Teoria sistemelor. Laborator 3: Analiza sistemelor de ordinul 1 şi 2. Stabilitatea sistemelor liniare şî continue

Objective: La sfârşitul acestul laborator studenţii trebuie să poată să:

- Analizeze sisteme de ordinul 1 şi 2
- Analizeze stabilitatea sistemelor liniare şi continue
- Creeze şi simuleze modele Simulink

1 Analiza sistemelor de ordinul 1 şi 2

Exerciţiul 1. Se consideră un sistem de ordinul 1 cu funcţia de transfer:

$$H(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

1. Desenaţi răspunsul sistemului pentru o intrare treaptă unitară utilizând funcţiile Matlab *tf* şi *step*, sau Simulink, pentru:
   (i) $K = 1$, $T = 1$
   (ii) $K = 3$, $T = 1$
   (iii) $K = 1$, $T = 3$
   (iv) $K = 1$, $T = 6$
2. Comparaţi rezultatele şi discutaţi influenţa factorului de amplificare K şi a constantei de timp T asupra răspunsului sistemului.
3. Determinaţi timpul de răspuns în fiecare caz.

Soluţie

Simulare cu funcţii Matlab. Scrieţi următorul script şi executaţi-l.

Listing 1: ex2r.m

```
close all
clear all
clc

% introduceti functiile de transfer
K = 1; T = 1; sys1=tf(K, [T 1]);
K = 3; T = 1; sys2=tf(K, [T 1]);
K = 1; T = 3; sys3=tf(K, [T 1]);
K = 1; T = 6; sys4=tf(K, [T 1]);

% simulati raspunsul la treapta pentru 25 secunde
step(sys1,sys2,sys3,sys4,25), grid on
legend('H1: K = 1; T = 1', 'H2: K = 3; T = 1', 'H3: K = 1; T = 3', 'H4: K = 1; T = 6')
```

Simulare cu Simulink. Vizionaţi tutorialele MathWorks:

- Getting Started with Simulink, Part 1
- Getting Started with Simulink, Part 2

sau urmaţi paşii:

(a) In fereastra de comenzi scrieţi *simulink* la prompt, sau apăsaţi butonul *Simulink* din tab-ul Home.

(b) In interfaţa Simulink alegeţi *Blank model* $\rightarrow$ *Create a blank model*

(c) In fereastra modelului, deschideţi biblioteca de blocuri apăsând butonul *Library browser*.

(d) Aranjaţi fereastra *Library browser* şi fereastra modelului astfel încât să puteţi trage blocuri din bibliotecă în model.

(e) Deschideţi biblioteca *Sources* cu un click.

(f) Observaţi că toate biblliotecile şi blocurile sunt aranjate în ordine alfabetică. Selectaţi *Step* şi plasaţi-l în fereastra modelului.

(g) Deschideţi blocul *Step* cu dublu-click şi setaţi *Step time* la 0 (simularea va începe la timpul 0).

(h) Deschideţi biblioteca *Continuous* şi plasaţi un bloc *Transfer fcn* în fereastra modelului. Plasaţi-l în partea dreaptă a blocului *Step*.

(i) Schimbaţi numele blocului (în fereastra modelului) prin modificarea textului de sub bloc. De exemplu scrieţi *H1*.

(j) Dublu-click pe blocul *H1* şi completaţi coeficienţii numărătorului şi numitorului funcţiei de transfer pentru primul caz.

(k) Din biblioteca *Sinks* luaţi un *Scope* şi plasaţi-l în dreapta blocului *H1*.

(l) Conectaţi ieşirea lui *H1* la *Scope*.

(m) Copy-paste blocul *H1* de 3 ori sau plasaţi încă 3 funcţii de transfer din biblioteca *Continus*.

(n) Schimbaţi-le numele în *H2*, *H3* şi *H4*, apoi schimbaţi coeficienţii numărătorului şi numitorului pentru fiecare funcţie de transfer cu valorile din exerciţiu.

(o) Conectaţi toate intrările la blocul sursă de semnal treaptă *Step* şi toate ieşirile la *Scope*. Modelul poate fi similar cu Figura 1.

(p) Schimbaţi *Stop time* - în partea de sus a ferestrei modelului - la 25 (adica timpul de simulare va fi 25 secunde),

(q) Salvaţi modelul.

(r) Apăsaţi *Run*

(s) Dublu-click pe blocul *Scope* pentru a vizualiza rezultatele simulării. În fereastra *Scope*, găsiţi *View* în meniu şi bifaţi *Legend*.

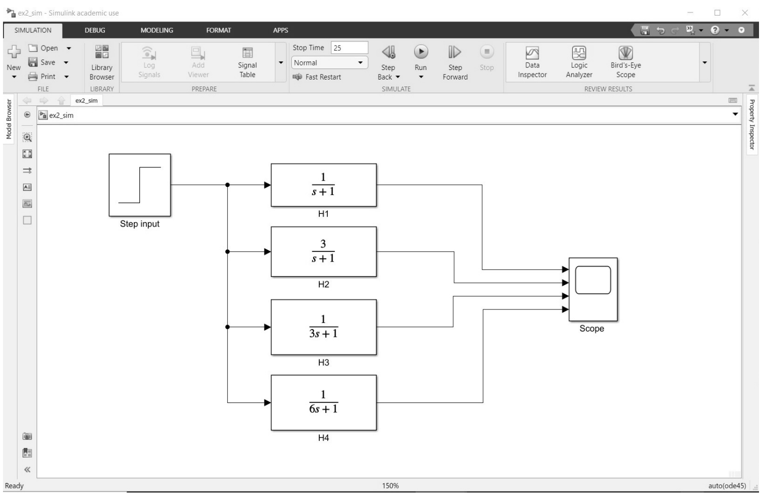

Figura 1: Modelul Simulink

Comparaţi rezultatele. Comparaţi toate graficele obţinute şi discutaţi influenţa factorului de proporţionalitate şi a constantei de timp

Timpul de răspuns. Pentru un sistem de ordinul 1, timpul de răspuns este 4 constante de timp, $t_s = 4T$. Determinaţi timpul de răspuns în toate cazurile şi identificaţi-l în graficele obţinute.

Exerciţiul 2. Consideraţi un sistem de ordinul 2 cu funcţia de transfer:

$$H(s) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

1. Desenaţi răspunsul sistemului la o intrare treaptă unitară utilizând funcţiile Matlab *tf* şi *step*, sau Simulink, pentru:
   (i) $K = 1$, $\omega_n = 1$, $\zeta = 0$
   (ii) $K = 1$, $\omega_n = 3$, $\zeta = 0$
   (iii) $K = 1$, $\omega_n = 1$, $\zeta = 0.1$
   (iv) $K = 1$, $\omega_n = 1$, $\zeta = 0.6$
   (v) $K = 1$, $\omega_n = 1$, $\zeta = 1$
   (vi) $K = 1$, $\omega_n = 1$, $\zeta = 2$
   (vii) $K = 3$, $\omega_n = 1$, $\zeta = 0.6$
2. Comparaţi rezultatele de la (i) si (ii) şi discutaţi influenţa pulsaţiei naturale ω_n asupra răspunsului sistemului.
3. Comparaţi rezultatele de la (iii),(iv), (v) si (vi) şi discutaţi influenţa factorului de amortizare ζ asupra răspunsului sistemului.
4. Comparaţi rezultatele de la (iv) si (vii) şi discutaţi influenţa factorului de amplificare K asupra răspunsului sistemului. Determinaţi timpul de raspuns.

Idee. Dacă alegeţi să simulaţi răspunsul la treaptă al sistemelor cu funcţii Matlab, scrieţi un script după modelul din exerciţiul anterior. Creaţi 3 figuri: una pentru (i) şi (ii), a doua pentru (iii), (iv), (v) şi (vi), iar a treia pentru (iv) şi (vii).

Dacă alegeţi să utilizaţi Simulink, modelul poate fi similar cu Figura 2.

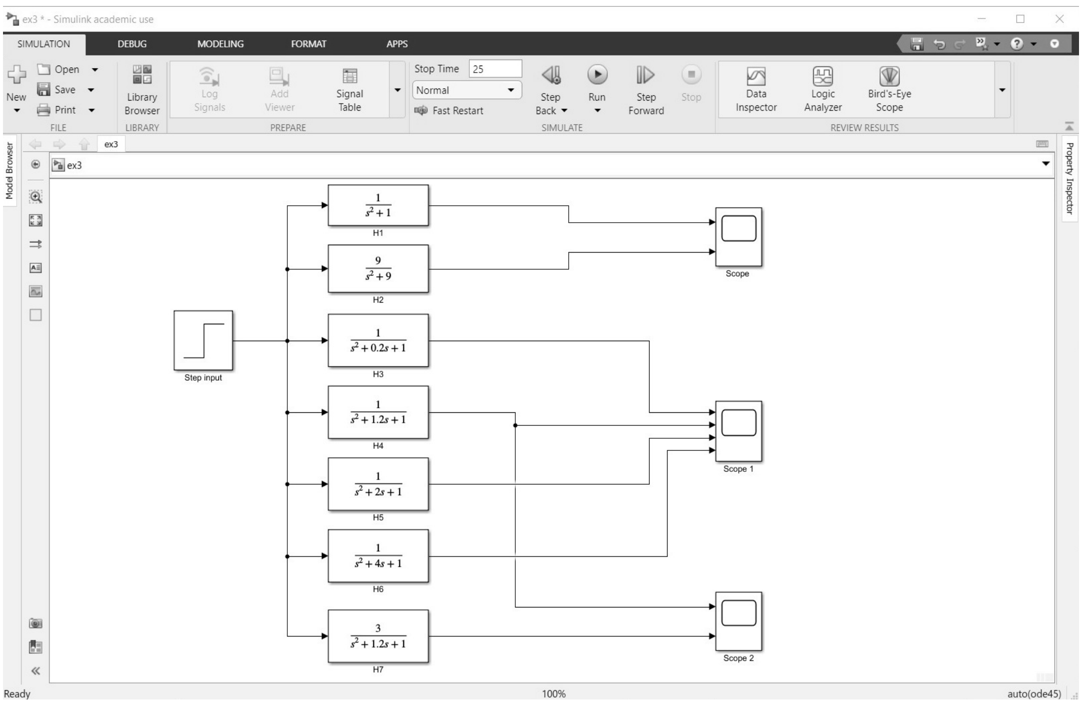

Figura 2: Modelul Simulink

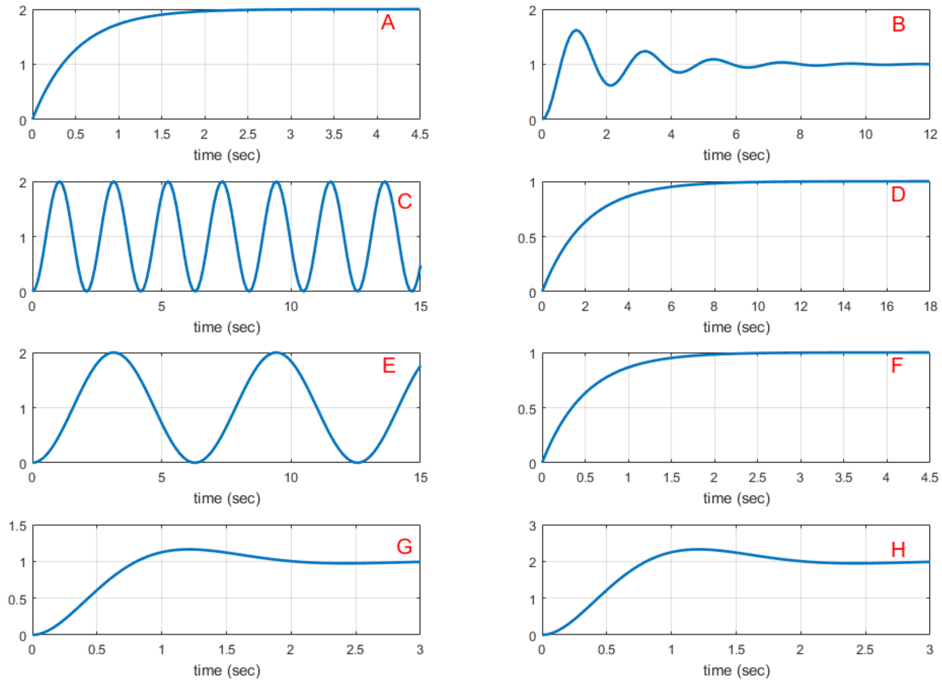

Figura 3:

Exerciţiul 3. În Figura 3 se prezintă răspunsurile la treaptă unitară a opt sisteme. Determinaţi care dintre următoarele funcţii de transfer corespunde fiecărui grafic şi explicaţi alegerea.

$$H_1(s) = \frac{0.5}{s+0.5}, \qquad H_2(s) = \frac{2}{s+2}, \qquad H_3(s) = \frac{4}{s+2}$$

$$H_4(s) = \frac{1}{s^2+1}, \qquad H_5(s) = \frac{9}{s^2+9}$$

$$H_6(s) = \frac{9}{s^2+0.9s+9}, \quad H_7(s) = \frac{9}{s^2+3s+9}, \quad H_8(s) = \frac{18}{s^2+3s+9}$$

2 Stabilitatea sistemelor liniare continue

Exerciţiul 4. Determinaţi polii, reprezentaţi grafic răspunsul la impuls şi la treaptă şi discutaţi stabilitatea sistemelor cu următoarele funcţii de transfer:

$$H_1(s) = \frac{4}{s^2+5s+4}, \qquad H_2(s) = \frac{4}{s^2+s+4}, \qquad H_3(s) = \frac{4}{s^2-4}, \qquad H_4(s) = \frac{4}{s^2-s+4},$$

$$H_5(s) = \frac{4}{s^2+4}, \qquad H_6(s) = \frac{4}{s(s+4)}, \qquad H_7(s) = \frac{4}{(s^2+4)^2}$$

Idee. *Utilizaţi funcţiile Matlab* impulse *şi* step *şi plasaţi ambele răspunsuri pentru fiecare funcţie de transfer în aceeaşi figură (cu funcţia Matlab* subplot*). Pentru $H_5(s)$ şi $H_7(s)$ setaţi timpul final de simulare la* 30 *sec.*
În Listing 2 se prezintă un script exemplu care calculează polii şi desenează răspunsul la treaptă şi impuls pentru H_1 şi H_7.
Completaţi codul pentru funcţiile de transfer H_2-H_6, analizaţi polii şi răspunsurile în fiecare caz, apoi discutaţi stabilitatea sistemelor.

Listing 2: step_impulse_plots_ro.m

```
close all
clear all
clc
% deseneaza raspunsul la treapta si impuls
% H1:
num=4; den=[1 5 4];                    % introduceti numaratorul si numitorul
H1 = tf(num, den);                     % creati functia de transfer H1
disp('polii pentru H1:')
r=roots(den)                           % determinati radacinile numitorului
figure
subplot(211), step(H1), grid on        % timpul final de simulare
subplot(212), impulse(H1), grid on     % este ales automat
%------------------------------------
% H7:
num=4; den=conv([1 0 4], [1 0 4]);     % numitorul este (s^2+4)^2
H7 = tf(num, den);                     % creati functia de transfer  H7
disp('polii pentru H7:')
r=roots(den)                           % determinati radacinile numitorului
figure
subplot(211), step(H7,30), grid on     % timpul final de simulare
subplot(212), impulse(H7,30), grid on  % este ales de utilizator (30 sec)
```

Exerciţiul 5. Determinaţi stabilitatea următoarelor polinoame caracteristice utilizând criteriul Routh-Hurwitz:

1. $s^2 + 4s + 1$
2. $s^3 + 2s^2 + 5s + 8$
3. $s^3 + 2s^2 - 5s + 8$
4. $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5$
5. $s^3 + s^2 + s + k$

Idee. *Revedeţi criteriul Routh-Hurwitz prezentat în curs (C4_slides_rom.pdf, pag 26-31) şi exemplul. Înainte de a întocmi tabelul Routh nu uitaţi să verificaţi condiţiile necesare.*

Exerciţiul 6. Consideraţi sistemul în buclă închisă din Figura 4.

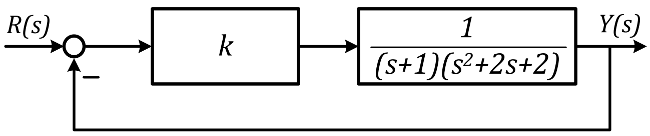

Figura 4: Sistem în buclă închisă

1. Utilizând criteriul Routh-Hurwitz determinaţi valorile lui k pentru care sistemul închis este stabil.
2. Reprezentaţi grafic (în MATLAB, cu simbolul $*$) rădăcinile ecuaţiei caracteristice a sistemului închis pentru $k \in [0,\ 15]$ şi discutaţi localizarea polilor sistemului închis şi stabilitatea sistemului.

Exerciţiul 7. Modelul prădător-pradă, [1]. Problema prădător-pradă se referă la un sistem ecologic în care există două specii, dintre care una este hrană pentru cealaltă. Această problemă a fost studiată de decenii şi este cunoscută ca prezentând o dinamică interesantă. Un model simplificat pentru această situaţie poate fi construit dacă se consideră vitezele de naştere şi moarte a fiecărei specii. Fie $H(t)$ numărul de iepuri (pradă) şi $L(t)$ numărul de lincşi (prădători). Intrarea în sistem este variabila u care corespunde vitezei de naştere a iepurilor şi poate fi influenţată de cantitatea de hrană pentru iepuri. Dinamica sistemului este modelată ca:

$$\begin{aligned} \frac{dH(t)}{dt} &= (1.6 + u(t))H(t)\left(1 - \frac{H(t)}{125}\right) - \frac{3.2H(t)L(t)}{50 + H(t)}, \quad H \geq 0, \\ \frac{dL(t)}{dt} &= 0.6\frac{3.2H(t)L(t)}{50 + H(t)} - 0.56L(t), \quad L \geq 0 \end{aligned}$$

Figura 5: Prădător şi pradă. Poza arată un linx canadian şi un iepure de zăpadă, hrana primară a linxului, [1].

Modelul poate fi liniarizat in jurul unui punct de echilibru $(H_e,\ L_e,\ u_e)$ care s-a determinat egal cu $H_e = 20.6$, $L_e = 29.5$ pentru $u_e = 0$. Se obţine un sistem dinamic liniar:

$$\frac{dz_1(t)}{dt} = 0.13z_1(t) - 0.93z_2(t) + 17.2u(t) \tag{1}$$

$$\frac{dz_2(t)}{dt} = 0.57z_1(t) \tag{2}$$

unde $z_1(t) = H(t) - H_e$ şi $z_2(t) = L(t) - L_e$ (adică variaţia numărului de iepuri şi de lincşi în jurul valorilor de echilibru).

Schema bloc pentru acest sistem este prezentată în Figura 6, unde $Z_1(s) = \mathcal{L}\{z_1(t)\}$, $Z_2(s) = \mathcal{L}\{z_2(t)\}$, $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$.

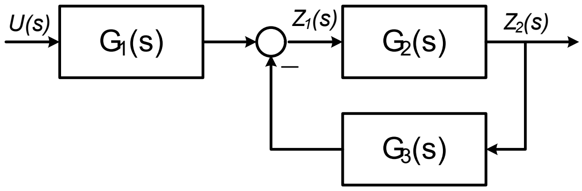

Figura 6: Block diagram of the predator-prey system

1. Aplicaţi transformata Laplace relaţiilor (1) şi (2) şi determinaţi funcţiile de transfer $G_1(s)$, $G_2(s)$ şi $G_3(s)$, După cum se arată în Figura 6.
2. Construiţi schema bloc în Simulink
3. Simulaţi răspunsul sistemului pentru o intrare treaptă, reprezentaţi grafic evoluţia lui $z_1(t)$ şi $z_2(t)$ şi explicaţi rezultatele.
4. Arătaţi că funcţiile de transfer $\dfrac{Z_1(s)}{U(s)}$ şi $\dfrac{Z_2(s)}{U(s)}$ sunt instabile.

Bibliografie

[1] Karl Astrom, Richard Murray, *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*, Princeton University Press, 2008, $http://www.cds.caltech.edu/ murray/amwiki/index.php/Main_Page$