Probleme Calcul Numeric (Diferenţe Divizate)

2022-2023

1. (a) Să se arate că
$$[z_1, \dots, z_m, y_1, \dots, y_k; f] =$$
$$= \left[z_1, \dots, z_m; \frac{f(x)}{(x-y_1)\dots(x-y_k)}\right] + \left[y_1, \dots, y_k; \frac{f(x)}{(x-z_1)\dots(x-z_m)}\right]$$

   (b) Să se arate că
$$[z_1, \dots, z_m, y_1, y_2, \dots, y_k; (x-y_1)(x-y_2)\dots(x-y_k)g(x)] = [z_1, \dots, z_m; g]$$

   (c) Să se calculeze
$$\left[0, 1, \dots, 100; \frac{1}{(x+1)(x+2)}\right]$$

Rezolvare: a) Ştim că
$$[t_1, t_2, \dots, t_n; f] = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(t_i)}{l'(t_i)}$$

unde $l(t) = \prod_{k=1}^{n}(t-t_k)$ (polinom de grad n cu rădăcinile t_k). În cazul nostru avem
$$l(t) = \prod_{i=1}^{m}(t-z_i)\prod_{j=1}^{k}(t-y_j) = l_1(t)l_2(t),$$

unde
$$l_1(t) = \prod_{i=1}^{m}(t-z_i), \quad l_2(t) = \prod_{j=1}^{k}(t-y_j).$$

Folosind
$$l'(x) = l_1'(x)l_2(x) + l_1(x)l_2'(x)$$

şi ţinând cont de faptul că
$$l_1(z_i) = 0 \quad l_2(y_j) = 0$$

obţinem

$$l'(z_i) = l_1'(z_i)l_2(z_i) \quad l'(y_j) = l_1(y_j)l_2'(y_j).$$

Deducem că

$$[z_1, z_2, \ldots, z_m, y_1, y_2, \ldots, y_k; f] = \sum_{i=1}^{m} \frac{f(z_i)}{l'(z_i)} + \sum_{j=1}^{k} \frac{f(y_j)}{l'(y_j)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{f(z_i)}{l_1'(z_i)l_2(z_i)} + \sum_{j=1}^{k} \frac{f(y_j)}{l_1(y_j)l_2'(y_j)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\frac{f(z_i)}{l_2(z_i)}}{l_1'(z_i)} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\frac{f(y_j)}{l_1(y_j)}}{l_2'(y_j)}$$

$$= \left[z_1, z_2, \ldots, z_m; \frac{f}{l_2}\right] + \left[y_1, y_2, \ldots, y_k; \frac{f}{l_1}\right]$$

b) Se va folosi punctul a) cu $f(x) := l_2(x)g(x)$ şi se obţine

$$[z_1, \ldots, z_m, y_1, \ldots, y_k; (x-y_1)(x-y_2)\ldots(x-y_k)g(x)] =$$

$$= [z_1, \ldots, z_m, y_1, y_2, \ldots, y_k; l_2(x)g(x)] = \left[z_1, \ldots, z_m; \frac{l_2(x)g(x)}{l_2(x)}\right] +$$

$$+ \underbrace{\left[y_1, \ldots, y_k; \frac{l_2(x)g(x)}{l_1(x)}\right]}_{=0} = [z_1, \ldots, z_m; g]$$

c) Se observă că

$$\left[0, 1, \ldots, 100; \frac{1}{(x+1)(x+2)}\right] = \left[0, 1, \ldots, 100; \frac{1}{(x-(-1))(x-(-2))}\right]$$

În cazul acesta $z_1 = 0$, $z_2 = 2$, $\ldots, z_101 = 100$, $y_1 = -1$, $y_2 = -2$, $f \equiv 1$ şi obţinem

$$\underbrace{[0, 1, \ldots, 100, -1, -2; 1]}_{=0} = \left[0, 1, \ldots, 100; \frac{1}{(x-(-1))(x-(-2))}\right] +$$

$$+ \left[-1, -2; \frac{1}{(x-0)(x-1)\ldots(x-100)}\right].$$

Se aplică definiţia diferenţei divizate de ordinul 2 şi deducem că

$$\left[0, 1, \ldots, 100; \frac{1}{(x-(-1))(x-(-2))}\right] = -\frac{\frac{1}{\prod_{i=0}^{100}(-1-i)} - \frac{1}{\prod_{i=0}^{100}(-2-i)}}{-2-(-1)} =$$

$$= \frac{(-1)^{101}}{101!}\left(1 - \frac{1}{102}\right) = \frac{-1}{100!\,102}.$$

2. Să se calculeze

$$[0, 1, 2, \ldots, 100; 5x^{102} + 2022]$$

Rezolvare: Pentru nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$ definim polinomul de grad $n+1$, numit şi *polinomul nodurilor (nodal)*

$$l(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$$

care se poate scrie sub forma

$$l(x) = x^{n+1} - S_1 x^n + S_2 x^{n-1} - S_3 x^{n-2} \ldots$$

unde $S_1, S_2, \ldots$ sunt sumele Viète. Folosind relaţiile

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n; x^p] = \begin{cases} 1, & p = n \\ 0, & p < n \end{cases}$$

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n; \alpha f + \beta g] = \alpha[x_0, x_1, \ldots, x_n; f] + \beta[x_0, x_1, \ldots, g]$$

deducem că

$$\begin{aligned} [x_0, x_1, \ldots, x_n; l(x)] &= [x_0, x_1, \ldots, x_n; x^{n+1}] - S_1[x_0, x_1, \ldots, x_n; x^n] \\ &= [x_0, x_1, \ldots, x_n; x^{n+1}] - S_1 \end{aligned}$$

Mai mult, din faptul că

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n; f(x)] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{l'(x_i)}$$

obţinem următoarele egalităţi

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n; l(x)] = 0$$

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n; x l(x)] = 0$$

Aşadar, avem

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n; x^{n+1}] = S_1 = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$$

şi

$$0 = [x_0, x_1, \ldots, x_n; x l(x)] = [x_0, x_1, \ldots, x_n; x^{n+2} - S_1 x^{n+1} + S_2 x^n - \ldots] =$$

$$= [x_0, x_1, \ldots, x_n; x^{n+2}] - S_1[x_0, x_1, \ldots, x_n; x^{n+1}] + S_2[x_0, x_1, \ldots, x_n; x^n] =$$

$$= [x_0, x_1, \ldots, x_n; x^{n+2}] - S_1^2 + S_2.$$

Deducem că

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n; x^{n+2}] = S_1^2 - S_2 = \frac{1}{2}\Big(S_1^2 + \sum_{i=0}^{n} x_i^2\Big).$$

Pentru $x_0 = 0, x_1 = 1, \dots, x_n = n$ obţinem

$$S_1 = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_2 = \sum_{1=i<j=n} ij = (1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \dots + 1 \cdot n) + (2 \cdot 3 + \dots 2 \cdot n) + \dots + (n-1) \cdot n =$$

$$= \frac{(1 + 2 + \dots n)^2 - (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{8} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$$

Deducem că

$$[x_0, x_1, \dots, x_n; x^{n+2}] = S_1^2 - S_2 = \frac{n^2(n+1)^2}{8} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} = \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24}$$

În final avem

$$\begin{aligned}[0, 1, 2, \dots, 100; 5x^{102} + 2022] &= 5[0, 1, 2, \dots, 100; x^{102}] + 2022[0, 1, 2, \dots, 100; x^0] = \\ &= 5\frac{100 \cdot 101 \cdot (3 \cdot 100^2 + 702)}{24}\end{aligned}$$

3. Să se calculeze

   (a)
   $$[0, 1, \dots, n; \frac{x^{n+1}}{x+1}] = [0, 1, \dots, n; \frac{x^{n+1}}{x-(-1)}]$$

   (b)
   $$[0, 1, \dots, 100; \frac{1}{x^2+1}]$$

   Rezolvare: a) Folosind rezultatul anterior deducem că

$$\underbrace{[0, 1, \dots, n, -1; x^{n+1}]}_{=0} = [0, 1, \dots, n; \frac{x^{n+1}}{x-(-1)}] + \underbrace{[-1; \frac{x^{n+1}}{x(x-1)\dots(x-n)}]}_{=\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^{n+1}(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}}$$

Aşadar
$$[0, 1, \dots, n; \frac{x^{n+1}}{x+1}] = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

b) Ne vom folosi de faptul că
$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x-(-i)}\right)$$

Din exerciţiul 1)a) pentru $z_1 = x_0, z_2 = x_1, \dots, z_m = x_n$, $y_1 = a$ şi $f(x) = 1$ deducem

$$[x_0, x_1, \dots, x_n; \frac{1}{x-a}] = \frac{-1}{\prod_{k=0}^{n}(a - x_k)}.$$

Ţinând cont de liniaritatea diferenţelor divizate obţinem

$$[0,1,\dots,n;\frac{1}{1+x^2}] = \frac{1}{2i}\Big([0,1,\dots,n;\frac{1}{x-i}] - [0,1,\dots,n;\frac{1}{x-(-i)}]\Big) =$$

$$= \frac{1}{2i}\Big(\frac{-1}{\prod_{k=0}^{100}(i-k)} + \frac{1}{\prod_{k=0}^{100}(i+k)}\Big) = \frac{1}{2i}\frac{\prod_{k=0}^{100}(i-k) - \prod_{k=0}^{100}(i+k)}{\prod_{i=0}^{100}(k^2+1)}$$

4. Să se calculeze diferenţa divizată

$$[0,1,\dots,n;e^x]$$

Rezolvare: Vom da o formulă generală pentru cazul când nodurile sunt echidistante, *i.e.* $x_i = a+ih$, $i=\overline{0,n}$. Pentru polinomul nodurilor (nodal)

$$l(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

avem

$$l'(x_i) = (x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n).$$

În cazul nodurilor echidistante se obţine

$$l'(a+ih) =$$

$$\big((a+ih)-a\big)\dots\big((a+ih)-(a+(i-1)h)\big)\big((a+ih)-(a+(i+1)h)\big)\dots\big((a+ih)-(a+nh)\big) =$$

$$= h^i i!(-1)^{n-i}h^{n-i}(n-i)! = (-1)^{n-i}h^n i!(n-i)!$$

şi deducem că

$$[a,a+h,\dots,a+nh;f] = \sum_{i=0}^{n}\frac{f(a+ih)}{l'(a+ih)} = \sum_{i=0}^{n}\frac{f(a+ih)}{(-1)^{n-i}h^n i!(n-i)!} =$$

$$= \frac{1}{h^n n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\frac{n!}{i!(n-i)!}f(a+ih) = \frac{1}{h^n n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f(a+ih)$$

În cazul nostru, $a=0$, $h=1$, $f(x)=e^x$ şi obţinem

$$[0,1,\dots,n;e^x] = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}e^i = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{n-i}e^{n-i}$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}e^{n-i} = \frac{(e-1)^n}{n!}$$