

Tema 4

$\times \backslash y$	1	2	3	
1	0,22	0,11	0,02	0,35
2	0,2	0,15	0,1	0,45
3	0,06	0,02	0,02	0,2
	0,48	0,33	0,13	1

a) ~~$P(X = (0,48, 0,33, 0))$~~

$$P^f(x) : (0,48 \quad 0,33 \quad 0,13)$$

$$P^f(y) : (0,35 \quad 0,5 \cdot 0,2)$$

b) $X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0,35 & 0,45 & 0,2 \end{pmatrix}$

$$Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0,48 & 0,33 & 0,13 \end{pmatrix}$$

$$E[X] = 0,35 + 2 \cdot 0,45 + 3 \cdot 0,2 = 1,85$$

$$E[X^2] = 1 \cdot 0,35 + 4 \cdot 0,45 + 9 \cdot 0,2 = 3,95$$

$$\text{var}(x) = E[X^2] - E^2[X] = 3,95 - 1,85^2 = 0,52$$

$$E[Y] = 1 \cdot 0,48 + 2 \cdot 0,33 + 3 \cdot 0,13 = 1,71$$

$$E[Y^2] = 0,48 + 4 \cdot 0,33 + 9 \cdot 0,13 = 3,51$$

$$\text{var}(y) = E[Y^2] - E^2[Y] = 3,51 - (1,71)^2 = 0,58$$

$$\text{Var}(Y|X) = E[Y \cdot E(Y|X)^2 | X]$$

$$E(Y|X) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$$

$$Y - E(Y|X) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0,28 & 0,07 & 0,32 & 0,13 & 0,2 \end{pmatrix}$$

$$(Y - E(Y|X))^2 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & Y \\ 0,112 & 0,1008 & 0,0182 & 0,150,020,090,11 \end{pmatrix}$$

c) $\text{Var}(Y) = E[\text{Var}(Y|X)] + \text{Var}(E[Y|X])$

$$\text{Var}(Y|X) = E[Y^2|X] - E[Y|X]^2$$

$$\text{Var}(E[Y|X]) = E[E[Y|X]^2] - E[E[Y]^2] \quad \Rightarrow$$

$$E[\text{Var}(Y|X)] = E[E[Y^2|X]] - E[E[Y|X]^2] =$$

$$= E[E[Y^2|X]] - E[E[Y|X]^2]$$

$$\approx E[Y^2] - E[Y]^2 = 0,08$$

5.

x	2	4	6	
0	0,1	0,2	0,1	0,4
1	0,1	0,1	0,1	0,3
2	0,1	0,1	0	0,2
3	0,0,5	0	0,05	0,1
0	0,35	0,4	0,25	1

a)

$$Y : \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0,35 & 0,4 & 0,25 \end{pmatrix}$$

$$E[Y] = 3,8$$

$$E[Y^2] = 16,8$$

$$\text{Var}(Y) = 16,8 - (3,8)^2 = 2,36$$

b)

$$E(Y|X=0) = 4$$

$$E(Y|X=1) = 4$$

$$E(Y|X=2) = 3$$

$$E(Y|X=3) = 4$$

$$\Rightarrow E(Y|X) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 & 4 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$N_2 \backslash N_1$	1	2	3	4	N_2
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
3	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	0	$\frac{2}{10}$
4	$\frac{1}{10}$	0	0	0	$\frac{1}{10}$
N_1	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \Rightarrow E(N_1) = \frac{10}{5} = 2$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \Rightarrow E(N_2) = \frac{10}{5} = 2$$

$$4. \quad \left. \begin{array}{l} E(\text{nr. client}) = 50 \\ E(\text{consum}) = 30 \end{array} \right\} \text{zunt independente} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(\text{cifra-afacere}) = E(\text{nr. client}) \cdot E(\text{consum}) = \\ = 30 \cdot 50 = 1500$$

$$1. \text{ e) } E[X=x|Y=2] = 1 \cdot 0,33 + 2 \cdot 0,45 + 3 \cdot 0,21 = 1,86$$

$$E[(X=x|Y=2)^2] = 1 \cdot 0,33 + 4 \cdot 0,45 + 9 \cdot 0,21 = 4,02$$

$$\text{Var}(X=x|Y=2) = 4,02 - 1,86^2 = \boxed{0,56}$$

$$E[Y=y|X=2] = 1 \cdot 0,44 + 2 \cdot 0,33 + 3 \cdot 0,22 = 1,76$$

$$E[(Y=y|X=2)^2] = 1 \cdot 0,44 + 4 \cdot 0,33 + 9 \cdot 0,22 = 3,74$$

$$\text{Var}(Y=y|X=2) = 3,74 - 1,76^2 = \cancel{\boxed{0,64}}$$

$$2. z = x + y$$

$$P_{X+Y=n}(k) = \frac{P(X=F|z=n)}{P(z=n)} = \frac{P(X=F, X+Y=n)}{P(z=n)} =$$

$$= \frac{P(X=F, Y=n-F)}{P(z=n)} = \frac{P(X=F) \cdot P(Y=n-F)}{P(z=n)} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^F}{F!} \cdot e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^{n-F}}{(n-F)!}}{e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} = C_n^F \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^F \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-F}$$

$$\Rightarrow E[X|X+Y=n] = \frac{\lambda \cdot n}{\lambda + \mu}$$

$$c) P(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}}$$

$$E[x, y] = 3, 33$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{\text{Var}(x)} = 0,72$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{\text{Var}(y)} = 0,76$$

$$\Rightarrow P(x, y) = \frac{E[x, y] - E[x] \cdot E[y]}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}} = \frac{3,33 - 1,85 \cdot 1,71}{0,72 \cdot 0,76} = \boxed{0,3}$$

X	$P(X=x y=2)$	$P(X=1 y=2) = \frac{P(X=1, y=2)}{P(y=2)} = 0,33$
1	0,33	
2	0,45	$P(X=2 y=2) = \frac{P(X=2, y=2)}{P(y=2)} = 0,45$
3	0,21	$P(X=3 y=2) = \frac{P(X=3, y=2)}{P(y=2)} = 0,21$

Y	$P(Y=y X=z)$	$P(Y=1 X=z) = \frac{P(Y=1, X=z)}{P(X=z)} = 0,44$
1	0,44	
2	0,33	$P(Y=2 X=z) = \frac{P(Y=2, X=z)}{P(X=z)} = 0,33$
3	0,22	

$$P(Y=3 | X=z) = \frac{P(Y=3, X=z)}{P(X=z)} = 0,22$$