Datos de Identificación de tareas

Centro de Ciencias Básicas

Materia: **Ecuaciones Diferenciales**

Tarea 2

Ecuaciones Diferenciales Separables

Ingeniería En Computación Inteligente Semestre 5° A

Alumno Dante alejandro Alegria Romero ID 265853

Profesor: **Jaime Salvador Medina González**

Fecha de entrega: 17/09/23

Tarea 11 Variables Separable

1. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales

a) $\frac{dy}{dx} + y^{-2} = xy^{-2} \rightarrow \frac{dy}{dx} + y^{-2} - xy^{-2} = 0$

$\frac{dy}{dx} + \underbrace{y^{-2}}_{h(y)}\underbrace{(1-x)}_{g(x)} = 0 \rightarrow$ La ED es separable

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y^2}(1-x) \rightarrow -y^2 dy = 1-x\,dx$

$\rightarrow \int -y^2 dy = \int 1 - x\,dx \rightarrow -\frac{y^3}{3} = x - \frac{x^2}{2} + C_1$

$\rightarrow -y^3 = 3\left(x - \frac{x^2}{2} + C_1\right) \rightarrow -y^3 = 3x - \frac{3}{2}x^2 + C_2$

donde C_2

$\rightarrow = 3C_1 \rightarrow \boxed{y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 - 3x + C_2}} \rightarrow$ Es solucion General

b) $x^2 \frac{dy}{dx} + y = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{-y}{x^2} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \underbrace{-y}_{h(y)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{g(x)}$

La ED es separable

$\rightarrow \frac{dy}{-y} = \frac{dx}{x^2} \rightarrow$ integro $\int \frac{dy}{-y} = \int \frac{dx}{x^2}$

$\rightarrow \ln|-y| = \int \frac{1}{x^2}dx \rightarrow \int x^{-2}dx$

$\rightarrow \ln|-y| = x^{-1} + C \rightarrow$ Despejo

$\rightarrow e^{\ln|-y|} = e^{x^{-1}} \cdot e^{C} \rightarrow C_2 = e^{C}$

$\rightarrow |-y| = C_2 e^{x^{-1}} \rightarrow \boxed{y = C_2 e^{x^{-1}}}$

si tengo $|-y| = C$ la respuesta seria $\boxed{y = C}$

c) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 3x^2y^2 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \underbrace{3x^2}_{g(x)}\underbrace{(1+y^2)}_{h(y)}$

La ED es separable,

ahora despejo, $\rightarrow \frac{1}{1+y^2}dy = 3x^2dx$

ahora integro

$\int \frac{1}{1+y^2}dy = \int 3x^2dx \rightarrow \int$

$1+\tan(u) = \sec(u)$

$\boxed{y = \tan u} \rightarrow dy = \sec^2 u\, du$

$\hookrightarrow \int \frac{1}{1+\tan^2 u} \cdot \sec^2 u \cdot du$

$\hookrightarrow \int \frac{1}{\sec^2(u)} \cdot \sec^2 u \cdot du \rightarrow = \int 1du$

¿por? tenemos que

$\hookrightarrow u = \tan^{-1}(y) \rightarrow y = \tan u \rightarrow \tan^{-1} y = u$

$\hookrightarrow \tan^{-1}(y) = 3\int x^2dx \rightarrow \tan^{-1}(y) = x^3 + C$

$\hookrightarrow (y = \tan(x^3 + C))$ es solucion general de la ED

d) $\frac{dy}{dx} = xy + x - 3y - 3 \rightarrow \frac{dy}{dx} = (xy + x) - 3y - 3$

Agrupamos los primeros 2 y los ultimos 2

$\hookrightarrow \frac{dy}{dx} = x(y+1) - 3(y+1)$

Factorizo el factor comun

Factorizo otra vez

$\hookrightarrow \frac{dy}{dx} = \underbrace{(y+1)}_{h(y)}\underbrace{(x-3)}_{h(x)} \rightarrow$ es separable la ED

$\hookrightarrow \frac{dy}{(y+1)} = (x-3)dx \rightarrow$ integramos

$\int \frac{dy}{y+1} = \int (x-3)dx \rightarrow \ln|y+1| = \frac{x^2}{2} - 3x + C$

$\hookrightarrow$ Despejo

$e^{\wedge}\ln|y+1| = e^{\wedge}\frac{x^2}{2} - 3x \rightarrow |y+1| = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-3x} \cdot e^{C}$

$y+1 = \pm C_2 e^{\frac{x^2}{2}-3x} \rightarrow \boxed{y = \pm C_2 e^{\frac{x^2}{2}-3x} - 1}$ Donde $C_2 = e^{C}$

Es solución general de la ED

Resuelva los problemas de valor inicial

a) $\frac{dy}{dx} = y-1$, sujeto a que $y(0)=0$

$\rightarrow dy = (y-1)dx \rightarrow \frac{dy}{y-1} = dx \rightarrow$ ya esta separada

$\rightarrow \int \frac{dy}{y-1} = \int dx \rightarrow \ln|y-1| = x + C$

$\rightarrow$ Ahora Despejo $\rightarrow e^{\ln|y-1|} = e^{x} \cdot e^{C} \rightarrow |y-1| = C_2 e^{x}$

$\rightarrow$ Donde $C_2 = e^{C} \rightarrow y-1 = \pm C_2 e^{x} \rightarrow y = \pm C_2 e^{x} + 1$

$\rightarrow \boxed{y = C_3 e^{x} + 1} \therefore C_3 = \pm C_2 \rightarrow$ ahora resuelvo el PVI

$\rightarrow C_3(e^{0}) + 1 = 0 \rightarrow C_3(1) = -1 \rightarrow C_3 = \frac{-1}{1}$

$\boxed{C_3 = -1} \therefore y(x) = -1e^{x} + 1$

mi solucion general seria $y(x) = C_3 e^{x} + 1$
y mi solución particular siendo $y(x) = -1e^{x} + 1$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x+3}$ sujeto a $y(0) = 0 \rightarrow$ Es separable la ED

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{1} \cdot \frac{1}{x+3} \rightarrow \frac{dy}{y-1} = \frac{dx}{(x+3)}$

$\rightarrow$ Ahora integro $\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{(x+3)} \rightarrow \ln|y-1| = \ln(x+3$

$\rightarrow$ despejo la Ecuacion $\rightarrow e^{\ln|y-1|} = e^{\ln(x+3)} \cdot e^{C} \rightarrow C_2 = e^{C}$

$\rightarrow |y-1| = |x+3| \cdot C_2 \rightarrow y-1 = C_3(x+3)$

donde $C_3 = \pm C_2 \rightarrow y - 1 = C_3(x+3)$

$\hookrightarrow \boxed{y(x) = C_3(x+3) + 1}$ ∴ Es solucion general de la ED

$\hookrightarrow$ Ahora evaluo el PVI

$C_3(0+3) + 1 = 0 \rightarrow C_3(3) = -1 \rightarrow C_3 = \frac{-1}{3}$

$\hookrightarrow C_3 = -\frac{1}{3} \rightarrow \boxed{y(x) = -\frac{1}{3}(x+3) + 1}$

Esta es la solucion particular para el problema de valor inicial

c) $(1+x)\,dy - y\,dx = 0$ sujeto a $y(1) = 2$

$\hookrightarrow (1+x)\,dy = y\,dx \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

La ED es separable $g(y)\ \underbrace{\frac{1}{y}}$, $\underbrace{\frac{1}{1+x}}\ h(x)$

$\hookrightarrow$ integro $\rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \rightarrow \ln|y| = \ln|1+x| + C$

$\hookrightarrow$ Despejo $\rightarrow e^{\ln|y|} = e^{\ln|1+x| + C}$

$\hookrightarrow |y| = |1+x| \cdot e^{C} \rightarrow y = \pm e^{C}(1+x)$

$\hookrightarrow \boxed{y = C_2(1+x)}$ donde $C_2 = \pm e^{C}$ siendo Sol General

$\hookrightarrow$ Para el PVI $\rightarrow C_2(1+1) = 2 \rightarrow C_2(2) = 2$

$\hookrightarrow C_2 = 2/2 \rightarrow \boxed{C_2 = 1}$

$\hookrightarrow \boxed{y(x) = 1(1+x)}$ siendo solucion particular del PVI

d) $\frac{dy}{dx} = 4y - y^2$ sujeto a $y(0)=0$

$\hookrightarrow dy = (4y - y^2)dx \rightarrow \frac{dy}{4y-y^2} = dx$

Ahora integro

$\hookrightarrow \int \frac{dy}{4y-y^2} = \int dx \rightarrow \frac{1}{4}\int \frac{1}{y(4-y)} dy = \int dx$

checar

$\hookrightarrow \frac{1}{4}\int \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{4-y} \rightarrow U = \frac{1}{y} \quad V = \frac{1}{4+y}$

$dU = \frac{1}{y^2} \quad dv = \int \frac{1}{4-y}$

$dv = \ln|4-y|$

$\hookrightarrow \frac{1}{y} \cdot \ln|4-y| -$

$\int \frac{1}{4-y} \cdot -\frac{1}{y^{-2}}$

$U = \frac{1}{4-y} \quad dU =$

$\hookrightarrow \frac{\ln|4-y|}{y} - \int \frac{1}{4-y}$

$\frac{1}{4}\ln|y| - \frac{1}{4}\ln(4-y) = x + C$

$\hookrightarrow$ Despejo

$e^{\wedge(todo)} = e^x \cdot e^c$

$\hookrightarrow \frac{\frac{1}{4}|y|}{\frac{1}{4}(4-y)} = e^x \cdot e^c \rightarrow \frac{|y|}{|4-y|} = e^x \cdot e^c$

$\left|\frac{y}{4-y}\right| = e^x \cdot e^c \rightarrow \frac{y}{4-y} = C_2 e^x$

Donde $C_2 = \pm e^c$

$\hookrightarrow y = C_2 e^x (4-y) \rightarrow y = 4C_2 e^x - yC_2 e^x$

Encuentra la solución general de la ED b) encuentra la solución particular cumple $y(0) = 4$

$\frac{dy}{dx} + xy = 2x$

$\frac{dy}{dx} = 2x - xy \rightarrow \frac{dy}{dx} = x(2-y)$

$\frac{dy}{2-y} = x\,dx$ ∴ La ED es separable

$\frac{dy}{y-2} = -x\,dx \rightarrow$ integro $\int \frac{dy}{y-2} = \int -x\,dx$

$\ln|y-2| = \frac{-x^2}{2} + C \rightarrow$ Despejo y

$e^{\ln|y-2|} = e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot e^{C}$

$|y-2| = e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot e^{C}$

$y-2 = \pm e^{C} e^{\frac{-x^2}{2}}$

$y = C_2 e^{\frac{-x^2}{2}} + 2$ donde $C_2 = \pm e^{C}$

es solucion general de la ED

Ahora para el PVI $y(0) = 4$

$C_2 (e^{\frac{-0^2}{2}}) + 2 = 0 \rightarrow C_2(1) + 2 = 0$

$C_2 = \frac{2}{1} \rightarrow C_2 = 2 \rightarrow \boxed{y(x) = 2(e^{\frac{-x^2}{2}}) + 2}$

es solucion para el PVI

Encuentre la sol General de la ED Separable con Parametro

a) $\frac{dy}{dx} + xy = Ax$ donde A es una constante positiva

$\frac{dy}{dx}\ xy - Ax = 0 \to \frac{dy}{dx} + x(y-A) = 0 \to \frac{dy}{dx} = -x(y-A)$

$\frac{dy}{y-A} = -x \to$ La ED es separable Ahora integro

$\int \frac{dy}{y-A} = \int -x\,dx \to \ln|y-A| = \frac{-x^2}{2} + C$ Ahora despejo

$e^{\ln|y-A|} = e^{\frac{-x^2}{2}+C} \to |y-A| = e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot e^{C}$

$\to y-A = C_2 e^{\frac{-x^2}{2}}$ Donde $C_2 = \pm e^{C} \to \boxed{y(x) = C_2 e^{\frac{-x^2}{2}} + A}$

Es solucion de la ED con A positiva

b) $m \frac{dv}{dt} = -kv - mg$ donde m, k, g son positivas

$\frac{dv}{dt} = \frac{-kv - mg}{m} \to \frac{dv}{dt} = \frac{-kv}{m} - \frac{mg}{m}$

$\to \frac{dv}{dt} = \frac{-kv}{m} - g \to \frac{dv}{-kv} = \left(\frac{1}{m} - g\right) dt$ Es separable

$\to \int \frac{dv}{-kv} = \int \left(\frac{1}{m} - g\right) dt \to -\frac{1}{k} \int \frac{dv}{v} = \frac{1}{m} \int -g\,dt$

$\to -\frac{1}{k} \cdot \ln|v| = \frac{1}{m} \cdot -gt \to -\frac{1}{k} \ln|v| = \frac{-gt}{m}$

$\to \ln|v| = \frac{\frac{-gt}{m}}{\frac{-1}{k}} \to \ln|v| = \frac{-gt \cdot k}{-m}$

$\to \ln|v| = \frac{gt}{m} + C \to e^{\ln|v|} = e^{\frac{g+k}{m}} \cdot e^{C}$

$\to v = C_2 e^{\frac{g+k}{m}}$

$$a\frac{dy}{dx}+by=m \to a\frac{dy}{dx}=m-by \to \frac{dy}{dx}=\frac{m-b}{a}$$

$$\to \frac{dy}{dx}=\frac{m}{a}-\frac{b}{a}\cdot\frac{y}{a} \to \frac{dy(a)}{y}=\frac{m}{a}-\frac{b}{a}dx$$

$$\to \int\frac{a}{y}\cdot dy=\int\frac{m}{a}-\frac{b}{a}dx$$

$$\to a\int\frac{1}{y}dy=\frac{m}{a}x-\frac{b}{a}x \to a\ln|y|=\frac{m}{a}x-\frac{b}{a}x$$

$$\to \ln|y|=\frac{\frac{m}{a}x-\frac{b}{a}x}{a} \to \frac{x(m-b)}{a^2}+C$$

$$\to e^{\ln|y|}=e^{\frac{x(m-b)}{a^2}} \to |y|=e^{\frac{x(m-b)}{a}}\cdot e^{C}$$

$$y=\boxed{C_2 e^{\frac{x(m-b)}{a}}}$$