

Teoria sistemelor. Laborator 7: Răspunsul în frecvență. Diagrame Bode

Exercise 1. Se consideră patru sisteme cu următoarele funcții de transfer:

$$G_1(s) = \frac{0.1(s+10)}{s+1}, \quad G_2(s) = \frac{10(s+1)}{s+10}, \quad G_3(s) = \frac{10}{s^2+s+1}, \quad G_4(s) = \frac{s^2+s+1}{s^2+s+10}$$

1. Reprezentați grafic răspunsul fiecărui sistem pentru o intrare sinusoidală, $r(t) = \sin(t)$, utilizând funcția Matlab *lsim*, într-un interval de timp $t \in [0, 30]$ sec.
2. Pentru fiecare sistem analizați amplitudinea și faza semnalului de ieșire și comparați-le cu cele ale semnalului de intrare. Determinați care sisteme au avans și care au întârziere de fază.
3. Reprezentați grafic diagramele Bode, utilizând funcția Matlab *bode* și citiți de pe grafice amplitudinea și faza semnalului de ieșire în fiecare caz, dacă intrarea este $r(t) = \sin(t)$.

Hint. Vedeți fișierul *Lab5_solutii_selectate.pdf* pentru soluția cu funcția de transfer G_4 .

Exercițiul 2. 1. Schițați diagramele Bode pentru sistemele cu următoarele funcții de transfer:

$$G_1(s) = \frac{s^2}{(10s+1)^2}, \quad G_2(s) = \frac{10s+10^4}{s^2+s+1}, \quad G_3(s) = \frac{10^9s}{(s+1000)(s+10^7)}, \quad G_4(s) = \frac{10s}{s^2+2s+4}$$

2. Determinați pulsațiile pentru care sistemul amplifică sau atenuează semnalele de intrare sinusoidale.
3. Pentru fiecare sistem determinați amplitudinea semnalului de ieșire, dacă semnalul de intrare este:

$$u_1(t) = \sin(t), \quad u_2(t) = 0.1\sin(10^{-3}t), \quad u_3(t) = 3\sin(100t).$$

Idee Folosiți fișierul *ReguliBode.pdf* pentru a schița diagramele și vedeți *Lab5_solutii_selectate.pdf* pentru soluția cu funcția de transfer G_1 . Verificați schițele de pe hartie cu funcția *bode* din Matlab.

Exercițiul 3. Procesarea semnalului ECG.

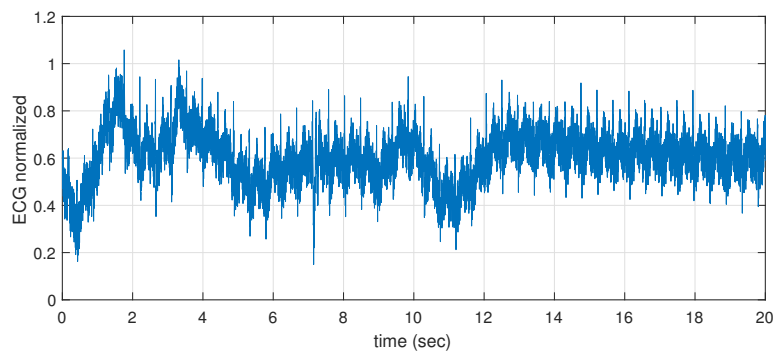
Se consideră măsurătorile unui semnal ECG din [1] prezentate în Figura 1. Măsurătorile includ perturbații de frecvență joasă datorate respirației și tusei pacientului și zgomot de frecvență înaltă datorat senzorilor (de calitate scăzută).

Măsurătorile ECG ideale, într-un interval de timp scurt, arată ca în Figura 2. Cele 3 vârfuri (numite R , T și P - de la cel mai mare la cel mai mic), împreună cu timpul la care apar, sunt foarte importante pentru diagnoza medicală. De exemplu, perioada între vârfurile R este utilizată pentru determinarea frecvenței cardiace (inversa perioadei cardiace)¹.

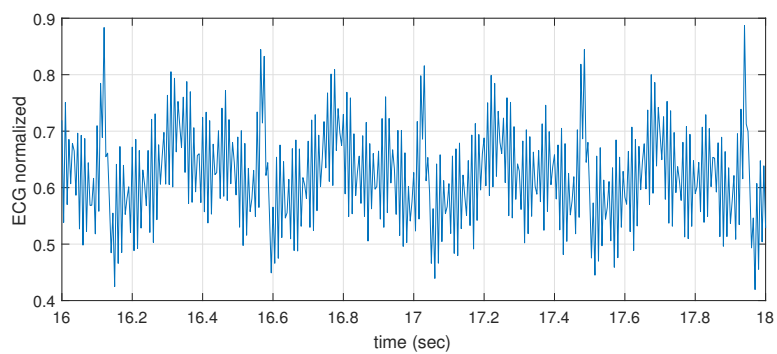
Este evident că doctorii nu pot utiliza măsurătorile ECG din Figura 1 pentru diagnoză. Pentru a rezolva această problemă, se va proiecta un filtru trece bandă (vezi Figura 3) care să elimine componentele de frecvență joasă și înaltă. Frecvențele de interes în măsurătorile ECG sunt de obicei între 0.5 Hz și 100 Hz [1].

Scopul acestei aplicații este proiectarea unui filtru trece bandă pentru eliminarea componentelor cu frecvențe joase și înalte și compararea lui cu un filtru utilizat frecvent (filtru Butterworth). Frecvențele de tăiere a filtrelor vor fi $f_1 = 0.5\text{Hz}$ și $f_2 = 50\text{Hz}$.

¹Pentru detalii vedeți: <http://www.medicine.mcgill.ca/physio/vlab/cardio/introecg.htm>



a) Pe interval de timp lung



b) Pe interval de timp scurt

Figura 1: Măsurători ECG reale

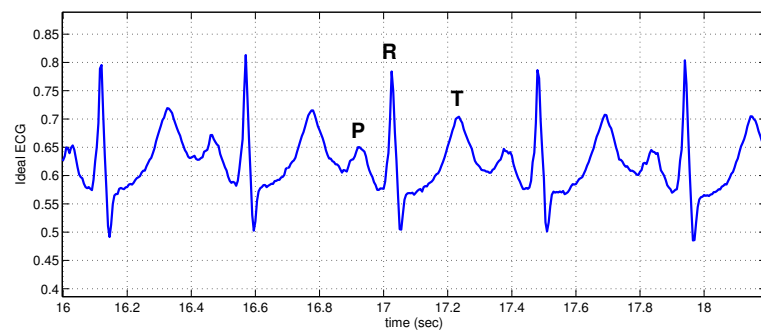


Figura 2: Măsurători ECG ideale (interval de timp scurt)

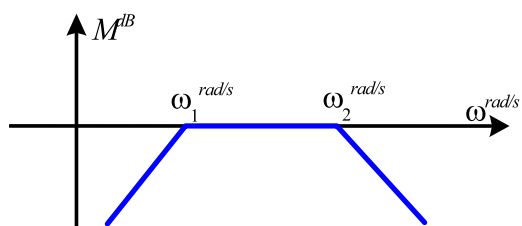


Figura 3: Diagrama de modul pentru un filtru trece bandă

1. Citiți datele din fișierul *ECGdata.txt*. Un cod exemplu este dat în Listing 2.

Listing 1: readECGdata.m

```

1 close all
2 clear all
3 clc
4 %—— citeste datele din ECGdata.txt ——
5 fileID = fopen('ECGdata.txt', 'r'); % deschide ECGdata.txt pentru citire
6 A = fscanf(fileID, '%f %f', [2, Inf]); % citeste datele din fisier in matricea A
7 fclose(fileID) % inchide ECGdata.txt
8 timp = A(1, :); % salveaza prima linie de date in variabila "timp"
9 necg = A(2, :); % salveaza a doua linie de date in variabila "necg"
10
11 figure, plot(time, necg), grid on % deseneaza necg in functie de timp
12 xlabel('t (sec)'), ylabel('ECG normalizat')

```

Datele sunt organizate acum în doi vectori linie: *timp* cu 4000 de valori între 0 și 20 seconds și *necg* cu valorile normalizate ale semnalului ECG la fiecare moment de timp. Reprezentați grafic *necg* în funcție de *timp* și figura va fi similară cu Figura 1 (a).

2. Proiectați un filtru Butterworth utilizând funcția *butter* cu următoarele specificații:

- Tipul filtrului: analogic, trece-bandă
- Ordinul filtrului: 8
- Pulațiile de tăiere: $\omega_1 = 0.5 * 2 * \pi$ rad/s și $\omega_2 = 50 * 2 * \pi$ rad/s;

Listing 2: filterECGdata.m

```

1 %—— filtru Butterworth ——
2 [num, den] = butter(4, [0.5*2*pi 50*2*pi], 'bandpass', 's');
3 butter_filter = tf(num, den); % creați filtrul
4
5
6 %—— Diagrama Bode a filtrului ——
7 figure, bode(butter_filter), grid on
8
9 %—— filtrați semnalul ——
10 % sistem = butter_filter
11 % intrare: necg = semnalul cu zgomot
12 % timp: timp
13 figure, lsim(butter_filter, necg, time), grid on

```

Un exemplu de cod Matlab este dat în Listing 2.

Obs. Primul parametru de intrare în funcția *butter* este $n = 4$, dar filtrul trece-bandă va avea ordinul $2n = 8$. Funcția *butter* returnează polinoamele de la numărătorul și numitorul funcției de transfer a filtrului.

3. Reprezentați grafic diagrama Bode a filtrului cu funcția *bode* în Matlab (vezi Listing 2).
4. Determinați semnalul ECG filtrat utilizând funcția *lsim*, cu funcția de transfer a filtrului și semnalul ECG normalizat ca intrare (vezi Figura 4).

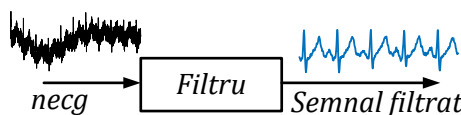


Figura 4: Filtru

Funcția *lsim* va desena semnalul de intrare ECG (*necg*) și semnalul filtrat pe aceeași figură. Se pot citi cele trei vârfuri din grafic?

Observați diferențele între cele două semnale:

- pe întregul interval de timp,
- pe un interval de timp între 16 și 18 sec,

- pe un interval de timp între 2 și 4 sec.
5. Proiectați un filtru trece bandă de ordinul 8 utilizând elemente de ordinul 1, cât se poate de apropiat de filtrul Butterworth analizat anterior.
- (i) Încercați întâi să determinați combinația corectă de elemente pentru a obține o diagramă Bode a unui filtru trece bandă (Figura 5) cu aceleași pulsații de tăiere și pantele dreptelor de $+20\text{dB/dec}$ și -20 dB/dec .

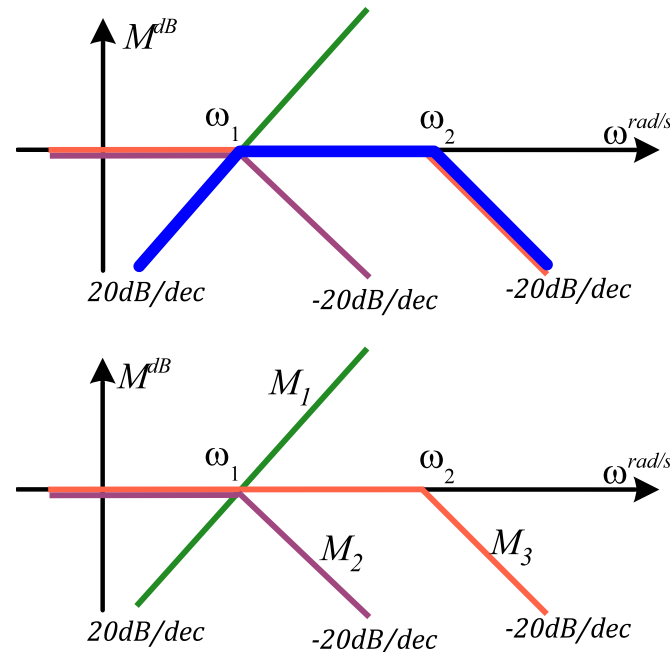


Figura 5: Filtrul trece-bandă descompus.

- (ii) Determinați parametrii (constanta de proporționalitate și constantele de timp a funcției de transfer a filtrului). Obțineți o funcție de transfer de ordinul 2: $G_2(s)$.
- ```
G2 = tf([.....],[.....])
```
- (iii) Multiplicați funcția de transfer obținută anterior cu ea însăși, iterativ, și observați cum se modifică diagrama Bode la fiecare iterație (utilizați Matlab). După multiplicarea de 4 ori ar trebui să rezulte o diagramă Bode asemănătoare cu cea a filtrului Butterworth. Desenați ambele diagrame Bode pe același grafic (în Matlab) și comparați-le.
- ```
G4 = G2*G2; % filtru de ordinul 4
G8 = G2*G2*G2*G2; % filtru de ordinul 8
figure, bode(G2, G4, G8), grid on % desenați in aceeași figura
```
6. Reprezentați grafic semnalul ECG, semnalul ECG filtrat cu filtrul Butterworth și cel filtrat cu filtrul proiectat la punctul (iii). Comparați rezultatele (zoom in).
- ```
figure, lsim(butter_filter, G8, necg, time), grid on
```

## Problemă opțională

**Exercițiul 4.** Se consideră un sistem de ordinul 2 cu funcția de transfer:

$$G(s) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1} \quad (1)$$

Acestui sistem i s-au aplicat la intrare mai multe semnale sinusoidale și ieșirile au fost înregistrate. Intrările sunt semnale sinusoidale de forma  $r(t) = \sin \omega t$ , unde pulsația este  $\omega \in \{1, 2, 5, 8, 9.5, 10, 20, 100\}$  rad/sec. Ieșirile, pentru fiecare pulsație a intrării, sunt prezentate în Figura 6.

Se cere să se determine parametrii sistemului  $K$ ,  $\omega_n$  și  $\zeta$ , utilizând răspunsul în frecvență, după următorii pași:

1. Schițați diagrame Bode pentru funcția de transfer (1).
2. Obțineți o diagramă Bode experimentală din Figura 6, după cum urmează:
  - Citiți amplitudinea semnalului de ieșire în regim staționar și împărțiți valoarea la amplitudinea semnalului de intrare. Salvați toate numerele într-un vector  $\mathbf{M} = [M_1, \dots, M_8]$ .
  - Converteți numerele din vectorul  $\mathbf{M}$  în decibeli și reprezentați-le grafic în funcție de valorile pulsațiilor  $\omega$  în scară logaritmică (cu funcția Matlab *semilogx*).
3. Comparați diagrama Bode obținută la 1 și 2 și determinați parametrii din grafice.

## Bibliografie

- [1] Rangaraj M. Rangayyan, *Biomedical Signal Analysis*, Wiley IEEE Press, 2001.

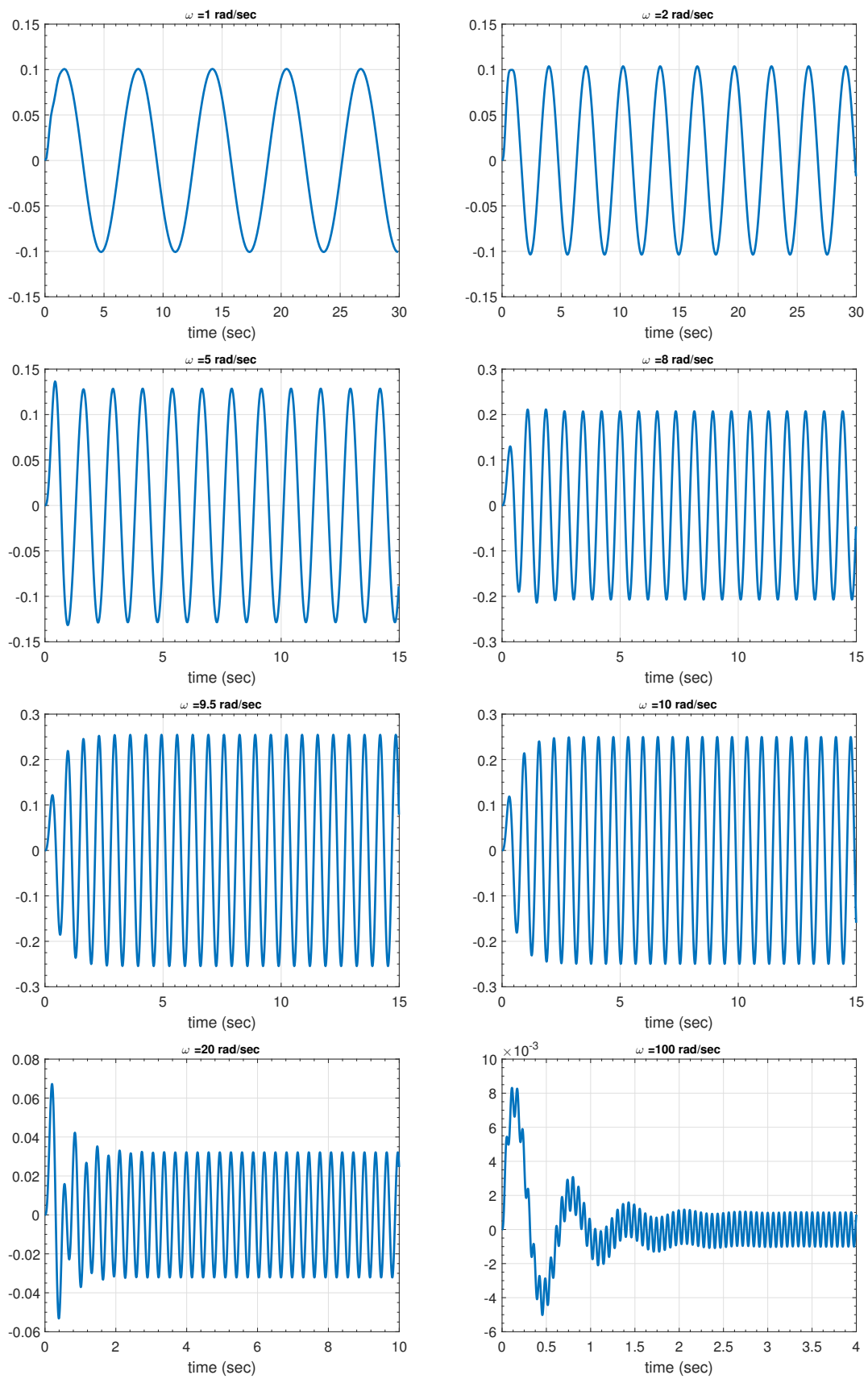


Figura 6: Semnalele de ieșire pentru diferite pulsații ale semnalului de intrare