pontos são colineares.

Podemos aplicar o Princípio da Casa dos Pombos para provar a proposição. Temos que se temos um grafo não orientado, com $2n$ vértices e $n^2 + 1$ arestas, para $n >= 2$, com cada aresta conectando dois pontos distintos, cada vértice desse grafo conecta no mínimo 2 arestas e pelo menos um de seus vértices conecta 3 arestas, formando um triângulo. Portanto, pelo Princípio da Casa dos Pombos, a proposição vale se, para todo $n >= 2$, vale que $2n < n^2 + 1$.

Definindo a proposição:

$P(n) = \forall\ n \in \mathbb{N}, 2n < n^2 + 1$, para $n >= 2$

Caso base:

$P(2) = 2.2 < 2^2 + 1$

$4 < 5$, CQD(Base)

Hipótese indutiva:

Supomos: $P(k) = \forall\ k \in \mathbb{N}, 2k < k^2 + 1$, para $k >= 2$ é verdadeiro

Passo indutivo:

Queremos provar $P(k) \rightarrow P(k+1)$

Definindo: $P(k+1) = 2(k+1) < (k+1)^2 + 1$

$2(k+1) < (k+1)^2 + 1$

$2k + 2 < k^2 + 2k + 2$

$2k < k^2 + 2k$

Pela hipótese indutiva, $2k < k^2 + 1$, como $k >= 2$, então:

$k^2 + 2k > k^2 + 1$, portanto

$2k < k^2 + 2k$

$2k + 2 < k^2 + 2k + 2$

$2(k+1) < (k+1)^2 + 1$, CQD(Passo)

Portanto, pela regra de inferência da indução, a proposição $P(n) = 2n < n^2 + 1$ é válida para todo $n >= 2$. Assim, pelo Princípio da Casa dos Pombos e seguindo o modelo de grafo proposto, como o número de vértices será sempre menor que o número de arestas, sempre existirá pelo menos um vértice que conecta 3 arestas, formando um triângulo.