Laborator-Seminar V

Calcul Numeric

UTCN

2020

Interpolare Hermite

Se iau în calcul și valorile derivatelor funcției. Fie datele $(x_i, f^{(k)}(x_i))$, $i = 0, \dots, n$, $k = 0, \dots, m_i$, $m_i \in \mathbb{N}$. Notăm

$$N = \sum_{i=0}^{n} (m_i + 1),$$

Există un polinom unic $H_{N-1} \in \mathbb{P}_{N-1}$ care verifică

$$H_{N-1}^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i)$$

Polinomul H_{N-1} se numește *polinomul de interpolare Hermite*

Interpolare Hermite

Este definit prin

$$H_{N-1}(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m_i} L_{ik}(x) f^{(k)}(x_i)$$

L_{ik} se numesc *polinoame fundamentale Hermite*

$$L_{ik}^{(p)}(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j \text{ și } k = p \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Cosiderăm cazul când $m_i = 1$, $i = 0, \ldots, n$ (*osculatory interpolation*, interpolare cu noduri duble), *i.e.* se cunosc valorile $f(x_i)$ și $f'(x_i)$. Avem $N = 2n + 2$

Interpolare Hermite cu noduri duble

$$H_{N-1}(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(A_i(x) f(x_i) + B_i(x) f'(x_i) \right)$$

$$\begin{aligned} A_i(x) &= \left(1 - 2(x - x_i)\varphi_i'(x)\right)\varphi_i^2(x), \\ B_i(x) &= (x - x_i)\varphi_i^2(x), \end{aligned}$$

unde $\varphi_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$.

Notații

$z_0 = x_0,\ z_1 = x_0,\ z_2 = x_1,\ z_3 = x_1,\ \ldots,\ z_{2n} = x_n,\ z_{2n+1} = x_n$

Interpolare Hermite cu noduri duble

$$\begin{array}{cccc}
z_0 & f[z_0] & f[z_0, z_1] = f'(z_0) & f[z_0, z_1, z_2] \\
z_1 & f[z_1] & f[z_1, z_2] & f[z_1, z_2, z_3] \\
z_2 & f[z_2] & f[z_2, z_3] = f'(z_1) & f[z_2, z_3, z_4] \\
z_3 & f[z_3] & f[z_3, z_4] & f[z_3, z_4, z_5] \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
z_{2n-2} & f[z_{2n-2}] & f[z_{2n-2}, z_{2n-1}] = f'(z_{2n-1}) & f[z_{2n-2}, z_{2n-1}, z_{2n}] \\
z_{2n-1} & f[z_{2n-1}] & f[z_{2n-1}, z_{2n}] & f[z_{2n-1}, z_{2n}, z_{2n+1}] \\
z_{2n} & f[z_{2n}] & f[z_{2n}, z_{2n+1}] = f'(z_{2n}) & \\
z_{2n+1} & f[z_{2n+1}] & &
\end{array}$$

$$H_{2n+1}f(x) = f[z_0] + \sum_{i=1}^{2n+1} (x - z_0) \ldots (x - z_{i-1}) f[z_0, \ldots, z_i]$$

Aproximare cu funcții *spline*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Funcția s_k este un *spline* de grad k pe $[a, b]$ relativ la x_j dacă

$$s_k\Big|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_k, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$s_k \in C^{k-1}([a, b])$$

Restricția $s_{k,j} := s_k\Big|_{[x_j, x_{j+1}]}$ poate fi reprezentată

$$s_{k,j}(x) = \sum_{i=0}^{k} s_{ij}(x - x_j)^i, \text{ dacă } x \in [x_j, x_{j+1}]$$

Trebuie determinați $(k+1)n$ coeficienți!

Din faptul că $s_k \in C^{k-1}([a,b])$ deducem că

$$s_{k,j-1}^{(m)}(x_j) = s_{k,j}^{(m)}(x_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n-1, m = 0, 1, \ldots, k-1$$

Avem $k(n-1)$ condiții!
Mai rămân nedeterminați $n(k+1) - k(n-1) = k+n$ coeficienți (*grade de libertate*).
Dacă S_k reprezintă *spațiul funcțiilor spline* atunci

$$\dim S_k = n + k.$$

Spunem că avem un *spline de tip interpolator* dacă $s_k(x_j) = f_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$, unde $f_j := f(x_j)$ sunt valori date ($n+1$ condiții).
Dar tot mai rămân $k-1$ valori necunoscute!

Condiții *suplimentare*

- *Spline periodice*: $s_k^{(m)}(a) = s_k^{(m)}(b), \quad m = 0, 1, \ldots, k-2$
- *Spline de Boor*

$$\begin{cases} s_{k,0}(x) = s_{k,1}(x) \\ s_{k,n-2}(x) = s_{k,n-1}(x) \end{cases}$$

- *Spline naturale*: pentru $k = 2l - 1$ cu $l \geq 2$
  $s_k^{(l+j)}(a) = s_k^{(l+j)}(b) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, l-2$

$l = 2$: $k = 3$, $s_3^{(2)}(a) = s_3^{(2)}(b) = 0 \quad [s_{3,1}^{(2)}(a) = s_{3,n-1}^{(2)}(b) = 0]$

$$l = 3:\ k = 5,\ \begin{cases} s_5^{(3)}(a) = s_5^{(3)}(b) = 0 \\ s_5^{(4)}(a) = s_5^{(4)}(b) = 0 \end{cases}$$

Interpolarea cu *spline* cubice s_3

Derivata de ordin 2 trebuie să fie continuă!

$$f_i = s_3(x_i), \quad m_i = s_3'(x_i), \quad M_i = s_3''(x_i)$$

$$s_{3,i-1} \in \mathbb{P}_3 \Rightarrow s_3'' \in \mathbb{P}_1 \text{ (liniară)}$$

$$s''_{3,i-1}(x) = M_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + M_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$s_{3,i-1}(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + C_{i-1}(x - x_{i-1}) + \tilde{C}_{i-1}$$

Coeficienții C_{i-1} și $\tilde{C}_{i-1}$ se determină din condițiile

$$s_3(x_{i-1}) = f_{i-1}, \quad s_3(x_i) = f_i$$

Interpolare cu *spline* cubice

$$\tilde{C}_{i-1} = f_{i-1} - M_{i-1}\frac{h_i^2}{6}, \quad C_{i-1} = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i-1})$$

Valorile M_i sunt necunoscute! Din continuitatea primei derivate în x_i, *i.e.* $s_3'(x_i^-) = s_3'(x_i^+)$ $\quad \left(s_3'(x_i^{\pm}) = \lim\limits_{t\to 0} s_3'(x_i \pm t)\right)$

$$\begin{aligned} s_3'(x_i^-) &= \frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i}{3}M_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} = \\ &= \frac{h_{i+1}}{3}M_i - \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} = s_3'(x_i^+) \end{aligned}$$

Obținem sistemul de *M-continuitate*

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i,\ i = 1, \dots, n-1$$

$$\mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \quad \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$$
$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}}\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right)$$

Sistemul are $n-1$ ecuații și $n+1$ necunoscute! Este nevoie de încă $2(= k-1)$ condiții. Acestea pot fi considerate sub forma

$$2M_0 + \lambda_0 M_1 = d_0, \quad \mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n,$$

unde $0 \le \lambda_0, \mu_n \le 1$ și d_0, d_1 sunt valori date.

Pentru a obține spline cubic natural: $\lambda_0 = \mu_n = d_0 = d_n = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & 0 & \dots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \dots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

Se poate rezolva eficient folosind algoritmul Thomas ! Pentru implementarea numerică

$$h_i M_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1}) M_i + h_{i+1} M_{i+1} = d_i (h_i + h_{i+1})$$

Pentru noduri echidistante $h_i = h$

$$M_{i-1} + 2M_i + M_{i+1} = \frac{12}{h}(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1})$$

Fie $f \in C^2([a,b])$ *și fie* s_3 *spline-ul cubic natural care interpolează funcția* f*. Atunci*

$$\int_a^b [s_3''(x)]^2\,dx \leq \int_a^b [f''(x)]^2\,dx,$$

egalitatea având loc dacă și numai dacă $f = s_3$*.*

Formule de cuadratură (formule de integrare numerică)

Considerăm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

O formulă de cuadratură constă în *schimbarea* lui f cu o aproximație f_n (care depinde de $n \geq 0$) și calcularea lui $I(f_n)$ în locul lui $I(f)$, *i.e.*

$$I_n(f) := I(f_n) = \int_a^b f_n(x)\,dx, \quad n \geq 0$$

Dependența de punctele a și b poate fi *marcată* prin $I_n(f; a, b)$.

Pentru $f \in C^0([a,b])$ *eroarea de cuadrartură* $E_n(f) = I(f) - I_n(f)$ verifică

$$|E_n(f)| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\, dx \leq (b-a)\|f - f_n\|_\infty$$

unde $\|g\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |g(x)|$. *Aproximanta* f_n trebuie să fie *ușor* de integrat, de exemplu $f_n \in \mathbb{P}_n$. O *abordare naturală* ar fi $f_n = \Pi_n f$ (cuadraturi Lagrange)

$$I_n(f;a,b) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b \varphi_i(x)\, dx$$

Este un caz particular pentru $\left(\alpha_i = \int_a^b \varphi_i(x)\, dx\right)$

$$I_n(f;a,b) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

x_i-noduri; *α_i-coeficienți (ponderi)*

Cuadraturi de tip Hermite (de tip interpolator)

$$I_n(f) = \sum_{k=0}^{l} \sum_{i=0}^{n} \alpha_{ik} f^{(k)}(x_i)$$

Spunem că o formulă de cuadratură are *gradul de exactitate* $r \geq 0$ dacă

$$I_n(f; a, b) = I(f) \Leftrightarrow E_n(f) = 0, \quad f \in \mathbb{P}_r$$

și $\exists g \in \mathbb{P}_{r+1}$ a.î. $E_n(g) \neq 0$.

Regula dreptunghiului (*midpoint*)

Funcția f este înlocuită cu o funcție constantă egală cu $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$$I_0(f) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\alpha_0 = b-a \quad x_0 = \frac{a+b}{2}$$

Dacă $f \in C^2([a,b])$ atunci

$$E_0(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi), \quad \xi \in (a,b)$$

$E_0(f) = 0$ pentru funcții constante sau afine. Avem gradul de exactitate 1 !

Formula dreptunghiului *compusă*

Funcția f se înlocuiește cu polinomul de interpolare de grad zero pe porțiuni construit pe m subintervale de dimensiune $H = (b-a)/m,\ m \geq 1$. Fie nodurile de cuadratură

$$x_k = a + \frac{(2k+1)H}{2}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1$$

$$I_{0,m}(f) = H \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k), \quad m \geq 1$$

$$E_{0,m}(f) = I(f) - I_{0,m}(f) = \frac{b-a}{24} H^2 f''(\xi), \quad \xi \in (a, b)$$

Avem gradul de exactitate 1 !

Formula trapezului

Funcția f este înlocuită cu $\Pi_1 f$ (polinomul de interpolare Lagrange de grad 1 relativ la nodurile $x_0 = a$ și $x_1 = b$). Formula de cuadratură rezultată are nodurile $x_0 = a$, $x_1 = b$ și ponderile $\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{b-a}{2}$, *i.e.*

$$I_1(f) = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$

Dacă $f \in C^2([a, b])$ atunci

$$E_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \quad \xi \in (a, b)$$

Avem gradul de exactitate 1!

Formula trapezului *compusă*

Funcția f se înlocuiește cu polinomul de interpolare de grad unu pe porțiuni construit pe m subintervale de dimensiune $H = (b-a)/m,\ m \geq 1.$ Fie nodurile de cuadratură

$$x_k = a + kH,\ k = 0, \ldots, m$$

$$I_{1,m}(f) = \frac{H}{2} \sum_{k=0}^{m-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})]$$

$$I_{1,m}(f) = H\Big[\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{m-1}) + \frac{1}{2} f(x_m)\Big]$$

$$E_{1,m}(f) = I(f) - I_{1,m}(f) = -\frac{b-a}{12} H^2 f''(\xi), \quad \xi \in (a,b).$$

Avem gradul de exactitate 1 !

Formula Cavalieri-Simpson

Funcția f este înlocuită cu $\Pi_2 f$ (polinomul de interpolare Lagrange de grad 2 relativ la nodurile $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ și $x_2 = b$). Formula de cuadratură rezultată are nodurile $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$ și ponderile $\alpha_0 = \alpha_2 = \frac{b-a}{6}$ și $\alpha_1 = \frac{4(b-a)}{6}$ *i.e.*

$$I_2(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Dacă $f \in C^4([a,b])$ atunci

$$E_2(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a,b)$$

Avem gradul de exactitate 3!

Formula Cavalieri-Simpson *compusă*

Funcția f se înlocuiește cu polinomul de interpolare de grad doi pe porțiuni construit pe m subintervale de dimensiune $H = (b-a)/m$, $m \geq 1$. Fie nodurile de cuadratură

$$x_k = a + \frac{kH}{2}, \quad k = 0, \dots, 2m$$

$$I_{2,m}(f) = \frac{H}{6}\left[f(x_0) + 2\sum_{r=1}^{m-1} f(x_{2r}) + 4\sum_{r=0}^{m-1} f(x_{2s+1}) + f(x_{2m})\right]$$

Eroarea de cuadratură

$$E_{2,m}(f) = I(f) - I_{2,m}(f) = -\frac{b-a}{180}\left(\frac{H}{4}\right)^4 f^{(4)}(\xi),$$

unde $\xi \in (a, b)$. Avem gradul de exactitate 3!

$$\int_0^{2\pi} xe^{-x}\cos(2x)\,dx = \frac{[3(e^{-2\pi}-1)-10\pi e^{-2\pi}]}{25} \approx -0.122122$$

Formule de cuadratură Hermite (*formula trapezului corectată*)

$$I_c(f) = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] + \frac{(b-a)^2}{12}[f'(a)-f'(b)]$$

$$E_c(f) = \frac{(b-a)^5}{720} f^{(4)}(\xi),\ \xi \in (a,b)$$

$$\begin{aligned} I_{c,m}(f) &= \frac{b-a}{m}\Big\{\frac{1}{2}[f(x_0)+f(x_m)] + f(x_1) + \ldots + f(x_{m-1})\Big\} \\ &+ \frac{(b-a)^2}{12}[f'(a)-f'(b)] \end{aligned}$$

Formule Newton-Cotes

Formulele Newton-Cotes se bazează pe interpolarea Lagrange cu noduri echidistante, $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, \ldots, n$. (Metoda dreptunghiului, trapezului și Simpson sunt cazuri speciale de formule Newton-Cotes, luând $n = 0$, $n = 1$ și $n = 2$) Definim

- *formule închise*: $x_0 = a$, $x_n = b$ și $h = \frac{b-a}{n}$
- *formule deschise*: $x_0 = a + h$, $x_n = b - h$ și $h = \frac{b-a}{n+2}$

Ponderile α_i depind doar de n, dar nu și de intervalul de integrare $[a, b]$

$$\phi_i(t) = \prod_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{t-k}{i-k}, \; 0 \leq i \leq n$$

Formule Newton-Cotes

Formule închise

$$I_n(f) = h\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i), \quad \alpha_i = \int_0^n \phi_i(t)\,dt$$

Formule deschise

$$I_n(f) = h\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i), \quad \alpha_i = \int_{-1}^{n+1} \phi_i(t)\,dt$$

Ponderile α_i nu depind de a, b și f și pot fi tabelate *a priori*.
Pentru formulele deschise avem și valori negative!

Formule Newton-Cotes

Pentru n par și $f \in C^{n+2}([a,b])$ avem

$$E_n(f) = \frac{M_n}{(n+2)!} h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi),$$

unde $\xi \in (a,b)$ și

$$M_n = \begin{cases} \displaystyle\int_0^n t\pi_{n+1}(t)\,dt < 0 \text{ (închise)} \\ \displaystyle\int_{-1}^{n+1} t\pi_{n+1}(t)\,dt > 0 \text{ (deschise)}, \end{cases}$$

$\pi_{n+1}(t) = \displaystyle\prod_{i=0}^{n}(t-i)$. Gradul de exactitate este $n+1$.

Formule Newton-Cotes

Pentru n impar și $f \in C^{n+2}([a, b])$ avem

$$E_n(f) = \frac{K_n}{(n+1)!} h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi),$$

unde $\xi \in (a, b)$ și

$$K_n = \begin{cases} \int_0^n \pi_{n+1}(t)\, dt < 0 \text{ (închise)} \\ \int_{-1}^{n+1} \pi_{n+1}(t)\, dt > 0 \text{ (deschise)}, \end{cases}$$

$\pi_{n+1}(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - i)$. Gradul de exactitate este n.

Probleme Cauchy

Metode Runge-Kutta: laboratorul anterior

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in [x_0, x_0 + T], \quad T > 0 \\ y(x_0) = Y_0 \end{cases}$$

Se consideră următoarea discretizare a intervalului $[x_0, x_0 + T]$

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = x_0 + T$$

Notăm cu y_i, $i = 0, \ldots, N$ aproximațiile pentru valorile $y(x_i)$, *i.e.*

$$y(x_i) \approx y_i$$

Evident $y_0 = y(x_0) = Y_0$ și derivata va fi aproximată prin

$$y'(x_i) \approx f_i := f(x_i, y_i)$$

Presupunem că nodurile sunt echidistante, *i.e.* $x_{i+1} - x_i = h$

Probleme Cauchy (Metode *multipas*)

O metodă cu $p\,(p \geq 1)$ pași: pentru y_{n+1} depinde de valorile $y_{n+1}, y_n, \ldots, y_{n+1-p}$, dar nu depinde de y_k cu $k < n+1-p$.
Metodă *multipas* liniară ($p+1$ pași) are forma

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^{p} a_j y_{n-j} + h \sum_{j=0}^{p} b_j f_{n-j} + h b_{-1} f_{n+1}$$

$p = 0$: avem metode cu un pas. $b_{-1} = 0$: explicite
Forma echivalentă

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = Y_0 \end{cases} \Leftrightarrow y(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

Metode Adams

Se integrează în locul lui f polinomul de interpolare pentru $p+1$ noduri distincte.

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=-1}^{p} b_j f_{n-j}, \quad n \geq p$$

Nodurile de interpolare pot fi

- $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-p}$ (explicite)
- $x_{n+1}, x_n, \ldots, x_{n-p+1}$ (implicite)

Metode Adams-Bashforth ($b_{-1} = 0$)

- $y_{n+1} = y_n + hf_n \quad (p = 0)$
- $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n - f_{n-1}) \quad (p = 1)$
- $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}) \quad (p = 2)$
- $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}) \quad (p = 3)$

Metode Adams-Moulton ($b_{-1} \neq 0$)

- $y_{n+1} = y_n + hf_{n+1} \quad (p = -1)$
- $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1}) \quad (p = 0)$
- $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}) \quad (p = 1)$

Polinoame Ortogonale

w-funcție *pondere* (pozitivă și integrabilă) pe $(-1,1)$.
$\{p_k | k = 0, 1, \ldots\}$ șir de polinoame

$$\int_{-1}^{1} w(x)p_k(x)p_m(x)\,dx = 0 \text{ dacă } m \neq k$$

Notație

$$(f,g)_w = \int_{-1}^{1} w(x)f(x)g(x)\,dx, \quad \|f\|_w = (f,f)_w^{1/2}$$

$$L_w^2 = L_w^2(-1,1) = \left\{ f : (-1,1) \to \mathbb{R} \middle| \int_{-1}^{1} f^2(x)w(x)\,dx < \infty \right\}$$

Polinoame Ortogonale

Familie de polinoame monice ortogonale $\{p_k\}$

$$\begin{cases} p_{k+1}(x) = (x - \alpha_k)p_k(x) - \beta_k p_{k-1}(x) \\ p_{-1}(x) = 0, \quad p_0(x) = 1 \end{cases}$$

$$\alpha_k = \frac{(xp_k, p_k)_w}{(p_k, p_k)_w}, \quad \beta_{k+1} = \frac{(p_{k+1}, p_{k+1})_w}{(p_k, p_k)_w}, \quad k \geq 0$$

Deoarece $p_{-1} = 0$ coeficientul β_0 este arbitrar ales și depinde de tipul polinoamelor.

Polinoame Cebîșev $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$L_w^2(-1,1) = \left\{ f : (-1,1) \to \mathbb{R} \Big| \int_{-1}^{1} f^2(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx < \infty \right\}$$

$$\begin{aligned} (f,g)_w &= \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\ \|f\|_w &= \left(\int_{-1}^{1} f^2(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} T_{k+1}(x) = 2x T_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \ldots \\ T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x \end{cases}$$

Polinoame Cebîșev

$$T_k(x) = \cos(k \arccos(x)), \quad k = 0, 1, \ldots$$

$$(T_k, T_n)_w = \begin{cases} 0, \text{ dacă } k \neq n \\ \pi, \text{ dacă } k = n = 0 \\ \frac{\pi}{2}, \text{ dacă } k = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \|T\|_\infty &= 1 \\ \|2^{1-n} T_n\|_\infty &\leq \min_{p \in \mathbb{P}_n^1} \|p\|_\infty \end{aligned}$$

unde $\|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|, \quad f \in C^0([a,b])$

$$\mathbb{P}_n^1 = \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \ a_n = 1 \right\}$$

Polinoame Legendre $w(x) = 1$

$$L^2(-1,1) = \left\{ f : (-1,1) \to \mathbb{R} \middle| \int_{-1}^{1} f^2(x)\, dx < \infty \right\}$$

$$\begin{aligned} (f,g)_1 &= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx \\ \|f\|_1 &= \left(\int_{-1}^{1} f^2(x) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} L_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1} x L_k(x) - \frac{k}{k+1} L_{k-1}(x), \ k = 0, 1, \dots \\ L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x \end{cases}$$

Polinoame Legendre

$$L_k(x) = \frac{1}{2^k} \sum_{l=0}^{[k/2]} (-1)^l C_k^l C_{2k-2l}^k x^{k-2l}, \; k = 0, 1, \ldots$$

$$(L_k, L_m)_1 = \delta_{km} \frac{2}{k+1}$$

Polinoamele Cebîșev și polinoamele Legendre sunt cazuri particulare de polinoame Jacobi:
$w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \quad \alpha, \beta > -1$. Dacă $\alpha = \beta = 0$ obținem polinoame Legendre, iar dacă $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ obținem polinoame Cebîșev .