Laborator 3

1 Obiective

Obiectivul acestui laborator este implementarea unor clase C++ specifice pentru operațiile cu matrici.

2 Matricea

O matrice este o colecție de numere aranjate în rânduri și coloane. În cotextul graficii computerizate folosim conceptul de matrice pentru a reprezenta transformările spațiale. Numărul de rânduri și coloane este egal în acest caz, indicând o matrice pătratică. În acest laborator folosim matrici 3x3 și 4x4.

3 Matricea identitate

Matricea identitate este matricea care are 1 pe diagonală și 0 în celelalte poziții. De exemplu, matricea identitate 3x3 este:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4 Operații

4.1 Înmulțirea cu un scalar

Prin multiplicarea matricei **M** cu un scalar **k** se înmulțește fiecare element al matricei cu valoarea scalară.

$$\mathrm{k}\mathbf{M} = k \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} km_{11} & km_{12} & km_{13} \\ km_{21} & km_{22} & km_{23} \\ km_{31} & km_{32} & km_{33} \end{bmatrix}$$

4.2 Adunarea

Adunarea matricelor se face element cu element, ca în acest exemplu:

$$\mathbf{M} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} + n_{11} & m_{12} + n_{12} & m_{13} + n_{13} \\ m_{21} + n_{21} & m_{22} + n_{22} & m_{23} + n_{23} \\ m_{31} + n_{31} & m_{32} + n_{32} & m_{33} + n_{33} \end{bmatrix}$$

4.3 Înmulțirea cu o matrice

Pentru înmulțirea a două matrici, numărul de coloane din prima matrice trebuie să fie același cu numărul de rânduri din cea de-a doua matrice.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1c} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1c} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{i1} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{ic} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{r1} & \cdots & p_{rj} & \cdots & p_{rc} \end{bmatrix}$$

Elementul p_{ij} este equal cu:

$$p_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$$

Înmulțirea a două matrici nu este comutativă ($\mathbf{M_1 M_2} \neq \mathbf{M_2 M_1}$), dar este asociativă și distributivă:

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$$

4.4 Înmulțirea cu un vector coloană

Această operație este un caz special al operației de înmulțire a două matrici.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{j1} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} \\ \vdots \\ p_{i1} \\ \vdots \\ p_{r1} \end{bmatrix}$$

Elementul p_{i1} este egal cu:

$$p_{i1} = a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \cdots + a_{im}b_{m1}$$

4.5 Transpusa

Transpusa unei matrici (notată $\mathbf{M}^\mathrm{T}$) este matricea în care se schimbă coloanele și rândurile. De exemplu, pentru o matrice de 3x3:

$$\begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Transpusa produsului dintre două matrici este $(\mathbf{AB})^\mathrm{T} = \mathbf{B}^\mathrm{T}\mathbf{A}^\mathrm{T}$.

4.6 Determinantul

Pentru o matrice 2x2 determinantul este:

$$|\mathbf{M}| = \left|\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\right| = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}$$

Pentru a calcula determinantul, trebuie să găsim cofactorii elementelor din matrice. Cofactorul fiecărui element al matricei pătratice este determinantul unei matrici (obținută prin înlăturarea din matricea originală a rândului și coloanei în care se află elementul) înmulțit cu minus unu în unele cazuri. Semnul cofactorului poate fi determinat după următorul model:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Pentru o matrice 4x4:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}$$

Cofactorii pentru primul rând sunt:

$$m_{11}^{c} = \left|\begin{bmatrix} m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}\right| \qquad m_{12}^{c} = -\left|\begin{bmatrix} m_{21} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}\right|$$

$$m_{13}^{c} = \left|\begin{bmatrix} m_{21} & m_{22} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{44} \end{bmatrix}\right| \qquad m_{14}^{c} = -\left|\begin{bmatrix} m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} \end{bmatrix}\right|$$

Determinantul este egal cu suma produselor dintre elemente (de pe orice rând sau coloană) și cofactorii lor.

Pentru o matrice 3x3 determinantul este:

$$|\mathbf{M}| = \left|\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}\right| = m_{11}\left|\begin{bmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}\right| - m_{12}\left|\begin{bmatrix} m_{21} & m_{23} \\ m_{31} & m_{33} \end{bmatrix}\right| + m_{13}\left|\begin{bmatrix} m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{bmatrix}\right|$$

Similar, pentru o matrice 4x4, determinantul este:

$$|\mathbf{M}| = \left|\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}\right| = m_{11}\left|\begin{bmatrix} m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}\right| - m_{12}\left|\begin{bmatrix} m_{21} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}\right| + m_{13}\left|\begin{bmatrix} m_{21} & m_{22} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{44} \end{bmatrix}\right| - m_{14}\left|\begin{bmatrix} m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} \end{bmatrix}\right|$$

4.7 Inversa unei matrici

Matricea inversă (notată $\mathbf{A}^{-1}$) este maricea pentru care $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Inversa produsului dintre două matrici este $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

Pentru o matrice 4x4 inversa este:

$$\mathrm{M}^{-\mathbf{1}} = \frac{1}{|\mathbf{M}|}\begin{bmatrix} m_{11}^{c} & m_{21}^{c} & m_{31}^{c} & m_{41}^{c} \\ m_{12}^{c} & m_{22}^{c} & m_{32}^{c} & m_{42}^{c} \\ m_{13}^{c} & m_{23}^{c} & m_{33}^{c} & m_{43}^{c} \\ m_{14}^{c} & m_{24}^{c} & m_{34}^{c} & m_{44}^{c} \end{bmatrix}$$

5 Temă

Descărcați codul sursă de pe pagina web a laboratorului. Trebuie să implementați metodele din interiorul fișierelor sursă (mat3.cpp și mat4.cpp). Fișierele antet conțin definiția claselor și metodele care ar trebui implementate.