Enunciado

Um pardal pousa numa sinalização ao lado da estrada e observa um carro cuja posição ao longo do tempo (em metros) é modelada por

$$s(t) = 2t^2 + 5t,$$

onde t vem em segundos. O pardal quer estimar a velocidade do carro exatamente em $t = 3$ s.

Fazemos:

1. Estimativas de velocidade média para $\Delta t = 0{,}3,\ 0{,}1,\ 0{,}01,\ 0{,}001$.
2. Calculamos a velocidade instantânea $v(t) = s'(t)$ e comparamos (convertendo também para km/h).

1) Valores iniciais (calculemos com cuidado)

Primeiro calcule $s(3)$.

$3^2 = 9$.
$2 \cdot 9 = 18$.
$5 \cdot 3 = 15$.
$s(3) = 18 + 15 = 33$ metros.

Caso $\Delta t = 0{,}3$ ($t_2 = 3{,}3$)

Calcule $3{,}3^2$: $3{,}3^2 = 10{,}89$.
$2 \cdot 10{,}89 = 21{,}78$.
$5 \cdot 3{,}3 = 16{,}5$.
$s(3{,}3) = 21{,}78 + 16{,}5 = 38{,}28$ m.

$\Delta s = 38{,}28 - 33 = 5{,}28$ m.
$\Delta t = 0{,}3$ s.
Velocidade média:

$$\bar{v} = \frac{5{,}28}{0{,}3} = 17{,}6 \text{ m/s}.$$

Converter para km/h: $17{,}6 \times 3{,}6 = 63{,}36$ km/h.

Caso $\Delta t = 0{,}1$ ($t_2 = 3{,}1$)

$3{,}1^2 = 9{,}61$.
$2 \cdot 9{,}61 = 19{,}22$.
$5 \cdot 3{,}1 = 15{,}5$.
$s(3{,}1) = 19{,}22 + 15{,}5 = 34{,}72$ m.

$\Delta s = 34{,}72 - 33 = 1{,}72$ m.
$\Delta t = 0{,}1$ s.

$$\bar{v} = \frac{1{,}72}{0{,}1} = 17{,}2 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad 17{,}2 \times 3{,}6 = 61{,}92 \text{ km/h}.$$

Caso $\Delta t = 0{,}01$ ($t_2 = 3{,}01$)

$3{,}01^2 = 9{,}0601$.
$2 \cdot 9{,}0601 = 18{,}1202$.

$5 \cdot 3{,}01 = 15{,}05.$
$s(3{,}01) = 18{,}1202 + 15{,}05 = 33{,}1702$ m.

$\Delta s = 33{,}1702 - 33 = 0{,}1702$ m.
$\Delta t = 0{,}01$ s.

$$\bar{v} = \frac{0{,}1702}{0{,}01} = 17{,}02 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad 17{,}02 \times 3{,}6 = 61{,}272 \text{ km/h}.$$

Caso $\Delta t = 0{,}001$ ($t_2 = 3{,}001$)
$3{,}001^2 = 9{,}006001.$
$2 \cdot 9{,}006001 = 18{,}012002.$
$5 \cdot 3{,}001 = 15{,}005.$
$s(3{,}001) = 18{,}012002 + 15{,}005 = 33{,}017002$ m.

$\Delta s = 33{,}017002 - 33 = 0{,}017002$ m.
$\Delta t = 0{,}001$ s.

$$\bar{v} = \frac{0{,}017002}{0{,}001} = 17{,}002 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad 17{,}002 \times 3{,}6 = 61{,}2072 \text{ km/h}.$$

2) Velocidade instantânea pela derivada (exata)

Derivando $s(t) = 2t^2 + 5t$:

$$v(t) = s'(t) = 4t + 5.$$

Em $t = 3$:

$$v(3) = 4 \cdot 3 + 5 = 12 + 5 = 17 \text{ m/s}.$$

Converter: $17 \times 3{,}6 = 61{,}2$ km/h.

3) Comparação e interpretação

- Estimativas médias: 63,36 km/h ($\Delta t = 0{,}3$), 61,92 km/h ($\Delta t = 0{,}1$), 61,272 km/h ($\Delta t = 0{,}01$), 61,2072 km/h ($\Delta t = 0{,}001$).
- Valor exato (instantâneo): **61,2 km/h**.

À medida que $\Delta t \to 0$, as médias convergem para $61{,}2$ km/h — a velocidade instantânea.

4) Como o pardal faz a medição (intuição prática)

- O pardal pode usar marcas fixas no asfalto (riscos da pista, postes, lombadas) — distância conhecida entre duas marcas = Δs.
- Ele mede o tempo entre a passagem do carro por essas marcas: isso é Δt.
- Com $\bar{v} = \Delta s / \Delta t$ obtém uma estimativa. Se o pardal usar marcas muito próximas (pequeno Δs), a estimativa aproxima a velocidade instantânea no ponto — isto é a ideia da derivada.
- Na prática um pardal não tem cronômetro tão preciso; um humano ou uma câmera com alta taxa de frames consegue fazer Δt pequenos e assim aproximar bem a derivada.

Conclusão

O experimento do pardal ilustra perfeitamente a passagem da **velocidade média** à **velocidade instantânea**: diminuindo Δt obtemos valores que se aproximam de $v(3) = 17\ \mathrm{m/s}$ (61,2 km/h).