Teoria Sistemelor. Laborator 6: Sisteme cu eșantionare

Exercițiul 1. Scriptul Matlab din Listing 1 ilustrează trei semnale de tip cosinus eșationate cu o perioadă fixă T:

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= cos(2\pi f_1 t), \quad & f_1 &= \ \ 1\ [Hz];\\
x_2(t) &= cos(2\pi f_2 t), \quad & f_2 &= \ \ 9\ [Hz];\\
x_3(t) &= cos(2\pi f_3 t), \quad & f_3 &= 11\ [Hz].
\end{aligned}
$$

Listing 1: alegere_perioda_cosinus.m

```matlab
% trei frecvente diferite
f1=1;f2=9;f3=11;

T=0.1; % perioada de esantionare
t=0:T:1;
x1=cos(2*pi*f1*t);
x2=cos(2*pi*f2*t);
x3=cos(2*pi*f3*t);

% reprezentare grafica
figure
plot(t,x1,'-o',t,x2,'-o',t,x3,'-o','linewidth',1.5,'markersize',5);shg;
legend('x_1','x_2','x_3')
xlabel('Time [s]')
ylabel('x(t) = cos(2 \pi f t)'), grid minor
```

1. Executați scriptul pentru $T \in \left\{\frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}\right\}$ $[s]$ și comentați rezultatele obținute.
2. Specifați în ce cazuri apare fenomanul de *aliasing* și care este valoarea maximă permisă pentru perioada T astfel încât toate cele trei semnale $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ să fie corect eșantionate.

Exercițiul 2. Se consideră sistemul în buclă închisă din Figura 1 cu funcţia de transfer a procesului:

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

Regulatorul calculat pentru acest proces are funcţia de transfer:

$$G_c(s) = \frac{8(s+1)}{s+4}$$

1. Determinaţi funcţia de transfer în z, $G_{c1}(z)$, utilizând transformarea din relaţia (1) şi cu perioada de eşantionare ca parametru.

$$s = \frac{1-z^{-1}}{T} \tag{1}$$

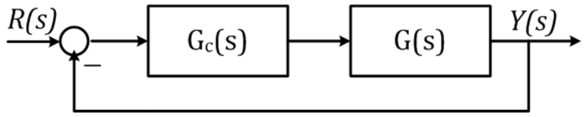

Figure 1:

2. Determinaţi funcţia de transfer în z, $G_{c2}(z)$, cu transformarea Tustin din relaţia (2) şi cu perioada de eşantionare ca parametru:

$$s = \frac{2(1 - z^{-1})}{T(1 + z^{-1})} \tag{2}$$

3. Construiţi în acelaşi model Simulink diagrama în buclă închisă cu o intrare treaptă:
   (a) Sistemul continuu din Figura 1.
   (b) Sistemul cu schema bloc din Figura 2 unde $G_c(z) = G_{c1}(z)$ este un bloc *Discrete transfer function* cu numărătorul şi numitorul calculate cu transformarea (1).
   (c) Sistemul cu schema bloc din Figura 2 unde $G_c(z) = G_{c2}(z)$ este un bloc *Discrete transfer function* cu numărătorul şi numitorul calculate cu transformarea Tustin (2).

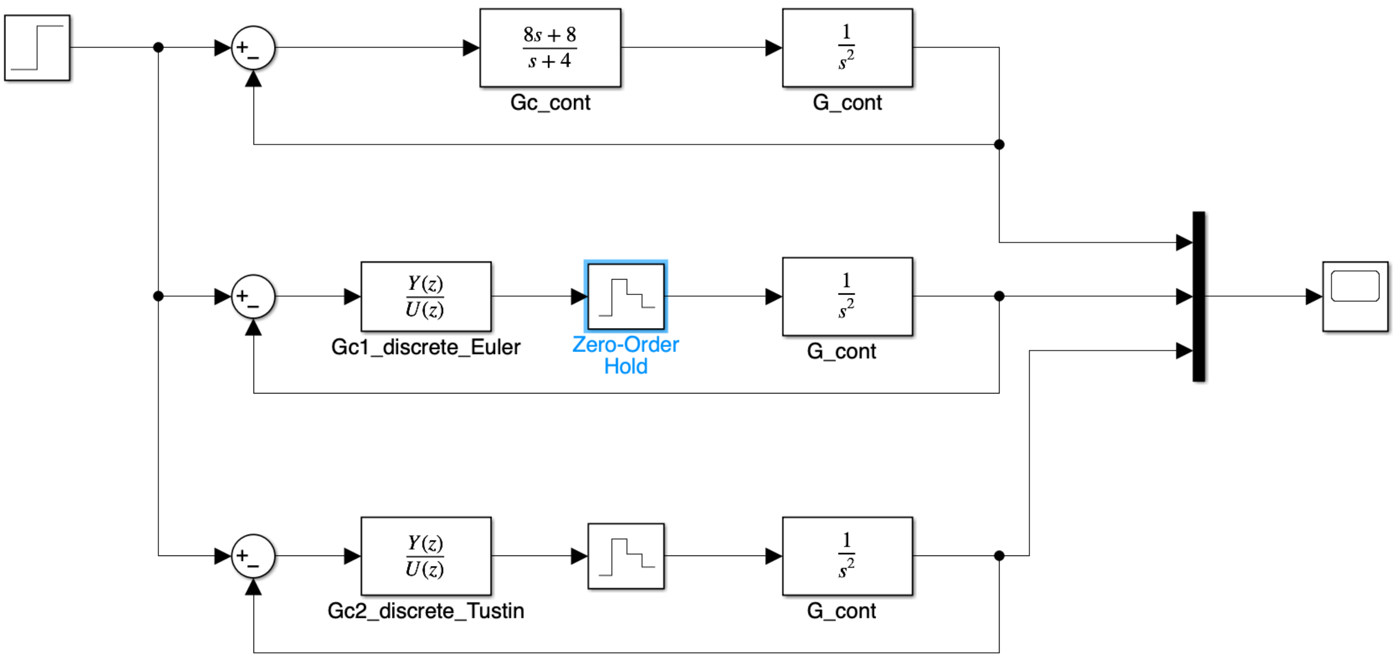

Figure 2:

4. Simulaţi cele trei sisteme pentru diferite valori ale perioadei de eşantionare şi comentaţi rezultatele. Sugestii posibile: $T \in \{0.1, 0.05, 0.01\}$.
5. Pentru regulatorul discretizat $G_{c1}(z) = U(z)/E(z)$, determinaţi ecuaţia recurentă pentru valorile semnalului de comandă u_k din valorile curente şi anterioare ale erorii (e_k, e_{k-1}) şi valorile anterioare ale comenzii (u_{k-1}).

Exercițiul 3. Considerați sistemul aflat la limita de stabilitate cu următoarea funcție de transfer:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

Sistemul are o pereche de poli pe axa imaginară, $s_{1,2} = \pm j$, prin urmare, este marginal stabil.

1. Discretizați $G(s)$ utilizând metoda zero-order hold (ZOH) și o perioadă de eșantionare arbitrară $T > 0$:
$$G_1(z) = Z\{G_0(s) \cdot G(s)\} = Z\left\{\frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot G(s)\right\}. \tag{3}$$
Verificați stabilitatea sistemului obținut $G_1(z)$ și comentați rezultatele.
Idee: Utilizați tabelul de transformate Z din Tabelul 1.

2. Discretizați $G(s)$, de unde rezultă $G_2(z)$, menținând perioada de eșantionare ca parametru $T > 0$, dar cu transformarea:
$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$$
Verificați stabilitatea sistemului obținut $G_2(z)$ și comentați rezultatele.
3. Ilustrați în aceeași figură simulările răspunsurilor la treaptă unitară pentru sistemele $G(s)$, $G_1(z)$ and $G_2(z)$ pentru o perioadă aleasă a lui $T > 0$.

Exercițiul 4. Se consideră următoarele sisteme cu intrarea u și ieșirea y ale căror comportamente pot fi descrise prin ecuațiile cu diferențe:

a) $y(k) + 0.5y(k-1) - 0.36y(k-2) = u(k-1) + u(k-2)$.
b) $y(k) - y(k-1) = 2u(k)$.
c) $y(k) - 0.8y(k-1) + 0.65y(k-2) = 2u(k-1) + 0.4u(k-2)$.
d) $y(k) = 0.2y(k-1) + 1.2y(k-2) + u(k-1) - 1.5u(k-2)$.

1. Deduceți funcția de transfer discretă $G(z)$ pentru fiecare sistem.
2. Sunt stabile sistemele? Justificați răspunsul.
3. Care este polul dominant?
Idee: Utilizați maparea dintre planul-s și planul-z pentru polii sistemelor:
$$z = e^{sT}, \text{ pentru } T > 0,$$
și transpuneți condiția de pol dominant din planul-s, ținând cont că funcțiile obținute din răspunsul la impuls, pe baza tabelului de transformate Z, au forma $f(k) = z^k$, $k \geq 0$, în cazul polilor reali și $f(k) = |z|^k \cdot \sin(\angle z \cdot k + \varphi)$, $k \geq 0$, în cazul perechilor de poli complex conjugați.

Exercițiul 5. Utilizând funcția *zpk* din MATLAB, deduceți funcțiile de transfer numerice $G(z)$ cu următoarele configurații ale zerourilor, polilor, factorului de amplificare și perioadă de eșantionare:

a) $z_1 = 0.5$, $p_1 = 0.9$, $k = 1.8$, $T = 0.25$ $[s]$
b) $z_1 = 0$, $p_{1,2} = \pm 0.8$, $k = -0.2$, $T = 2$ $[\mu s]$
c) $p_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}j$, $k = 1$, $T = 10$ $[s]$
d) $z_1 = 0$, $p_1 = 1$, $p_2 = 0.3$, $k = 2.5$, $T = 1$ $[s]$
e) $z_1 = -0.2$, $p_1 = 1.05$, $k = 4$, $T = 0.5$ $[ms]$

1. Verificați dacă răspunsul la treaptă unitară ajunge la o valoare staționară și calculați această valoare pe baza funcției de transfer $G(z)$. Validați cu ajutorul funcției *step* din MATLAB. Comentați rezultatele pe baza corelației cu stabilitatea sistemului.
Idee: Utilizați maparea dintre planul-s și planul-z pentru polii sistemelor:
$$z = e^{sT}, \text{ pentru } T > 0,$$
sau Teorema Valorii Finale din Tabelul 2.
2. Calculați ecuațiile cu diferențe corespunzătoare sistemelor $G(z)$ din enunț.

Domeniul timp $f(t)$	*Transformata Laplace* $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$	*Transformata Z* $F(z)=\mathcal{Z}[f(t)\vert_{t=kT}]=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$
$\delta(t)$	1	1
1	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$

Table 1: Tabelul de transformate

Proprietatea	*Timp discret* $f(kT)$	*Domeniul-z* $F(z)=\mathcal{Z}[f(kT)]$
Linearitate	$af_1(kT)+bf_2(kT)$	$aF_1(z)+bF_2(z)$
Deplasare la dreapta cu T	$f((k-1)T)$	$z^{-1}F(z)$
Deplasare la dreapta cu nT	$f((k-n)T)$	$z^{-n}F(z)$
Deplasare la stânga cu T	$f((k+1)T)$	$zF(z)-zf(0)$
Deplasare la stânga cu nT	$f((k+n)T)$	$z^nF(z)-\sum_{i=0}^{n-1} f(iT)z^{k-i}$
Teorema Valorii Finale	$f(\infty)=\lim_{k\to\infty} f(kT)$	$\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$ dacă polii funcției $(z-1)F(z)$ se află în discul unitate

Table 2: Proprietăți ale transformatei Z