Algebră I

26.02.2014

SEMINAR 1

• $(R, +, \cdot) \to$ inel $\Leftrightarrow$

1) $(R, +) \to$ grup abelian

2) $(R, \cdot) \to$ monoid

3) distrib

• O submulțime $\neq \emptyset$ (nevidă) $I \subset R$ (inel comutativ) s.n. $\boxed{\text{ideal}}$ ($I \trianglelefteq R$) dacă $\to (I, +)$ este subgrup în R ($\forall a, b \in I : a-b \in I$)

$\to \forall a \in I, \forall r \in R : r \cdot a \in I$

Ex1: Decideți dacă următ. mulțimi sunt ideale în inelele coresp.

1) $I_1 = \{f \in R[X] \mid \text{grad } f \geq 2014\}$ în $R[X]$;

2) $I_2 = \{f \in R[X] \mid \text{grad } f = 26\}$ în $R[X]$;

3) $I_3 = \{$ - " — " $/ \text{grad } f \leq 139\}$ ideal în $R[X]$;

4) $I_4 = \{$ - " — " $/ 37$ este rădăcină $\}$ în $R[X]$;

$(2x+5)(p(x)) = 1$

gradul 1 grad $p = -1$!! $\nexists$ ab $\Rightarrow 2x+5$ nu e inversabil în $R[X]$.

Pb: Determinați polinoamele inversabile din $R[X]$.

1) NU: pt că $\left.\begin{array}{l} f_1 = X^{2014} \in I_1 \\ f_2 = X^{2014} \in I_2 \end{array}\right\} \to f_1 - f_2 = 0 \notin I_1$

2) NU: $\exists f_1 = X^{26} \in I_2$; $f_2 = X^{26} + X^{25} \in I_2$; dar $f_1 - f_2 = X^{26} - X^{25} \notin I_2$.

3) NU: $\left.\begin{array}{l} f_1 = X^{139} \\ r = X^{200} \end{array}\right| \Rightarrow$ dar $f_1 \cdot r \notin I_3$

4) 37 răd; (Este ideal)

St: $f_1, f_2 \in J_4 \Rightarrow \underline{f_1 - f_2 \in J_4}$

$\Rightarrow f_1 = (X-37)(g_1)$, $g_1 \in R[X]$

$f_2 = (X-37) g_2$; $g_2 \in R[X]$

$f_1 - f_2 = (X-37)(g_1 - g_2) \Rightarrow \boxed{f_1 - f_2 \in J_4}$

Prop 1

• Prop 2 (Verific)

Fie $a \in R[X]$ și $f \in J_4$

polinom

$f = (X-37) g(x)$

$a \cdot f = (X-37) \cdot \underbrace{a \cdot g(x)}_{\in R[X]}$

$\Rightarrow a \cdot f(x) \in J_4 \Rightarrow \boxed{J_4 \trianglelefteq R[X]}$

• Fie R inel, $X \subseteq R$ o mulțime; idealul generat de X: = cea mai mică (în sensul de incluziune) a lui R ce conține pe X și este ideal.

$(X) \underset{not}{=}$

$\langle X \rangle$.

$\rightarrow 2 \in \mathbb{Z}$; $\langle 2 \rangle = 2\mathbb{Z}$ (idealul generat de 2 în $\mathbb{Z}$)

$\rightarrow \langle 3, 4 \rangle = \mathbb{Z}$.

$4 - 3 = 1 \in [3, 4]$

$x \in \mathbb{Z}$, $x = x \cdot 1 \in \langle 3, 4 \rangle \subseteq \mathbb{Z}$.

$\rightarrow \langle 6, 8 \rangle \overset{?}{=}$ (idealul = ?)

$-6 + 8 = 2 \in \langle 6, 8 \rangle \Rightarrow 2\mathbb{Z} \subset \langle 6, 8 \rangle \subseteq 2\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ Deci $\langle 6, 8 \rangle = 2\mathbb{Z}$

$$\boxed{\langle n, m \rangle = \underset{gcd}{c.m.m.d.c}(m, n) \cdot \mathbb{Z}} !$$

„$\subseteq$" Dacă $x \in \langle n \rangle \Rightarrow x \in \langle gcd(n, m) \rangle$

$x \in \langle m \rangle \Rightarrow x \in \langle \gcd(n,m) \rangle$

$\langle n, m \rangle \subseteq \langle \gcd(n,m) \rangle$

"$\supseteq$" Din Alg. Euclid $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ a.î.

$d = \alpha \cdot n + \beta \cdot m \in \langle n, m \rangle$

$\rightarrow \boxed{\langle d \rangle \subseteq \langle n, m \rangle}$!

$\boxed{\text{Deci } \langle n, m \rangle = \gcd(n,m)\mathbb{Z}}$ cmmdc

$\langle n \rangle \cap \langle m \rangle = \langle c.m.m.m.c(n,m) \rangle$

$\langle 6 \rangle \cap \langle 8 \rangle = \langle 24 \rangle$. (Multipli de 6 care sunt și de 8)

• Teorema fundamentală de izomorfism:

A, B inele, $f: A \to B$ morfism de inele atunci $\ker f$ este ideal în A și inelele $\boxed{A/\ker f \simeq \mathrm{Im} f}$ sunt izomorfe.

$\{x \in A \mid f(x) = 0_B\} \to$ 0 din codomeniu

mulțime de clase de echivalență din A. (inelul factor)

$A/\ker f = \{\hat{x} \mid x \in A\} \to$ clase de echiv a elem din A.

A

clase de echiv (submult. ale lui A)

Care sunt elem echiv cu x? $\hat{x} = \{y \in A \mid y \sim x\} \Leftrightarrow y - x \in \ker f$, $y \in x + \ker f$ (Def clasei de echiv)

$\Rightarrow \boxed{\hat{x} = x + \ker f}$!

$\hat{x} + \hat{y} = \widehat{x+y}$

$\hat{x} \cdot \hat{y} = \widehat{x \cdot y}$

$\boxed{Ex}$ Fie R inel comutativ și $a \in R$. Arătați că $R[X]/(X-a) \cong R$ izomorfism de inele.

→ Trb să aplicăm Th. de izomorfism și pt a aplica caut:
$\varphi: R[X] \to R$ morfism de inele a.î:

$\begin{cases} \operatorname{Ker}\varphi = (X-a) \text{ (Ker}\varphi = \text{idealul generat de } X-a) \\ \operatorname{Im}\varphi = R. \end{cases}$

$\operatorname{Ker}\varphi = (X-a)$ → polinoamele unde a este răd $= \{(X-a)\cdot f(X) \mid f(X) \in R[X]\}$
$= \{f \in R[X] \mid f(a) = 0\}$

am explicitat cine e idealul $(X-a)$

$\operatorname{Ker}\varphi \overset{def}{=} \{f \in R[X] \mid \varphi(f) = 0\}$

Iau $\underbrace{\varphi(f(X))}_{\text{polinom}} = \underbrace{f(a)}_{\text{nr.}} \in R$.

φ morf. de inele
$\Updownarrow$

$\begin{cases} \varphi(f_1+f_2) = \varphi(f_1) + \varphi(f_2) \\ (f_1+f_2)(a) = f_1(a) + f_2(a) \\ \\ \varphi(f_1 \cdot f_2) = \varphi(f_1)\cdot\varphi(f_2) \\ (f_1\cdot f_2)(a) = f_1(a)\cdot f_2(a) \\ \\ \varphi(1) = 1 \text{ (să ducă elem unitate)} \end{cases}$

$\varphi(1) = 1(a) = 1$

Deci φ morfism de inele

$\operatorname{Ker}\varphi \overset{def}{=} \{f \in R[X] \mid \underset{f(a)=0}{\varphi(f)} = 0\} = (X-a)$

• $\underline{\operatorname{Im}\varphi}$ = ?

Fie $x \in R \subset R[X]$
$\varphi(x) = x \Rightarrow \varphi$ surj

Deci din th. fundamentală de izomorfism $\Rightarrow R[X]/_{\operatorname{Ker}\varphi} \cong \operatorname{Im}\varphi$

$R[X]/(X-a) \cong R$ (izomorf. de inele) $\underline{(\operatorname{Im}\varphi = R)}$.

Ex

$\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a+b\sqrt{3} \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$

$\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ inel com.

Arătați că următ. inele sunt izomorfe

$\mathbb{Z}[X]/(X^2-3) \simeq \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$;

Caut

$\varphi: \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ morfism de inele cu prop:

$\text{Ker}\,\varphi = X^2-3 = \{(X^2-3)\cdot f(x) \mid f(x)\in\mathbb{Z}[X]\}$ → idealul generat de pol în $\mathbb{Z}[X]$. ⊖

$\text{Im}\,\varphi = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ (să fie surj)

Un pol. merge în zero dacă se divide cu X^2-3

⊖ "polinoamele din $\mathbb{Z}[X]$ care se divid cu X^2-3"

= " — " — " — care le au pe $\sqrt{3}$ și $-\sqrt{3}$ ca rădăcină"

Vreau că $\varphi(\underline{X^2-3})=0$.

= "polinoamele din $\mathbb{Z}[X]$ care îl au pe $\sqrt{3}$ ca răd."

Iau $\varphi: \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$; $\varphi(f) = f(\sqrt{3})$ este bine definită

- φ morfism de inele

$\text{Ker}\,\varphi \overset{\text{def}}{=} \{f\in\mathbb{Z}[X] \mid \underbrace{\varphi(f)=0}_{f(\sqrt{3})=0}\}$

$= \{f\in\mathbb{Z}[X] \mid \sqrt{3}$ este răd$\}$

$= \{f\in\mathbb{Z}[X] \mid \pm\sqrt{3}$ ~~este~~ sunt răd$\}$

$= \{f\in\mathbb{Z}[X] \mid (X^2-3) \mid f\} = \underbrace{(X^2-3)}_{\text{idealul generat de } (X^2-3) \text{ în } \mathbb{Z}[X]}\mathbb{Z}[X]$

- $\text{Im}\,f = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$

Fie $a+b\sqrt{3}$; $a,b\in\mathbb{Z}$

Avem $\varphi(a+bx) = a+b\sqrt{3}$ / deci φ este surj

Deci din th. fundamentală de izomorfism → $\mathbb{Z}[X]/\text{Ker}\,f \simeq \text{Im}\,f$.

Algebră

12.03.2014

SEMINAR 2

$U(\mathbb{R}[x])$ = elementele inversabile în $\mathbb{R}[x]$?

f^{e} dacă $\exists\, g \in \mathbb{R}[x]$ a.î. $f \cdot g = 1$

$f = a \in \mathbb{R}^*$

$a \cdot \frac{1}{a} = 1$

Dacă $\exists\, f \in U(\mathbb{R}[x])$ cu grad $f \geq 1 \Rightarrow$ grad $g = 0 -$ grad $f < 0$. (fals)

Deci $U(\mathbb{R}[x]) = \mathbb{R}^*$ (sg polinoame ~~constante~~ inversabile sunt cele constante)
$= U(\mathbb{R})$

• Lema chineză:

R inel comutativ; I, J ideale comaximale ($I + J = R$).
Atunci are loc izomorfismul de inele:

$$R/_{I \cap J} \cong R/_I \times R/_J$$

$\boxed{Ex\ 1}$ Arătați că are loc următ. izomorfism de inele:

$\mathbb{Z}[x]/_{(x^2-x)} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

$(x^2-x) = \{ f(x)(x^2-x) \mid f \in \mathbb{Z}[x] \} = \{ f \in \mathbb{Z}[x] \mid 0$ și 1 sunt răd pt $f \}$
$\hookrightarrow$ polinoamele cu răd 0 și 1 $= I \cap J$.

$\{ f \in \mathbb{Z}[x] \mid 0$ este rădăcină$\} \cap \{ f \in \mathbb{Z}[x] \mid f(1) = 0 \}$

$= (x) \to$ idealul generat de x

$=$ polinoamele de forma $(x-1) \cdot$ ceva

$(x-1) \to$ idealul gen de $(x-1)$

Deci $(x^2-x) = \underset{I}{(x)} \cap \underset{J}{(x-1)}$

I și J comaximale în $\mathbb{Z}[x]$.
$\Updownarrow$

$I+J=\mathbb{Z}[x]$
$\Updownarrow$

Def: $I+J=\{i+j \mid i\in I$ și $j\in J\}$
Dacă I și J sunt ideale în R, atunci $I+J$ este ideal în R.

$I+J\subseteq \mathbb{Z}[x]$
→ este suficient să dem că $1\in I+J$
1 să fie scris ca un elem din I și unul din J.
↳ $1=\underset{1}{f}(x)\cdot x+\underset{-1}{g}(x)(x-1)$ cu $f,g\in\mathbb{Z}[x]$

$1=\underset{\in I}{1\cdot x}-\underset{\in J}{(x-1)} \Rightarrow 1\in I+J$.

Deci $\mathbb{Z}[x]\subseteq I+J\subseteq \mathbb{Z}[x]=I,J$ comaximale (*)2

Din Lema Chineză $\Rightarrow \mathbb{Z}[x]/_{I\cap J}=\dfrac{\mathbb{Z}[x]}{(x^2-x)}\simeq \dfrac{\mathbb{Z}[x]}{(x-0)}\times\dfrac{\mathbb{Z}[x]}{(x-1)}$

(*) $\boxed{R[x]/_{(x-a)}\simeq R}$ → componentele sunt de această formă.

$\simeq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ izomorf. de inele.
$(a=0)\ (a=1)$

· Soluția 2 (cu Th. fund. de izomorf)
Caut un morfism f de la $\mathbb{Z}[x]\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.
$\varphi:\mathbb{Z}[x]\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ a.î.
↳ morf. de inele $\Leftrightarrow$
↳ $\operatorname{Ker} f=(x^2-x)$ (Ker f = polinoamele care merg în elem. neutru din codomeniu i.e perechea $(0,0)$)
↳ $\operatorname{Im} f=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

· Să fie $(0,0)$ când pol. e multiplu de (x^2-x)

$\varphi(f)=(f(0),f(1))$

→ φ morf. de inele (treb. verificat)

→ $\operatorname{Ker} f=\{f\in\mathbb{Z}[x] \mid \varphi(f)=(0,0)\}$; $\{f(0),f(1))=(0,0)$
$f(0)=f(1)=0.\}=$
$=(x^2-x)$

Cele care se divid cu $x(x-1) \Rightarrow x(x-1) / f$

$\rightarrow$ $\underline{Im\, f} = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \rightarrow$ codomeniul

Fie $(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

Dacă $(a,b) = f(f(x)) \Leftrightarrow \begin{cases} a = f(0) \\ b = f(1) \end{cases}$ și

$\boxed{(b-a)x + a} = f(x)$ ~~$bx+a$~~

$f(0) = a$

$f(1) = b$

$\Rightarrow Im\, f = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Din th. fund. de izomorf. $\Rightarrow \mathbb{Z}[X]/\ker f \simeq Im\, f$.

$\mathbb{Z}[X]/(X^2-X) \simeq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. $\Rightarrow$ izo de inele

$\boxed{Ex\ 2}$

$\mathbb{Z}_{20} \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$

$(4,5) = 1 \xRightarrow{\text{Lema C.a.R.}} \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \simeq \mathbb{Z}_{20}$,

$\mathbb{Z}_{20} = \mathbb{Z}/(20) \rightarrow$ idealul generat de 20.

$20 = 4\cdot 5 \Rightarrow (20) = (4) \cap (5)$ comaximale

$(4) + (5) = (1) = \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}_{20} = \mathbb{Z}/(20) \underset{LCR}{\simeq} \mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(5) = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$.

? Am nevoie ca I, J comaximale!

$\mathbb{Z}_2 \not\simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$\mathbb{Z}/(2)\cap(2)$ $\quad \mathbb{Z}/(2) \quad \mathbb{Z}/(2)$

Nu putem aplica LCR pt că $(2)+(2) \neq \mathbb{Z}$

" (2) este doar (2).

$\boxed{\text{Ex}}$

Are loc iz de inele $\mathbb{Z}[X]/(X^2-2X) \simeq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$?

$(X^2-2X) = (X) \cap (X-2)$

pol care se div cu X^2-2X i.e care se div și cu X și cu $X-2$.

$\mathbb{Z}[X]/(X)\cap(X-2)$ $\quad$ $\mathbb{Z}[X]/(X) \times \mathbb{Z}[X]/(X-2) \simeq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

$\begin{pmatrix} X-a, \\ a=0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} X-2 \\ a=2 \end{pmatrix}$

→ Aș putea aplica teorema chineză?

Sunt (X) și $(X-2)$ comaximale în $\mathbb{Z}[X]$?

$(X)+(X-2) \overset{?}{=} \mathbb{Z}[X]$?

Pt a fi comax (o incluziune evid) iar cealaltă ⇒ e suf să arăt →

⇒ $1 = f(X)\,X + g(X)(X-2)$ cu $f, g \in \mathbb{Z}[X]$.

$X=0 \Rightarrow 1 = f\cdot 0 + g(0)(-2) = -\frac{1}{2}$ abs $\Rightarrow g(0) = \frac{-1}{2}$ abs

• Deci (X) și $(X-2)$ nu sunt comaximale → nu putem aplica T.C.R.

$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ și $\mathbb{Z}[X]/(X^2-2X)$ nu sunt inele izomorfe!

↳ Arăt că nu sunt = găsesc un elem pe care unul îl are iar celălalt nu)

! **Def** $(R,+,\cdot)$ inel

$x \in R$ s.n. „idempotent" dacă $x^2 = x$.

→ Aflăm idempotenții lui $\mathbb{Z}$.

$\text{Idem}(\mathbb{Z}) = \{0, 1\}$

$x^2 - x = 0$

$\text{Idem}(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) = \{0,1\}\times\{0,1\} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

↳ În general $\text{Idem}(R\times S) = \{(a,b) \mid (a,b)^2 = (a,b)\} = \text{Idem}\, R \times \text{Idem}\, S$!

↳ într-un prod de inele

② Inelul
$\mathbb{Z}[x]/(x^2-2x)$ nu are idempotenți

SEMINAR 1 $\mathbb{Z}[x]/(x^2-3) \simeq \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ izo inele

Arătați că are loc: $\mathbb{R}[x]/(x^2-3) \simeq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

$(x^2-3) = (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

$\mathbb{R}[x]/(x+\sqrt{3})\cap(x-\sqrt{3})$, I, J comaximale;

I J

$I+J = \mathbb{R}[x]$

$\Rightarrow 1 = f(x)(x+\sqrt{3}) + g(x)(x-\sqrt{3})$ cu $f, g \in \mathbb{R}[x]$

$2\sqrt{3}$ $1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(x+\sqrt{3}) - \frac{1}{2\sqrt{3}}(x-\sqrt{3})$

$\Rightarrow I+J = \mathbb{R}[x]$ ✓

$\overset{LCR}{\Longrightarrow} \mathbb{R}[x]/(x^2-3) \simeq \mathbb{R}[x]/I \times \mathbb{R}[x]/J = \mathbb{R}[x]/(x+\sqrt{3}) \times \mathbb{R}[x]/(x-\sqrt{3}) \simeq$

$\simeq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ izo de inele.

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$a_n \neq 0$

cu răd $x_1, x_2, \dots, x_n$

Rel lui Viète:

$$\begin{cases} \sum x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ \sum x_i x_j = (-1)^2 \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \vdots \\ \prod x_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

Ex

Fie x_1, x_2, x_3 răd pol $p(x) = x^3 - 3x^2 + x + 6$. Det. un polinom cu răd. y_1, y_2, y_3 unde:

a) $y_1 = 2x_1 + 1$
$y_2 = 2x_2 + 1$
$y_3 = 2x_3 + 1$

b) $y_i = \frac{1}{x_i}$

c) $y_i = x_i^2$; $i = \overline{1,3}$

d) $y_i = x_i^2 + 1$

$S_1' =$

a) $y_1 + y_2 + y_3 = 2(x_1 + x_2 + x_3) + 3 = 9$

Fie $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 3 \quad \left(-\frac{b}{a}\right)$

$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1 \quad \left(+\frac{c}{a}\right)$

$S_3 = x_1x_2x_3 = -6 \quad \left(-\frac{d}{a}\right)$

$S_2' = (2x_1+1)(2x_2+1) + (2x_1+1)(2x_3+1) + (2x_2+1)(2x_3+1) =$

$= 4x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 1 + 4x_1x_3 + 2x_1 + 2x_3 + 1 + 4x_2x_3 + 2x_2 + 2x_3 + 1 =$

$= 4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + 4(\ldots$

$= 4S_2 + 4S_1 + 3 =$

$= 4 + 12 + 3 = \boxed{19}$

$S_3' = (2x_1+1)(2x_2+1)(2x_3+1) = (4x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 1)(2x_3 + 1) =$

$= 8x_1x_2x_3 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1 + 4x_2x_3 + 2x_2 + 2x_3 + 1 =$

$= 8S_3 + 4S_2 + 2S_1 + 1 = -48 + 4 + 6 + 1 = \boxed{-37}$

$\boxed{P(y) = y^3 - 9y^2 + 19y + 37 \rightarrow \text{are răd } 2x_i + 1,\ i = \overline{1,3}}$ → orice multiplu al acestui pol e pol cu aceleași caract.

b) $y_i = \frac{1}{x_i}$

$x_1x_2x_3 \neq 0 \Rightarrow x_i \neq 0$

$S_1' = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{S_2}{S_3} = -\frac{1}{6}$

$S_3' = \frac{1}{x_1x_2x_3} = \frac{1}{S_3} = -\frac{1}{6}$

$S_2' = \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1x_3} + \frac{1}{x_2x_3} = \frac{S_1}{S_3} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow P(\ ) = y^3 + \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{6}$

Sau:

Sol II $\quad x_i = \frac{1}{y_i} \Rightarrow x_i^3 - 3x_i^2 + x_i + 6 = 0$

$$\frac{1}{y_i^3} - 3\frac{1}{y_i^2} + \frac{1}{y_i} + 6 = 0 \; / \rightarrow 1 - 3y_i + y_i^2 + 6y_i^3 = 0$$

$$i = \overline{1,3}$$

$Q(y) = 6y^3 + y^2 - 3y + 1$

Algebră

26.03.2014

SEMINAR 3

$2x^2+3y^2 \xrightarrow{x \leftrightarrow y} 2y^2+3x^2 \Rightarrow$ nu e polinom simetric

$2x^2+2y^2 \xrightarrow{x \leftrightarrow y} 2y^2+2x^2 \Rightarrow$ e pol. simetric

• În general $k[x_1, \dots, x_n]$

$$\left.\begin{cases} S_1 = x_1+x_2+\dots+x_n & \text{(Viète)} \\ S_2 = \sum_{i<j} x_i x_j \\ \vdots \\ S_n = \prod_{i=1}^{n} x_i & \text{(produs)} \end{cases}\right\} \Rightarrow \text{Polinoamele simetrice fundamentale.}$$

• Teoremă:

$\forall f \in k[x_1, \dots, x_n]$ pol. simetric; se scrie în mod unic ca polinom în $s_1, s_2, \dots, s_n$

$\boxed{n=3}$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2 = (x_1+x_2+x_3)^2 - 2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) = \boxed{S_1^2 - 2S_2}$

↳ e pol. sim; se poate scrie în f(x) de S_1, S_2, S_3 (în mod unic)

$S_1 = x_1+x_2+x_3$

$S_2 = x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3$

$S_3 = x_1x_2x_3$

• Algoritm: Dat $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ simetric (trb să pornim cu un pol. simetric)

→ se separă ca sumă de comp. omogene (i.e. toate monoamele au același grad)

→ pt fiecare: fie $T(f) = cx_1^{a_1}x_2^{a_2}\dots x_n^{a_n}$ termenul dominant i.e monomul cel mai mare în ordinea lexicografică.

$$f - c \cdot s_1^{a_1-a_2} \cdot s_2^{a_2-a_3} \cdots s_n^{a_n}$$

→ la final asamblăm construcțiile

• Altfel (mai rapid)

Monoamele care apar în rularea algoritmului ca termeni principali

$$\begin{cases} x_1^{b_1}\dots x_n^{b_n} \leq_{lex} x_1^{a_1}\dots x_n^{a_n} \\ \sum b_i = \sum a_i \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases} \rightsquigarrow \underbrace{s_1^{b_1-b_2}\dots s_n^{b_n}}$$

$f = ?$ suma ...

coef

$$x_1^2 x_2^3 x_3^4 \leq_{lex} x_1^5 x_2^3 x_3 \leq_{lex} x_1^6 x_2^3$$

$x_1 x_1 x_2 x_2 x_2 x_3 x_3 x_3 x_3$ $\quad$ $x_1 x_1 x_1 x_1 x_1 x_1 x_2 x_2 x_2 x_3$

x_1 apare primul $\Rightarrow \boxed{\leq}$

$\boxed{\text{Ex 1}}$

Scrieți următ. polinom simetric în fct de polin. simetrice fundam.

$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$

→ în I rând e simetric

→ este omogen (toate au gradul 3)

$\to T(f) = x_1^3 \rightsquigarrow (3,0,0) \rightsquigarrow s_1^3$ (exponent)

$(2,1,0) \to$ mai mic lexicograf. $\rightsquigarrow s_1^{2-1}\cdot s_2^{1-0} s_3^0 = s_1 s_2$

$(1,1,1) \rightsquigarrow s_1^{1-1}\cdot s_2^{1-1} s_3^1 = s_3$

$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \alpha\cdot s_1^3 + \beta\cdot s_1 s_2 + \gamma s_3$ cu $\alpha,\beta,\gamma \in K$.

$\alpha = 1$ (α este coef. termenului dominant)

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$f(x_1,x_2,x_3)$	ecuația
0	1	1	2	1	0		$8 + 2\beta = 2 \Rightarrow \boxed{\beta = -3}$
1	1	1	3	3	1	3	$27 - 27 + \gamma = 3 \Rightarrow \boxed{\gamma = 3}$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha s_1^3 + \beta s_1 s_2 + \gamma s_3 = s_1^3 - 3 s_1 s_2 + 3 s_3}$$

$$\underbrace{x_1^3+x_2^3+x_3^3}\underbrace{-3x_1x_2x_3}_{-3S_3} = \underbrace{(x_1+x_2+x_3)}_{S_1}\underbrace{(x_1^2+x_2^2+x_3^2}_{S_1^2-2S_2} - \overbrace{x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3}^{S_2})$$

$$(S_1^2-3S_2)$$

$\boxed{Ex\ 2}$

• $n\geq 4$: $f(x_1,x_2,\dots,x_n) = \sum x_1^2x_2x_3 =$

$\hookrightarrow 3\cdot C_n^3$ termeni

→ simetric și omogen (toate monoamele au grad 4)

$T(f)=x_1^2x_2x_3 \longrightarrow (2,1,1,0,\dots,0) \rightsquigarrow S_1^{2-1}\cdot S_2^{1-1}S_3^{1} = S_1S_3$

$(1,1,1,1,\dots,0) \rightsquigarrow S_4$

$f=\alpha\cdot S_1S_3+\beta S_4$ (ecuația)

x_1	x_2	x_3	x_4	$\dots$ x_n	S_1	S_3	S_4	f	ecuația
1	1	1	1	0 ... 0	4	4	1	$3\cdot C_4^3=12$	$16+\beta=12 \Rightarrow \beta=-4$

$= S_1S_3-4S_4.$

Ex 3

$f(x,y,z)=(x-y)^2(x-z)^2(y-z)^2 =$

→ simetric + omogen

$T(f)=x^4y^2 \to (4,2,0) \rightsquigarrow S_1^2S_2^2$

$(4,1,1) \rightsquigarrow S_1^3S_3$

$(3,3,0) \rightarrow S_2^3$

$(3,2,1) \rightsquigarrow S_1S_2S_3$

$(2,2,2) \rightarrow S_3^2$

$= \underset{\overset{\shortparallel}{1.}}{\alpha}\cdot S_1^2S_2^2+\beta S_1^3S_3+\gamma\cdot S_2^3+\delta S_1S_2S_3+\varepsilon\cdot S_3^2$

x	y	z	S_1	S_2	S_3	$f(x,y,z)$
0	1	1	2	1	0	0
1	1	-2	0	-3	-2	0
1	-2	-2	-3	0	4	0
1	1	1	3	3	1	0

$\rightarrow 4+\gamma=0 \Rightarrow \boxed{\gamma=-4.}$

$\rightarrow 4\cdot 27+\varepsilon\, 4 \Rightarrow \boxed{\varepsilon=-27}$

$\rightarrow -27\beta\cdot 4-27\cdot 16=0 \Rightarrow \boxed{\beta=-4.}$

$\rightarrow 81-4\cdot 27\,\cancel{+2}\,\delta\, 4+27=0 \Rightarrow \boxed{\delta=18}$

$\boxed{Ex4}$ Fie pol. $p(x)=x^3-3x^2+2x+1 \in \mathbb{R}[x]$.
Să se det. dacă răd. lui $p(x)$ sunt. distincte ~~dacă~~ 2 câte două.

Dacă x_1, x_2, x_3 sunt răd lui $p(x)$
$\in \mathbb{C}$

$\rightarrow$ ele sunt distincte 2 câte 2 ~~dacă~~ $\Leftrightarrow (x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)\neq 0.$ $\Leftrightarrow$

discriminantul ec. de gr 3.

$S_1 = x_1+x_2+x_3 = \frac{3}{1}\left(-\frac{b}{a}\right)$

$S_2 = x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = 2\left(\frac{c}{a}\right)$

$S_3 = x_1x_2x_3 = -1\left(-\frac{d}{a}\right)$

$\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2\neq 0$ (dacă mai apare un $\ominus$ ridic la 2 pt a scăpa de acel minus în plus)
și acum este și simetric

$= 36+4\cdot 27-32-18\cdot 6-27 \rightarrow f(x,y,z)=(x-y)^2(x-z)^2(y-z)^2$ (din ex. anterior)

$= 4-27=-23\neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{f \text{ are doar răd. simple.}}$

$\cdot f(x_1,x_2)=(x_1-x_2)^2\neq 0 \Leftrightarrow$ ec. are răd simple

$= x_1^2+x_2^2-2x_1x_2 = (x_1+x_2)^2-4x_1x_2 = S_1^2-4S_2$

$P(x)=ax^2+bx+c \quad , a\neq 0.$

$S_1 = -\frac{b}{a}$

$S_2 = \frac{c}{a}$

$S_1^2 = \frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a} = \frac{b^2-4ac}{a^2}$ (ca să vezi dacă o ec. de grII are răd duble calculăm expresia)

$\boxed{Ex 5}$

• Fie $P(x) = x^3 - \hat{3}x^2 + \hat{2}x + \hat{1} \in \mathbb{Z}_{23}[x]$

Sunt distincte două câte două răd lui Δ?

Trb. să exp. diferențele:

$(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2 =$ în fct. de S_1, S_2, S_3 ca mai sus.

$S_1 = \hat{3}$

$S_2 = \hat{2}$

$S_3 = -\hat{1}$

→ Fac calculele ca în ex anterior → $= -\hat{23} = \hat{0}$

• 23 prim ⇒ inelul $\mathbb{Z}_{23}$ ⇒ corp. ⇒ unul din elem e 0 ⇒ ~~nu sunt dist~~. măcar două răd coincid

$\boxed{Gr\ III \to ec.\ lui\ Cardano}$

Temă: $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum x_1^2 x_2^2 = \sum\limits_{1 \le i < j \le n} x_i^2 x_j^2$, $n \geq 4$.

Algebră

09.04.2014.

SEMINAR 4

- $x+1 = \frac{1}{2}(2x+2) = \frac{1}{75}(75x+75) \leftarrow$ ireductibil în $\mathbb{R}[x]$.

- $\text{grad}(f\cdot g) = \text{grad} f + \text{grad} g$

Def: $f \in k[x]$ ireductibil în $k[x]$ dacă $\nexists\ g, h \in k[x]$ a.î.

$f = g\cdot h$ și $\text{grad} g, \text{grad} h \geq 1$

- Polinoame ireductibile de grad 1

Grad 1: $ax+b$; cu $a \neq 0$. $\rightarrow$ toate sunt ireductibile în $k[x]$.

Grad 2: $P(x) = ax^2+bx+c$; $\underset{a\neq 0}{\in k[x]}$ este ireductibil $\Leftrightarrow$ $P(x)$ nu are rădăcini în k.

- x^2+3x+2; în $\mathbb{Q}[x]$

$x^2+2x+x+2$

$x(x+2)+(x+2) = (x+2)(x+1)$

- $x^2+4x+2 =$ (descomp. în $\mathbb{Q}[x]$)

~~x^2+2x+2~~ $x_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{8}}{2} = -2\pm\sqrt{2}$.

$= (x-x_1)(x-x_2)$

$\hookrightarrow$ descomp. ireductibilă în $\mathbb{R}[x]$

- $x^2+3x+6 =$ descomp. în factori ireductibili în $\mathbb{R}$. $= \underbrace{\left(x - \frac{-3+\sqrt{15}i}{2}\right)\left(x - \frac{-3-\sqrt{15}i}{2}\right)}_{\text{descomp. ired. în } \mathbb{C}[x].}$

$\Delta = 9-24 < 0$.

$x_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{15}i}{2} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

Ex 1

- Descomp. în factori ireductibili următ. polinom:

$p(x) = 6x^4+5x^3-14x^2+x+2$.

$p(x) = 6x^4 + 5x^3 - 14x^2 + x + 2$

$(x=1)$ răd; $D_2 = \{\pm 1, \pm 2\}$

$(x-1)$:

$$\begin{array}{l|l}
6x^4 + 5x^3 - 14x^2 + x + 2 & (x-1) \\
\underline{-6x^4 + 6x^3} & 6x^3 + 11x^2 - 3x - 2 \\
/ \quad 11x^3 - 14x^2 + x + 2 & \\
\quad \underline{-11x^3 + 11x^2} & \\
\quad / \quad -3x^2 + x + 2 & \\
\quad \quad \underline{3x^2 - 3x} & \\
\quad \quad / \quad -2x + 2 & \\
\quad \quad \quad \underline{2x - 2} & \\
\quad \quad \quad / \ / &
\end{array}$$

$P(x) = (x-1)(6x^3 + 11x^2 - 3x - 2) = (x-1)(x+2)(\underbrace{6x^2 - x - 1})$

$\Delta = +1 + 24 = 25.$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{12}$

$x_1 = \frac{1+5}{12} = \frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{1-25}{12} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
	6	5	-14	1	2
1	6	11	-3	-2	0
2	6	23	43	84	
-2	6	-1	-1	0	
$\frac{1}{2}$					

$\frac{a}{b}$; $a \mid -1$, $b \mid 6$; $\Rightarrow$ $a = 1$, $b = 2, 3, 6$ $\Rightarrow$

coef. dominant

$\boxed{P(x) = (x-1)(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)6} = \boxed{(x-1)(x+2)(2x-1)(3x+1)}$

$\downarrow$

ireduc. în $Z[X]$, $Q[X]$, ...

Ex. 2

Descomp. următ. pol. în factori ireductibili în $\mathbb{Q}[x]$; $\mathbb{R}[x]$; $\mathbb{C}[x]$

$f_n(x) = x^n - 1$, $n = \overline{1,6}$

$n=1$: $f_1(x) = x - 1$ ired. în $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$.

$n=2$: $f_2(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ — "— " —

$n=3$: $f_3(x) = \underbrace{(x-1)(x^2+x+1)}_{\to \text{ în } \mathbb{Q}[x],\ \mathbb{R}[x]}$ $=$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$\to \varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$\bar{\varepsilon} = \varepsilon^2 \left(\bar{\varepsilon} = \frac{|\varepsilon|^2}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon^2 \right)$

$(x-\varepsilon)(x-\bar{\varepsilon}) = x^2 \dots$

$|\varepsilon| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon^3 = 1}}$

$= (x-1)(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)$ în $\mathbb{C}[x]$

$n=4$: $f_4(x) = x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = \underbrace{(x-1)(x+1)(x^2+1)}_{\substack{\text{în } \mathbb{Q}[x] \\ \mathbb{R}[x]}} = \underbrace{(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)}_{\text{în } \mathbb{C}[x]}$.

$(x-i)^2$

$n=6$: $f_6(x) = x^6 - 1 = (x^3-1)(x^3+1) = (x-1)\underbrace{(x^2+x+1)}_{\varepsilon,\ \bar{\varepsilon}}(x+1)\underbrace{(x^2-x+1)}_{(*)}$ desc. în $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$

$-\varepsilon$, $-\varepsilon^2 = -\bar{\varepsilon} =$

$= -\bar{\varepsilon}$

$= (x-1)(x+1)(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)\underbrace{(x+\varepsilon)(x+\varepsilon^2)}_{(*)} \to$ desc. în $\mathbb{C}[x]$.

$n=5$: $x^5 - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

$\hookrightarrow$ n-are răd. în $\mathbb{Q}$

Dacă $x^4+x^3+x^2+x+1$ ar fi reductibil în $\mathbb{Q}[x]$

$(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$ cu $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$

$= x^4 + cx^3 + dx^2 + ax^3 + acx^2 + adx + bx^2 + bcx + bd$

$= x^4 + (c+a)x^3 + (d+b+ac)x^2 + (ad+bc)x + bd$

$$\begin{cases} c+a=1 \Rightarrow c=1-a \\ b+d+ac=1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{b}+b+a(1-a)=1 \\ \frac{a}{b}+b(1-a)=1 \end{cases} \\ ad+bc=1 \\ b\cdot d=1 \Rightarrow d=\frac{1}{b} \end{cases} ;\ b \text{ și } d \neq 0.$$

$$\begin{cases} 1+b^2+ab(1-a)-b=0 \\ a+b^2(1-a)-b=0 \end{cases}$$

$$4b^2-a=4(1-a)(a-b)$$

$$b^2=(1-a)[b(a-b)-1]$$

$$< b=\pm 1 \ \ldots \text{ab} >$$

$$\varepsilon\bar{\varepsilon}=|\varepsilon|^2=1 \Rightarrow \bar{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}$$

În cazul nostru $\frac{1}{\varepsilon}=\varepsilon^4$

$\underline{n=5}$ $\quad f_5(x)=x^5-1$

$\mathbb{C}[X]:\quad x^5=1$

$$\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n};\ k=\overline{0,4}$$

$$=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k$$

$$x_0=1$$
$$x_1=\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$$
$$x_2=x_1^2$$
$$x_3=x_1^3$$
$$x_4=x_1^4$$

$\cos\frac{2\pi}{5}\notin\mathbb{Q}\Rightarrow$

. Desc. în $\mathbb{Q}[X]$.

Deci: $x^4+x^3+x^2+x+1$ este ired. în $\mathbb{Q}[X]$.

. Găsiți răd.

$$x^5-1=(x-1)(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)(x-\underset{(x-\bar{\varepsilon})}{\overset{}{\varepsilon^3}})(x-\underset{(x-\bar{\varepsilon})}{\varepsilon^4}) \text{ în } \mathbb{C}[X]$$

$$= (x-1)[(x-\varepsilon)(x-\bar{\varepsilon})][(x-\varepsilon^2)(x-\bar{\varepsilon}^2)] =$$

$$=(x-1)[(x-\varepsilon)(x-\bar{\varepsilon})\ldots$$

$$\cdot\ (x-\varepsilon)(x-\bar{\varepsilon})=x^2-(\varepsilon+\bar{\varepsilon})x+1=x^2-2\cos\frac{2\pi}{5}\cdot x+1$$

$$(x-\varepsilon^2)(x-\bar{\varepsilon}^2)=x^2-2\cos\frac{4\pi}{5}x+1.$$

$\notin\mathbb{Q}[X]$ $\quad \to \notin\mathbb{Q}[X]$

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0.$$

$$x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$$

$$t^2-2+t+1=0,\ t^2+t-1=0$$

$\mathbb{R}[X]$

$$= (x-1)\left(x^2-2\cos\frac{2\pi}{5}x+1\right)\left(x^2-2\cos\frac{4\pi}{5}x+1\right)$$

$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) \leftarrow \text{desc. în } \mathbb{R}[X].$$

-4-

$t_1=?\Rightarrow x+\frac{1}{x}=t_1 \to x_1, x_2$

$t_2=?\quad x+\frac{1}{x}=t_2 \to x_3, x_4$

Algebră

• Recuperare ultimul seminar:

Marți 20 V - S13 → în sala 1; ora 8^{00}-10^{00}.

$f_n(x) = x^n - 1 \rightsquigarrow$ desc. în factori ired în $\mathbb{Q}[x]$.

$x^n = 1 \to x_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = \Big(\underbrace{\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}}_{\varepsilon}\Big)^k = \varepsilon^k.$

$\mathbb{Q}[x]\ (x-1)(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)\dots(x-\varepsilon^{n-1})$

• Polinoamele:

$n \geq 1$: $\Phi_n(x) = \prod_{\substack{1 \leq k < n \\ (k,n)=1}} (x-\varepsilon^k)$ s.n. „al n-lea polinom ciclotomic".

• Prop: 1) $\Phi_n(x) \in \mathbb{Q}[x]$

2) $\Phi_n(x)$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[x]$.

3) $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d \rightsquigarrow$ calcul recurent.

$\boxed{n=1}$: $\Phi_1(x) = 1$

$\boxed{n=2}$: $\Phi_2(x) = x+1$

$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{2} + i\sin\frac{2\pi}{2} = -1$

răd. sunt $\varepsilon^0, \varepsilon^1 = -1$

$\boxed{n=3}$: $\Phi_3(x) = (x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2) = (x-\varepsilon)(x-\bar{\varepsilon}) = x^2+x+1$

$\varepsilon^3 = 1$; $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\varepsilon^2 = \frac{1}{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}$

$\boxed{n=4}$: $\Phi_4(x) = (x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2) = (x-i)(x+i) = x^2+1$

$\varepsilon^4 = 1 \to \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} = 0 + i = i$

$\Phi_5(x) = (x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)(x-\varepsilon^3)(x-\varepsilon^4)$; Folosim rel. de recurs.

$x^5-1=\Phi_1\cdot\Phi_5$

$\Rightarrow \Phi_5=\frac{x^5-1}{\Phi_1}=\frac{x^5-1}{x-1}=$

$=\frac{\cancel{(x-1)}(x^4+x^3+x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}}=x^4+x^3+x^2+x+1$

$\boxed{n=6}$

$x^6-1=\Phi_1\cdot\Phi_2\cdot\Phi_3\cdot\Phi_6\Rightarrow\Phi_6=\frac{x^6-1}{\Phi_1\cdot\Phi_2\cdot\Phi_3}=$

$=\frac{x^6-1}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{(x^3-1)(x^3+1)}{(x+1)\cancel{(x^3-1)}}=\frac{x^3+1}{x+1}=\frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\cancel{(x+1)}}=$

$=x^2-x+1=\Phi_6.$

$\Phi_6=x^2-x+1.$

• Criteriul lui Eisenstein :

Fie $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x_1+a_0\in\mathbb{Z}[X]$ cu $a_n\neq0$. Dacă $\exists$ p prim a.î. $p\nmid a_n$

$p\mid(a_{n-1},\ldots,a_1,a_0)$

$p^2\nmid a_0.$

Atunci f este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

Ex. 1) $f(x)=x^7-3x^4+12$ (Aleg p să dividă toți coef. mai puțin pe primul (de la x^7))

$p=3$; $3\nmid1$, $3\mid3$, $3^2\nmid12$ $\xRightarrow{\text{Crit. Eisenstein}}$ $f(x)$ este ired. în $\mathbb{Q}[X]$

2) $f(x)=2x^8+7x+14$

$p=7$; $7\nmid2$, $7\mid7$; $0,14$, $7^2\nmid14$ $\xrightarrow{\text{Crit. Eisenstein}}$ f este ired. în $\mathbb{Q}[X]$.

③ • Arătați că $p(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ este ired. în $\mathbb{Q}[X]$, folosind crit. lui Eisenstein.

Metoda 1:

Facem o schimbare de variabilă

$x \longmapsto x+1$

$p(x+1)=(x+1)^4+(x+1)^3+(x+1)^2+(x+1)+1 \;=$

Pascal:

C_2^k 1 2 1

C_3^k 1 3 3 1

C_4^k 1 4 6 4 1

$=$ $x^4+4x^3+6x^2+4x+1$

x^3+3x^2+3x+1

x^2+2x+1

$x+1$

1

$\left.\begin{array}{l} x^4+5x^3+10x^2+10x+5 \\ \text{Crit Eisenstein } p=5 \end{array}\right\} \Rightarrow p$ este ired în $\mathbb{Q}[X]$

• Met 2)

Dacă raționament prin absurd,

$p(x)=$ reductibil $\Rightarrow p(x)$ se scrie ca grad de 2 polin,

adică $p(x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$ cu grad g_1, grad $g_2 \geq 1$

$p(x+1)=g_1(x+1)+g_2(x+1)$ reductibil în $\mathbb{Q}[X]$ Ab.

④ Fie p prim

Arăt că pol $f(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\dots+x+1$ este ireduct. în $\mathbb{Q}[X]$

$c+a=1 \Rightarrow c=1-a$

Alg. lui Euclid.

1) Date $a, b \in \mathbb{Z} \rightsquigarrow$ găsim c.m.m.d.c (a,b) gcd

2) Similar pt polinoame.

Date $f(x); g(x) \in k[x]; \exists \gcd(f,g); \in k[x]$

Alg lui Euclid (extins)

1) Același lucru + găsim $u, v \in \mathbb{Z}$ a.î. $\gcd(a,b) = ua + vb$.

2) Polin. Același lucru + găsim $u(x), v(x) \in k[x]$

$\gcd(f,g)(x) = u(x) \cdot f(x) + v(x) \cdot g(x)$

Ex. $a = 156$; $b = 73$

$$\begin{array}{r|l} 156 & 73 \\ \underline{146} & 2 \\ =10 & \end{array}$$

$156 = 73 \cdot 2 + 10$

$73 = 10 \cdot 7 + 3$

$10 = 3 \cdot 3 + 1$

$3 = 3 \cdot 1 + 0$

$1 = \gcd(73, 156)$

$1 = u156 + v73$

$1 = 10 - 3 \cdot 3$.

$1 = 156 - 73 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 156 - 73 \cdot 2 - 3(73 - 10 \cdot 7) = 156 - 73 \cdot 4 + 3 \cdot 7 \cdot (156 - 73 \cdot 2) = \underbrace{22}_{u} \cdot 156 - \underbrace{46}_{v} \cdot 73 = (22 + 73)156 - (46 + 156)73 = -51 \cdot 156 + 110 \cdot 73$

$= (22 - 73)156 - (46 - 156)73$

$= \underbrace{95}_{u} \cdot 156 - \underbrace{202}_{v} \cdot 73$

$1 = u \cdot 156 + v \cdot 73$

$\gcd(1, 156)$

$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 156 \Rightarrow \widehat{156} \in U(\mathbb{Z}_{73})$

$\hat{1} = \hat{22}\,\hat{156} - \underbrace{\hat{46}\,\hat{73}}_{\hat{73}}$ $\qquad H_{n+1} = \frac{1}{2} H_n$

$\hat{1} = \hat{22}\,\hat{156} - \underbrace{\hat{46}\,\hat{73}}_{\hat{0}}$

$(\hat{156})^{-1} = \hat{22}$

$f(x) = x^{156}$
$g(x) = x^{73} - 1$

$$\begin{array}{r|l} x^{156} - 1 & x^{73} - 1 \\ \hline -x^{156} + x^{83} & x^{83} + x^{10} \\ \hline x^{83} - 1 & \\ -x^{83} + x^{10} & \\ \hline x^{10} - 1 & \end{array}$$

$x^{156} - 1 = (x^{73} - 1)(x^{83} + x^{10}) + x^{10} - 1$

$$\begin{array}{r|l} x^{73} - 1 & x^{10} - 1 \\ \hline -x^{73} + x^{63} & x^{63} + x^{53} + x^{33} + x^{23} + x^{13} + x^{3} \\ \hline x^{63} - 1 & \end{array}$$

$x^{73} - 1 = (x^{10} - 1)(x^{63} + x^{53} + \dots + x^{3}) + x^{3} - 1$

$x^{10} - 1 = (x^{3} - 1)(x^{7} + x^{4} + x) + x - 1$

$x^{3} - 1 = (x - 1)(x^{2} + x + 1) + 0$

$\gcd(x^{156} - 1, x^{73} - 1) = x - 1$

$\gcd(x^{n} - 1, x^{m} - 1) = x^{\gcd(n,m)} - 1$

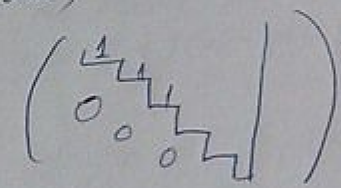
$\pi \emptyset d = \pi \emptyset d$

$d \mid \gcd(m,n) \rightarrow = d \mid \gcd(n,m)$

• Rezolvați sistemul de ec. cu Metoda eliminării lui Gauss:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \longrightarrow \text{Forma eșalon}$$

Fac transformări elementare (schimb de 2 linii ; înmulț. unei linii)



Sistem echivalent ce se rezolvă mai repede.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x + 6y + 8z = 4 \end{cases}$$

Caut pivoți (un elem. nenul și fac 0 sub el ; scot linia L_2 de 2 ori)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 8 & 4 \end{array}\right) =$$

$L_2 = L_2 - 2L_1$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & -6 \end{array}\right)$$

pivoți $\xrightarrow{\text{coresp. la}}$ variab. principale: x, y.

restul $\xrightarrow{\text{la}}$ variab. sec.: $z = t \in \mathbb{R}$.

$$2y + 2t = -6 \Rightarrow y = \frac{-6-2t}{2} = -3 - t.$$

$$x + 2(-3-t) + 3t = 5 \Rightarrow x = 11 - t.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11-t \\ -3-t \\ t \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R}.$$

$$= \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R}.$$

Algebră

14.05.2014.

SEMINAR 6

Următ. seminar → Marți 08:00

1) Rezolvați sistemul

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+6y+15z=2 \\ 3x+4y=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 15 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3-3L_1=L_3]{L_2-2L_1=L_2}$$

pivot (fac zerouri sub el) → acum fac zerouri sub ultimul pivot (adică 2 de pe linia 2)

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 2 \\ 0 & -2 & -9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3=L_3+L_2}$$

al II-lea pivot

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{2} \end{array}\right)$$

(Acum este zero sub al II-lea pivot (*) și gata nu mai pot face zerouri)

(*) pivot

$0x+0y+0z=2$ ⇒ nu are soluții ⇒ este incompatibil

↳ $rang A \neq rang \bar{A}$

• Obs!

Sistemul este incompatibil ⇔ găsim pivot (nenul) pe ultima coloană.

• Prop! rang A – nr de pivoți dintr-o formă eșalon (ca mai sus am un pivot pe fiecare coloană și sub ei fac zerouri)

Am găsit 2 pivoți în A → $rang(A)=2$!

– " – 3 pivoți în $\bar{A}$ → $rang(\bar{A})=3$!

Ex 2:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 15 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{array}\right)}_{\bar{A}} \quad \text{cu } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 15 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+6y+15z=2 \\ 3x+4y=-2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[L_3=L_3-3L_1]{L_2=L_2-2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 9 & 2 \\ 0 & -2 & -9 & \end{array}\right) \xrightarrow{L_3=L_3+L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ rang(A) = rang$(\bar{A}) = 2$ (am 2 pivoți)

• **Obs!** Necunoscute principale coresp la coloanele cu pivoți.
Necunoscute secundare coresp. la coloanele fără pivoți.

• Nec. sec.: $z = t \in \mathbb{R}$.

$2y + 9z = 2 \Rightarrow 2y = 2 - 9t \Rightarrow y = 1 - \frac{9}{2}t$

$x + 2y + 3z = 0 \Rightarrow x = -2 + 9t - 3t = -2 + 6t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+6t \\ 1-9/2\,t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 6 \\ -9/2 \\ 1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}.\ (*)$$

• Interpretare geometrică:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nu aparține dreptei $(*)$ pt că $\begin{cases} -2+6t=0 \\ 1-9/2\,t=0 \\ t=0 \end{cases}$ nu se pot satisface toate 3.

$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in$ dreptei $(*)$ pt că pot da lui t val 0.

Def!

~~$\notin$ dropter~~

$v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ sunt vectori liniar independenți dacă:
$\forall\, a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ a.î. $a_1v_1 + \dots + a_kv_k = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$.

Ex:

1) Fie $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

Fie $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$

a) Det. dacă v_1, v_2, v_3, v_4 sunt liniar indep (sist. lin. indep)

b) —"— $\dim_{\mathbb{R}} V$ și o bază în V.

Fie $\alpha, \beta, \gamma, \tau \in \mathbb{R}$ a.î.: $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \tau v_4 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \text{Sistem omogen și este sigur compatibil}$$

Trebuie să găsesc rangul matricei (rangul maxim)

$$\xrightarrow[\substack{L_3 = L_3 - L_1 \\ L_4 = L_4 - L_1}]{L_2 = L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & \cancel{\boxed{-3}} & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2 \leftrightarrow L_4 \\ \text{(interschimb liniile)} \\ \text{(urc pivotul)}}]{\substack{\cancel{L_2 = L_2 - 3L_4} \\ \cancel{L_3 = L_3 - 2L_4}}} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\xrightarrow[L_4 = L_4 - 3L_2]{L_3 = L_3 - 2L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

putem interschimba L_4 cu L_3 dar în acest caz o putem lăsa așa.

$\Rightarrow \mathrm{rang}(A) = 3 \Rightarrow$ rangul matricei A nu este maxim (maxim în acest caz este 4) $\Rightarrow$ $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ nu sunt liniari indep, sunt liniar dependenți (i.e depind unii de alții)

$\hookrightarrow a_1v_1 + \dots + a_4v_4 = 0$. (pe unul îl pot scrie în funcție de ceilalți)

! Nu am găsit pivot pe coloana 3 $\Rightarrow$ v_3 este combinație liniară de v_1 și de v_2 (depinde doar de ce este înaintea ei)

• Nu găsesc pivot pe coloana i $\Leftrightarrow$ vectorul i este comb. liniară de $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}$; $v_i \in \underbrace{\langle v_1, v_2, \dots, v_{i-1} \rangle}_{\text{combinație liniară}}$

b) la pct a) se elimină v_3 că nu are pivot

$\Rightarrow$ o posibilă bază este $\{v_1, v_2, v_4\}$ $\to$ coloanele cu pivot

! • dim unui spațiu vectorial $\Rightarrow$ câte elem sunt într-o bază

$\to \boxed{\dim_{\mathbb{R}} V = 3}$ = care este dată de nr de pivoți; iar nr. de pivoți este rangul matricei!

c) Completați $\{v_1, v_2, v_4\}$ la o bază în $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{pmatrix} | & | & a & | \\ v_1 & v_2 & b & v_4 \\ & & c & \\ | & | & d & | \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 275 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$\hookrightarrow$ pun aici o valoare și văd toate transf. (înainte era zero)

Știu că $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ bază în $\mathbb{R}^4$

Știu că $\{v_1, v_2, v_4\}$ este sist. lin. indep. în $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} | & | & | & | & | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_4 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ | & | & | & | & | & | & | \end{pmatrix}$$

caut pivoți

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & & & \\ 0 & \boxed{-1} & & \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

sunt pivoți găsiți anterior

coloana pe care găsim pivotul nr 4 completează pe v_1, v_2, v_4 la o bază pt $\mathbb{R}^4$

nu găsesc pivot

Acum mai caut pivot pe ultima linie.

• **Întrebare**: poate fi completat la o bază în $\mathbb{R}^4$ $\{v_1, v_2, v_4\}$, cu vectori din e_1, e_2, e_3 sau e_4?

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Temă: Verificați care din ei completează pe $\{v_1, v_2, v_4\}$ și care nu.

Ex: Fie $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Fie $W_1 = \langle v_1, v_2 \rangle$; $W_2 = \langle v_3, v_4 \rangle \subset \mathbb{R}^3$

a) Det. baze + dim în W_1, W_2

b) — " — — " — $W_1 + W_2$ și în $W_1 \cap W_2$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$W_1, W_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \to \text{rg} = -4 \Rightarrow \text{rg matricei} = 2.$

Dacă sunt doar 2 vectori rangul max = 2.

Rang este 1 când toți minorii de ordin 2 = 0

$W_2 = \text{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$

v_1, v_2 sunt nenuli și nu sunt proporționali $\Rightarrow \{v_1, v_2\}$ = sist. lin. indep.

$\{v_1, v_2\}$ bază în W_1

$\{v_3, v_4\}$ bază în W_2 $\Big|$ $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$

b) $W_1+W_2=\{x+y \mid x\in W_1, y\in W_2\}=\langle \underbrace{v_1,v_2,v_3,v_4}\rangle$.

O combinație liniară ; spațiul generat de cei 4 vectori

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3=L_3-3L_1]{L_2=L_2-2L_1} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-4} & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3=L_3-2L_2]{}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-4} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-5} & -2 \end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ rang $A=3$ $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(W_1+W_2)=3$

$\Rightarrow \{v_1,v_2,v_3\}$ bază în W_1+W_2

și baza $\{v_1,v_2,v_4\}$ este bună

$$\left.\begin{array}{l} W_1+W_2 \subseteq \mathbb{R}^3 \\ \dim_{\mathbb{R}}(W_1+W_2)=\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3=3 \end{array}\right\} \Rightarrow W_1+W_2=\mathbb{R}^3$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dim(W_1\cap W_2)=\dim(W_1)+\dim W_2-\dim(W_1+W_2) \\ \qquad =2+2-3=1 \end{array}}$$ Th. Grassmann!

$\Rightarrow$ Intersecția este o dreaptă.

Algebră

20.05.2014

SEMINAR 7

1) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$W_1 = \langle v_1, v_2 \rangle$; $W_2 = \langle v_3, v_4 \rangle$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ bază în $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$

b) bază + dim în $W_1 \cap W_2$?

Th. Grassman : $\dim(W_1 \cap W_2) = \underset{2}{\dim W_1} + \underset{2}{\dim W_2} - \underset{3}{\dim(W_1 + W_2)} = 1$

bază → Fie $w \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow w \in W_1$ și $w \in W_2$

$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a.î. $w = \alpha v_1 + \beta v_2$.

$\exists \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ a.î. $w = \gamma v_3 + \delta v_4$ $\Big/ \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 - \gamma v_3 - \delta v_4 = 0.$

$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$

$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} | & | & | & | \\ v_1 & v_2 & -v_3 & -v_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$

→ din seminarul trecut: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{eșalon}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-4} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-5} & -2 \end{pmatrix}$

Trebuie să notez $-\gamma = \gamma'$ $\Big\}$ pt că matricea diferă de
$-\delta = \delta'$ $\Big\}$ cea din sx nostru prin (−)

$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4 = 0$

$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ Folosim forma eșalon calculată anterior.

Var. secundare: $\delta' = t \in \mathbb{R} \Rightarrow \delta = -t$

$-5\gamma' - 2\delta' = 0 \Rightarrow \gamma' = -\frac{2}{5}\delta' = -\frac{2}{5}t \Rightarrow \delta = \frac{2}{5}t$

$w = \gamma v_3 + \delta v_4 = \frac{2}{5} t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -\frac{4}{5} t \\ -\frac{3}{5} t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \to$ sist. de generatori liniar ~~ind~~ pt că e un sg. vector.

$W_1 \cap W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ bază în $W_1 \cap W_2$.

(pot înmulți cu 5 pt că e proporțională și rămâne la fel)

2) Fie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+4z \\ 2x+3y+7z \\ x-y+z \end{pmatrix}$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$.

1) Arătați că T este aplicație liniară.

2) Det. matricea lui T în baza canonică $[T]_{can}^{can}$ (notație pt baza canonică)

3) Det. bază + dim pentru $\operatorname{Im} T$ și $\ker T$.

4) Det. matricea lui T în baza $\mathcal{B} = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\}$

5) Pol. caracteristic al lui T: $P_T(x)$.

6) Valorile și vectorii proprii

7) Forma canonică Jordan. Este T diagonalizabil?

1) ~~Def~~: $T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2)$; $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall\, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$

$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ ...

2) $can = \left\{ \underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\} \to$ coloanele matricii identitate este forma canonică.

Ker f $\ker T = \{ v \in \mathbb{R}^3 / T(v) = 0 \}$

$$\Downarrow$$

$$A v = 0.$$

$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rezolv sistemul (și așa găsesc nucleul)

pt a-l rezolva aduc la forma eșalon $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Nec. secundare $z = t$

Nec principale x, y

→ de jos în sus în matrice

$-y - z = 0 \Rightarrow y = -z = -t$

$x + 2y + 4z = 0 \Rightarrow x = +2t - 4t = -2t \Rightarrow \underline{x = -2t}$

$\ker T = \left\{ \begin{pmatrix} -2t \\ -t \\ +t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{\text{spațiul generat}} \Rightarrow$

$\Downarrow$

$t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \dim \ker T = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ bază în $\ker T$

. Th rang-defect !

$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = \cancel{3+2=5} \Rightarrow \underline{\dim \ker T = 1}$

(3) (2)

dim img este dată de nr de pivoți din matrice

4) $T(v_1)=\begin{pmatrix}6\\10\\0\end{pmatrix}$; $\alpha\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}\beta+\gamma=6\\ \alpha+\gamma=10\\ \alpha+\beta=0\end{cases}$$

$\alpha=-\beta$ $\begin{cases}\beta+\gamma=6\\ -\beta+\gamma=10\end{cases}$ $\Rightarrow \gamma=8$

$\beta=-2 \Rightarrow \alpha=2$

$\underbrace{[T(v_1)]_B}_{\text{coord lui } T(v_1) \text{ în baza } B.}=\begin{pmatrix}2\\-2\\8\end{pmatrix}$

• Analog $T(v_2)$; $T(v_3)$

La final: $\underset{\substack{\downarrow\\ \text{matricea lui}\\ T \text{ în baza } B.}}{[T]_B}=\begin{pmatrix}2 & - & -\\ -2 & - & -\\ 8 & - & -\end{pmatrix}$

Sau: se poate face cu matricea de schimbare de bază.

Formula: dacă $A=[T]_{B_1}$ şi $B=[T]_{B_2}$

$S=$ matricea de trecere de la B_1 la B_2

$\Rightarrow B=S^{-1}AS$.

• Cine e matricea de trecere de la $B_1=\{e_1,e_2,e_3\}$ can. la $B_2=\{v_1,v_2,v_3\}$

Iau fiecare vector nou şi îl exprim în funcţie de baza veche şi colectez coord. pe coloane în matricea S.

Pe $v_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ în fct. de baza canonică

$S=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$; deci $B=\overset{S^{-1}}{\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}}\overset{A}{\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & 7\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}}\overset{S}{\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}}$

Dacă înmulțesc ar trebui să dea $[T]_B = \begin{pmatrix} 2 & - & - \\ -2 & - & - \\ 8 & - & - \end{pmatrix}$

• <u>Calcul S^{-1} cu pivoți</u> (cu metoda eliminării

Dat $S \in M_n(\mathbb{R})$

$$\left(\underbrace{S}\; \middle| \; I_n \right)_{n\times 2n \text{ (2n coloane)}} \xrightarrow[\text{fac 1 pivoți}]{\text{Forma eșalon,}} \left(I_n \; \middle| \; S^{-1} \right)$$

rangul va fi n => voi avea n pivoți și dacă pot aduce pivoți pe fiecare n coloane => e inversabilă

↳ dacă reușesc să fac în stânga I_n, atunci în dreapta va fi S^{-1}.

Dacă în forma eșalon găsim I_n în partea stg., atunci în dreapta găsim S^{-1}.

5) $P_T(x) = P_A(x)$ (este egal cu polinomul caract. al matricii A)

$P_A(x) = \det(xI_3 - A)$

• Valorile proprii sunt răd. pol.

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -4 \\ -2 & x-3 & -7 \\ -1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = (\dots) \quad \boxed{x^3-5x^2+6x}$$

Pt <u>valorile proprii</u> sau Spect(A) (Spectrul matricii A)

$x^3-5x^2+6x=0$

$x(x^2-5x+6) = x(x-2)(x-3)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\underline{\text{Spec}\,A}} = \{0,2,3\}$. (Sunt cel mult n; în acest caz cel mult 3)

Multiplicități algebrice: $m_a(0) = m_a(2) = m_a(3) = 1$
(de câte ori apare o răd).

ex: $x^2(x-2)^5 \to (x-2)$ are multiplic. alg 5; iar $x \to 2$

• Vectori proprii?

Pentru fiecare $\lambda \in Spect(A)$ (λ valoare proprie) $\Rightarrow \exists\, v \neq 0$ a.î. (pentru fiecare sa fie proprii cu vect. de la care am plecat)

$A \cdot v = \lambda v$ (Av sa fie propor.)

pt λ: $V_\lambda = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot v = \lambda v \} = \ker(\lambda I_3 - A)$

$0 = \lambda v - Av$

$0 = (\lambda I_3 - A) \cdot v$

pentru $\boxed{\lambda = 0} \Rightarrow V_0 = \ker(0 I_3 - A) = \ker(-A) = \ker(A) =$

$= \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Acei vectori care înmulț. cu A dau zero.

$\boxed{\lambda = 0}$: • Multiplicitatea geometrică: $m_g(0) = \dim_{\mathbb{R}} V_0 = 1$

e generat de un și vector $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda = 2}$,

$V_2 = \ker(2 I_3 - A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - ($

$V_2 = \ker \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{înlocuiesc în } P_A(x) \text{ pe } x \text{ cu ... (2) în acest caz}} \xrightarrow[L_3 = L_3 + L_1]{L_2 = L_2 + 2L_1} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -4 \\ 0 & -5 & -15 \\ 0 & \boxed{-1} & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3}$

Rezolv. sist. cu această matrice

$\xrightarrow{L_3 = L_3 - 5L_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -4 \\ 0 & \boxed{-1} & -3 \\ 0 & -5 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -4 \\ 0 & \boxed{-1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Rezolv. sist.

Nec. sec. $z = t \Rightarrow -y - 3t = 0 \Rightarrow y = -3t$

$x - 2y + 4t = \cancel{-6t}\ -2t$

$\Rightarrow V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -2t \\ -3t \\ t \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ bază în V_2.

$\Rightarrow$ Multiplicitatea geometrică $m_g(2) = 1$. (câți vectori sunt în bază).

$\boxed{\lambda=3}$

$V_3 = Ker\begin{pmatrix} \boxed{2} & -2 & -4 \\ -2 & 0 & -7 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 = L_3 + \frac{1}{2}L_1]{L_2 = L_2 + L_1} Ker\begin{pmatrix} \boxed{2} & -2 & -4 \\ 0 & \boxed{-2} & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

Nec sec. $z = t$.

$-2y - 11z = 0 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{11}{2}t}$

$2x = 2y + 4z \,/ :2 \Rightarrow x = y + 2z \Rightarrow x = -\frac{11}{2}t + 2t \Rightarrow \boxed{x = -\frac{7}{2}t}$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{pmatrix} -7/2\, t \\ -11/2\, t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\right\} = t\begin{pmatrix} -7/2 \\ -11/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{m_g(3) = 1}$

<u>La noi</u>

$\forall \lambda \in Spect\, A \Rightarrow m_a(\lambda) = m_g(\lambda) \Rightarrow A$ este diagonalizabilă

! Dacă pentru orice $\lambda \in Spect\, A$: ($m_a(\lambda) = m_g(\lambda) \Rightarrow$

• A este diagonalizabilă sau analog T este diag...

$S^{-1}AS = \Delta$ (este diagonală)

• Dacă $T \to$ diagonalizabilă $\Rightarrow \exists$ o bază B în $\mathbb{R}^3$ a.î. $[T]_B$ este diagonală Δ.

$\Rightarrow$ <u>Deci</u>: la noi A este diagonalizabilă

$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $S = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 7 \\ -1 & -3 & 11 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

valori proprii

baze în $V\lambda$ coresp.

• Avem : $\boxed{S^{-1} \cdot A \cdot S = \Delta.}$

• Jordan

Forma diagonal canonică

$$xI_3 - A = \begin{pmatrix} x-1 & -2 & -4 \\ -2 & x-3 & -7 \\ -1 & 1 & x-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 =$ c.m.m.d.c. (1- minori) (elem. din matrice)

$=$ c.m.m.d.c. $(x-1, -2, -4, \dots)$ (dacă e o constantă înseamnă că pol. sunt prime între ele și dă 1) $= 1$.

$\Delta_2 =$ c.m.m.d.c. (2- minori) $=$ c.m.m.d.c. $\left(\begin{vmatrix} -2 & x-3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right) = -2+x-3 = \boxed{x-5}$

$, \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ x-3 & -7 \end{vmatrix} \Rightarrow$ c.m.m.d.c. $= 1$

$14+4(x-3)$

$\cancel{4x-12+14} = 4x+2 =$

$= x+\frac{1}{2}$ (ireduc)

$\Delta_3 = P_A(x) = x(x-2)(x-3)$

Δ_1
Δ_2
Δ_3 $\longrightarrow$ $d_1 = \Delta_1 = 1$

$d_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = 1$

$d_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = x(x-2)(x-3)$

Acum descomp. fiecare d_i în factori ired. atașez câte o celulă pt cei de grad mai mare sau egal cu 1 atașez câte o celulă Jordan

$x \rightsquigarrow x-0.$ $\quad J_k(0) = J_1(0) = (0) \to$ matr formată doar din 0.

(k = puterea)

$x-2 \longrightarrow J_1(2) = (2) \to$ matr formată doar din 2.

$x-3 \longrightarrow J_1(3) = (3) \to \dots \leftarrow \quad 4 \text{—} 5$

• Deci forma can. Jordan:

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix} \to \text{în rest zero.}$$

• Dacă J este matrice diagonală $\Rightarrow$ A este diagonalizabilă. $\Rightarrow$

$\Rightarrow D = J$.

Ex 2:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad J = ?$$