Tema 1

1) a) $A \setminus (B \cup C)$

b) $(A \cap C) \setminus B$

c) $A \cap B \cap C$

d) $A \cup B \cup C$

e) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$

f) $\cancel{A \cap (B}$ $(A - B - C) \cup (B - A - C) \cup (C - A - B)$

g) $A^c \cap B^c \cap C^c$

h) $((A \cap B) \setminus C) \cup ((A \cap C) \setminus B) \cup ((B \cap C) \setminus A)$

i) $A \cup B \cup C$

2) a) $(A \cap B) \setminus C$

b) $A \cap B \cap C^c \iff$ soțul are mai mult de 40 de ani, soția sa e mai tânără având mai puțin de 40 de ani.

$A \setminus (A \cap B) \iff$ soțul are mai mult de 40 ani, iar soția sa e mai bătrână decât el.

$A \cap B^c \cap C \iff$ soțul are mai mult de 40 ani la fel cu soția sa, dar soția e mai bătrână.

$A \cup B \Leftrightarrow$ soțul are mai mult de 40 ani sau soția e mai tânără decât el.

c) $A \cap C^c \subset B$?

$A \cap C^c \Leftrightarrow$ bărbatul are mai mult de 40 ani, iar soția sa are mai puțin de 40 de ani $\Rightarrow$ soția sa e mai tânără $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A \cap C^c \subset B$

3) $d(A, B)$ distanță $\Leftrightarrow \begin{cases} d(A,B) \geq 0 \\ d(A,B) = 0,\ A = B \\ d(A,B) = d(B,A) \\ d(A,B) = d(B,C) \geq d(B,C) \end{cases}$

$d(A,B) = P(A \Delta B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A)$

a) $d(A,A) = P(A \Delta A) = P(A \setminus A) + P(A \setminus A) =$
$= P(\emptyset) + P(\emptyset) = 0 \quad (1)$

$\left.\begin{array}{l} d(A,B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) \\ d(B,A) = P(B \setminus A) + P(A \setminus B) \end{array}\right\} \Rightarrow d(A,B) = d(B,A)$
(2)

Demonstrăm că $d(A,B) + d(B,C) \geq d(A,C)$ din care rezultă că: $P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(B \setminus C) + P(C \setminus B) \geq P(A \setminus C) + P(C \setminus A)$

$P(A \Delta B) + P(B \Delta C) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) +$

$+ \cancel{B}\, P(A \setminus C) + P(C \setminus B) = P(A \cup B) - P(A \cap B) +$

$+ P(B \cup C) - P(B \cap C) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) +$

$+ P(B) + P(C) - 2P(B \cap C)$

$P(A \cup B \cup C) - P[(A \cap B) + P(C) - P(A) - P(B \cap C) +$

$+ P(A \cap B \cap C) = P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) +$

$+ P(A \cap B \cap C)$

Presupunem cazul maxim din care

$A \cap B \cap C = B \Rightarrow B \subseteq A$ şi $B \subseteq C \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A \Delta B) \times P(B \Delta C) - P(A \cup B \cup C) =$

$= P(A \cup B) - P(B) - P(B) = P(A \cup B) - 2P(B) \geq$

$- 2$ $\qquad B \subseteq A \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A \Delta B) + P(B \Delta C) - P(A \cup B \cup C) \geq$

$P(A \cup B \cup C) \supseteq P(A \Delta C) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A \Delta B) + P(B \Delta C) \geq P(A \Delta C)$ (3)

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow d(A, B) = P(A \Delta B) \Rightarrow$ este o distanţă pe F

6) $|P(A) - P(B)| \le P(A \triangle B) \Leftrightarrow$

$|P(A) - P(B)| \le P(A \cup B) - P(A \cap B)$

$$\left.\begin{array}{l} P(A) \le P(A \cup B) \\ P(B) \ge P(A \cap B) \end{array}\right. \quad \text{sau} \quad \left.\begin{array}{l} P(B) \le P(A \cup B) \\ P(A) \ge P(A \cap B) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow |P(A) - P(B)| \le P(A \cup B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow |P(A) - P(B)| \le P(A \triangle B)$

$\cancel{|P(A) - P(B)| \le P}$

4) a) Considerăm un segment distinct în $n-1$ subsegmente egale. Avem C_{n-1}^{r-1} noduri de a grupa segmentele consecutiv. Tot atâtea soluții avem în componente strict pozitive $\boxed{C_{n-1}^{r-1}}$

b) $x_1 + x_2 + \dots + x_r = n, \quad x_y \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = x_1 + 1 = 0 \\ y_2 = x_2 + 1 = 0 \\ \vdots \\ y_r = x_r + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y_1 + \dots + y_r = n + r$$

Din a) $\Rightarrow C_{n+r-1}^{r-1}$ soluții

5) 1) a) Ω $\{D, N\} \times \{b, m, s\} =$
$= \{(D, b), (D, m), (D, s), (N, b), (N, m), (N, s)\}$

b) A = stare de sănătate serioasă

A < asigurare / fără asigurare } => $A = \{(D, s), (N, s)\}$

B = nu este asigurat

B < b / m / s } => $B = \{(N, b), (N, m), (N, s)\}$

$B^c = \{(D, b), (D, m), (D, s)\}$

$B^c \cup A = \{(D, b), (D, m), (D, s), (N, s)\}$

B = stare de sănătate bună, medie și serioasă, dar care nu au asigurare

2) Pentru $\forall x \in \Omega \Rightarrow P(x) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{6}$

$P(A) = P(D, s) + P(N, s) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

$P(B) = P(N, b) + P(N, m) + P(N, s) =$
$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

$P(B^c \cup A) = P(D, b) + P(D, m) + P(D, s) + P(N, s) =$
$= \frac{1}{6} \cdot 4 = \boxed{\frac{2}{3}}$

3) $P(A) = P(\Delta, s) + P(N, s) = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2$

$P(B) = P(N, 6) + P(N, m) + P(N, s) = 0{,}1 + 0{,}3 +$
$+ 0{,}1 = 0{,}5.$

$P(B^c \cup A) = 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}6$

6) a) C_{52}^{5} - nr mâini posibile

C_{13}^{1} - nr cărții din careu

C_4^4 - culorile din careu

C_{48}^{1} - cartea rămasă

$$P_{careu} = \frac{C_{13}^{1} \cdot C_4^4 \cdot C_{48}^{1}}{C_{52}^{5}} = \frac{6}{4165}$$

b) C_{52}^{5} - nr mâini posibile

C_{13}^{1} - nr cărții din grupul de 3

C_4^3 - culori din grupul de 3

C_{12}^{1} - nr de cărți din pereche

C_4^2 - culorile din pereche

~~$P = \frac{C_{13}^{1} \cdot C_4 \cdot C_3 \cdot (2 \cdot C_4^1)}{C_{52}^{5}} = \frac{131}{3460}$~~

$$P = \frac{C_{13}^{1} \cdot C_4^3 \cdot C_{12}^{1} \cdot C_4^2}{C_{52}^{5}} = \frac{3}{203}$$

c) C_{52}^5 - nr posibile

C_{13}^1 - nr cărți din grupul de 3

C_4^3 - culorile din grup

C_{12}^2 - cărțile rămase

C_4^1 - culoarea cărții rămase

$$P = \frac{C_{13}^1 \cdot C_3^4 \cdot C_{12}^2 \cdot (2 \cdot C_4^1)}{C_{52}^5} = \frac{88}{84145}$$

d) C_{52}^5 - nr mâini posibile

C_{13}^2 - nr cărților din perechi

C_4^2 - culorile dintr-un grup

C_{11}^1 - nr cărți rămase

C_4^1 - culoare cărții rămase

$$P = \frac{C_{13}^2 \cdot (2 \cdot C_4^2) \cdot C_{11}^1 \cdot C_4^1}{C_{52}^5} = \frac{33}{54145}$$

e) C_{52}^5 - nr mâini posibile

C_{13}^2 - nr cărților din perechi

C_4^2 - culorile dintr-un grup

C_{11}^1 - nr cărți rămase

C_4^1 - culoarea cărții rămase

$$P = \frac{C_{13}^{2} \cdot (2 \cdot C_4^2) \cdot C_{11}^{7}\, C_4^1}{C_{52}^{5}} = \frac{103236}{2598960}$$

b) 1) $P(B_n) = P(A)^{n-1} \cdot P(B)$

A: la aruncare nu apare 5 sau 2

B: la aruncare apare numai 5

$A = \{\{1, 2, \dots, 6\} \times \{1, 2, \dots, 6\} / \{(1, 3),$
$(4, 1), (2, 3), (3, 2), (1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2),$
$(3, 4), (4, 3)\}$

$|A| = 36 - 10 = 26 \Rightarrow P(A) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$

$B = \{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

$|B| = 4 \Rightarrow P(B) = \frac{1}{9}$

$P(B_n) = \left|\frac{13}{18}\right|^{(n-1)} \cdot P(B)$

2) $P(B_n) = P(A)^{(n-1)} \cdot P(B)$

A': la aruncare nu apare suma 2 sau 5

B': la aruncare apare suma 2 $P(B_n) = \left(\frac{29}{36}\right)^{n} \cdot$

$|A'| = 29 \Rightarrow P(A') = \frac{29}{36}, P(B') = \frac{1}{36}$ $\cdot \frac{1}{36}$

$|B'| = 1 \Rightarrow P(B') = \frac{1}{36}$

$P(B_n) = \left|\frac{28}{36}\right|^{(n-1)} \cdot \frac{1}{36}$