



## Väderparametrars inverkan på energiförluster i en fastighet - en studie av värmeflöden

*Kandidatarbete inom civilingenjörsprogrammen Teknisk Fysik och Elektroteknik*

Erik Ahlqvist  
Ylva Dahl  
Mats Lindström  
Dan Ståby

Institutionen för Teknisk Fysik  
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA  
Göteborg, Sverige, 2012  
Kandidatarbete TIFX-02-12-19

KANDIDATARBETE TIFX-02-12-19

# Väderparametrars inverkan på energiförluster i en fastighet – en studie av värmeflöden

Kandidatarbete vid Teknisk Fysik

Erik Ahlqvist, Ylva Dahl, Mats Lindström, Dan Ståby

Institutionen för Teknisk Fysik

# Förord

Vi vill rikta ett varmt tack till alla som har hjälpt oss att möjliggöra detta projekt.

Vi vill speciellt tacka Angela Sasic, lektor på Institutionen för Byggnadsteknologi på Chalmers, för att ha bistått oss med litteratur så väl som modeller, Torbjörn Grönbergs med kollegor på SMHI för information om prognosstyrning av inomhusklimatet och sitt resonemang kring sådana modeller. Vi vill även tacka Brett W. Bader och Tamara G. Kolda vid Sandia National Laboratories för deras matlabkod ”Tensor Toolbox” som har används vid lösning av finita element av Navier-Stokes ekvationer.

Vidare vill vi tacka Peter Särneö, tekniskt ansvarig för fastigheten på Walleriusgatan, som ställt upp på möten och besvarat våra frågor, Peter Apell för korrekturläsning och många användbara kommentarer på små och stora texter, handledarna på Avdelningen för fackspråk och kommunikation som genom sin kunskap väglett och utbildat oss i processen kring att skriva en större rapport. Vi vill också tacka civilingenjör Johan Lindberg för utförlig korrekturläsning under arbetets avslutande del.

Vi vill även tack vänner och familj som på olika sätt bidragit med sin kunskap och sitt stöd under hela arbetet.

Avslutningsvis vill vi rikta ett stort tack till vår handledare Magnus Karlsteen, docent vid Chalmers Tekniska Universitet, som stöttat oss och visat oss på rätt väg genom hela processen.

## Sammanfattning

Avsikten är att undersöka hur energi flödar genom en fastighet beroende på vilket väder det är. Detta syftar i sin tur till att kunna minska fastighetens löpande energikostnader samt att få ett jämnare inomhusklimat. Därför presenteras även några olika metoder samt kostnadsförslag till dessa för hur energiflödena kan minskas. De åtgärder som behandlas är isolering av de ännu oisolerade väggarna, SMHI:s prognosstyrningstjänst samt termostater inne i lägenheterna.

Fastigheten har delats upp i byggnadsskalet med väggar, tak, fönster och grund där energiflödet undersökts genom var och en av delarna för sig. Solinstrålning genom fönstren och ofrivillig ventilation, alltså drag på grund av vind, behandlas också separat.

Termisk energi överförs genom strålning, konvektion och ledning och i varje beräkning av fastighetens energiflöde är det viktigt att undersöka alla sådana flöden. För detta har vi använt både analytiska beräkningsmetoder och simuleringar i *Matlab* och *Comsol Multiphysics*. En återkommande beräkningsmetod är finita elementmetoden och givetvis är även värmeledningsekvationen en central del.

Det visade sig att de främsta källorna till energiförluster är fönstren och ofrivillig ventilation. Att ta hänsyn till solinstrålning ger en besparing på över 17 % av energin en solig dag vilket motsvarar 4 % av energin för alla dagar. Vinden sänker temperaturen och att ta hänsyn till den kan ge en jämnare inomhustemperatur men inte nödvändigtvis en minskning i energiåtgång. För att avgöra exakt hur mycket energi som försvinner vid vind behöver ett trycktest göras.

Det kom också fram att de olika väggarnas reaktionstid vid ett väderomslag varierade kraftigt – från under 4 timmar till över 100 och det behöver man ta hänsyn till i injusteringen av sitt regelsystem.

## Abstract

The purpose of this project was to investigate the flow of energy through a building due to the effect of the weather. Another objective with this investigation is, if possible, to reduce the heating costs of the building and to get a more stable indoor climate. Hence, there is also an included comparison of some other energy saving methods. Weather-forecast-based control of the heating system is a commercial product supplied by e.g. SMHI. Other considerations investigated for reducing heating costs are insulations the walls, or to mount electrical thermostat devices on the radiators in the building.

The different parts of the building have been separated to wall, windows, roof and foundation. This made the quantification of energies easier to compute. Solar irradiation through windows and infiltration losses due to involuntary ventilation are discussed.

Thermal energy is transmitted through radiation, convection and heat conduction. These three fundamental physical processes have been used in the investigation of every subflow. To evaluate the differential equations and physical properties, both analytical and numerical methods were used. These include the finite element method which were implemented *ad hoc* in *Matlab*. The softwares *Comsol Multiphysics* have also been used to evaluate differential equations with the finite element method.

The models in this Bachelor's thesis showed that the primary sources of energy expense is radiation through windows and infiltration losses. It is also possible to reduce the energy consumption by at least 17% by adjusting the heating system of the building to account for solar irradiation a sunny day. This means that it is possible to save over 4% of the energy expense through a whole year. The wind lowers the temperature inside. This means that it is probably not possible to save energy by taking consideration of wind's effect. To completely understand how much energy is lost due to infiltration a blow door test needs to be performed.

Another main conclusion of this project was that the different walls had very different reaction times when the weather changed rapidly. It varied from below 4 hours up to above 100 hours, and it is important to have this in mind when adjusting the heating system of the building.

# Innehåll

<b>1</b>	<b>Inledning</b>	<b>1</b>
1.1	Syfte . . . . .	2
1.1.1	Frågeställningar . . . . .	3
1.1.2	Avgränsingar . . . . .	3
1.2	Dokumentets disposition . . . . .	4
1.3	En beskrivning av fastigheten på Walleriusgatan och dess konstruktion	5
1.3.1	Väggarna . . . . .	6
1.3.2	Taket . . . . .	8
1.3.3	Fönstren . . . . .	9
1.3.4	Grunden . . . . .	9
1.3.5	Uppvärmning och ventilation . . . . .	9
1.4	Definition av väder för tillämpningar i denna rapport . . . . .	9
1.4.1	Väderstationen . . . . .	10
1.4.2	Solintensitetsmätaren . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Teoretiskt ramverk</b>	<b>12</b>
2.1	Svartkroppsstrålning . . . . .	12
2.1.1	Härledning . . . . .	13
2.1.2	Strålning från omgivningen . . . . .	14
2.2	Strålning genom glas . . . . .	15
2.2.1	g-värden . . . . .	15
2.2.2	Långvågsstrålning . . . . .	16
2.3	Värmeledning . . . . .	17
2.4	Konvektion . . . . .	20
2.4.1	Vindens konvektionskoefficient . . . . .	23
2.4.2	Boussinesqs approximation . . . . .	24
2.4.3	Tryckdrivet luftläckage . . . . .	25
2.5	Finita elementmetoden . . . . .	26
2.5.1	Spatial diskretisering . . . . .	27
2.5.2	Påtvängande av randvillkor . . . . .	27
2.6	Optimering med Newton-Raphsons metod . . . . .	28
2.6.1	Konvergens och konvergenskriterier . . . . .	29
2.6.2	Förbättrad Newton-Raphson . . . . .	30
2.7	Naturkonstanter för luft . . . . .	31
2.8	Free-running temperature – en konceptuell beskrivning . . . . .	33
2.9	Ekvivalent temperatur – en konceptuell beskrivning . . . . .	34

2.9.1	Beräkning av ekvivalent temperatur . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Metod</b>	<b>36</b>
3.1	Strålning genom glas . . . . .	36
3.1.1	Solinstrålning . . . . .	37
3.1.2	Långvågsstrålning . . . . .	38
3.1.3	Övriga strålningseffekter . . . . .	38
3.1.4	Soltimmar under dygnet . . . . .	39
3.2	Finita elementlösning av värmeledningsekvationen . . . . .	40
3.2.1	Lösning av problem med tidsberoende randvillkor . . . . .	42
3.3	Energiflöde genom väggar, burspråk och tak . . . . .	43
3.4	Energiflöde genom grunden . . . . .	45
3.5	Finita element av inkompressibel fluid . . . . .	47
3.6	Studie av konvektionsparametern . . . . .	49
3.7	Datorsimulering av ofrivillig ventilation . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Resultat</b>	<b>55</b>
4.1	Kvantifiering av konstanta energiflöden . . . . .	55
4.1.1	Uppvärmning från människor . . . . .	56
4.1.2	Varmvattencirkulation i fastigheten . . . . .	56
4.1.3	Energi från elektrisk apparatur . . . . .	56
4.1.4	Totalt energiflöde från konstanta energikällor . . . . .	56
4.2	Energiflöde genom fönster . . . . .	57
4.2.1	Direkt solstrålning . . . . .	57
4.2.2	Långvågsstrålning . . . . .	58
4.2.3	Värmeledning . . . . .	58
4.3	Energiflöde genom väggar . . . . .	60
4.3.1	Flöde vid termisk jämvikt . . . . .	60
4.3.2	Flöde genom en vägg vid transient förlopp . . . . .	65
4.3.3	Luftflöde genom väggar – drag . . . . .	66
4.4	Energiflöde genom grunden . . . . .	69
4.5	Sammanfattning av energiflöden: energibalanser . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>72</b>
5.1	Diskussion kring metoden . . . . .	72
5.2	Diskussion kring resultatet . . . . .	73
5.3	Jämförelse med andra energibesparande åtgärder . . . . .	74
5.3.1	Tilläggsisolering . . . . .	75
5.3.2	Termostater på radiatorerna . . . . .	76
5.3.3	Prognosstyrning . . . . .	76
5.3.4	Ekonomiska uppskattningar kring de olika åtgärderna . . . . .	77
5.4	Rekommendationer till fortsatt arbete . . . . .	79
<b>6</b>	<b>Slutsats</b>	<b>81</b>
	<b>Referenser</b>	<b>83</b>

<b>A</b>	<b>Formler för linjära triangulära element</b>	<b>87</b>
<b>B</b>	<b>Matlab-kod</b>	<b>88</b>
B.1	Beräkning av solens position . . . . .	88
B.2	Beräkning av effekt genom fönster . . . . .	90
B.3	Finita element av energiflöde genom grund . . . . .	91



# Kapitel 1

## Inledning

Energi flödar hela tiden in och ut ur fastigheter, bland annat genom människors aktivitet, ventilation och olika väderparametrar. Dessa energiflöden kan delas in i konstanta och variabla. Vädret är främsta variabla energikällan och vädret kan, genom sina skiftningar, både ge och ta energi från byggnaden. För att bibehålla en jämn inomhustemperatur i fastigheten kan inte en konstant mängd energi tillföras av värmesystemet, utan energitillförseln måste hela tiden regleras efter de opåverkbara energiflödena, där vädret är en stor del.

I dagsläget regleras många fastigheters energisystem endast med avseende på utomhustemperaturen i varje enskilt ögonblick och på så sätt blir det alltid en fördröjning i uppvärmningen. Det leder till ojämn inomhustemperatur och eventuellt också till onödig energiåtgång vilket även gäller fastigheten i det här projektet.

Projektets uppdragsgivare Peter Särneö sköter utrustning för uppvärmning av en äldre fastighet på Walleriusgatan i Göteborg. Han driver ett projekt med syfte att minska energiförbrukningen i fastigheten samtidigt som ett behagligt inomhusklimat bibehålls. Det är också önskvärt att automatisera fastighetens värmeanläggning. Inom ramen för detta har en väderstation och en solintensitetsmätare installerats på taket till fastigheten. Dessa enheter ger en möjlighet att anpassa uppvärmningssystemet till aktuellt väder. Denna typ av effektivisering av energianvändningen i en fastighet är idag högaktuell på grund av höga energipriser och ökad förståelse för hur vår energianvändning kan påverka klimatet negativt.

Det har tidigare gjorts tre kandidatarbeten som har undersökt fastigheten på Walleriusgatan. Detta projekt bygger primärt på de två senare, då det första arbetet studerade fastighetens energisystem, vilket ligger utanför ramarna för denna studie. De andra två gjordes åren 2008 och 2010 och då inom området energieffektivisering av fastigheten på Walleriusgatan.

Det första kandidatarbetet av dessa två *Energiflödet genom ett hus* [1], behandlade hur väl energiflödet genom fastigheten stämmer överens med en simulering som gjordes med ett befintligt beräkningsprogram. Arbetet syftade till att på ett mer fysikaliskt sätt tolka termerna som används för energieffektivitet. För att kvantifiera energiflödena utfördes mätningar i fastigheten. Resultaten verifieras med ett

välkänt simuleringsprogram, *IDA Indoor Climate and Energy*, och slutsatsen är att simuleringsprogrammet fungerar bra. De konstaterar även att för att mäta på fastigheten så är det många parametrar som måste bestämmas och de rekommenderar utökade mätningar. En ytterligare slutsats är att solinstrålningen bidrar till en stor del av uppvärmningen, och att man för att utnyttja det skulle kunna koppla ett regulatorsystem till en väderstation.

Det andra kandidatarbetet, *Optimal energihushållning i en fastighet* [2], går ytterligare ett steg och tar fram underlag för att automatisera och optimera den befintliga fastighetens värmeförsörjning utifrån flera väderparametrar, fastighetens specifikationer och de boendes verksamhet. Det har i högre grad samma infallsvinklar som detta arbete, men ur ett mer övergripande perspektiv. En stor del av arbetet använder dessutom de avancerade energimodelleringsverktyg *Revit Architecture 2010* och *EcoTect Analysis 2010* där en 3D-modell av fastigheten används och även studerar vädrets effekt med en väderfil över Göteborg.

Sedan de tidigare projekten avslutades har fastighetens energiförsörjningssystem uppdateras och detta arbete blir en vidareutveckling av de modeller som kan användas för att modellera hur värme flödar in i och ut ur byggnaden. Vi upplever att det inte är helt utrett hur stor påverkan de olika väderaspekterna, såsom vind, sol och regn, har. Detta är essentiellt för att förstå var de energibesparande åtgärderna ska sättas in för att bli så effektiva som möjligt och för att i förlängningen eventuellt ska kunna dimensionera ett specialanpassat regelsystem.

Ett närliggande område är prognosstyrning av fastigheters energisystem som har både likheter och olikheter med reglering utifrån det momentana och gångna vädret. Båda systemen styr värmesystem i byggnader med hjälp av olika väderparametrar samt byggnadsspecifika parametrar såsom material och täthet. Skillnaden är varifrån den hämtar väderinformation. Prognosstyrning bygger på prognoser, vilket innebär vissa osäkerheter. När man styr med avseende på det momentana eller gångna vädret är nackdelen att parametrarna redan påverkat inomhustemperaturen innan regelsystemet kan korrigera för dem.

SMHI har under en tid arbetat med prognosstyrning av fastigheter. Deras projekt inleddes med en avhandling inom området av Roger Taesler. Den behandlar främst området ekvivalent temperatur, och från den synvinkeln har SMHI tagit fram ett system som anpassas specifikt till varje fastighet. De har konstruerat ett antal modeller över byggnader där de även tagit hänsyn till byggnadernas läge och när systemet installeras i en fastighet väljs den modell som stämmer bäst överens med det faktiska byggnaden. Systemet tar sedan emot prognoser från SMHI och reglerar radiatorsystemet efter dessa. Systemet är kommersiellt och SMHI förbättrar systemet löpande.

## 1.1 Syfte

Detta arbete syftar till att undersöka vilka energiförluster en fastighet har och hur dessa påverkas av olika väderrelaterade parametrar, som solinstrålning, utomhustemperatur och vind. Målet är att finna en beskrivning av hur energiflödena in i

och ut ur fastigheten påverkas av några olika väderparametrar. Eftersom vi inte har tillgång till data från fastigheten sker detta med analytiska och numeriska metoder baserade på väldokumenterade fysikaliska principer och statistik från SMHI. Primärt kommer vi att undersöka en fastighet på Walleriusgatan i Göteborg, men många av resultaten kommer att kunna appliceras även på andra byggnader. Då de tidigare kandidatarbetena med liknande tema valt att behandla fastigheten som en helhet så tänker vi behandla de olika energiflödena separat och genom detta nå en större förståelse för hur väder påverkar inomhusklimat och energiåtgång.

Beskrivningen av hur vädret påverkar energiflödena skall sedan kunna leda till en modell för hur fastighetens reglerbara energiflöden ska kunna anpassas efter vädret så att en önskad inomhustemperatur bibehålls. I fastigheten som behandlas i projektet finns en väderstation monterad och det är ifrån den väderdata är tänkta att hämtas. Att en inomhustemperaturen hålls mer konstant ska inte bara ge en trivsammare inomhusmiljö för de boende, utan även en energibesparing för fastigheten. Vi hoppas också kunna ge några byggnadstekniska förslag på åtgärder och kvantifiera hur stora besparingar detta skulle kunna ge – både energimässiga och ekonomiska.

Projektets modell av konvektion bygger på att luften närmast fastigheten värms upp och bildar ett isolerande lager. Värmeledning genom och värmestrålning, både i form av solstrålning och mer långvågig svartkroppsstrålning, mot väggar och tak kommer också att behandlas. Det kommer tas hänsyn till den fördröjning som sker i fastighetens väggar så väl som den direkta uppvärmning och avkylning som sker med solinstrålning genom fönster respektive ofrivillig ventilation i form av drag på grund av vind.

På sikt hoppas vi att vårt arbete ska leda fram till ett modell som ger ett värde på hur mycket energi som behöver tillföras fastigheten i varje givet ögonblick, beroende på vilka värden väderstationen tidigare har tagit emot. I förlängningen ska detta kunna leda till energibesparande åtgärder för både den här och andra befintliga fastigheter.

### **1.1.1 Frågeställningar**

Sammanfattningsvis ska projektet alltså besvara frågeställningarna:

Går det att spara energi genom att ta hänsyn till fler väderparametrar än utomhustemperaturen?

Vilka väderparametrar spelar i så fall mest in på energiflödena in och ut genom fastigheten?

### **1.1.2 Avgränsingar**

Under arbetets gång har vi varit tvungna att göra ett flertal avgränsningar, och dessa presenteras löpande genom hela rapporten. De främsta av dessa avgränsningar är dock värda att nämnas inledningsvis.

För det första har en hel del grova approximationer gjorts som kan leda till stora fel i beräkningarna. Exempelvis har alla modeller skapats i antingen en eller två dimensioner. Denna förenkling kan, vid olämplig användning, introducera stora avvikelser från det faktiska fallet.

För det andra har simuleringarna utförts vid relativt stabil väderlek. Inverkan av regn, snö, hagel, stormvindar och så vidare introducerar mycket mer komplicerade samband.

Vidare har vi avgränsat oss till att modellera tidpunkter på året då värmesystemet är i bruk, det vill säga under relativt kyliga dagar. Metoderna i denna rapport kan dock anpassas till varmare dagar för reglering av kylsystem.

Slutligen ska nämnas att inga av simuleringarna över värmeflöden är jämförda med experimentell data, då sådan inte fanns att tillgå för aktuell byggnad.

## 1.2 Dokumentets disposition

För att göra beräkningar av energiflödena genom fastigheten använder vi oss av några olika beräkningsmodeller. Dessa leder sedan via våra metoder fram till resultaten. Nedan återfinns en beskrivning av hur detta går till.

Efter en inledning med beskrivning av utgångspunkterna för arbetet kommer en del med delvis ganska tung teori. Där beskrivs de olika sätt värme kan överföras på – konvektion, ledning och strålning – och hur man kan räkna på dem i våra applikationer på energiflödena genom en fastighet. Här beskrivs kort hur de olika delarna av teorin knyter an till våra metoder och resultat. Det är inte nödvändigt för läsaren att tillgodogöra sig all teori för att kunna ta del av resultatet i rapporten. Vi hoppas ändå att det ska kunna visa på att våra resultat står på en gedigen grund.

Strålningen, både från solen och från omgivningen när den har en annan temperatur än fastigheten, beskrivs som svartkroppsstrålning. Vi har speciellt tagit upp när solen skiner in genom ett fönster och då modellerat det hela relativt enkelt från solsystemets geometri. På så sätt får vi veta hur mycket inomhusluften och väggen värms upp vid soligt väder. För värmeledning och konvektion är den främsta beräkningsmetoden finita elementmetoden. För att räkna på konvektionen använder man Navier-Stokes ekvationer som modellerar luftflöden. De används även av beräkningsprogrammet *Comsol Multiphysics* när vi modellerar luftflödena i ofrivillig ventilation. Det ekvationssystem som fås ur finita elementmetoden optimeras sedan med Newton-Raphsons metod.

De olika energiflödena kan med utgångspunkt i dessa metoder beräknas vid olika väderförhållanden. Läggs de sedan samman fås en bild av hur mycket energi som måste tillföras fastigheten för att bibehålla en konstant inomhustemperatur.

De begrepp som sammanfattar energiflödena är free-running temperature – som visar på vilken temperatur fastigheten skulle ha om man nyttjade den som idag men

utan uppvärmenopen ing; och ekvivalent temperatur – som sammanfattar vädret i en ny utomhustemperatur. Dessa båda blir givetvis olika för olika väderförhållanden.

Vår uppdelning ger att manoop kan vi se var byggnadens största energitjuvar finns och olika energibesparande åtgärder kan vägas mot varandra. Om det läcker mest energi ur en del av byggnaden är det inte optimalt att åtgärda en annan del där det läcker betydligt mindre. Vi kan också se vilka väderförhållanden som påverkar energiflödet mest. Exempelvis om ett väderförhållande som stjälar mycket energi inträffar relativt sällan tjänar man kanske mindre på att åtgärda det än ett som stjälar mindre energi men inträffar väldigt ofta.

Slutligen diskuterar vi var husets största problem ur energisynpunkt finns och hur lämpliga olika åtgärder är.

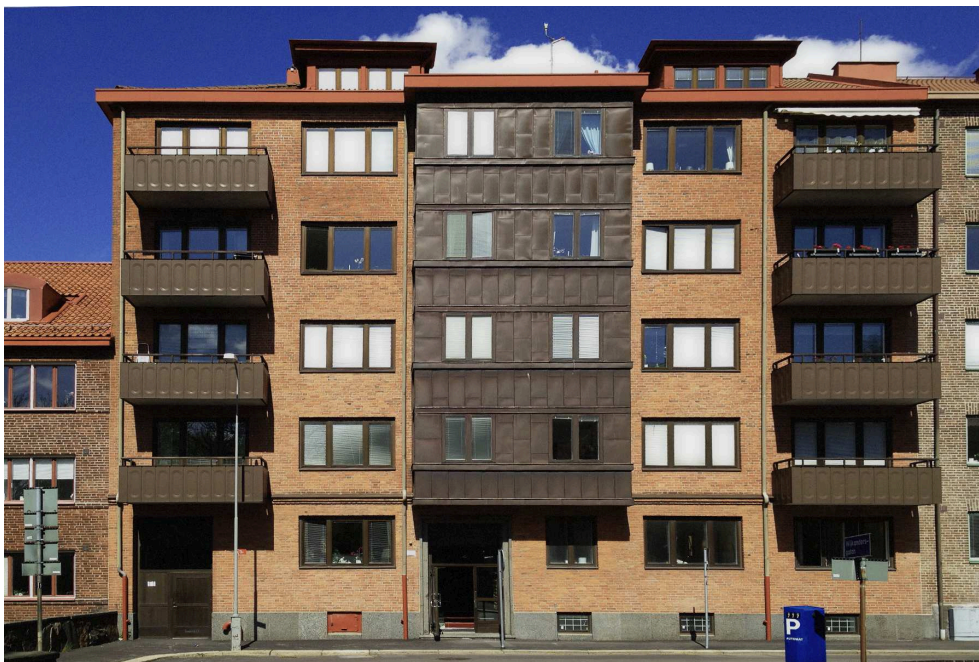
## 1.3 En beskrivning av fastigheten på Walleriusgatan och dess konstruktion

Projektets uppdragsgivare har hand om energisystemet i en fastighet i Johanneberg, Göteborg som kan ses i bild 1.1. Figur 1.2 visar fastighetens geografiska orientering. Det är den fastighet som varit i fokus för det här arbetet. Byggnaden uppfördes 1935 [3] och sedan kom det att dröja ända till 1988 innan den första större ombyggnationen gjordes. Då gjordes två lägenheter om till kontor, stammar byttes och vinden byggdes om till lägenheter. Både taket, burspråken på södersidan och den norra fasaden tilläggsisolerades. I samband med detta installerades också nya värme- och ventilationssystem och alla fönster byttes och tätades med expanderskum. Den främsta skillnaden för de boende blev minskat drag vid blåst och bättre ventilation. Med det nya ventilationssystemet byts luften helt och hållet varannan timme och den friska luften värmeväxlas också med den gamla för att minska energiförlusterna. Enligt fastighetens energideklaration [4] förbrukar fastigheten idag mindre energi än ett nybyggt hus.

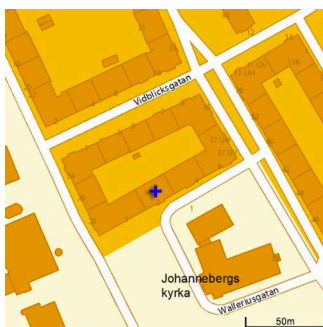
Fastigheten har idag 13 lägenheter och en kontorslokal på 225 m<sup>2</sup>. De utgör tillsammans 1450 m<sup>2</sup> fördelat på sju våningar. Utöver detta finns det gemensamma utrymmen, trapphus, förråd och apparatrum i den nedre källaren och Peter Särneö [5] bedömer att den totala ytan är cirka 2000 m<sup>2</sup>. Sedan ett tag tillbaka har även en väderstation och en solintensitetsmätare installerats, se avsnitt 1.4.1, i förhoppningen att de ska kunna utnyttjas för att förbättra fastighetens klimat ytterligare. Det är det här projektets uppgift att undersöka hur det ska kunna genomföras.

För att göra beräkningar av värmeffödet genom väggarna vid olika väderförhållanden har U-värdet varit ett centralt begrepp. De beräknas utifrån materialets tjocklek och värmeledningsförmåga, se avsnitt 2.3. U-värdet är ett mått på väggens förmåga att släppa igenom värme och mäts i W m<sup>-2</sup> K<sup>-1</sup>. För en vägg med flera lager summeras U-värden på samma sätt som resistansen parallellkopplade resistorer:

$$\frac{1}{U_{tot}} = \left( \frac{1}{U_1} + \dots + \frac{1}{U_n} \right). \quad (1.3.1)$$



**Figur 1.1:** Fastigheten Johanneberg 7:8 på Walleriusgatan i Göteborg.



**Figur 1.2:** Kartbild över fastigheten, som är markerad med +. Fasaden som vetter mot söder är vinklad  $32^\circ$  från ost-västlig riktning.

Väggarnas olika U-värden presenteras i tabell 1.1.

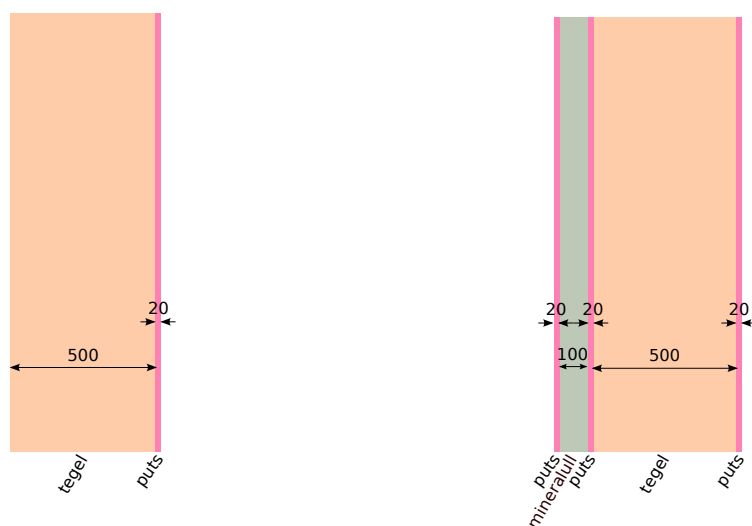
Det genomsnittliga U-värdet för fastigheten, grunden borträknad, är  $0,6 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ . Denna del av fastigheten, med olika sorters väggar, tak och fönster, kallas för fastighetens klimatskal.

### 1.3.1 Väggarna

Ytterväggarna bestod ursprungligen av  $0,5 \text{ m}$  tegel, klätt med ett centimetertjockt lager av puts på insidan, se figur 1.3a. Norrväggen, som tilläggsisolerades i samband med renoveringen 1988, har dessutom puts och ett decimetertjockt lager mineralull följt av ett lager puts utanpå tegelväggen, se figur 1.3b. [2] [5]. Då värmeledningsförmågan hos tegel är  $0,593 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  och den för mineralull är  $0,037 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  fås att den isolerade norrväggen har ett U-värde på  $0,279 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$  medan den

**Tabell 1.1:** Areor och U-värden för fastighetens klimatsköld.

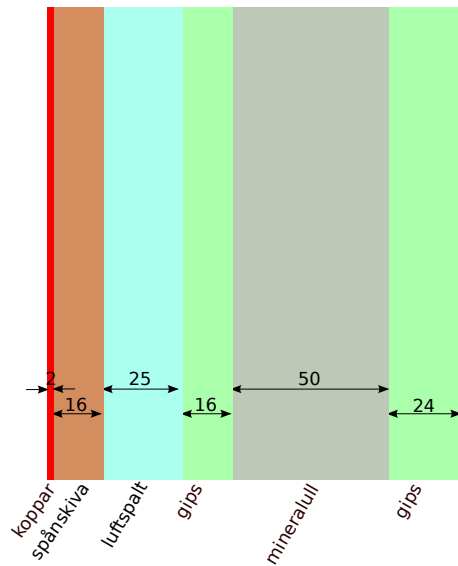
Del	Area [m <sup>2</sup> ]	U-värde [W m <sup>-2</sup> K <sup>-1</sup> ]
Söderväggen	151	1,186
Västerväggen	61	1,186
Norrväggen	290	0,279
Burspråket	47	0,393
Taket	257	0,171
Fönster, söder	109	1,0
Fönster, norr	89	1,0
Fönster, tak	8	1,0
<b>Totalt</b>	<b>1012</b>	<b>0,6</b>

**(a)** Söderväggen tillika västerväggen, utifrån och in från vänster till höger. Alla mått är i mm.**(b)** Norrväggen, utifrån och in från vänster till höger. Alla mått är i mm.**Figur 1.3:** Väggarnas konstruktion.

oisolerade söderväggens U-värde är  $1,186 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ .

Fastigheten ligger mellan två andra byggnader i liknande stil. Den till öster är lika hög som fastigheten medan den i väster är något lägre. Fastighetens yttervägg i väster är inte tilläggsisolerad och har samma konstruktion som söderväggen, se figur 1.3a.

På söderväggen finns ett kopparklätt burspråk. Kopparn sitter direkt på en cementbunden spånskiva som följs av en luftspalt. Väggen innanför består av gips, isolerade mineralull och sedan mer gips, se figur 1.4. [2] Burspråkets U-värde är  $0,393 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ .

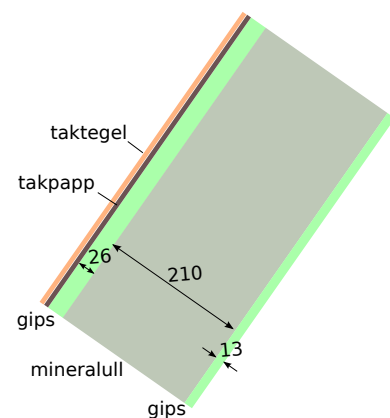


**Figur 1.4:** Burspråket på söderväggen, utifrån och in från vänster till höger. Alla mått är i mm.

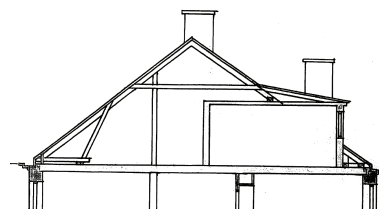
### 1.3.2 Taket

Även taket lades om i samband med den stora renoveringen. Därefter bestod det av taktegel på underlagspapp ytterst, följt av gips, isolerande mineralull och innerst ytterligare ett lager gips, se figur 1.5a. [2]. U-värdet för taket är  $0,171 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ .

Direkt under taket finns en lägenhet som givetvis är uppvärmd. Under taknocken finns en mindre kallvind, se figur 1.5b.



**(a)** Takets konstruktion. Alla mått är i mm.



**(b)** Fastighetens översta våning, från ritningen [3].

**Figur 1.5:** Takets och vindens respektive konstruktioner.



### 1.3.3 Fönstren

Byggnadens fönster sattes in 1988 och är av treglastyp utan ytbeläggningar. De två yttersta rutorna är isolerglas, det vill säga de två rutorna avgränsar ett hermetiskt tillslutet utrymme, och den inneslutna volymen är fylld med argon för att minska värmeledningsförmågan. Totalt har fönstren ett U-värde på  $1 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ .

### 1.3.4 Grunden

Huset är byggt på ett berg som sluttar kraftigt. I östra delen av fastigheten ligger huset direkt på berget med endast ett lager av makadam emellan [5]. I västra halvan har huset en undre källare där apparat- och fläktrummsen finns. Där är det betydligt större avstånd ned till berget, uppskattningsvis ett par meter.

### 1.3.5 Uppvärmning och ventilation

Idag värms huset av bergvärme från tre bergvärmepumpar. För att minska energiåtgången har ett flertal värmeväxlare installerats och värmen från all frånluft återanvänds i möjligaste mån. Peter Särneö gör bedömningen att detta är ett tämligen effektivt energiförsörjningssystem. Det är inte här de stora energivinsterna kan göras i den här fastigheten. Varifrån energin för uppvärmning av fastigheten kommer är inte heller något som behandlas inom det här arbetet.

## 1.4 Definition av väder för tillämpningar i denna rapport

Vår uppdragsgivare vill undersöka hur inomhustemperaturen påverkas av vädret. Tesen är att man kan få en mer korrekt styrning av inomhustemperaturen om man inte bara låter den påverkas av utomhustemperaturen, utan även av fler väderparametrar. Han har därför installerat en väderstation, se avsnitt 1.4.1. Begreppet vaders vardagliga användningsområde är mycket brett och behöver därför avgränsas för att definiera de väderparametrar som behandlas inom projektet.

Kortfattat definieras vädret som det väderstationen tillsammans med solintensitetsmätaren mäter. Så som finns beskrivet i avsnitt 1.4.1 mäter vi vädret med utrustning som tar in vindens hastighet och riktning, lufttemperaturen, lufttryck, relativ fuktighet samt regn och hagels varaktighet och intensitet [6]. Vi kommer dock att bortse helt ifrån hagel då detta sker så sällan och i så korta perioder att det kan antas försumbart. Dessutom mäter solintensitetsmätaren solens intensitet och varaktighet, se avsnitt 1.4.2.

Tanken är att man ska kunna beskriva allt väder som en temperatur, antingen som den utomhustemperatur man bör reglera efter eller som den inomhustemperatur

huset skulle få med befintlig aktivitet men utan uppvärmning, alltså ett mått på hur många grader man måste värma. Dessa två mått kallas ekvivalent temperatur och free-running temperature vilka beskrivs i avsnitt 2.9 respektive avsnitt 2.8.

Från studier med hjälp av beräkningstjänsten Wolfram Alpha [7] av hur luftfuktighet kan påverka luftens värmeledningsförmåga, får vi att den har väldigt liten betydelse. Man kan se en liten skillnad vid mycket höga luftfuktigheter (upp emot 90 %) vid de högre temperaturerna, över 25 °C. Detta torde vara försumbart eftersom skillnaden är liten och endast vid väderförhållanden som inträffar relativt sällan i vårt klimat.

Hur regn och fukt påverkar fastighetens klimat har inte behandlats inom det här projektet. Det kan dock antas att en hel del energi försvinner när väggen blir blöt och vattnet avdunstar. Troligen kyler regnet även luften.

Ytterligare en parameter som inte behandlas till är snö. När snön har lagt sig på taket kan man anta att den har en isolerande effekt. Vi kan inte mäta om och i så fall hur mycket snö det ligger på taket. Enligt SMHI [8] rör det sig enbart om 25-50 dygn med snö i Göteborg per år. Detta påverkar dessutom främst de översta lägenheterna, de på vinden. Har man däremot en enplansvilla i Norrland kan man anta att detta är en mer betydande parameter, men det är alltså inget vi kommer att undersöka.

### 1.4.1 Väderstationen

I rapporten låter vi de parametrar som väderstationen tar in definiera vädret, se avsnitt 1.4. Väderstationen som vår uppdragsgivare installerat är en Vaisala Weather Transmitter WXT520. Den mäter sju olika värden: vindens hastighet och riktning, lufttemperaturen, lufttrycket, den relativa fuktigheten samt regn och hagels varaktighet och intensitet. I tabell 1.2 beskrivs stationens mätområde, noggrannhet och upplösning för de olika parametrarna. Vi har således väldigt liten nytta av att låta våra beräkningar vara noggrannare än väderstationen kan mäta.

### 1.4.2 Solintensitetsmätaren

Mätaren för solintensitet som finns monterad på fastigheten är en Pyranometer CMP3 av märket Kipp & Zonen. Den mäter våglängder från 300 till 2800 nm, vilket täcker in större delen av den solstrålning som når jorden. Ur databladet fås också att osäkerhet för en dag kan väntas vara under 10 %. Den största möjliga instrålningen den klarar av att mäta är  $2000 \text{ Wm}^{-2}$  vilket är väl över maximala möjliga värde på jorden om man enbart mäter strålning från solen [9]. Den uppfyller gott och väl behoven för studien. [10]

**Tabell 1.2:** Tekniska data för väderstationen, [6]

Väder	Mätområde	Noggrannhet	Upplösning
Vindhastighet	0 – 60 m s <sup>-1</sup>	±3 – 5%	0,1 m s <sup>-1</sup>
Vindriktning	alla riktningar	±3°	1°
Temperatur	–52 – +60 °C		0,1 °C
Lufttryck	600 – 1100 hPa	0,5 – 1 hPa	0,1 hPa
Luftfuktighet	0 – 100 %RH	±3 – 5 %RH	0,1 %RH
Regn		5 %	0,01 mm
varaktighet			10 s
intensitet	0-200 mm h <sup>-1</sup>		0,1 mm h <sup>-1</sup>
Hagel			0,1 cm <sup>2</sup>
varaktighet		från första träffen	10 s
intensitet			0,1 cm <sup>-2</sup> h <sup>-1</sup>

# Kapitel 2

## Teoretiskt ramverk

I detta avsnitt presenteras härledningar av de fysikaliska fenomen och beräkningsmetoder projektet baseras på samt definitioner av centrala begrepp för projektet. Först presenteras en härledning av svartkroppstrålning och hur den används inom projektet. Vidare följer en grund till vårt resonemang kring solens påverkan på inomhustemperaturen då den skiner in genom fönstren.

Nästa del är av lite tyngre matematisk karaktär och för full förståelse krävs en viss matematisk bakgrund, men i många fall är härledningarna inte essentiella för förståelsen av resultatet och läsaren kan helt hoppa över dem. Här presenteras grunden för konvektion samt hur finita elementmetoden kan användas i vår tillämpning. På det följer ett avsnitt om optimering med Newton-Raphsons metod.

Därefter presenteras några naturkonstanter för luft som används i våra beräkningar. Det hela avslutas med en sammanfattning av begreppen free-running temperature och ekvivalent temperatur som också används för att sammanfatta resultatet.

### 2.1 Svartkroppsstrålning

Alla objekt reflekterar, absorberar eller transmitterar ljus. De kroppar som varken reflekterar eller transmitterar något ljus utan absorberar 100 % kallas konventionellt för svartkroppar. Detta är dock en teoretisk konstruktion då perfekta svartkroppar inte existerar men modellen kan ändå användas som en god modell i flera fysikaliska tillämpningar. Den energi som absorberats av kroppen strålas ut i form av svartkroppsstrålning vars frekvensspektrum bestäms av kroppens temperatur när kroppen är i termisk jämvikt med sin omgivning. Den totala utstrålade energin per tidsenhet fås ur Stefan-Boltzmanns lag

$$j^{\star} = \sigma T^4 \tag{2.1.1}$$

där  $\sigma$  är Stefan-Boltzmanns konstant som mäts i  $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$  och  $T$  är kroppens temperatur vid termisk jämvikt.

### 2.1.1 Härledning

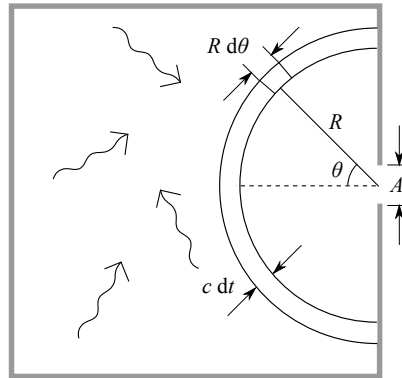
I en låda med fotoner kan den totala energin inne i lådan beskrivas som

$$\frac{U}{V} = \frac{8\pi^5 (kT)^4}{15 (hc)^3} \quad (2.1.2)$$

där  $U$  är den totala fotonenergin i lådan och  $V$  är lådans volym. Kvoten  $U/V$  är alltså energitätheten hos fotonerna i lådan. Ekvationen fås ur Plancks spektrum. [11, ss.301-302]

Sedan görs ett litet hål i lådan, så att några av fotonerna kan slippa ut. Sannolikheten för att fotoner med kort respektive lång våglängd ska slippa ut är densamma som fördelningen mellan dem inne i lådan, eftersom de har samma hastighet.

Den totala mängden strålning som kommer ut kan då beräknas genom att tänka sig att de fotoner som når fram till hålet under en kort tidsperiod,  $dt$ , alla befann sig på samma hemisfäriskt skal inne i lådan för en liten stund sedan, se figur 2.1. Tjockleken på detta tänkta hemisfäriska skal är  $cdt$ . Hemisfärens radie,  $R$ , beror givetvis på hur långt bakåt i tiden vi tittar.



**Figur 2.1:** Fotonerna som lämnar lådan har en liten stund tidigare befunnit sig i samma hemisfär inne i lådan.

Ett volymelement av det hemisfäriska skalet ges av

$$V = (Rd\theta) \times (R \sin \theta d\phi) \times (cdt). \quad (2.1.3)$$

Energitätheten för fotonerna i volymelementet är således

$$E_{v.e.} = \frac{U}{V} cdt R^2 \sin \theta d\theta d\phi. \quad (2.1.4)$$

Men endast den andel av fotonerna som har rätt riktning kommer ut genom lådans öppning. Sannolikheten för att en foton har rätt riktning är

$$P(\text{rätt riktning}) = \frac{A \cos \theta}{4\pi R^2} \quad (2.1.5)$$

där  $A$  är hålets area. Den totala energin som strålar ut ur hålet från det lilla voly-melementet är alltså

$$\frac{A \cos \theta}{4\pi} \frac{U}{V} c dt \sin \theta d\theta d\phi \quad (2.1.6)$$

vilket ger en total energiutstrålning på

$$\frac{A}{4} \frac{U}{V} c dt. \quad (2.1.7)$$

Givetvis är utstrålningen beroende av både hålets area och tidsintervallet. Dividerar vi med dessa storheter får vi effekt per ytenhet,  $j$ ,

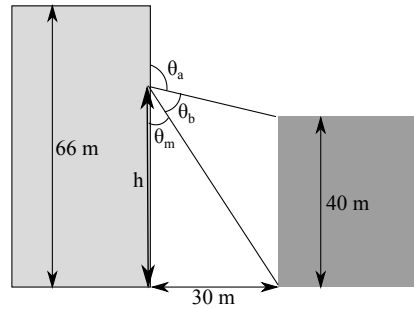
$$j = \frac{c}{4} \frac{U}{V}. \quad (2.1.8)$$

Sätt in detta uttryck i ekvation (2.1.2) så fås det vi känner som Stefan-Boltzmanns lag, (2.1.1)

$$j = \frac{2\pi^5}{15} (kT)^4 h^3 c^2 = \sigma T^4 \quad (2.1.9)$$

där  $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2}$  är Stefan-Boltzmanns konstant.

## 2.1.2 Strålning från omgivningen



**Figur 2.2:** Den undersökta fastigheten på Walleriusgatan till vänster, och Johannebergskyrkans församlingshem till höger. Den mot väggen instrålade svartkroppstrålningen kommer från olika källor. Här illustreras hur mycket av väggens omgivning som upptas mark, annan fastighet respektive atmosfären.

För att uppskatta hur mycket svartkroppsstrålning som kommer mot väggen från olika delar av omgivningen sattes en enkel modell upp. Där antas att Johannebergskyrkans församlingshem ligger mitt emot vår undersökta fastighet på Walleriusgatan, att församlingshemmet ligger 30 meter bort och är 40 meter högt samt att det är det enda föremålet av betydande storlek i närheten, se figur 2.2. För varje punkt på väggen beskrivs sedan hur stor andel av dess omgivning som upptas av marken, församlingshemmet respektive himlen, eller atmosfären, med hjälp av ekvationerna

$$p_{\text{gata}} = \tan^{-1}(30/h)/180 \quad (2.1.10)$$

$$p_{\text{byggnad}} = \begin{cases} \tan^{-1}(\frac{30}{h-40})/180 & \text{om } h > 40 \\ (\tan^{-1}(\frac{40-h}{30}) + \tan^{-1}(\frac{h}{30}))/180^\circ & \text{om } h < 40 \end{cases} \quad (2.1.11)$$

$$p_{\text{atmosfär}} = 1 - p_{\text{gata}} - p_{\text{byggnad}}. \quad (2.1.12)$$

Medelvärde då  $h$  går från 0 till 66 meter ger det genomsnittliga värdet för hur stor del av omgivningen som representeras av mark, annan fastighet och atmosfär för hela väggen. Detta ger resultatet att 26% är gata, 36% är församlingshemmet och 38% är atmosfären. Oftast antas allt som inte är atmosfären ha utomhustemperatur.

Ur [12] fås atmosfärens temperatur genom en modifierad variant av Stephan-Boltzmanns lag och att strålningen från atmosfären en klar dag kan beskrivas som

$$I_{\text{atmosfär}} = \sigma \cdot T_{\text{ute}}^4 (1 - c \cdot e^{-d(273-T_{\text{ute}})^2}) \quad (2.1.13)$$

där  $c = 0,261$  och  $d = 7,77 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-2}$  kommer ur statistiska data. En helt molnig dag är atmosfärens temperatur samma som utomhustemperaturen,  $T_{\text{ute}}$ , det vill säga  $c = 0$ . Denna ekvation har fått ut statistiska data och visar sig stämma bra för hela världen [12].

## 2.2 Strålning genom glas

Solstrålning genom fönster orsakar snabba temperaturökningar i inomhusklimatet. Hur snabba och stora dessa temperaturökningar blir beror på en mängd parametrar varav de viktigaste är fönstrets utformning – det vill säga glasets reflektivitet och emissivitet, strålningens infallsvinkel – som beror av tid på dagen och året samt ytorna inomhus som solstrålningen faller på – såsom persiennier, gardiner, väggar och möbler. Fönstrets reflexivitet och emmisivitet beror av solens infallsvinkel.

### 2.2.1 g-värden

För att ange transmittansen av solstrålning genom fönster brukar man använda vad som kallas för g-värden (ibland även kallat "Solar Factor"). Detta värde, som ligger mellan noll och ett, anger hur mycket av den infallande solstrålningens normalprojektion som släpps igenom. Men eftersom ett sådant värde också beror på strålningens infallsvinkel (på grund av ökande reflektion med ökande vinkel) är den ofta svår att beräkna.

Enligt [13] förändras detta vinkelberoende främst med antalet glas (flerglasfönster) samt typ av eventuella beläggningar på glasets. I samma artikel visades också att g-värdenas vinkelberoende kan approximeras med ett polynom

$$g = g_0 (1 - az^\alpha - bz^\beta - cz^\gamma) \quad (2.2.1)$$

där  $g_0$  är g-värdet då strålningen infaller vinkelrätt mot ytan,  $a + b + c = 1$  och  $z = \theta/90^\circ$  då  $\theta$  är vinkeln, mätt i grader, mellan fönstrets normal och solstrålningens riktning. Koefficienterna och exponenterna i ekvation (2.2.1) beror på typen av fönster, och i [13] har empiriska undersökningar lett till approximationen

$$\begin{aligned} a &= 8, & b &= 0.25/q, & c &= (1 - a - b) \\ \alpha &= 5.2 + 0.7q, & \beta &= 2, & \gamma &= (5.26 + 0.06p) + (0.73 + 0.04p)q \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

där  $p$  är antalet rutor i fönstret (treglasfönster medför  $p = 3$ ) och  $q$  är en parameter,  $1 \leq q \leq 10$ , som varierar beroende på beläggningar på glasets yta. Exempelvis har ett treglasfönster utan beläggningar värdet  $q = 4$ .

Det beräknade g-värdet kan sedan användas för att uppskatta energiflödet genom fönstret. Anta att en pyranometer anger solstrålningsintensiteten  $I_0$  i  $\text{W m}^{-2}$ . Då ges det totala energiflödet  $Q$  av sambandet

$$Q = g(\theta) \cdot A \cdot I_0 \cos \theta, \quad (2.2.3)$$

där  $Q$  mäts i W,  $A$  är fönstrets area och  $\theta$  är vinkeln solen bildar mot ytans normal.

## 2.2.2 Långvågsstrålning

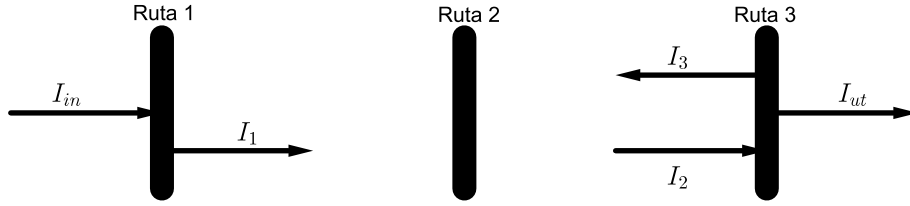
När ytorna inne i byggnaden är varmare än ytorna utomhus resulterar detta i ett utflöde av långvågig strålning vars storlek kan approximeras med Stefan-Boltzmanns lag, 2.1.1. Antag att interiören håller en konstant temperatur på  $T_{\text{inne}} = 20^\circ\text{C}$  och att de för interiören genom fönstrena synliga utomhusytorna håller en konstant temperatur på  $T_{\text{ute}} = 6^\circ\text{C}$ . Detta leder till ett flöde  $j^* = \sigma(T_{\text{in}}^4 - T_{\text{ute}}^4) = \sigma((293\text{ K})^4 - (279\text{ K})^4) \approx 74\text{ W m}^{-2}$ . Genom ett fönster fås då utstrålningen  $Q_{IR} = A \cdot 74\text{ W m}^2$ , där  $A$  är fönstrets area. Vidare måste hänsyn tas till att glasrutorna reflekterar en andel av långvågsstrålningen. För en ensam glasruta utan beläggningar gäller då att en normal fönsterruta reflekterar i grova drag 10 % av den utgående strålningen [14].

För en treglasruta gäller en annan, något mer komplicerad, reflektionsparameter. Betrakta figur 2.3. För  $I_1$ , den intensitet som släpps igenom första rutan, gäller att

$$I_1 = I_{\text{in}}(1 - a). \quad (2.2.4)$$

På grund av en oändlig följd av reflektioner, även från den del av  $I_3$  som passerar ruta 2 igen, blir  $I_2 = (1 - a)I_1 \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} + a(1 - a)^2 I_3 \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n}$ . Men samtidigt måste också  $I_3 = aI_2 \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n}$  vilket, om  $I_2$  bryts ut, ger att





**Figur 2.3:** Visualisering av variabelnamnen som används vid härledning av reflektionsparametern för treglasfönster.

$$I_2 = \frac{(1-a) I_1 \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n}}{1 - (1-a)^2 a^2 (\sum_{n=0}^{\infty} a^{2n})^2}. \quad (2.2.5)$$

Detta tillsammans med det faktum att

$$I_{ut} = (1-a) I_2 \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} \quad (2.2.6)$$

ger, då dessa tre samband kombineras, att

$$I_{ut} = \frac{(1-a)^3 (\sum_{n=0}^{\infty} a^{2n})^2}{1 - (1-a)^2 a^2 (\sum_{n=0}^{\infty} a^{2n})^2} I_{in}. \quad (2.2.7)$$

Notera nu att  $\sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} = \frac{1}{1-a^2}$  på grund av geometriska seriers egenskaper. Sätt in detta och förenkla, så fås till slut att

$$I_{ut} = \frac{(1-a)^3}{((1-a^2)^2 - (1-a)^2 a^2)} I_{in} = 0,75 \cdot I_{in} \quad (2.2.8)$$

då  $a = 0.1$ .

## 2.3 Värmeledning

Det pågår ständigt värmetransport från varma till kalla objekt. Konduktion, eller värmeledning, innebär att värmeenergi flödar genom ett material utan att materialet i sig flyttar på sig. Värmetransporten är proportionell mot temperaturskillnaden över konstruktionen. Konduktiviteten, eller värmeledningsförmågan, ofta betecknad  $k$  inom fysiken eller  $\lambda$  inom byggsektorn, är en materialegenskap som beskriver hur snabbt en temperaturskillnad utjämnas genom konduktion. Konduktiviteten mäts i enheten  $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$  och i denna rapport används den förstnämnda beteckningen  $k$ . För att bestämma  $k$  för ett material utsätter man det för en temperaturskillnad och mäter den värmemängd som passerar genom materialet per tids- och längdenhet.

Generellt gäller att värmeflödet per ytenhet är  $\mathbf{q} = -k\nabla T$  [ $\text{Wm}^{-2}$ ]. Detta samband brukar kallas för Fouriers värmelag. I en dimension förenklas detta till

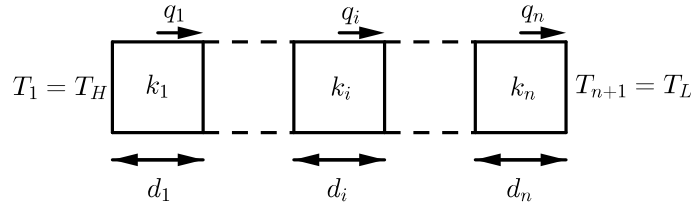
$$q_x = -k \frac{dT}{dx}. \quad (2.3.1)$$

Vid termisk jämvikt och homogent material kan detta utvecklas till

$$q_x = -\frac{k}{d}(T_2 - T_1), \quad (2.3.2)$$

där  $d$  betecknar materialets tjocklek och  $T_2$  och  $T_1$  är temperaturen i vardera ände av materialet. Begreppet U-värde kan nu införas och definieras som  $U = \frac{k}{d}$ , det vill säga  $q_x = UdT = U(T_2 - T_1)$ . Även R-värdet introduceras och definieras som inversen av U-värdet, alltså  $R = 1/U$ . Observera att U- respektive R-värden endast kan användas vid termisk jämvikt, se härledningen nedan. Dessa två storheter är ofta användbara inom byggfysik och relaterade områden eftersom man med dem exempelvis kan jämföra olika väggars värmeledningsförmåga.

En schematisk bild över en vägg i en dimension som består av  $n$  olika material kan ses i figur 2.4. Med materialens värmeledningsförmåga,  $k_i$ , för  $i = 1, 2, \dots, n$  samt längden på elementen,  $d_i$ , använder vi nu Fouriers värmeledningsekvation för att teckna värmeflödet och temperaturerna  $T_i$ , i punkterna mellan de olika delarna av väggen med randvillkoren  $T_1 = T_H$  samt  $T_{n+1} = T_L$ , där  $T_H$  betecknar den varma sidans temperatur, oftast insidan, och  $T_L$  den kalla sidans temperatur, oftast utsidan.



**Figur 2.4:** Schematisk bild över en vägg som består av  $n$  olika element med olika längd och värmeledningsförmåga.

För varje del av väggen kan vi sätta upp Fouriers ekvation för värmeflöde. Vid termisk jämvikt blir flödet in i en del lika stort som flödet ut ur samma del vilket leder till att

$$q_i = -k_i \frac{T_{i+1} - T_i}{L_i} \Leftrightarrow \frac{L_i}{k_i} q_i = T_{i+1} - T_i \quad (2.3.3)$$

Termisk jämvikt ger även att  $q_1 = \dots = q_i = \dots = q_n$ , vilket innebär att

$$\sum_{i=1}^n \frac{L_i}{k_i} q_i = q \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{k_i} = q \sum_{i=1}^n R_i = \sum_{i=1}^n (T_i - T_{i+1}) = T_H - T_L \quad (2.3.4)$$

det vill säga

$$qR_{\text{total}} = T_H - T_L \Leftrightarrow q = U_{\text{total}}(T_H - T_L) \quad (2.3.5)$$

där

$$U_{\text{total}} = \frac{1}{R_{\text{total}}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N R_i}. \quad (2.3.6)$$

Värmeledningsförmågan, och därmed även R- samt U-värden, påverkas av materialets densitet, porositet, temperatur samt fuktighet. Fuktkorrigerings görs ibland, enligt vissa framställda värden.

Utifrån Fouriers värmelag kan man härleda ytterligare ett viktigt samband, värmeledningsekvationen. Anta en infinitesimal volym, som varken utsätts för eller utför något arbete relativt omgivningen. Enligt grundläggande termodynamik kan då en godtyckligt liten förändring av energitätheten skrivas som  $dQ = c_p \rho dT$ . I en dimension, över ett litet tidssteg  $t - dt < \tau < t + dt$  och en liten sträcka  $x - dx < l < x + dx$ , fås att

$$dE = c_p \rho \int_{x-dx}^{x+dx} [T(l, t + dt) - T(l, t - dt)] dl = c_p \rho \int_{t-dt}^{t+dt} \int_{x-dx}^{x+dx} \frac{\partial T}{\partial \tau} dld\tau \quad (2.3.7)$$

Från Fouriers värmelag blir för samma förändring

$$dE = k \int_{t-dt}^{t+dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial x}(x + dx, \tau) - \frac{\partial T}{\partial x}(x - dx, \tau) \right] d\tau = \int_{x-dx}^{x+dx} \frac{\partial}{\partial x} \left( k \int_{t-dt}^{t+dt} \frac{\partial T}{\partial x} d\tau \right) dl \quad (2.3.8)$$

Kombinering av dessa och det faktum att det gäller för en godtycklig sträcka  $dl$  samt tid  $d\tau$ , vilket innebär att integralen kan tas bort, ger att

$$\boxed{c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T} \quad (2.3.9)$$

där det andra sambandet gäller då  $k$  är oberoende av  $x$ . Detta samband brukar kallas för värmeledningsekvationen.

## Tröghet

Det kan förefalla intuitivt att väderförändringar påverkar fastigheter, men inte på vilket sätt eller hur mycket. I det resonemanget spelar termen tröghet en betydande roll. Beroende på hur tjocka väggarna är och vilket material de är byggda av spelar de yttre omständigheterna olika stor roll. Trögheten i väggarna är således ett begrepp för hur lång tid det tar innan en väderförändring märks inomhus då de yttre

parametrarna ändrar sig. En stor tröghet bidrar till ett jämnare inomhusklimat då väggarna fungerar som lågpasfilter och dämpar svängningarna i temperaturen.

## 2.4 Konvektion

I fasta ämnen går det utmärkt att approximera värmefflöde enbart med hjälp av värmeledningsekvationen. Detta håller dock ej lika bra för fluider, det vill säga material som deformeras då de utsätts för tryck. Under dessa förhållanden måste hänsyn tas till bevarande av massa, rörelsemängd och energi. I det följande kommer en homogen fluid att betraktas. För att härleda giltiga differentialekvationer som beskriver en fluids rörelse används ofta sambandet

$$\frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \int_V \frac{dB}{dm} \rho dV \right) + \int_{\partial V} \frac{dB}{dm} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA, \quad (2.4.1)$$

där  $B$  är en godtycklig egenskap av fluiden, exempelvis dess rörelsemängd,  $V$  är den så kallade kontrollvolymen (omfattande ett godtyckligt valt område),  $\partial V$  är denna kontrollvolymens rand,  $\rho$  är fluidens densitet,  $\mathbf{v}$  är fluidens hastighetsvektor och  $\mathbf{n}$  är normalvektorn till randen. Detta samband benämns vanligen Reynolds transportteorem<sup>1</sup>.

Sätt  $B = m$  där  $m$  är fluidens massa (oberoende av tiden) och låt  $V$  vara en tidsberoende volym. Ett uttryck för masskonservering erhålls:

$$0 = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\partial V} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA. \quad (2.4.2)$$

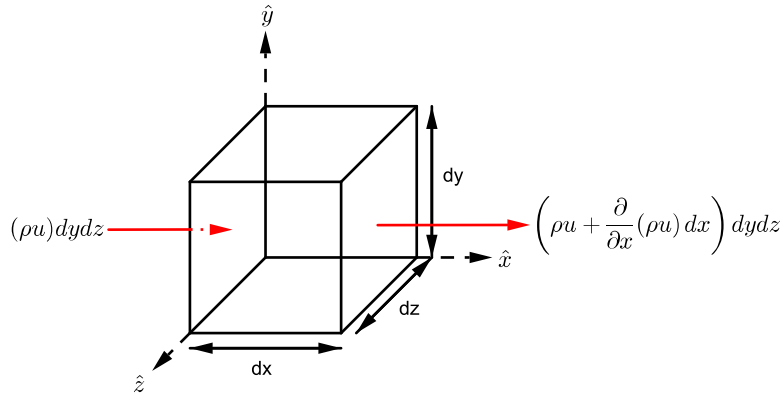
Första termen i detta uttryck beskriver förändringar i densiteten inom kontrollvolymen medan andra termen omfattar alla flöden in och ut genom kontrollvolymens rand. För masskonservering krävs alltså att summan av dessa termer ska vara noll.

Den andra termen kan skrivas om med hjälp av Gauss sats (även kallad divergenssatsen),

$$\int_{\partial V} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \int_V \nabla \cdot \rho \mathbf{v} dV. \quad (2.4.3)$$

Detta blir intuitivt riktigt om man betraktar figur 2.5. Inflödet genom den infinitesimala ytan  $dydz$  blir  $(\rho u) dydz$  medan utflödet blir detsamma plus en term som beskriver hur flödet förändrats på sin väg genom volymen. Sammantaget, med alla sidor på kvadraten inräknade, blir alltså summan av alla flöden in och ut återigen lika med  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dxdydz$ . Om nu integralerna över  $V$  i de tidigare använda integralrelationerna ersätts med den infinitesimala volymen  $dxdydz$  reduceras (2.4.2) till

<sup>1</sup>För närmare beskrivning och härledning, se White, 2011 [15]



**Figur 2.5:** Infinitesimal kontrollvolym för derivering av bevaranderelationer, här med massflödet exemplifierat.

$$0 = \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \right) dx dy dz \quad (2.4.4)$$

vilket, om  $dx dy dz$  förkortas bort, kan förenklas som

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}). \quad (2.4.5)$$

Om inkompressibilitet antas (det vill säga  $\rho$  är konstant) reduceras denna ekvation ytterligare till

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.4.6)$$

Detta är kontinuitetsekvationen för inkompressibla fluider.

Betrakta åter (2.4.1) och sätt nu  $B = m\mathbf{v}$ . På samma vis som kontinuitetsekvationen (2.4.5) härleddes, fås för ett infinitesimala volymelement att

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_V \rho \mathbf{v} dV \right) + \int_{\partial V} \mathbf{v} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dV \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mathbf{v} \rho \mathbf{v}) \right) dx dy dz \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \mathbf{v} (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) + (\rho \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) dx dy dz \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

ty enligt Newtons andra lag är tidsderivatan av rörelsemängden  $m\mathbf{v}$  lika med summan av alla krafter som verkar på kroppen.  $\dot{m}_i$  betecknar här massflödet  $\rho \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A}_i$ . Även här hade integralen över randen kunnat resoneras fram via en figur liknande 2.5, om in- och utflödestermerna modifierats något.

Det sista högerledet kan skrivas om som

$$\left( \mathbf{v} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \right] + \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right] \right) dx dy dz. \quad (2.4.8)$$

Första termen inom hakparentes är kontinuitetsekvationen (2.4.5) som är identiskt noll. Därmed reduceras (2.4.7) till

$$\sum \mathbf{F} = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) dx dy dz. \quad (2.4.9)$$

Summan av de på volymen verkande krafterna måste nu utvecklas. Dessa krafter uppstår på grund av gravitation, tryck och viskositet. Andra krafter, såsom från elektromagnetiska fält, kan i sammanhanget anses vara försumbara. Gravitationskraften  $\mathbf{F}_g$  beskrivs för den infinitesimala volymen med  $\rho g dx dy dz = \rho g dx dy dz \hat{z}$ . Tryckkraften  $\mathbf{F}_p$ , i sin tur, ges av tryckgradienten  $-\nabla(p) dx dy dz$ . Den viskösa kraften  $\mathbf{F}_{\text{viskositet}}$  är lite besvärligare att sammanställa. Anta att volymen är en newtonsk fluid, det vill säga stresstensor  $\tau$  är linjärt proportionell mot hastighetsgradienten  $\nabla \mathbf{v}$  med proportionalitetskonstanten  $\mu$ ,  $\tau = \mu \nabla \mathbf{v}$ . Den viskösa kraften verkande på kroppen blir då  $\mathbf{F}_{\text{viskositet}} = \mu \Delta \mathbf{v} dx dy dz$ .

Tillslut sammanställs alltså ekvationssystemet

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v \\ \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla w \right) &= -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta w. \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Slutligen sätts, i (2.4.1), att  $B = E$  för att söka ett uttryck för energins bevarande. Med antagandet att volymen inte utför något arbete består  $E$  enbart av värmeenergi, och på samma vis som i avsnitt 2.3 blir då  $E = c_p \rho dT$ , vilket ger följande:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{dE}{dm} \rho dV + \int_{\partial V} \frac{dE}{dm} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V c_p T \rho dV + \int_{\partial V} c_p T \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t} (c_p T \rho) + \nabla \cdot c_p T \rho \mathbf{v} \right) dx dy dz \\ &= c_p \rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right). \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Sista steget följer av att kontinuitetsekvationen bryts ut som i fallet med rörelsemängdsekvationen. För att utveckla vänsterledet betraktas återigen en infinitesimal volym såsom i figur 2.5. Värmefflödet in i volymen i  $x$ -led ges av  $q_x dydz$  medan utflödet ges av  $[q_x + \frac{\partial}{\partial x}(q_x) dx] dydz$  och analogt för  $y$ -respektive  $z$ -led. Totala ökningen av värmeenergi i kuben ges alltså av utflödet subtraherat från inflödet, vilket innebär att

$$\frac{dE}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} dx dy dz. \quad (2.4.12)$$

$\mathbf{q}$  fås från Fouriers värmelag (se avsnitt 2.3) vilket ger att

$$\frac{dE}{dt} = (-\nabla \cdot (-k \nabla T)) dx dy dz \quad (2.4.13)$$

och detta i sin tur leder till resultatet

$$\boxed{\nabla \cdot (k \nabla T) = c_p \rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right)}. \quad (2.4.14)$$

För homogena inkompressibla fluider i två dimensioner gäller alltså ekvationerna (2.4.6), (2.4.10) samt (2.4.14).

## 2.4.1 Vindens konvektionskoefficient

Då vinden blåser kommer en del värmeenergi att överföras via konvektion, men istället för att lösa den invecklade konvektions-diffusionsekvationen används ofta något som kallas för vindens konvektionskoefficient som betecknas med  $h$ . Analogt med Fouriers värmelag, ekvation 2.3.1, skrivs

$$\boxed{q = h dT = h (T_{\text{vägg}} - T_{\text{ute}})}. \quad (2.4.15)$$

där  $h$  alltså kan jämföras med det ovan härledda  $U$ -värdet.

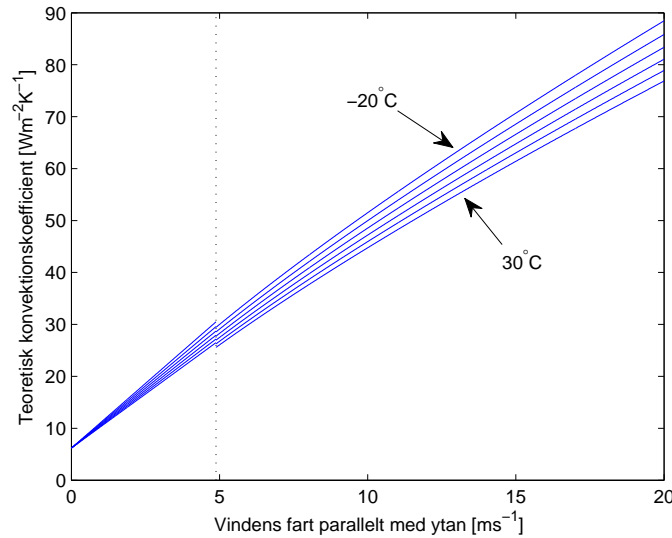
Denna konvektionskoefficient beskrivs ofta av en ekvation anpassad till empiriska resultat, och ett stort antal experiment har genomförts för att bestämma parametern, även om en helhetsbild saknas i dagsläget.

Vid fri (naturlig) konvektion, det vill säga då vinden är försumbar och luftcirkulationen följer av stigande varm luft, brukar  $h$  fås till mellan 2 och 25 W m<sup>-2</sup> K<sup>-1</sup>. Vid forcerad konduktion, det vill säga då vinden inte är försumbar, kan  $h$  variera från 25 till 250 W m<sup>-2</sup> K<sup>-1</sup>. [16]

Traditionellt används ofta något som kallas för Nusselt-Jürges korrelation vid beräkning av konvektionskoefficienten, som lyder

$$h = 5,678 \left( a + b \left( \frac{965,42}{T_{\text{ute}}} (|\mathbf{v}_{\text{vind}} \times \mathbf{n}|) \right)^c \right) \quad (2.4.16)$$

där  $\mathbf{n}$  betecknar väggens normalvektor, och  $a$ ,  $b$  samt  $c$  beror på väggens ytegenskaper. För en skrovlig yta med  $|\mathbf{v}_{\text{vind}} \times \mathbf{n}| < 4,88 \text{ m s}^{-1}$  fås att  $a = 1,09$ ,  $b = 0,23$  och  $c = 1$ , medan starkare vind ger  $a = 0$ ,  $b = 0,53$  och  $c = 0,78$ . Olika isotermer som beräknats med detta samband kan ses i figur 2.6.



**Figur 2.6:** Teoretiska konvektionskoefficienter ( $h$ -värden) beräknade med Nusselt-Jürges korrelation, (2.4.16). De olika linjerna är isotermer där den nedre motsvarar  $30^\circ\text{C}$  och den översta motsvarar  $-20^\circ\text{C}$  med  $10^\circ\text{C}$  skillnad mellan två linjer. Den svarta linjen motsvarar brytpunkten vid  $4,88 \text{ m s}^{-1}$  då konstanterna förändras

En mängd andra samband mellan konvektionskoefficienten och vindhastigheten har härletts, både teoretiskt och empiriskt, på grund av dess starka beroende av byggnadens ytegenskaper och area, men av anledningar som diskuteras i avsnitt 5.1 använder vi oss av ekvation 2.4.16 i denna rapport. [17]

## 2.4.2 Boussinesqs approximation

För flytkraftsdrivet flöde, det vill säga omfördelning i en fluid på grund av densitetsskillnader, kan det vara lämpligt att använda sig av Boussinesqs approximation. Denna säger att det enda som påverkar trycket är tyngdaccelerationen. Genom detta är det möjligt att sätta upp uttryck för densiteten och tryckderivatorna enligt ekvationerna (2.4.17) och (2.4.18). Här är  $\beta$  den volymetriska expansionskonstanten och  $T_0$  temperaturen som råder vid referensdensiteten  $\rho_0$ .

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (2.4.17)$$



$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 g. \quad (2.4.18)$$

### 2.4.3 Tryckdrivet luftläckage

För att beskriva tryckdrivet luftläckage, i vårt fall drag på grund av vind, kan till exempel Darcys lag användas. Den beskriver hur en fluid flödar genom ett poröst material och kan användas i en mängd olika tillämpningar. Sambandet kan fås ur Navier-Stokes ekvationer genom homogenisering såväl som genom experiment. Lagen beskriver ett pågående flöde genom materialet,  $\Phi$ , i termer av fluidens viskositet,  $\mu$ , och tryckfallet  $P_b - P_a$  över ett givet avstånd  $L$ .

$$\Phi = \frac{-k}{\mu} \frac{(P_{\text{in}} - P_{\text{ut}})^\eta}{L}. \quad (2.4.19)$$

$k$  står för permeabiliteten hos materialet som fluiden flödar igenom och är en materialkonstant som beskriver hur genomsläppligt det är. Luftflödet  $\Phi$  mäts per kvadratmeter. Exponenten  $\eta$  sätts till 1 för att motsvara Darcys lag. Hus är dock inte så porösa och ett för högt värde fås oftast med den här metoden. För att åtgärda det behövs data från ett dörrtryckstest utföras. Detta utförs genom att man trycksätter huset genom dörren och ser vilket luftflöde som krävs för att upprätthålla ett givet tryck. Flödet och trycket ritas sedan upp i ett log-log-diagram. Vid låga tryck är kurvan konvex men rätas sedan ut till en linje vars lutning är  $\eta$ . Ett vanligt värde är då ungefär 0,6, men det kan lika gärna vara 0,75 eller något värde däremellan, helt beroende på hur tätt huset är [18]. Ett sådant test är alltså essentiellt för att få veta hur byggnaden påverkas av vind.

Slås alla konstanter samman fås istället ett uttryck på formen

$$\Phi = C \Delta P^\eta \quad (2.4.20)$$

där  $C = \frac{-k}{\mu \cdot L}$  är en applikationsberoende konstant som uppmäts experimentellt med ett dörrtryckstest.

Energiflödet  $Q$  kan nu beräknas för ett visst flöde  $\Phi$  och en viss area  $A$

$$Q = A \Phi \Delta T \rho c_p \quad (2.4.21)$$

där  $\Delta T$  är temperaturskillanden mellan inomhus och utomhus samt  $\rho$  och  $c_p$  är naturkonstanter för luft, närmare bestämt densitet respektive värmekapacitet.

## 2.5 Finita elementmetoden

Inom fysiken modelleras ofta fysikaliska fenomen med partiella differentialekvationer. Dessa kan ofta vara icketriviala att evaluera analytiskt. Det finns en rad olika metoder för att hantera sådana problem genom approximationer. En av dessa metoder kallas finita elementmetoden. Den går ut på att den partiella differentialekvationen eller systemet av kopplade partiella differentialekvationer delas upp i små delar som är mer lätthanterliga. Denna metod tillåter också evalueringen av problem vars egenskaper i definitionsmängden är inhomogena och diskontinuerliga. Dessutom kan problemen lösas för godtycklig geometri med godtyckliga randvillkor. Alla dessa egenskaper gör att finita elementmetoden är ett väldigt kraftfullt redskap vid beräkning av komplicerade problem. Denna metod kommer senare i arbetet att användas för att räkna på värme- och luftflöden.

Den undermetod av finita elementmetoden som skall användas i denna kandidatuppsats är Galerkins metod. En finita elementlösning med Galerkins metod kräver att problemet reduceras till ett ekvivalent variationsproblem. Här är  $L$  differentialoperatoren som betecknar differentialekvationen

$$L(u) = 0. \quad (2.5.1)$$

Här är  $u = u(\mathbf{r}, t)$  en funktion av de spatiala koordinaterna samt tiden.  $\Phi$  definieras sedan som rummet av alla testfunktioner  $\phi$  vilka är kontinuerliga i definitionsmängden  $\Omega$  samt vars derivator är styckvis kontinuerliga på randen  $\Gamma$ . Testfunktionerna  $\phi \in \Phi$  måste även vara  $L^2$ -integrabla. Variationsproblemet blir då: Sök  $u \in \Phi$  som uppfyller

$$\int_{\Omega} L(u)\phi(\mathbf{r})d\Omega = 0. \quad (2.5.2)$$

Det är tydligt att alla  $u$  som uppfyller  $L(u) = 0$  är ortogonala mot alla  $L^2$  integrabla testfunktioner eftersom integranden då alltid kommer att vara identiskt noll. Detta variationsproblem brukar normalt kallas för den svaga formuleringen.

Om differentialekvationen innehåller andra ordningens deriveringsoperatorer krävs en utförligare analys då vissa testfunktioner som ibland används kan inte deriveras två gånger. Dessutom så ger kommande beräkningar oss en trevlig metod syftad till att implementera neumannvillkor, se avsnitt 2.5.2.

Divergensteoremet i två dimensioner

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{A} d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (2.5.3)$$

med  $\mathbf{A} = (uw, 0)$  eller  $\mathbf{A} = (0, uw)$  ger då

$$\int_{\Omega} w \frac{\partial u}{\partial x_k} d\Omega + \int_{\Omega} u \frac{\partial w}{\partial x_k} d\Omega = \int_{\Gamma} u w n_k d\Gamma, \quad k = 1, 2. \quad (2.5.4)$$

Slutligen summeras uttrycket över alla  $k$  vilket ger

$$\int_{\Omega} u \Delta v d\Omega = \int_{\Gamma} u \nabla v \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u d\Omega. \quad (2.5.5)$$

Här är  $w$  utbytt mot  $w_i$  där  $\mathbf{w} = (w_1, w_2) = \nabla v$ . [19]

Termer som innehåller laplaceoperatortorn kan enligt ovanstående recept utvecklas till ekvation

$$\int_{\Omega} \phi \Delta u d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla u d\Omega + \int_{\Gamma} \phi \mathbf{n} \cdot \nabla u d\Gamma. \quad (2.5.6)$$

Slutligen så ansätts

$$u(\mathbf{r}) \approx \sum_n u_n \phi_n(\mathbf{r}) \quad (2.5.7)$$

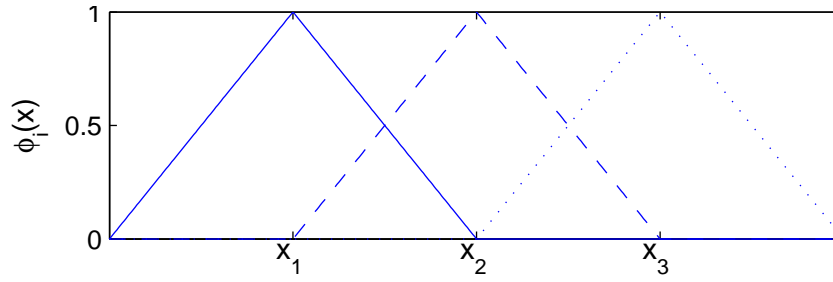
vilket stoppas in i den svaga formuleringen i ekvation (2.5.2). Nu kan konstanterna i linjärkombinationen av testfunktioner plockas ut ur integralerna och integralerna av testfunktionerna evalueras. Genom detta så kan sedan konstanterna lösas ut genom lösning av ekvationssystemet som fås då man låter den fria testfunktionen löpa över alla okända noder. För exempel på dessa beräkningar se avsnitten 3.5 och 3.2.

## 2.5.1 Spatial diskretisering

Lösningen av de galerkinformulerade ekvationerna kräver att en basfunktion väljs. Ett populärt val i litteraturen är linjära triangulära element då de är lätta att använda. Det är dock bara fantasin som begränsar valet av basfunktion och elementgeometri. [19] [20] [21] [22] Området den partiella differentialekvationen skall lösas i delas upp i triangulära element. Trianglarnas hörn blir då noder och trianglarna kallas element. Elementen ligger i ett plan vars normal kallas  $\phi$ . Basfunktionen bildar linjära plan från noden och  $\phi = 1$  ned till intilliggande elements ränder i planet. Basfunktionen antar värdet noll på resten av planet. [19] För att se ett exempel på hur linjära triangulära element kan se ut i en dimension se figur 2.7.

## 2.5.2 Påtvingande av randvillkor

Två typer av randvillkor är relevanta för detta arbete främst i lösning med Galerkins metod. Det ena är dirichletvillkor, vilket innebär att sökt funktion antar ett visst värde på randen. Det andra är neumannvillkor, som sätter derivatan i randnormalriktningen till ett visst värde. Tillvägagångssättet för påtvingande av dessa villkor i Galerkins metod är lite olika. Dirichletvillkor påtvingas lättast genom att noderna som innehar denna typ av villkor sätts till ett värde och att ekvationerna uppdateras med detta värde. Neumannvillkor påtvingas istället genom att värdet på dessa



**Figur 2.7:** Illustration över basfunktionerna  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  och  $\phi_3$  i en dimension med noderna  $x_1$ ,  $x_2$  samt  $x_3$ .

rander sätts in i integralerna som går över randen. Det är viktigt att tillräckligt många randvillkor sätts. Om inte detta genomförs så får problemet en lösning vars egenskaper inte är explicit bestämda. I värsta fall kan en trivial lösning fås. Vilka randvillkor som väljs beror helt på applikationen.

## 2.6 Optimering med Newton-Raphsons metod

När ett ekvationssystem är icke-linjärt kan inga exakta metoder som gausseliminering användas för ekvationslösning. Detta stötte vi till exempel på vid finita elementlösningen av Navier-Stokes ekvationer i avsnitt 3.5. I dessa fall måste approximativa optimeringsmetoder utnyttjas. En sådan metod är Newton-Raphsons metod. Denna bygger på trunkerad Taylorutveckling av en funktion för att linearisera ett icke-linjärt ekvationssystem  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$  vilket kan ses i ekvation (2.6.1). Här är  $\mathbf{J}_f(\mathbf{x})$  jacobianen för  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ .

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}_f(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} \quad (2.6.1)$$

Principen går ut på att algoritmen upprepat gissar nya lösningar där de nya lösningarna följer den negativa jacobianen. Till en början är en god initial gissning  $\mathbf{x}_0$  ett kriterium för att Newton-Raphsons metod skall konvergera. Därefter beräknas funktionsvärdet  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  samt jacobianen  $\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_0)$ . Dessa används för att beräkna nästa gissning genom att lösa (2.6.2) och beräkna nästa  $\mathbf{x}$  med (2.6.3). [23]

$$\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_n)\Delta\mathbf{x}_n = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \quad (2.6.2)$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Delta\mathbf{x}_n \quad (2.6.3)$$

Itereringen bör avbrytas när felet är tillräckligt litet, alternativt då ett största tillåtna antal itereringar har uppnåtts och funktionen inte har konvergerat. En av styrkorna med denna algoritm är dess kvadratiske konvergens mot enkelrötter. [24] En svaghet hos Newton-Raphsons metod är att det i många fall inte är möjligt att analytiskt

beräkna jacobianen. Istället måste andra algoritmer utnyttjas för beräkning av jacobianen, som till exempel finita differensmetoden. Detta är omvägar som denna bidrar till att lösningsprocessen blir mer omständlig och processorintensiv.

### 2.6.1 Konvergens och konvergenskriterier

För att enklare förstå några av de problem som kan uppstå med Newton-Raphsons metod kan det vara lämpligt att repetera beviset för dess kvadratiske konvergens. Definiera en funktion  $f(x)$  enligt (2.6.4). Antag att den unika roten  $f(x) = 0$  existerar för  $x = \alpha$ .

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \tag{2.6.4}$$

Sedan genomförs en taylorutveckling av funktionen  $f(x)$  i

$$f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(x_n - \alpha) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(x_n - \alpha)^2. \tag{2.6.5}$$

Den kvadratiske termen är Lagranges restterm med parametern  $\xi_n \in [\alpha, x_n]$ .

Efter detta divideras alla termer med  $f'(x_n)$ . Det är också känt att  $f(\alpha) = 0$ . Därefter identifieras  $f(x_n)/f'(x_n)$  som ett newtonsteg och ersätts enligt  $f(x_n)/f'(x_n) = x_n - x_{n+1}$ . Slutligen fås att  $x_{n+1} - \alpha \propto (x_n - \alpha)^2$  ur

$$0 = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \alpha - x_n + \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(x_n - \alpha)^2 \Rightarrow \tag{2.6.6}$$

$$x_{n+1} - \alpha = -\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(x_n - \alpha)^2 \tag{2.6.7}$$

För att ovanstående bevis ska gälla måste andraderivatans vara uppåt begränsad, förstaderivatans måste vara nollskild och den högre ordningens derivator får inte vara av stor betydelse för funktionens beteende nära roten  $f(x) = 0$ . Rent praktiskt innebär detta att en god gissning är essentiell för att få konvergens i metoden men även med en god gissning kan problem uppstå om derivatan av funktionen förändras snabbt i  $x$ :s omgivning. Det kan resultera både i att nästa gissning ligger för långt bort eller för nära från svaret. Det förstnämnda problemet leder till att metoden hoppar över roten vilket kan ge att metoden divergerar. Det andra problemet är mindre allvarligt men kan leda till att metoden förlorar sin kvadratiske konvergens.

## 2.6.2 Förbättrad Newton-Raphson

En åtgärd för att undvika att metoden hoppar över rötter är att i varje steg försöka minimera  $|f(x_{n+1})|$ . Rent praktiskt innebär det att en konstant  $0 \leq k_n \leq 1$  väljs och ett modifierat newtonsteg genomförs enligt

$$x_{n+1} = x_n - k_n \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (2.6.8)$$

För att identifiera det optimala valet av  $k_n$  kan en godtycklig linjesökningsalgoritm användas. Ett alternativ till dylik algoritm är att behandla sökningen med en kvadratisk interpolering för att göra metoden mindre processorintensiv. En ny funktion definieras enligt

$$g(k_n) = f(x_n - k_n \Delta x_n) \quad (2.6.9)$$

med  $\Delta x_n = f(x_n)/f'(x_n)$ .

Sedan bestämma funktionens derivata med avseende på  $k_n$  i punkten  $k_n = 0$  och kedjeregeln används för att skriva om uttrycket till något som är användbart, alltså

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial g(k_n)}{\partial k_n} \right|_{k_n=0} &= \left( \frac{\partial g(k_n)}{\partial(k_n \Delta x_n)} \frac{\partial k_n \Delta x_n}{\partial k_n} \right) \bigg|_{k_n=0} = \\ \Delta x_n \left. \frac{\partial f(x_n - k_n \Delta x_n)}{\partial(k_n \Delta x_n)} \right|_{k_n=0} &= -\Delta x_n f'(x_n) = -f(x_n) \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

Ett förslag på algoritm är att i varje iterationssteg först beräkna det fulla newtonsteget, motsvarande  $k_n = 1$ . Är då  $f(x_{n+1}) < f(x_n)$  kan steget godtas. Stämmer inte detta deriveras  $g(k_n)$  och funktionen  $g(k_n)$  ansätts att vara ett polynom av andra ordningen enligt

$$g(k_n) = ak_n^2 + bk_n + c. \quad (2.6.11)$$

Nu kan de kända värdena  $g(0)$ ,  $g(1)$  och  $g'(0)$  användas för att lösa ut koefficienterna i polynomet. Slutligen kan dessa användas för att beräkna derivatan av  $g(k_n)$  och för att hitta dess minimum vilket ger den optimala parametern  $k_n$ .

Om denna metod ska användas för att lösa ett ekvationssystem istället för en realvärd funktion i en dimension behöver ett mått sättas upp. Problemet som ska lösas är  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$ . Funktionen som ska minimeras kan med fördel väljas till  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})^2/2$ . På samma sätt som ovan beräknas derivatan av funktionen  $g(k)$  till [25]

$$g'_n(0) = -\mathbf{F}(\mathbf{x}_n)^2 \leq 0 \quad (2.6.12)$$

För att hitta roten  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$  ansätts som ovan ett polynom där koefficienterna beräknas. Som kan ses så existerar det ett  $k_n$  sådant att  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_{n+1}) \leq \mathbf{F}(\mathbf{x}_n)$  eftersom  $g'(0) \leq 0$ , och noll endast om roten redan är funnen.

## 2.7 Naturkonstanter för luft

Luftens egenskaper kan beskrivas med hjälp av en mängd olika konstanter. Dessa påverkas av luftens temperatur, fuktighet och tryck, alltså vädret. I våra beräkningar av hur luften värms upp och kyls ned av olika väderfenomen är detta i högsta grad något vi har behövt ta hänsyn till.

### Termisk diffusivitet

Termisk diffusitet beskriver hur snabbt värme färdas genom ett ämne där ett högre värde indikerar en högre hastighet. Ett ämne med hög termisk diffusitet når snabbt sitt termiska jämviktsläge.

Termisk diffusitet,  $\alpha$ , är [26]

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad (2.7.1)$$

där

$k$  är termisk konduktivitet,  $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$

$\rho$  är densiteten,  $\text{kg m}^{-3}$

$c_p$  är specifika värmekapaciteten,  $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ )

och  $\alpha$  har enheten  $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ .

### Värmeledningsförmåga

Värmeledningsförmåga, eller termisk konduktivitet, är ett materials förmåga att leda värme och mäts i  $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ . I [11] återfinns en beräkning av luftens värmeledningsförmåga, se ekvation (2.7.2) och (2.7.3), vilket ger  $0,031 \text{ W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ . Som också beskrivs där är detta tyvärr en väl approximativ beräkning och den uppmätta värmeledningsförmågan för luft vid rumstemperatur är  $0,024 \text{ W m}^{-1} \text{K}^{-1}$  [9].

Ur [11, ss. 41-42] fås:

$$k_t = \frac{1}{2} \frac{C_V}{V} l \bar{v} \quad (2.7.2)$$

där  $\bar{v}$  är molekylernas genomsnittliga hastighet.

$$\frac{C_V}{V} = \frac{\frac{1}{2} N k}{V} = \frac{f P}{2 T} \quad (2.7.3)$$

där  $f$  är antal frihetsgrader för en molekyl och  $l \approx \frac{1}{4\pi r^2} \frac{V}{N}$ . För luft i rumstemperatur är  $f = 5$  och  $l = 1,5 \cdot 10^{-7}$  m.

Värmeledningsförmågan ändras generellt med temperaturen. För de flesta ämnen minskar den något med stigande temperatur. Vid låga temperaturer kan den även bero på trycket.

### Densitet

Luftens densitet mäts i  $\text{kg m}^{-3}$ . Vid normala variationer i lufttryck kan vi använda ideala gaslagen, vilket ger att densiteten,  $\rho$ , är

$$\rho_{\text{luft}} = \frac{pM}{RM_{\text{luft}}} \quad (2.7.4)$$

där

$p$  är lufttrycket,  $\text{N m}^{-2}$

$R = 8,315 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$  är gaskonstanten

$T$  är luftens temperatur,  $\text{K}$

$M$  är antalet mol

$M_{\text{luft}}$  är luftens molmassa,  $\text{kg mol}^{-1}$

Luftens molmassa fås ur att den består av 78 % kväve, 21 % syre och 1 % argon och blir  $M_{\text{luft}} = 0,029 \text{ kg mol}^{-1}$ .

### Specifik värmekapacitet

Den specifika värmekapacitet för luft kan approximeras till  $1,005 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$  och är tämligen oberoende av tryck och temperatur. [27]

Som tas upp i avsnittet om väder, avsnitt 1.4, påverkas den specifika värmekapaciteten inte heller nämnvärt av luftfuktigheten. För trots att vatten har en specifik värmekapacitet som är ungefär fyra gånger större än den för luft, innehåller luft relativt lite vatten vid de temperaturer vi har i Sverige, även vid 100 % luftfuktighet.

### Volymetrisk expansionskoefficient

Den volymetriska expansionskoefficienten beskriver hur ett ämnes volym förändras med temperaturen, alltså  $\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta T}$ . Eventuell luftfuktighet torde vara helt oviktig för luftens volymetriska expansionskoefficient, eftersom vattnets expansionskoefficient är så låg och även vid hög luftfuktighet innehåller luften relativt lite vatten. För torr luft borde det gå att använda allmänna gaslagen som ger ett förhållande mellan tryck, volym och temperatur och den volymetriska expansionskoefficienten.

### Kinematiska viskositeten

Den kinematiska viskositeten anger hur snabbt en vätska sprider sig i förhållande till sin massa om den hålls ut på en plan yta. Detta kan sedan utvidgas till att också tillämpas på en gas.



Den kinematiska viskositeten,  $\nu$ , definieras som [28]

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (2.7.5)$$

där

$\mu$  är den dynamiska viskositeten, Pa s, *senedan*.

$\rho$  är lufts densitet, kg m<sup>-3</sup>, se ovan.

För att bestämma den dynamiska viskositeten kan Sutherlands formel användas. Sutherlands formel är tillämplig för temperaturer mellan 0 och 555 K och vid låga tryck. För tryck under 3,45 MPa fås endast mindre avvikelser, vilka kan bortses från i de här tillämpningarna. [29]

Den ger

$$\mu = \mu_0 \frac{T_0 + C}{T + C} \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (2.7.6)$$

där följande konstanter gäller för luft:

$$C = 120 \text{ K}$$

$$T_0 = 291,15 \text{ K}$$

$$\mu_0 = 18,27 \text{ Pa s}$$

## 2.8 Free-running temperature – en konceptuell beskrivning

Free-running temperature är ett begrepp som används för att sammanfatta olika värmeflödens påverkan på byggnader. Det finns tyvärr ingen bra svensk översättning. Det kan beskrivas som den inomhustemperatur som fås om byggnaden används normalt men den aktivt tillförda energin, det som normalt består av uppvärmning via radiatorer, stängs av.

I en fastighet finns det många olika värmekällor, såsom värme från elektriska apparater, människorna som vistas där, belysning och varmvatten för hushållsbruk. All den värmen bidrar till att värma upp huset. På grund av termodynamikens huvudsatser vet vi att kroppar i kontakt alltid strävar efter jämvikt och på så sätt får vi ytterligare energiflöden på grund av vind, sol och utomhustemperatur.

Normalt används sedan den tillförda energin till att utjämna detta. Genom att inte värma fastigheten kan man istället räkna på hur mycket energi man behöver tillföra fastigheten vid olika tidpunkter för att nå önskad inomhustemperatur.

Denna storhet kan givetvis mätas direkt, men eftersom man vill bibehålla aktiviteten är detta troligen inte så populärt hos de som använder byggnaden, speciellt inte med det klimat vi har i Sverige. Istället används oftast olika modeller för att beräkna free-running temperature.

Måttet free-running temperature kan användas till flera olika saker. Det mest grundläggande är att jämföra olika byggnader, där man i och med den fortsatta aktiviteten i byggnaderna jämför dem med hänsyn till vad de används till – ett vilohem eller en idrottshall har troligen ganska olika free-running temperature även om de skulle ha exakt samma byggnadstekniska specifikation. Vid beräkning av värdet behöver man givetvis inte ta hänsyn till detta men det kan ändå vara intressant för att undersöka energibehovet.

Ett annat användningsområde är att sätta upp en statistisk modell där man kan visa hur energibehovet förändras beroende på verksamhet och väderparametrar. Denna tillämpning ligger betydligt närmare till hands för det här arbetet. Här används dock en variant av free-running temperature, där energiuflödet vid konstant inomhustemperatur har beräknats, alltså hur mycket energi som måste tillföras för att upprätthålla önskad inomhustemperatur.

## 2.9 Ekvivalent temperatur – en konceptuell beskrivning

Ekvivalent temperatur är, precis som free-running temperature, ett begrepp som sammanfattar vädrets påverkan på en byggnad i ett värde. Ekvivalent temperatur beskriver energibalansen på en yta och är det värde man ersätter utomhustemperaturen med för att ta hänsyn till fler väderparametrar än just utomhustemperaturen i styrningen av en klimatanläggning.

Att bara ta hänsyn till utomhustemperaturen vid injustering av klimatsystem är enkelt. Tyvärr är det lite för enkelt för att det ska bli riktigt bra, eftersom flera andra väderparametrar, främst sol och vind, värmer och kyler fastigheten i olika grad. I resultatdelen i den här rapporten visas det mer exakt hur stora dessa bidrag är.

De energiflöden genom klimatskalet som orsakas av väderleken summeras med energiflödet som uppkommer på grund av utomhustemperaturen. Denna summa jämförs sedan med energiflödet genom klimatskalet vid olika utomhustemperaturer utan väder, det vill säga ingen sol, inget regn och ingen vind. Den temperatur som ger samma energiflöde som det väderleksorsakade energiflödet kallas ekvivalent temperatur för den väderleken. Denna kan sedan ersätta utomhustemperaturen som indata till klimatsystemet och ge ett jämnare inomhusklimat.

Användningsområdet för free-running temperature och ekvivalent temperatur är det samma, det är bara två olika angreppssätt på samma problem. De beskriver båda hur vädret spelar in på energiflödena genom en vägg i en byggnad. Båda systemen

kan enkelt implementeras i befintliga reglersystem och stora omkostnader kan därför undvikas. Skillnaden är att free-running temperature är temperaturen inomhus medan ekvivalent temperatur är ytterväggens temperatur. Ekvivalent temperatur tar inte hänsyn till solinstrålning genom fönster vilket är möjligt med free-running temperature. Båda varianterna är dock betydligt bättre än att bara titta på utomhustemperaturen, så det vis som görs i många fastigheter idag.

### 2.9.1 Beräkning av ekvivalent temperatur

Energibalansen på utsidan av en vägg beror på solinstrålning, strålning från omgivningen, konvektion med omgivande luft och värmeledning inifrån.

Alla energiflödena kan sammanfattas med Fouriers värmelag i ekvationen

$$\frac{dT_{\text{vägg}}}{dt} = I \cdot \alpha_{\text{abs}} + I_{\text{omg}} + (T_{\text{ute}} - T_{\text{vägg}})h + (T_{\text{vägg}} - T_{\text{inne}})U - I_{\text{vind}}. \quad (2.9.1)$$

När sedan  $\frac{dT_{\text{vägg}}}{dt} = 0$  fås en jämviktslösning för väggens temperatur vid olika väder.  $h$  är konvektionsparametern för luft, som varierar med vinden, se avsnitt 2.4.1. I avsnitt 2.4.3 beskrivs  $I_{\text{vind}}$ .  $U$  är väggens U-värde, som i vårt fall är  $1,2 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$  för den oisloerade söderväggen respektive  $0,3 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$  för den isolerade norrväggen.  $I_{\text{omg}}$  är all svartkroppsstrålning från omgivningen, som kan delas upp i strålning från atmosfären och från den övriga omgivningen, se avsnitt 2.1.2. Vid detta jämviktsläge är  $T_{\text{vägg}}$  ekvivalent temperatur.

$$T_{\text{ekv}} = \frac{I \cdot \alpha_{\text{abs}} + I_{\text{omg}} + T_{\text{ute}} \cdot h - T_{\text{inne}} \cdot U - I_{\text{vind}}}{h - U}. \quad (2.9.2)$$

På samma sätt kan man ta hänsyn till fler effekter allt eftersom man utrett deras påverkan på byggnaden.

# Kapitel 3

## Metod

Den metodik som tillämpats vid beräkning av olika energiflöden bygger på det teoretiska underlag som presenterats i föregående kapitel. Byggnaden kommer här delas upp i de två beståndsdelarna grunden – som påverkas av vädret via marken som värmebuffert – och byggnadsskalet – med väggar, tak och fönster vars ytor direkt påverkas av vädret. Dessutom tillkommer solinstrålningen genom fönster och ofrivillig ventilation på grund av vind, vilka betraktas helt fristående.

Vi börjar med de analytiska beräkningar som beskriver solinstrålningen och går sedan direkt in på att beskriva hur ett statiskt värmefflöde genom en vägg kan beräknas. Vidare beskrivs hur finita elementmetoden har används för att behandla statiska luftflöden, som här nyttjats för att beräkna luftflödet längs väggen när det blåser.

Slutligen finns ett avsnitt som beskriver hur man med hjälp av programmet *Comsol Multiphysics* kan beräkna påverkan på fastigheten från ofrivillig ventilation, det vill säga hur mycket energi som försvinner genom vind som penetrerar huset.

### 3.1 Strålning genom glas

Flera olika metoder har använts vid beräkning av energiflöde genom fönster i byggnaden. Först beskrivs hur direkt solinstrålning genom fönster kan beräknas. Därefter följer ett kort stycke med redogörelser över hur man kan gå tillväga för att beräkna energiflödet via svartkroppsstrålning mellan rummet och omgivningen. I avsnitt 3.1.3 beskrivs kortfattat ett par strålningssituationer som har försumrats. Avslutningsvis presenteras en metod som används för att uppskatta hur mycket energi man kan spara genom att ta hänsyn till den direkta solinstrålningen.

### 3.1.1 Solinstrålning

För att beräkna den totala effekt som solstrålning tillför byggnaden via fönster behövs fönstrenas vinkelberoende g-värden, som presenteras i avsnitt 2.2.1. För att bestämma detta värde ur ekvation (2.2.1) behöver parametern  $z = \theta/90^\circ$  beräknas, där  $\theta$  är vinkeln mellan solstrålningens riktning och fönstrets normal i grader. Detta görs genom att utgå från aktuellt datum och tid på dygnet.

En metod för att räkna ut solens position presenteras i [30] och en matlabfunktion baserad på samma artikel kan ses i bilaga B.1. Argumenten i denna funktion består av longitudinella och latitudinella koordinater för den aktuella platsen samt datum och tidpunkt. För Walleriusgatan är koordinaterna ungefär  $11,979435^\circ$  E respektive  $57,691522^\circ$  N.

När de azimuthala och altitudinella vinklarna, det vill säga vinklarna i sidled och höjddled, som här kallas  $\beta$  och  $\alpha$ , relativt ett väderstreck respektive horisonten har beräknats, relateras infallsvinkeln mot glaset  $\theta$  som

$$\theta = \arccos(\cos(\beta - \gamma) \cos(\alpha)) \quad (3.1.1)$$

där  $\gamma$  är vinkeln mellan fönstrets normal och väderstrecket mot vilken den azimuthala vinkeln anges. Detta görs med funktionen `angletheta` i bilaga B.2.

Med dessa samband tillgängliga kan effektförflödet på grund av solstrålning genom fönster beräknas, vilket kan göras med funktionerna *gvalue* samt *effekt* från bilaga B.2. Nödvändiga argument för dessa funktioner är g-värdet vid vinkelrätt infallande strålning samt konstanterna  $p$  och  $q$  från ekvation (2.2.2).

För att ge ett exempel på hur effekten varierar med solintensiteten måste det byggas upp en approximativ funktion som beskriver solens intensitet vid marknivå som funktion av vinkeln över horisonten. Detta kan göras med hjälp av metoden i referens [31]. För det första sätts strålningen utanför atmosfären från solen till  $I_{sol} = 1377 \text{ Wm}^{-2}$ . En korrektion måste göras för att ta hänsyn till att jorden precesserar i sin bana, vilket leder till att den mot atmosfären infallande solstrålningen tecknas som  $I_0 = I_{sol} (D/D_0)^2$ , där den korrektionsfaktorn ges av

$$\begin{aligned} (D/D_0)^2 = & 1,00011 + 34,221 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(x) + 1,28 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(x) + \\ & + 0,719 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(2x) + 77 \cdot 10^{-6} \cdot \sin(2x) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

och  $x = 360(N - 1)/365$  då aktuella dagen på året är  $N$ . Den direkta solstrålningen som passerar atmosfären och når jordens yta blir då

$$I = I_0 e^{-\tau/\cos 90 - \alpha} \quad (3.1.3)$$

där  $\tau$  ges av tabulerad data i [31] och  $\alpha$  som tidigare är solens höjd över horisonten. Det ska dock påpekas att de använda värdena för  $\tau$  är medelvärden gällande USA,

men i sammanhanget orsakar inte detta några större problem eftersom målet är ett typexempel för hur solstrålningen kan te sig.

### Inverkan av skuggor, rummets interiör och dylikt

Sambanden ovan gäller då all strålning som passerar rutan stannar i rummet. Svårigheter uppstår när exempelvis persienner används. Dessutom har ingen hänsyn tagits till det faktum att omkringliggande byggnader kommer att blockera den direkta solstrålningen vid vissa tidpunkter.

Hur mycket av solinstrålningen som blockeras av persienner och gardiner är oerhört svårt att räkna ut. För det första är den parametern vinkelberoende, det vill säga beroende på persiennens konfiguration, färg och vinkel kommer olika mycket solstrålning att reflekteras tillbaka ut ur fönstret. För det andra måste hänsyn tas till mänskliga faktorer. Naturligtvis kommer vinkeln på persiennen att förändras vid godtyckliga tidpunkter. För att modellera sådana anordningar kan man enligt [16] lägga till en vinkelberoende faktor,  $0 \leq R_{\text{ref}}(\theta) \leq 1$ , i (2.2.3) så att den slutliga formeln för solinstrålning genom fönster blir

$$Q = R_{\text{ref}}(\theta) \cdot g(\theta) \cdot A \cdot I_0 \cos \theta W. \quad (3.1.4)$$

Vid exempelberäkningarna i nästa avsnitt har dock ingen hänsyn tagits till denna koefficient  $R_{\text{ref}}$ .

Effekten av skuggorna som orsakas av grannbyggnader i området kan också tas med i beräkningarna genom att mäta geometrin på omgivande byggnader. Detta behandlas dock inte inom det här projektet.

### 3.1.2 Långvågsstrålning

Vid beräkning av energiflödet på grund av långvågig strålning antas att luften precis innanför fönstret håller konstant temperatur,  $20^\circ\text{C}$  och att de ”synliga” ytorna utanför fönstret håller en temperatur motsvarande utomhustemperaturen,  $T_{\text{ute}}$ . Enligt beräkningen i avsnitt 2.2.2 kommer 75% av den infallande strålningen passera ett treglasfönster. Med detta i åtanke leder Stefan-Boltzmanns lag, (2.1.1), till, om interiören antas stråla som en svartkropp, att  $q_{\text{IR}} = 0,75 \cdot \sigma[(293\text{ K})^4 - T_{\text{ute}}^4] \text{ W m}^{-2}$ . Den totala effekt som flödar ut på grund av svartkroppsstrålning blir då  $q_{\text{IR}} \cdot A$ ,  $[W]$ , där  $A$  är den totala arean av fönsterglas på byggnaden.

### 3.1.3 Övriga strålningseffekter

Då solen skiner kommer en viss andel direkt solstrålning att reflekteras från omgivande byggnader, växtlighet och dylikt för att sedan öka på intensiteten mot fönsterrutorna. Eftersom en andel av den direkt infallande solstrålningen genom fönsterrutorna även kommer att reflekteras mot rummens interiör och stråla ut igen

har vi valt att inte ta hänsyn till dessa flöden, som beror starkt på omgivningens och interiörens utformning.

### 3.1.4 Soltimmar under dygnet

Under året varierar antalet soltimmar. Detta kommer av att jordens rotationsaxel är vinkelrät mot jordens omloppsbana runt solen. I praktiken innebär detta att det är färre soltimmar under vinterhalvåret och fler under sommarhalvåret. Då jordens bana kring solen är nästan cirkulär kan vi approximerar antalet soltimmar per dygn som en trigonometrisk funktion. För Göteborg approximerar vi att årets kortaste dag är 6 timmar och 32 minuter och årets längsta dag är 17 timmar och 28 minuter [32]. Sedan noteras att dagen är som kortast vid vintersolståndet, runt den 20 december. Detta tillåter oss då att teckna dygnets soltimmar  $\tau$  som ekvation (3.1.5). Här är  $t$  tiden i månader där  $t = 0$  motsvarar första januari och  $t$  är periodiskt med perioden 12 månader.

$$\tau = 12 - \left(6 - \frac{32}{60}\right) \cos \left[ \frac{\pi}{6} \left( t + \frac{1}{3} \right) \right] \quad (3.1.5)$$

Fastigheten som detta arbete undersöker har en eldningsperiod från början av oktober till slutet av april. Därför önskas det att beräkna hur många soltimmar det i snitt är per dag under denna period. För detta syfte tecknas medelvärde för antalet ljusa timmar per dag under eldningssäsongen  $\bar{\tau}$  enligt

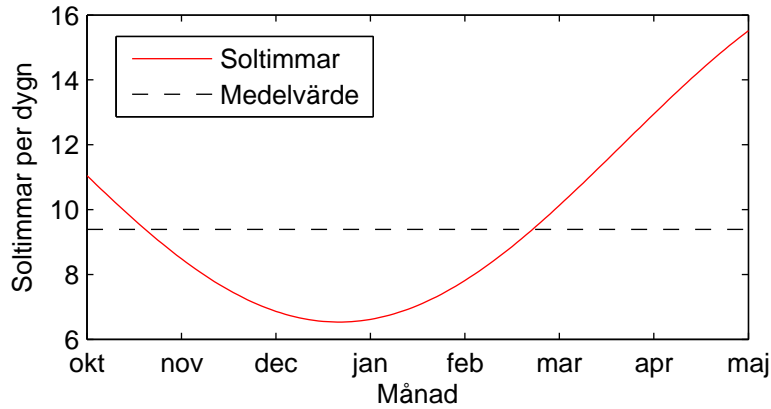
$$\bar{\tau} = \frac{\int_9^{16} \left( 12 - \left[ 6 - \frac{32}{60} \right] \cos \left[ \frac{\pi}{6} \left( t + \frac{1}{3} \right) \right] \right) dt}{\int_9^{16} dt} \quad (3.1.6)$$

När ekvation (3.1.5) och (3.1.6) evaluerades gavs resultatet som kan ses i figur 3.1. Medelvärde har här beräknats till  $\bar{\tau} = 9,39$  timmar per dygn.

För att uppskatta hur mycket energi som går att spara genom att ta hänsyn till solen kommer arbetet senare att behandla en decemberdag. Denna dag har behandlats under de två antagandena att den är solig respektive att den är molnig. Vi benämner energiåtgången för att värma fastigheten för den molniga dagen som  $Q_H$  och energiåtgången för uppvärmning den soliga dagen som  $Q_L$ . Värden på dessa kommer sedan att användas tillsammans med ovanstående beräkningar för att uppskatta den totala mängden energi som kan sparas.

Från SMHI:s väderstatistik går det att utläsa att 8 % av eldningsperiodens timmar är soliga [8]. Detta motsvarar då 1,92 soliga timmar i snitt per dygn. Härnäst betecknas andelen timmar som är soliga som  $p = 1,92/\bar{\tau} = 1,92/9,39 = 20,45$  %. Nu beräknas medelenergiåtgången per dygn  $Q$  enligt

$$Q = (1 - p) \cdot Q_H + p \cdot Q_L. \quad (3.1.7)$$



**Figur 3.1:** Antal timmar på ett dygn då solen är ovanför horisonten beräknat för månaderna under eldningsperioden. Här är medelvärdet markerat med en streckad linje. Medelvärdet har beräknats vara  $\bar{\tau} = 9,39$  timmar per dygn.

Slutligen kan kvoten  $Q/Q_H$  beräknas vilket ger ett uttryck för hur stor andel av energin det går att spara

$$\frac{Q}{Q_H} = \frac{(1-p) \cdot Q_H + p \cdot Q_L}{Q_H} = 1 - p + p \frac{Q_L}{Q_H}. \quad (3.1.8)$$

## 3.2 Finita elementlösning av värmeledningsekvationen

För att beräkna energiflödena har värmeledningsekvationen använts. Det är från avsnitt 2.3 givet att differentialekvationen enligt ekvation (3.2.1) beskriver värmefflöde i ett material. För att lösa den har finita elementmetoden tillämpats.

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (3.2.1)$$

För att finna en lösning integreras värmeledningsekvationen multiplicerat med en  $L^2$ -integrerbar testfunktion  $\phi(\mathbf{r})$  över hela definitionsområdet  $\Omega$  vars rand benämns  $\Gamma$  alltså

$$\int_{\Omega} \left( c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) \right) \phi(\mathbf{r}) d\Omega = 0 \quad (3.2.2)$$

Nu söks en funktion  $T(\mathbf{r}, t)$  som satisfierar nyss nämnda uttryck för alla  $L^2$ -integrerbara testfunktioner  $\phi(\mathbf{r})$ .



För att förenkla fortsatta beräkningar genomförs några omskrivningar av uttrycket. Först används divergensteoremet för att eliminera divergensen i värmeledningsekvationens högerled. Detta ger då

$$\int_{\Omega} c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} \phi(\mathbf{r}) + k \nabla T \nabla \phi(\mathbf{r}) d\Omega = \int_{\Gamma} k \mathbf{n} \cdot \nabla T d\Gamma \quad (3.2.3)$$

där  $\mathbf{n}$  är normalen till randen.

Härnäst skall galerkinformuleringen skissas (för detaljer kring galerikinformulering och den svaga formuleringen se avsnitt 2.5). Detta genomförs genom att temperaturen  $T$  och dess tidsderivata  $\dot{T}$  ansätts enligt

$$T(\mathbf{r}) \approx \sum_n T_n \phi(\mathbf{r}) \quad (3.2.4)$$

$$\dot{T}(\mathbf{r}) \approx \sum_n \dot{T}_n \phi(\mathbf{r}). \quad (3.2.5)$$

Ansatsen ovan stoppas härnäst in i den svaga formuleringen i ekvation (3.2.3) vilket ger

$$\begin{aligned} \sum_n \dot{T}_n \int_{\Omega} c_p \rho \phi_i(\mathbf{r}) \phi_n(\mathbf{r}) d\Omega + \sum_n T_n \int_{\Omega} k_n \nabla \phi_i(\mathbf{r}) \nabla \phi_n(\mathbf{r}) d\Omega \\ = \int_{\Gamma} k_i \phi_i \mathbf{n} \cdot \nabla T d\Gamma \Leftrightarrow \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

För att kunna lösa problemet för definitionsomängder som består av olika homogena material väljs testfunktionen  $\phi$  så att den försvinner vid alla material utom ett visst utvalt och värmeledningskonstanten kan då benämnas  $k_n$ . Ekvationssystemet kan sedan skrivas i matrisform

$$M \dot{T} + A T = f \Rightarrow \quad (3.2.7)$$

$$\dot{T} + M^{-1} A T = M^{-1} f \quad (3.2.8)$$

där  $M$  är massmatrisen,  $A$  är stelhetsmatrisen och  $f$  är belastningsvektorn.

Som kan ses så är ovanstående uttryck ett system av kopplade ordinära differentialekvationer vars lösning är trivial med hjälp av egenvärdesuppdelning. Vektorerna  $\{v\}_{i=1}^n$  definieras som egenvektorerna av  $M^{-1}A$  och  $\lambda_i$  definieras som egenvärdena till samma matris. Systemets homogena lösning kan då skrivas som [33]

$$T_h(t) = \sum_n = c_n v_n e^{-\lambda_n t}. \quad (3.2.9)$$

Då ekvationen är inhomogen så återstår det att finna systemets partikulärlösning. Då inhomogeniteten är konstant så kan lämpligen en konstant ansättas som partikulärlösning. Detta ger att  $T_p(t) = D$ . Insättning i differentialekvationen ger

$$M^{-1}AD = M^{-1}b \Rightarrow \quad (3.2.10)$$

$$D = A^{-1}b \quad (3.2.11)$$

där  $D$  kan bestämmas med ekvationen efter implikationspilen.

Nu kan den fullständiga lösningen skissas som  $T = T_h + T_p$  och om tiden sätts till noll så kan konstanterna  $c_n$  bestämmas genom att  $T$  sätts till problemets begynnelsevärden. För ett problem som saknar tidsberoende eller som har nått en jämviktspunkt måste tiden vara oändlig och de termer som innehar exponenter blir noll. Detta innebär att partikulärlösningen  $T_p$  är den tidsberoende lösningen till problemet. Detta kan enkelt verifieras genom att sätta  $\dot{T} = 0$ . Problemet som återstår är då  $AT = b$  vars lösning är  $T_p$ .

### 3.2.1 Lösning av problem med tidsberoende randvillkor

För att studera vädrets påverkan är det i många fall nödvändigt att behandla tidsberoende randvillkor. I detta arbete används framförallt två metoder för detta: Method-of-lines (MOL) och semidiskret MOL. Den förstnämnda metoden går ut på att ett system av första ordningens ordinära differentialekvationer löses analytiskt för alla  $t > 0$ . I den semidiskreta varianten approximeras istället randvillkoren vid ett visst tillfälle till en lätthanterlig funktion som endast är giltig vid den valda tidpunkten. Efter detta löser man differentialekvationerna upprepade gånger med den förra itereringens värden som nya initialvärden och de nya uppdaterade randvillkoren. Denna metod är väldigt användbar då det är möjligt att behandla en nästintill godtycklig funktion med den, så länge det finns processorkraft att lägga på små tidssteg i jämförelse med randvillkorens förändringshastighet.

För att lösa differentialekvationerna analytiskt för alla tider behöver man först sätta upp en funktion som beskriver randvillkorens beteende. Efter detta sätts dessa villkor i gallerkinformuleringen. Dessa villkor kommer att bilda en inhomogenitet i systemet av differentialekvationer. Metoden för lösning av dessa blir då på samma sätt som i avsnittet ovan, där systemet först diagonaliseras med till exempel egenvärdesdiagonalisering. Sedan är det bara att lösa systemet som vilka vanliga differentialekvationer som helst, för att sedan återföras till önskad storhet genom invers diagonalisering  $T = VY$ .

Receptet för lösning blir då följande. Sätt upp ekvationssystemet

$$\dot{T}(t) + AT(t) = b(t). \quad (3.2.12)$$

Diagonalisera systemet genom att definiera  $V$  som matrisen av egenvektorer av  $A$  och  $D$  som den diagonala matrisen vars element är egenvärdena av  $A$ . Från elementär linjär algebra [33] ges att

$$A = VDV^{-1}. \quad (3.2.13)$$

För att fortsätta beräkningarna skall ett variabelbyte genomföras. Ansätt att

$$T = VY. \quad (3.2.14)$$

Nu kan ekvationerna (3.2.13) och (3.2.14) sättas in i differentialekvationen (3.2.12). Efter att termer flyttats och strukits ges

$$\dot{Y}(t) + DY(t) = V^{-1}b(t). \quad (3.2.15)$$

Slutligen söks den homogena lösningen  $Y_h$  samt partikulärlösningen  $Y_p$  och en linjärkombination bildas. Lösningen uttryckt som  $T$  blir då

$$T(t) = V(Y_h + Y_p). \quad (3.2.16)$$

där koefficienterna dimensioneras så att begynselvillkoret uppfylls.

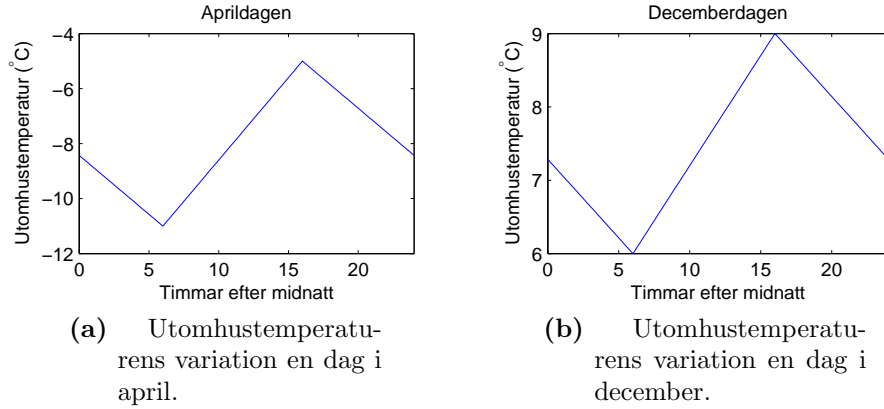
### 3.3 Energiflöde genom väggar, burspråk och tak

För att jämföra energiförluster genom en vägg med och utan isolering används den tidigare beskrivna finita elementmetoden för värmeledningsekvationen i en dimension. Här approximeras väggen som oändligt lång för enkelhet i beräkningarna. För alla beräkningar har ett tidssteg på  $\Delta t = 500$  s använts med semidiskret MOL.

I detta försök antas att en perfekt värmeanläggning existerar så att temperaturen inomhus hålls till konstant  $20^\circ\text{C}$ . Efter detta specificeras energiflödet från utsidan av väggen genom vilka energiflöden som strömmar till väggen. Dessa är svartkroppsstrålning, solinstrålning samt konvektion. Beräkningarna är sedan genomförda med solinstrålningsdata från en solig och en molnig december samt en solig och en molnig aprildag. Solens position och mängden svartkroppsstrålning är beräknade enligt avsnitt 2.1 och 2.2. Enligt detta recept kan nu neumannvillkoret på utsidan av väggen tecknas som ekvation (3.3.1). Här är  $T_{ref}$  utomhustemperaturen och  $\partial T/\partial n$  betecknar normalderivatan.

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{1}{k} (Q_{sol} + Q_{svartkropp} + h(T_{ref} - T)) \quad (3.3.1)$$

Konvektionsparametern och temperaturen under april- respektive decemberdagen har satts till värden som kan ses i tabell 3.1. Temperaturen har sedan linjariserats



**Figur 3.2:** Utomhustemperaturens variation under standarddagarna motsvarande mitten av april samt den sista december som varierar mellan  $6^{\circ}\text{C}$  på natten och  $9^{\circ}\text{C}$  på dagen respektive  $-11^{\circ}\text{C}$  på natten och  $-5^{\circ}\text{C}$  på dagen.

mellan dessa värden över dagen, vilket kan ses i figur 3.2. Att sätta temperaturvariationen till en triangelvåg med maximalt och minimalt värde vid samma tidpunkt i både april och december är en approximation av hur det ofta blir när vädret är relativt konstant över flera dagar. Vädret skiftar dock hela tiden och den faktiska utomhustemperaturen är relativt godtycklig.

**Tabell 3.1:** Data som använts för vindstilla aprildag respektive blåsig decemberdag.

	April	December
Vind parallell mot väggen [ $\text{ms}^{-1}$ ]	0	7
Motsvarande h-värde [ $\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ ]	6,19	35
Temperatur kl 06 [ $^{\circ}\text{C}$ ]	6	-11
Temperatur kl 16 [ $^{\circ}\text{C}$ ]	9	-5

Problemet har sedan satts upp för två olika väggar, en som enbart innehåller 0,5 m tegel, och en som innehåller samma tegellager men som dessutom har tilläggsisolerats på utsidan med 0,1 m mineralull. Materialkonstanterna för aktuella ämnen kan ses i tabell 3.2.

**Tabell 3.2:** Använda materialkonstanter, hämtade från referens [2], [34], [35], [36], [37], [38] och [31].  $k$  betecknar här värmeledningsförmågan, medan  $c_p\rho$  anger volymetriska värmekapacitiveteten.

	Tegel	Mineralull	Koppar	Spånskiva	Puts	Takpannor
$k$ [ $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ]	0,6	$5,2 \cdot 10^{-7}$	401	0,5	0,25	0,85
$c_p\rho$ [ $\text{kJ m}^{-3}$ ]	1154	58,8	3490	1300	872	1748

Under experimentens gång har ett godtyckligt initialvärde valts för att sedan vänta tills lösningen stabiliserat sig för att då utläsa energiåtgången. Derivatn på insidan har slutligen beräknats och använts för att beräkna kyleffekten genom Fouriers värmelag.

För burspråk och tak har ungefär samma metod som för väggen följts, med fyra simuleringar motsvarande soliga och molniga december- och aprildagar. Samma temperaturförändringar som beskrivits ovan har använts för respektive fall. Skillnaderna ligger i vilka material de olika byggnadsdelarna är uppbyggda av. Burspråket har simulerats med materialen och tjocklekarna angivna för burspråken i figur 1.4 och tillhörande konstanter från tabell 3.2.

Taket är uppbyggt enligt figur 1.5a och består av omkring tre centimeter tegelpannor och 21 centimeter mineralull. Den högst marginella påverkan som gipset medför har försummats. Övriga skillnader mellan beräkningar på värmeflödet genom taket och väggarna härstammar från det faktum att solstrålningens normalprojektion är annorlunda på taket jämfört med vertikala ytor, något som har tagits med i beräkningarna. Dessutom blir denna projektion olika beroende på om man betraktar nordsidan eller sydsidan av taket, varför dessa två delar har simulerats separat för de soliga dagarna. De molniga dagarna har det däremot antagits att en femtedel av den maximala solintensiteten infaller på samtliga ytor, då all strålning kan antas vara indirekt.

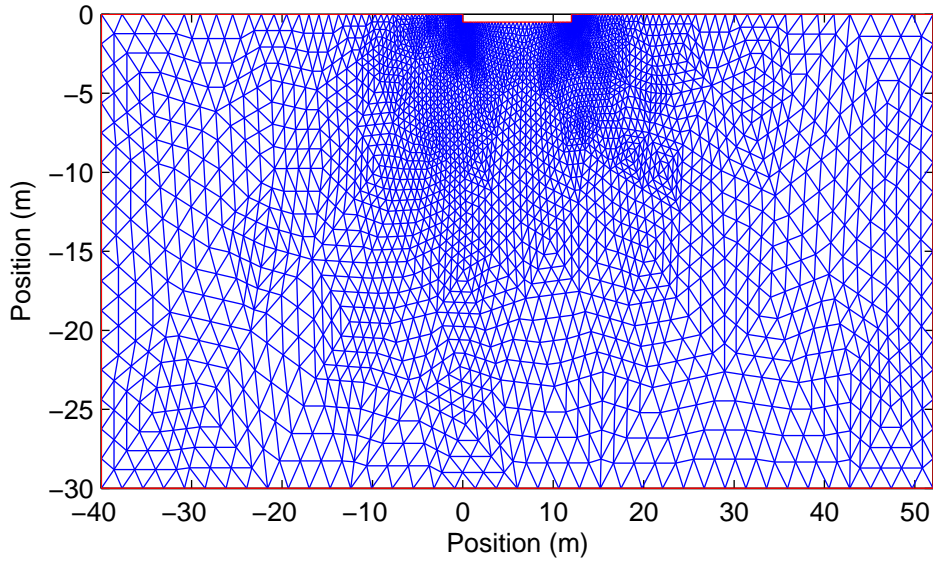
Vidare har väggarnas stegsvar undersökts. Först var väggarna i jämvikt med en utomhustemperatur på  $T = 0^\circ\text{C}$  som sedan steg till  $T = 10^\circ\text{C}$  vid tiden  $t = 0$ . Konvektionsparametern är här satt till  $h = 25 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$  vilket motsvarar en vind på ungefär  $v = 5 \text{ m s}^{-1}$  parallellt med väggens yta. Genom att beräkna den momentana kyleffekten för varje tidssteg kunde väggarnas tröghet studeras.

## 3.4 Energiflöde genom grunden

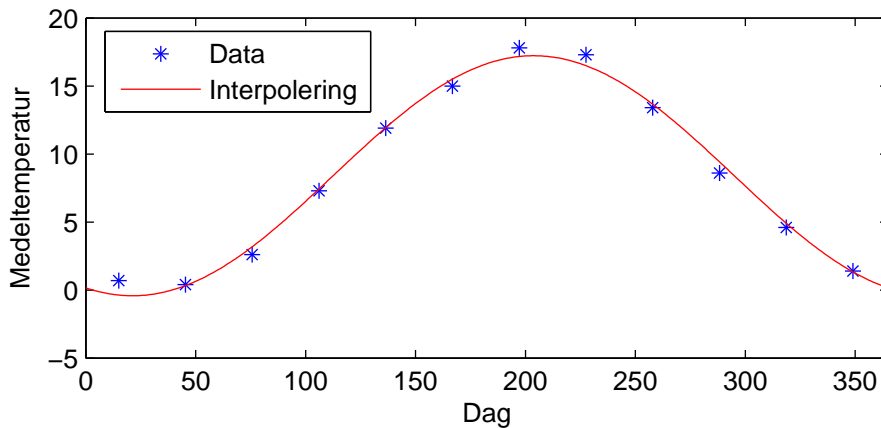
För att räkna på energin som flödar genom grunden är det nödvändigt att räkna transient, eftersom berget tar åt sig värme väldigt långsamt. I praktiken innebär detta att ett statiskt jämviktsläge aldrig uppnås.

Problemet är behandlat med finita elementmetoden applicerad på värmeledningsekvationen. Problemets geometri och trianguleringen kan ses i figur 3.3. Randvärdena som är satt är att alla ränder som går från berg till berg är adiabatiska. Detta kommer inte att stämma i praktiken om inte definitionsmängden sätts oändligt stor. För lösning av detta problem kan det dock ses som en tillräckligt god approximation eftersom definitionsmängden är stor och temperaturen inte varierar så mycket från förväntat värde.

Vid randerna mot grunden ligger ett neumannvillkor som säger att energiflödet är proportionellt mot temperaturgradienten mellan temperaturen på randen och inomhustemperaturen på  $20^\circ\text{C}$ . Grundens U-värde har här satts till  $U = 0,70/0,45 \approx 1,56 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ . Detta värde är baserat på att det ligger 0,25 m betong mellan källaren och grunden och att det ligger ytterligare 0,20 m betong mellan uppvärmda utrymmen och källaren. Vidare antas att det föreligger god omrörning i de båda luftskikten vilket innebär oändligt god värmeledningsförmåga och  $U \rightarrow \infty$ . Detta antagande är dock inte helt giltigt vilket leder till att kyleffekten uppskattas vara något för hög. Vid randerna till luft är konvektionsparametern satt till



**Figure 3.3:** Definitionsmängd och triangulering för berget under grunden.



**Figure 3.4:** Medeltemperaturen för Göteborg de senaste 20 åren. Punkterna är data tagna från Miljöförvaltningen och linjen är minstakvadratanpassningen som senare använts för att beräkna energiflöden.

$h = 15,5 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ . Detta är en siffra som motsvarar en vindhastighet på ungefär  $v = 2 \text{ m s}^{-1}$ . Utomhustemperaturen har valts som en minstakvadratanpassad trigonometrisk funktion av medeltemperaturen de senaste tjugo åren vilket kan ses i figur 3.4. Anpassningen gör att differentialekvationerna av galerkinformuleringen kan lösas analytiskt för alla tider istället för att systemet ska behöva lösas semidiscret. Detta minskade exekveringstiden dramatiskt vilket gav möjlighet att använda en mycket finare triangulering. Dessutom kan alla termer i lösningen som går mot noll då tiden går mot oändligheten sättas till noll. Detta innebär att få lösningar når ett transient jämviktsläge som liknar det jämviktsläge vi har i praktiken. Initialvärdena kommer således inte ha någon betydelse och dessa kan då väljas godtyckligt. För att uppnå detta resultat med semidiskret MOL behövs väldigt många itereringar för att nå konvergens. Den resulterande koden kan ses i bilaga B.3.

### 3.5 Finita element av inkompressibel fluid

För att lösa Navier-Stokes ekvationer som återfinns i avsnitt 2.4 kan lämpligen en datormodell användas. Här består denna modell av ett system uppsatt med Galerkins metod. Denna lösning begränsas dock till att enbart behandla statiska flöden vilket genomförs genom att sätta alla tidsderivator till noll.

För att hantera trycket i Navier-Stokes ekvationer används den tidigare nämnda Boussinesqs approximation och penalty-metoden. De gör hastighetsvektorn källfri och att kontinuitetsekvationen uppfylls. Det finns således inget direkt behov av att räkna ut trycket. Vid användning av många olika sorters elementtyper som inte uppfyller Babuska-Brezzikriteriet är detta dessutom nödvändigt då ekvationssystemet som skall lösas blir singulärt. Detta beror på att trycket inte existerar i lika många ekvationer som hastighetskomponenterna. Finns det då fler okända trycknoder än hastighetsnoder finns ingen entydigt definierad lösning till ekvationssystemet. En annan möjlighet för att lösa problemet är att välja element som uppfyller Babuska-Brezzikriteriet och det uppstår fler okända hastighetsnoder än trycknoder. [39] [40]

Genom penalty-metoden beskrivs här trycket som  $p$  enligt

$$p = p_s - \lambda \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (3.5.1)$$

Här är  $p_s$  någon form av önskat idealt statiskt tryck. Detta tryck följer Boussinesqs approximation. [41] [42] Som kan ses leder den godtyckliga penaltyparametern  $\lambda$  till en justering trycket om hastighetsfältets divergens inte är identiskt med noll. I en del litteratur anges det att penaltyparametern skall vara i storleksordningen  $\lambda = 10^7$  Pa s men att den är väldigt applikationsberoende. En för liten vald penaltyparameter leder till att trycket inte elimineras. Andra problem uppstår vid en för stor parameter såsom att ekvationssystemet kan bli svårlöst och få stabilitetsproblem när parametern blir för stor i jämförelse med de andra delarna i differentialekvationen. [21] [43] [44] [40]

Fortsatt skall trycket deriveras med avseende på de rumsliga variablerna vilket möjliggör att eliminera trycket från differentialekvationerna, vilket resulterar i

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p_s}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{\partial}{\partial x} \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (3.5.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p_s}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} = -g\rho_0 - \frac{\partial}{\partial z} \lambda \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (3.5.3)$$

Notera att det statiska trycket  $p_s$  ej beror på  $x$  vilket resulterar i att derivatan är noll.

Detta förs in i energi- och momentbevaringsekvationerna vilket ger ekvationerna

$$\mathbf{v} \cdot \nabla u - \frac{\lambda}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \nabla \cdot \mathbf{v} - \nu \Delta u = 0 \quad (3.5.4)$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla w - \frac{\lambda}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \nabla \cdot \mathbf{v} - \nu \Delta w - g\beta(T - T_0) = 0 \quad (3.5.5)$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla T - \alpha \Delta T = 0 \quad (3.5.6)$$

vilket är det ekvationssystem  $\mathbf{L}(u, w, T) = 0$  som ska lösas.

Nu skapas en svag formulering som är ett variationsproblem där  $(T, u, w)$  söks så att de satisfierar

$$\int_{\Omega} \mathbf{L}(T, u, w) \phi d\Omega = 0, \quad \forall \phi \in \Phi. \quad (3.5.7)$$

De okända funktionerna ska här vara en linjärkombination av testfunktionerna.

Då differentialekvationerna innehåller andra ordningens deriveringsoperatorer i form av partialderiveringsoperatorn och divergensoperatorn behöver de analyseras ytterligare. Här används divergensteoremet för att eliminera en derivering. Efter detta förs differentialekvationerna in i den svaga formuleringen i ekvation (3.5.7). Det ger

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \phi \mathbf{v} \cdot \nabla u + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\lambda}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{v} + \nu \nabla \phi \nabla u \right) d\Omega = \\ \int_{\Gamma} \left( \nu \phi \nabla u \cdot \mathbf{n} + n_x \frac{\lambda}{\rho_0} \phi \nabla \cdot \mathbf{v} \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \phi \mathbf{v} \cdot \nabla w + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\lambda}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{v} + \nu \nabla \phi \cdot \nabla w + \phi g\beta(T_0 - T) \right) d\Omega = \\ \int_{\Gamma} \left( \nu \phi \nabla w \cdot \mathbf{n} + n_z \phi \frac{\lambda}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

$$\int_{\Omega} (\phi \mathbf{v} \cdot \nabla T + \alpha \nabla \phi \nabla T) d\Omega = \int_{\Gamma} \alpha \phi \nabla T \cdot \mathbf{n} d\Gamma. \quad (3.5.10)$$

Kvar är då att faktiskt lösa problemet. Ansätt en lösning på formen

$$\begin{aligned} u(x, z) &= \sum_{k=1}^N u_k \phi_k(x, z) \\ w(x, z) &= \sum_{k=1}^N w_k \phi_k(x, z) \\ T(x, z) &= \sum_{k=1}^N T_k \phi_k(x, z). \end{aligned} \quad (3.5.11)$$



Då  $\phi_k \in \Phi$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  så uppfylls även att  $u$ ,  $w$  och  $T$  tillhör  $\Phi$  då dessa är en linjärkombination av basen  $\phi_k$ . Om konstanterna är dimensionerade så att dessa uppfyller  $\mathbf{L}(u, w, T) = 0$  är detta en lösning till variationsproblemet. [19] [23] [20]

Ansatsen kan nu sättas in i den svaga formuleringen. Alla förekomster av  $\phi$  byts ut mot  $\phi_i$  med  $i = 1, 2, \dots, N$ . Då kontinuitetskriteriet (2.4.5) säger att  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  sätts detta på randen vilket ger att den ena termen i integralerna på höger sida i ekvationerna (3.5.8) och (3.5.9) försvinner. Slutligen ger detta galerkinformuleringen i ekvationerna

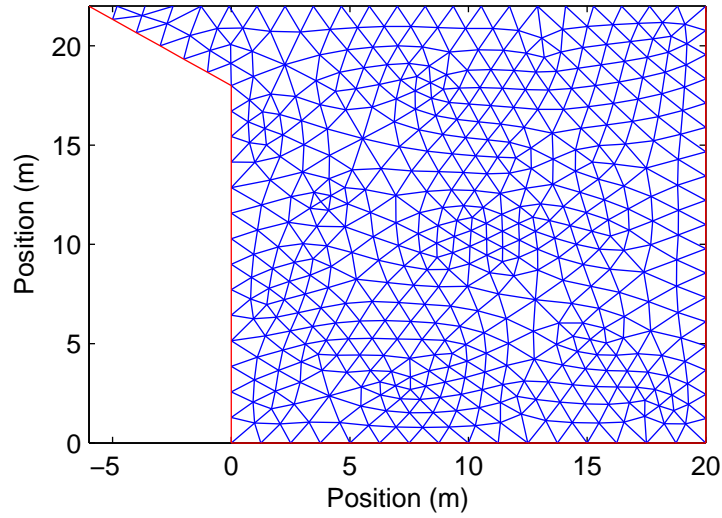
$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N u_j u_k \int_{\Omega} \phi_i \phi_j \nabla \phi_k d\Omega + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N w_j u_k \int_{\Omega} \phi_i \phi_j \nabla \phi_k d\Omega \\ & + \sum_{j=1}^N u_j \int_{\Omega} \frac{\lambda}{\rho_0} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} d\Omega + \sum_{j=1}^N w_j \int_{\Omega} \frac{\lambda}{\rho_0} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} d\Omega \\ & + \sum_{j=1}^N u_j \int_{\Omega} \nu \nabla \phi_i \nabla \phi_j d\Omega = \int_{\Gamma} \nu \phi_i \nabla u \cdot \mathbf{n} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N u_j w_k \int_{\Omega} \phi_i \phi_j \nabla \phi_k d\Omega + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N w_j w_k \int_{\Omega} \phi_i \phi_j \nabla \phi_k d\Omega \\ & + \sum_{j=1}^N u_j \int_{\Omega} \frac{\lambda}{\rho_0} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} d\Omega + \sum_{j=1}^N w_j \int_{\Omega} \frac{\lambda}{\rho_0} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} d\Omega \\ & + \sum_{j=1}^N w_j \int_{\Omega} \nu \nabla \phi_i \nabla \phi_j d\Omega + \sum_{j=1}^N T_j \int_{\Omega} -g\beta \phi_i \phi_j d\Omega \\ & = \int_{\Gamma} \nu \phi_i \nabla w \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} T_0 g\beta \phi_i d\Omega \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N u_j T_k \int_{\Omega} \phi_i \phi_j \nabla \phi_k d\Omega + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N w_j T_k \int_{\Omega} \phi_i \phi_j \nabla \phi_k d\Omega \\ & + \sum_{j=1}^N T_j \int_{\Omega} \alpha \nabla \phi_i \nabla \phi_j d\Omega = \int_{\Gamma} \alpha \phi_i \nabla w \cdot \mathbf{n} d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

### 3.6 Studie av konvektionsparametern

Finita element har använts även för att studera konvektionsparametern. Hastigheterna har alla satts till noll på randerna med  $h = 6,19 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$  vilket motsvarar



**Figur 3.5:** Definitionsmängd samt triangulering av problemuppställningen för studie av konvektion.

en helt vindstilla dag. Husets tak är adiabadiskt och problemet är studerat under en natt i jämviktsläge, det vill säga en evig natt, med  $T_{\text{ref}} = 0^\circ\text{C}$  som referenstemperatur och  $T_{\text{inne}} = 20^\circ\text{C}$  inomhus. Väggens U-värde är satt till  $U = 1,19 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$  vilket motsvarar den oisolerade söderväggen på fastigheten på Walleriusgatan. Penaltypparametern är satt till  $\lambda = 10^7 \text{ Pa s}$ .

Svartkroppsstrålningen approximeras med första ordningens taylorutveckling och för varje steg löses det slutgiltiga ekvationssystemet med den modifierade Newton-Raphsons metod. När systemet har lösts beräknas medeltemperaturen på väggen. Denna används sedan som gissning och utvecklingspunkt för ovan nämnda taylorutveckling. Denna process upprepas tills medeltemperaturen ligger tillräckligt nära gissningen. Således genomförs en rad newtonsteg för att bestämma strålningseffekten från fastigheten genom svartkroppsstrålning.

Sist beräknas konvektionsparametern då mängden energi som transporteras genom luften är känd. I jämvikt gäller

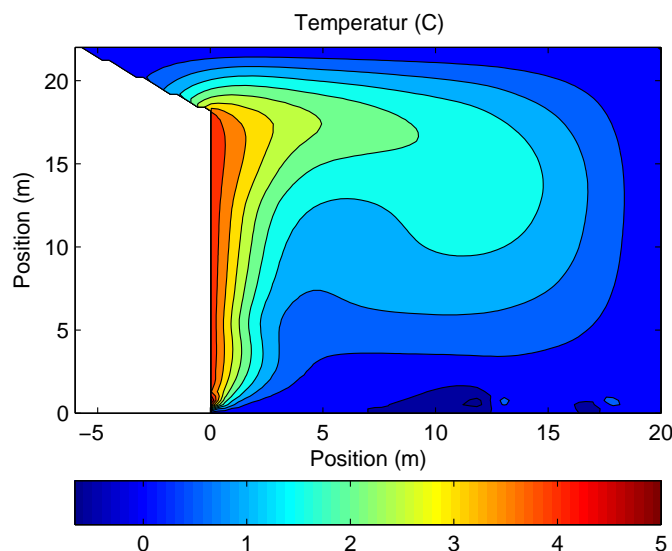
$$Q_{\text{vägg}} + Q_{\text{svartkropp}} = Q_{\text{konvektion}} \quad (3.6.1)$$

Här är  $Q_{\text{vägg}}$  energin som flödar genom väggen,  $Q_{\text{svartkropp}}$  är energin från svartkroppsstrålning och  $Q_{\text{konvektion}}$  är då energin som transporteras med konvektion för att jämvikt skall uppstå.

Medeltemperaturen  $\bar{T}$  på väggen och referenstemperaturen  $T_\infty$  är kända vilket ger att h-värdet kan beräknas enligt

$$Q_{\text{konvektion}} = h(\bar{T} - T_{\infty}) \Rightarrow$$

$$h = \frac{Q_{\text{vägg}} + Q_{\text{svartkropp}}}{\bar{T} - T_{\infty}} \quad (3.6.2)$$

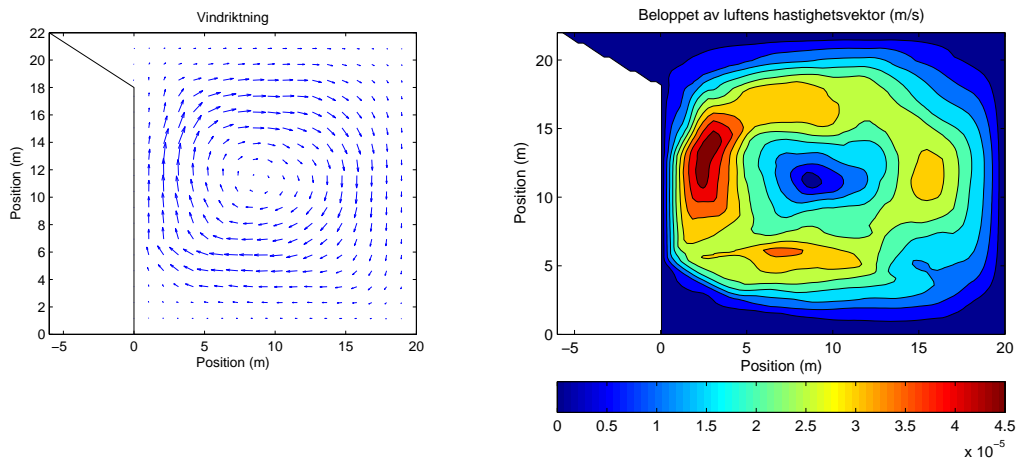


**Figur 3.6:** Temperaturfördelningen i °C utanför en vägg, beräknad med finita element av penalty-metoden. Inomhustempertur 20 °C, utomhustemperatur 0 °C.

Denna metod har slutligen verifierats. Som kan ses i figuren 3.6 är luften närmast väggen upp till fem grader högre än omgivningen. När det blåser försvinner den här temperaturskillnaden. Detta visar tydligt hur viktigt det är att inte bara reglera efter utomhustemperaturen. Här finns dock anomala temperaturer vid nedre randen. Detta tyder på problem med metodiken. Även hastighetsfältet för temperaturens flöde då det är vindstilla har beräknats med finita element metoden applicerad på penalty-metoden. Detta kan ses i figur 3.7 där också beloppet av hastighetsfältet visas och det kan noteras att hastigheterna orimligt små.

Då sedan konvektionsparametern beräknas utifrån detta blir den väldigt liten, se figur 3.8. Tyvärr verkade det inte som att metodiken som användes för att framställa ovanstående data fungerade tillräckligt bra för att med någon noggrannhet studera fenomenet konvektion. Vi menar dock att formen på hastighetsflödet intill marken och väggen kan anses vara av rätt karaktär och visar på hur luften rör sig vid husväggen. Randerna mot luft kan påverka då det inte var tillåtet för luften att passera där, vilket också kan vara en felkälla till den absurt låga konvektionsparametern.

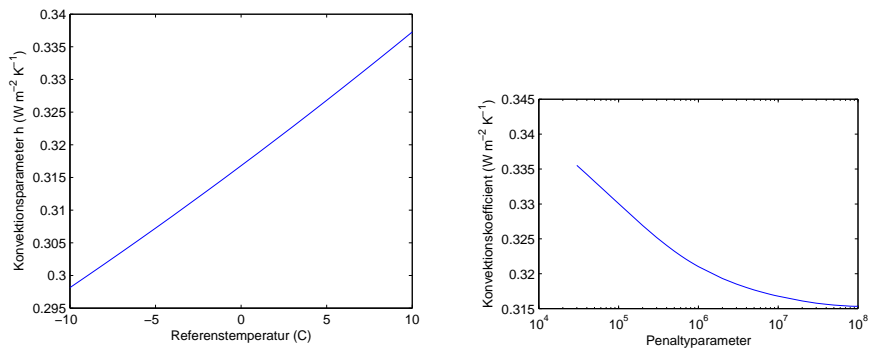
I figur 3.8a har beteendet hos metoden som bygger på finita elementmetoden studerats vid variation på några essentiella storheter i modellen. Först har penalty-parametern varierats i figur 3.8b och här kan det ses att modellens beteende inte förändras nämnvärt beroende på val av parameter när denna närmar sig storleksordningen  $\lambda = 10^7 \text{ Pa s}^{-1}$ . Det linjära förhållandet mellan konvektionskoefficienten



(a) Hastighetsfält

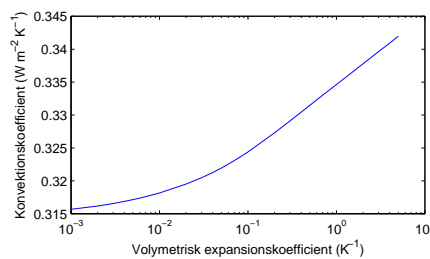
(b) Beloppet av hastigheten

**Figur 3.7:** Hur luften vid husväggen flödar vid en temperaturskillnad.



(a) Konvektionskoefficienten  $h$  mot referenstemperaturen.

(b) Konvektionskoefficienten  $h$  mot penaltypparametern.



(c) Konvektionskoefficienten  $h$  mot den volymetriska expansionskoefficienten.

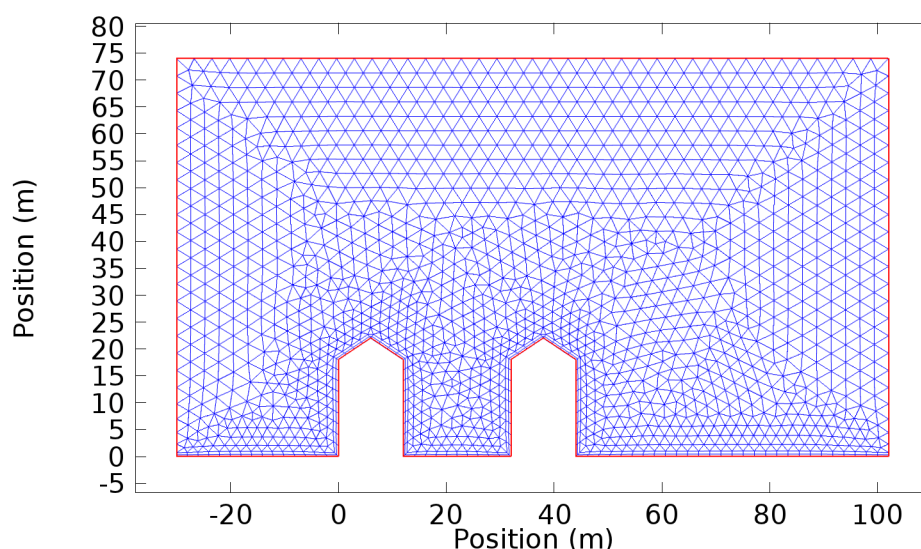
**Figur 3.8:** Stabilitetsberäkningar av konvektionskoefficienten  $h$  mot några parametrar och naturkonstanter i finita elementsimuleringen av Navier-Stokes ekvationer. Inomhustemperaturen är satt konstant till  $20^\circ\text{C}$  med en vägg vars  $U$ -värde är  $1,19 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ . Detta skall motsvara söderväggen på fastigheten som detta arbete behandlar.

och temperaturdifferensen är intressant men saknar stöd i litteraturen då den rimligtvis borde vara konstant eller nästan konstant. Slutligen varierar den volymetriska expansionskoefficienten i figur 3.8c. Det är denna storhet som gör att luften stiger när den blir varm och det är av denna anledning fenomenet fri konvektion uppstår. Konvektionskoefficienten ser ut att öka mer än logaritmiskt men däremot inte så snabbt. Anledningen till att penaltyparametern varierades var för att studera hur stor den skulle behöva bli innan konvektionen började få samma energitransporterande egenskaper som den förväntats ha. Som kan ses så kommer inte modellen ens i närheten av förväntat värde, inte ens då volymetrisk expansionskoefficient ett mycket högt värde.

Slutligen kan vi bara konstatera att det inte gick att använda denna metod för att studera konvektionsparametern  $h$ . Litteraturen som ligger till grund för detta har använt sig av Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin (SUPG) [41] [43]. Ovanstående metod är dock Standard Galerkin med linjära triangulära element. Det är känt att Standard Galerkin kan leda till korsvindproblem och lösningar som inte är exakta och stabila [40]. En misstanke är att det är detta problem vi ser även om detta inte verifieras genom att studera hastighetsfältet. Andra möjliga orsaker kan vara randvillkor, för liten vald definitions mängd eller något fel i den matematiska beskrivningen alternativt vid implementeringen i matematikapplikationen *Matlab*.

### 3.7 Datorsimulering av ofrivillig ventilation

Ett hus är i praktiken omöjligt att göra helt tätt. Då vinden ligger på får man därför ett drag genom huset, en ofrivillig ventilation. Då vinden sällan är lika varm som inomhusluften leder detta till en energiförlust. Den har beräknats med hjälp av programvaran *Comsol Multiphysics*. Problemets geometri har setts upp enligt figur 3.9.



**Figure 3.9:** Triangulering samt definitions mängd uppsatt för problemet.

Bredvid fastigheten på Walleriusgatan ligger en annan byggnad och problemet med vind från de olika hållen blir symmetriskt. Blåser det från norr illustreras den för projektet aktuella fastigheten till höger i bild, och blåser det från söder påverkas den som den till vänster.

Från vänstra kanten så har luften blåst in med en konstant vindhastighet som varierar mellan olika experiment. På andra sidan av fastigheterna har det satt ett konstant lufttryck som motsvarar en atmosfärs tryck. På randerna som ligger mot mark eller mot hus är vindhastigheten satt till noll. Slutligen utför ej luftmassan ovanför definitionsmängden någon kraft på luften som ligger längs den övre randen.

Trycket inne i fastigheterna har sedan beräknats genom att luftläckaget antagits homogent utspritt över fastigheternas väggar och att inget luft läckt genom taket. Därefter har Darcys lag satts upp med antagande om jämvikt så att lika mycket luft som flödar in även kommer ut. Då både trycket inomhus och på ränderna är kända kan läckaget beräknas med Darcys lag eller med någon annan exponent, se avsnitt 2.4.3. Här är antagandet gjort att huset läcker mycket och har  $C(50)^{0,60} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$  vilket motsvarar ett läckande hus. Detta är en empiriskt vald siffra. Motsvarande för ett tätt hus kan antagas vara ungefär hälften. Dock kommer även exponenten ha betydelse för läckaget. [18]

# Kapitel 4

## Resultat

I detta kapitel presenteras de resultat som erhållits med hjälp av metodiken i föregående kapitel. De olika delresultaten visar på olika typer av energiflödens karaktär och hur de påverkas av väderparametrarna. Kapitlet avslutas med sammanställning av de individuella bidragen i form av totalt energiflöde genom fastigheten.

Genom att beräkna storlekarna av energiflödena genom byggnadens olika delar är det möjligt att identifiera var energiflödena är som störst vid olika väderförhållanden. För att få en uppfattning om flödena visas en klar och en molnig dag i mitten av april som får representera ett tänkt maximum för varmt väder innan eldningssäsongen tar slut. Dessutom visas en klar och en molnig dag i december som representerar ett tänkt minimum för största möjliga energiutflöde ur fastigheten, mitt under eldningssäsongen. Eldningssäsongen, det vill säga den tid på året då man fortfarande värmer upp huset, sträcker sig ungefär från början oktober till slutet av april för fastigheten på Walleriusgatan. Under sommaren sker ingen uppvärmning.

Under apriildagen når solinstrålningen en topp vid  $640 \text{ W m}^{-2}$  och solen är uppe i 14 timmar. Dygnet temperatur varierar mellan  $6^\circ\text{C}$  och  $9^\circ\text{C}$ . Enligt väderstatistik från SMHI [8] bör detta vara en med bra väder för att vara i april. På samma sätt är decemberdagen vald med en temperaturvariation mellan  $-11^\circ\text{C}$  och  $-5^\circ\text{C}$ . Solen är då uppe i 6,5 timmar och når ett instrålningsmaximum på  $300 \text{ W m}^{-2}$ . Temperaturfördelningarna kan ses i figur 3.2. I december tillkommer också en vind på  $7 \text{ m s}^{-1}$  under hela dygnet.

### 4.1 Kvantifiering av konstanta energiflöden

Flera av energiflödena genom fastigheten är relativt konstanta sett till en längre tidsperiod. Det gäller främst värme från elektriska apparater, såsom kylskåp och datorer, människors kroppsvärme och varmvattencirkulation. På så sätt kan aktivt tillförd energi, det vill säga den energitillförsel som kan regleras och tillförs via radiatorerna, enkelt regleras med hänsyn till dessa, om man bara känner deras storlek.

### 4.1.1 Uppvärmning från människor

Den utstrålade kroppsvärmen från människor kan beräknas genom att de antas vara svartkroppar. Stefan-Boltzmanns lag säger då att utstrålad energi per yt- och tidsenhet är  $j = \sigma T^4$ , där  $T$  är temperaturen och  $\sigma = 5.6705 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$  [9], se teoriavsnitt 2.1. På samma sätt beräknas den energi som strålas in mot kroppen från omgivningen. Nettostrålningen från en människa kan fås ur

$$j = \sigma (T_k^4 - T_r^4) \quad (4.1.1)$$

energi där  $T_k = 37^\circ\text{C} = 310 \text{ K}$  är kroppstemperaturen och  $T_r = 20^\circ\text{C} = 293 \text{ K}$  är rumstemperaturen. Multipliceras det med en människas area, ungefär  $2 \text{ m}^2$ , fås en nettoeffekt på  $211 \text{ W}$ . I själva verket reduceras denna effekt av en rad faktorer. Exempelvis är hudens temperatur lägre än kroppstemperaturen samtidigt som klädesplagg reducerar effektutstrålningen något. Professor Göran Grimvall skriver i NyTeknik [45] att nettoeffekten vid vila är cirka  $1 \text{ W}$  per kilogram kroppsvikt, alltså ungefär  $50 - 100 \text{ W}$  [45]. Detta skulle betyda att en människa i vila behöver konsumera mellan  $1000$  och  $2000 \text{ kcal}$  per dag för att behålla sin vikt, vilket verkar rimligt.

Idag bor det uppskattningsvis  $25$  personer i fastigheten och detta utgör alltså en energitillförsel på  $2,0 \text{ kW}$ . Givetvis är människor inte alltid hemma, och ibland är de mer aktiva i sina hem – det är mycket svårt att mäta och  $2,0 \text{ kW}$  är en grov uppskattning.

### 4.1.2 Varmvattencirkulation i fastigheten

I huset cirkulerar hela tiden varmvattnet för att alltid kunna tillgodose de boendes behov av varmvatten utan dröjsmål. Efter en tur i systemet sjunker temperaturen på varmvattnet med tre grader och flödet är  $0,8 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}$ . Detta motsvarar en energitillförsel till fastigheten på  $2,8 \text{ kW}$ .

### 4.1.3 Energi från elektrisk apparatur

Den största delen av energin som driver en elektrisk apparat blir till värme. Därför låter vi energiflödet från elektrisk apparatur motsvaras av fastighetens elförbrukning, vilken kan läsas av kontinuerligt och på så sätt bli en del av reglersystemet. Uppskattningsvis utgör detta  $50 \text{ MWh}$  per år vilket motsvarar  $5,7 \text{ kW}$ .

### 4.1.4 Totalt energiflöde från konstanta energikällor

Det sammantagna energiflödet från konstanta energikällor uppgår alltså till

$$2,0 + 2,8 + 5,7 \text{ kW} = 10,5 \text{ kW}. \quad (4.1.2)$$

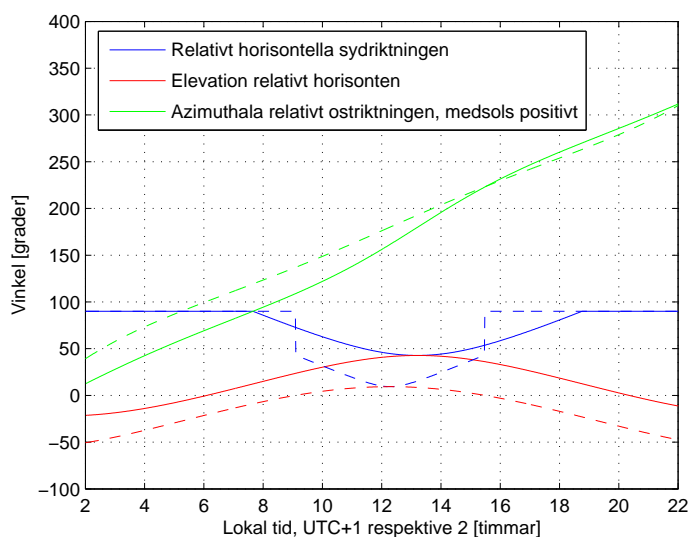


## 4.2 Energiflöde genom fönster

Vid beräkning av det totala effektlödet genom fönster måste hänsyn tas till minst tre olika typer av källor – konduktion, solstrålning och långvågigstrålning i form av svartkroppstrålning både från omgivningen och från rummets interiör. Här beskrivs vilka resultat som givits vid beräkningar enligt metoderna i föregående kapitel, och börjar med den största källan till värmefflöden, nämligen direkt solstrålning genom fönster. Därefter presenteras resultaten av beräkningarna på långvågsstrålning respektive värmeledning.

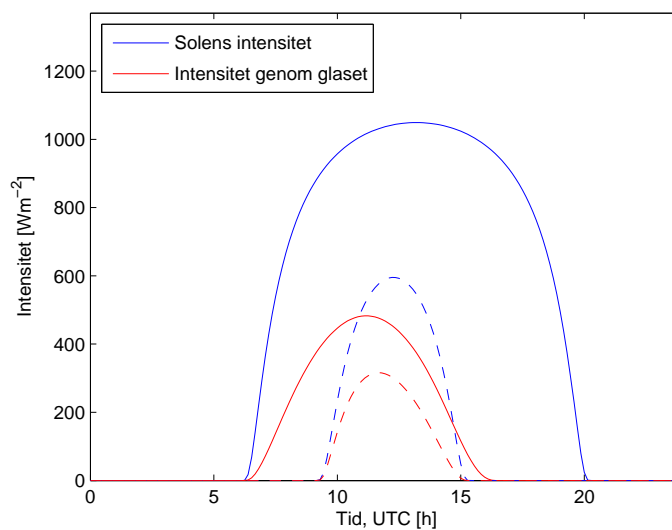
### 4.2.1 Direkt solstrålning

I figur 4.1 ses de relevanta vinklar som bildas av solens position den 15 april 2011 (heldragna linjer), samt den 31 december 2011 (streckade linjer), beräknat med funktionen `sunposition` i bilaga B.1. Den röda linjen visar solens höjd över horisonten medan den gröna indikerar solens azimuthala vinkel, det vill säga vinkel i sidled från en referenspunkt, här tagen till östlig riktning och medsols. Slutligen representerar den blå linjen i figuren solens vinkel relativt en vertikal ytas normal (då denna pekar i horisontell sydlig riktning) och kan användas för att uppskatta effekten som solinstrålning bidrar till.



**Figur 4.1:** Beräknade vinklar vid Walleriusgatan den 15 april 2011 (heldragna linjer, UTC+2) samt den 31 december samma år (streckade linjer, UTC+1).

Innan effekten beräknas måste dock ett exempel på solens intensitet över dagen skapas. Detta görs genom sambandet i avsnitt 3.1. Longitud och latitud för Walleriusgatan är ungefär  $12^\circ\text{E}$  respektive  $57,7^\circ\text{N}$  medan jordens medelradie är ungefär  $6,731 \cdot 10^6\text{ m}$  [9]. Den beräknade intensiteten, som kan ses som de blå linjerna i figur 4.2, medför att effektlödet genom fönster kan beräknas.



**Figur 4.2:** Beräknad effekt genom ett fönster, vars normal pekar  $38^\circ$  öster om horisontella sydriktningen den 15 april 2011 samt den 31 december samma år. Solens intensitet vid marknivå varierar under dagen enligt de blå kurvorna, resulterande i ett flöde genom fönstrena som följer de röda kurvorna. Notera att ingen hänsyn har tagits till skuggor eller persienner och dylikt.

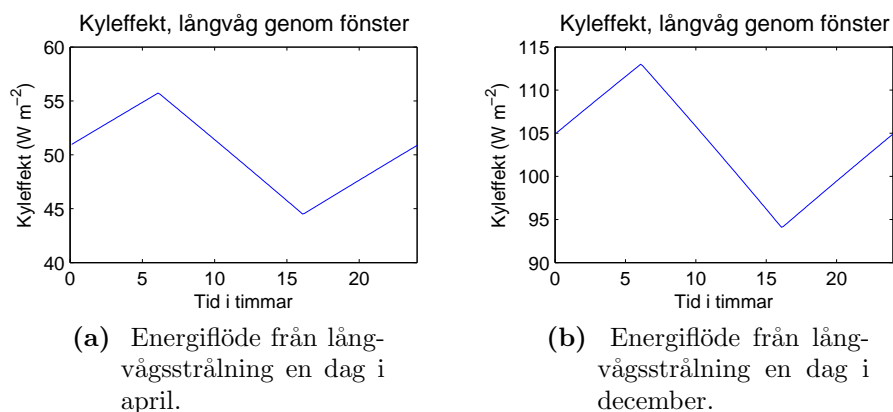
Konstanterna  $q$  och  $p$  i ekvationen för  $g$ -värdet, 2.2.1, sätts till 4 respektive 3, eftersom fönstren i den avsedda byggnaden är av typ treglas utan ytbeläggningar.  $g$ -värdet för normal solstrålning,  $g_0$ , fås från [16] till 0,61. Sydväggens normal pekar åt sydost, med vinkeln  $38^\circ$  mot horisontella sydriktningen. Dessa värden på konstanterna ger ett resultat för den 15 april 2011 och den 31 december samma år, se figur 4.2.

## 4.2.2 Långvågsstrålning

Då rummets temperatur skiljer sig från utomhustemperaturen kommer energiflöden via svartkroppsstrålning att uppstå, som det beskrivs i avsnitt 3.1.2. Då temperaturen varierar från  $6^\circ\text{C}$  klockan 6 på morgonen till  $9^\circ\text{C}$  klockan 16 på eftermiddagen en aprildag fås en kyleffekt som kan ses i figur 4.3a. Då temperaturen istället förändras från  $-11^\circ\text{C}$  på morgonen till  $-5^\circ\text{C}$  på eftermiddagen en decemberdag fås istället ett flöde som kan ses i figur 4.3b.

## 4.2.3 Värmeledning

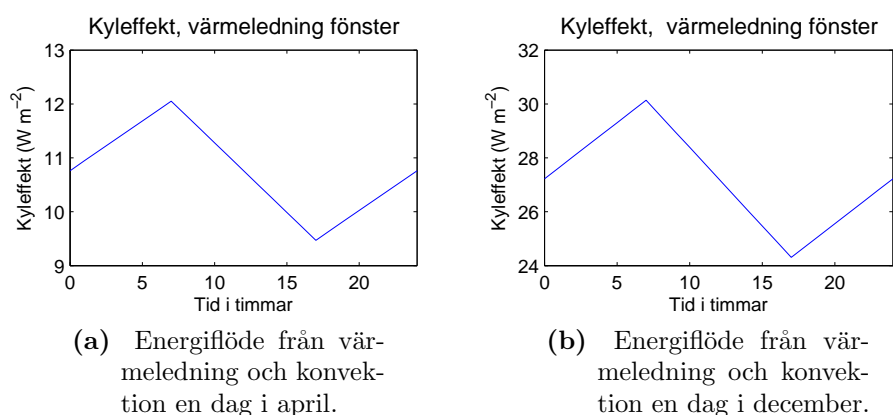
Ytterligare ett värmeflöde genom fönster tillkommer i och med värmeledning. Enligt [5] har fönstrena ett totalt  $U$ -värde på  $1,0 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ . Vidare måste hänsyn tas till konvektionen på utsidan av fönstret, men detta görs enkelt genom att summera  $U$ -respektive  $h$ -värdena såsom i 2.3.6. Detta leder till det effektiva  $U$ -värdet



**Figur 4.3:** Energiflöden ut genom fönster på grund av långvågsstrålning en dag i mitten av april och den sista december. Utemperaturen varierar mellan  $6^\circ\text{C}$  på natten och  $9^\circ\text{C}$  på dagen respektive  $-11^\circ\text{C}$  på natten och  $-5^\circ\text{C}$  på dagen. Innetemperaturen är satt konstant till  $20^\circ\text{C}$ .

$$U_{eff} = \frac{1}{\frac{1}{U} + \frac{1}{h}}. \quad (4.2.1)$$

Värmeffödet ges då av  $q_U = U_{eff} (T_{inne} - T_{ute})$ , där  $T_{inne}$  sätts konstant till  $20^\circ\text{C}$  och  $T_{ute}$  sätts till samma värden som i föregående avsnitt en april- respektive decemberdag. Även  $h$ -värdena sätts till samma värden som tidigare:  $h = 35$  i december och  $h = 6,19$ . Resultatet kan ses i figur 4.4



**Figur 4.4:** Energiflöden ut genom fönster på grund av värmeledning och konvektion en dag i mitten av april och den sista december. Utemperaturen varierar mellan  $6^\circ\text{C}$  på natten och  $9^\circ\text{C}$  på dagen respektive  $-11^\circ\text{C}$  på natten och  $-5^\circ\text{C}$  på dagen. Innetemperaturen är satt konstant till  $20^\circ\text{C}$ .

## 4.3 Energiflöde genom väggar

Hur värmen sprider sig eller inte sprider sig genom en vägg beror på dess material och temperaturerna på vardera sidan av väggen. I fallet när ena sidan av väggen befinner sig utomhus beror spridning också av solinstrålningen och hur mycket det blåser från olika håll. För detta har en modell satts upp utifrån vilken det har gjorts beräkningar av storleken på energiflödet genom väggen under ett dygn då mängden moln är konstant. En modell för hur energiflödet skulle förändras vid ett väderomslag har också satts upp. Båda modellerna har sedan använts för både en oisolerad vägg bestående enbart av 0,5 m tegel och en vägg som dessutom är isolerad med 0,1 m mineralull.

Slutligen har det gjorts beräkningar på hur stora tryckskillnader som en vind som är ortogonal mot väggen ger upphov till. Dessa tryckförändringar driver luft att färdas genom otätheter i huset och drag uppstår vilket ger ett energiflöde genom väggen vid olika inom- och utomhustemperaturer.

### 4.3.1 Flöde vid termisk jämvikt

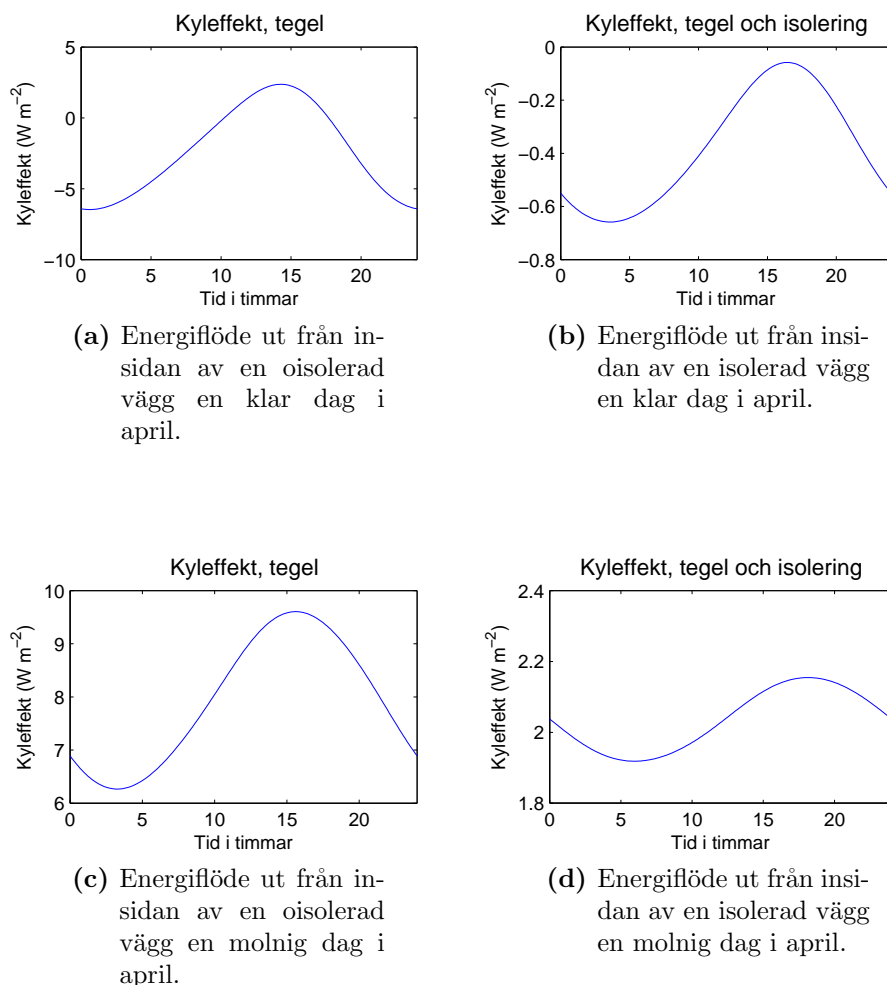
För att visualisera flödet genom en vägg vid konstant väder och utomhustemperatur görs beräkningar med finita elementmetoden och en konstant inomhustemperatur på 20 °C. Utomhusvärdet är relativt konstant och är satt till antingen molnig eller klart en dag i april då utomhustemperaturen varierar mellan 6 °C på natten och 9 °C på dagen. Detta har gjorts för en vägg utan isolering och en vägg med isolering, se figur 4.5. Den oisolerade väggen består av 0,5 m tegel och den isolerade har dessutom 0,1 m mineralull.

I figur 4.5 kan vi se att energiflödet genom väggen minskar till ungefär en fjärdedel med isolering. Under ett soligt dygn kommer det att flöda värme in i fastigheten. På grund av fördröjningen i väggen sker detta främst under natten, och mindre på dagen. Med isolering blir energiflöde mindre och jämnare och inflödet når aldrig över 1 W m<sup>-2</sup>.

Under en molnig dag med samma temperatur varierar energiflödet mellan 6 och 10 W m<sup>-2</sup> utan isolering. Med isolering minskar det till att röra sig mellan 1,9 och 2,2 W m<sup>-2</sup> ut ur fastigheten. En isolering innebär en molnig apripdag ett minskat energiutflöde och därmed en minskad energiförlust för fastigheten.

Trots att energi flödar in i fastigheten den klara dygnet så flödar ganska mycket energi ut ur fastigheten under det molniga dygnet. Göteborg har 1800 soltimmar under ett år av de totalt 4380 timmar som solen är över horisonten. Utifrån SMHI:s väderstatistik [8] kan beräknas att ungefär 37% av dessa sker under eldningssäsongen, oktober till april. Detta motsvarar ungefär 8% av dygnets alla timmar. Tyvärr så förlorar fastigheten mer energi än vad den tjänar på att inte isoleras utslaget på hela eldningssäsongen.

Under en fin sommardag kan det också tänkas att fastigheten värms över den önskade



**Figur 4.5:** Energiflöden ut från insidan av en vägg en dag i mitten av april. Utflöden ut genom väggen betecknas positivt, och inflöden negativt.

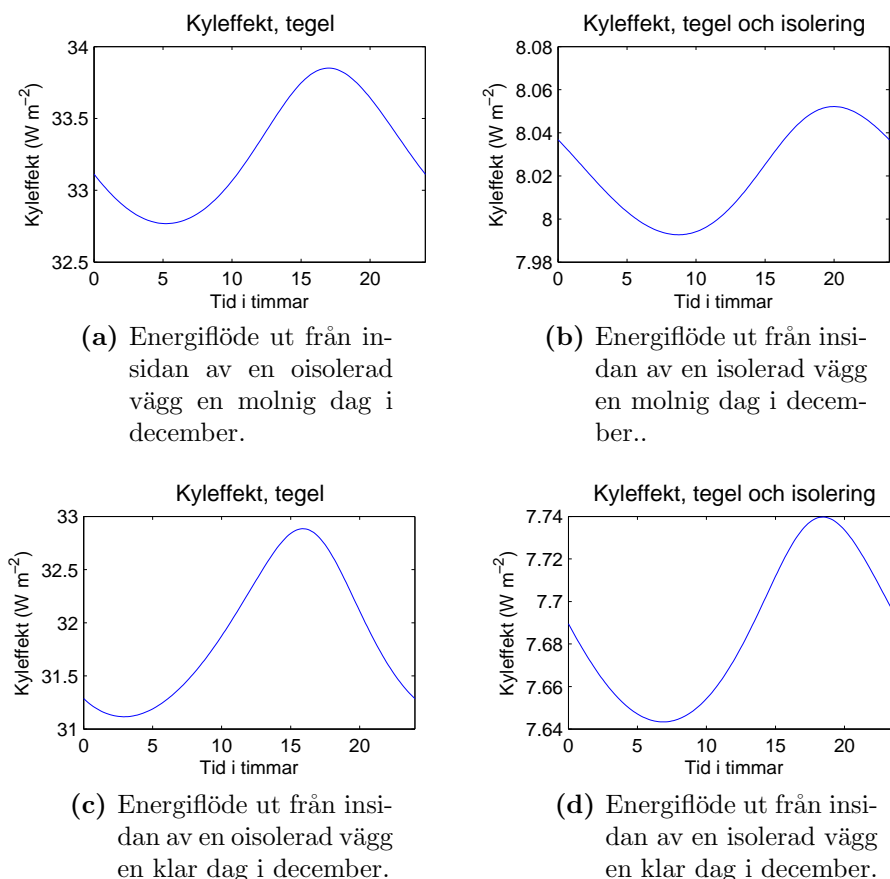
temperaturen och energi istället måste läggas på kylning. Med en isolering minskar även effekten av detta och energiflödena blir mindre och jämnare.

### En decemberdag

Vidare har också energiflödena genom väggen en kall decemberdag undersökts, alltså en dag där energiflödena bör bli ganska stora. Detta kan ses som en övre uppskattning på fastighetens energiåtgång. Två fall av denna dag har undersökts, dels en molning dag och dels en klar dag.

Temperaturen går från  $-5^{\circ}\text{C}$  på dagen till  $-11^{\circ}\text{C}$ . Konvektionskoefficienten har satts till  $h = 35 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$  vilket motsvarar en vindhastighet  $7 \text{ m s}^{-1}$  parallellt med väggens yta. Beräkningarna är genomförda genom att väggens tvärsnitt approximerats med en stav och sedan behandlats med finita elementmetoden.

Även i december blir energiflödet genom en isolerad vägg ungefär en fjärdedel av det genom en oisolerad vägg, se figur 4.6. Här minskar det dock från ungefär 33,5



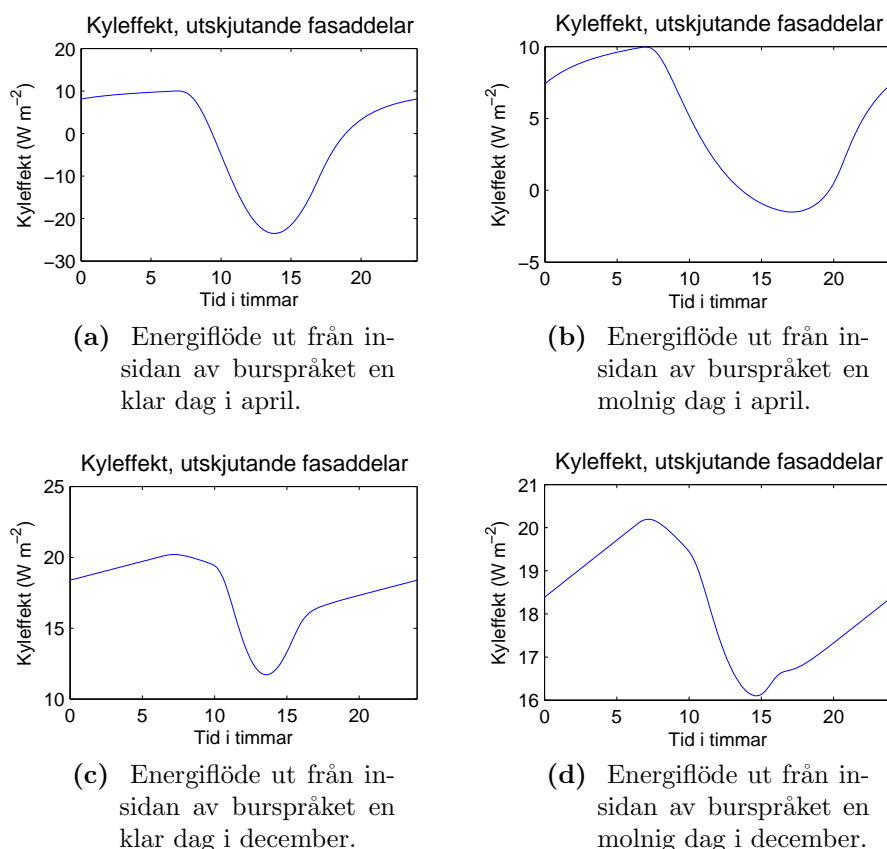
**Figur 4.6:** Energiflöden ut från insidan av en vägg en dag i december. Utflöden ut genom väggen betecknas positivt, och inflöden negativt.

till  $8,05 \text{ W m}^{-2}$  ut ur väggen för den molniga dagen och från ungefär 32 till  $7,7 \text{ W m}^{-2}$  den soliga dagen. Vi ser också i figurerna att energiflödet också blir jämnare med isolering – det varierar med mindre än  $0,1 \text{ W m}^{-2}$  över dygnet, istället för drygt  $1 \text{ W m}^{-2}$  utan isolering. Det gäller både vid klart och mulet väder. Detta är eftersträvarsvärt om en jämn inomhustemperatur önskas. Energiflödet påverkas inte lika mycket av solen på vintern som under den varmare delen av året. En dag i december finns det betydligt mindre att tjäna på att inte isolera och hoppas att solen skiner, jämfört med en dag i april.

### Burspråket

Burspråket är inte uppbyggt av tegel, som de andra väggarna, utan av gips, isolering och koppar på spånskiva, se avsnitt 1.3.1. Energiflödet i burspråket visas här för alla fyra fallen: klar och molnig april dag samt klar och molnig december dag.

Genom burspråket ser energiflödet lite annorlunda ut jämfört med det genom tegelväggarna, se figur 4.7. En april morgon innan solen har gått upp når energiflödet sitt maximum med  $10 \text{ W m}^{-2}$ . När solen sedan värmer burspråket börjar energi



**Figur 4.7:** Energiflöden ut från insidan av en vägg. Utflöden ut genom burspråket betecknas positivt, och inflöden negativt.

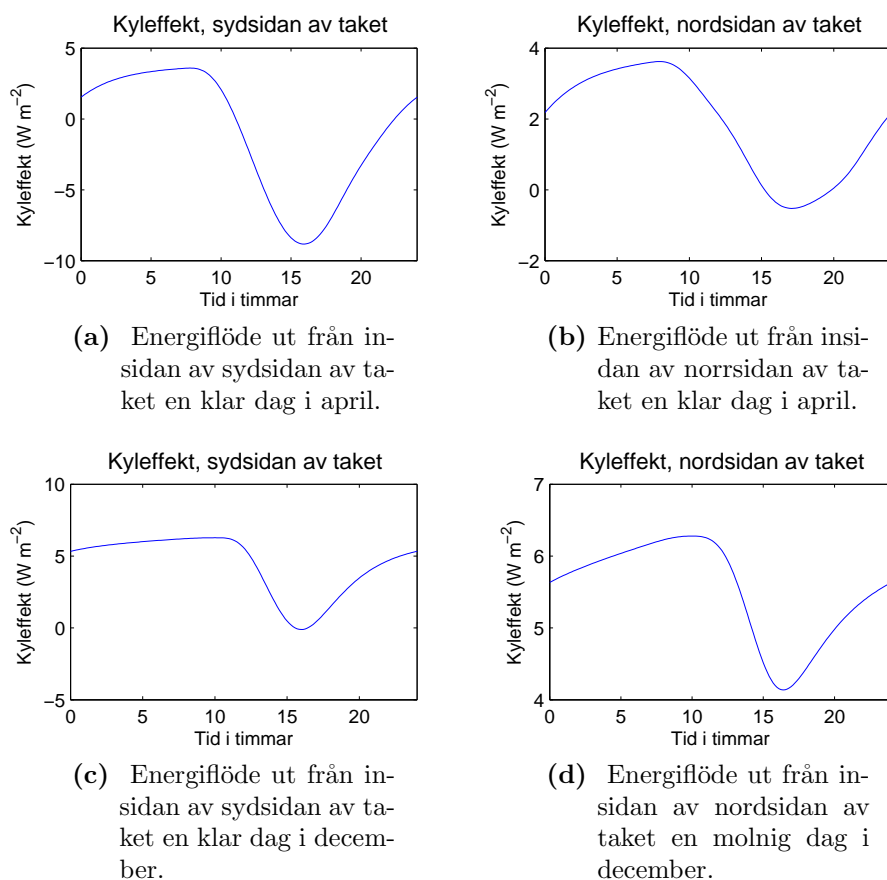
istället flöda in i byggnaden och en riktigt solig dag är det maximala inflödet över  $20 \text{ W m}^{-2}$ , se figur 4.7a. En molnig dag stannar det istället på ungefär  $1 \text{ W m}^{-2}$  ut ur burspråket, se figur 4.7b

En molnig dag i december är det betydligt kallare och energiutflödet varierar mellan 16 och  $21 \text{ W m}^{-2}$ , se figur 4.7d. En solig decemberdag är det tyvärr inte mycket bättre och kyleffekten är alltid större än  $10 \text{ W m}^{-2}$ , se figur 4.7c. En intressant detalj är att kyleffekten på burspråket inte alls är sinusformad, på det vis som flödet genom väggarna i figur 4.5 och 4.6 är. Det beror troligen på att burspråkets väggar är väldigt tunna och reagerar snabbt på förändringar.

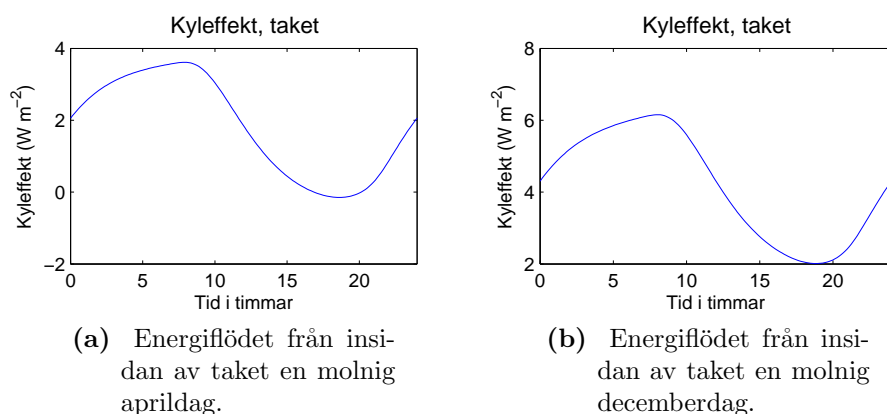
## Taket

Energiflödet genom taket beräknas på samma sätt som energiflödet genom väggarna. Skillnaden, förutom materialet, är takets vinkel mot solen. I figur 4.8 visas energiflödet för en solig april- respektive decemberdag. Eftersom taket lutar har nordsidan och sydsidan olika flöden ty solen skiner olika mycket på de olika lutade ytorna. Figur 4.9 visar i sin tur situationen på molniga dagar, då ingen direkt solstrålning faller på taket.

Energiflödet genom taket en klar dag i april varierar mellan  $9 \text{ W m}^{-2}$  in och  $3 \text{ W m}^{-2}$  ut på sydsidan, se figur 4.8a, och mellan  $1 \text{ W m}^{-2}$  in och  $3 \text{ W m}^{-2}$  ut på nordsidan,



**Figur 4.8:** Energiflöden ut från insidan av en taket, klara dagar. Utflöden ut genom taket betecknas positivt, och inflöden negativt.



**Figur 4.9:** Energiflöden ut från insidan av en taket, soliga dagar. Utflöden ut genom taket betecknas positivt, och inflöden negativt.



se figur 4.8b. Detta kan vidare jämföras med en molnig aprildag där utflödet varierar ännu mindre, bara mellan 0 och  $3,5 \text{ W m}^{-2}$ , se figur 4.9a. Solen har alltså stor en påverkan på energiflödets variationer.

En klar dag i december varierar energiflödet mellan 0 och drygt  $5 \text{ W m}^{-2}$  ut ur taket på sydsidan och mellan drygt  $4 \text{ W m}^{-2}$  och drygt  $6 \text{ W m}^{-2}$  ut ur taket på nordsidan, se figur 4.8c och 4.8d. En molnig dag i december varierar energiutflödet mellan 2 och  $6 \text{ W m}^{-2}$ , se figur 4.9b,

### 4.3.2 Flöde genom en vägg vid transient förlopp

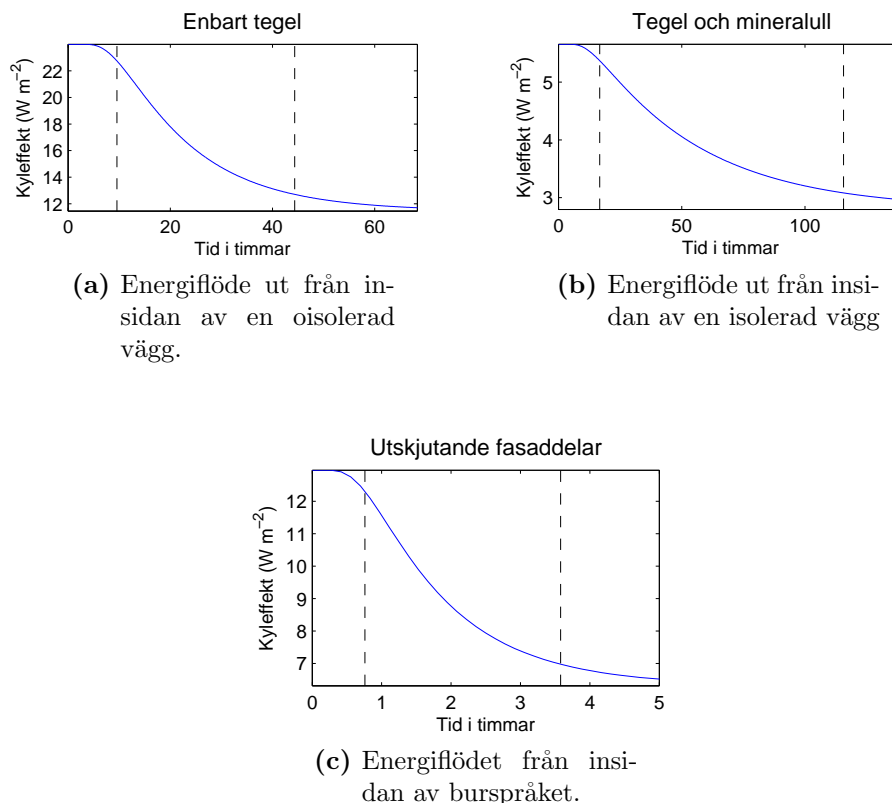
För att visualisera hur flödet genom en vägg förändras med förändringar i vädret utomhus modelleras ett tidssteg där utomhustemperaturen förändras från  $0^\circ\text{C}$  till  $10^\circ\text{C}$ . Inomhustemperaturen hålls konstant till  $20^\circ\text{C}$ . Detta har gjorts för en vägg utan och en vägg med isolering samt en vägg motsvarande burspråket på fastigheten på Walleriusgatan, se figur 4.10. Beräkningarna är genomförda med finita element-metoden där den oisolerade väggen består av 0,5 m tegel och den isolerade dessutom har 0,1 m mineralull. Burspråken består av bland annat gips och 5 cm mineralull vilket finns närmare beskrivet i avsnitt 1.3.

Stigtiden är den tid det tar för väggen att anpassa sig till den nya utomhustemperaturen när den höjs i form av ett steg närmare bestämt den tid det tar från 10 % till 90% av stigningen att ske. För de två tegelväggarna beräknades tidskonstanten till 35 timmar för väggen utan isolering respektive 99 timmar för väggen med isolering. Värt att notera är också att det tog 9,6 timmar respektive 16,8 timmar för energiflödet att stiga 10 %. På burspråket sker de första 10%:en av stigningen på 46 minuter och stigtiden blir totalt 170 minuter.

Här kan alltså ses en avsevärd skillnad i hur lång tid det tar innan väggen har anpassat sig till en ny temperatur. En sådan här plötslig och drastisk förändring i temperaturen är inte något som sker speciellt ofta och ju kortare dagarna är desto mindre är temperaturvariationerna mellan dag och natt [46]. Vid nyår kan man inte förväntat sig en skillnad på mer än  $2-3^\circ\text{C}$ . Vi kan ändå konstatera att förändringen i temperatur fortplantar sig betydligt långsammare i en isolerad vägg än i en oisolerad. Har man då väggar som är olika bra isolerade behöver man troligen även ha två olika reglersystem för de delar av huset som ligger närmast respektive vägg, om man inte reglerar enbart efter inomhustemperaturen.

Återigen visas det att en isolerad vägg är mer motståndskraftig för förändringar i utomhustemperaturen vilket är en fördel om ett jämnt inomhusklimat eftersträvas.

Burspråkets temperatur skiftar relativt snabbt vilket till stor del beror på att burspråkets vägg är så tunn och därför har så lågt U-värde.



**Figur 4.10:** Energiflödet ut från insidan av en vägg. Vid tiden  $t < 0$  råder jämviktsläge med  $0^\circ\text{C}$  på utsidan och  $20^\circ\text{C}$  inomhus. Utmilustemperaturen förändras vid tiden  $t = 0$  i ett steg till  $10^\circ\text{C}$ . De streckade linjerna markerar 10 % stigning och 90 % stigning.

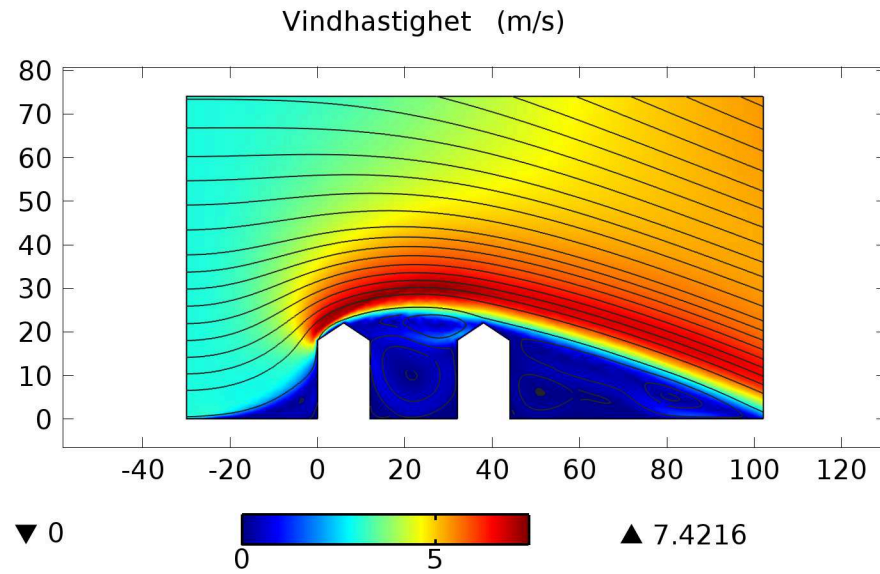
### 4.3.3 Luftflöde genom väggar – drag

När det blåser på fastigheten får det luften kring fastigheten att cirkulera och även tränga in i byggnaden. När vinden ligger på med  $3\text{ m s}^{-1}$ , vinkelrätt mot nord- eller sydfasaden fås ett flöde som det i figur 4.11 och trycket som då uppstår visas i figur 4.12. Tryckskillnaderna på de olika sidorna av husen kommer att driva ofrivillig ventilation vilket leder till energiförluster i form av infiltration.

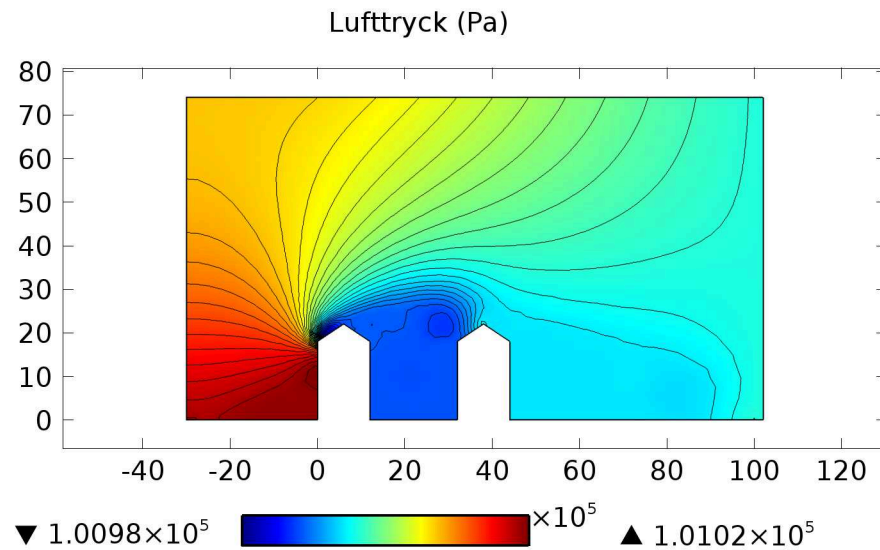
Ur figur 4.11 fås att det hus som ligger i lä inte utsätts för någon vind att tala om. Vidare fås ur figur 4.12 att huset i lä utsätts för en betydligt mindre tryckskillnad, än den byggnad som det blåser direkt på. I vårt exempel här, med en vindhastighet omkring  $3\text{ m s}^{-1}$  fås en maximal tryckskillnad mellan norr- och sydväggarna, på 40 Pa, för fastigheten i lovart. Tryckskillnaden ökar med stigande vindhastighet och vid  $10\text{ m s}^{-1}$  fås en tryckskillnad på 340 Pa för fastigheten i lovart.

Applicerat på fastigheten på Walleriusgatan betyder detta att sydvindar ger upphov till betydligt mer infiltrationsförluster än nordvindar. Till den aktuella byggnadens fördel ska nämnas att södervindarna ofta är varmare än nordvindarna och de faktiska energiförlusterna troligen blir något mindre.

Energiförlusterna på grund av drag har beräknats utifrån att en bestämd mängd



**Figur 4.11:** Vindhastigheten när vind i  $3 \text{ m s}^{-1}$  blåser mot fastigheten från vänster sida i figuren. Linjerna är strömlinjer och färgen indikerar farten. Värdena är framräknade med *Comsol Multiphysics*. Enhet  $\text{m s}^{-1}$ .

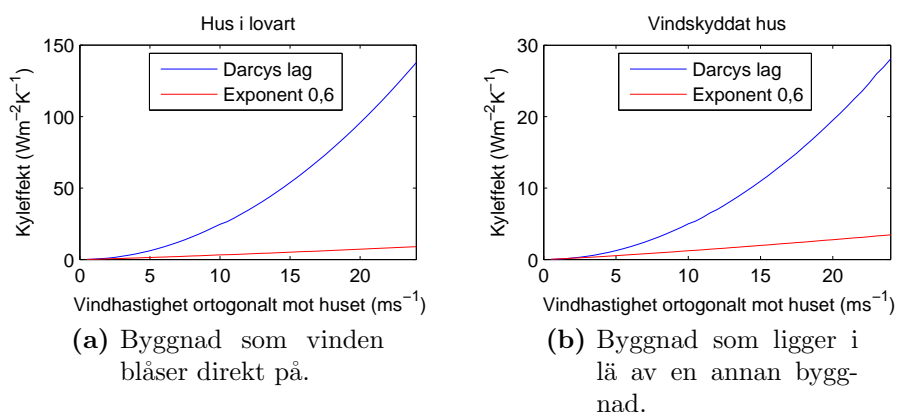


**Figur 4.12:** Lufttrycket när vind i  $3 \text{ m s}^{-1}$  blåser mot fastigheten från vänster sida i figuren. Linjerna är isobarer, färgen indikerar lufttryck. Värdena är framräknade med *Comsol Multiphysics*. Enhet Pa.

energi per grad finns lagrad i en viss volym luft. Luftflödet genom väggen har beräknats på flera sätt, både med Darcys lag och med byggfysikformeln, se avsnitt 2.4.3.

Energiförlusten har beräknats för en fastighet i lovart respektive en som ligger i lä av en annan byggnad, precis som byggnaderna i figur 4.11 och 4.12, vilket motsvarar att det blåser på fastigheten på Walleriusgatan från söder respektive norr. Resultatet kan ses i figur 4.13 för en byggnad i lovart och en i lä. Dessa två olika kurvor, framtagna med Darcys lag respektive med byggfysikformeln, får motsvara högsta respektive minsta gissningar för infiltrationsförluster i en byggnad.

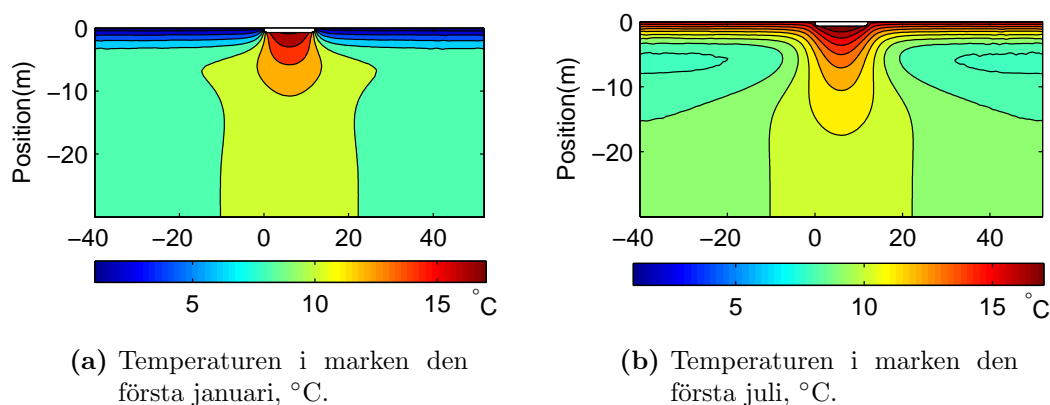
Trycken i figur 4.13a och 4.13b är framräknade för olika vindhastigheter med programmet *Comsol Multiphysics*.



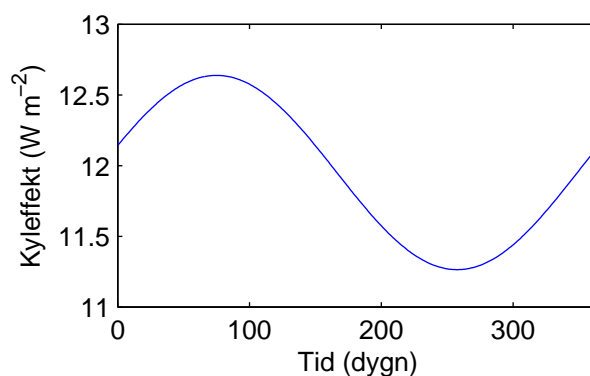
**Figur 4.13:** Energiförlust per grad, max- respektive minvärde. Framtaget med *Comsol Multiphysics*.

Vilken kyleffekt vinden har på fastigheten är mer osäkert vid högre vindhastigheter. När vinden ligger på med uppemot 25 m s<sup>-1</sup> kan kyleffekten variera från några tiotal W m<sup>-2</sup> K<sup>-1</sup> upp emot drygt 100. Motsvarande kan kyleffekt för ett hus i lä vara mellan några W m<sup>-2</sup> K<sup>-1</sup> upp mot knappt 30. För det teoretiskt beräknade huset fås även där att kyleffekten kan vara mellan några W m<sup>-2</sup> K<sup>-1</sup> upp mot knappt 30 W m<sup>-2</sup> K<sup>-1</sup>. När vi har mer normala 10 m s<sup>-1</sup> ser vi istället att kyleffekten kan vara från några få upp emot 20 W m<sup>-2</sup> K<sup>-1</sup> för en byggnad i lovart, och ungefär en fjärdedel av det för en byggnad i lä.

För fastighetens norrvägg, den som ligger i lä av en annan fastighet, fås infiltrationsförluster upp till 28 kW vid 10 m s<sup>-1</sup> och temperaturen 5 °C, då den har arean 379 m<sup>2</sup>. För söderväggen, som ligger mer fritt och har arean 307 m<sup>2</sup> fås förluster upp till 115 kW vid samma vindhastighet. Detta är med beräkningar ur Darcys lag vilket kan anses vara extremt högt räknat och det är mycket otroligt att huset läcker så mycket.



**Figur 4.14:** Temperaturen i marken under byggnaden, °C, beräknat utifrån månadsmedeltemperaturen de senaste 20 åren i Göteborg för två fiktiva dagar i juni respektive januari.



**Figur 4.15:** Kyleffekten per kvadratmeter från grunden för medelåret de senaste tjugo åren. Konvektionsparametern är satt till  $h = 15,5$ .

## 4.4 Energiflöde genom grunden

Vid beräkningen av energiflödet genom grunden användes geometrin som kan ses i figur 4.14. Grunden antas vara belägen en halv meter under marknivån. I resonemanget nedan kommer det att visa sig att marken reagerar så pass långsamt på temperaturförändringar att jämviktsläget är det enda relevanta. Ett transient förlopp är helt enkelt långt ifrån verkligheten. I beräkningarna här är konvektionsparametern satt till  $h = 15,5$ .

Som kan ses i figur 4.15 så varierar inte energiflödet mer än en dryg watt per kvadratmeter mellan årstiderna och i många applikationer antas det därför vara konstant. Då vår grund är ungefär  $22 \text{ m} \cdot 13 \text{ m} = 286 \text{ m}^2$  ger detta ett energiutflöde mellan 3,6 kW på våren och 3,2 kW under tidig höst.

## 4.5 Sammanfattning av energiflöden: energibalanser

Genom att summera alla opåverkbara energiflöden fås ett värde på hur mycket energi som behöver tillföras för att uppnå önskad inomhustemperatur. De olika energiflödena är alltså från fasta energikällor, flöde genom väggarna, burspråk och tak, genom grunden, av solinstrålning in och strålning ut genom fönstren samt från ofrivillig ventilation. Den sista punkten, som orsakas av vind, är satt till noll i april, medan vinden i december är satt till  $7 \text{ m s}^{-1}$ . Denna förlust är inräknad i energiflödet genom respektive fasaddel.

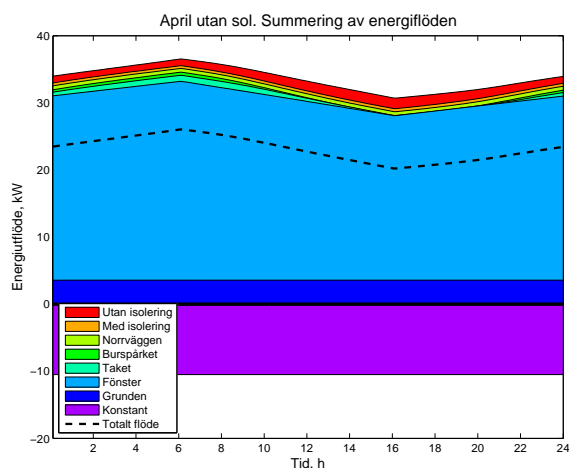
Från fasta energikällor fås alltid ett bidrag på totalt  $10,5 \text{ kW}$ , se avsnitt 4.1. Ur figurerna i avsnitt 4.3.1 får vi energiflödena per kvadratmeter genom de olika avsnitten av klimatskalet och med hjälp av areorna i tabell 1.1 fås det totala energiutflödet genom husets hela klimatskal. Flödet genom grunden beskrivs av figur 4.15 och solinstrålningen genom fönster en solig dag beskrivs av figur 4.2. Strålningen ut genom fönstren beräknas som svartkroppsstrålning med en transmissionskoefficient i fönstret på 0.9.

Alla dessa energiflöden har sammanfattats i figur 4.16 för våra fyra olika fall – molnigt respektive soligt aprildygn och molnigt respektive soligt decemberdygn. Här visas summan av de positiva respektive de negativa flödena på grafens positiva respektive negativa axel. Den heldragna linjen visar gränsen mellan in- och utflödena. Dessa summeras sedan och visas med en streckad svart linje. Det översta röda området som syns tydligt på december-bilderna, figur 4.16c och 4.16d, visar hur mycket större energiutflödet blir när man, som idag, inte har isolerat söder- och västväggarna. Om man isolerar summeras det positiva energiflödet istället upp till och med den orangea linjen. Den summerande svarta linjen visar summan av energiflöden idag, utan isolering på syd- och västväggarna. Flödet genom fönster summerar solinstrålning, långvågig svartkroppsstrålning från rummet och från omgivningen samt konvektion.

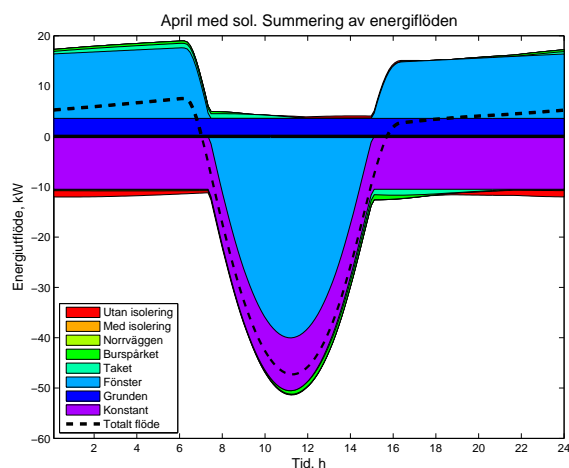
Det mest framträdande i bilderna är solens påverkan. Det syns också tydligt att fönstren läcker väldigt mycket energi. Under ett klart aprildygn är det genom fönstren som den mesta energin kommer in när solen skiner samtidigt som fönstren är den största energitjuven under resten av dygnet. Vi ser också att tilläggsisolering av syd- och västfasaderna knappast lönar sig en solig dag i april, det gör det däremot i december. Fönstren är dock den enskilt största källan till energiläckage.

Enligt avsnitt 3.1.4 bildas kvoten av energiflödena det soliga och det molniga decemberdygnet. Enligt denna beräkning är möjligt att spara 17 % energi genom att ta hänsyn till solen. Utslaget över hela eldningssäsongen blir motsvarande siffra 4 %.

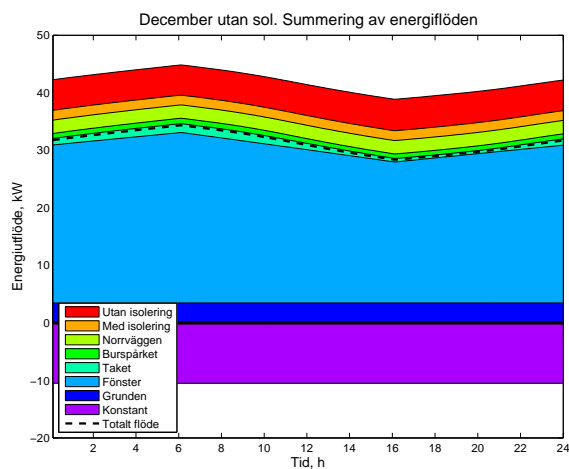
Vid vind fås ytterligare energiförluster. Med en vindmätare fås vindhastigheten enkelt i varje ögonblick och energiförlusten beräknas enligt avsnitt 4.3.3 och adderas till befintligt energiflöde. Där kan ses att energiläckaget på grund av infiltrationsförluster vid vind kan bli mycket stora. För att veta exakt hur fastigheten reagerar på vind behöver dock ett trycktest göras.



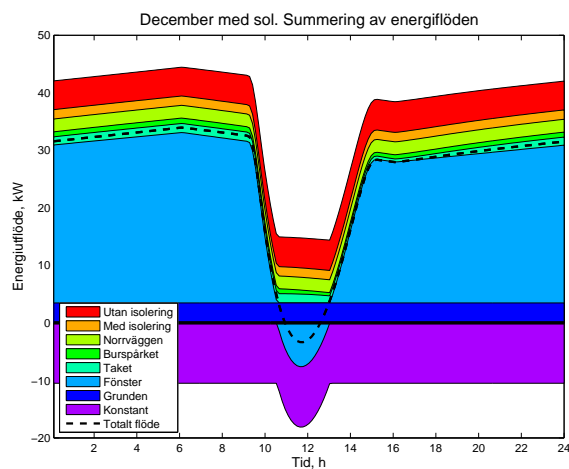
(a) Molnigt dygn i april.



(b) Klart dygn i april



(c) Molnigt dygn i december.



(d) Klart dygn i december.

**Figur 4.16:** Totala energiflöden genom byggnaden, där utflöden betecknas positivt, och inflöden negativt. Den streckade linjen markerar summering av positiva och negativa energiflöden. Den heldragna något bredare linjen är gränsen mellan in- och utflöden.

# Kapitel 5

## Diskussion

Syftet med projektet var att undersöka energiflödena genom en byggnads gränssytor och hur dessa påverkas av vädret. Projektet har undersökt energiflöden genom fastighetens olika typer av väggar, genom tak och fönster samt genom grunden. Dessa har undersökts med avseende på de tre formerna av värmeöverföring: strålning, ledning och konvektion. Vi har också tagit hänsyn till den värme som produceras inne i fastigheten av människor och deras verksamhet. På så sätt har vi kunnat beräkna hur mycket energi fastigheten förlorar eller tillförs vid olika väderförhållanden.

### 5.1 Diskussion kring metoden

I avsikt att nå projektets mål har en rad olika metoder använts. För att utföra beräkningar på strålning från både solen och omgivningen har principen kring svartkroppsstrålning använts. För beräkningar på ledning utnyttjas termodynamikens nollte huvudsats och dessa beräkningar genomförs med Fouriers värmelag och värmeledningsekvationen. Konvektion sker främst på grund av cirkulation i luften och för att beräkna hur detta sker har ett flertal strömningsmekaniska metoder använts.

I början av projektet fanns det förhoppningar om att fastighetens väderstation skulle kunna tillhandahålla väderdata att använda för att sätta upp statistiska modeller. Ganska snart insågs dock att detta inte skulle bli verklighet och modeller blev istället vår metod. Senare visade sig att statistiken hade varit bra för att närmare kunna undersöka hur stor inverkan olika väderparametrar har vid just fastigheten på Walleriusgatan. Detta fick istället lösas med statistik från SMHI:s hemsida. Statistiken var tyvärr något otillräcklig.

För att sätta upp de fysikaliska modellerna behövdes också värden för ett antal materialkonstanter för luft och för tegel. Dessa beror dock av en eller flera väderparametrar såsom tryck, temperatur och fukt och således är det tveksamt om de överhuvudtaget borde kallas konstanter. Det visade sig dock vara mycket svårt att få fram tillförlitlig och tillräckligt högupplöst data som visade detta, än mindre att hitta uttryck på ekvationsform. Vid diskussion med sakkunniga fick vi uppfattning-



en att det finns en tydlig konsensus inom branschen vad som är relevant och inte, men ingen tydlig dokumentation på området. Det har även varit ett stort problem att finna goda källor på vissa naturkonstanter. Värmeledningsförmåga och specifik värmekapacitet kan till exempel variera mycket mellan olika tillverkare av ett visst material och ålder på materialet. Av denna anledning finns det även stora felkällor i val av dessa naturkonstanter. Det har även varit svårt att hitta mätningar på precis rätt material eller mätningar på liknande material över huvud taget. Av denna anledning finns det ibland källor av tveksam karaktär vilket även introducerar fel. För att få exakta värmden måste således mätningar genomföras på materialen i fastigheten. Valet av naturkonstanter är ändå det bästa som gick att genomföra utan att ha tillgång till mätningar från fastigheten.

Vid lösning av de relevanta differentialekvationerna behövdes problemets geometri och randvillkor sättas upp. För att förenkla beräkningarna har ofta antalet dimensioner i problemen reducerats. Bland annat så har väggarna antagits vara oändligt långa vilket är ekvivalent med att de är perfekt isolerade på kortsidorna, alltså alla andra sidor än utsidan och insidan. Detta stämmer inte i praktiken och kan således vara en källa till fel. En liknande approximation genomfördes för grunden, där fastigheten antagits vara oändligt lång. I det här fallet är den undersökta fastigheten mittendelen av en lång fastighet vilket gör att approximationen är giltig men så pass grov att den ändå är en källa till fel. Bergets material antas vara homogen granit vilket heller inte är helt korrekt.

I alla lösningar har differentialekvationernas beteende utanför definitionsmängderna approximerats. Beteendet på randerna är väldigt beroende på omgivningen och detta kommer även vara en stor källa till fel. Här har bland annat svartkroppsstrålning, solinstrålning och konvektionsparametern approximerats. Dessa approximationer är en nödvändighet för att man inte ska behöva simulera hela stadsdelen eller till och med staden vilket kommer bli väldigt beräkningsintensivt. Vi hoppas ändå att våra värden ger en idé om hur det kan se ut i verkligheten och att det ger en god idé om hur stora energiflödena är i jämförelse med varandra.

Som ett extra steg har förslag på ytterligare energibesparande åtgärder tagits fram och dessa har jämförts med att ta hänsyn till väderparametrar på det sätt som projektet fått fram. För att sätta dessa i proportion till varandra har även konstnader för de olika åtgärderna tagits fram. Det har dock varit svårt att få exakta värden på kostnader då författarna för projektet är tredje part och inte direkt företrädare fastighetens ansvariga.

## 5.2 Diskussion kring resultatet

Resultaten en uppskattning av energiflödenas storlek och ska ses som en fingervisning av vad man kan förvänta sig för energiflöden genom en byggnad i samma stil som den på Walleriusgatan vid olika årstider och väderlekar. Det intressanta är framför allt hur stora flödena är relativt varandra och hur de olika flödena förändras med de olika väderparametrarna.

En stor del av energiflödet in i, men framför allt ut ur, byggnaden gick genom fönstren. Det var inte något som uppmärksammades förrän under senare delen av arbetet. Det beroende mycket på att fastigheten har relativt moderna fönster och detta inte framstod som något som behövde åtgärdas. Det finns ett flertal olika metoder för att åtgärda energiflödet genom fönster som lämpar sig för olika byggnader och klimat och det finns inget enkelt sätt att säga vilken som är bäst för just den här fastigheten.

Det transienta flödet genom väggen beskriver hur snabbt väggarna reagerar på ett väderomslag. Det varierar väldigt mellan husets olika delar på grund av väggarnas olika egenskaper. Den välisolerade norrsidan har en större tröghet och en avsevärt längre reaktionstid jämfört med sydsidan och framför allt burspråket, som också ligger på sydsidan. Sker reglering utan hänsyn till detta riskeras stor ojämnhet mellan rummen på ömse sidan av byggnaden.

Resultatet tar inte hänsyn till eventuell fukt eller regn. Troligen tar väggarna åt sig fukt vid blött väder vilket kan ändra väggens värmeledande och värmelagrande egenskaper. Regn kan också tänkas största luftflödena kring byggnaden och även direkt kyla den genom att vara kallt och har hög värmekapacitet. Den störta förlusten tros dock vara avdunstning av fukt. I det här projektet tas dock ingen hänsyn till det. Vid uppehåll och torrt väder borde resultaten vara fullt tillämpbara.

### 5.3 Jämförelse med andra energibesparande åtgärder

Det finns flera olika energibesparande åtgärder att överväga. Innan något av alternativen implementeras måste det klargöras vilka kostnader, mervärden och sidoeffekter olika åtgärder ger samt hur de kan utnyttjas maximalt. De finns lösningar som lämpar sig bättre och sämre för specifika byggnader. I det här avsnittet kommer en diskussion föras angående tre alternativ till det momentant väderbaserade system som rapporten i huvudsak undersöker. Som kan ses i resultatet påverkar vädret högst väsentligt energiflödet genom byggnaden. Enligt avsnitt 4.5 beror det främst på vind och solinstrålning och deras effekter fördröjs inte av trögheten i väggarna. För att kunna reglera enbart på data från väderstationen behöver det finnas en fördröjning innan vädret påverkar inomhusklimatet, för att ett reglersystem ska hinna med. Solinstrålningen värmer direkt genom fönster, och vinden går in igenom otätheter och för på så sätt in kallare luft i byggnaden utan fördröjning.

All energi som används till bostadsuppvärmning enligt fastighetens energideklARATION [4] antas i följande jämförelse förbrukas under vinterhalvåret, då uppvärmning förekommer. Det antas således inte åtgå nämnvärd energi till kyla under sommarhalvåret.

### 5.3.1 Tilläggsisolering

Våra beräkningar visar att väggen inte absorberar tillräckligt mycket energi för att det ska löna sig att inte isolera den. Se figurer i avsnitt 4.3.1. När man gjorde en omfattande renovering i slutet av 1980-talet utfördes en yttre tilläggsisolering, med tio centimeter mineralull på den norra sidan [47], som motsvarar 26 % av husets klimatskal, grunden borträknad. Isoleringen sänkte U-värdet med en fjärdedel. Norrväggen fick då ett lägre U-värde, medan syd- och västväggarna fortfarande hade ett relativt högt, se tabell 1.1. Dessa differenser belyser var byggnaden är dåligt isolerad och det är lämpligt att göra förbättringar, ett exempel är att då välja ytor där U-värdet är högre än 1,0.

En isolering av både syd- och västväggarna är en isolering av en yta om 212 m<sup>2</sup>, som genom en isolering skulle få ett bättre U-värde. Det motsvarar 21,8 % av fastighetens yta där energi kan ledas ut, se tabell 1.1. En tilläggsisolering kan göras på två olika sätt, inifrån eller utifrån. Med båda metoderna finns det både för- och nackdelar. Båda metoderna innebär också betydande ingrepp i fastigheten. Det finns dock mervärden att ta under beaktande.

#### Sidoeffekter och besparingar

Fasader behöver med jämna mellanrum renoveras, och i samband med en sådan renovering blir det betydligt billigare att samtidigt tilläggsisolera. Svenskt tegel har en ungefärlig livslängd på 50 år [48], dock ska tegelfasaden ha renoverats med ny impregnering i samband med renoveringen 1988. Teglet i fastigheten har troligtvis även en längre livslängd än 50 år, då tegel höll högre kvalitetet när huset byggde uppskattas livslängden till ungefär 100 år. Det främsta mervärdet, som också initierade det här projektet, är att temperaturerna i bostäderna blir jämnare, se figur 4.5 och 4.6. Det beror på att väggens buffrande egenskaper är inte så stora som man vill tro och värme sparas inte i väggen från den varmare till den kallare delen av dygnet i önskad utsträckning.

#### Tilläggsisolering utifrån

En tilläggsisolering utifrån är ett ingrepp som medför en stor kostnad. Områdena som bedöms vara lämpliga att tilläggsisolera är alla väggar med tegelyta då de inte har någon tilläggsisolering sedan tidigare och U-värdet då skulle kunna sänkas på samma sätt som norrsidan när den isolerades. U-värdet för hela fastigheten skulle då kunna sänkas från 0,6 till, enligt tabell 0,4 1.1. Då tilläggsisolering är en betydande investering måste emellertid mervärden och andra kostnader som kan tänkas uppstå tas under beaktande. Då alla fasader med jämna mellanrum behöver renoveras kan det vara lämpligt att genomföra isoleringen i samband med detta. Vissa kostnader skulle då kunna minskas, till exempel den för uppsättande av byggnadsställningar.

#### Tilläggsisolering inifrån

En tilläggsisolering inifrån innebär ett ingrepp i lägenheterna och förutom den direkta nackdelen att det stör dem som bor där medför det också att lägenheterna blir något mindre. Huruvida de boende behöver kompenseras ekonomiskt eller i form av

alternativt boende i samband med renoveringen har inte tagits ställning till. Vidare blir ingreppet inte lika komplett som vid isolering utifrån, eftersom det inte går att isolera där innerväggar och golvplan ansluter till ytterväggen och bildar köldbryggor utåt. Den beräknade ytan att isolera blir drygt hälften jämfört med då man isolerar utifrån. Detta gör troligen själva isoleringen mindre kostsam, men det har inte undersökts närmare.

### 5.3.2 Termostater på radiatorerna

Den tredje åtgärden som undersökts är styrning av rumstemperatur via termostater på radiatorerna. I dagsläget regleras flödet manuellt via vred under elementen. De ställs in av fastighetsskötaren och kan regleras om bostadsrättsinnehavaren är missnöjd med inomhusklimatet. Elektriska termostater finns i olika varianter, men det är främst ett koncept från Danfoss AB som undersökts. Det finns i två varianter vilka går att implementera på i princip alla befintliga uppvärmningssystem. Temperatur ställs in i önskat antal grader, i det billigare systemet direkt på termostaterna via en liten lcd-display, eller i det dyrare systemet med en större färgdisplay som är ansluten trådlöst till en huvudenhet. Båda systemen kan automatiskt bryta tillförseln av energi vid tillfälliga kyltoppar, till exempel vid vädring. Det går genom systemet att hålla lägre temperatur i vissa rum, till exempel sovrum. Systemen kan programmeras att ta hänsyn till solinstrålning genom fönster och att sänka temperaturen under dagen, natten eller semestern. Enligt resultaten i avsnitt 4.5 vet vi att kompensering för solinstrålningen kan ge en stor energibesparing.

#### Sidoeffekter och besparingar

En potentiell negativ bieffekt är att energianvändningen kan öka om det finns tillräcklig med energi i systemet och de boende vill ha varmare än vad som i dagsläget erbjuds, vilket leder till att det går åt mer energi än tidigare. Det är lätt att begränsa temperaturintervallet för alla, men det kan skapa irritation hos de boende om de upplever fel temperatur och inte kan ändra, när systemet ska klara det. I samband med att ett system där de boende själva kan reglera temperaturen implementeras bör man informera de boende på ett attraktivt sätt – meningen är ju att både kostnaden ska sjunka, samt att miljöpåverkan ska minskas. Höjs då temperaturen i lägenheterna blir så inte fallet utan det börjar istället kosta mer i både uppvärmning och förslitning av pumpar. [49]

Det skulle även vara möjligt att differentiera uppvärmningskostnaderna på de olika lägenheterna med ett sådant här system. Det ger ett hållbart system där det märks för individen om man sänker temperaturen och således blir mer miljövänlig.

### 5.3.3 Prognosstyrning

Prognosstyrning är en möjlighet för att styra inomhustemperaturen efter vädret, vilket skulle kunna vara ett alternativ till styrning efter väderstationen för byggnaden som har studerats. Fördelarna med prognosstyrning jämfört med att styra direkt

mot väderstationen är att de flesta markanta väderpåverkningar är momentana, det vill säga att det inte sker någon fördröjning innan de påverkar inomhusklimatet. Då krävs framförhållning för att kunna ta hänsyn till dessa vilket kan ges av prognosstyrning. Sveriges meteorologiska och hydrologiska institut, SMHI, står för prognoserna som behandlas och skickas till fastighetens reglersystemet, vilket i sin tur har installerats av deras samarbetspartner. En prognos skickas egentligen aldrig, utan det som skickas är en styrsignal som baseras på väderprognoser samt data om byggnadens energibalans som skickas till styrsystemet. Styrsystemet försöker sedan optimera energiåtgång och boendekomfort efter de givna värdena.

### Sidoeffekter och besparingar

SMHI påstår att deras prognosbaserade system ger kostnadsbesparingar på 5 till 10 % på uppvärmningen. Att förutsäga exakt hur mycket är svårt då vilka parametrar styrningen i deras modell beror på är kommersiell och således inte delges allmänheten. Utifrån vårt möte med SMHI bedömer vi att fastigheten inte ligger i den kategorin som kan spara mest och för en korrekt bedömning krävs att man har för avsikt att abonnera på tjänsten.

### 5.3.4 Ekonomiska uppskattningar kring de olika åtgärderna

Vilka ekonomiska förutsättningar som krävs för de olika åtgärderna kan bara uppskattas då vi inte har haft befogenheter att begära in riktiga offerter från bygg- och installationsföretag.

För att beräkna kostnaderna användes genomgående en förenklad version av payback-metoden, som visar hur många år det tar innan en investering betalar av sig. Metoden tar inte hänsyn till att det är olika stora investeringar, och det framgår således inte vilken metod man kan spara mest pengar på utan vilken som lönar sig snabbast. Det finns inget restvärde för någon av investeringarna. Beräkningarna har gjorts för mest positiva samt mest negativa möjliga utfall, vilket ger ett spann på ett antal år. Förenklingarna leder till att varken kalkylräntor eller en eventuell ränta i det fallet investeringen måste finansieras med ett banklån tas med i beräkningen. Den enklaste formen av payback-metoden ges av

$$\text{Antalet år} = \frac{\text{Grundinvestering}}{\text{Sparat belopp per år}} \quad (5.3.1)$$

Antalet år det tar innan en investering betalar sig enligt (5.3.1) ges i tabell 5.1 nedan. För förklaringar till värdena samt vad de baseras på, se nedan.

### Tilläggsisolering

Vi har inte räknat på en isolering inifrån då det inte har varit möjligt att få en offert eller prisförslag på ett sådant arbete. Det är inte heller säkert att det är möjligt att göra med hänsyn till de boendes komfort. Genom en internetbaserad förfrågningstjänst fick vi visserligen kontakt med ett byggföretag som hävdade att de

**Tabell 5.1:** Payback-tid för olika investeringar

Investering	Minimal payback-tid [år]	Maximal payback-tid [år]
Tilläggsisolering	8,7	52,2
Termostater	2,9	12,8
Prognosstyrning	1	2,9
Väderstation	1,7	5,2

skulle kunna göra arbetet för 200 000 kronor, vilket enligt lite uppskattningar över kostnader för material, arbetskraft och byggnadsställningar framstår som väldigt billigt. Dock har vi en uppskattad besparingsmöjlighet på 25 % av energiåtgången, vilket ger en payback-tid på dryga 10 år, vilket för en sådan typ av investering får anses vara låg. Kostnaden 200 000 kronor är troligtvis ett lockpris då den gjordes vid en första kontakt med företaget och utan att de hade möjlighet att se fastigheten. En seriös offertförfrågning skulle ge en rättvisare approximation, men det bedömdes att de befogenheterna saknades inom projektet. Max samt minvärdena på payback-tiden är framräknade med energibesparing mellan extremvärdena 10 och 30 %.

### Termostater

Det bästa fallet är framräknat utan avseende på varken installationskostnad eller räntor på kapital som måste lånas in. Sämsta fallet framräknat med en installationskostnad lika hög som materialet, vilket är tänkt att motsvara ett verkligt scenario. En investering av det här slaget bör ha en avskrivningstid på fem år, vilket är intressant att jämföra payback-tiden mot. Materialet i sig skulle kosta föreningen knappt 100 000 kronor, och med en besparing på upp till 46 % av energikostnaden [50] per år blir payback-tiden under tre år. En payback-tid på runt hälften av den uppskattade avskrivningstiden är en bra investering. Räknat på dubbla kostnaden och endast 25 % besparing är payback-tiden tolv år, vilket är tilltaget i överkant. Rimlig payback-tid skulle kunna vara runt 5-6 år med den dyrare varianten av systemet. Det finns också möjlighet att sätta in de billigare varianten, utan färgskärmarna. Det ger halva kostnaden, men ger inte samma mervärde och enkelhet till de boende.

### Prognosstyrning från SMHI

Den stora fördelen med SMHI:s system för prognosstyrning är SMHI:s prismodell. Den innebär att investeringskostnaden ska kunna betala sig inom två år, samt att abonnemangsavgiften inte är högre än maximalt hälften av vad man sparar varje år. Det är således väldigt intressant eftersom man egentligen inte behöver några ekonomiska muskler för att börja använda produkten – även en förening som redan har mycket lån och med dålig ekonomi kan köpa systemet. Det bidrar till att samtidigt som SMHI kan ta betalt för sina prognoser, så sparar de boende pengar och mindre energi behöver produceras. Systemet är enkelt och lätt att installera, vilket tillsammans med det låga priset bidrar till att göra det attraktivt. Max samt minvärdena på payback-tiden är framräknade med energibesparing mellan extremvärdena 5 och 10 %.

Med i bästa fall endast ett års payback-tid är prognosstyrning det alternativ som

verkar bäst enligt payback-metoden. Det är dock känt att man inte alltid finner de största besparingarna med payback-metoden. Skulle föreningen investera i systemet, som man enligt SMHI ska kunna få installerat till ett pris som betalar sig inom ett eller maximalt två år [51] [52], tjänar man efter payback-tiden inte nödvändigtvis speciellt mycket pengar per år. Det är inte en hög procentsats av energiåtgången som sparas, samtidigt som de tar en abonnemangsavgift, uppskattningsvis 20-40 %. [51] [52]

### **Väderstation**

Beräkningarna för väderstationen är gjorda utifrån inköp av nödvändig utrustning. För Bostadsrättsföreningen Wallerius är detta inte relevant då investeringen redan är gjord. I och med beräkningen finns det ändå en möjlighet att se hur metoden står sig i förhållande till de andra där främst jämförelsen med prognosstyrning är intressant. Från resultaten har vi tagit extremfall på 5 och 20 %, vilket har resulterat i en payback-tid på mellan 1,7 till 5,2 år.

## **5.4 Rekommendationer till fortsatt arbete**

Detta är det tredje projektet som modellerat olika delar av fastigheten på Walleriusgatan för att kvantifiera väderpåverkan. Detta har genomförts med olika metoder men slutsatserna från arbetena är ungefär desamma. Därför känns det onödigt att genomföra ett fjärde arbete med samma infallsvinkel. Det går inte att komma längre med en liknande metodik.

För fortsatt arbete rekommenderas att en av två olika vägar väljs. De benämns som produktspåret och grundforskningsspåret. Nedan följer en beskrivning av våra idéer kring dessa.

### **Produktspåret**

Uppdragsgivaren till detta projekt har som mål att helt automatisera värmeanläggningen i fastigheten och att stabilisera temperaturen med avseende på väderpåverkan. För att genomföra detta behöver man implementera ett självförbättrande regler tekniskt system, gärna i nära kontakt med industrin med sikte på att skapa en kommersiell produkt.

Vid vårt möte med SMHI fick vi intrycket av att de skulle vara väldigt intresserade av att få data från fastigheten. Detta inkluderar både data från värmeanläggningen och data från väderstationen. Därför kan det vara en god idé att lägga fortsatta arbeten på is tills det finns några års data från fastigheten att tillgå. Denna skulle då, tillsammans med erbjudande om ett kandidat- eller examensarbete, kunna bytas mot att få ett regelsystem implementerat till en låg kostnad. Datan skulle dessutom vara till stor nytta för att studera vad olika väder ställer för krav på en värmeanläggning.

Kompetensen som skulle krävas för ovanstående projekt ligger inom områdena regler teknik, fysik, byggfysik samt vana vid maskininlärning. Dessutom skulle det vara en fördel om kompetens inom ekonomiska beräkningar finns inom projektgruppen för

att kunna tillgodose att produkten blir lönsam både för företaget och för kunden. Vi anser att detta skulle vara en god idé till kandidat- eller examensarbete, dock med kravet att projektgruppen kan samarbeta med ett företag som arbetar med denna typ av reglersystem till värmeanläggningar. Detta tror vi är nödvändigt för att projektet skall kunna mynna ut i en produkt färdig för marknaden.

### Grundforskningsspåret

De tidigare genomförda arbetena har enbart skrapat på ytan angående vädrets påverkan på fastigheter och alla energiförluster har kvantifierats väldigt approximativt. För att förbättra tidigare uppskattningar bör en djupare analys av specifika energiförluster genomföras. Dessa skulle dock behöva vara kraftigt avgränsade. En intressant sak att studera närmare är vädrets påverkan av konvektionsparametern. Detta skulle kunna genomföras med mer detaljerade experiment eller med avancerade datormodeller. En annan idé är att närmare studera strålning som passerar genom byggnadens fönster. Till detta skulle det vara nödvändigt att utföra experiment på fönstren eller finna lämpliga data för att få veta frekvensberoendet på absorptions-, reflektions- samt transmissionskoefficienterna. Med denna data så skulle det sedan vara möjligt att beräkna eller modellera strålningen genom fönstren. Detta skulle troligen vara ett lämpligt projekt för några fysik- och kemiteknik-teknologer.

Om det skulle finnas några års data från fastighetens värmeanläggning och väderstation skulle det även vara lämpligt att behandla modellerna med statistik. Genom att genomföra detta kan det förhoppningsvis gå att få en ganska god bild över hur väder påverkar fastigheten i realiteten. Ett väl utfört arbete skulle även kunna bidra med ett recept för att göra liknande studier på andra fastigheter. Detta skulle förhoppningsvis kunna bidra med nya insikter i hur väder påverkar en fastighets uppvärmning och kunna leda till nya idéer angående hur vädrets negativa inverkan kan minimeras och dess positiva inverkan maximeras.



# Kapitel 6

## Slutsats

I detta projekt har olika väderparametrars effekt på inomhusklimat och energiåtgången i en fastighet studerats. Det har framgått att både solinstrålning och infiltrationsförluster på grund av ofrivillig ventilation kan leda till stora energiflöden. Inom arbetet har även olika förbättringsåtgärder studerats. Det har visat sig att man genom att dra nytta av solens värmande effekt kan få 17 % lägre energiåtgång över ett soligt dygn, vilket motsvarar 4 % lägre energiåtgång över alla dygn, både klara och molnig, under hela eldningssäsongen. Detta kan jämföras med mängden sparad energi för tilläggsisolering för syd- och västväggarna som uppgår till 17 % av dagens energiåtgång. Det kan också konstateras att de olika väggarna har olika tidskonstanter vilket man måste ta hänsyn till vid regleringen genom att ha olika regelsystem för olika delar i byggnaden. Denna effekt skulle dock minska något med en tilläggsisolering av syd- och västväggarna.

Att i regleringen ta hänsyn till vinden kommer inte nödvändigtvis att leda till en lägre energiförbrukning då vinden har en kylande effekt. När det blåser sjunker inomhustemperaturen under önskad temperatur med dagens system. Visserligen finns det en risk att man idag överkompenserar när det inte blåser, eftersom det är svårt att veta när det ska blåsa, och givetvis kan man då spara genom att bara ha ett högre energiinflöde när det faktiskt blåser. Att ta hänsyn till vinden leder alltid till en stabilare inomhustemperatur eftersom man eliminerar vindens temperatursänkning.

Energibesparande åtgärder utöver den direkta styrningen kan också genomföras. För att gå vidare i processen antingen med termostater till alla radiatorer eller tilläggsisolering av de idag inte isolerade fasaderna behöver föreningen utarbeta en plan för hur de vill att fastigheten ska vara rustad i framtiden. Vidare behöver man också utreda när fasaden behöver renoveras och om man får tilläggsisolera på utsidan med resultatet att det blir en puts- istället för en tegelfasad.

Att montera termostater på elementen är billigare än att tilläggsisolera fasaden. Enligt våra beräkningar och information från leverantörer ger det även en större energibesparing. En annan aspekt är att det tillför mervärde för de boende. De boende vill troligtvis kunna reglera temperaturen själva, och vid försäljning av lägenheter bör det kunna öka dess värde.

I samband med en installation av ett regelsystem bör även elektriska termostater installeras för att minimera tidskonstanterna och för att ge de boende möjligheten att själva bestämma vilken temperatur de vill ha hemma.

Det det har visat sig vara en god idé att ta hänsyn till olika väderparametrar då detta kan ge en markant besparing under rätt förutsättningar. Självklart är besparingen olika beroende på fastighetens egenskaper och fastighetens geografiska läge.

Det var svårt att med någon större noggrannhet kvantifiera storleken på de olika energiflödena. Vi anser dock att våra approximationer ger en god uppfattning om hur stora energiflödena är i förhållande till varandra. För att få veta exakta värden skulle det vara nödvändigt att implementera de olika förbättringarna i fastigheten och mäta hur mycket energi som sparats. Alternativt skulle bättre modeller kunna ge en exaktare bild. Problemet med det är att mer komplexa modeller tenderar att bli mer beräkningsintensiva.

# Litteraturförteckning

- [1] Eriksson, V., Hedlund, A., Hultman, J., Johansson, R., Shabanzadeh, A. och Wahnström, A. Energiflödet genom ett hus. Kandidatarbete 2008:02, Institutionen för Teknisk Fysik, Chalmers Tekniska Högskola, 2008.
- [2] Andersson, K., Elebo, J., Jonsson, S., Nordborg, M., Tegeltija, I. och Yaşar, O. Optimal energihushållning i en fastighet. Kandidatarbete 2010:15, Institutionen för Teknisk Fysik, Chalmers Tekniska Högskola, 2010.
- [3] Järnfelt, I. Ritning till Nybyggnad på Tomten N:8-7 Kv Grönsiskan i Johanneberg. Stadsbyggnadskontoret Göteborg, byggarkivet, mar 1935.
- [4] Hilmart, M. Energideklaration, Bostadsrättsförening Wallerius. , Boverket, 2009.
- [5] Peter Särneö, T. a. f. f. J. . intervjuad av Ylva Dahl, mar 2012.
- [6] Vaisala. *Datasheet Vaisala Weather Transmitter WCT520*, mar 2012.
- [7] Wolfram|Alpha. Calculator for heat capacity of moist air. [http://www.wolframalpha.com/entities/calculators/heat\\_capacity\\_of\\_moist\\_air/in/tb/h8/](http://www.wolframalpha.com/entities/calculators/heat_capacity_of_moist_air/in/tb/h8/), apr 2012.
- [8] SMHI och Naturvårdsverket. Klimatdataanalyser för väder samt sveriges klimat och miljö. <http://www.smhi.se/klimatdata>, apr 2012.
- [9] Nordling, C. och Österman, J. *Physics Handbook*. Studentlitteratur, Lund, 8:e utgåvan, 2006.
- [10] Kipp & Zonen. *Pyrameters – for the accurate measurement of solar irradiance*, jan 2012.
- [11] Schroeder, D. V. *An Introduction to Thermal Physics*. Addison Wesley Longman, San Fransisco, 2000.
- [12] Idso, S. B. och Jackson, R. D. Thermal radiation from the atmosphere. *Journal of Geophysical Research*, 74:5397–5403, 1969.
- [13] Karlsson, J. och Roos, A. Modelling the angular behaviour of the total solar energy transmittance of windows. *Solar Energy, Elsevier Science Ltd*, 69(4):321–329, 2000.

- [14] Gelin, K., Roos, A., Geotti-Bianchini, F. och van Nijnatten, P. Thermal emissivity of coated glazing - simulation versus measurements. *Optical Materials*, 27:705–712, 2005.
- [15] White, F. *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill, New York, 7:e utgåvan, 2011.
- [16] Owen, M., redaktör. *2009 ASHRAE Handbook - Fundamentals (SI)*, kapitel 4. ASHRAE, Atlanta, GA, 2009.
- [17] Palyvos, J. A survey of wind convection coefficient correlations for building envelope energy systems' modeling. *Applied Thermal Engineering*, 28:801–808, 2008.
- [18] Sasic, A., docent Byggnadsteknologi, Chalmers. Intervjuad av Dan Ståby, apr 2012.
- [19] Johnson, C. *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Dover Publications, New York, 2009.
- [20] Lewis, R., Nithiarasu, P. och Seetharamu, K. *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*. Wiley, Chichester, 2004.
- [21] Reddy, J. *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill, New York, 1993.
- [22] Alberty, J., Carstensen, C. och Funken, S. Remarks around 50 lines of matlab: short finite element implementation. *Numerical Algorithms*, 20:117–137, 1999.
- [23] Heath, M. *Scientific Computing An Introductory Survey*. McGraw-Hill, New York, 2 utgåvan, 2002.
- [24] Ypma, T. Historical development of the newton-raphson method. *SIAM Review*, 37(4):531–551, 1995.
- [25] Press, W., Teukolsky, S., Vetterling, W. och Flannery, B. *Numerical Recipes in Fortran 77*. Cambridge University Press, Cambridge, 2:a utgåvan, 1992.
- [26] Wilson, J. Thermal diffusivity. , Electronics Cooling, 2007.
- [27] Engineering ToolBox. Air properties. [http://www.engineeringtoolbox.com/air-properties-d\\_156.html](http://www.engineeringtoolbox.com/air-properties-d_156.html), apr 2012.
- [28] Alvarez, H. *Energiteknik*. Studentlitteratur, Lund, 3:e utgåvan, 2006.
- [29] Smits, A. och Dussauge, J.-P. *Turbulent Shear Layers in Supersonic Flow*. Springer, New York, 2:a utgåvan, 2006.
- [30] Walraven, R. Calculating the position of the sun. *Solar Energy*, 20:393–397, 1978.
- [31] Ozel, M. Thermal performance and optimum insulation thickness of building walls with different structure materials. *Applied Thermal Engineering*, 31:3854–3863, 2011.

- [32] Schlyter, P. Himlakroppars upp/nedgångar i Göteborg 2012. <http://stjarnhimlen.se/2012/goteborg.html>, maj 2012.
- [33] Lay, D. *Linear Algebra and Its Applications*. Pearson Education, Boston, 3:e utgåvan, 2006.
- [34] Engineering Toolbox. Densities of miscellaneous solids. [http://www.engineeringtoolbox.com/density-solids-d\\_1265.html](http://www.engineeringtoolbox.com/density-solids-d_1265.html), apr 2012.
- [35] BKV Thermal. Mineral wool. <http://www.bkvthermal.com/mineralwool.html>, apr 2012.
- [36] Engineering Toolbox. Solids - specific heats. [http://www.engineeringtoolbox.com/specific-heat-solids-d\\_154.html](http://www.engineeringtoolbox.com/specific-heat-solids-d_154.html), apr 2012.
- [37] Engineering.com. Thermal conductivity. <http://www.engineering.com/Library/ArticlesPage/tabid/85/ArticleID/152/Thermal-Cond%5Cuctivity.aspx>, maj 2012.
- [38] Engineering Toolbox. Thermal conductivity of some common materials and gases. [http://www.engineeringtoolbox.com/thermal-conductivity-d\\_429.html](http://www.engineeringtoolbox.com/thermal-conductivity-d_429.html), maj 2012.
- [39] Babuška, I. The finite element method with penalty. *Mathematics of Computation*, 27(122):221–228, 1973.
- [40] Segal, I. Finite element methods for the incompressible Navier-Stokes equations. , Delft Institute of Applied Mathematics, 2011.
- [41] Heinrich, J. och Yu, C. Finite element simulation of buoyancy-driven flows with emphasis on natural convection in a horizontal circular cylinder. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 69(1):1–27, 1988.
- [42] Taylor, C. och Ijam, A. A finite element numerical solution of natural convection in enclosed cavities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 19(3):429 – 446, 1979.
- [43] Roy, S. och Basak, T. Finite element analysis of natural convection flows in a square cavity with non-uniformly heated wall(s). *International Journal of Engineering Science*, 43(8-9):668 – 680, 2005.
- [44] Basak, T. och Ayappa, K. Influence of internal convection during microwave thawing of cylinders. *AIChE Journal*, 47(4):835–850, 2001.
- [45] Grimvall, G. En effektiv människa? [http://www.nyteknik.se/popular\\_teknik/article256453.ece](http://www.nyteknik.se/popular_teknik/article256453.ece), apr 2012.
- [46] SMHI. Temperaturskillnader under dygnet. <http://www.smhi.se/kunskapsbanken/meteorologi/temperaturskillnader-under-dygnet-1.7250>, apr 2012.
- [47] Bostadsrättsföreningen Wallerius. Årsredovisning 2008. [http://www.psarneo.se/bilder/redovisning\\_2008.pdf](http://www.psarneo.se/bilder/redovisning_2008.pdf), maj 2009.

- [48] Karlsteen, M., Docent Chalmers Tekniska Högskola. Personlig kontakt, maj 2012.
- [49] Broomé, E. Rätt termostater. <http://www.viivilla.se/Energi/Radiator/Ratt-radiator-och-termostat-45410>, maj 2012.
- [50] Danfoss AB. Elektriska termostater. [http://konsument.danfoss.com/Content/DFA22FE2-40BD-4C04-B687-E5D524F81C4F\\_MNU17495421\\_SIT338.html](http://konsument.danfoss.com/Content/DFA22FE2-40BD-4C04-B687-E5D524F81C4F_MNU17495421_SIT338.html), apr 2012.
- [51] Grönbergs, T. Prognosstyrning. [http://www.smhi.se/polopoly\\_fs/1.8921!Prognosstyrning\\_100430.pdf](http://www.smhi.se/polopoly_fs/1.8921!Prognosstyrning_100430.pdf), maj 2012.
- [52] Norman, F. Prognosstyrning. <http://www.smhi.se/Professionella-tjanster/Professionella-tjanster/Fastighet/smhi-prognosstyrning-1.1637>, maj 2012.

# Bilaga A

## Formler för linjära triangulära element

Vid skapande av stelhetsmatriser och lastvektorer måste ett antal integraler evalueras. Denna bilaga syftar till att vara en formelsamling för några nödvändiga beräkningar för linjära triangulära element. I ekvation (A.0.1) beskrivs arean av en triangel.  $(x,y)$  betecknar koordinaterna för hörnen  $(i, j, k)$ . Ekvation (A.0.2) beskriver integralen för ett antal basfunktioner  $\phi$  över en triangel  $\Omega$ . Liknande formulering för två dimensioner återfinns i ekvation (A.0.3). I denna betecknas linjen mellan kanterna  $i$  och  $j$  som  $\Gamma$ . [20]

Slutligen förekommer det även derivator av basfunktionerna. Alla derivator i en triangel kan med lätthet beräknas genom att använda en determinant enligt ekvation (A.0.4). Här löper  $l$  över  $l = i, j, k$  och  $\mathbf{r} = (x,y)$  som är de rumsliga koordinaterna. [22]

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \end{vmatrix} \quad (\text{A.0.1})$$

$$\int_{\Omega} \phi_i^a \phi_j^b \phi_k^c d\Omega = \frac{a!b!c!2A}{(a+b+c+2)!} \quad (\text{A.0.2})$$

$$\int_{\Gamma} \phi_i^a \phi_j^b d\Gamma = \frac{a!b!l}{(a+b+1)!} \quad (\text{A.0.3})$$

$$\frac{\partial \phi_l}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.4})$$

# Bilaga B

## Matlab-kod

### B.1 Beräkning av solens position

```
function [alpha, beta] = sunposition(long, lat, y, m, d, hr)
%{
  long positive east of Greenwich, in degrees
  lat positive north of equator, in degrees
  y = year
  m = month
  d = day
  hr = hour in UTC decimal form, including minute and seconds
  alpha = elevation
  beta = azimuth
%}

%{
  For Walleriusgatan:
  long = 11.979435;
  lat = 57.691522;
%}

% Degrees to radians
rad = pi/180;
% Earth mean radius, km
emr = 6371.01;
% Astronomical unit, km
au = 149597890;

% Calculate julian day
% Integer division for everything except hr
jd = floor((1461*(y+4800+floor((m-14)/12)))/4) ...
    + floor((367*(m-2-12*(floor((m-14)/12)))/12) ...
    - floor((3*((y+4900+floor((m-14)/12))/100))/4) ...
    + d - 32075 - 0.5 + hr/24;

% Difference between current day and noon 1 jan 2000 (UTC)
n = jd - 2451545;
```



```
% Ecliptic coordinates, all angles in radians
Omega = 2.1429 - 1.0394594e-3*n;
% Mean longitude
L = 4.895063 + 0.017202791698*n;
% Mean anomaly
g = 6.24006 + 0.0172019699*n;
% Ecliptic longitude
l = L + 0.03341607*sin(g) + 3.4894e-4*sin(2*g) ...
    - 1.134e-4 - 2.03e-5*sin(Omega);
% Obliquity of ecliptic
ep = 0.4090928 - 6.214e-9*n + 3.96e-5*cos(Omega);

% From ecliptic to celestial coordinates
% Right ascension (must be larger than 0)
ra = atan2((cos(ep)*sin(l)), cos(l));
if ra < 0
    ra = ra + 2*pi;
end
% Declination
delta = asin(sin(ep)*sin(l));

% From celestial to horizontal coordinates
% Greenwich mean sidereal time
gmst = 6.6974243242 + 0.0657098283*n + hr;
% Local mean sidereal time
lmst = (gmst*15 + long)*rad;
% Hour angle
omega = lmst - ra;
% Latitude in radians
latrad = lat*rad;
% Zenith angle
thetaz = acos(cos(latrad)*cos(omega)*cos(delta) ...
    + sin(delta)*sin(latrad));

% Azimuth angle, positive east of south
Y = -sin(omega);
X = tan(delta)*cos(latrad) - sin(latrad)*cos(omega);
gamma = atan2(Y, X);
if gamma < 0
    gamma = gamma + 2*pi;
end

% Parallax
parallax = emr*sin(thetaz)/au;
% Parallax correction to zenith angle
thetaz = thetaz + parallax;

% Elevation from horizon
theta = pi/2 - thetaz;

% Output in degrees, alpha = elevation (from vertical), beta = azimuth
alpha = theta/rad;
beta = gamma/rad;
```

## B.2 Beräkning av effekt genom fönster

```
function theta = angletheta(alpha, beta, gamma)
% gamma = angle of windows normal relative north, clockwise positive

beta = beta - gamma;

if beta < -90 || beta > 90 || alpha < 0
    theta = 90;
else
    theta = acosd(cosd(beta)*cosd(alpha));
end

function g = gvalue(g0, p, q, theta)
% g0 = g-value at normal incidence
% p and q depending on window properties
% theta = suns angle relative windows normal

a = 8;
b = 0.25/q;
c = 1 - a - b;

alfa = 5.2 + 0.7*q;
beta = 2;
gamma = 5.26 + 0.06*p + (0.73 + 0.04*p)*q;

z = theta/90;

g = g0*(1 - a*z^(alfa) - b*z^(beta) - c*z^(gamma));

function q = effekt(I, month, day, hour)
% hour in UTC decimal format
% I = intensity
g0 = 0.61; % g-value at normal incidence, from ASHRAE
p = 3; % Number of glazings
q = 4; % Depending on coatings etc. No coatings => 4
    gamma = 180-32; % Angle of windows normal relative north, clockwise positive

long = 11.979435;
lat = 57.691522;
year = 2012;

[alpha, beta] = sunposition(long, lat, year, month, day, hour);

theta = angletheta(alpha, beta, gamma);

g = gvalue(g0, p, q, theta);

q = g*I*cosd(theta);
```

## B.3 Finita element av energiflöde genom grund

```
function [outData] = groundheatfemtransientanalys(refinements)
%outData = groundheatfemtransientanalys(refinements)
%
%Application to calculate the heat flow through the ground.
%refinements indicate how many refinemesh should be run.

global tCoef

tCoef = getMeanTemp(0); %Make sine interpolation of average
                        %temperature data. tCoef = [a,b,c] with
                        %T = a + b*cos(k*t) + c*sin(k*t) which is
                        %periodic for t = 365.

if(nargin < 1)
    refinements = 0;
end

tic; %Start timer

kelvin = 273.15;

dims = 1;
border = [0,-40,-40, 52,52,12, 12, 0; %Create boundary.
          0, 0,-30,-30, 0, 0,-0.5, -0.5]; %[X coordinates; Y coordinates]

h = 15.5; %Convective constant of the air
kGranite = 2.2;
alpha = kGranite/(790*2691); %Thermal diffusivity of granite
Tref = 10+kelvin;
Tin = 20+kelvin;

Tlow = -30+kelvin;
Thigh = 30 + kelvin;
Tstep = 0.5;

fprintf(1,'Creating mesh...')
gd = [2,max(size(border)), border(1,:), border(2,:)]';
dl = decsg(gd);

%Create mesh
[p, e, t] = initmesh(dl);
for n = 1:refinements
    [p, e, t] = refinemesh(dl, p, e, t);
end

%Initiate variables
```

```

tCount = size(t,2);
pCount = size(p,2);
eCount = size(e,2);
A = sparse(pCount, pCount);
M = sparse(pCount, pCount);
Q = sparse(pCount, pCount);
G = sparse(pCount, 1);
b = sparse(pCount, 1);
u = sparse(pCount, 1);
ab = zeros(pCount,1);
area = zeros(tCount,1);
lambda = zeros(pCount,1);
Const = zeros(pCount,1);
fprintf(1, ' done!\n');

%Assemble stiffness matrix
fprintf(1, 'Assembling stiffness matrix...');
for k = 1:tCount
    A(t(1:3,k), t(1:3,k)) = A(t(1:3,k),t(1:3,k)) ...
        + alpha*laplacestiff(p(:, t(1:3,k)));
end

%Calculate the area of the triangles
for k = 1:tCount
    area(k,1) = triarea(p(:,t(1:3,k)));
end

%Prepare the mass matrix
for k = 1:tCount
    M(t(1:3,k), t(1:3,k)) = M(t(1:3,k), t(1:3,k)) ...
        + area(k)*[2,1,1;1,2,1;1,1,2]/12;
end

fprintf(1, ' done!\n')

n = 0;
Tmean = zeros(3,floor((Thigh-Tlow)/Tstep));
pts = p(1:2, e(1,:)) - p(1:2, e(2,:));
LengthBound = sqrt(diag(pts'*pts));

Tsave = 0 + kelvin;

Tref = 20 + kelvin; %The temperature inside the building
Uconc = 0.7/(0.45); %The U-value of the foundation

uLast = (9+kelvin)*sparse(ones(pCount,1)); %Set initial values

%Settings vector for the Dirichlet conditions

dirichletConditions = [NaN, NaN, NaN, NaN, NaN, NaN, NaN, NaN];
dirnan = isnan(dirichletConditions(e(5,:)));
dirichlet = e([1 2 5], find(~dirnan));

```

```
Free=setdiff(1:pCount,unique(dirichlet));

fprintf(1, 'Inversing matrices... ')
Minv(Free,Free) = inv(M(Free,Free));
MinvA(Free,Free) = Minv(Free,Free)*A(Free,Free);
fprintf(1, 'done!\n')

Q = sparse(pCount, pCount);
g = sparse(pCount, 1);
b = sparse(pCount, 1);
u = sparse(pCount, 1);

%Settings vectors for the Neumann conditions.
% The coefficients are
% dT/dn = neumannConditions + T*neumannTConditions +
%neumannCosConditions*cos(omega*t) + neumannSinConditions*sin(omega*t)

neumannConditions = [0 , 0, 0, Uconc*Tref, Uconc*Tref, Uconc*Tref, ...
                    h*(tCoef(1)+kelvin), h*(tCoef(1)+kelvin)]/kGranite;
neumannTConditions = [0, 0, 0,-Uconc,-Uconc,-Uconc,-h,-h]/kGranite;

neumannSinConditions = [NaN,NaN,NaN,NaN,NaN,NaN, ...
                       h*tCoef(3),h*tCoef(3)]/kGranite;
neumannCosConditions = [NaN,NaN,NaN,NaN,NaN,NaN,...
                       h*tCoef(2),h*tCoef(2)]/kGranite;

period = [0,0,0,0,0,0,365*24*3600, 365*24*3600];
omega = 2*pi/(365*24*3600);

neunan = isnan(neumannConditions(e(5,:)));
neuTnan = isnan(neumannTConditions(e(5,:)));

neumann = e([1 2 5], find(~neunan));
neumannT = e([1 2 5], find(~neuTnan));

%Enforce neumann conditions

for j = 1 : size(neumann,2)
    g(neumann(1:2,j))=g(neumann(1:2,j)) + ...
    norm(p(:,neumann(1,j)) - ...
    p(:,neumann(2,j))).* ...
    alpha*ones(2,1)*neumannConditions(neumann(3,j))/2;
end
```

```

for k = 1:size(neumannT,2)
    L = norm(p(:,neumannT(1,k)) - p(:,neumannT(2,k)));

    Q(neumannT([1 2],k), neumannT([1 2],k)) = ...
        Q(neumannT([1 2],k),neumannT([1 2],k)) ...
        - alpha*neumannTConditions(neumannT(3,k))*L*[2,1;1,2]/6;
end

%Move dirichlet nodes to RHS

u(dirichlet(1,:)) = dirichletConditions(dirichlet(3,:));
u(dirichlet(2,:)) = dirichletConditions(dirichlet(3,:));

[int, ca, cb] = intersect(dirichlet(1,:), dirichlet(2,:));

ind = find(dirichlet(3,ca) ~= dirichlet(3,cb));

u(int(ind)) = 0.5*(dirichletConditions(dirichlet(3,ca(ind))) + ...
    dirichletConditions(dirichlet(3,cb(ind))));

b = b - (A+Q) * u + g;

%Solve system
fprintf(1, 'Creating eigenvalue decomposition... ')

[VecTemp lambdaTemp] = eig(full(MinvA(Free,Free)+Minv(Free,Free)* ...
    Q(Free,Free))); %Calculate
                                     %eigenvectors and
                                     %eigennumbers of
                                     %the problem

Vec(Free,Free) = VecTemp;
lambda(Free) = diag(lambdaTemp);
Vinv = zeros(pCount,pCount);
Vinv(Free,Free) = inv(Vec(Free,Free));
fprintf(1, ' done!\n')

eConst = sparse(pCount,1);
fConst = sparse(pCount,1);

neunanS = isnan(neumannSinConditions(e(5,:)));
neunanC = isnan(neumannCosConditions(e(5,:)));
neumannS = e([1 2 5], find(~neunanS));
neumannC = e([1 2 5], find(~neunanC));

%Enforce the sin and cos terms in the neumann conditions
for j = 1 : size(neumannC,2)
    eConst(neumannC(1:2,j))=eConst(neumannC(1:2,j)) + ...
        norm(p(:,neumannC(1,j)) - ...

```

```

        p(:,neumannC(2,j)).* ...
        alpha*ones(2,1)*neumannCosConditions(neumannC(3,j))/2;
end

for j = 1 : size(neumannC,2)
    fConst(neumannS(1:2,j))=fConst(neumannS(1:2,j)) + ...
        norm(p(:,neumannS(1,j)) - ...
            p(:,neumannS(2,j))).* ...
        alpha*ones(2,1)*neumannSinConditions(neumannS(3,j))/2;
end

%We will calculate a method of lines solution on the form
%T = Vec*(Y_h + Y_p)
%with
%Y_h = Const*exp(-lambda*T)
%Y_p = aConst+bConst*cos(omega*t)+cConst*sin(omega*t)

%We have the MOL differential equation:
%T' + lambda*T = cAlpha + cBeta*cos(omega*t) + cGamma*sin(omega*t)

fprintf(1, 'Evaluating method of lines ODE...')

cAlpha = Vinv*Minv*b;
cBeta = Vinv*Minv*eConst;
cGamma = Vinv*Minv*fConst;

%Calculate the coefficients in the particular solution.
aConst = cAlpha./lambda;
bConst = (lambda.*cBeta-omega*cGamma)./(omega^2+lambda.^2);
cConst = (cGamma+omega*bConst)./lambda;

Const = Vinv*uLast-aConst-bConst; %Set the constant before the
                                   %exponential term to match the
                                   %initial conditions.

fprintf(1, ' done!\n')

Tmean = zeros(3,1);
outData = [0:(3600*24):365*3600*24]'; %Initiate return data vectors
outData = [outData, zeros(size(outData,1),1)];

Lengths = zeros(3,1);
boundoffs = 3; %This is boundary dependent. Change if you're using
               %a new boundary.
for eid = 1:3
    ind = find(~(e(5,:)-eid-boundoffs)); %Calculate the lengths of
    Lengths(eid) = sum(LengthBound(ind)); %the foundation boundaries
end

n = 0;

```

```

fprintf(1, 'Iterating time steps... ')
%Calculate the solution for every each day during a year
for tNow = 0:(3600*24):365*3600*24
    n = n +1;
    u(Free) = Vec*(aConst+bConst*cos(omega*tNow)+ cConst*sin(omega*tNow));
                                %Note that the exponential term has been
                                %set to zero which is the limit when t->Inf

    for eid = 1:3
        ind = find(~(e(5,:)-eid-boundoffs));
        Tmean(eid) = mean(u(ind)); %Calculate the mean temperature
    end

    outData(n,2) = -Uconc*(Lengts*Tmean/sum(Lengts)-Tin); %Calculate
                                %the
                                %energy loss
end

fprintf(1, 'done!\n')

%Display

time = toc; %Stop timer

disp(['Execution time: ' num2str(time) ' s']);
disp(['Triangle count: ' num2str(tCount)]);
disp(['Degrees of freedom: ' num2str(max(size(Free)))])

figure(1)
plot(outData(:,1)/(24*3600), outData(:,2))
xlabel('Tid (dygn)')
ylabel('Kylseffekt (W m^{-2})')
xlim([0 365])

figure(2)
tricontourf(p(1:2,:), t(1:3,:), Vec*(aConst+bConst)-kelvin, ...
    [1 17]);
xlabel('Position(m)')
ylabel('Position(m)')
title('Temperatur (C)')
figure(3)
tricontourf(p(1:2,:), t(1:3,:), Vec*(aConst-bConst)-kelvin, ...
    [1 17]);
xlabel('Position(m)')
ylabel('Position(m)')
title('Temperatur (C)')

function area = triarea(pts)
%This function calculates the area of a triangle

M = [1,1,1;pts];
area = 0.5*det(M);

```



```
function coef = getMeanTemp(display)
%coef = getMeanTemp(display)
%
%Calculates the least square interpolation of the average
%temperature for Gothenburg the last twenty years.
%T = a + b*cos(omega*t) + c*sin(omega*t)
%with omega so it equals 2*pi for t = the number of days in a year.

if(nargin == 0)
    display = 1;
end

%Temperature data for the months
T = [0.7, 0.4, 2.6, 7.3, 11.9, 15.0, 17.8, 17.3, 13.4, 8.6, 4.6,1.4]';

d = (365-31)*[0:11]/11+15; %Create

%Generate the system of equations
A = [ones(12,1), cos(2*pi*d/365)', sin(2*pi*d/365)'];

coef = A\T; %Solve least squares

dnew = 0:365;

if(display == 1) %Display data
    figure(1)
    plot(d,T, '*')
    hold on
    plot(dnew, coef(1)+coef(2)*cos(2*pi*dnew/365)+coef(3)*sin(2*pi*dnew/365), ...
        'r')
    hold off

    xlabel('Dag')
    ylabel('Medeltemperatur')
    xlim([0, 365])
    legend('Data', 'Interpolering')
end

function M = laplacestiff(vertices)
%Calculates the local stiffness matrix. This function
%is described by Alberty et. al. (1999) "Remarks around 50 lines of
%Matlab: short finite element implementation"

G = [ones(1,3);vertices] \ [zeros(1,2);eye(2)];
M = det([ones(1,3);vertices]) * G * G'/2;
```