L5. Proiectarea regulatoarelor utilizând locul rădăcinilor

Exerciţiul 1. Pentru un sistem cu funcţia de transfer $G(s) = \frac{1}{s^2}$ calculaţi un regulator cu avans de fază (lead), cu funcţia de transfer $G_c(s) = \frac{k(s+z)}{s+p}$, cu $0 < z < p$, astfel încât polii dominanţi ai sistemului închis să fie localizaţi la $r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}j$.

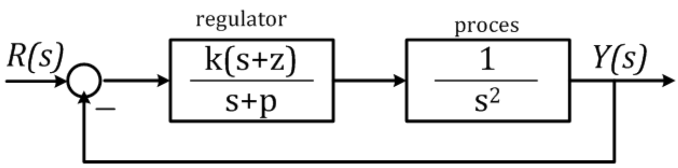

Figura 1: Schema bloc a sistemului

Ex1. Rezolvare. Se calculează zeroul şi polul regulatorului astfel încât $r_{1,2}$ să se afle pe locul rădacinilor a sistemului cu regulator (condiţia de fază să fie respectată). Dacă $r_{1,2}$ aparţin locului rădăcinilor, se calculează valoarea lui k pentru această locaţie a polilor sistemului închis (condiţia de modul se respectă).

Se desenează planul complex în care se plasează polii (şi zerourile, dacă este cazul) cunoscuţi ai procesului. Se plasează şi $r_{1,2}$. Se plasează zeroul regulatorului sub r_1 (după al doilea pol real al procesului): $-z = -\frac{1}{2}$. Polul necunoscut al regulatorului, $-p$, se plasează pe axa reală negativă şi se calculează. Vezi Figura 2.

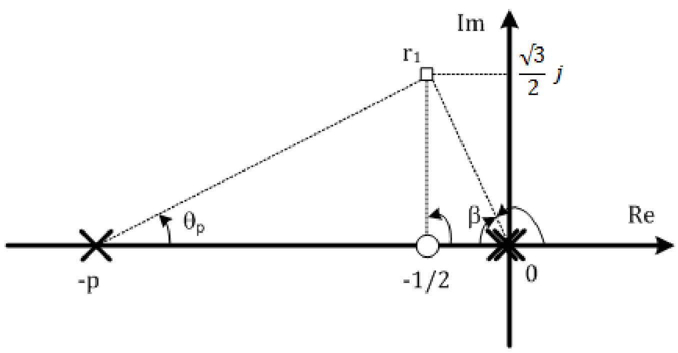

Figura 2: Poli şi zerouri

Dacă $r_{1,2}$ aparţin locului rădăcinilor, atunci se respectă condiţia de fază:

$$\angle G_c(s)G(s)|_{s=r_1} = -180^o$$

sau

$$\angle \frac{k(s+z)}{s+p})\frac{1}{s^2}|_{s=r_1} = -180^o$$

Relaţia de mai sus detaliată:

$$(\angle k + \angle(s+z) - \angle(s+p) - 2\angle s)|_{s=r_1} = -180^o$$

sau

$$(\angle k + \angle(r_1+z) - \angle(r_1+p) - 2\angle r_1) = -180^o$$

Din Figura 2 rezultă:

$$0 + 90^o - \theta_p - 2(180^o - \beta) = -180^o$$

$$\tan\beta = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}, \;\Rightarrow\; \beta = 60^o$$

Deci:

$$0 + 90^o - \theta_p - 2(180^o - 60^o) = -180^o, \;\Rightarrow\; \theta_p = 30^o$$

Din triunghiul cu vârfurile: r_1, $-1/2$, $-p$ rezultă:

$$\tan\theta_p = \frac{\sqrt{3}/2}{p-1/2}, \;\; \tan 30^o = \frac{\sqrt{3}/2}{p-1/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \;\Rightarrow\; p = 2$$

Regulatorul care asigură că $r_{1,2}$ sunt pe locul rădăcinilor este:

$$G_c(s) = \frac{k(s+\frac{1}{2})}{s+2}$$

Valoarea lui k pentru care $r_{1,2}$ sunt poli ai sistemului închis se calculează din condiţia de modul:

$$|G_c(s)G(s)|_{s=r_1} = 1$$

sau

$$\left|\frac{k(s+\frac{1}{2})}{s+2})\frac{1}{s^2}\right|_{s=-1/2+\sqrt{3}/2j} = 1$$

$$k = \frac{|\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j|\cdot|-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}|^2}{|\frac{\sqrt{3}}{2}j|} = 2$$

Deci

$$G_c(s) = \frac{2(s+\frac{1}{2})}{s+2}$$

Rezolvare utilizând *rltool* în Matlab

- Se introduce procesul:

```
>> sys=tf(1, [1 0 0])
>> rltool(sys)
```

- Se marchează polii $r_{1,2}$ astfel: click-dreapta pe LR → Design requirements → New → Region constraint. Completaţi partea reală $-1/2$ şi partea imaginară $-sqrt(3)/2$ şi $sqrt(3)/2$. Se obţine o linie care are în capete $r_{1,2}$.
- Plasaţi un zero la $-1/2$ din tab-ul *Root locus editor*. Acesta se poate adăuga sau corecta din *Compensator editor* (in tab *Controllers and fixed blocks*, dublu click pe *C*, sau click-dreapta în fereastra LR şi selectaţi *Compensator editor*).
- Plasaţi un pol real din *Root locus editor* şi modificaţi-i poziţia până când LR trece prin $r_{1,2}$.
- Modificaţi locaţia polilor complecşi ai sistemului închis (roz) în $r_{1,2}$. Ar trebui să obţineţi o figură similară cu Figura 3.
- Verificaţi în *Compensator editor* funcţia de transfer rezultată a regulatorului. Observaţi că este scrisă în forma $\frac{k(1+T_1 s)}{1+T_2 s}$, deci pentru comparaţie trebuie să o aduceţi la forma în care aţi calculat regulatorul $G_c(s) = \frac{k(s+z)}{s+p}$.

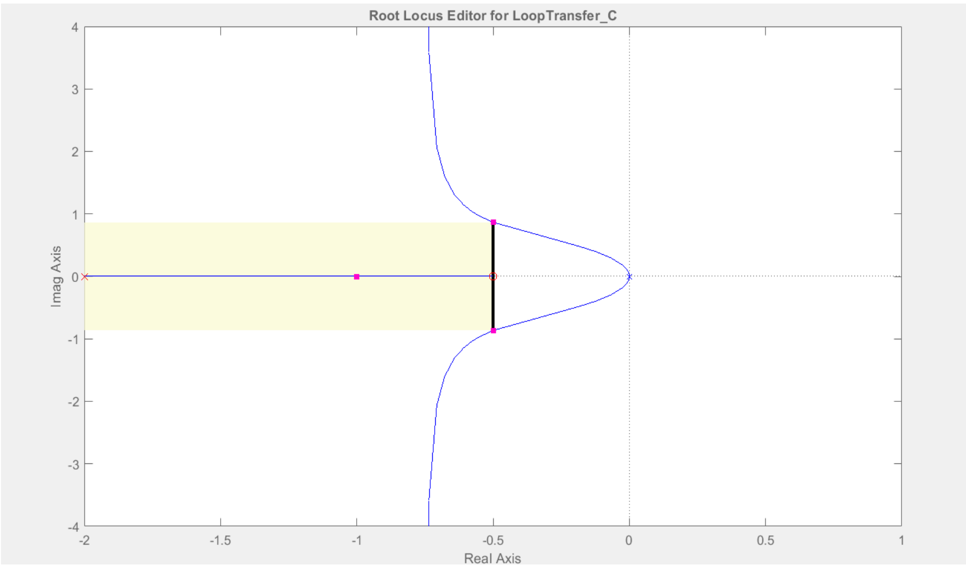

Figura 3: Locul rădăcinilor