Laboratorio de Datos

Regresión

Cuatrimestre verano 2024

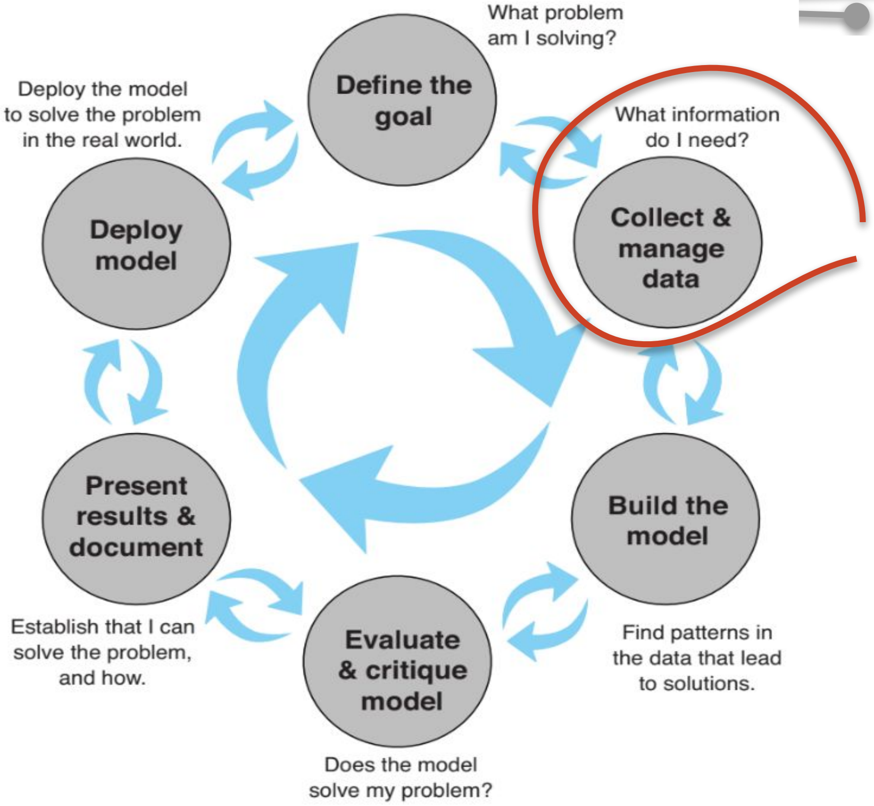
DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

exactas UBA

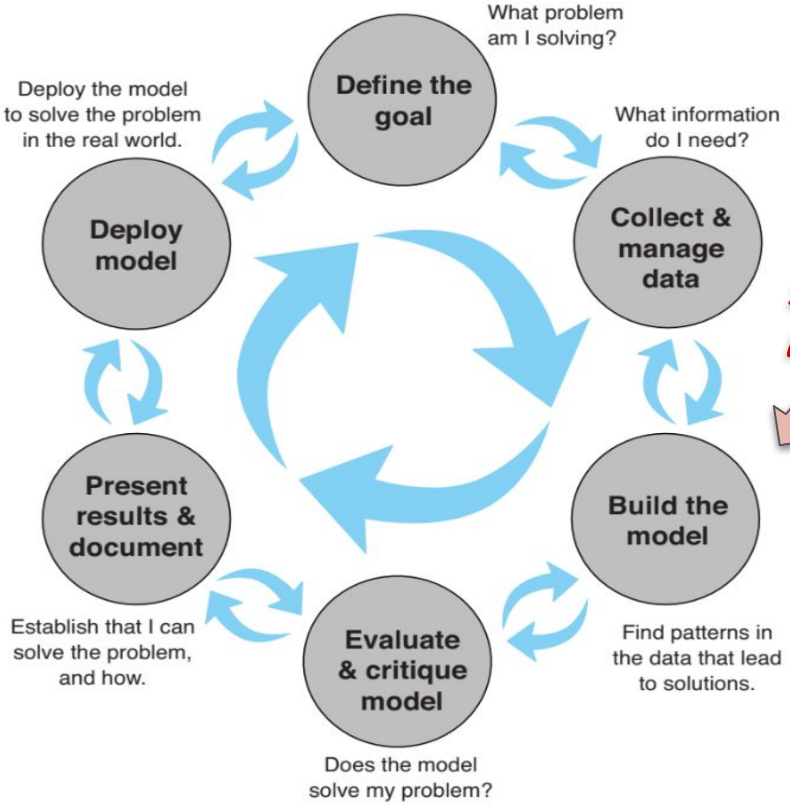
Recorrido de la materia (hasta ahora)



1° parte de la materia

- ✓ Lenguaje de programación (Python)
- ✓ Modelado conceptual de los datos (DER)
- ✓ Representación de los datos (modelo relacional)
- ✓ Formas de consultar los datos (AR/SQL)
- ✓ Recomendaciones para el diseño (Normalización)
- ✓ Calidad de datos
- ✓ Leyes acerca de la Protección de Datos

Recorrido de la materia (hasta ahora)



2° parte de la materia

- ✓ Visualización y Exploración de los datos
- ✓ Intro a Modelado: Clasificación y Regresión
- ✓ Clasificación: Árboles de decisión

Regresión

Laboratorio de datos - 2023

… por M. Soledad Fernández (y modificaciones mínimas de P. Turjanski)

Objetivos de la clase

- ✓ Presentar el modelo estadístico de Regresión Lineal Simple (RLS)
- ✓ Conocer (algunas de) sus potenciales aplicaciones
- ✓ Aplicar e interpretar los resultados de un modelo de RLS con fines explicativos
- ✓ Comprender la naturaleza aleatoria de los estimadores de los parámetros del modelo

Introducción - Uso de pesticidas

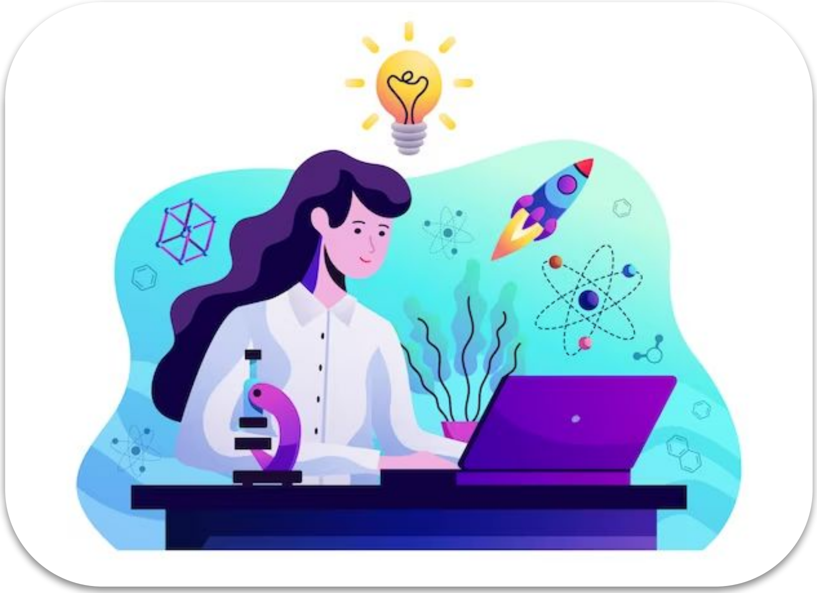
El daño al material genético por parte de los pesticidas es un tema de preocupación a escala global

Introducción - Uso de pesticidas

- ✓ En particular, el glifosato es un herbicida utilizado para el control de malezas, inhibiendo el crecimiento de las plantas
- ✓ Las formulaciones comerciales (ej Roundup®) incluyen mezclas para mejorar la eficacia de la acción del herbicida

El estudio

Se llevó a cabo un estudio para evaluar los efectos genotóxicos de Roundup® ("RU") en embriones de *Caiman latirostris* con el fin de evaluar el riesgo potencial asociado a la exposición sufrida en el medio natural de esta especie



El estudio

El estudio plantea un experimento con el principal objetivo de relacionar el daño en el material genético de embriones de yacaré con la dosis de RU

Obtener una función (modelo) que relacione:

- *la concentración de herbicida (X)*
- *el índice de daño al material genético (Y)*

... y analizar los parámetros de dicho modelo

El experimento

- En condiciones de laboratorio, se expuso a 11 huevos de yacaré a distintas concentraciones de RU entre 0 y 1.750 ug/huevo

  →Huevos asignados al azar a las concentraciones de RU

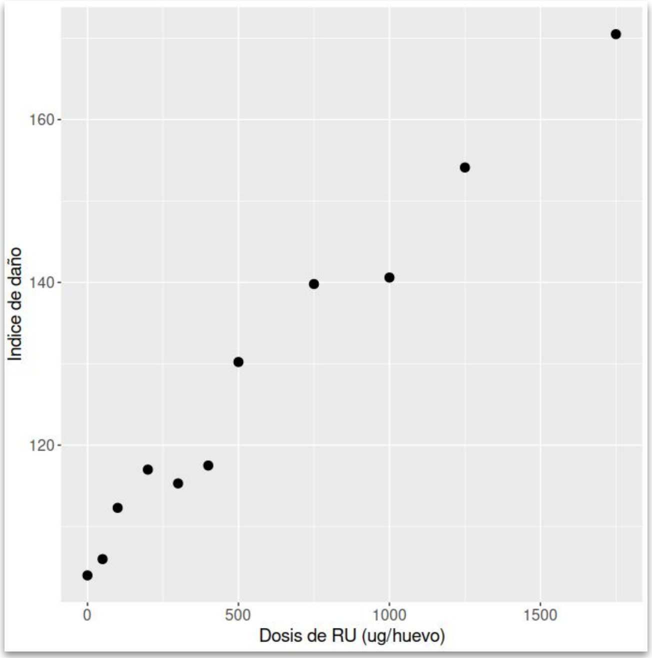
  →Dosis de RU fijada por el investigador

- Al momento de la eclosión se tomaron muestras de sangre y se calculó el daño en el ADN mediante un índice de daño ("DI" debido a su traducción al inglés, Damage Index)

Los datos

¿Qué observan de los datos?

	RU	DI
1	0	104.00
2	50	106.00
3	100	112.30
4	200	117.00
5	300	115.30
6	400	117.50
7	500	130.22
8	750	139.80
9	1000	140.60
10	1250	154.12
11	1750	170.50

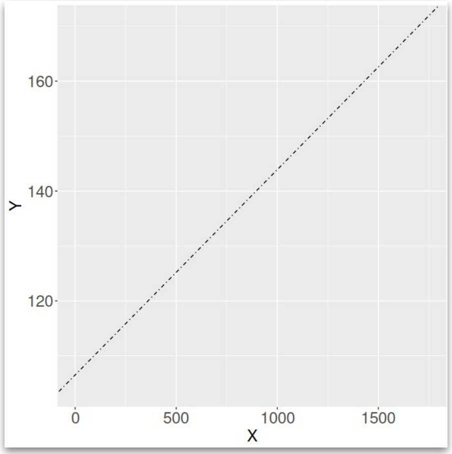


Formalizando - Análisis de regresión

- ❑ OBJETIVOS (muchos y variados), acá algunos:
  - ✓ Describir la relación funcional entre Y y X
  - ✓ Determinar cuánta de la variación en Y puede ser explicada por la variación de X y cuánto permanece sin explicar
  - ✓ Predecir nuevos valores de Y para valores específicos de X en el dominio estudiado
  - ✓ Relación funcional: puede ser de cualquier tipo. En RLS → lineal

Repaso: función lineal

Es una de las funciones más simples para describir la relación entre dos variables



$$Y = a + b.X$$

Modelo matemático

a y b son los parámetros del modelo

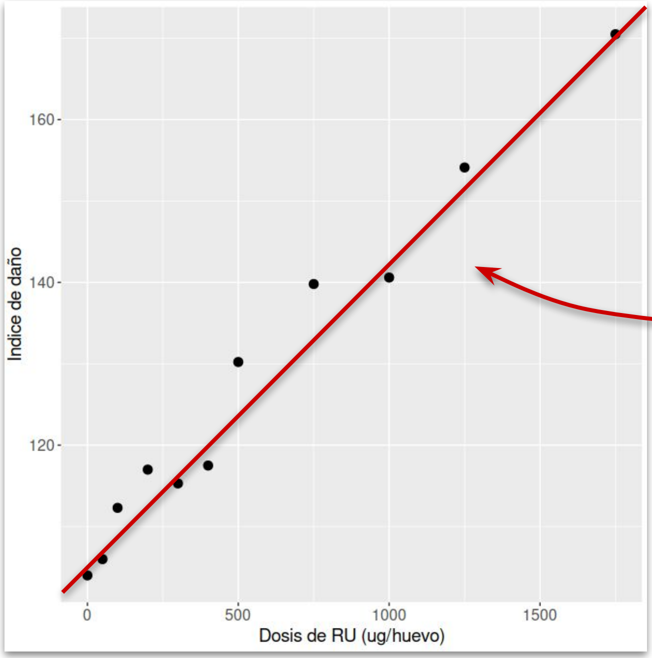
a = ordenada al origen ("intercept") (el punto donde la recta intercepta al eje Y)

b = pendiente de la recta (mide el cambio en Y por cada unidad de cambio en X)

Volviendo al ejemplo: gráfico de dispersión

Filter

	RU	DI
1	0	104.00
2	50	106.00
3	100	112.30
4	200	117.00
5	300	115.30
6	400	117.50
7	500	130.22
8	750	139.80
9	1000	140.60
10	1250	154.12
11	1750	170.50



¿Es lógico suponer que existe una relación lineal entre ambas variables?

$DI = a + b \cdot RU$ ✓

Modelo de Regresión Lineal Simple (RLS)

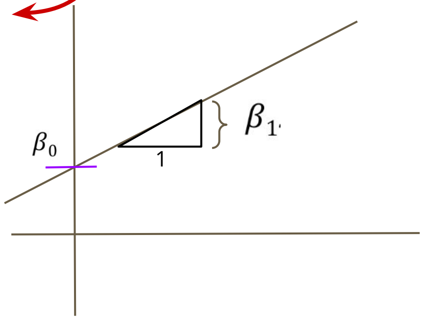
Sabemos que el comportamiento de la función lineal es <u>**determinístico**</u> …

"El comportamiento de Y puede ser descrito por una función SIN ERROR"

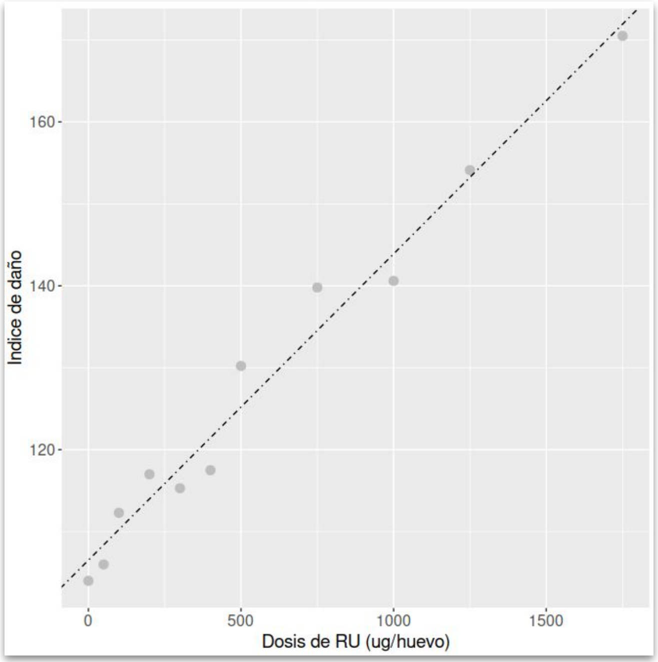
$$y = \beta_0 + \beta_1 . X$$

ordenada al origen

pendiente



Volviendo al ejemplo



Los datos (observaciones) ¿están exactamente sobre la recta?

Si repetimos el experimento ¿los puntos se ubicarán exactamente en el mismo lugar?

Entonces, dado un valor de X ¿siempre se va a obtener el mismo valor de Y?

Modelo de Regresión Lineal Simple (RLS)

X Y

	RU	DI
1	0	104.00
2	50	106.00
3	100	112.30
4	200	117.00
5	300	

- **Modelo de Regresión Lineal Simple**

  $Y_i = \underline{\beta_0 + \beta_1 . x_i} + \varepsilon_i$

  Y_i es la i-ésima observación de la **variable dependiente** Y

  x_i es el i-ésimo valor de la **variable predictora** X

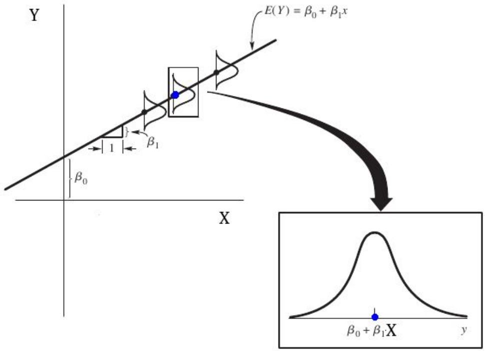
  β_0 y β_1 **parámetros** del modelo: ordenada al origen y pendiente

  ε_i es el error aleatorio, variación de Y no explicada por X;

- **Recta de regresión Poblacional**

  $\beta_0 + \beta_1 . x$

Estadístico: permite la incorporación de un componente **ALEATORIO**



Adaptado de Wackerly et al 2010

Modelo de Regresión Lineal Simple (RLS)

Parámetros

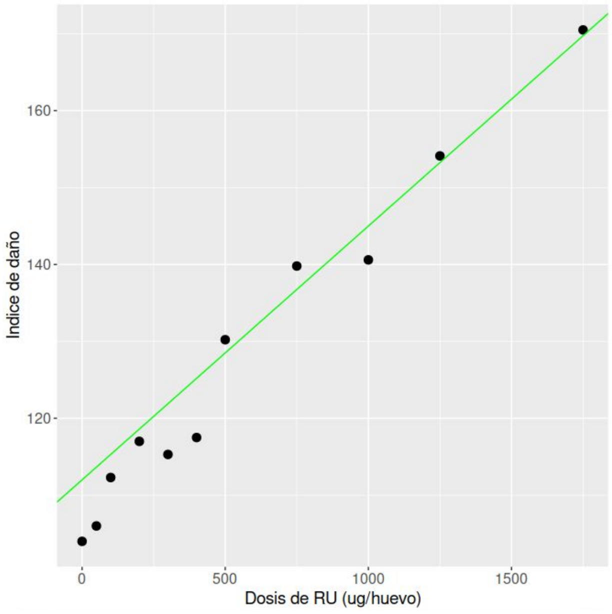
- La función $Y = \beta_0 + \beta_1 . x$ no es observable directamente
- Se estima a través de una muestra como $Y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 . x$

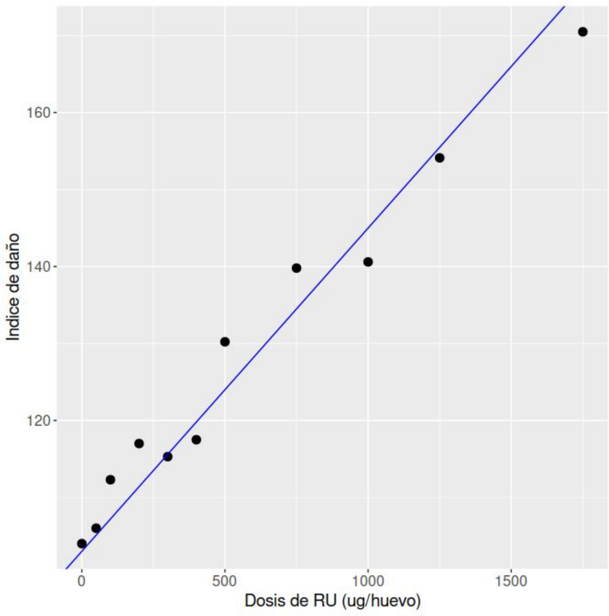
Estimadores

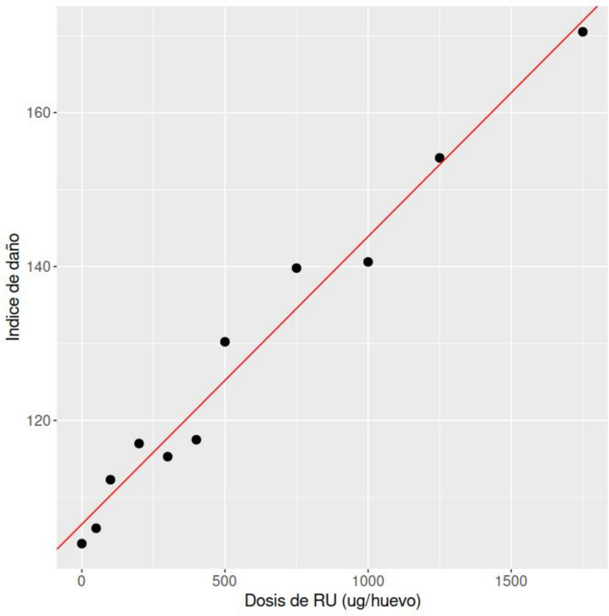
- $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$: Estimadores de los parámetros del modelo obtenidos a partir de los pares de datos

- Vamos a ESTIMAR UNA ecuación de la recta a partir de nuestros (11) datos ....
  ¿Cómo? → **la que mejor se <u>ajusta</u> a nuestros datos**

¿Cómo encontramos la recta que mejor se ajusta?

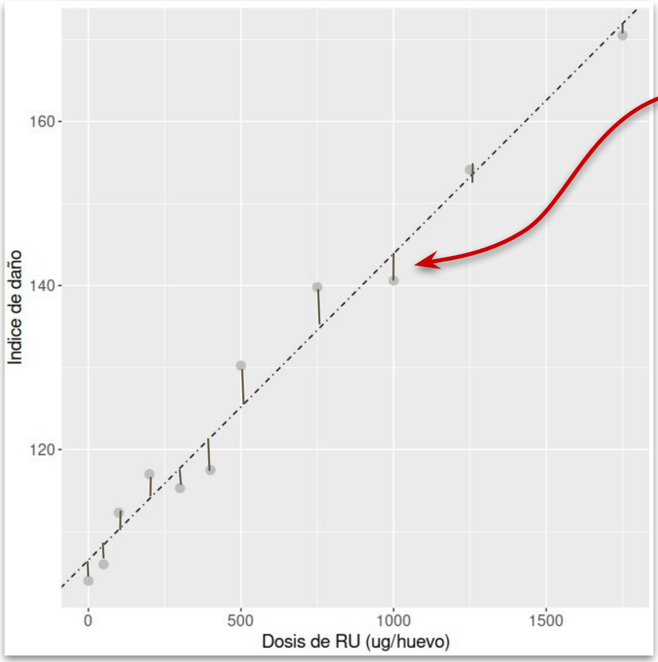






¿La verde? ¿La azul? ¿La roja?

Método de mínimos cuadrados



- **Residuo.** Es la diferencia entre el valor observado (y_i) y el predicho por la recta propuesta $a + b.x_i$

$$y_i - (a + b.x_i)$$

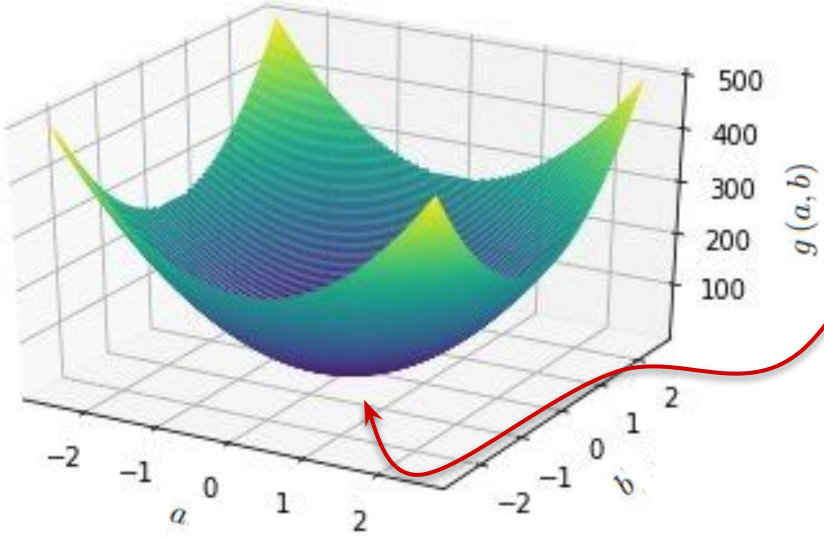
- La "mejor recta" será aquella que minimice la suma de los residuos al cuadrado

¿Por qué?

$$g(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - (a + bX_i))^2 ,$$

Función que mide el desajuste a la recta

Método de mínimos cuadrados



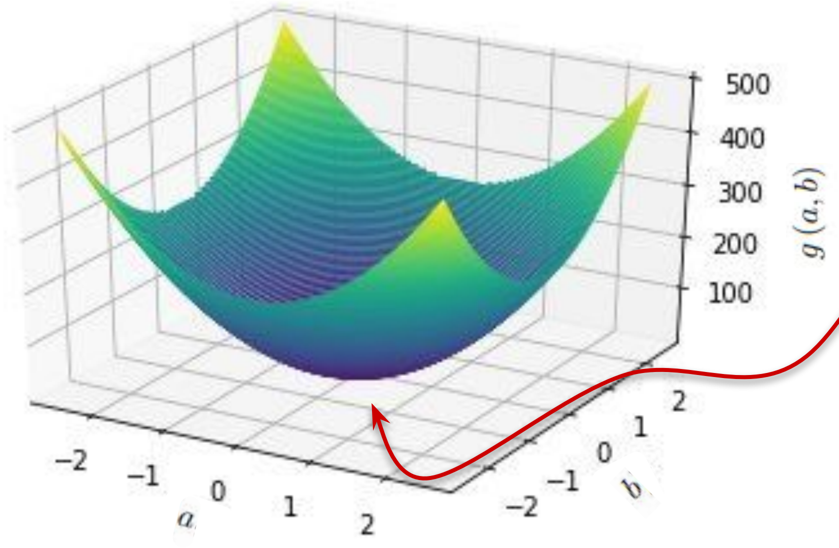
- ✓ Al ser una **<u>función cuadrática</u>** de los parámetros, tiene un mínimo global que además es el **<u>único mínimo local</u>**

- ✓ Lo podemos hallar buscando donde se anula el gradiente: **<u>gradiente *g(a,b)* = 0</u>**.

$$g(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - (a + bX_i))^2 ,$$

Función que mide el desajuste a la recta

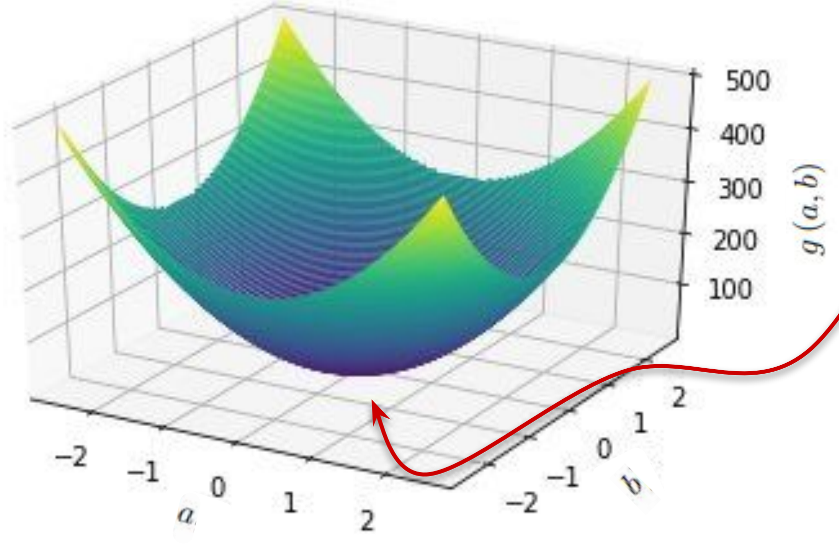
Método de mínimos cuadrados



- ✓ Entonces, buscamos los parámetros que minimizan g(a,b) derivándola respecto de uno de los parámetros, y luego respecto del otro. Igualamos ambas ecuaciones a cero y obtenemos:

$$\begin{cases} -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a - b\,x_i\right) = 0 \\ -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a - b\,x_i\right)x_i = 0 \end{cases}$$

Método de mínimos cuadrados



✓ Ahora despejamos los parámetros y obtenemos:

$\hat{\beta}_1$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$\hat{\beta}_0$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \bar{y} - b\,\bar{x}$$

Nuestro ejemplo

Misma ecuación anterior, pero reescrita

Insumos

- *n* pares de observaciones (X_i, Y_i)
- $\bar{X}$ = promedio de las X_i
- $\bar{Y}$ = promedio de las Y_i

	RU	DI
1	0	104.00
2	50	106.00
3	100	112.30
4	200	117.00
5	300	

- $$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} =$$

- $$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \,.\, \bar{X} =$$

Nuestro ejemplo

Misma ecuación anterior, pero reescrita

Insumos

- n pares de observaciones (X_i, Y_i)
- $\bar{X}$ = promedio de las X_i
- $\bar{Y}$ = promedio de las Y_i

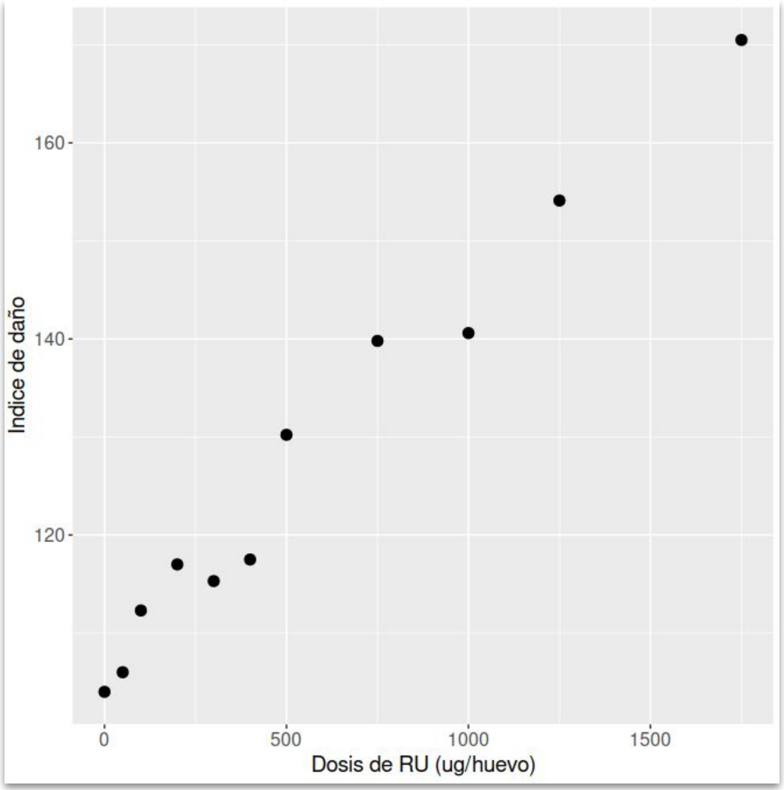
	RU	DI
1	0	104.00
2	50	106.00
3	100	112.30
4	200	117.00
5	300	

- $$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} = 0.037$$
- $$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \,.\, \bar{X} = 106.5$$

La recta ajustada

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 * DosisRU$$

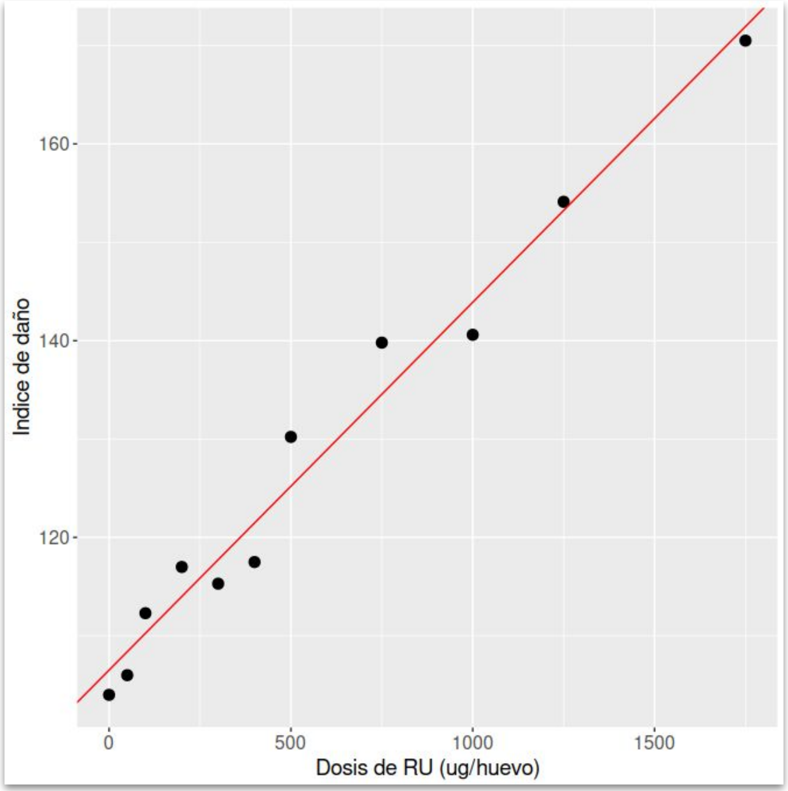
$$\hat{y} = 106.5 + 0.037 * DosisRU$$



La recta ajustada

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 * DosisRU$$

$$\hat{y} = 106.5 + 0.037 * DosisRU$$



Estimación de la recta

¡Pueden usar el software / la herramienta que quieran !
(veamos con python el ejemplo subido al campus)

regresionLinealSimpleRU.py

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Materia     : Laboratorio de datos - FCEyN - UBA
Clase       : Clase Regresion Lineal
Detalle     : Modelo de Regresion Lineal Simple
Autores     : Maria Soledad Fernandez y Pablo Turjanski
Modificacion: 2023-10-13
"""

# Importamos bibliotecas
import pandas as pd
import numpy as np
from sklearn import linear_model
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
#%%
##############################################################
########  DEFINICION DE FUNCIONES AUXILIARES
##############################################################
```

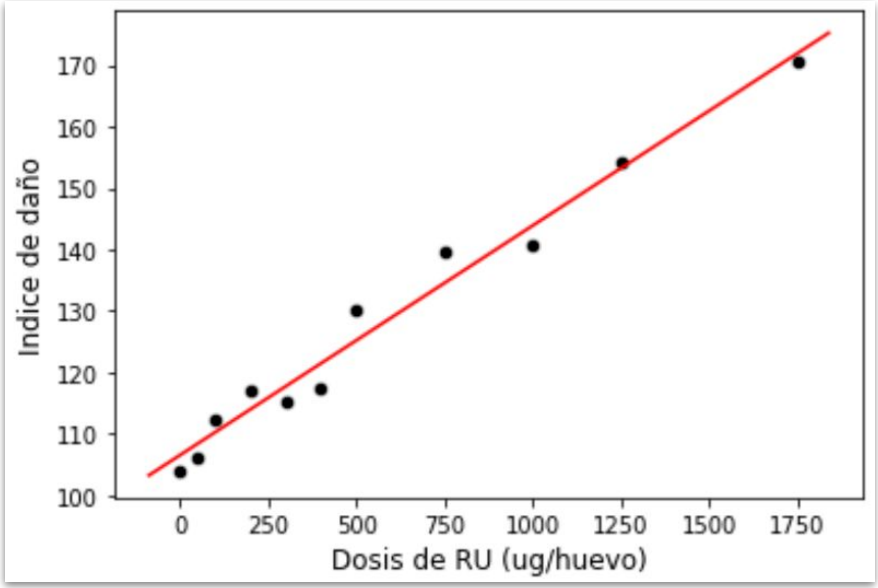
Filter

	RU	DI
1	0	104.00
2	50	106.00
3	100	112.30
4	200	117.00
5	300	115.30
6	400	117.50
7	500	130.22
8	750	139.80
9	1000	140.60
10	1250	154.12
11	1750	170.50

Interpretación de los coeficientes

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 * DosisRU$$

$$\hat{y} = 106.5 + 0.037 * DosisRU$$



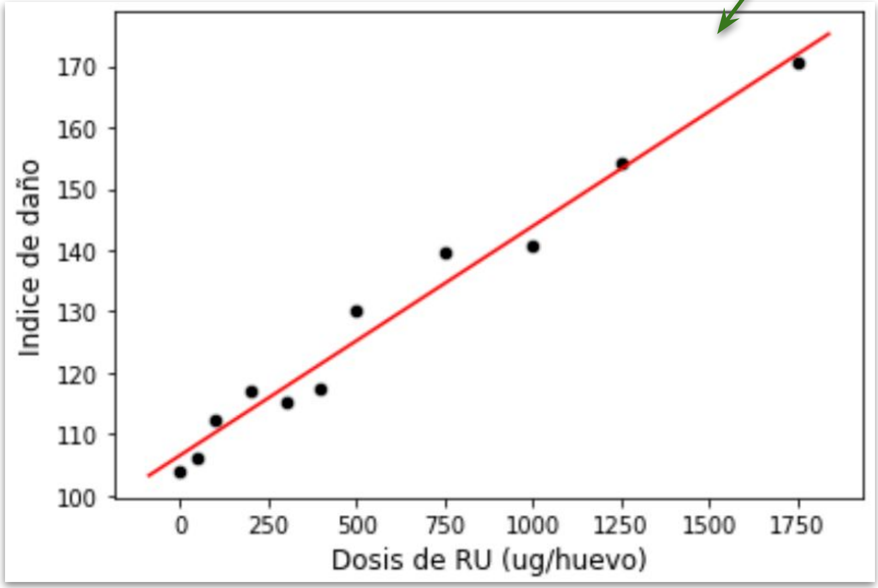
- **Ordenada al origen (intercept).** Es el valor medio de ID cuando la dosis de RU es 0 (sin herbicida), en este caso 106.5
- **Pendiente.** Por cada unidad adicional de Dosis de RU (ug/huevo), se observa un incremento medio en el índice de daño de 0.037 unidades (de ID...)

Predicción

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 * DosisRU$$

$$\hat{y} = 106.5 + 0.037 * DosisRU$$

	RU	DI
1	25	
2	600	
3	1500	

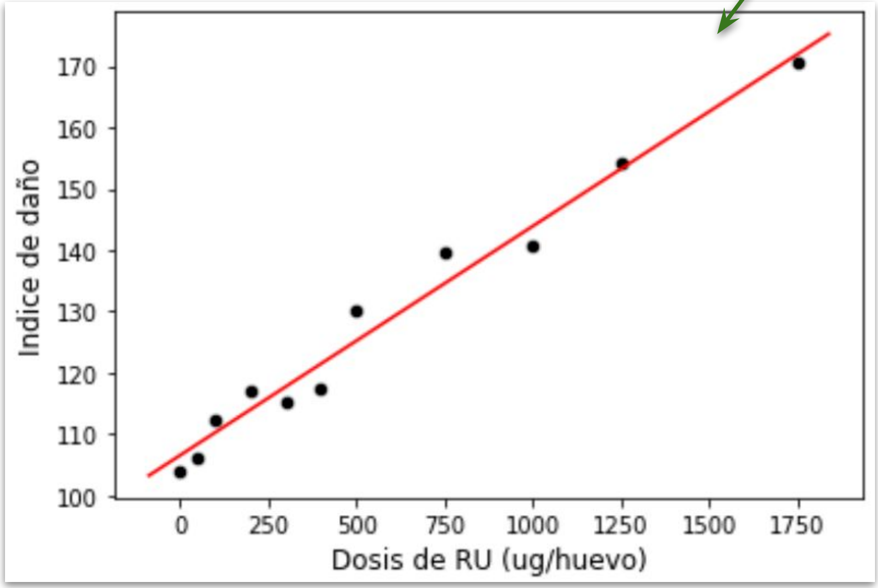


Predicción

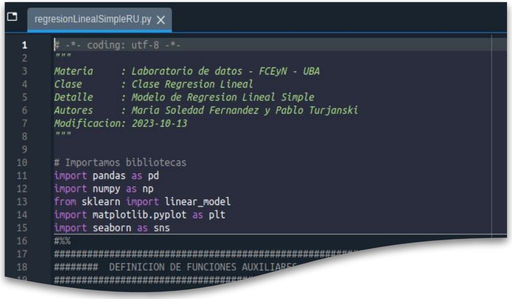
$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 * DosisRU$$

$$\hat{y} = 106.5 + 0.037 * DosisRU$$

	RU	DI
1	25	
2	600	
3	1500	



¡Podemos también usar software!
(veamos con python el ejemplo subido al campus)



regresionLinealSimpleRU.py

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Materia     : Laboratorio de datos - FCEyN - UBA
Clase       : Clase Regresion Lineal
Detalle     : Modelo de Regresion Lineal Simple
Autores     : Maria Soledad Fernandez y Pablo Turjanski
Modificacion: 2023-10-13
"""

# Importamos bibliotecas
import pandas as pd
import numpy as np
from sklearn import linear_model
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
#%%
########################################################
######## DEFINICION DE FUNCIONES AUXILIARES
########################################
```

Predicción

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 * DosisRU$$

$$\hat{y} = 106.5 + 0.037 * DosisRU$$

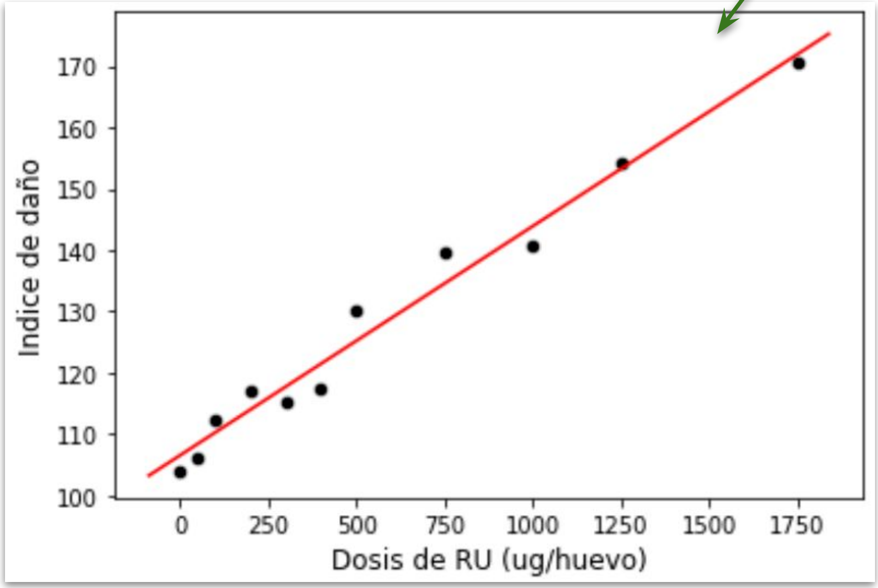
¡Podemos también usar software!
(veamos con python el ejemplo subido al campus)

regresionLinealSimpleRU.py

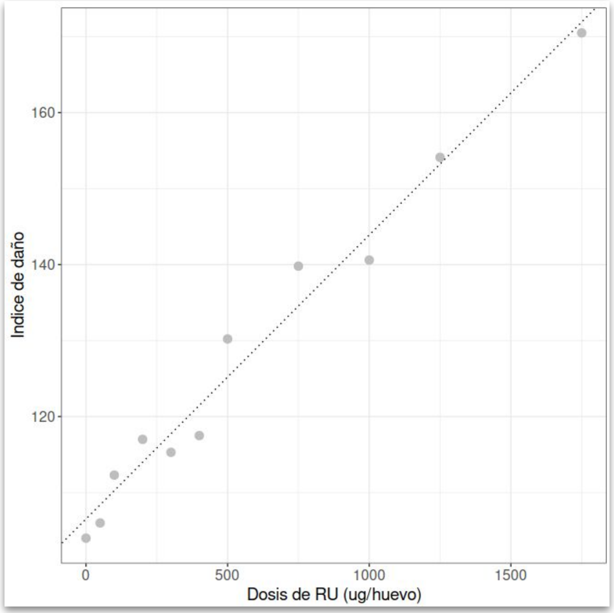
```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Materia     : Laboratorio de datos - FCEyN - UBA
Clase       : Clase Regresion Lineal
Detalle     : Modelo de Regresion Lineal Simple
Autores     : Maria Soledad Fernandez y Pablo Turjanski
Modificacion: 2023-10-13
"""

# Importamos bibliotecas
import pandas as pd
import numpy as np
from sklearn import linear_model
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
#%%
##############################################
######## DEFINICION DE FUNCIONES AUXILIARES
```

Filter

	RU	DI
1	25	107.46
2	600	128.96
3	1500	162.61

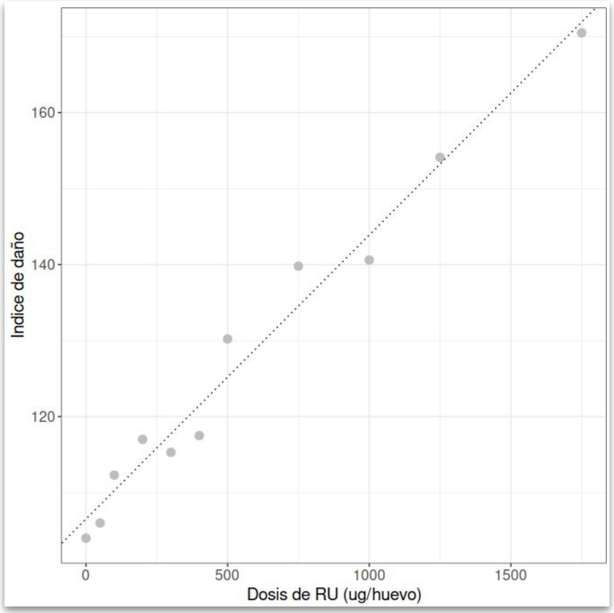


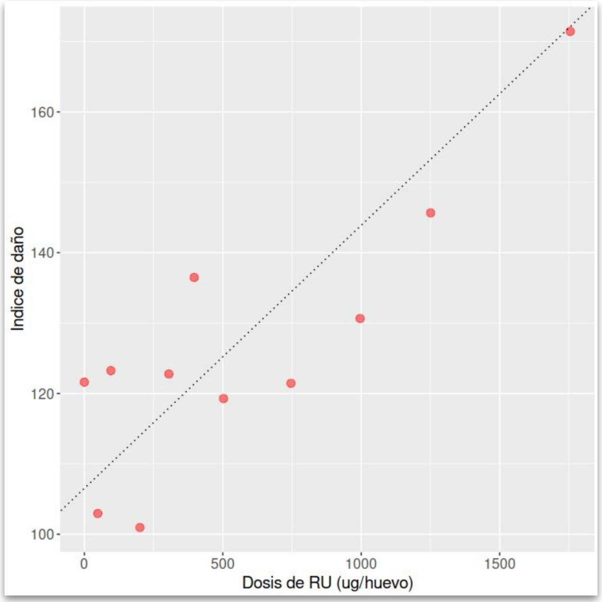
Varianza del modelo

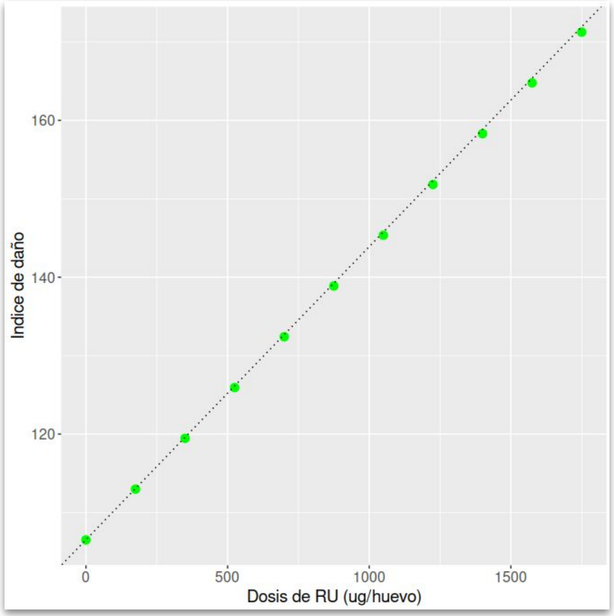


Nuestros datos

Varianza del modelo



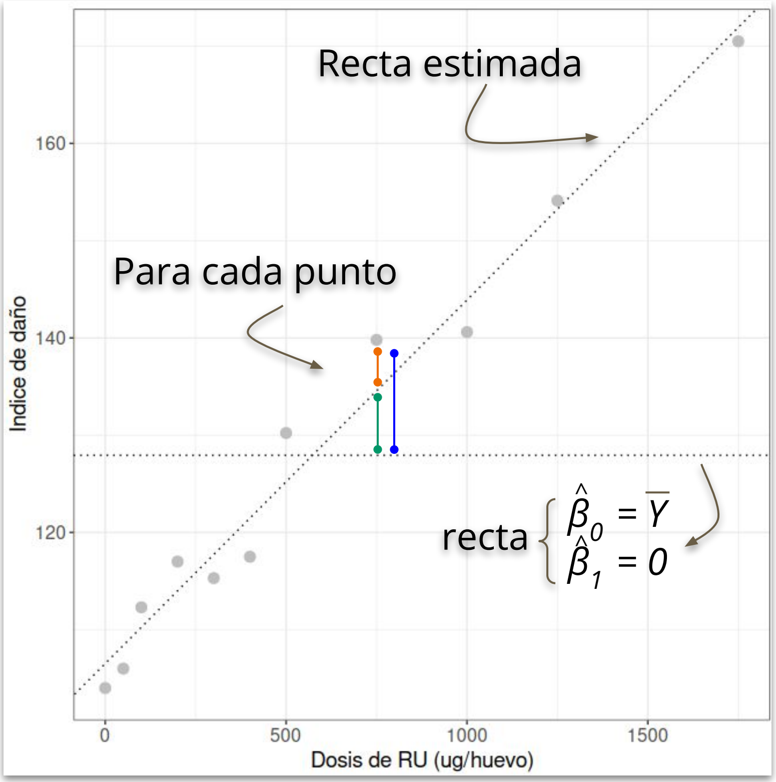




Nuestros datos

Otros escenarios

Cuantificando la variabilidad del modelo



- Si no hay relación entre la dosis de RU y el ID entonces $\begin{cases} \hat{\beta}_0 = \overline{Y} \\ \hat{\beta}_1 = 0 \end{cases}$

- La variabilidad TOTAL del modelo puede separarse en EXPLICADA y NO EXPLICADA

variabilidad total	$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2$
variabilidad no explicada	$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2$
variabilidad explicada	$\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2$

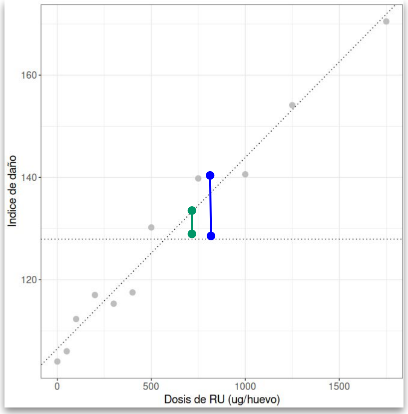
- Coeficiente de determinación (R^2): Mide la proporción de variabilidad de la variable respuesta explicada por variaciones en x, es decir por el modelo de regresión

$$R^2 = \frac{SC\,explic}{SC\,total}$$

Coeficiente de determinación R^2

- Es una medida de la capacidad predictiva del modelo (de RLS)
- Mide la "proporción de la variabilidad en Y explicada por el modelo" (de RLS)
- No depende de las unidades de medición
- Toma valores entre 0 y 1: $0 \leq R^2 \leq 1$
- A mayor R^2: más cercanos los puntos a la recta,
- A mayor R^2, mayor "fuerza" para predecir (dentro del rango)

$$R^2 = \frac{SC\,explic}{SC\,total}$$



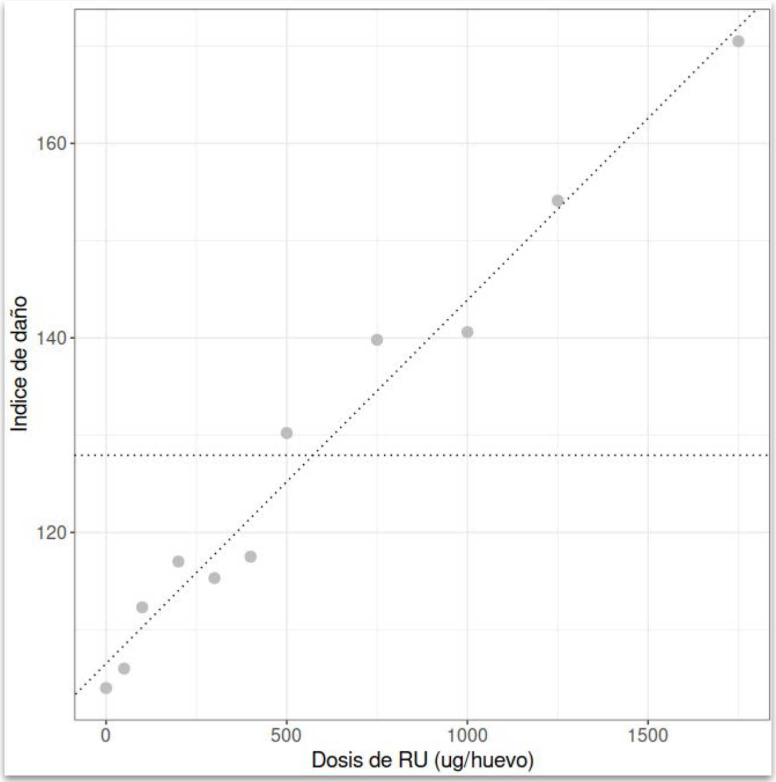
Coeficiente de determinación R^2

$R^2 =$ 

Coeficiente de determinación R^2

$R^2 = 0.97$

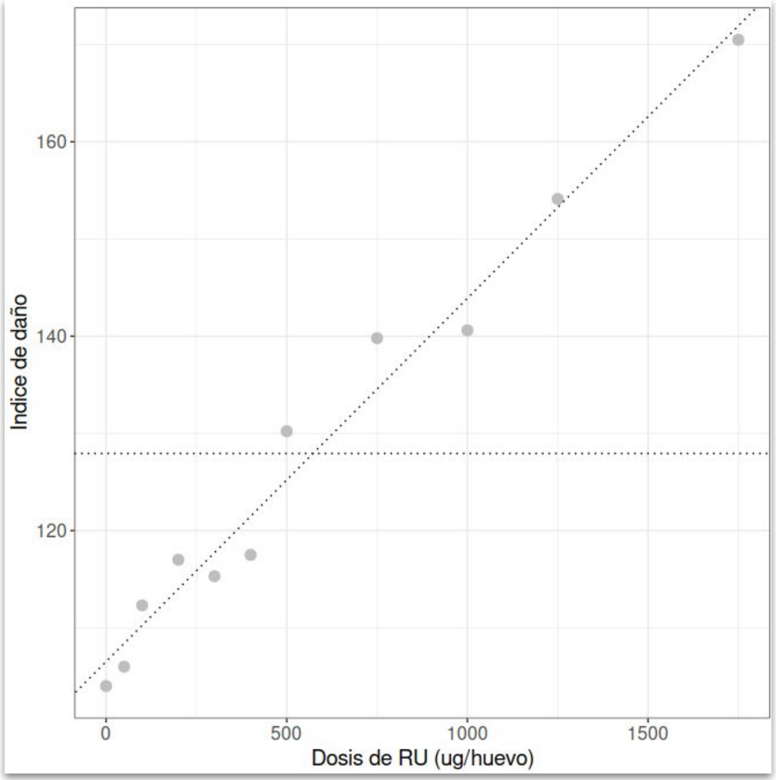
Resumiendo, en nuestro experimento



Ecuación estimada = $\hat{y} = 106.5 + 0.037 * DosisRU$

$R^2 = 0.97$

Resumiendo, en nuestro experimento



Ecuación estimada = $\hat{y} = 106.5 + 0.037 * DosisRU$

$R^2 = 0.97$

Si repetimos el experimento, ¿obtendremos los mismos valores de $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$? y R^2? → seguimos en el TP

TP - Regresión y variabilidad de los estimadores

Imaginemos que a cada uno de nosotros nos encargan la realización de un experimento similar al que vimos. Para ello vamos a:

1. Obtener una muestra. En https://msfernandez.shinyapps.io/applabodatos/ seguir las instrucciones para obtener una muestra. (*)

2. Realizar un gráfico de dispersión de ID en función de la concentración de RU.

3. Estimar la recta de regresión. Interpretar los coeficientes. Escribir la ecuación estimada del modelo.

4. Calcular e interpretar el coeficiente de determinación R^2

5. En la planilla compartida (link) escribir el valor estimado para β0 , β1 , y el R^2, para cada una de las muestras obtenidas

(*) el modelo poblacional (a partir del cual se obtienen los datos) es desconocido para ustedes.

TP - Regresión y variabilidad de los estimadores

Imaginemos que a cada uno de nosotros nos encargan la realización de un experimento similar al que vimos. Para ello vamos a:

1. Obtener una muestra. En https://msfernandez.shinyapps.io/applabodatos/ seguir las instrucciones para obtener una muestra. (*)
2. Realizar un gráfico de dispersión de ID en función de la concentración de RU.
3. Estimar la recta de regresión. Interpretar los coeficientes. Escribir la ecuación estimada del modelo.
4. Calcular e interpretar el coeficiente de determinación R^2
5. En la planilla compartida (link) escribir el valor estimado para $\beta 0$, $\beta 1$, y el R^2, para cada una de las muestras obtenidas
6. Comparar los resultados obtenidos en las distintas muestras.
7. Construir un histograma con los valores estimados de $\beta 0$ y $\beta 1$.

(*) el modelo poblacional (a partir del cual se obtienen los datos) es desconocido para ustedes.

TP - Regresión y variabilidad de los estimadores

Imaginemos que a cada uno de nosotros nos encargan la realización de un experimento similar al que vimos. Para ello vamos a:

1. Obtener una muestra. En https://msfernandez.shinyapps.io/applabodatos/ seguir las instrucciones para obtener una muestra. (*)
2. Realizar un gráfico de dispersión de ID en función de la concentración de RU.
3. Estimar la recta de regresión. Interpretar los coeficientes. Escribir la ecuación estimada del modelo.
4. Calcular e interpretar el coeficiente de determinación R^2
5. En la planilla compartida (link) escribir el valor estimado para $\beta 0$, $\beta 1$, y el R^2, para cada una de las muestras obtenidas
6. Comparar los resultados obtenidos en las distintas muestras.
7. Construir un histograma con los valores estimados de $\beta 0$ y $\beta 1$.
8. Sabiendo que los parámetros poblacionales son $\beta 0=106.5$ y $\beta 1=0.037$ relacionar los conceptos de estimadores y parámetros

(*) el modelo poblacional (a partir del cual se obtienen los datos) es desconocido para ustedes.

Ejemplo adaptado de Poletta y cols (2009)

ELSEVIER

Mutation Research/Genetic Toxicology and Environmental Mutagenesis

Volume 672, Issue 2, 31 January 2009, Pages 95-102

Genotoxicity of the herbicide formulation Roundup® (glyphosate) in broad-snouted caiman (*Caiman latirostris*) evidenced by the Comet assay and the Micronucleus test

G.L. Poletta [a b c], A. Larriera [a d], E. Kleinsorge [b], M.D. Mudry [c]

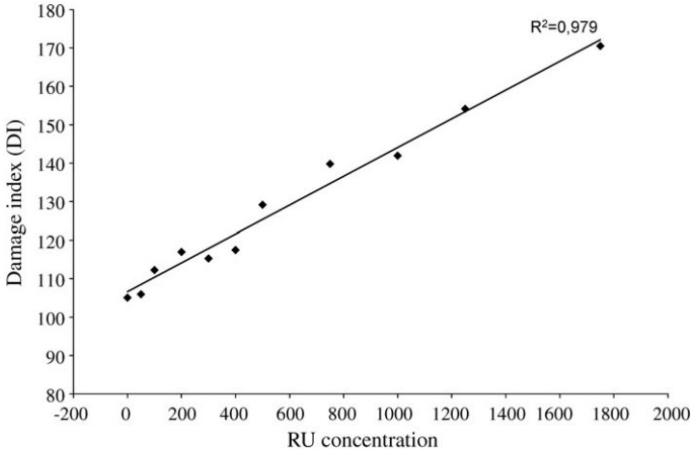


Fig. 3. RU concentration dependent effect for E_1 and E_2 DI mean data. $R^2 = 0.979$, $p < 0.001$.

https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S138357180800301X

Algunos comentarios

- Estudio experimental: posibilidad de establecer relación causal
- No extrapolar
- Hay que tener cuidado con observaciones atípicas e influyentes

Algunos comentarios

- Estudio experimental: posibilidad de establecer relación causal
- No extrapolar
- Hay que tener cuidado con observaciones atípicas e influyentes

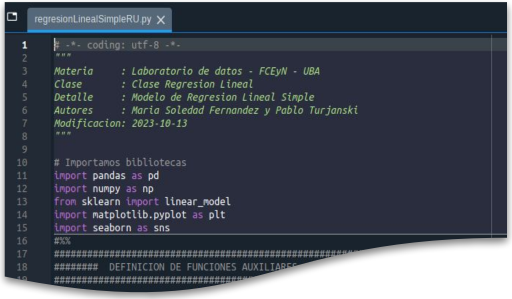
Predicción

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 * DosisRU$$

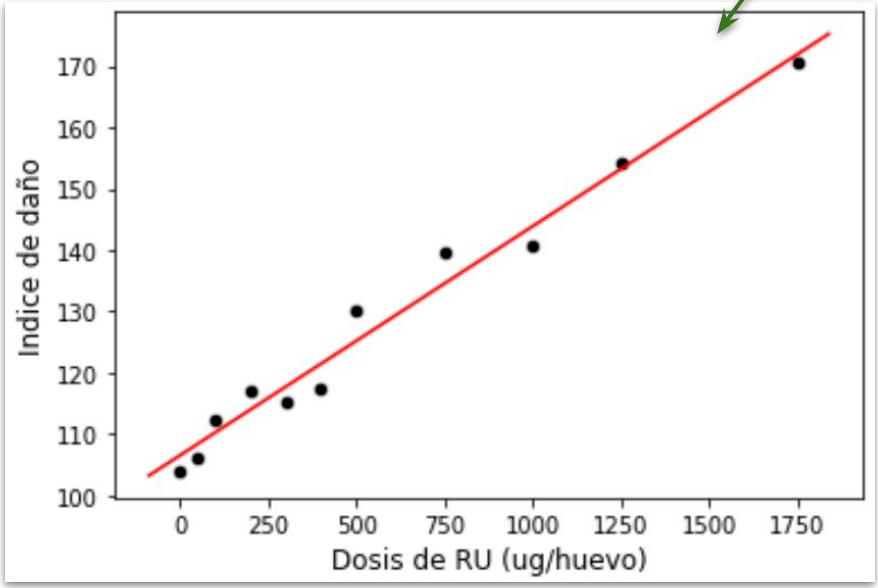
$$\hat{y} = 106.5 + 0.037 * DosisRU$$

	RU	DI
1	25	✓
2	150000	✗
3	-150000	✗

¡Podemos también usar software!
(veamos con python el ejemplo subido al campus)



```
regresionLinealSimpleRU.py
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Materia     : Laboratorio de datos - FCEyN - UBA
Clase       : Clase Regresion Lineal
Detalle     : Modelo de Regresion Lineal Simple
Autores     : Maria Soledad Fernandez y Pablo Turjanski
Modificacion: 2023-10-13
"""

# Importamos bibliotecas
import pandas as pd
import numpy as np
from sklearn import linear_model
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
#%%
#####################################################
######## DEFINICION DE FUNCIONES AUXILIARES
```



Algunos comentarios

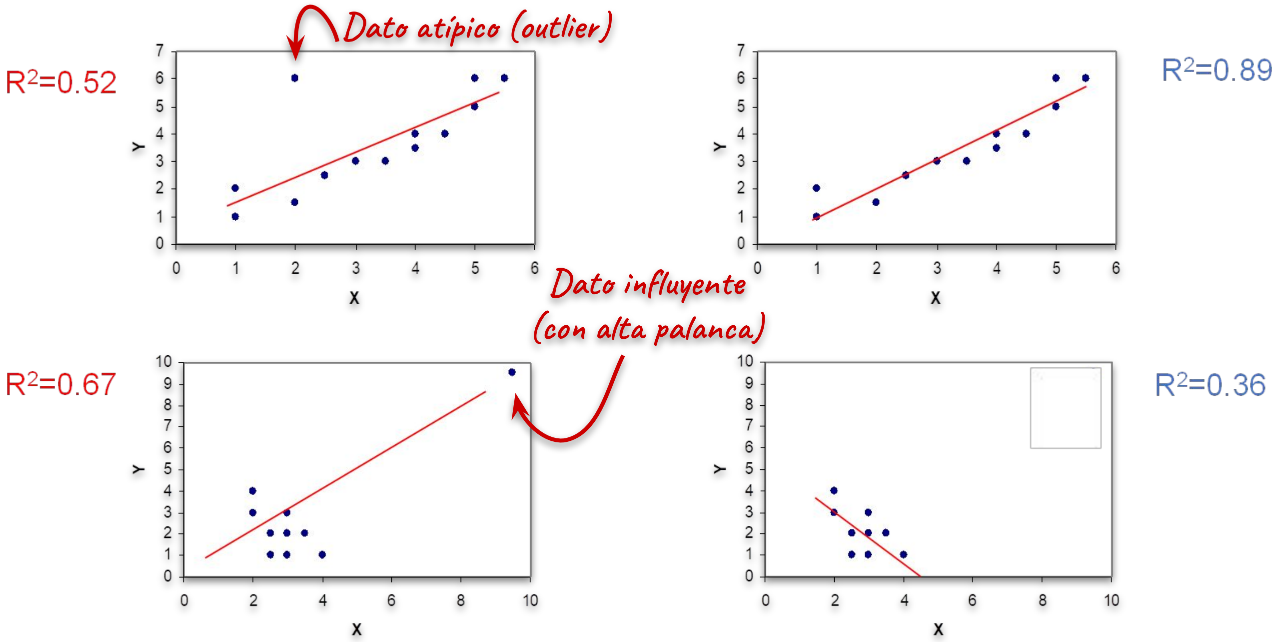
- Estudio experimental: posibilidad de establecer relación causal
- No extrapolar
- Hay que tener cuidado con observaciones atípicas e influyentes

Algunos comentarios

- Estudio experimental: posibilidad de establecer relación causal
- No extrapolar
- Hay que tener cuidado con observaciones atípicas e influyentes

Observaciones atípica e influyentes

- **Atípicas (outliers en Y):** Observaciones con un patrón distinto al resto de los datos, que producen un residuo grande
- **Influyentes (con alta palanca)**: Observaciones cuyo valor de X se encuentra alejado del promedio y que tienen mucho peso en las estimaciones de los parámetros. Al ser eliminadas pueden provocan cambios sustanciales en las estimaciones



Dataset "Anscombe"

- Dataset "Anscombe" (1973, Francis Anscombe)
- Muestra la importancia de **graficar para visualizar el efecto de datos atípicos y observaciones influyentes sobre las propiedades estadísticas**

Anscombe's quartet

I		II		III		IV	
x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
10.0	8.04	10.0	9.14	10.0	7.46	8.0	6.58
8.0	6.95	8.0	8.14	8.0	6.77	8.0	5.76
13.0	7.58	13.0	8.74	13.0	12.74	8.0	7.71
9.0	8.81	9.0	8.77	9.0	7.11	8.0	8.84
11.0	8.33	11.0	9.26	11.0	7.81	8.0	8.47
14.0	9.96	14.0	8.10	14.0	8.84	8.0	7.04
6.0	7.24	6.0	6.13	6.0	6.08	8.0	5.25
4.0	4.26	4.0	3.10	4.0	5.39	19.0	12.50
12.0	10.84	12.0	9.13	12.0	8.15	8.0	5.56
7.0	4.82	7.0	7.26	7.0	6.42	8.0	7.91
5.0	5.68	5.0	4.74	5.0	5.73	8.0	6.89

Para cada dataset:

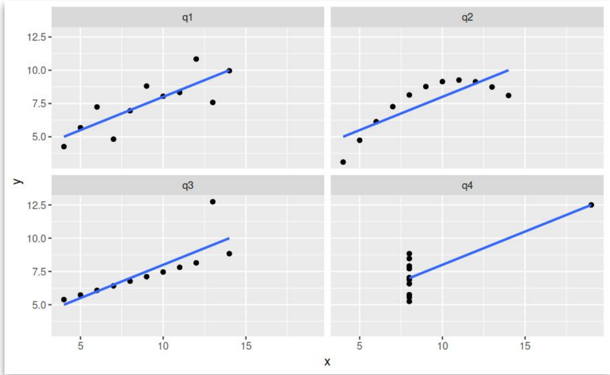
1. *Generar el modelo de RLS y reportar*
   a. *intercept*
   b. *pendiente*
   c. *R2*
2. *Realizar el gráfico de dispersión y la recta estimada por el RLS*

Dataset "Anscombe"

Anscombe's quartet

I		II		III		IV	
x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
10.0	8.04	10.0	9.14	10.0	7.46	8.0	6.58
8.0	6.95	8.0	8.14	8.0	6.77	8.0	5.76
13.0	7.58	13.0	8.74	13.0	12.74	8.0	7.71
9.0	8.81	9.0	8.77	9.0	7.11	8.0	8.84
11.0	8.33	11.0	9.26	11.0	7.81	8.0	8.47
14.0	9.96	14.0	8.10	14.0	8.84	8.0	7.04
6.0	7.24	6.0	6.13	6.0	6.08	8.0	5.25
4.0	4.26	4.0	3.10	4.0	5.39	19.0	12.50
12.0	10.84	12.0	9.13	12.0	8.15	8.0	5.56
7.0	4.82	7.0	7.26	7.0	6.42	8.0	7.91
5.0	5.68	5.0	4.74	5.0	5.73	8.0	6.89

	intercept	pendiente	R2
x1	3.000091	0.5000909	0.6665425
x2	3.000909	0.5000000	0.6662420
x3	3.002455	0.4997273	0.6663240
x4	3.001727	0.4999091	0.6667073



SPOILER

Vimos la punta del iceberg de RLS.

Estadística. Permite sacar conclusiones sobre la población (parámetros del modelo) a partir de una muestra (estimadores) cuantificando el grado de incertidumbre asociado

SUPUESTOS acerca de la relación entre las variables, sobre los “errores“ del modelo, etc. → validación del modelo, análisis de supuestos, etc.

Cierre

1. Presentamos el modelo estadístico de Regresión Lineal Simple (RLS)

2. Vimos potenciales aplicaciones

3. RLS nos permite predecir e interpretar los resultados de un modelo de RLS con fines explicativos

4. Observamos la naturaleza aleatoria de los estimadores de los parámetros del modelo