Calcul Numeric

Laborator-Seminar III

Universitatea Tehnică Cluj-Napoca

Polinoamele în Matlab

1. *polyval*: evaluarea unui polinom pentru anumite puncte
2. *roots*: aproximează rădăcinile polinomului
3. *conv*: produsul a două polinoame
4. *deconv*: împărțirea a două polinoame
5. *polyder*: determină coeficienții lui $p'(x)$
6. *polyint*: determină coeficienții lui $\int_0^x p(t)\,dt$

Dacă $\alpha \in \mathbb{C}$ este rădăcină a lui $p \in \mathbb{P}_n$ (mulțimea polinoamelor de grad $\leq n$) atunci $\overline{\alpha}$ este rădăcină.
Rezultate ale lui Abel sau Galois !!!

Polinoame (*rezultate* în legătură cu rădăcinile)

Regula semnelor lui Descartes: Pentru un polinom $p \in \mathbb{P}_n$ notăm cu ν-numărul schimbării semnului coeficienților $\{a_j\}$, k-numărul rădăcinilor pozitive (fiecare numărată cu multiplicitatea corespunzătoare). Avem: $k \leq \nu$ și $\nu - k$ este impar.

Cauchy: Toate rădăcinile polinomului sunt incluse în discul

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \big| |z| \leq 1 + \eta\}$$

unde $\eta = \max\limits_{0 \leq k \leq n-1} |\frac{a_k}{a_n}|$

Dacă $h_n \in \mathbb{P}_n$ și $g_m \in \mathbb{P}_m$ $(n \geq m)$ atunci există și sunt unice $\delta \in \mathbb{P}_{n-m}$ și $\rho \in \mathbb{P}_{m-1}$ a.î.

$$h_n(x) = g_m(x)\delta(x) + \rho(x).$$

Algoritmul Horner

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

Avem: n adunări și $2n - 1$ înmulțiri.

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \ldots + x(a_{n-1} + a_n x)) \ldots)$$

Avem: n adunări și n înmulțiri.
Se poate evalua p în z folosind *algoritmul divizării sintetice*

$$\begin{cases} b_n = a_n, \\ b_k = a_k + b_{k+1} z, \quad k = n-1, n-2, \ldots, 0 \end{cases}$$

Toți coeficienții b_k depind de z și $b_0 = p(z)$.

Polinomul asociat lui p_n

$$q_{n-1}(x;z) = b_1 + b_2 x + \ldots + b_n x^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} b_k x^{k-1}$$

depinde de z prin coeficienții b_k. Avem

$$p_n(x) = (x-z)q_{n-1}(x;z) + b_0$$

Dacă z este rădăcină a lui p_n atunci $b_0 = p_n(z) = 0$ și

$$p_n(x) = (x-z)q_{n-1}(x;z)$$

Așadar $q_{n-1}(x;z) = 0$ *furnizează* restul de $n-1$ rădăcini ale lui p_n

Deflation procedure

Pentru $m = n, n-1, \ldots, 1$

1. Se determină rădăcina z a lui p_m (folosind o metodă pentru ecuații neliniare!)
2. Se evaluează $q_{m-1}(x; z)$ folosind algoritmul divizării sintetice (*synthetic division algorithm*)
3. Se consideră $p_{m-1} = q_{m-1}$

Ecuații neliniare

Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ *a.î.*

$$f(\alpha) = 0, \tag{1}$$

unde $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este o funcție dată*
Existența soluției:
Dacă f este continuă și $f(a)f(b) \leq 0$ atunci $\exists\, \xi \in [a, b] : f(\xi) = 0$

Uneori este dificil să se determine $[a, b]$. De exemplu $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+M|x-1.05|}$ admite două soluții $x_1 = 1.05 - \frac{1}{M}$ și $x_2 = 1.05 + \frac{1}{M}$. Distanța dintre ele este $\frac{1}{2M}$, care devine foarte mică când M crește.

Ecuații neliniare

În general, metodele numerice care aproximează soluția unei ecuații neliniare sunt *iterative*, *i.e.* se generează un șir $x^{(k)}$ a.î.

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = \alpha \tag{2}$$

O metodă are *ordinul de convergență* $p \geq 1$ sau $x^{(k)}$ *converge la* α *cu ordinul* $p \geq 1$ dacă

$$\exists\, C > 0 : \frac{|x^{(k+1)} - \alpha|}{|x^{(k)} - \alpha|^p} \leq C, \quad \forall\, k \geq k_0 \tag{3}$$

unde $k_0 \geq 0$ este un număr natural fixat.

Ecuații neliniare

Eroarea absolută la pasul k:

$$e^{(k)} := x^{(k)} - \alpha$$

Spre deosebire de metodele iterative pentru sisteme liniare, metodele pentru ecuații neliniare depind de alegerea valorii inițiale $x^{(0)}$. În cazul în care șirul $x^{(k)}$ converge către α pentru orice $x^{(0)} \in (a, b)$ spunem că avem *convergență globală*. Dacă șirul converge doar când $x^{(0)}$ se găsește într-o anumită vecinătate a lui α atunci spunem că avem *convergență locală*

Metoda Bisecției

Strategia constă în înjumătățirea intervalului și alegerea subintervalului unde f își schimbă semnul.
Se începe cu intervalul $I_0 = (a^{(0)}, b^{(0)}) = (a, b)$ și se generează intervalele $I_k = (a^{(k)}, b^{(k)})$, $k \geq 1$ cu proprietatea $I_{k+1} \subset I_k$ și $f(a^{(k)})f(b^{(k)}) < 0$. Mai exact,

$$a^{(0)} := a,\ b^{(0)} := b,\ x^{(0)} := \frac{a^{(0)} + b^{(0)}}{2}$$

$$a^{(k+1)} = a^{(k)}, b^{(k+1)} = x^{(k)} \text{ dacă } f(a^{(k)})f(x^{(k)}) < 0$$
$$a^{(k+1)} = x^{(k)}, b^{(k+1)} = b^{(k)} \text{ dacă } f(x^{(k)})f(b^{(k)}) < 0$$

$$x^{(k+1)} = \frac{a^{(k+1)} + b^{(k+1)}}{2}$$

Metoda Bisecției

Avem

$$|e^{(k)}| = |x^{(k)} - \alpha| \leq |I_k| = \left(\frac{1}{2}\right)^k (b - a),$$

unde $|I_k|$ reprezintă lungimea intervalului I_k. Deducem că

$$\lim_{k \to \infty} |e^{(k)}| = 0$$

Metoda bisecției este global convergentă. Iterațiile se vor stopa la un anumit pas $k_{\min}$ pentru care avem

$$|e^{(k_{\min})}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k_{\min}} (b - a) \leq \varepsilon$$

Avem

$$k_{\min} \geq log_2(b - a) - log_2(\varepsilon) = \frac{ln((b - a)/\varepsilon)}{ln(2)} \approx \frac{ln((b - a)/\varepsilon)}{0.6931}$$

Metoda Bisecției

Pentru a *câștiga* o zecimală în eroarea absolută, *i.e.*

$$|x^{(k)} - \alpha| = \frac{|x^{(j)} - \alpha|}{10}$$

avem $k - j = log_2(10) \approx 3.32$ iterații. Deducem că metoda bisecției converge *încet*. De asemenea, nu garantează o reducere *monotonă* a erorii absolute, *i.e.*

$$|e^{(k+1)}| \leq \mathcal{M}_k |e^{(k)}|, \quad \forall\, k \geq 0,$$

unde $\mathcal{M}_k < 1$. Poate fi folosită la determinarea valorii de start pentru alte metode.

Metoda Bisecției

Exemplul 1:

$$\frac{x^2}{2} - \sin(x) = 0$$

$$\alpha = 1.93375,\ a = 1.5,\ b = 2$$

Exemplul 2:

$$\frac{x}{8}(63x^4 - 70x^2 + 15) = 0$$

$$\alpha = 0.906165,\ a = 0.6,\ b = 1$$

Metoda Newton

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k \geq 0$$

Pentru metoda Newton avem convergență locală (converge doar dacă $x^{(0)}$ este *suficient de apropiat* de α, *i.e.* $x^{(0)} \in I(\alpha)$, unde $I(\alpha)$ este o vecinătate a lui α).
Dacă f este o funcție de clasă C^2 și $f'(\alpha) \neq 0$ atunci avem următorul rezultat de convergență

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{(x^{(k)} - \alpha)^2} = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$$

Spunem că metoda Newton converge *pătratic* . Ordinul de convergență este $p = 2$.

Condiții de stop pentru Metoda Newton

Iterațiile se pot termina pentru un k_{min} a.î.

$$|e^{(k_{\text{min}})}| = |\underbrace{\alpha}_{val.nec.} - x^{(k_{\text{min}})}| \le \varepsilon$$

Estimator pentru eroare

$$|x^{(k_{\text{min}})} - x^{(k_{\text{min}}-1)}| \le \varepsilon$$

Acest criteriu este satisfăcător când α este rădăcină simplă.
Reziduul la pasul k

$$r^{(k)} = f(x^{(k)})$$

$$|r^{(k_{\text{min}})}| \le \varepsilon$$

Acest criteriu este satisfăcător când $|f'(x)| \approx 1$ într-o vecinătate $I(\alpha)$ a lui α.

Metoda Coardei, Secantei, *Regula Falsi*

q_k-aprox. a pantei tangentei în punctul $(x_k, f(x_k))$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{q_k}, \quad k \geq 0$$

Metoda Coardei

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}, \quad k \geq 0$$

Ordinul de convergență este $p = 1$ (liniar).
Metoda Secantei

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{\frac{f(x^{(k)})-f(x^{(k-1)})}{x^{(k)}-x^{(k-1)}}}, \quad k \geq 0$$

Avem nevoie de două valori inițiale $x^{(-1)}$, $x^{(0)}$. Ordinul de convergență este $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (superliniar).

Metoda Coardei, Secantei, *Regula Falsi*

Regula Falsi

Variantă a metodei Secantei. Punctul $(x^{(k-1)}, f(x^{(k-1)}))$ se alege $(x^{(k')}, f(x^{(k')}))$, unde k' fiind indicele maxim mai mic decât k a.î. $f(x^{(k)})f(x^{(k')}) < 0$, iar $x^{(-1)}$ și $x^{(0)}$ se aleg $f(x^{(-1)})f(x^{(0)}) < 0$.

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{\frac{f(x^k)-f(x^{(k')})}{x^{(k)}-x^{(k')}}}, \quad k \geq 0$$

Are aceeași complexitate ca metoda secantei. Ordinul de convergență este $p = 1$ (liniar). Poate fi văzută ca o metodă global convergentă.

Exemplul 3:

$$\cos^2(2x) - x^2 = 0$$

$$\alpha = 0.5149,\ a = 0,\ b = 1.5$$

$$x^{(0)} = 0.75$$

$$x^{(-1)} = 0,\ x^{(0)} = 0.75$$

Metoda aproximațiilor succesive

Ecuația (1) poate fi rescrisă sub forma

$$\alpha = \phi(\alpha),$$

i.e. α este punct fix pentru ϕ.

Metoda aproximațiilor succesive (metoda Picard)

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}), \quad k \geq 0$$

1. Dacă ϕ este continuă pe $[a, b]$ și $\phi(x) \in [a, b], \forall x \in [a, b]$ atunci există un unic punct fix $\alpha \in [a, b]$.
2. Mai mult, dacă ϕ este funcție Lipschitz, *i.e* $\exists L > 0$ a.î.

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x - y|, \forall, x, y \in [a, b]$$

atunci există un unic punct fix α și $x^{(k)} \to \alpha, \forall x^{(0)}$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x^{(k+1)} - \alpha|}{|x^{(k)} - \alpha|} = \phi'(\alpha)$$

În practică este dificil să determinăm intervalul $[a, b]$ pentru care sunt valabile ipotezele rezultatului anterior. Averm următorul rezultat de convergență locală.

(Ostrowski) *Fie* α *un punct fix pentru* ϕ*, unde* ϕ *este de clasă* C^1 *într-o vecinătate* $I(\alpha)$ *a lui* α*. Dacă* $|\phi'(\alpha)| < 1$ *(contracție) atunci* $\exists\, \delta > 0$ *a.î.* $(x^{(k)})$ *converge către* α *pentru orice* $x^{(0)} \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$

Dacă $|\phi'(\alpha)| > 1$ deducem că $|x^{(k+1)} - \alpha| > |x^{(k)} - \alpha|$ și convergența nu este posibilă. În cazul când $\phi'(\alpha) = 1$ nu se poate spune nimic despre convergența metodei (poate converge sau nu)

Dacă $\phi \in C^{p+1}(I(\alpha))$ *într-o vecinătate* $I(\alpha)$ *a lui* α *și dacă* $\phi'(\alpha) = \phi''(\alpha) = \ldots = \phi^{(p)}(\alpha) = 0$, $\phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$ *atunci*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{(x^{(k)} - \alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}, \quad p \geq 0$$

Metoda punct fix cu funcția iterativă ϕ are ordinul $p+1$.

Exemplul 4:

$$f(x) = e^x(x-1) = 0 \quad (\alpha = 1,\, x^{(0)} = 2)$$

$$\phi_0(x) = \ln(xe^x) \quad (\phi_0'(\alpha) = 2)$$

$$\phi_1(x) = \frac{e^x + x}{e^x + 1} \quad (\phi_1'(\alpha) = 0.2689)$$

$$\phi_2(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x} \quad (\phi_2'(\alpha) = 0)$$

Metoda Coardei:

$$\phi_C(x) = x - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x)$$

$f'(\alpha) = 0 \Rightarrow \phi_C'(\alpha) = 1$ (nu avem garanția convergenței)

$$|\phi_C'(\alpha)| < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f'(\alpha) < 2$$

(panta coardei determinată de $(a, f(a))$ și $(b, f(b))$ trebuie să aibă același semn ca $f'(\alpha)$)

Metoda Newton:

$$\phi_N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Dacă $f'(\alpha) \neq 0$ (rădăcină simplă) atunci

$$\phi_N'(\alpha) = 0, \quad \phi_N''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

Dacă $f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0$ atunci

$$\phi_N'(\alpha) = 1 - \frac{1}{m}$$

În acest caz ordinul de convergență scade la 1.

Metoda Newton *modificată*

Se poate ajunge la ordinul 2 dacă se face modificarea

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - m\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

cu condiția ca $f'(x^{(k)}) \neq 0$. Necesită cunoașterea lui *m a-priori*.

Tehnici de post-procesare: *Accelerarea* Aitken

$$x^{(k)} - \alpha \approx \phi'(\alpha)(x^{(k-1)} - \alpha)$$

Notăm cu λ o aproximație pentru $\phi'(\alpha)$

$$\alpha \approx x^{(k)} + \frac{\lambda}{1-\lambda}(x^{(k)} - x^{(k-1)})$$

Considerăm:

$$\lambda^{(k)} = \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{x^{(k-1)} - x^{(k-2)}} = \frac{\phi(x^{(k-1)}) - \phi(x^{(k-2)})}{x^{(k-1)} - x^{(k-2)}}$$

avem

$$\lim_{k\to\infty} \lambda^{(k)} = \phi'(\alpha)$$

$$\alpha \approx x^{(k)} + \frac{\lambda^{(k)}}{1-\lambda^{(k)}}(x^{(k)} - x^{(k-1)})$$

$$\hat{x}^{(k)} = x^{(k)} - \frac{\left(x^{(k)} - x^{(k-1)}\right)^2}{\left(x^{(k)} - x^{(k-1)}\right) - \left(x^{(k-1)} - x^{(k-2)}\right)}, \quad k \geq 2$$

Folosind notațiile

$$\Delta x^{(k)} = x^{(k)} - x^{(k-1)}, \quad \Delta^2 x^{(k)} = \Delta(\Delta x^{(k)}) = \Delta x^{(k+1)} - \Delta x^{(k)}$$

deducem

$$\hat{x}^{(k)} = x^{(k)} - \frac{(\Delta x^{(k)})^2}{\Delta^2 x^{(k-1)}}, \quad k \geq 2$$

1. Dacă $p = 1$ atunci metoda Aitken converge cu ordinul 2; converge chiar dacă metoda aprox. succ. nu converge
2. Dacă $p \geq 2$ atunci metoda Aitken converge cu ordinul $2p - 1$
3. Dacă α are multiplicitatea $m \geq 2$ și met. aprox. succ. are ordinul 1 atunci metoda Aitken converge liniar cu factorul de convergență $C = 1 - \frac{1}{m}$

Metoda Newton *adaptivă*

$$\phi_N'(\alpha) = 1 - \frac{1}{m}$$

$$\lambda^{(k)} = 1 - \frac{1}{m^{(k)}}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - m^{(k)} \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k \geq 2$$

unde

$$m^{(k)} = \frac{1}{1 - \lambda^{(k)}} = \frac{x^{(k-1)} - x^{(k-2)}}{2x^{(k-1)} - x^{(k)} - x^{(k-2)}}$$

$$f(x) = (x^2 - 1)^p \ln(x) = 0$$

$$\alpha = 1, \quad m = p + 1, \quad x^{(0)} = 0.8$$

$$p = 2,\ 4,\ 6$$

Funcțiile *fzero* și *roots* în Matlab

-se bazează pe metoda Dekker-Brent (combină Metoda Bisecției cu Metoda Secantei și interpolarea inversă pătratică)

$$p(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \ldots + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$$

Matricea *companion*

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = det(C - \lambda I_{n-1})$$

Metoda Newton pentru sisteme neliniare

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Jacobianul

$$(J_f)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad i, j = 1, \ldots, n$$

$$\begin{cases} \text{Se rezolvă: } J_f(\boldsymbol{x}^{(k)})\delta\boldsymbol{x}^{(k)} = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(k)}) \text{ (sistem liniar)} \\ \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \delta\boldsymbol{x}^{(k)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = \sin(\frac{\pi x_1}{2}) + x_2^3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (0.4761, -0.8794) \\ (-0.4671, 0.8794) \end{cases}$$

$$J_f = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi x_2}{2}) & \sin(\frac{\pi x_1}{2}) + 3x_2^2 \end{pmatrix}$$