Subiecte analiză

1. Definiția unui corp ordonat și complet ordonat

Corp (K) ordonat:

Orice corp înzestrat cu o relație de ordine a.î.:

i) $\forall x, y, z, z \in K, x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

ii) $\forall x, y \in K, x \leq y, \alpha \in K, \alpha > 0 \Rightarrow \alpha x \leq \alpha y$

Corp complet ordonat:

Orice corp în care ordinea este completă.

$(\forall x, y \in K \Rightarrow x \leq y$ sau $y \leq x)$

2. Definiția unui corp arhimedian și propoziția care caracterizează corpurile arhimediene

Un corp se numește arhimedian dacă $\forall x, y \in K$, $\exists n \in \mathbb{N}$ a.î. $y < nx$.

P.p. lui Arhimede: $\forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, y > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$ a.î. $x < ny$.

3. Orice corp complet ordonat este arhimedian.

(4) Definiția șirului convergent (proprietăți + demonstrație)

Fie un corp $(K,+,\cdot,<)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent dacă $\exists x\in K$ a.î. $\forall \varepsilon\in K, \varepsilon>0$ $\exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n\in\mathbb{N}$ cu $n\geq n_\varepsilon$ să avem:

$|x_n-x|<\varepsilon \Rightarrow x_n\to x$. x se numește limita șirului (x_n) și este unică.

Propoziții: (a) Limita unui șir convergent este unică.

Dem. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq K$ un șir convergent la două elemente din K, x resp. y; atunci în conformitate cu definiția, $\forall$ $\varepsilon\in K$, $\varepsilon>0$, $\exists$ $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ și $n'_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $|x_n-x|<\varepsilon$, $\forall n\in\mathbb{N}$ și $n\geq n'_\varepsilon$. În consecință $\forall\varepsilon\in K$, $\varepsilon>0$, $\exists$ $n''_\varepsilon=\max\{n_\varepsilon,n'_\varepsilon\}$ încât avem $|x-y|=|x-x_n+x_n-y|\leq|x_n-x|+|y_n-y|<2\varepsilon$

$\Rightarrow |x-y|=0_K\Rightarrow x=y$

Altfel $|x-y|>0$, $\forall\varepsilon=|x-y|\cdot\lambda$ $\quad 0<\lambda<(2\cdot 1_K)^{-1}$

$|x-y|<2\lambda|x-y|$

$1_K<2\lambda<2(2\cdot 1_K)^{-1}=1_K$ absurd.

⑤ Teorema privind convergenta sirurilor monotone (cu dem.)

[T. Weierstrass]

Fie (a_n) un şir de numere reale

a) Dacă (a_n) este un şir monoton crescător şi mărginit superior $\Rightarrow a_n$ convergent.

b) Dacă (a_n) este un şir monoton descrescător şi mărginit inferior $\Rightarrow a_n$ convergent.

Demonstrație:

a) Mulțimea $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este mulțimea mărginită superior $\Rightarrow \sup A = m \in \mathbb{R}$. Arătăm că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = m$, atunci $\exists$ un rang $n_\varepsilon > 0$ a.î. $a_{n_\varepsilon} > m-\varepsilon$. Din monotonia şirului $(a_n) \Rightarrow a_n \geq a_{n_\varepsilon} > m-\varepsilon$ $\forall\, n \geq n_\varepsilon$ astfel:

$$m-\varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq m \leq m+\varepsilon \Rightarrow |a_{n_\varepsilon} - m| < \varepsilon \;\forall\, n \geq n_\varepsilon$$

Aşadar pt $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon$ a.î. $|a_{n_\varepsilon} - m| < \varepsilon$ $\forall\, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = m$

b) $b_n = -a_n$ este monoton descrescător şi mărginit superior, deci este convergent. Se arată că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf a_n$ şi teorema este demonstrată.

(b) Suma a două șiruri convergente este un șir convergent.

Fie $(x_n), (y_n)$ două șiruri convergente la x, resp y. Conform definiției $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n'_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall n > n'_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$ și un n''_ε a.î. $\forall n > n''_\varepsilon$ $|y_n - y| < \varepsilon$

Plecând de la egalitatea $(x+y) - (x_n + y_n) = (x - x_n) + (y - y_n)$ căreia îi aplicăm modulul: $|x + y - x_n - y_n| \le |x - x_n| + |y - y_n| < 2\varepsilon$ $\forall n > n_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{x\to\infty} x_n + \lim\limits_{x\to\infty} y_n = x + y$.

(c) Produsul a două șiruri convergente este convergent.

Fie $(x_n), (y_n)$ două șiruri convergente la x, resp. y.

Plecând de la egalitatea:

$$xy - x_n y_n = xy - x y_n + x y_n - x_n y_n =$$
$$= x(y - y_n) + y_n(x - x_n)$$

aplicăm ~~ine~~egalitatea modulului

$$|xy - x_n y_n| \le |x||y - y_n| + |y_n||x - x_n|$$

Dar $y_n = y_n - y + y$ $|y_n| \le |y_n - y| + |y|$

Deci $|xy - x_n y_n| \le |x||y - y_n| + |x - x_n||y_n - y| + |y||x - x_n| \le$

$\le \varepsilon(|x| + \varepsilon + |y|)$ $\forall n > n_\varepsilon = \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon) \Rightarrow$

$\lim x_n y_n = xy$

⑥ Noțiunea de spațiu metric + definirea distanței. Bila de centru O și spațiu ε. ($B(O,\varepsilon)$). Șirul Cauchy și convergența într-un spațiu metric.

Spațiu metric

Fie X o mulțime. Se numește distanța / metrică pe X o funcție

$$d: X \times X \to \mathbb{R} \text{ cu proprietățile:}$$

1) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in X$
2) $d(x,y) = 0 \iff x = y$
3) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$
4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x,y,z \in X$

Perechea (X,d) s.n. spațiu metric.

S.n bila deschisă din X centrată în a și de rază r și se notează $B(a,r)$

$$B(a,r) = \{x \in X \mid d(a,x) < r\}$$

(*) Familia bilelor din (X,d) definește o topologie numită topologia asociată distanței: G mulțime deschisă în această topologie dacă $\forall x \in G$ $\exists r_x > 0$ a.î. $B(x, r_x) \subset G$. Două distanțe s.n. echivalente dacă topologiile asociate coincid. Un spațiu topologic s.n metrisabil dacă $\exists$ o distanță d pe X cu propr. că topologia asociată lui d coincide cu topologia de pe X.

În particular, bila de centru O și spațiu ε:

Șirul Cauchy

Fie (X, d) un spațiu metric și fie (x_n) un șir din X. Șirul (x_n) s.n. Cauchy dacă pt $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall m, n \geq n_\varepsilon$ avem $d(x_m, x_n) < \varepsilon$

Orice șir convergent este Cauchy.

Convergența în spațiul metric

Fie (X, d) un spațiu metric și (x_n) un șir din X. Șirul (x_n) s.n. convergent dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon > 0$ ~~...~~ și $x \in X$ a.î. ~~...~~ $d(x, x_n) < \varepsilon$ $\forall n > n_\varepsilon$. x s.n. limita șirului x_n.

(7) Limita inferioară, limita superioară

Fie $(a_n) \subset \mathbb{R}$ un șir de nr. naturale și $A_n = \{a_n, a_{n+1} \dots\}$ $n \in \mathbb{N}$

Not $x_n = \inf A_n = \inf\limits_{k \geq n} a_k \in \overline{\mathbb{R}}$ și $y_n = \sup A_n = \sup\limits_{k \geq n} a_k \in \overline{\mathbb{R}}$

Avem $x_n \leq y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ deoarece $A_{n+1} \subset A_n$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \leq x_{n+1}$ și $y_{n+1} \leq y_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ adică șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este crescător, iar șirul $(y_n)_{n \geq 0}$ este descrescător

Cum orice șir monoton are limită în $\overline{\mathbb{R}}$, fie $l = \lim\limits_{n \to \infty} x_n = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n \in \overline{\mathbb{R}}$ și $L = \lim\limits_{n \to \infty} y_n = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} y_n \in \overline{\mathbb{R}}$.

Def 1. $l \in \overline{\mathbb{R}}$ (resp $L \in \overline{\mathbb{R}}$) s.n limita ~~sup~~ inferioară, respectiv superioară a șirului $(a_n)_{n \geq 0}$ și se not $\underline{\lim}\, a_n$ sau $\lim\inf a_n$ (respectiv $\overline{\lim}\, a_n$ sau $\lim\sup a_n$)

Obs: $\underline{\lim}\, a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} a_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n_0 + n} a_k$.

$\overline{\lim}\, a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} a_k = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n_0 + n} a_k \quad \forall\, n_0 \in \mathbb{N}$

De asemenea:

$x_n \leq x_{n+m} \leq y_{n+m} \leq y_m \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \quad \underline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, a_n$.

8 Limita superioară este un punct limită (prop. + demonstrație).

Fie $L = \lim_{n \to \infty} \sup x_n$. Limita superioară L, când este finită, este caracterizată de proprietățile:

a) pt $\forall\, a < L$ există o infinitate de termeni ai șirului mai mari ca a.

b) pt $\forall\, b > L$ există un număr finit de termeni ai șirului mai mari ca b.

Din a), b) rezultă că $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ există o infinitate de termeni ai șirului în intervalul $\left(L - \frac{1}{n}, L + \frac{1}{n}\right)$. Se poate construi prin inducție un șir strict crescător de numere naturale $\{k_n\}$ a.î. $x_{k_n} \in \left(L - \frac{1}{n}, L + \frac{1}{n}\right)$. Rezultă $|x_{k_n} - L| < \frac{2}{n}$ și deci $x_{k_n} \to L$. Așadar L este punct limită al șirului. Din proprietatea b) $\Rightarrow$ L este cel mai mare pct. lim. al șirului.

(9) Orice șir convergent are un subșir convergent. (Césaro)

Fie (x_n) un șir $\Rightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $a < x_n < b$.

Fie c mij $[a, b]$. Cel puțin unul din intervalele $[a, c]$; $[c, b]$ conține o infinitate de termeni ai șirului (x_n).

Presupunem că $[a, c]$ are această proprietate.

Not: $a_1 = a$ și $b_1 = c$

Fie c_1 mij intervalului $[a_1, b_1]$

Cel puțin unul din intervalele $[a_1, c_1]$; $[c_1, b_1]$ conține o infinitate de termeni ai șirului (x_n). Să presupunem că $[c_1, b_1]$ are această proprietate ...... $\Rightarrow$ două șiruri:

1) $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b-a}{2^n} = 0$

3) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $[a_n, b_n]$ conține o infinitate de termeni ai șirului x_n

Din axioma lui Cantor $\Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{R}$ a.î. $a_n \leq x \leq b_n$.

Alegem $k_1 \in \mathbb{N}^*$ a.î. $x_{k_1} \in [a_1, b_1]$. Deoarece $[a_2, b_2]$ conține o infinitate de termeni, $\exists\, k_2 \in \mathbb{N}^*$, $k_2 > k_1$ a.î. $x_{k_2} \in [a_2, b_2]$.

.... $k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$ a.î. $x_{k_n} \in [a_n, b_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Deoarece $|x_{k_n} - x| \leq b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \Rightarrow x_{k_n}$ convergent la x.

10. Spațiul $\mathbb{R}$ este complet (cu demonstrație)

Spațiul metric $(\mathbb{R}, d_e)$, unde $d_e = |\,|$ (metrica euclidiană este un spațiu metric complet.

Într-adevăr fie $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un șir Cauchy de numere reale, cum în afara inegalității $|x_n - x_m| < \varepsilon$ $n, m \geq n_\varepsilon$ rămân un număr finit de termeni rezultă că șirul $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ și orice subșir al său, este un șir mărginit.

Fie $\underline{x} = \inf\{x_n : n \geq n_\varepsilon\}$ și $\bar{x} = \sup\{x_n : n \geq n_\varepsilon\}$, rezultă că avem: $|\bar{x} - \underline{x}| \leq \varepsilon$. Cum $\varepsilon > 0$ poate fi făcut oricât de mic, rezultă că $\underline{x} = \bar{x}$ și pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ $|x_n - x| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ și $x = \bar{x} = \underline{x}$ deci $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge la x.

(not) Fie acum spațiul metric $(\mathbb{R}^k, d_e)$, d_e fiind metrica euclidiană pe $\mathbb{R}^k$ și $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots x_n^k)$ un șir de elemente din $\mathbb{R}^k$. Atunci pe baza șirului de inegalități:

$$|x_n^i - x_m^i| = \sqrt{(x_n^i - x_m^i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_n^i - x_m^i)^2} \leq \sum_{i=1}^{k} |x_n^i - x_m^i|$$

rezultă că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este un șir fundamental în $(\mathbb{R}^k, d_e)$ dacă și numai dacă șirurile coordonatelor $(x_n^i)_{n\geq 1}$, $1 \leq i \leq k$ sunt șiruri fundamentale de nr. reale. Cum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ este un spațiu metric complet $\Rightarrow$ că și spațiul $(\mathbb{R}^k, d_e)$ este un spațiu metric complet.

(11). Criterii de convergență pentru serii.

1) Criteriul raportului (factoriale, produse)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \begin{cases} <1 \Rightarrow \text{convergent} \\ >1 \Rightarrow \text{divergent} \\ =1 \Rightarrow ?? \rightarrow \text{Raabe - Duhamel} \end{cases}$$

2) Criteriul radicalului (Cauchy) $\rightarrow (\ )^n$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \begin{cases} <1 \Rightarrow \text{convergent} \\ >1 \Rightarrow \text{divergent} \\ =1 \Rightarrow ?? \rightarrow \text{Obs 1} \left(\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \text{divergent altfel convergent}\right) \end{cases}$$

3) Criteriul Raabe - Duhamel

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) \begin{cases} <1 \Rightarrow \text{divergent} \\ >1 \Rightarrow \text{convergent} \\ =1 \Rightarrow ?? \end{cases}$$

4) Criteriul comparației $(+, \sqrt{\ })$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0,\infty) \Rightarrow \sum a_n \sim \sum b_n$$

5) Criteriul logaritmic (log)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \begin{cases} <1 \Rightarrow \text{divergent} \\ >1 \Rightarrow \text{convergent} \\ =1 \Rightarrow ?? \end{cases}$$

6) Criteriul condensării (log)

$$a_n \searrow \Rightarrow \sum a_n \sim \sum 2^n a_{2^n}$$

7) Criteriul Leibniz (serii alternante => $(-1)^n$ ..)

$a_n \searrow 0 \Rightarrow$ convergent

8) Criteriul integralei

$$\sum_{1}^{\infty} f(a_n)$$

$\lim\limits_{t \to \infty} \int_1^t f(x)\,dx \in \mathbb{R} \Rightarrow$ serie convergentă altfel divergentă.

(12) Noțiunea de spațiu topologic (mulțime deschisă / închisă, spațiu topologic asociat unui spațiu metric, bila).

Mulțime deschisă

O submulțime Δ a lui $\mathbb{R}^n$ s.n deschisă în $\mathbb{R}^n$ sau simplu deschisă dacă $\forall x \in \Delta$ există un număr real strict pozitiv r a.î. bila cu centru x și raza r să fie conținută în Δ.

Mulțimea Δ din $\mathbb{R}^n$ este deschisă dacă orice punct al său este centrul unei bile deschise conținută în Δ.

Proprietăți:

i) $\emptyset$ și $\mathbb{R}^n$ sunt deschise (în $\mathbb{R}^n$)

ii) $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}^*} \Delta_i$ este deschisă

iii) $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}^*} \Delta_i$ este deschisă

Mulțime închisă

O submulțime F a lui $\mathbb{R}^n$ s.n închisă în $\mathbb{R}^n$ dacă $\mathbb{R}^n / F$ este deschisă în $\mathbb{R}^n$.

Proprietăți:

i) $\emptyset$ și $\mathbb{R}^n$ sunt închise (în $\mathbb{R}^n$)

ii) $\bigcup_{i \in J} F_i$ este închisă

iii) $\bigcap_{i \in J} F_i$ este închisă

Spațiul topologic asociat unui spațiu metric

(vezi pct 6 (*))

Generalizat:

Fie X o mulțime nevidă. Se numește topologie pe X o familie de mulțimi ale lui X notată $\mathcal{T}$ care verifică 3 axiome:

i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

ii) $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow \Delta_1 \cap \Delta_2 \in \mathcal{T}$

iii) dacă $\Delta_i \in \mathcal{T}, \forall i \in J$ at. $\bigcup_{i \in J} \Delta_i \in \mathcal{T}$

S.n. spațiu topologic un dublet $(X, \mathcal{T})$ unde $\mathcal{T}$ este o topologie pe mulțimea X.

(13) Spațiu normat (def. normă) și spațiu metric asociat unui spațiu normat.

Un spațiu vectorial normat, numit pe scurt normat este un spațiu vectorial normat sau complex X pe care este definită o funcție $\|\cdot\|: X \to [0, \infty)$ numită normă cu urm. proprietăți:

i) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$

ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

iii) $\|cx\| = |c|\,\|x\| \; \forall c \in \mathbb{R}$ sau $c \in \mathbb{C}$ și $\forall x \in X$

iv) $\|x\| - \|y\| \leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{(norma Manhattan)}$$

$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \dots x_n^2}$ (lun. vector într-un spațiu Euclidian $\mathbb{R}^n$)

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in \mathbb{R}_+^*$$

$\|x\|_\infty := \sup(|x_1|, \dots, |x_n|)$ (norma infinit / uniformă / supremă)

Spațiul metric asociat unui spațiu normat

Pe orice spațiu ~~metric~~ normat se poate defini o metrică (distanța) canonică d prin $d(x,y) = \|x - y\|$, $\forall x, y \in X$.

i) $d(x,y) \geq 0$.

ii) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

iii) $d(x,y) = d(y,x)$ $\left(\|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = \|y-x\| \right)$

iv) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$\|x-y\| = \|x-z+z-y\| = \|x-z+(z-y)\| \leq \|x-z\| + \|z-y\|$

(inegalitatea triunghiului.

Identitatea paralelogramului:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

(14). Notiunea de vecinătate într-un spațiu metric și topologic și definiția unei funcții continue

Într-un spațiu metric. $M = (X, d)$, o mulțime V este o vecinătate a unui punct p dacă există o bilă de centru p și rază r a.î. : $B_r(p) = B(p; r) = \{x \in X \mid d(x, p) < r\}$ este conținută în V.

Într-un spațiu topologic, dacă $x \in \mathbb{R}^n$ atunci orice mulțime care conține o mulțime deschisă (în $\mathbb{R}^n$) ce conține x s.n. vecinătate în $\mathbb{R}^n$ a lui x.

$\mathcal{V}_x$ s.n mulțimea vecinătăților lui x.

2 -

Definiția unei funcții continue într-un spațiu metric.

Fie $f: X \to Y$ unde X, Y sunt submulțimi ale unor spații metrice ex: $X = Y = \mathbb{R}$, f s.n. continuă în $x_0 \in X$ dacă $\forall \varepsilon \in (0, \infty)$, $\exists\ \delta_\varepsilon \in (0, \infty)$ a.î. $\forall x \in X \{x_0\}$ $d_X(x, x_0) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, unde d_X reprezintă distanța din spațiul metric X iar d_Y distanța din spațiul metric Y.

(15). Păstrarea continuității a două funcții compuse:

(??) Fie (X, d); (Y, d) și (Z, d) spații metrice și funcțiile $f: X \to Y$; $g: Y \to Z$ continue în $x_0 \in X$, resp. $y_0 = f(x_0) \in Y$

notăm $h: X \to Z$

$h = f \circ g$.

$\forall x_0 \in X$, $\exists (x_n) \subset X$ a.î. $(x_n) \to x_0$.

f continuă $\Rightarrow f(x_n) \to f(x_0) \Rightarrow \forall f(x_0)\ \exists$ șirul $f(x_n) \subset Y$ a.î. $f(x_n) \to f(x_0)$. Cum g continuă $\Rightarrow g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$ $\Leftrightarrow (g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(x_0) \Leftrightarrow h(x_n) \to h(x_0)$ unde $x_n \subset X$, $x_0 \in X$.

$\Rightarrow h$ continuă în $\forall x_0 \in X$.

(16). Caracteristicile continuității într-un spațiu metric

Fie $f: X \to Y$ o aplicație între spații metrice (X, d), (Y, d) și $x_0 \in X$, atunci:

a) f este continuă în x_0

b) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ a.î. $\forall x \in X$ cu $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ dacă $f(S(x_0, \varepsilon)) \subset S(f(x_0), \varepsilon)$

c) $\forall (x_n)_{n \geq 1} \subset X$ cu limita x_0 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$

(17). Caracteristicile continuității într-un spațiu topologic

(18) Limita (convergenta simpla, convergenta uniformă). Teorema privind pastrarea continuității prin convergentă uniformă.

Fie $f_n, f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

a) f_n converge simplu (punctual) la f dacă

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists n_{x,\varepsilon}, \forall n \geq n_{x,\varepsilon} \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

b) f_n converge uniform

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in E : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

c) șirul f_n este Cauchy uniform dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon, \forall n, m \geq n_\varepsilon, \forall x \in E : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Proprietăți: – un șir este convergent uniform daca este Cauchy uniform
– dacă șirul converge uniform, at. converge simplu
– convergenta simplă nu atrage convergenta uniformă

T: Convergenta uniformă păstrează continuitatea.

19. Mărginirea funcțiilor continue (teorema, mulțimi secvențial compacte)

Fie $f : \Delta \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită și fie m, M marginile lui f, $m = \inf_{x \in \Delta} f(x)$ și $M = \sup_{x \in \Delta} f(x)$.

Se spune că f își atinge marginile pe Δ dacă există un punct $\alpha \in \Delta$ a.î. $f(\alpha) = m$ și $\beta \in \Delta$ a.î. $M = f(\beta)$.

Mulțime secvențial compactă

Fie (X, d) spațiu metric

$K \subset X$ s.n. secvențial compactă dacă $\forall (x_n)_n \subset K \Rightarrow$

$\exists\ x_{n_k} \to c \in K$.

Prop: Fie (X, d) spațiu metric secvențial compact și $f : X \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci $\exists\ c \in X$ a.î. $f(c) = \sup_{x \in X} f(x)$

20. Funcții uniform continue (def). Teorema privind continuitatea unei funcții continue definite pe un interval închis.

O funcție $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ se numește uniform continuă pe X dacă pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $(\forall)\ x, y \in X$ cu ~~d~~ $d_1(x, y) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Obs: 1) În timp ce noțiunea de continuitate are un caracter local, cea de uniform continuitate are un caracter global, ea definindu-se pe o mulțime.

2) Din definiție rezultă că, dacă există două șiruri $(x_n), (y_n) \subset X$ a.î. $d_1(x_n, y_n) \to 0$ și $d_2(f(x_n), f(y_n)) \not\to 0$ atunci f nu este uniform continuă.

3) Din definiție rezultă că, dacă f este uniform continuă pe X atunci f este continuă pe X.

Continuitatea unei funcții continue definite pe un interval închis

(Prima teoremă a lui Weierstrass) O funcție continuă pe un interval închis și mărginit $[a,b]$ este mărginită pe $[a,b]$.

Dem prin reducere la absurd. Să presupunem că funcția $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, continuă pe $[a,b]$, nu ar fi mărginită pe $[a,b]$. Deci, pentru orice număr $M > 0$ există un punct $\xi_M \in [a,b]$ a.î. $|f(\xi_M)| > M$. Să luăm $M = n$. Urmează că pt orice $n \in \mathbb{N}$ există un $\xi_n \in [a,b]$ a.î. $|f(\xi_n)| > n$.

Intervalul $[a,b]$ fiind mărginit și închis, șirul (ξ_n) este mărginit și, conform lemei lui Césaro, se poate extrage un subșir (ξ_{n_k}) convergent la un punct $\xi \in [a,b]$. Funcția fiind continuă pe $[a,b]$ este continuă și în ξ, deci $f(\xi_n) \to f(\xi_n)$ $\to f(\xi)$. Însă din $|f(\xi_{n_k})| > n_k$ deducem că pt $k \to \infty$ $|f(\xi_{n_k})| \to \infty$. Contradicție.

21. Cele două definiții ale derivabilității + proprietăția funcției derivabile.

Def 1: Se spune ca $f: I \to \mathbb{R}$ este derivabilă într-un punct $x_0 \in I$ dacă raportul $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ are limită finită în punctul x_0. Limita se numește derivata funcției f în punctul x_0 și se notează cu $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

* (20)

A doua teoremă a lui Weierstrass. O funcție continuă pe un interval închis și mărginit $[a,b]$ își atinge marginile pe $[a,b]$.

Funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, fiind continuă pe $[a,b]$, după teorema precedentă este mărginită pe $[a,b]$, deci există numerele m și M a.î. $m \le f(x) \le M$ unde m este marginea inferioară și M marginea superioară a valorilor funcției f pe $[a,b]$. Să arătăm că există un punct $\xi \in [a,b]$ în care $f(\xi)=m$.

Dem. se face prin reducere la absurd. Să presupunem că în niciun punct din $[a,b]$, funcția f nu ia valoarea m. Atunci după definiția marginii inferioare, urmează că $f(x)-m>0$ pe $[a,b]$ și deci funcția $f_1(x)=\frac{1}{f(x)-m}$ este continuă și pozitivă pe $[a,b]$. Prin urmare, conform teoremei precedente, f_1 este mărginită pe $[a,b]$ deci există un $M_1>0$ a.î. $f_1(x)\le M_1$, de unde rezultă că $m+\frac{1}{M_1}\le f(x)$, adică m nu ar mai fi marginea inferioară a valorilor funcției f pe $[a,b]$.

Teoremă (3). Dacă o funcție continuă pe un interval închis și mărginit $[a,b]$ ia valori de semne contrare la capetele intervalului, adică $f(a)\cdot f(b)<0$, atunci există cel puțin un punct $x_0\in(a,b)$ a.î. $f(x_0)=0$.

Să presupunem că $f(a)<0$, $f(b)>0$ și fie $x_1 + \frac{a+b}{2}$ mijlocul lui $[a,b]$. Dacă $f(x_1)=0$, x_1 este punctul căutat. În caz contrar, notăm cu $[a_1,b_1]$ acela dintre intervalele $[a,x_1]$ sau $[x_1,b]$ pentru care $f(a_1)<0$ $f(b_1)>0$ și fie $x_2=\frac{a_1+b_1}{2}$ mijlocul lui $[a_1,b_1]$. Dacă $f(x_2)=0$

x_2 este punctul căutat. În caz contrar, notăm cu $[a_2, b_2]$ acela dintre intervalele $[a_1, x_2]$ sau $[x_2, b_1]$ pentru care $f(a_2)<0$, $f(b_2)>0$. Continuând în acest mod, obținem un șir de intervale mărginite și închise
$I_n = [a_n, b_n]$ cu $I_{n+1} \subset I_n$ și $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$. Din lema lui Cesaro rezultă că $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x_0\}$, punctul x_0 fiind limita comună a celor două șiruri (a_n) și (b_n) și $x_0 \in [a,b]$. Deoarece $f(a_n)<0$ și $f(b_n)>0$ și f este continuă, trecând la limită pentru $n\to\infty$, urmează că $f(x_0)\leq 0$ și $f(x_0)\geq 0$, ceea ce conduce la $f(x_0)=0$.

Teorema (4). O funcție continuă pe un interval închis și mărginit $[a,b]$ ia cel puțin o dată toate valorile cuprinse între marginea inferioară m și marginea superioară M a valorilor sale pe $[a,b]$.

Fie $\alpha \in (m, M)$. Funcția $g(x) = f(x) - \alpha$ este continuă pe $[a,b]$. Dacă ξ_m și ξ_M sunt punctele pentru care $f(\xi)=m$ și $f(\xi_M)=M$, avem $g(\xi_m)<0$, $g(\xi_M)>0$. Deci există un punct x_0 cuprins între ξ_m și ξ_M a.î. $g(x_0)=0$, adică $f(x_0)=\alpha$.

Def 2 $\forall (x_n)_n \subset J \setminus \{x_0\}, \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(x_0)$$

Dacă $f'(x_0) \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ derivabilă în x_0 și $f'(x_0)$ este derivata sa în x_0.

Dacă funcția $f: J \to \mathbb{R}$ este derivabilă în $x_0 \in J$, atunci

22. Teorema lui Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy (cu demonstrație)

Teorema lui Fermat.

Fie $f: J \to \mathbb{R}$, def. pe $J \subset \mathbb{R}$ și x_0 un punct de extrem interior lui J. Dacă funcția f este derivabilă în x_0, atunci

$f'(x_0) = 0$.

Dem: Presupunem că x_0 este un maxim (o considerație similară se poate face în cazul că x_0 este minim). Atunci $\exists\ \delta > 0$ astfel ca $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (a,b)$ și avem $f(x_0) \geq f(x)\ \forall x$ cu $|x - x_0| < \delta$. Prin urmare pentru orice $h \in (0,\delta)$ avem

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Deoarece limita acestui raport când h tinde spre 0 există și este egală $f'(x_0)$ se trage concluzia că $f'(x_0) \leq 0$. Pe de altă parte, pentru $h \in (-\delta, 0)$ avem $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$ unde, de asemenea, limita când h tinde spre 0 există și este egală cu $f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$

Prin urmare $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Teorema lui Rolle

Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $a,b \in \mathbb{R}$ $a<b$. Dacă:

1) f este continuă pe intervalul închis $[a,b]$;
2) f este derivabilă pe intervalul deschis (a,b)
3) f are valori egale la capetele intervalului $f(a)=f(b)$

atunci există cel puțin un punct c din intervalul deschis (a,b), $c\in(a,b)$ în care derivata se anulează, $f'(c)=0$.

Dem.

1) Funcția f este constantă pe intervalul închis $[a,b]$. În acest caz $f'(x)=0$ $\forall x\in[a,b]$ și deci orice punct $c\in(a,b)$ răspunde concluziei teoremei

2) Funcția nu este constantă. Cum f este continuă pe un compact $[a,b]$, atunci din teorema lui Weierstrass f este mărginită și își atinge marginile pe compact, adică există $x_m, x_M \in [a,b]$ a.î.

$f(x_m)=m$

$f(x_M)=M$.

unde $M = \sup f(x)$, $m = \inf f(x)$ sunt marginea superioară, respectiv marginea inferioară a lui f. Deoarece f nu este constantă, rezultă $m<M$. ~~Dacă~~ Dacă punctul de minim x_m se află în în interiorul intervalului $[a,b]$ atunci conform Teoremei lui Fermat, $f'(x_m)=0$. Deci luând $c = x_m$ teorema este demonstrată. Dacă $x_m \in a,b$, deci x_m coincide cu unul din capetele intervalului $[a,b]$, atunci ~~conform Teoremei lui Fermat, $f'($~~ $f(a)=f(b)=f(x_m)=m<M=f(x_M)$

În acest caz este clar că x_M, punctul de maxim al lui f, se află în interiorul intervalului $[a,b]$. Din nou aplicând teorema lui Fermat se duce $f'(x_M)=0$.

Deci $c=x_M$ și teorema este complet demonstrată.

Teorema lui Cauchy

23) Definiția unui polinom Taylor. Formula privind funcțiile derivabile de ordin n.

Seria Taylor a unei funcții reale sau complexe f care este indefinit derivabilă pe o vecinătate a unui număr real sau complex a, este seria de puteri.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \dots$$

care poate fi scrisă în formă mai compactă:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

24) Teorema polinomului Taylor cu restul Lagrange

$\forall x \in J \ \exists \ \xi \in (a, x)$ sau $\xi \in (x, a)$ astfel încât:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \dots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Ex 23. Teorema lui Lagrange

Fie $f:[a,b] \to R \quad a,b \in R, a<b$

Daca : $f-$continua pe $[a,b]$; derivabila pe $(a,b) \Longrightarrow$ exista punctul $c \in (a,b)$ astfel incat :

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ formula lui Lagrange

Demonstrație:

Fie F : [a, b] → R cu F(x) = λ(x - a) – f(x) și să se determine λ∈R a. î. F să satisfacă condițiile din teorema lui Rolle. Avem F continuă pe [a, b], F derivabilă pe (a, b) cu F'(x) = λ - f ' x și punem condiția F(a) = F(b) = - f(a), atunci există c∈(a,b) a. î.

cu F'(c) = 0 daca si numai daca F'(c) = λ - f ' (c) sau f ' (c)= λ. Din F(a) = F(b) ⇒ λ(b - a) – f(b) = - f(a) ⇒ λ= (f(b)-f(a))/(b-a) și se obține:

f(b)-f(a) =(b-a) f ' (c)

Ex 23. Teorema Cauchy

Fie f si g doua functii, f,g:[a,b]→R, cu proprietatile:

a) f si g continue pe [a,b]
b) f si g derivabile pe (a,b)
c) g'(x)=0

atunci g(a)=g(b) si (∃) cel putin un punct c∈(a,b) a.i.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

DEMONSTRATIE

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{P.p.a.\ ca\ g(a)=g(b)}\\ \mathbf{g\ \ continua\ pe\ [a,b]}\\ \mathbf{g\ \ der.\ pe\ (a,b)}\end{array}\right\}\Rightarrow (\exists)\ \mathbf{cel\ putin\ un\ punct\ c\in(a,b)\ a.i.\ g'(c)=0}$$

$$\mathbf{dar\ g'(x)\neq 0\Rightarrow contradictie.}$$

$$\mathbf{\Rightarrow g(a)\neq g(b).}$$

$$\mathbf{Fie\ h(x)=f(x)+k\cdot g(x);k\ \text{-}\ constanta\ reala\ a.i.\ h(a)=h(b)}$$

$$\mathbf{\Rightarrow f(a)+k\cdot g(a)=f(b)+k\cdot g(b)}$$

$$\mathbf{\Rightarrow f(a)-f(b)=k\cdot g(b)-k\cdot g(a)}$$

$$\mathbf{\Rightarrow f(a)-f(b)=k(g(b)-g(a))}$$

$$\mathbf{\Rightarrow k=-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{h\ \ continua\ pe\ [a,b]}\\ \mathbf{h\ \ derivabila\ pe\ (a,b)}\\ \mathbf{h(a)=h(b)}\end{array}\right\}\Rightarrow (\exists)\ \mathbf{cel\ putin\ un\ punct\ c\in(a,b)\ a.i.\ h'(c)=0;}$$

$$\mathbf{h'(x)=f'(x)+k\cdot g'(x)}$$

$$\mathbf{h'(c)=f'(c)+k\cdot g'(c)}$$

$$\mathbf{\Rightarrow f'(c)+k\cdot g'(c)=0}$$

$$\mathbf{\Rightarrow k=-\frac{f'(c)}{g'(c)}}$$

$$\mathbf{\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}}$$

Ex 18. Funcții continue pe spații topologice

Fie X și Y două spații topologice, A o submulțime a lui X și fie f : A →Y

o funcție. Fie a un punct de acumulare al lui A (adică un punct cu proprietatea că

pentru orice U vecinătate a lui a, A ∩ (U \ {a})≠∅). Se spune că f are limita b∈Y în punctul a și se scrie $\lim_{x \to a} f(x)$=b dacă pentru orice vecinătate V a lui b există o vecinătate U_V a lui a astfel încât f(x) ∈ V pentru orice x ∈ (U_V \ {a}) ∩A.

Se spune că f : A →Y este continuă într-un punct a ∈ A dacă pentru orice vecinătate V a lui f(a) există o vecinătate U_V a lui a astfel încât f(x) ∈ V pentru orice x ∈ U_V ∩A. Se observă că f este continuă în orice punct izolat (adică un punct a∈A pentru care există o vecinătate U a lui a astfel încât A ∩ U = {a}).

Dacă a∈A este punct de acumulare pentru A, atunci f este continuă în a dacă și numai dacă $\lim_{x \to a} f(x)$=f(a). Dacă f este continuă în a și $(x_n)_n$ este un șir din X astfel încât $\lim_{n \to \infty}$ xn=a atunci $\lim_{n \to \infty}$ f(xn)=f(a)

Se spune că f : A →Y este continuă pe A dacă f este continuă în orice punct a ∈ A.

Dacă X și Y sunt două spații topologice și f:X→Y este o funcție, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. f continuă pe X

2. Pentru orice mulțime deschisă G ⊂ Y, f^{-1}(G) este deschisă în X

3. Pentru orice mulțime închisă F ⊂ Y, f^{-1}(F) este închisă în X

4. Pentru orice A ⊂ X avem f(A(barat)) ⊂f (A) (totul barat)

5. Pentru orice B ⊂ Y avem f^{-1} (B) (totul barat) ⊂f^{-1} (B(barat)).

Ex 3. Dem ca orice corp complet ordonat este arhimedian

Def: Un corp ordonat $(S,+,\cdot,\leq)$ s.m. arhimedian dacă $\forall x \in S \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ a.î $x \leq n$

Prop. Fie $(S,+,\cdot,\leq)$ corp ordonat at urm afirm echival.

1) S este arhimedian

2) $\forall x > 0\ \exists n \in \mathbb{N}^*$ a.î $\frac{1}{n} < x$

3) $\forall u > 0\ \forall x \in S \Rightarrow \exists n$ a.î $n \cdot u > x$

4) $\forall x, y \in S$ a.î $x < y \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}$ a.î $x < r < y$

$\exists\ r_1 \in \mathbb{Q}$ $\quad y < r_1 < x \Rightarrow r_1 \in A$

$r_1 > y$

contradicție y maj. pt A

<u>Def</u>: Un corp ordonat $(S, +, \cdot, \leq)$ s.n complet ordonat dacă $\forall$ mulțime $A \subseteq S$ mărginită superior are supremum.

<u>Teoremă</u>: Un corp complet ordonat este arhimedean

<u>dem</u>: Fie $(S, +, \cdot, \leq)$ corp complet ordonat

<u>Pp</u> S nu este arhimedean

$\exists\ x \in S$ a.î. $x \geq n\ \forall\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ este mărginită superior $\Rightarrow \exists$ supremumul mulț $\mathbb{N}$

$n+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \leq \sup \mathbb{N}\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow \sup(\underbrace{1+\mathbb{N}}_{}) \leq \sup \mathbb{N}$

$1 + \sup \mathbb{N} \Rightarrow 1 \leq 0$ contradicție

Notație $A \subseteq (S, +, \cdot)$

$a + A = \{a + x \mid x \in A\}$

$-A = \{-x \mid x \in A\}$

$A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$

<u>Obs</u> $\sup(a+A) = a + \sup A$

$\sup(-A) = -\inf A$

$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

$\inf(-A) = -\sup A$