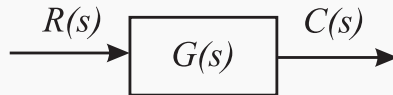


## Teoria sistemelor. Laborator 7: Soluții la probleme selectate



Pentru un sistem cu funcția de transfer  $G(s)$ , cu un semnal de intrare sinusoidal:  $r(t) = A \sin \omega t$  semnalul de ieșire **în regim staționar** este:

$$c_{ss}(t) = A \underbrace{|G(j\omega)|}_M \sin(\omega t + \underbrace{\angle G(j\omega)}_\varphi)$$

- $M > 1$ : amplitudinea ieșirii  $>$  amplitudinea intrării
- $M < 1$ : amplitudinea ieșirii  $<$  amplitudinea intrării
- $\varphi > 0$ : avans de fază
- $\varphi < 0$ : întârziere de fază

**Exercitiul 1.** Se consideră un sistem cu funcția de transfer:

$$G_4(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + s + 10}$$

### Soluție

1. Desenați răspunsul sistemului la o intrare sinusoidală  $r(t) = \sin(t)$ , cu funcția Matlab *lsim* pentru un interval de timp  $t \in [0, 30]$  sec.

Funcția *lsim* simulează și desenează răspunsul sistemului la un semnal de intrare dat. Forma generală este:

`lsim(SYS,U,T)`

Funcția va desena răspunsul unui sistem dinamic SYS la un semnal de intrare U, pentru un interval de timp T. Un script exemplu, pentru funcția de transfer  $G_4$  este dat mai jos.

Listing 1: sin-plots.m

```
1 close all
2 clear all
3 clc
4 % plot the system response to a sin input
5 t = 0:0.01:30; % create the time vector
6 input = sin(t); % create the sin input
7
8 G4 = tf([1 1 1], [1 1 10]); % create the transfer function G4
9 lsim(G4,input,t), grid on % simulate the response of G4 to a sin input
```

2. Analizați amplitudinea și defazajul semnalului de ieșire și comparați-l cu semnalul de intrare. Determinați dacă sistemele au avans sau întârziere de fază.

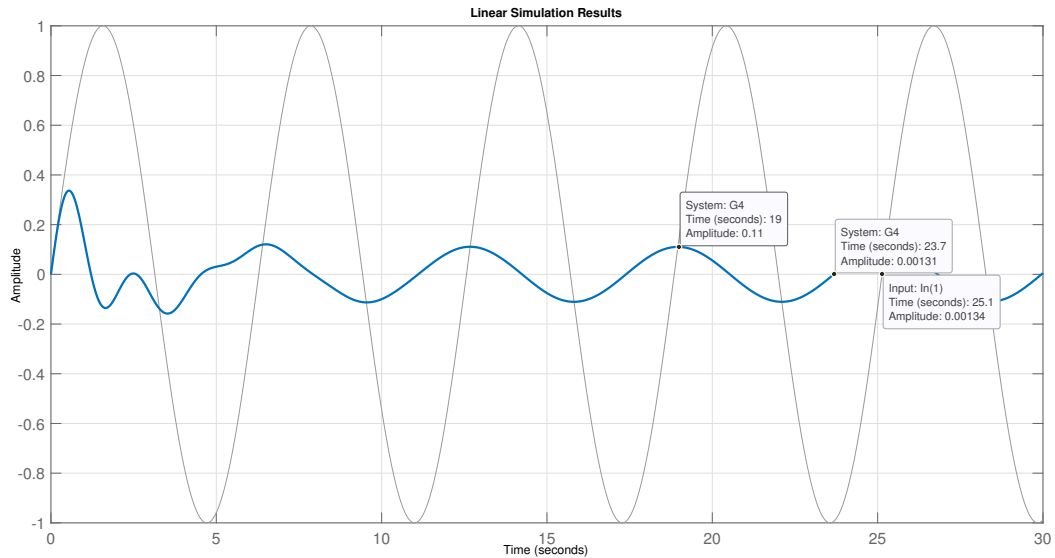


Figure 1: Răspunsul la intrare sin pentru sistemul  $G_4$  (linie albastra). Intrarea  $\sin(t)$  (linie gri)

- Calculați modulul  $M = |G(j\omega)|$  și faza  $\varphi = \angle G(j\omega)$ , unde  $\omega$  este pulsația semnalului de intrare.

Un script exemplu care calculează modulul și faza lui  $G(j\omega)$ , unde  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ , este dat mai jos.

Listing 2: mag\_phase.m

```

1
2 w = 1; % the frequency of the input (rad/s)
3 s = j*w; % replace s by jw
4 M = abs((s^2+s+1)/(s^2+s+10)) % compute the magnitude of G(jw)
5 phi = angle((s^2+s+1)/(s^2+s+10)) % compute the phase angle of G(jw)

```

Rezultatele pentru  $G_4$  ar trebui să fie:  $M = 0.1104$  și  $\varphi = 1.4601$ .

Dacă intrarea este  $r(t) = \sin(t)$ , amplitudinea intrării este  $A = 1$  și pulsația  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ .

Amplitudinea ieșirii este  $B = A \cdot M = 1 \cdot 0.11 = 0.11$ .

- Determinați modulul și faza din figura rezultată din simulare. Din Figura 1 se observă că amplitudinea ieșirii este cea calculată anterior. Defazajul între intrare și ieșire este pozitiv (avans de fază). Din figură se poate calcula ca diferența între momentele de timp la care intrarea și ieșirea trec prin 0:  $\varphi = 25.1 - 23.7 = 1.4$ .

3. Desenați diagrama Bode, cu funcția Matlab *bode* și citiți de pe grafic amplitudinea și faza dacă intrarea este  $r(t) = \sin(t)$ .

O diagramă Bode (cu grid) se obține cu:

`bode(G4), grid on`

Vezi Figura 2 pentru desen.

Dacă intrarea este  $r(t) = \sin(t)$ , amplitudinea intrării este  $A = 1$  și pulsația  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ . Din diagrama de modul, pentru  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  se citește modulul în decibeli  $M^{dB}$  și din diagrama de fază se citește defazajul în grade,  $\varphi$ .

$$M^{dB} = -19 \Rightarrow 20 \log_{10} M = -19 \Rightarrow \log_{10} M = -\frac{19}{20} \Rightarrow M = 10^{-19/20} = 0.11$$

$$\varphi^{deg} = 83.9 \Rightarrow \varphi^{rad} = 83.9 \cdot \frac{\pi}{180} = 1.46 \text{ rad.}$$

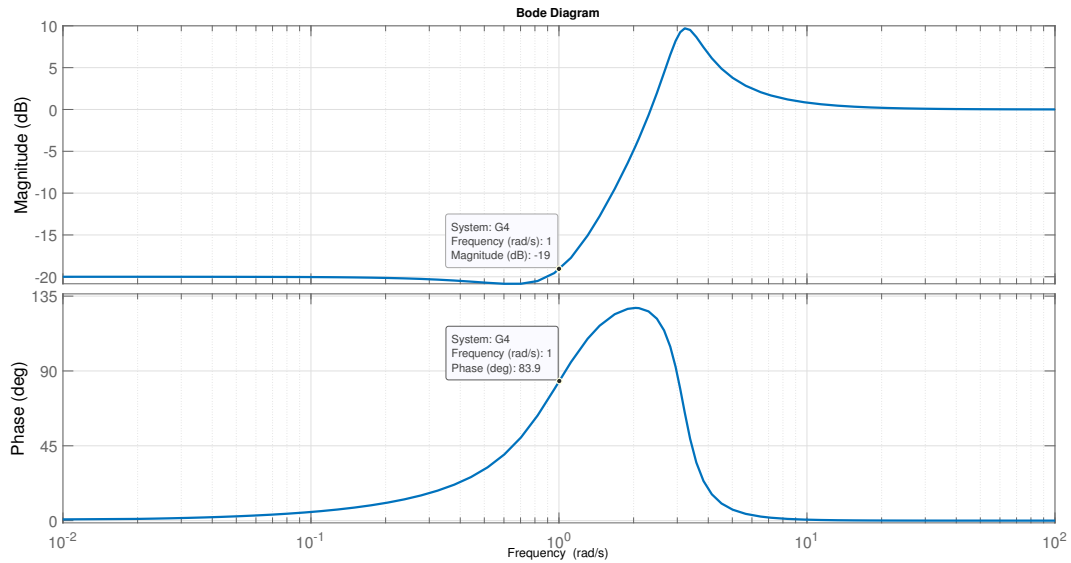


Figure 2: Diagrama Bode pentru  $G_4$

**Exercițiul 2.** 1. Schițați diagrama Bode a sistemului cu funcția de transfer:

$$G_1(s) = \frac{s^2}{(10s + 1)^2}$$

2. Determinați pulsațiile pentru care sistemul amplifică sau atenuează intrările sinusoidale.
3. Pentru fiecare sistem, determinați din diagrama de modul amplitudinea semnalului de ieșire, dacă intrarea este:

$$u_1(t) = \sin(t), \quad u_2(t) = 0.1\sin(10^{-3}t), \quad u_3(t) = 3\sin(100t).$$

### Soluție

1. Schițați diagrama Bode pentru:

$$G_1(s) = \frac{s^2}{(10s + 1)^2} = s^2 \cdot \frac{1}{10s + 1} \cdot \frac{1}{10s + 1}$$

- $G_{01}(s) = s^2 = \frac{1}{s^{-2}} = \frac{k}{s^n} \Rightarrow k = 1, n = -2$ 
  - Diagrama de modul este o linie dreaptă, care:
    - \* are panta  $-20 \cdot n = -20 \cdot (-2) = 40$  dB/dec
    - \* pentru  $\omega = 1 = 10^0$  este egală cu  $M^{dB}|_{\omega=1} = k^{dB} = 20 \log_{10}(1) = 0$  dB.
  - Diagrama de fază este o linie constantă:  $\phi_1 = -90 \cdot n = -90 \cdot (-2) = 180^\circ$ .
  - Vezi Figura 3.
- $G_{02}(s) = G_{03}(s) = \frac{1}{10s + 1} = \frac{1}{T_1 s + 1} \Rightarrow T_1 = 10$ 
  - Diagrama de modul:
    - \* asimptota la pulsații joase: 0 dB
    - \* asimptota la pulsații înalte are panta -20 dB/dec.
    - \* pulsația de frângere  $\omega_{c1} = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{10} = 10^{-1}$  rad/s.
  - Diagrama de fază este o arctangentă,  $\phi \in (0, -90^\circ)$ , cu inflexiune la  $(\omega_c = 10^{-1}, -45^\circ)$
  - Vezi Figura 4.

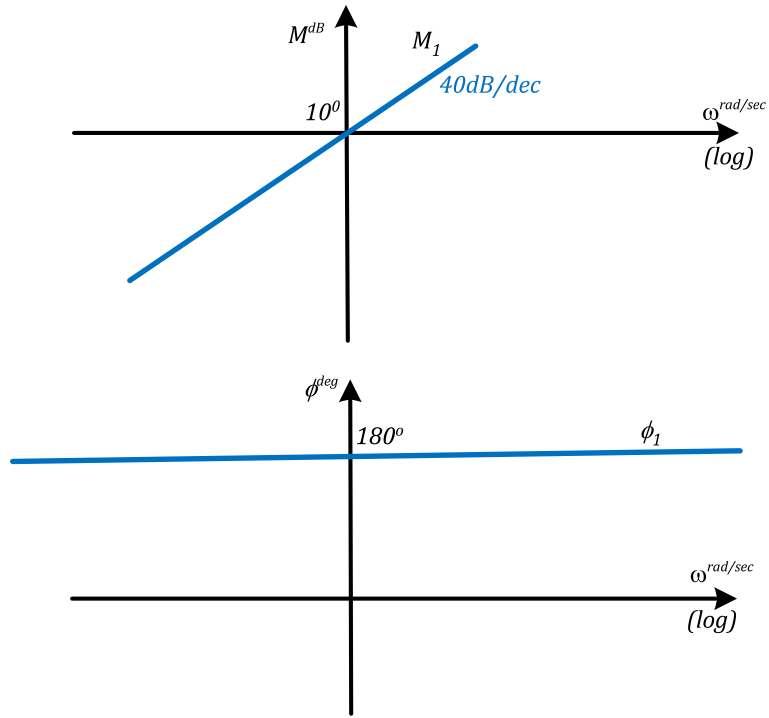


Figure 3: Diagrama Bode  $G_{01}$

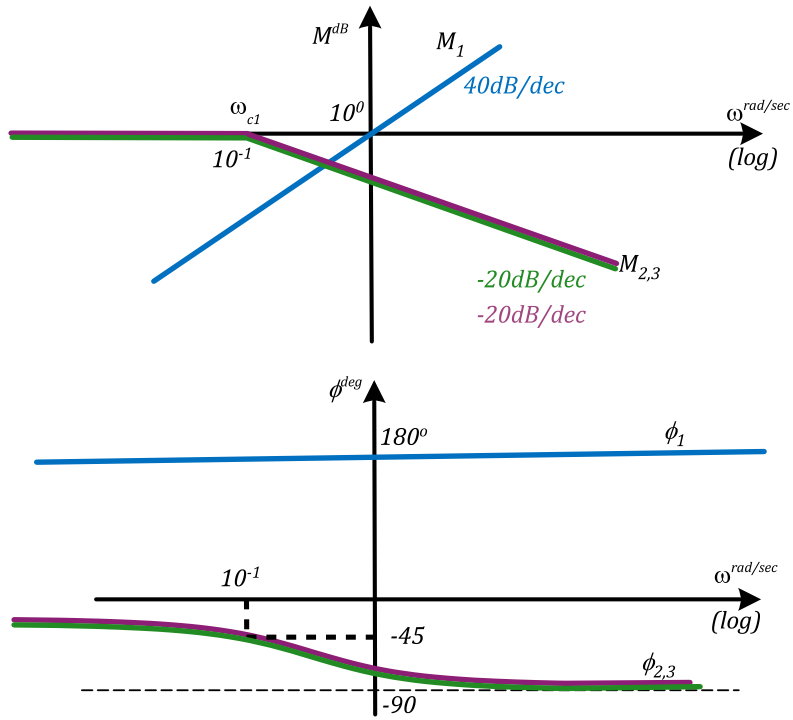


Figure 4: Diagrama Bode  $G_{01}$ ,  $G_{02}$ ,  $G_{03}$

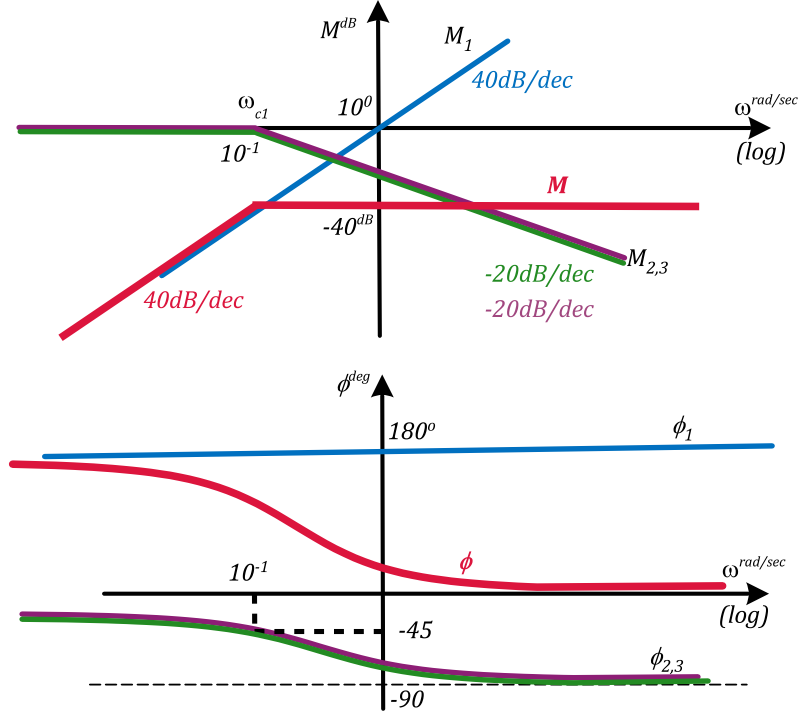


Figure 5: Diagrama Bode rezultantă  $G_1(s)$

Diagrama rezultantă este prezentată în Figura 5.

2. Determinați pulsații pentru care sistemul amplifică sau atenuează intrările sinusoidale.

În Figura 5, observați că pentru toate pulsațiile  $\omega \in (0, \infty)$ , modulul  $M^{dB}$  este negativ (desenat cu linie roșie).

$$M^{dB} < 0 \Rightarrow 20 \log_{10} M < 0 \Rightarrow \log_{10} M < 0 \Rightarrow M < 1$$

Toate intrările sin vor fi atenuate pentru că amplitudinea ieșirii va rezulta mai mică decât a intrării:  $A \cdot M < A$ .

3. Din diagrama Bode (vezi Figura 6) se determină amplitudinea ieșirii, dacă intrarea este:

- $u_1(t) = \sin(t)$ :  $A = 1$ ,  $\omega = 1$  rad/s.

Din diagrama de modul se citește  $M^{dB}|_{\omega=10^0} = -40$  dB.

$$20 \log_{10} M = -40 \Rightarrow \log_{10} M = -\frac{40}{20} = -2 \Rightarrow M = 10^{-2}$$

iar amplitudinea ieșirii este:  $A \cdot M = 1 \cdot 10^{-2} = 10^{-2}$ .

- $u_2(t) = 0.1 \sin(10^{-3}t)$ :  $A = 0.1$ ,  $\omega = 10^{-3}$  rad/s.

Din diagrama de modul se citește  $M^{dB}|_{\omega=10^{-3}} = -120$  dB.

$$20 \log_{10} M = -120 \Rightarrow \log_{10} M = -\frac{120}{20} = -6 \Rightarrow M = 10^{-6}$$

iar amplitudinea ieșirii este:  $A \cdot M = 0.1 \cdot 10^{-6} = 10^{-7}$ .

- $u_3(t) = 3 \sin(100t)$ :  $A = 3$ ,  $\omega = 10^2$  rad/s.

Din diagrama de modul se citește  $M^{dB}|_{\omega=10^2} = -40$  dB.

$$20 \log_{10} M = -40 \Rightarrow \log_{10} M = -\frac{40}{20} = -2 \Rightarrow M = 10^{-2}$$

iar amplitudinea ieșirii este:  $A \cdot M = 3 \cdot 10^{-2} = 0.003$ .

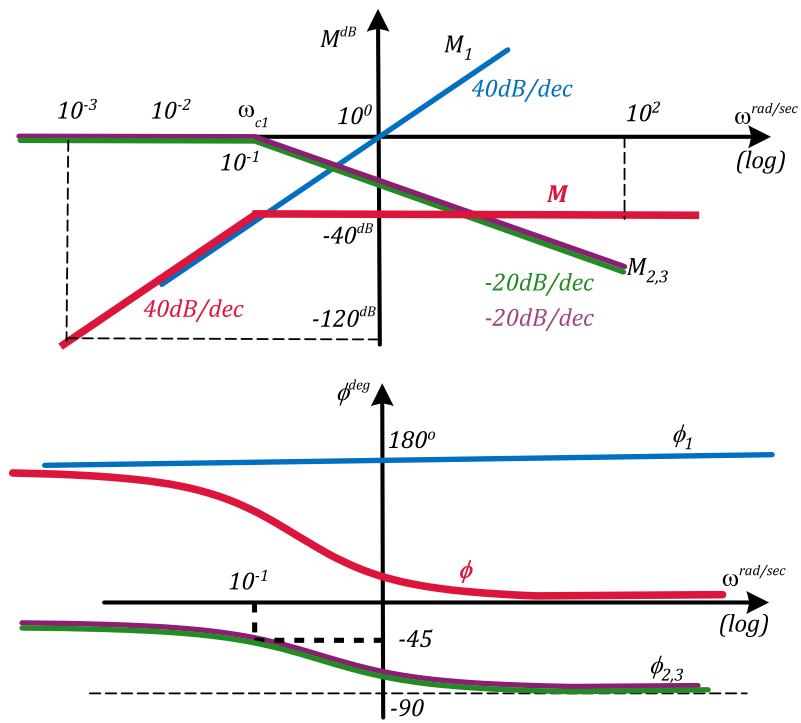


Figure 6: Diagrama Bode