MC358 - 1s2024 - Lista de Exercícios 1

1. Sejam p e q duas proposições quaisquer. Determine se as proposições abaixo são tautologias:

(a) $(\neg p \land (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg q$
(b) $(\neg q \land (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$

Construindo a tabela verdade para ambos os casos
a)

p	q	¬p	¬q	p -> q	(¬p ∧ (p → q))	(¬p ∧ (p → q)) → ¬q
F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	F
V	F	F	V	F	F	V
V	V	F	F	V	F	V

b)

p	q	¬p	¬q	p -> q	(¬q ∧ (p → q))	(¬q ∧ (p → q)) → ¬p
F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V
V	V	F	F	V	F	V

Como tautologias são proposições que possuem valor verdade sempre verdadeiro, a proposição a) não é uma tautologia, pois possui um valor falso em sua tabela verdade. Já a proposição b) é sim uma tautologia, pois só possui valores verdadeiros em sua tabela.

2. Sejam p e q duas proposições quaisquer e seja ↓ o operador lógico binário definido por:

$p \downarrow q \Leftrightarrow \neg p \lor \neg q$.

Atentando-se às parentizações, mostre que a proposição $a \rightarrow b$ pode ser reescrita utilizando-se apenas o operador ↓. Apresente os passos intermediários da sua dedução.

I) Temos que pelas Leis do Operador Implicação que $a \rightarrow b \Leftrightarrow \neg a \vee b$
II)Podemos construir a negação de a: temos que $p \downarrow p \Leftrightarrow \neg p \vee \neg p \Leftrightarrow \neg p$ (pela Lei da Idempotência)
portanto, $a \downarrow a \Leftrightarrow \neg a \vee \neg a \Leftrightarrow \neg a$
III)Temos: $a \rightarrow b \Leftrightarrow \neg a \vee b \Leftrightarrow (a \downarrow a) \vee b$
IV) Por fim, podemos chegar na equivalência final:
$(a \downarrow a) \vee b \Leftrightarrow ((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow ((a \downarrow a) \downarrow b))$

3. Seja p uma proposição que depende de 5 proposições atômicas x1, . . . , x5. Todas as linhas da tabela verdade de p determinam valor verdadeiro (V) para p, exceto as seguintes linhas:

x1	x2	x3	x4	x5	p
V	V	V	F	F	F
V	F	V	V	V	F
F	V	V	F	F	F

Encontre uma expressão para p usando x1, ..., x5 e quaisquer conectivos lógicos. Mostre como a expressão foi encontrada.

Utilizando a Forma Normal Conjuntiva(FNC) podemos obter uma expressão para p dependendo das variáveis x1, … , x5. Para cada linha obtemos uma combinação de conjunção de disjunções, considerando o inverso do valor verdade passado na tabela, já que estamos analisando p com valores falsos:

$p = (\neg x1 \vee \neg x2 \vee \neg x3 \vee x4 \vee x5) \wedge (\neg x1 \vee x2 \vee \neg x3 \vee \neg x4 \vee \neg x5) \wedge (x1 \vee \neg x2 \vee \neg x3 \vee x4 \vee x5)$

4. Traduza as seguintes proposições para língua portuguesa, onde C(x) denota "x é um coelho", P(x) denota "x pula" e o domínio de x é o conjunto de todos os animais.
(a) $\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$
Todos os coelhos pulam
(b) $\forall x(C(x) \wedge P(x))$
Todos os animais são coelhos e pulam
(c) $\exists x(C(x) \rightarrow P(x))$
Existe pelo menos um animal, que se for um coelho, então ele pula
(d) $\exists x(C(x) \wedge P(x))$
Existe pelo menos um animal que é um coelho e ele pula

5. Flamingo e Vardasco são dois clubes tradicionalmente rivais de uma prestigiada liga esportiva e seus fãs são chamados de flaminguistas e vardascaínos, respectivamente. Sejam:

- **F o conjunto dos flaminguistas;**
- **V o conjunto dos vardascaínos;**
- **$A(x, y)$ o predicado "x abraça y";**
- **$P(x, y)$ o predicado "x é pai de y".**

Atentando-se às parentizações, transcreva para notação lógica a seguinte afirmação:
Há algum flaminguista que abraça todo vardascaíno cujo pai é flaminguista.

$\exists\ x \in F\ (\forall\ y \in V(\exists\ z \in F(\ z \neq x \land P(z,y) \to A(x,y))))$

6. Reescreva cada uma das proposições abaixo de modo que nenhuma negação ocorra antes de qualquer quantificador ou expressão envolvendo conectivos lógicos.
(a) $\neg\forall x \forall y\ P(x, y)$
(b) $\neg\forall y \exists x\ P(x, y)$
(c) $\neg\forall y \forall x\ (P(x, y) \lor Q(x, y))$
(d) $\neg(\exists x \exists y\ \neg P(x, y) \land \forall x \forall y\ Q(x, y))$
(e) $\neg\forall x\ (\exists y \forall z\ P(x, y, z) \land \exists z \forall y\ P(x, y, z))$

6 → a) $\exists x\ \exists y\ (\neg P(x,y))$

b) $\exists y\ \forall x\ (\neg P(x,y))$

c) $\exists y \, \exists x \, (\neg (P(x,y) \lor Q(x,y)))$

aplicando a Lei de De Morgan

$$\boxed{\exists y \, \exists x \, (\neg P(x,y) \land \neg Q(x,y))}$$

d) aplicando a lei de De morgan

$$\neg (\exists x \, \exists y \, \neg P(x,y)) \lor \neg (\forall x \, \forall y \, Q(x,y))$$

$$\boxed{(\forall x \, \forall y \, P(x,y)) \lor (\exists x \, \exists y \, \neg Q(x,y))}$$

e)

$$\exists x \, \neg (\exists y \, \forall z \, P(x,y,z) \land \exists z \, \forall y \, P(x,y,z))$$

aplicando a lei de De morgan

$$\exists x \, \neg (\exists y \, \forall z \, P(x,y,z)) \lor \neg (\exists z \, \forall y \, P(x,y,z))$$

$$\boxed{\exists x (\forall y \, \exists z \, \neg P(x,y,z)) \lor (\forall z \, \exists y \, \neg P(x,y,z))}$$

7. Denotamos o número de elementos de um conjunto finito A por |A|. Prove que
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Para A, B e C conjuntos finitos e disjuntos, podemos provar a afirmação pelo Princípio da inclusão - exclusão. Temos que, a soma da cardinalidade dos conjuntos A, B e C, resulta em todos os elementos contidos na união e intersecção desses conjuntos. Podemos então subtrair desse conjunto, a intersecção do conjunto A com o conjunto B, assim como a intersecção do conjunto A com o conjunto C e a intersecção do conjunto B com o conjunto C. Com isso obtemos quase todos os elementos da união entre A, B e C, porém, excluímos a intersecção comum aos 3 conjuntos. Por isso, adicionamos essa região ao fim.

$|A \cup B \cup C| =$
$|(A \cup B) \cup C| =$
$|A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| =$
$|A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| =$
$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |(A \cap C) \cap (B \cap C)| =$
$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

8. Denotamos a diferença simétrica entre dois conjuntos A e B por $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
Prove que:
(a) $A \setminus B = A \cap B$
(b) $A \triangle B = (A \cup B) \cap (A \cup B)$
(c) $A \triangle B = (A \cap B) \cup (A \cap B)$
(d) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$
(e) $(A \triangle C = B \triangle C) \rightarrow (A = B)$

9. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma família de conjuntos se seus elementos são todos conjuntos. Neste caso, definimos $\bigcup \mathcal{F} = \{x \mid \exists A \ (A \in \mathcal{F} \ \wedge \ x \in A)\}$. Seja o conjunto $\bigcup ! \mathcal{F}$ definido por $\bigcup ! \mathcal{F} = \{x \mid \exists ! A (A \in \mathcal{F} \ \wedge \ x \in A)\}$.

(a) Prove que para qualquer família de conjuntos $\mathcal{F}$, $\bigcup ! \mathcal{F} \subseteq \bigcup \mathcal{F}$.

(b) Uma família de conjuntos $\mathcal{F}$ é *disjunta dois a dois* se cada par de elementos distintos de $\mathcal{F}$ são disjuntos, isto é, $\forall A \in \mathcal{F} \ \forall B \in \mathcal{F} \ (A \neq B \rightarrow A \cap B = \emptyset)$. Prove que para qualquer família de conjuntos $\mathcal{F}$, $\bigcup ! \mathcal{F} = \bigcup \mathcal{F}$ se e somente se $\mathcal{F}$ é disjunta dois a dois.

10. Sejam $x, y \in \mathbb{Z}$. Prove que $(x - 3)y^2$ é par se, e somente se, x é ímpar ou y é par.

Temos que, pela Lei do Operador de Equivalência, podemos escrever:
$p \Leftrightarrow q$ equivale a $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Portanto, iremos provar a ida e a volta da implicação:
se x é impar ou y é par → $(x-3)y^2$ é par
se $(x-3)y^2$ é par → x é ímpar ou y é par

Ida: utilizando o método de prova por casos, temos:
Caso 1 - se x é ímpar, podemos definir: $\exists\ k \in \mathbb{Z}$, $x = 2k + 1$
Substituindo na expressão: $(2k+1-3)y^2 = 2ky^2 - 2y^2 = 2(ky^2 - y^2)$
Como k e y são inteiros, temos que a expressão equivale a um inteiro multiplicado por 2, o que sempre resultará em um valor par.

Caso 2 - se y é par, podemos definir: $\exists\ k' \in \mathbb{Z}$, $x = 2k'$
Substituindo na expressão: $(x-3)(2k')^2 = (x-3)4k'^2 = 4xk'^2 - 12k'^2 = 2(2xk'^2 - 6k'^2)$
Novamente, como k e x são inteiros, temos que a expressão equivale a um inteiro multiplicado por 2, o que sempre resultará em um valor par.

Volta: utilizando o método de prova pela contrapositiva, temos que a negação da conclusão implica na negação da premissa e essa implicação é logicamente equivalente à implicação original. Portanto:
$(x-3)y^2$ é par → x é ímpar ou y é par ⇔
x é par e y é ímpar (pela Lei de De Morgan) →$(x-3)y^2$ é ímpar

Novamente, se x é par e y é ímpar, podemos definir:
$\exists\ k \in \mathbb{Z}$, $x = 2k$
$\exists\ s \in \mathbb{Z}$, $y = 2s + 1$

Substituindo na expressão: $(2k - 3)(2s + 1)^2 = (2k - 3)(4s^2 + 4s + 1) = 8ks^2 - 12s^2 + 8ks - 12s + 2k - 3 = 2(4ks^2 - 6s^2 + 4ks - 6s + k) - 3$
Como k e s são inteiros, temos um número inteiro multiplicado por 2, que necessariamente gera um valor par, que está tendo 3 subtraído, o que resultará em um valor ímpar. Portanto provamos pela equivalência com a sua contrapositiva, que a implicação original é verdadeira.

11. Prove por contradição que $\sqrt[3]{2}$ é irracional.

Provando por redução ao absurdo, supomos que $\sqrt[3]{2}$ é racional. Por definição, números racionais são números que podem ser escritos como uma fração irredutível de dois números inteiros, com o denominador não nulo. Portanto, podemos definir:

$k \in \mathbb{Q}$ então $k = a/b$, para $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$ (inteiros exceto zero)

Podemos escrever então: $\sqrt[3]{2} = a/b$, elevando os dois lados ao cubo
$(\sqrt[3]{2})^3 = (a/b)^3 \Rightarrow 2 = a^3/b^3 \Rightarrow 2b^3 = a^3$ (1)

se tomarmos um valor inteiro x, podemos provar que se x^3 é par, x também é par. Provando pelo método da contrapositiva, definimos:
x^3 é par $\rightarrow$ x é par
x é ímpar $\rightarrow x^3$ é ímpar (contrapositiva)

$\exists\ k \in \mathbb{Z}$, $x = 2k + 1 \Rightarrow x^3 = (2k+1)^3 \Rightarrow x^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1$
$x^3 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1$. Portanto, como x^3 resulta de um inteiro multiplicado por 2 somando 1, x^3 é ímpar. Assim, pelo método da contrapositiva, provamos a implicação original.

Com isso, pela expressão (1) temos que a^3 é par, já que é igual a um inteiro b^3 multiplicado por 2, assim, a também deve ser par. Porém, se a é par, podemos escrever: $\exists\ k \in \mathbb{Z}$, $a = 2k$,
substituindo: $2b^3 = (2k)^3 \Rightarrow 2b^3 = 8k^3 \Rightarrow b^3 = 4k^3 \Rightarrow b^3 = 2(2k^3)$. Portanto, b^3 também é par, pois resulta de um inteiro multiplicado por 2, assim, b também é par. Porém, pela definição de números racionais, a e b não podem possuir fatores em comum. Se a é par e b é par, a fração a/b não é irredutível, pois ambos os termos tem obrigatoriamente o número 2 como fator comum, isso é uma contradição. Portanto, por redução ao absurdo, provamos que $\sqrt[3]{2}$ é irracional.

12. Seja $x \in N \geq 1$. Prove que o resto da divisão de x^3 por 4 é diferente de 2. Dica: pense acerca da paridade de x.

Utilizando o método de prova por casos, analisamos os casos x par e x ímpar:

Caso 1 - x é par: podemos definir $\exists\ k \in \mathbb{N}$, $x = 2k$
Temos então: $x^3/4 = (2k)^3/4 = 8k^3/4 = 2(4k^3)/2 \,.\, 2 = 2(2k^3)/2$
Chegamos a um numerador par dividido por 2, que sempre resultará em resto zero na divisão, portanto, o resto da divisão não pode ser igual a dois.

Caso 2 - x é ímpar: podemos definir $\exists\ k' \in \mathbb{N}$, $x = 2k' + 1$
temos então: $x'^3/4 = (2k' + 1)^3/4 = (8k'^3 + 12k'^2 + 6k' + 1)/4$
$(2(4k'^3 + 6k'^2 + 3k') + 1)/2 \,.\, 2 = (2(2k'^3 + 3k'^2 + 3k'/2) + 1)/2$
Novamente, temos um número par no numerador dividido por 2, o resto da divisão será sempre zero. Portanto, utilizando prova para os casos x par e x ímpar, provamos que o resto da divisão de x^3 por 4, para x natural maior ou igual a 1, sempre será diferente de 2.