Locul rădăcinilor. Exemplu

Un sistem cu reacţie negativă unitară (Figura 1) are funcţia de transfer în buclă deschisă:

$$G(s) = \frac{k(s+1)}{s(s-1)(s+6)}$$

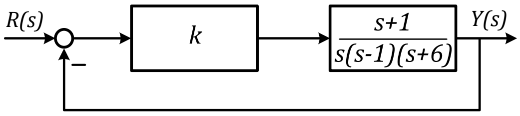

Figure 1: Sistem cu reacţie negativă unitară

(A) Desenaţi locul rădăcinilor pentru $k \in [0, \infty)$ (inclusiv asimptotele, punctul de desprindere, intersecţia cu axa imaginară).

(B) Analizaţi stabilitatea sistemului în buclă închisă pentru $0 \le k < \infty$.

(C) Pe locul rădăcinilor, marcaţi polii complecşi cu factor de amortizare maxim.

Soluţie

(A) Se desenează locul rădăcinilor (LR) urmărind regulile:

1. Se scrie ecuaţia caracteristică astfel încât parametrul k apare ca factor de multiplicare

$$1 + kP(s) = 0.$$

Dacă $G(s)$ este funcţia de transfer a sistemului deschis, ecuaţia caracteristică a sistemului **închis** este:

$$1 + G(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{k(s+1)}{s(s-1)(s+6)} = 0$$

2. Se factorizează $P(s)$ în forma cu n_p poli şi n_z zerouri: $1 + k\frac{\prod_{i=1}^{n_z}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n_p}(s+p_j)} = 0$ (zerourile sunt: $-z_i$, $i = \overline{1, n_z}$ iar polii: $-p_j$, $j = \overline{1, n_p}$)

   Funcţia de transfer în buclă deschisă este deja sub formă de factori. Zerourile şi polii sistemului deschis sunt:

   - zero: -1, numărul de zerouri $n_z = 1$
   - polii: 0, 1 şi -6, numărul de poli $n_p = 3$

3. Se plasează polii şi zerourile sistemului deschis în planul s cu simbolurile: **x** - polii, **o** - zerourile.

   Se începe desenul: în planul complex se plasează simbolul o pentru zeroul de la -1 şi trei simboluri $\times$ pentru polii 0, 1 şi -6 (Figura 2).

4. Se determină numărul de ramuri $SL = n_p$, unde $n_p \ge n_z$, n_p = numărul de poli, n_z = numărul de zerouri ai sistemului deschis.

   Funcţia de transfer a sistemului deschis are $n_p = 3$ poli, funcţia de transfer a sistemului închis va avea de asemenea trei poli, iar LR va avea trei ramuri separate - câte una pentru traiectoria fiecărui pol a sistemului închis.

5. Se determină segmentele LR de pe axa reală:

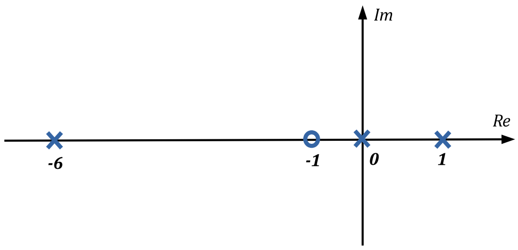

Figure 2: Polii şi zerourile sistemului deschis

i. LR se află pe axa reală la stânga unui număr impar de poli şi zerouri ai sistemului deschis
Pe axa reală marcaţi segmentele dintre 1 şi 0 şi de asemenea, între -1 şi -6 ca aparţinând LR (vezi Figura 3) deoarece:
- orice punct între 1 şi 0 aparţine LR pentru că se află la stânga *unui* pol al sistemului deschis (număr impar).
- orice punct între -1 şi -6 aparţine LR pentru că se află la stânga a *trei* poli şi zerouri a sistemului deschis (număr impar).

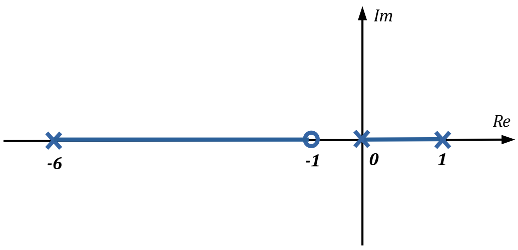

Figure 3: Segmentele LR de pe axa reală

ii. LR începe într-un pol al sistemului deschis şi de termină la un zero sau la infinit de-a lungul unei asimptote (dacă numărul de zerouri este mai mic decât numărul de poli)
Marcaţi cu săgeţi sensul traiectoriilor polilor sistemului închis, după cum se deplasează pe LR când k creşte de la 0 la ∞. Traiectoriile încep în polii sistemului deschis 0, 1 şi -6 cu $k = 0$. Deooarece aceste puncte sunt localizate pe axa reală, trtaiectoriile vor urma la început ramurile deja marcate ca aparţinând de LR de la axa reală (vezi Figura 4)
- o ramură începe în polul localizat la -6 ($k = 0$) şi tinde spre zeroul localizat la -1 ($k \to \infty$).
- celelalte două ramuri încep în polii sistemului deschis de la 0 şi 1 ($k = 0$) şi urmează segmentul deja marcat ca parte din LR, după cum k creşte. Aceasta înseamnă că există o valoare pozitivă a lui k pentru care polii sistemului închis se întâlnesc (sunt reali şi egali) într-un *punct de desprindere*, localizat pe axa reală între 0 şi 1. în acest punct, ramurile LR se desprind de pe axa reală şi tind spre ∞ de-a lungul asimptotelor (care vor fi calculate în continuare).

Deoarece sistemul deschis are $n_p = 3$ poli şi $n_z = 1$ zerouri, înseamnă că o ramură va începe într-un pol al sistemului deschis (-6, în acest caz) şi se termină într-un zero al sistemului deschis (-1, în acest caz). Celelalte două ramuri vor tinde spre infinit de-a lungul a $n_p - n_z = 2$ asimptote.

6. LR este simetric faţă de axa reală.
Întotdeauna ţineţi minte această regulă când desenaţi LR. Pe LR se desenează polii sistemului închis când un parametru variază, iar polii sunt rădăcini de polinoame. Acestea

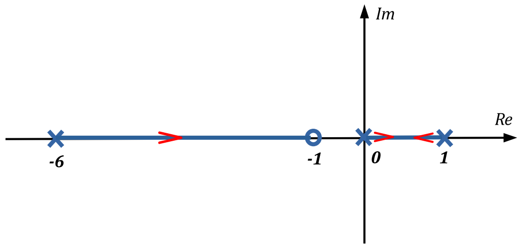

Figure 4: LR începe în polii sistemului deschis

pot fi reale (localizate pe axa reală) sau complex conjugate, caz în care sunt întotdeauna simetrice faţă de axa reală.

7. LR tinde la infinit de-a lungul asimptotelor centrate în σ_A şi care fac unghiurile Φ_A cu axa reală pozitivă.

$$\sigma_A = \frac{\sum(poles) - \sum(zeros)}{n_p - n_z} = \frac{\sum_{j=1}^{n_p}(-p_j) - \sum_{i=1}^{n_z}(-z_i)}{n_p - n_z}$$

$$\sigma_A = \frac{(1+0-6)-(-1)}{3-1} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\Phi_A = \frac{2q+1}{n_p - n_z} \cdot 180^o, \quad q = 0, 1, 2, ...(n_p - n_z - 1)$$

$$\Phi_A = \frac{2q+1}{2} \cdot 180^o, \quad q = 0, 1, \Rightarrow \Phi_A = \begin{cases} \dfrac{2 \cdot 0 + 1}{2} \cdot 180^o = 90^o, \text{ pentru } q = 0 \\ \dfrac{2 \cdot 1 + 1}{2} \cdot 180^o = 270^o, \text{ pentru } q = 1 \end{cases}$$

Asimptotele sunt semidrepte care încep pe axa reală în $\sigma_A = -2$. Una dintre acestea face cu axa reală pozitivă un unghi $\Phi_{A1} = 90^o$, iar cealaltă un unghi $\Phi_{A1} = 270^o$, după cum se arată în Figura 5. Pentru că LR este simetric faţă de axa reală, asimptotele vor fi de asemenea simetrice.

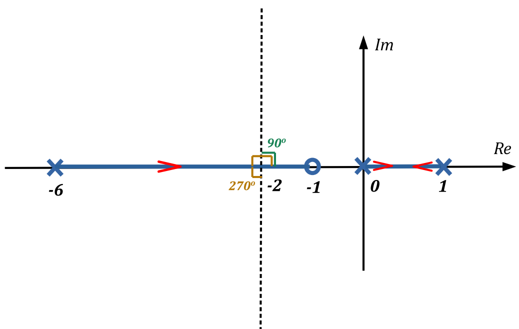

Figure 5: Asimptotele LR

Acum, putem deja schiţa LR (vezi Figura 6). Se vor schiţa două curbe **simetrice** care încep pe axa reală în punctul de desprindere (a cărui valoare exactă va fi calculată) şi tind spre asimptotele calculate la punctul 7.. Deoarece curbele trebuie să treacă din semiplanul drept al planului complex în cel stâng, LR va intersecta axa imaginară. Punctele de intersecţie cu axa imaginară se calculează la pasul următor.

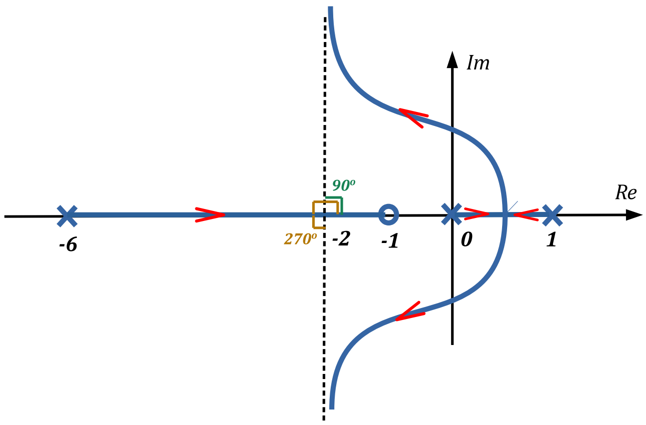

Figure 6: LR prima schită

8. Din criteriul Routh-Hurwitz ⇒ intersecţia cu axa imaginară (dacă există).

   Criteriul Routh-Hurwitz se va utiliza pentru a determina valoarea lui k pentru care sistemul închis este la limita de stabilitate, adică valoarea lui k pentru care LR intersectează axa imaginară. Dacă această valoare se înlocuieşte în ecuaţia caracteristică, se pot calcula polii sistemului închis localizaţi pe axa imaginară, sau punctele de intersecţie cu axa imaginară.

   Ecuaţia caracteristică a sistemului închis este:

$$1+\frac{k(s+1)}{s(s-1)(s+6)}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{s(s-1)(s+6)+k(s+1)}{s(s-1)(s+6)}=0$$

sau

$$s(s-1)(s+6)+k(s+1)=0 \quad \Rightarrow \quad s^3+5s^2+(k-6)s+k=0$$

   Tabelul Routh este:

$$\begin{array}{ccccc} s^3 & : & 1 & & k-6 \\ s^2 & : & 5 & & k \\ s^1 & : & \dfrac{5(k-6)-k}{5} & & 0 \\ s^0 & : & k & & \end{array}$$

   Sistemul închis este la limita de stabilitate dacă în prima coloană a tabelului Routh sunt elemente egale cu zero, iar toate celelalte sunt pozitive:

   - Pentru $k=0$, sistemul închis are un pol în 0. Acesta a fost deja determinat deoarece o ramură a LR începe (pentru $k=0$) într-un pol al sistemului deschis localizat la 0. Sistemul închis este instabil deoarece pentru $k=0$ există şi un pol pozitiv (la 1). Sau, din tabelul Routh, pentru $k=0$, există un coeficient negativ $\dfrac{5(0-6)-0}{5}=-6$ pe prima coloană.
   - Pentru $\dfrac{5(k-6)-k}{5}=0$ se obţine $\dfrac{4k-30}{5}=0$ sau $k=\dfrac{15}{2}$. Sistemul închis este la limita e stabilitate şi are doi poli complex conjugaţi pe axa imaginară. Aceştia se calculează din ecuaţia caracteristică pentru $k=\dfrac{15}{2}$.

$$s^3+5s^2+(\frac{15}{2}-6)s+\frac{15}{2}=0 \quad \Rightarrow \quad \underline{s^3}+\underline{\underline{5s^2}}+\underline{\frac{3}{2}s}+\underline{\underline{\frac{15}{2}}}=0$$

$$\Rightarrow \quad s(s^2+\frac{3}{2})+5(s^2+\frac{3}{2})=0 \quad \Rightarrow \quad (s+5)(s^2+\frac{3}{2})=0$$

   cu soluţiile: $s_1=-5$, $s_{2,3}=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}j=\pm 1.22j$, ceea ce înseamnă că LR va intersecta axa imaginară, simetric, la $\pm 1.22j$ (vezi Figura 7).

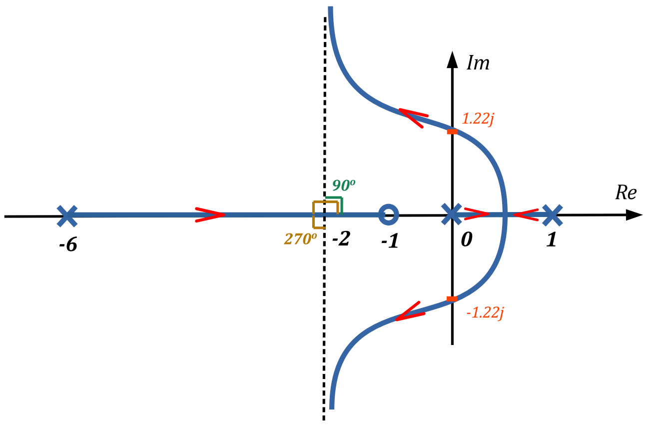

Figure 7: Intersectia cu axa imaginară

9. Se determină punctul de desprindere de pe axa reală (dacă există)

   i. Se scrie: $k = -\frac{1}{P(s)} = p(s)$, (din $1 + kP(s) = 0$)

   Din ecuaţia caracteristică $1 + \dfrac{k(s+1)}{s(s-1)(s+6)} = 0$ se obţine

$$k = -\frac{s(s-1)(s+6)}{s+1} = p(s)$$

   ii. Se obţine $dp(s)/ds = 0$

   Se calculează derivata lui $p(s)$ şi se egalează cu zero:

$$\begin{aligned}\frac{dp(s)}{ds} &= \frac{d}{ds}\left(\frac{s^3+5s^2-6s}{s+1}\right) = \frac{(3s^2+10s-6)(s+1)-(s^3+5s^2-6s)}{(s+1)^2} = \\ &= \frac{2s^3+8s^2+10s-6}{(s+1)^2} = 0\end{aligned}$$

   iii. Se determină rădăcinile lui (b) sau se utilizează o metodă grafică pentru a găsi maximul lui $p(s)$.

   Punctul de desprindere trebuie să fie un număr real (este întotdeauna localizat pe axa reală). Din cele determinate la punctul **(A)**(5.)ii ştim că va fi în intervalul (0, 1). Rădăcinile polinomului $2s^3 + 8s^2 + 10s - 6$ sunt: $r_{1,2} = -2.21 \pm 1.41j$ şi $r_3 = 0.443$. Deoarece singura rădăcină reală între 0 şi 1 este $r_3 = 0.443$, aceasta este punctul de desprindere.
   Locul rădăcinilor este desenat şi prezentat în Figura 8.

   În Figura 9 se prezintă o reprezentare în care ramurile LR sunt evidenţiate cu: culoare roşire - pentru ramura care începe ($k = 0$) în polul sistemului -6 şi se termină ($k \to \infty$) în zeroul -1; cu culorile albastru şi verde - ramurile corespunzătoare celorlalţi doi poli ai sistemului închis, care încep ($k = 0$) în polii 0 şi 1 şi tind ($k \to \infty$) în mod simetric spre asimptote.

(B) Analiza stabilităţii pentru $0 \le k < \infty$.

- Pentru $k = 0$ polii sistemului închis sunt în polii sistemului deschis 0, 1 şi -6, iar sistemul este instabil.
- Pentru $k \in (0, \frac{15}{2})$, polii sistemului închis sunt după cum urmează:
  - un pol se deplasează de la -6 spre -1 pe axa reală. Va fi real şi negativ pentru orice valoare a lui k în acest interval.

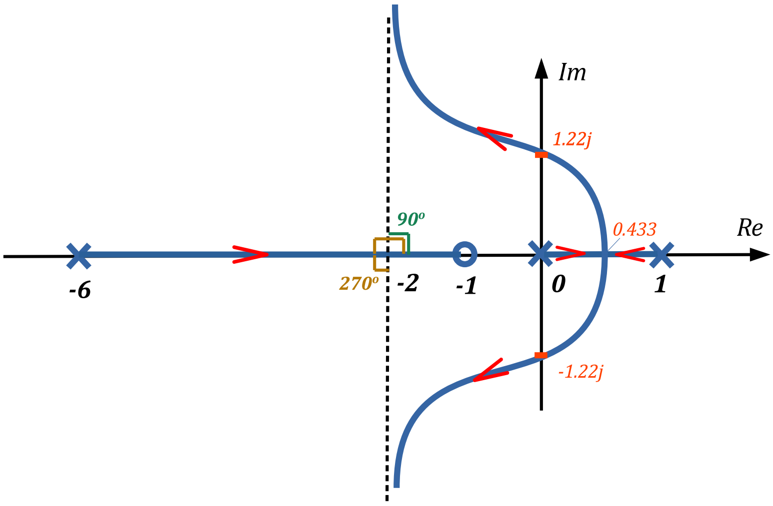

Figure 8: LR final

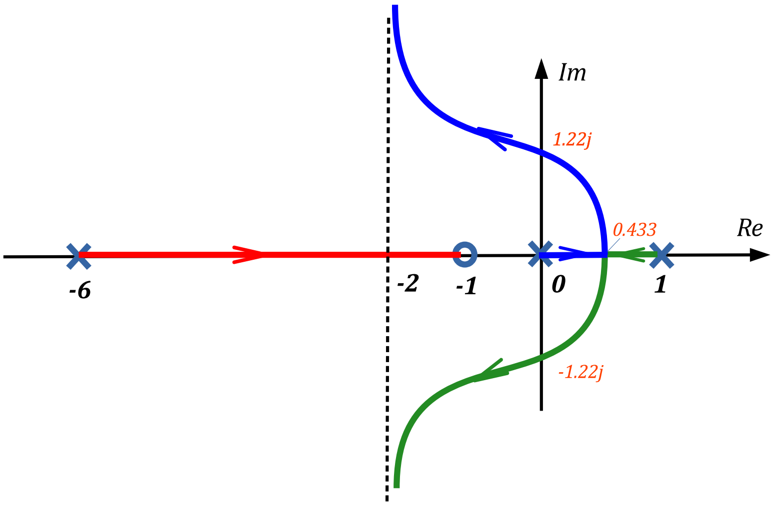

Figure 9: LR final

  - doi poli se deplasează din 0 şi respectiv 1, în sensul indicat de săgeţi, până când se întâlnesc în punctul de desprindere şi devin egali cu 0.433. Vor fi reali şi pozitivi, sistemul închis va fi instabil, iar răspunsul să va creşte aperiodic spre infinit. Când k creşte peste valoarea sa de la punctul de desprindere, aceşti doi poli devin complex-conjugaţi cu partea reală pozitivă. Sistemul este de asemenea instabil, dar răspunsul va oscila şi va creşte spre infinit.

- Pentru $k = \dfrac{15}{2}$ sistemul are un pol în $(-6, -1)$ şi doi poli pe axa imaginară $\pm 1.22j$. Sistemul închis este la limita de stabilitate.
- Pentru $k > \dfrac{15}{2}$, sistemul închis are un pol real stabil în $(-6, -1)$ şi doi poli complex-conjugaţi în semiplanul stâng al planului complex, care se deplasează spre asimptote după cum $k \to \infty$. Sistemul este stabil şi subamortizat.

(C) Pe locul rădăcinilor, marcaţi polii complecşi cu factor de amortizare maxim.

Observaţi, mai întâi, că polii trebuie să aibă partea reală negativă (trebuie să fie localizaţi în semiplanul stâng al planului complex), altfel sistemul închis este instabil şi nu este amortizat. Dacă polii sistemului închis sunt în semiplanul stâng, unul dintre aceştia este real, iar doi sunt complex-conjugaţi, după cum se vede din LR.

Apoi, se analizează relaţia între polii complecşi şi factorul de amortizare. Se consideră o pereche de poli complex conjugaţi $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}j$, reprezentaţi în planul complex după cum se arată în Figura 10.

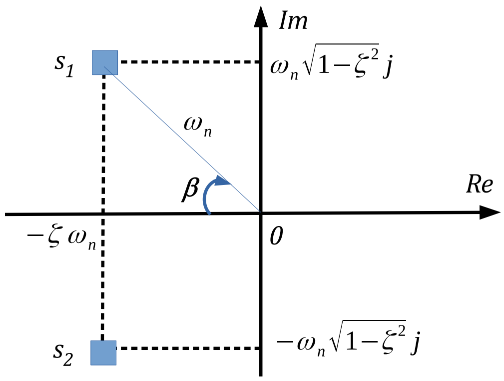

Figure 10: Polii complecşi şi factorul de amortizare

Distanţa de la origine la polul s_1 este şi valoarea absolută a numărului complex s_1 şi poate fi calculat (vezi Teorema lui Pitagora):

$$|s_1| = \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)} = \omega_n$$

Unghiul β între linia care uneşte polul cu originea şi axa reală negativă are cosinusul:

$$\cos\beta = \frac{\zeta\omega_n}{\omega_n} = \zeta$$

Deoarece funcţia cos este descrescătoare în $(0,\ \frac{\pi}{2})$, factorul de amortizare maxim este dat de un unghi β minim.

Pe locul rădăcinilor se caută să se determine polii complecşi care uniţi cu originea fac un unghi minim cu axa reală negativă (vezi Figura 11). Unghiul minim (şi factorul de amortizare maxim) se obţine dacă polii sunt pe dreaptă trasată din origine, tangentă la locul rădăcinilor.

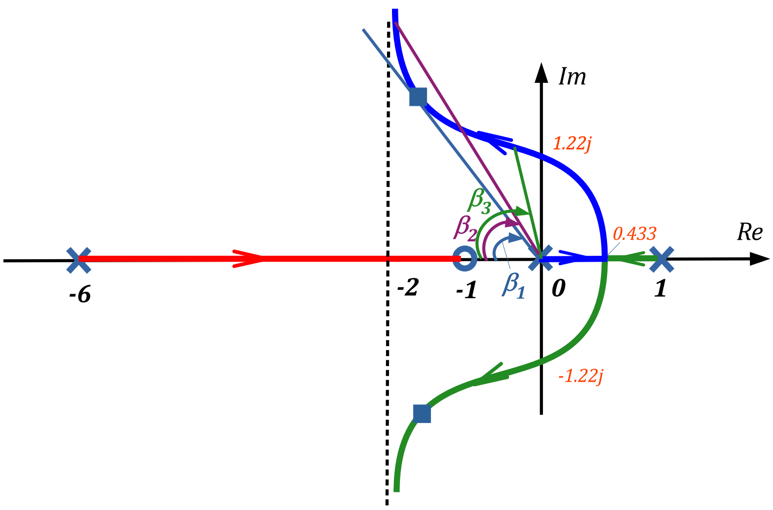

Figure 11: Complex poles with maximum damping

Observaţi că în Figura 11, unghiul β_1 este mai mic decât orice unghi β_2 sau β_3. Polii complex-conjugaţi cu factor de amortizare maxim sunt marcaţi cu simbolul albastru ■.

Soluţia utilizând Matlab

- Creaţi funcţia de transfer a sistemului **deschis** utilizând funcţiile *tf* sau *zpk*, pentru $k = 1$. Funcţia *zpk* poate fi mai convenabilă dacă pentru funcţia de transfer se cunosc polii şi zerourile. Forma generală este:

  ```
  sys=zpk([zeros],[poles],gain)
  ```

  care, în acest exemplu este:

  ```
  sys=zpk([-1],[0 1 -6],1)
  ```

- Desenaţi locul rădăcinilor cu funcţia *rlocus*, sau *rltool*.

  ```
  rlocus(sys)
  ```

  sau

  ```
  rltool(sys)
  ```

  Funcţia *rlocus* va calcula şi desena locul rădăcinilor pentru **sistemul închis** cu reacţie negativă, dacă funcţia de transfer a sistemului deschis este introdusă ca argument al funcţiei. Vedeţi *help rlocus* pentru detalii.

  Funcţia *rltool* deschide o interfaţă de proiectare, desenează locul rădăcinilor şi de asemenea, desenează implicit şi răspunsul sistemului închis pentru un semnal de intrare treaptă. Polii sistemului închis (coloraţi în roz) pot fi mutaţi (click-and-drag), de-a lungul locului rădăcinilor. Răspunsul la treaptă al sistemului închis se modifică în conformitate cu poziţia polilor. Vedeţi *help rltool* pentru detalii.

- Introduceţi *grid* în figură. Right-click pe LR şi selectaţi *grid*. Observaţi că pentru acest tip de reprezentare, se afişează semicercuri centrate în origine, care sunt linii cu ω_n constant şi semidrepte radiale care încep în origine şi care sunt linii pe care factorul de amortizare ζ este constant. Revedeţi Figura 10 şi observaţi că:

  - Dacă distanţa de la origine la un pol complex este pulsaţia naturală ω_n, toţi polii cu aceeaşi pulsaţie naturală sunt localizaţi pe un semicerc cu centrul în origine şi raza ω_n.
  - Dacă cosinusul unghiului între un pol complex, origine şi axa reală negativă este factorul de amortizare: $\cos\beta = \zeta$, toţi polii complecşi localizaţi pe o dreaptă care începe în origine au acelaşi unghi β şi astfel, acelaşi factor de amortizare ζ.

  În interfaţa *rltool* mutaţi polii sistemului închis (punctele roz) şi observaţi valoarea factorului de amortizare în partea de jos a ferestrei. Factorul de amortizare maxim poate fi obţinut dacă polii sistemului închis sunt la intersecţia între LR şi dreapta care trece prin origine şi e tangentă la LR. Pentru acest exemplu, factorul de amortizare maxim este $\zeta = 0.44$.