

Tema Specială

1. a) Evenimentul reprezentă ca numărul ales să se termine cu cifra zero și să fie divizibil cu 2 sau cu 3
b) Evenimentul reprezentă ca numărul ales să fie divizibil cu 2 și cu 3 sau să se termine cu cifra zero.

c) Evenimentul reprezentă ca numărul ales să fie divizibil cu 6 sau să se termine cu cifra zero și să fie divizibil cu 3.

2) a) $\frac{C_{13}^6 \cdot C_{39}^7}{C_{52}^{13}} \approx 0,04$

b) $\frac{1}{36} = 2,7\%$

3) A = {studentul își place discipline Prob. și Stat.}

B = {studentul își place discipline Geom. Comp.}

• $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,8 + 0,7 - 0,6 = 0,9$

• $P(A^c \cap B^c) = P(A^c) \cdot P(B^c) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$

• $P(A \cap B^c) = P(A) \cdot P(B^c) = 0,8 \cdot 0,3 = 0,24$

Tema specială

4) a) $P = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} \approx 0,51$

b) $P = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = 0,38$

5) $a = 24$ bile albe

$b = 9$ bile negre

$n = 33$ bile

$P(aab) = \frac{24}{33} \cdot \frac{23}{32} \cdot \frac{9}{31} = 0,15$

$P(aBa) = \frac{24}{33} \cdot \frac{9}{32} \cdot \frac{23}{31} = 0,15$

$P(baa) = \frac{9}{33} \cdot \frac{24}{32} \cdot \frac{23}{31} = 0,15$

$P(3; 2; 1) = \frac{C_{24}^2 \cdot C_9^1}{C_{33}^3} = \frac{276 \cdot 9}{5456} = 0,45$

6) $P_1 = 30\% \quad q_1 = 1\% \Rightarrow \frac{1}{100} \cdot \frac{30}{700} = 0,3$

$P_2 = 25\% \quad q_2 = 2\% \Rightarrow \frac{2}{100} \cdot \frac{25}{100} = 0,5$

$P_3 = 45\% \quad q_3 = 4\% \Rightarrow \frac{4}{100} \cdot \frac{45}{100} = 1,8$

$P = P_1 + P_2 + P_3 = 2,6$

$$P(x > -\frac{1}{3}) \Leftrightarrow P(x > -1) = 0,7$$

$$P(x < \frac{1}{4} \mid x \geq -\frac{1}{2}) = 0,2 = P(x=0)$$

g) a) $E[x] = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = 0,17$

$$E[g] = 0,2 \cdot 0,2 + 1,2 = 1,6$$

b) $Z = x \cdot y = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,09 & 0,06 & 0,03 & 0,12 & 0,06 & 0,04 & 0,02 & 0,08 \\ & & & & & 0,15 & 0,1 & 0,03 \\ & & & & & & 0,2 & 0,3 \\ & & & & & & & 0,12 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0,12 & 0,03 & 0,06 & 0,44 & 0,1 & 0,05 & 0,2 \end{pmatrix}$$

c) $E[z] = -3 \cdot 0,12 + (-2) \cdot 0,03 + (-1) \cdot 0,44 + 1 \cdot 0,14 + 2 \cdot 0,05 + 3 \cdot 0,2 = 0,32$

c) $E[x] < E[z] < E[y]$

Tema specială

$$10) X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

$$Y \sim \begin{pmatrix} a & 2a & 3a & 4a \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} + 3B =$$

$$= \begin{pmatrix} a+3B & 2a+3B & \cancel{3a+3B} & 4a+3B \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \cancel{\frac{1}{6}} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

$$E[Y] = \sum_{i=0}^{12} y_i p_i = \frac{a+3B}{2} + \frac{2a+3B}{4} + \frac{3a+3B}{6} + \frac{4a+3B}{12} =$$

$$\Rightarrow = \frac{5a + 18B + 6a + 9B + 6a + 6B + 4a + 3B}{12} = \frac{11a + 18B}{6} = 0$$

$$\text{Var}(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 \Rightarrow E[Y^2] = 1$$

$$\text{Var}(Y) = \left\{ [y_i - E(y_i)]^2 * P(y_i) \right\} = \left\{ [(y_i)^2 * P(y_i)] \right\} =$$

$$= \frac{(a+3B)^2}{2} + \frac{(2a+3B)^2}{4} + \frac{(3a+3B)^2}{6} + \frac{(4a+3B)^2}{12} =$$

$$= \frac{13a^2 + 33ab + 27b^2}{3} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = \text{redacted} & 1,01 \\ b = 0,61 \end{cases}$$

Teme Speciale

11) a) $f(x) = \begin{cases} c \cdot \ln\left(\frac{a}{x}\right), & 0 < x < a, c > 0 \\ 0, & \text{auch sonst} \end{cases}$

I. $f(x) \geq 0; \ln\left(\frac{a}{x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a}{x} \geq 1 \Rightarrow c \geq 0$

II. $\int_0^a f(x) dx = c \cdot \int_0^a \ln\left(\frac{a}{x}\right) dx \leq c \cdot \left(\int_0^a \ln a - \int_0^a \ln x \right) =$
 $= a \cdot c \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{a}}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in [1-c, 1+c], c \in (0, 1) \\ 0, & \text{auch sonst} \end{cases}$

I. $f(x) \geq 0$, evident

II. $\int_{1-c}^{1+c} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_{1-c}^{1+c} = \ln(1+c) - \ln(1-c) = 1$

$$\ln\left(\frac{1+c}{1-c}\right) = 1 \Rightarrow c = \frac{e-1}{e+1} < 1$$

12) ~~a)~~ $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 \cdot e^{-Kx}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0, K > 0 \end{cases}$

a) $\alpha \geq 0$

b) $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 dt + \int_0^x \alpha t^2 \cdot e^{-Kt} dt$

c) $P(0 < X < K^{-1}) = P(X < K^{-1}) - P(X < 0) = f(K^{-1}) - f(0)$

TEMA Specială

$$13) \quad V[X] = \sigma^2$$

X - v.a., $E[X] = \mu$ și $V[X] = \sigma^2$ $\xrightarrow[\text{căzător}]{\text{Iarg}} P(|X-\mu| = a) < \frac{\sigma^2}{a^2}$

$$14) \quad a) \quad P_1, P_2 \in (0, 1)$$

$x \setminus y$	-4	-1	
2,5	x	y	0,4
4	z	w	0,6
	P_1	P_2	1

$$\Rightarrow y = 0, z = P(x=2,5, y=-1) \Rightarrow \\ \Rightarrow x = 0, y$$

$$P(x=2,5 | y = -1) = \frac{P(x=2,5 \cap y = -1)}{P(y = -1)} = \frac{y}{P_2}$$

$$P(x=4 | y = -1) = \frac{P(x=4 \cap y = -1)}{P(y = -1)} = \frac{w}{P_2}$$

$$E[x | y = -1] = 2,5y + 4w \Rightarrow w = \frac{3 - 0,5}{4} = 0,625$$

$$z = -0,02$$

$$P_1 = 0,18 \quad P_2 = 0,82$$

Tema specială

$$14) \text{ b)} P(x,y) = \frac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

$$E[x \cdot y] = -0,72 - 0,82$$

~~$$E[x] = 1e2,4 = 3,4$$~~

$$\text{cov}(x,y) = E[x \cdot y] - E[x] \cdot E[y]$$

$$E[y] = -1,52$$

$$\sigma_x = \sqrt{\text{var}(x)} = \sqrt{E[x^2] - E[x]^2} \quad \text{P}$$

$$X \cdot Y = \begin{pmatrix} -10 & -2,5 & -16 & -4 \\ 0,072 & 0,328 & 0,108 & 0,452 \end{pmatrix}$$

Tensão Especial

$$15) \text{ a) } \int_0^2 \int_0^1 f_{(x,y)}(x,y) dx dy = \int_0^2 \int_0^1 \frac{x^2}{2} + \frac{xy+1}{2} dy = \\ = \int_0^2 \frac{x^2}{2} + \frac{xy}{2} + \frac{1}{2} dy = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} \int_0^2 + 2 =$$

$$= 3x^2 + 2x = 5x = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{(x,y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y+1}{5}, & x \in [0,1], y \in [0,2] \\ 0, & \text{altför} \end{cases}$$

$$6) f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(x,y)}(x,y) dy = \int_0^2 \frac{x+y+1}{5} dy \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{2x+4}{5} \quad x \in [0,1], f_x(x) = 0, x \notin R([0,1])$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(x,y)}(x,y) dx = \int_0^1 \frac{x+y+1}{5} dx = \\ = \frac{\frac{1}{2}y^2 + y + 1}{5}$$

$$c) x, y \text{ independente} (\Leftrightarrow) f_{(x,y)}(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y), \text{ th, } \\ (\Leftrightarrow) \frac{x+y+1}{5} = \frac{2x+4}{5} \cdot \frac{\frac{1}{2}y^2 + y + 1}{5} \quad (F)$$

Tema Specială

16) $n =$ nr de abonări

$S_n =$ de câte ori apare pagina în cele n abonări

$$P = 0,5 \quad q = 1 - 0,5 = 0,5 \quad P\left(\frac{S_n}{n} - P < 0,01\right)$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p q} \quad P(S_n < n \cdot 0,01 + np) = 0,0$$

$$\bullet \mu = np \quad P(S_n - np < n \cdot 0,01) = 0,06$$

$$P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{n p q}} < \frac{n \cdot 0,01}{\sqrt{n p q}}\right) = 0,06$$

$$P\left(\frac{S_n - 0,5 n}{\sqrt{n p q}} \leq \sqrt{n} \cdot 0,02\right) = 0,6$$

$$P(Z < \sqrt{n} \cdot 0,02) = 0,6 \quad Z \sim N(0,1)$$

$$\text{Din tabel } P + P = 0,6 \Rightarrow \sqrt{n} \cdot 0,02 = 0,253 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = 12,65 \Rightarrow n \approx 160$$

$$17) \mu = 44 \quad \sigma = \frac{5}{\sqrt{10}} \quad X \sim N\left(44, \frac{25}{10}\right)$$

$$P(X > 48) = P\left(\frac{X - 44}{\frac{5}{\sqrt{10}}} > \frac{48 - 44}{\frac{5}{\sqrt{10}}}\right) = P\left(Z > \frac{48 - 44}{\frac{5}{\sqrt{10}}}\right)$$

$$\text{unde } Z \sim N(0,1)$$

$$1 - P(Z \leq 2,53) = 1 - 0,5543 = 0,0057$$

$$18) \mu = 66,3 \quad \sigma = \frac{15,6}{\sqrt{100}} \quad X \sim N(66,3, \frac{(15,6)^2}{100})$$

$$P\left(X > \frac{70,00}{100}\right) = P\left(\frac{X - 66,3}{\frac{15,6}{10}} > \frac{\frac{70,00}{100} - 66,3}{\frac{15,6}{10}}\right) = P(Z > 2,37) = 0,0089$$