Teoria sistemelor. Laborator 4: Eroarea staţionară. Locul rădăcinilor

Obiectiv: La sfârşitul acestul laborator studenţii trebuie să poată să:

- Calculeze eroarea staţionară pentru un sistem cu reacţie negativă
- Deseneze şi să analizeze locul rădăcinilor

1 Eroarea staţionară

Exerciţiul 1. Un sistem de control cu reacţie negativă este prezentat în Figura 1.

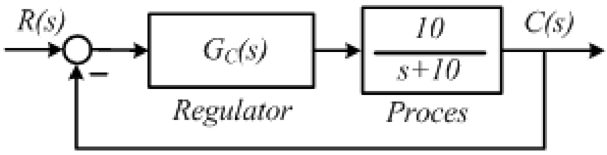

Figura 1: Sistem de control în buclă închisă

Obiectivul este să găsim un regulator cu complexitate minimă astfel încât sistemul închis să poată urmări o treaptă unitară cu eroare staţionară zero.

1. Ca o primă încercare se consideră regulatorul proporţional cu funcţia de transfer:

$$G_C(s) = 2$$

   (a) Calculaţi eroarea staţionară.
   (b) Desenaţi în Matlab/Simulink răspunsul la treaptă şi determinaţi eroarea staţionară din grafic.

2. Consideraţi un regulator mai complex, proporţional-integrator (PI), cu funcţia de transfer:

$$G_C(s) = 2 + \frac{20}{s} = \frac{2s + 20}{s}$$

   (a) Calculaţi eroarea staţionară.
   (b) Desenaţi în Matlab răspunsul la treaptă şi determinaţi eroarea staţionară din grafic.

   Idee 1. Eroarea staţionară este:

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s), \quad E(s) = R(s) - C(s)$$

   Determinaţi $E(s)$ şi calculaţi eroarea staţionară.

   Idee 2. Un model Simulink din care poate fi vizualizat răspunsul sistemului şi intrarea treaptă pe acelaşi grafic poate fi similar si Figura 2 (cazul 2).

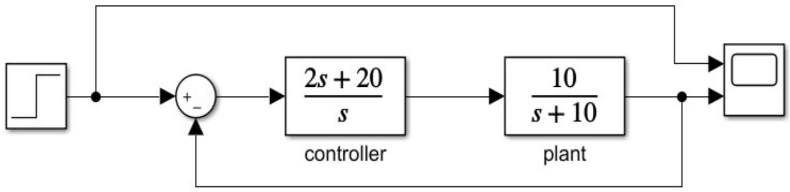

Figura 2: Modelul Simulink

Exerciţiul 2. Pentru sistemele reprezentate prin schemele bloc din Figura 3:

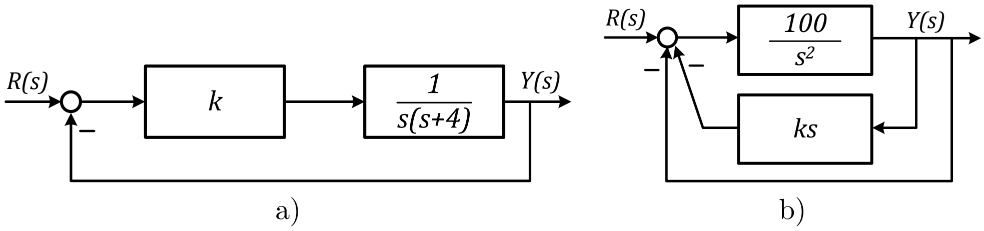

Figura 3: Closed-loop systems

1. Calculaţi eroarea staţionară pentru o intrare rampă unitară.
2. Alegeţi o valoare pentru k şi reprezentaţi grafic răspunsul sistemelor pentru o intrare rampă $r(t) = t,\ t \geq 0$. Plasaţi intrarea rampă pe acelaşi grafic cu semnalul de ieşire şi determinaţi eroarea staţionară.
3. Determinaţi gama de valori pentru k, $(k > 0)$ pentru care suprareglajul răspunsului la treaptă este zero.

Idei

1. *Eroarea staţionară va depinde de k.*
2. *Daca alegeţi să desenaţi răspunsui sistemului cu funcţii Matlab, utilizaţi* lsim. *Vedeţi* help lsim *pentru detalii. Dacă alegeţi să utilizaţi Simulink, găsiţi un bloc* Gain *în biblioteca* Commonly used blocks *şi utilizaţi-l pentru k. Pentru Figura b), blocul ks va fi inlocuit cu un bloc* Gain *în serie cu un bloc* Derivative *(din biblioteca* Continuous*)*
3. *Sistemul de ordinul 2 este supra-amortizat (fără suprareglaj) dacă toţi polii sunt reali şi negativi sau factorul de amortizare $\zeta \geq 1$.*

2 Locul rădăcinilor

Exerciţiul 3. Consideraţi sistemul în buclă închisă din Figura 4.

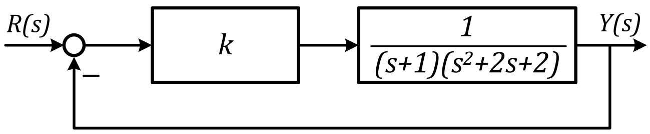

Figura 4: Sistem în buclă închisă

1. Utilizând criteriul Routh-Hurwitz determinaţi valorile lui k pentru care sistemul închis este stabil.

2. Desenaţi locul rădăcinilor cu funcţia Matlab *rlocus*.
3. Desenaţi locul rădăcinilor cu funcţia Matlab *rltool*. Modificaţi polii sistemului închis de-a lungul graficului (sau modificaţi factorul de proporţionalitate) şi analizaţi stabilitatea sistemului închis din răspunsul la treaptă.

Idee 1. *Determinaţi funcţia de transfer a sistemului închis şi polinomul caracteristic al sistemului închis. Determinaţi valorile lui k pentru care sistemul este stabil din criteriul Routh-Hurwitz.*

Idee 2. *Creaţi funcţia de transfer în Matlab pentru* $k = 1$ *şi desenaţi locul rădăcinilor:*

```
sys=tf(1, conv([1 1],[1 2 2]))
rlocus(sys)
```

Funcţia rlocus *va desena rădăcinile lui 1+k·sys, adică ale polinomului caracteristic al sistemului închis pentru* $k \in [0, \infty)$.

Idee 3. *Utilizaţi* rltool*:*

```
rltool(sys)
```

Comanda va deschide o interfaţă de proiectare, va desena LR şi, de asemenea, răspunsul la treaptă al sistemului închis.

- *În tab-ul* View *al interfeţei selectaţi* Top/Bottom *pentru a vedea LR şi răspunsul la treaptă în aceeaşi fereastră.*
- *Deplasaţi (click and drag) polii sistemului închis = marcaţi cu pătrate roz, şi observaţi modificările în răspunsul la treaptă în conformitate cu locaţia polilor.*
- *În tab-ul* Controllers and Fixed Blocks *dublu-click pe C pentru afişarea valorii parametrului variabil k (cu denumirea C). Setaţi valoarea lui C la cea determinată înainte pentru limita de stabilitate, apoi apăsaţi Enter. Observaţi poziţia polilor (roz) ai sistemului închis şi răspunsul sistemului.*

Exerciţiul 4. Consideraţi nouă sisteme în buclă închisă cu configuraţiile poli-zerouri ale sistemului în buclă deschisă din Figura 5 (a-i).

1. Schiţaţi locul rădăcinilor utilizând numai următoarele reguli:
   - Locul rădăcinilor este simetric în raport cu axa reală.
   - Numărul de ramuri este egal cu numărul polilor sistemului în buclă deschisă.
   - Pe axa reală locul rădăcinilor se află la stânga unui număr impar de poli şi zerouri (ai sistemului în buclă deschisă).
   - Locul rădăcinilor începe în polii sistemului în buclă deschisă şi se termină în zerourile sistemului în buclă deschisă sau la infinit (de-a lungul asimptotelor).
2. Atribuiţi valori numerice polilor şi zerourilor şi verificaţi locul rădăcinilor în Matlab utilizând funcţiile *zpk* şi *rlocus*.

Exemplu de soluţie. Se consideră configuraţia d).

- *Pe axa reală LR se află la stânga unul număr impar de poli şi zerouri: între p1 şi p2 şi între z1 şi z2. Deoarece funcţia de transfer a sistemului deschis are 2 poli şi 2 zerouri, fiecare ramură a LR va începe într-un pol şi se va termina într-un zero, fără asimptote. Vezi Figura 6 - stânga.*
- *Săgeţile indică sensul lui k crescător din* 0 *(LR începe în polii sistemului deschis p1 şi p2), sau k tinzând spre* ∞ *(LR se termină în zerourile sistemului deschis).*
- *Există un punct de desprindere între p1 şi p2 şi un punct de revenire pe axa reală între z1 şi z2, deoarece LR trebuie să ajungă din regiunea marcată dintre poli în regiunea marcată dintre zerouri.*

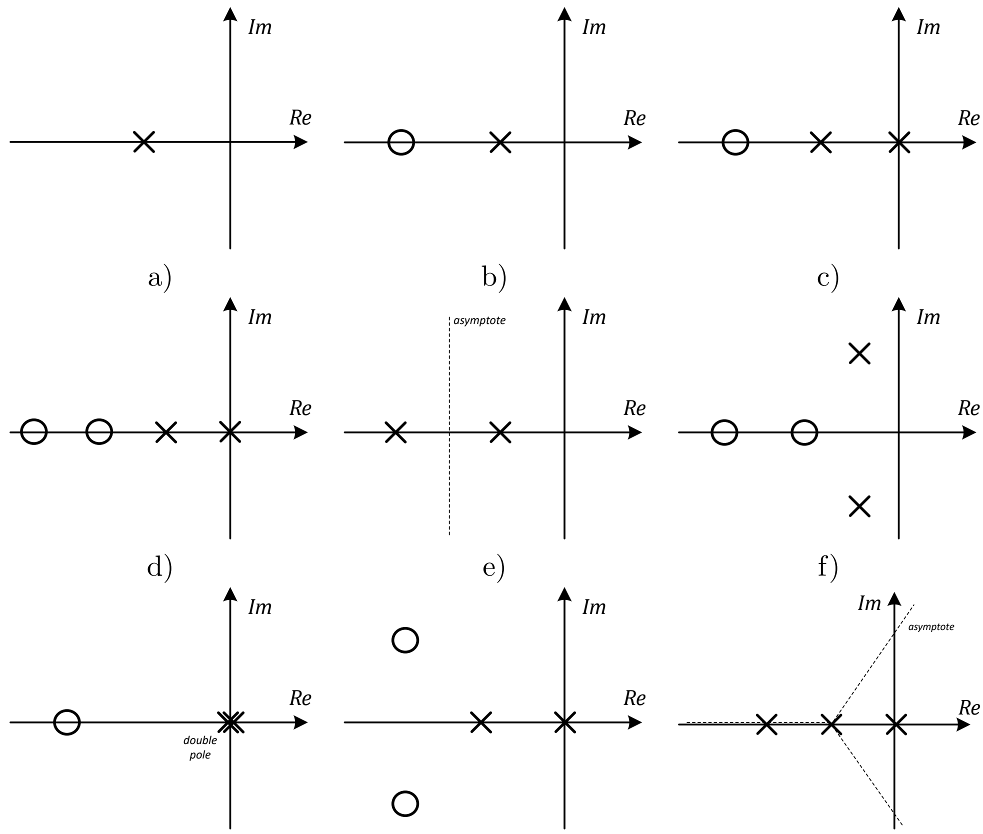

Figura 5: Poli şi zerouri în planul complex

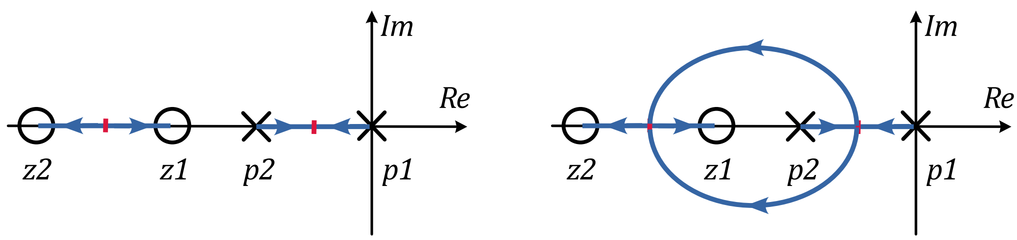

Figura 6: Soluţia punctului d). Stânga - soluţia parţială. Dreapta - soluţia finală

- *LR este simetric faţă de axa reală . Vedeţi Figura 6 - dreapta, pentru rezultat.*
- *LR poate fi obţinut în Matlab cu:*

```
rlocus(zpk([-2 -3],[0 -1], 1))
```

unde funcţia zpk *crează o funcţie de transfer cu zerourile* -2 *şi* -3*, polii* 0 *şi* -1*, şi cu factorul de proporţionalitate* 1*:* $G(s) = \dfrac{(s+2)(s+3)}{s(s+1)}$*. Funcţia* rlocus *desenează locul rădăcinilor pentru un sistem cu reacţie negativă, cu funcţia de transfer a sistemului deschis* $G(s)$*.*

Exerciţiul 5. Consideraţi sistemul în buclă închisă cu ecuaţia caracteristică:

$$1 + k\frac{s+2}{s^2} = 0$$

1. Desenaţi locul rădăcinilor (incusiv asimptota şi punctul de desprindere).
2. Determinaţi valoarea lui k pentru care polii sistemului închis sunt egali.

Idee. Urmaţi procedura de la sfârşitul acestui fişier pentru a schiţa locul rădăcinilor.

Exerciţiul 6. Un sistem cu reacţie negativă unitară are funcţia de transfer în buclă deschisă:

$$G(s) = \frac{k(s+1)}{s(s-1)(s+6)}$$

1. Desenaţi locul rădăcinilor sistemului închis pentru $k \in [0, \infty)$ (inclusiv asimptotele, punctul de desprindere şi intersecţia cu axa imaginară).
2. Analizaţi stabilitatea sistemului închis pentru $0 \leq k < \infty$.
3. Pe locul rădăcinilor marcaţi polii complecşi care au factor de amortizare maxim.

Idee. Urmaţi procedura de la sfârşitul acestui fişier pentru a schiţa locul rădăcinilor. Verificaţi rezultatul cu soluţia din fişierul ataşat.

Exerciţiul 7. Consideraţi sistemul cu reacţie negativă din Figura 7, unde regulatorul are un parametru variabil, z.

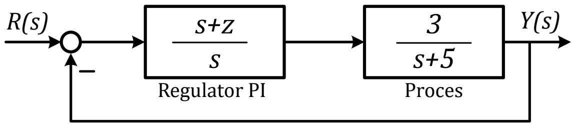

Figura 7: Sistem în buclă închisă

1. Desenaţi locul rădăcinilor pentru $0 \leq z < \infty$ (inclusiv asimptotele şi punctul de desprindere).
2. Determinaţi valoarea lui z pentru care factorul de amortizare al polilor sistemului închis este $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Calculaţi suprareglajul sistemului închis la semnal de intrare treaptă unitară pentru $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ şi verificaţi rezultatul utilizând *rltool* în Matlab (reprezentaţi locul rădăcinilor şi răspunsul la treaptă al sistemului închis).

Idee. Revedeţi prezentarea cursului 6 pentru un exemplu de schiţare a LR pentru orice parametru variabil C6_slides_rom.pdf, pag. 38-40.

Exerciţiul 8. Consideraţi controlul pentru un sistem de poziţionare după cum se arată în schema bloc din Figura 8.

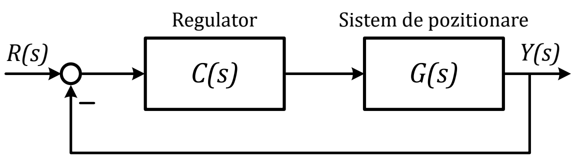

Figura 8: Sistem de poziţionare

Funcţia de transfer a procesului este $G(s) = \frac{1}{12s^2}$ iar regulatorul are funcţia de transfer $C(s)$.

Specificaţiile pentru răspunsul la treaptă a sistemului închis sunt:

- Sistemul închis este stabil.
- Eroarea staţionară pentru o intrare treaptă unitară este zero.
- Timp de răspuns mai mic decât 4 secunde.

Desenaţi locul rădăcinilor pentru $K > 0$ şi discutaţi cerinţele dacă regulatorul este::

1. un regulator proporţional: $C(s) = K$. Puteţi determina o valoare pentru K astfel încât cerinţele să fie îndeplinite? Argumentaţi răspunsul. Discutaţi influenţa lui K asupra răspunsului sistemului închis.
2. un regulator cu funcţia de transfer: $C(s) = \dfrac{K \cdot (s+1)}{s+4}$. Analizaţi localizarea polilor sistemului închis când K variază de la 0 la ∞ şi discutaţi cerinţele.

Idee. Utilizaţi Matlab SISO Design tool - rltool. *Reprezentaţi grafic locul rădăcinilor şi răspunsul la treaptă al sistemului închis, modificaţi polii sistemului închis şi analizaţi rezultatele.*

Locul rădăcinilor

1. Se scrie ecuaţia caracteristică astfel încât parametrul de interes k apare ca factor de multiplicare:
$$1 + kP(s) = 0.$$
2. Se factorizează $P(s)$ în forma cu n_p poli şi n_z zerouri
$$1 + k\frac{\prod_{i=1}^{n_z}(s+z_i)}{\prod_{i=1}^{n_p}(s+p_j)} = 0$$
(zerourile sunt $-z_i$, iar polii sunt $-p_j$)
3. Se plasează polii şi zerourile sistemului în buclă deschisă în planul s cu simbolurile: **x** - polii, **o** - zerourile.
4. Se determină numărul de ramuri $SL = n_p$, unde $n_p \geq n_z$, n_p = numărul de poli, n_z = numărul de zerouri.
5. Se determină segmentele LR de pe axa reală
   (a) LR se află pe axa reală la stânga unui număr impar de poli şi zerouri ai sistemului în buclă deschisă.
   (b) LR începe într-un pol al sistemului în buclă deschisă şi de termină la un zero sau la infinit de-a lungul unei asimptote (dacă numărul de zerouri este mai mic decât numărul de poli; numărul de asimptote = $n_p - n_z$).
6. LR este simetric faţă de axa reală.
7. LR tinde la infinit de-a lungul asimptotelor centrate în σ_A şi care fac unghiurile Φ_A cu axa reală.
$$\sigma_A = \frac{\sum(poli) - \sum(zerouri)}{n_p - n_z} = \frac{\sum_{j=1}^{n_p}(-p_j) - \sum_{i=1}^{n_z}(-z_i)}{n_p - n_z}$$
$$\Phi_A = \frac{2q+1}{n_p - n_z} \cdot 180^o, \quad q = 0, 1, 2, ...(n_p - n_z - 1)$$
8. Din criteriul Routh-Hurwitz $\Rightarrow$ intersecţia cu axa imaginară (dacă există).
9. Se determină punctele de desprindere de pe axa reală, sau de revenire pe axa reală (dacă există)
   (a) Se scrie: $k = -\frac{1}{P(s)} = p(s)$, (din $1 + kP(s) = 0$)
   (b) Se obţine $dp(s)/ds = 0$
   (c) Se determină rădăcinile lui (b) sau se utilizează o metodă grafică pentru a găsi maximul lui $p(s)$.

Dacă este necesar:

1. Se determină unghiul de plecare din polii complecşi şi unghiul sub care LR ajunge în zerouri din condiţia de fază
$$\angle P(s) = \pm 180^o(2q+1),\ la\ s = -p_j\ sau\ -z_i.$$
2. Se determină locaţia polilor care satisfac condiţia de fază
$$\angle P(s) = \pm 180^o(2q+1)\ la\ un\ pol\ s_x$$
3. Se determină valoarea parametrului k la o rădăcină s_x
$$k_x = \frac{\prod_{j=1}^{n_p} \mid s + p_j \mid}{\prod_{i=1}^{n_z} \mid s + z_i \mid} \mid_{s=s_x}$$