1) Transformação linear: resultados analíticos

Dados

$$\mu = \binom{0}{0}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1.2 \\ 1.2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para $Y = AX$:

$$\mathrm{E}[Y] = A\mu = \mathbf{0}, \qquad \mathrm{Cov}(Y) = A\,\Sigma\,A^{\top}.$$

Cálculo de $\mathrm{Cov}(Y)$ (expandindo matriz a matriz):

$$\Sigma A^{\top} = \begin{pmatrix} 2 & 1.2 \\ 1.2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.2 & -0.8 \\ 3.4 & -0.2 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad A\Sigma A^{\top} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5.2 & -0.8 \\ 3.4 & -0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.8 & -1.8 \\ -1.8 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\mathrm{E}[Y] = \binom{0}{0}, \qquad \mathrm{Cov}(Y) = \begin{pmatrix} 13.8 & -1.8 \\ -1.8 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

A correlação entre os componentes de Y é

$$\rho = \frac{-1.8}{\sqrt{13.8}\sqrt{0.6}} \approx -0.626,$$

e os autovalores (variâncias nas direções principais da elipse) são $\lambda_1 \approx 14.041$ e $\lambda_2 \approx 0.359$ (anisotropia forte).

2) Julia com plots (dispersão + elipses 95% + transformação)

O script abaixo:

- simula $X \sim \mathrm{N}_2(\mu, \Sigma)$,
- aplica $Y = AX$,
- compara médias/covariâncias teóricas vs. amostrais,
- plota nuvens X (original) e Y (transformada) com a **elipse de nível 95%** (conjunto $\{z : (z-\mu)^{\top}\Sigma^{-1}(z-\mu) = \chi^2_{2,0.95}\}$).

```
using LinearAlgebra, Statistics, Distributions, Random using Plots # backend padrão (GR ou outro) # ---------
--------------- # Parâmetros do modelo # ------------------------ μ = [0.0, 0.0] Σ = [2.0 1.2; 1.2 1.0] A =
[2.0 1.0; -1.0 1.0] μY = A*μ ΣY = A*Σ*A' # deve dar [13.8 -1.8; -1.8 0.6] # ------------------------ #
Simulação # ------------------------ Random.seed!(42) n = 5000 dX = MvNormal(μ, Σ) X = rand(dX, n) # 2×n
(cada coluna é uma amostra) Y = A * X # 2×n # Estatísticas amostrais μX̄ = vec(mean(X, dims=2)) μȲ =
vec(mean(Y, dims=2)) # cov() espera observações em linhas e variáveis em colunas ΣX̂ = cov(permutedims(X)) #
2×2 ΣŶ = cov(permutedims(Y)) # 2×2 @show μY ΣY @show μX̄ ΣX̂ @show μȲ ΣŶ # ------------------------ # Função:
elipse de nível (p.ex. 95%) para N(μ, Σ) # ------------------------ function
ellipse_points(μ::AbstractVector, Σ::AbstractMatrix; level=0.95, m=400) @assert size(Σ,1)==2 && size(Σ,2)==2
"Use 2×2" c = quantile(Chisq(2), level) # raio no espaço-padrão eig = eigen(Symmetric(Σ)) Q = eig.vectors #
autovetores D = diagm(sqrt.(eig.values)) # √autovalores t = range(0, 2π; length=m) circ = [cos.(t) sin.(t)]' #
2×m E = (Q * D * sqrt(c)) * circ # 2×m E .+ μ # translação end Ex = ellipse_points(μ, Σ; level=0.95) Ey =
ellipse_points(μY, ΣY; level=0.95) # ------------------------ # Plots (lado a lado) # -----------------------
-- plt1 = scatter(X[1,:], X[2,:], ms=3, alpha=0.35, xlabel="X₁", ylabel="X₂", aspect_ratio=1, title="Original:
N(μ, Σ)", label="amostras") plot!(plt1, Ex[1,:], Ex[2,:], lw=2, label="elipse 95% (teórica)") plt2 =
scatter(Y[1,:], Y[2,:], ms=3, alpha=0.35, xlabel="Y₁", ylabel="Y₂", aspect_ratio=1, title="Transformado: Y = A
```

```
X", label="amostras") plot!(plt2, Ey[1,:], Ey[2,:], lw=2, label="elipse 95% (teórica)") plot(plt1, plt2,
layout=(1,2), size=(950,420))
```

Como ler os gráficos

- À esquerda: nuvem X com sua elipse de 95% (orientação e alongamento ditos pelos autovetores/valores de Σ).
- À direita: nuvem $Y = AX$ com elipse de 95% de $\Sigma_Y = A\Sigma A^\top$.
- Você verá **cisalhamento/rotação/escala** induzidos por A.
- As médias amostrais ficam próximas de $(0, 0)$ e Σ_Y estimada fica bem próxima da teórica $\begin{pmatrix} 13.8 & -1.8 \\ -1.8 & 0.6 \end{pmatrix}$.