1. Calculați $\iint_D xy\,dx\,dy$, unde D este domeniul limitat de parabola $y=x^2$ și de dreapta $y=2x+3$.

Soluție

a) Schițăm D.

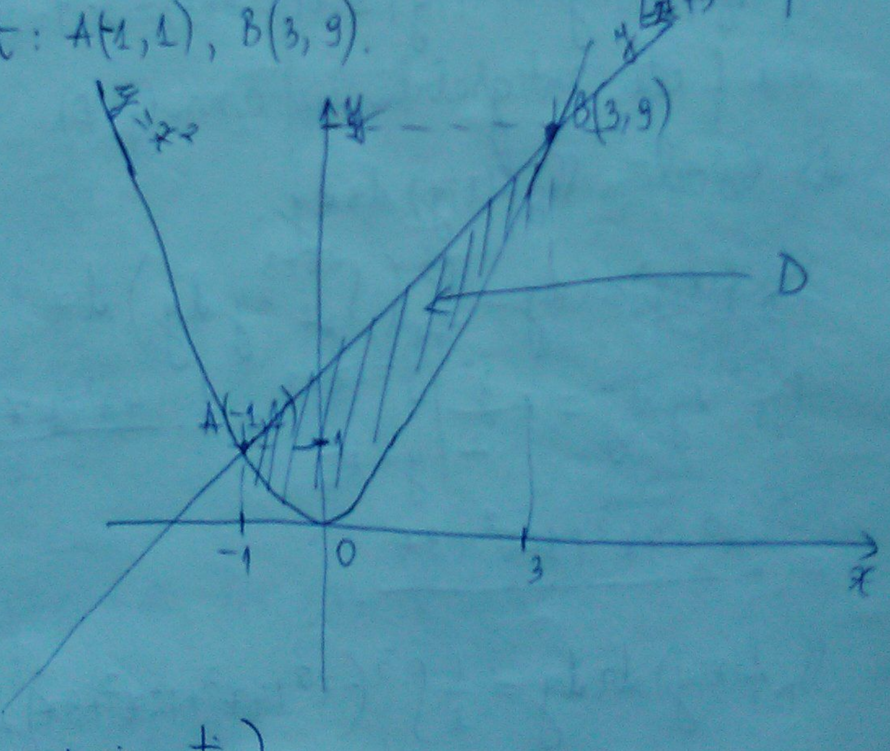
$x^2=2x+3 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$

$\Delta = 4+12=16$

$x_1=\frac{2+4}{2}=3$

$x_2=\frac{2-4}{2}=-1$

Deci punctele de intersecție dintre dreaptă și parabolă sunt: $A(-1,1)$, $B(3,9)$.



(desen aproximativ)

b) $\underline{D \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)}$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 3,\ x^2 \le y \le 2x+3\} =$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x \in [-1,3]}_{\in \mathcal{J}(\mathbb{R})},\ \underbrace{x^2 \le y \le 2x+3}_{\text{continue pe compactul } [-1,3]}\} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2).$

c) Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$.

f continuă pe D

$|f(x,y)| = |xy| = |x|\,|y| \le |x|\,(2x+3) \le 3 \cdot 9 = 27 \quad \forall (x,y) \in D.$

Deci f este integrabilă Riemann (pe D)

d) Calculăm $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{3} \left(\int_{x^2}^{2x+3} xy\,dy \right) dx.$$

$$\int_{x^2}^{2x+3} xy\,dy = x\frac{y^2}{2}\Bigg|_{y=x^2}^{y=2x+3} = x \cdot \frac{4x^2+12x+9-x^4}{2} =$$

$$= \frac{-x^5+4x^3+12x^2+9x}{2}.$$

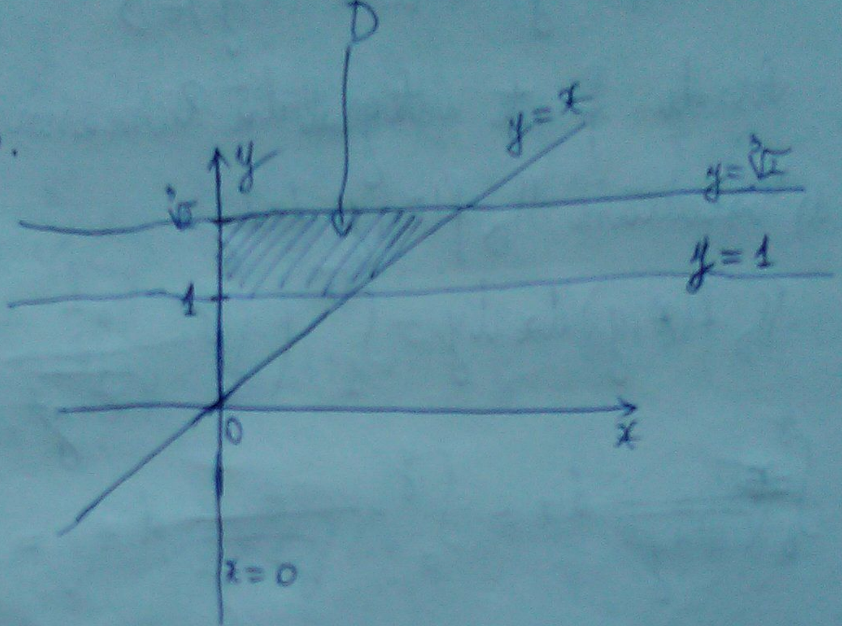
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} \left(-x^5+4x^3+12x^2+9x\right) dx = \ldots$$

(nu are rost să mai fac toate calculele; la examen să le faceți!).

2. Calculați $\iint_D \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$, unde D este domeniul mărginit de dreptele $x=0$, $y=1$, $y=\sqrt[3]{2}$ și $y=x$.

Soluție:

a) Schițăm D.



b) $D \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$.

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{y\in[1,\sqrt[3]{2}]}_{\in\,\mathcal{J}(\mathbb{R})},\ 0\le x\le y\}\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^2).$$

continue pe compactul $[1,\sqrt[3]{2}]$

c) Fie $f: D\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

f continuă

$$|f(x,y)| = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \underset{?}{\leq} \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} = \frac{x^2}{x} = x \leq \sqrt[3]{2} \quad \forall (x,y) \in D \setminus \{(0,y) \mid y \in [1, \sqrt[3]{2}]\}$$

presupunem că $x \neq 0$

Dacă $x=0$ atunci $f(x,y) = 0 \;\forall\; y \in [1, \sqrt[3]{2}]$.

Deci $|f(x;y)| \leq \sqrt[3]{2} \;\forall\; (x,y) \in D$

Așadar f este integrabilă Riemann.

d) Calculăm $\iint_D f(x;y)\,dx\,dy$

$$\iint_D f(x;y)\,dx\,dy = \int_1^{\sqrt[3]{2}} \left(\int_0^y \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx \right) dy =$$

$$\int_0^y \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx = \int_0^y x \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx =$$

$$= \int_0^y x \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dx = x\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{x=0}^{x=y} -$$

$$- \int_0^y \sqrt{x^2+y^2}\,dx = y^2\sqrt{2} - \int_0^y \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx =$$

$$= y^2\sqrt{2} - \int_0^y \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx - y^2 \int_0^y \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx =$$

$$= y^2\sqrt{2} - \int_0^y \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx - y^2 \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_{x=0}^{x=y} \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)+a^2}}\,dx = \ln\left|u(x) + \sqrt{u^2(x)+a^2}\right| + C, \quad a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 2\int_0^y \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx = y^2\sqrt{2} - y^2\left[\ln(y+y\sqrt{2}) - \ln y\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^y \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx = \frac{y^2}{2}\sqrt{2} - \frac{y^2}{2}\left[\cancel{\ln y} + \ln(1+\sqrt{2}) - \cancel{\ln y}\right] = \frac{y^2}{2}\left(\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})\right).$$

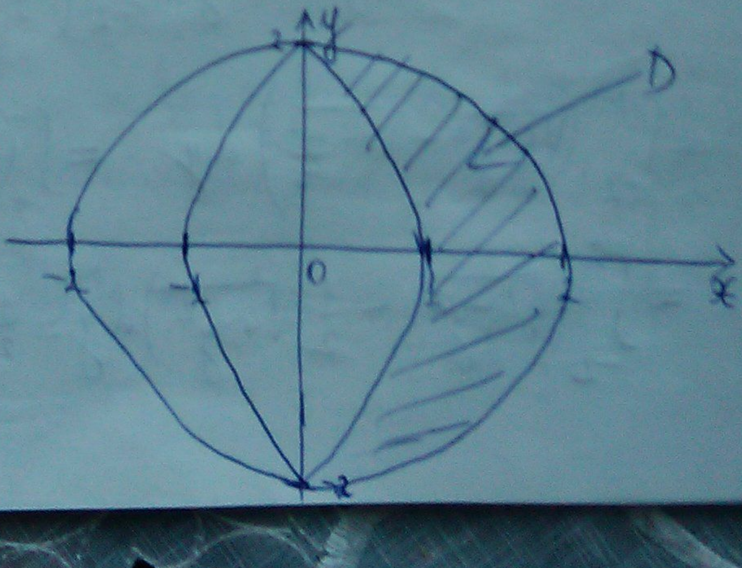
Deci $\iint_D \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \int_1^{\sqrt[3]{2}} \frac{y^2}{2}\left(\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})\right)dy$

$$= \frac{y^3}{6}\Bigg|_{y=1}^{y=\sqrt[3]{2}} \cdot \left(\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})\right) = \frac{1}{6}\left(\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})\right).$$

3. Fie $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 4,\ x^2 + \frac{y^2}{4} \ge 1,\ x \ge 0\}$. Arătați că $D \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și calculați aria lui D (adică $\iint_D 1\,dx\,dy$).

Soluție

a) Schițăm D.



$x^2+y^2=4$ (ecuația cercului de centru $(0,0)$ și rază 2).

$x^2+\frac{y^2}{4}=1$ (ecuația elipsei de semiaxe $a=1$ și $b=2$).

b) $\underline{D\in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)}$

$$D=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \underset{\underset{\mathcal{J}(\mathbb{R})}{\cap}}{y\in[-2;2]}\;;\; \sqrt{1-\frac{y^2}{4}}\le x\le\sqrt{4-y^2}\right\}\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$$

continue pe compactul $[-2;2]$

Nu mai este nevoie să arătăm că funcția $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x;y)=1$ este integrabilă Riemann pe D, deoarece ni se cere de la început aria lui D (oricum e evident că f e continuă și mărginită).

c) $$\text{aria}(D)=\iint_D 1\,dx\,dy=\int_{-2}^{2}\left(\int_{\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}}^{\sqrt{4-y^2}}1\,dx\right)dy=$$

$$=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{4-y^2}-\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}\right)dy=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{4-y^2}-\sqrt{\tfrac{1}{4}(4-y^2)}\right)dy$$

$$=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{4-y^2}-\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}\right)dy=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-y^2}\,dy=$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \frac{4-y^2}{\sqrt{4-y^2}}\,dy = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \frac{4}{\sqrt{4-y^2}}\,dy -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} y \cdot \frac{y}{\sqrt{4-y^2}}\,dy = 2\arcsin\frac{y}{2}\Big|_{y=-2}^{y=2} +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} y \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{4-y^2}\right)dy =$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}y\sqrt{4-y^2}\Big|_{y=-2}^{y=2} -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-y^2}\,dy \Leftrightarrow \int_{-2}^{2}\sqrt{4-y^2}\,dy = 2\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-y^2}\,dy = \pi.$$

Așadar, $\text{aria}(D) = \pi$.

4. Calculați $\iint_D x\,dx\,dy$, unde D este domeniul mărginit de parabola de ecuație $y=-x^2-x+2$ și de dreapta de ecuație $y=x-1$.
(Am discutat exercițiul la una dintre grupe, dar aici este scris mai în detaliu).

<u>Soluție:</u>

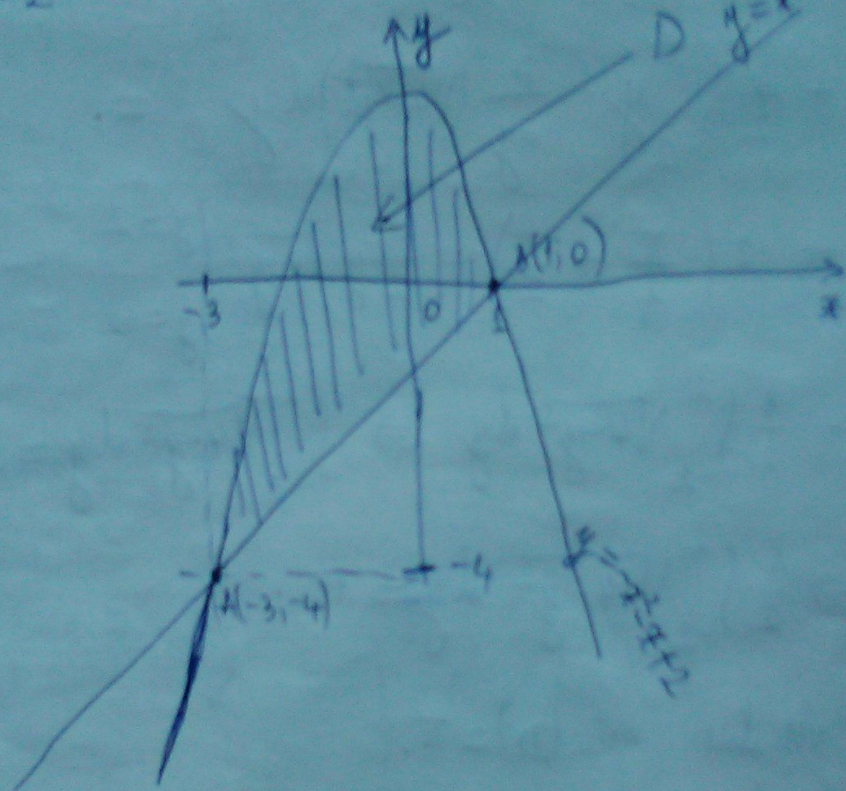
a) Schițăm D.

$x-1=-x^2-x+2 \iff -x^2-2x+3=0$

$\Delta = 4+12=16$; $\sqrt{\Delta}=4$

$x_1=\frac{2+4}{-2}=-3.$

$x_2=\frac{2-4}{-2}=1.$



b) Arătăm că $D\in J(\mathbb{R}^2)$.

$D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x\in[-3;1]}_{J(\mathbb{R})};\ \underbrace{x-1\le y\le -x^2-x+2}_{\text{continue pe compactul } [-3;1]}\}\in J(\mathbb{R}^2)$

c) Fie $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x$.

f continuă

$|f(x,y)| = |x| \le 3$,

Deci f este integrabilă Riemann.

d) Calculăm $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

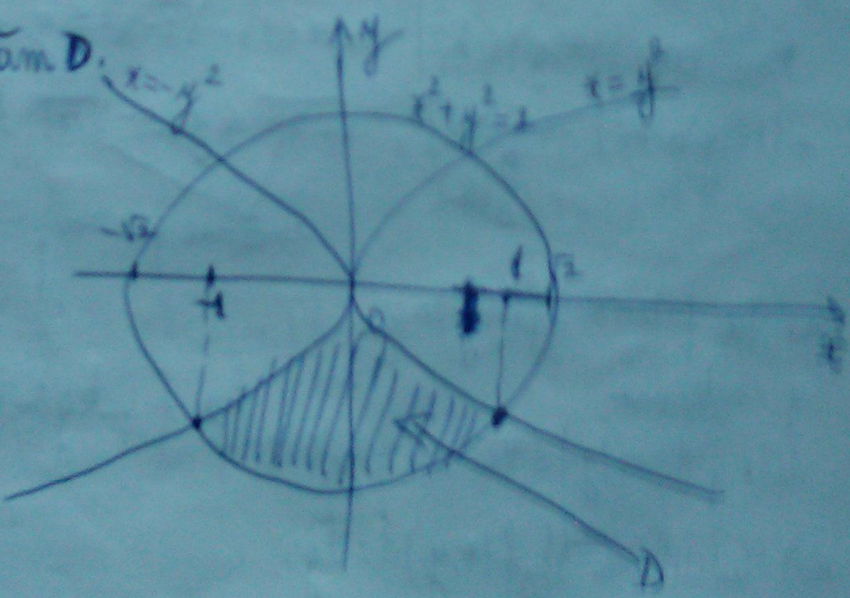
$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_{-3}^{1}\left(\int_{x-1}^{-x^2-x+2} x\,dy\right)dx = \int_{-3}^{1} xy\Big|_{y=x-1}^{y=-x^2-x+2} dx =$$

$$= \int_{-3}^{1} x(-x^2-x+2-x+1)\,dx = \ldots$$

5. Calculați $\iint_D y\,dx\,dy$, unde D este domeniul limitat de cercul $x^2+y^2=2$ și parabolele $x=y^2$, $x=-y^2$, atunci când $y \le 0$.

<u>Soluție:</u>

a) Schițăm D.



$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x=-y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4+y^2=2 \\ x=-y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4+y^2-2=0 \\ x=-y^2 \end{cases}$

Rezolvăm ecuația $y^4+y^2-2=0$

$\Delta = 1+8=9$; $\sqrt{\Delta}=3$

$\left.\begin{array}{l} y_1^2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \\ y_2^2 = \dfrac{-1-3}{2} = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow y \in \{\pm 1\}$

$y=-1 \Rightarrow x=-1$.

$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x=y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4+y^2-2=0 \\ x=y^2 \end{cases}$

Soluțiile reale ale ecuației $y^4+y^2-2=0$ sunt $y_1=-1$ și $y_2=1$.

$(y \le 0 \Rightarrow y=-1)$

$y=-1 \Rightarrow x=1$.

Deci $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\le x\le 1, -\sqrt{2-x^2}\le y\le -\sqrt{|x|}\} =$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underset{\mathcal{J}(\mathbb{R})}{x\in[-1,1]}, -\sqrt{2-x^2}\le y\le -\sqrt{|x|}\} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$.

continue pe compactul $[-1,1]$

c) Fie $f: D\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=y$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ continuă} \\ |f(x,y)| = |y| \le \sqrt{2} \ \forall (x,y)\in D \end{array}\right\} \Rightarrow f$ integrabilă Riemann

d) Calculăm $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

$$\iint_D y\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{-\sqrt{|x|}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{0}\left(\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{-\sqrt{-x}} y\,dy\right)dx +$$

$$+ \int_{0}^{1}\left(\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{-\sqrt{x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{y^2}{2}\Bigg|_{y=-\sqrt{2-x^2}}^{-\sqrt{-x}} dx +$$

$$+ \int_{0}^{1} \frac{y^2}{2}\Bigg|_{y=-\sqrt{2-x^2}}^{-\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}\left(-x-(2-x^2)\right)dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{2}\left(x-(2-x^2)\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}\left(-x-2+x^2\right)dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{2}\left(x-2+x^2\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_{0}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right) = \ldots$$