Teorie PL

① Propoziția 1: O funcție S-sortată $f: A \to B$ este inversabilă $\Leftrightarrow$ este bijectivă.

Demonstrație:

"$\Rightarrow$"

Cum f este inversabilă $\Rightarrow \exists\, g: B \to A$ a.î. $g; f = 1B$

Fie $a, a' \in A$ atunci presupunem $f(a) = f(a') \in B$

Aplicăm g: $\underset{1B}{g(f(a))} = \underset{1B}{g(f(a'))} \Rightarrow a = a' \Rightarrow$ injectivă (1)

Fie $a \in A$ at $f(a) \in B$

Aplicăm g: $g(f(a)) = a \Rightarrow a \in g(x)$, $\forall x \in B$,

$f(x) = Img(g)$. Din $a \in A \Rightarrow A = Im(g) \Rightarrow$ surjectivă (2)

Din (1), (2) $\Rightarrow$ bijectivă □

"$\Leftarrow$"

Cum f este bijectivă, avem:

$f: A \to B$ injectivă

Definim $g: B \to A$, $g(b) = \begin{cases} a, & \text{dacă } b \in Im(f) \text{ și } f(a) = b \\ a_0, & \text{altfel (cu } a_0 \in A). \end{cases}$

astfel încât $\Rightarrow g \circ f = 1B$ (1)

$f: A \to B$ surjectivă

Fie $b \in B$ at $f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset$

Definim $g: B \to A$, $g(b) \in f^{-1}(\{b\})$

astfel încât $\Rightarrow f \circ g = 1A$ (2)

Din (1), (2) $\Rightarrow f$ inversabilă □

(2) Propoziția 2: Compunerea a 2 Σ-morfisme este un Σ-morfism.

Demonstrație:

Fie $h: A \to B$ și $g: B \to C$ 2 Σ-morfisme.

Arătăm că $h;g: A \to C$ este Σ-morfism.

Fie $\sigma = s_1 \ldots s_n \to s$ în Σ și $a_1 \in A_{s_1}, \ldots, a_n \in A_{s_n}$.

Se observă că $(h;g)_s(A_\sigma(a_1, \ldots, a_n)) =$

$= g_s(h_s(A_\sigma(a_1, \ldots, a_n)))$

$= g_s(B_\sigma(h_{s_1}(a_1), \ldots, h_{s_n}(a_n)))$

$= C_\sigma(g_{s_1}(h_{s_1}(a_1)), \ldots, g_{s_n}(h_{s_n}(a_n)))$

$= C_\sigma((h;g)_{s_1}(a_1), \ldots, (h;g)_{s_n}(a_n))$. $\square$

③ Propoziția 3: Fie $h : A \to B$ un Σ-morfism. Atunci h este izomorfism <=> este funcție S-sortată bijectivă.

Demonstrație:

"=>"

Pp. că h este izomorfism.

Atunci $\exists$ Σ-morfismul $h^{-1} : B \to A$ a.î. $h ; h^{-1} = 1A$ și $h^{-1} ; h = 1B$.

Deducem că $h_s ; h_s^{-1} = 1A_s$ și $h_s^{-1} ; h_s = 1B_s$, or. $s \in S$.

Deci h_s este inversabilă, și deci bijectivă, pt or. $s \in S$.

=> h este funcț. S-sortată bijectivă.

"<="

Pp. că h este funcție S-sortată bijectivă.

Pt. or. $s \in S$ există $h_s^{-1} : B_s \to A_s$ a.î. $h_s ; h_s^{-1} = 1A_s$ și $h_s^{-1} ; h_s = 1B_s$.

Definim Σ-morfismul $h^{-1} = \{h_s^{-1}\}_{s \in S}$

Evident avem

$$(h ; h^{-1})_s = h_s ; h_s^{-1} = 1A_s = (1A)_s$$

$$(h^{-1} ; h)_s = h_s^{-1} ; h_s = 1B_s = (1B)_s$$

Deci $h ; h^{-1} = 1A$ și $h^{-1} ; h = 1B$.

Trebuie să arătăm că funcția S-sortată $h^{-1} : B \to A$ este Σ-morfism.

Fie $\sigma : s_1, \ldots, s_n \to s$ în Σ și $(b_1, \ldots, b_n) \in B_{s_1} \times \ldots \times B_{s_n}$

Cum h este Σ-morfism, pt. $h_{s_1}^{-1}(b_1) \in A_{s_1}, \ldots, h_{s_n}^{-1}(b_n) \in A_{s_n}$

avem:

$h_s(A_\sigma(h_{s_1}^{-1}(b_1), \ldots, h_{s_n}^{-1}(b_n))) = B_\sigma(h_{s_1}(h_{s_1}^{-1}(b_1)), \ldots$
$, h_{s_n}(h_{s_n}^{-1}(b_n))) = B_\sigma(b_1, \ldots, b_n).$

Aplicam h_s^{-1} în ambele părți să obținem:

$$A_\sigma(h_{s_1}^{-1}(b_1), \ldots, h_{s_n}^{-1}(b_n)) = h_s^{-1}(B_\sigma(b_1, \ldots, b_n)).$$

$\Rightarrow h^{-1}: B \to A$ este homomorfism.

⑤ Propoziția 4: Compunerea a 2 izomorfisme $f: A \to B$ și $g: B \to C$ este un izomorfism $f;g: A \to C$. În plus,

$$(f;g)^{-1} = g^{-1}; f^{-1}$$

Demonstrație:

Pentru a demonstra că un morfism de la M la N este izomorfism având ca invers un alt morfism de la N la M este suficient să probăm că prin compunerea celor două morfisme, în ambele sensuri posibile, se obțin identitățile.

Prin urmare folosind egalitățile:

$f;f^{-1} = 1_A$, $f^{-1};f = 1_B$, $g;g^{-1} = 1_B$ și $g^{-1};g = 1_C$ deducem

$$(f;g);(g^{-1};f^{-1}) = f;(g;g^{-1});f^{-1} = f;1_B;f^{-1} = f;f^{-1} = 1_A$$

$$(g^{-1};f^{-1});(f;g) = g^{-1};(f^{-1};f);g = g^{-1};1_B;g = g^{-1};g = 1_C$$

ceea ce arată că $f;g$ este izomorfism având inversul $g^{-1};f^{-1}$!

(5) Propoziția 6:

1) Dacă I este inițială în K și $A \in K$ a.î. $A \simeq I$, at. A inițială în K.

Demonstrație:

Cum $A \in K$ a.î. $A \simeq I$ fie $i_A : A \to I$ un izomorfism. Fie $B \in K$. Cum I este inițială, $\exists$ un unic morfism $f_B : I \to B$.

Demonstrăm că $\exists$ un unic morfism $f_B^h : A \to B$.

• Existența: Considerăm $h := i_A ; f_B : A \to B$. Deoarece compunerea morfismelor este morfism, obținem că h este morfism.

• Unicitatea: Presupunem că există un alt morfism $g : A \to B$. Atunci $i_A^{-1} ; g : I \to B$ este morfism, deci $i_A^{-1} ; g = f_B$
$\Rightarrow g = i_A ; f_B = h$. □

2) Dacă A_1 și A_2 sunt inițiale în K, atunci $A_1 \simeq A_2$

Demonstrație:

Cum A_1 și A_2 sunt inițiale în K, există
• un unic morfism $f : A_1 \to A_2$ și
• un unic morfism $g : A_2 \to A_1$.

Avem $f ; g : A_1 \to A_1$, $1_{A_1} : A_1 \to A_1$, A_1 inițială $\Rightarrow$
$f ; g = 1_{A_1}$

$g ; f : A_2 \to A_2$, $1_{A_2} : A_2 \to A_2$ și A_2 inițială $\Rightarrow$
$g ; f = 1_{A_2}$

$\Rightarrow A_1 \simeq A_2$

(6) Teorema 1: Pt orice (S,Σ)-algebră B, $\exists$ un unic morfism $f: T_\Sigma \to B$.

Demonstrație:

Fie B o (S,Σ)-algebră.

Demonstrăm că $\exists$ un unic morfism $f: T_\Sigma \to B$.

- Existența: Definim $f: T_\Sigma \to B$ prin inducție pe termeni ($P(t) =$ "$f(t)$ este definit")

-> pasul inițial: dacă $\sigma : \to s \in \Sigma$, atunci $f_s(\sigma) := B_\sigma$

-> pasul de inducție: dacă $\sigma : s_1 \dots s_n \to s \in \Sigma$ și $t_1 \in (T_\Sigma)_{s_1}, \dots, t_n \in (T_\Sigma)_{s_n}$ a.î. $f_{s_1}(t_1), \dots, f_{s_n}(t_n)$ definite, atunci $f_s(\sigma(t_1,\dots,t_n)) := B_\sigma(f_{s_1}(t_1), \dots, f_{s_n}(t_n))$.

Din principiul inducției pe termeni, $f(t)$ este definită pt or. $t \in T_\Sigma$.

Demonstrăm că f este morfism.

-> dacă $\sigma : \to s \in \Sigma$, at $f_s(T_\sigma) = f_s(\sigma) = B_\sigma$;

-> dacă $\sigma : s_1 \dots s_n \to s \in \Sigma$ și $t_1 \in (T_\Sigma)_{s_1}, \dots, t_n \in (T_\Sigma)_{s_n}$, atunci $f_s(T_\sigma(t_1,\dots,t_n)) = f_s(\sigma(t_1,\dots,t_n)) = B_\sigma(f_{s_1}(t_1), \dots, f_{s_n}(t_n))$.

• Unicitatea

Fie $g: T_\Sigma \to B$ un morfism.

Demonstrăm că $g = f$ prin inducție pe termeni:

$$(P(t) = \text{" } g_s(t) = f_s(t) \text{ "})$$

-> Pasul inițial: dacă $\sigma: \to s \in \Sigma$, atunci $g_s(\sigma) = g_s(T_\sigma) = B_\sigma = f_s(\sigma)$.

-> Pasul de inducție: dacă $\sigma: s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$ și $t_1 \in (T_\Sigma)_{s_1}, \ldots, t_n \in (T_\Sigma)_{s_n}$ a.î.

$g_{s_1}(t_1) = f_{s_1}(t_1), \ldots, g_{s_n}(t_n) = f_{s_n}(t_n)$, atunci

$g_s(\sigma(t_1, \ldots, t_n)) = g_s(T_\sigma(t_1, \ldots, t_n)) = B_\sigma(g_{s_1}(t_1), \ldots, g_{s_n}(t_n)) = B_\sigma(f_{s_1}(t_1), \ldots, f_{s_n}(t_n)) = f_s(\sigma(t_1, \ldots, t_n))$.

Conform principiului inducției pe termeni, $g_s(t) = f_s(t)$ $\forall t \in T_{\Sigma, s}$, deci $g = f$ ■.

(7) Teorema 2: Dacă A și B sunt liber generate de X, atunci $A \simeq B$.

Demonstrație:

Fie $A = (A_S, A_\Sigma)$ și $B = (B_S, B_\Sigma)$ două (S,Σ)-algebre liber generate de X.

Notăm cu $i_A : X \to A_S$ și $i_B : X \to B_S$ funcțiile S-sortate incluziune a lui X în A_S și, respectiv, B_S.

(1) Deoarece A este liber generată de X, există un unic (S,Σ)-morfism $f : A \to B$ a.î. $i_A ; f = i_B$ ✓

(2) Similar, deoarece B este liber generată de X, există un unic (S,Σ)-morfism $g : B \to A$ a.î. $i_B ; g = i_A$. ✓

(3) Avem $i_A ; (f ; g) = (i_A ; f) ; g = i_B ; g = i_A$ și $i_A ; 1_A = i_A$

Cum A este liber generată de X, morfismele $f ; g$ și 1_A sunt unice cu proprietatea de mai sus $\Rightarrow f ; g = 1_A$.

(4) Avem $i_B ; (g ; f) = (i_B ; g) ; f = i_A ; f = i_B$ și $i_B ; 1_B = i_B$

Cum B este liber generată de X, obținem $g ; f = 1_B$

$\Rightarrow$ (3), (4) $\Rightarrow f, g$ izomorfisme.

8 **Teorema 5:**

Fie $B = (B_S, B_\Sigma)$ o (S,Σ)-algebră. Orice funcție S-sortată $e: X \to B_S$ se extinde unic la un (S,Σ)-morfism $\tilde{e}: T_\Sigma(X) \to B$.

Demonstrație:

Fie B o (S,Σ)-algebră și $e: X \to B_S$ o funcție S-sortată.
Demonstrăm că există un unic morfism $\tilde{e}: T_\Sigma(X) \to B$ a.î. $\tilde{e}_s(x) = e_s(x)$, or. $x \in X_s$.

• Existența:

Definim $\tilde{e}: T_\Sigma(X) \to B$ prin inducție pe termeni:

$(P(t) =$ "$\tilde{e}(t)$ este definit").

→ Pasul inițial:

- dacă $x \in X_s$, atunci $\tilde{e}_s(x) := e_s(x)$,
- dacă $\sigma: \to s \in \Sigma$, atunci $\tilde{e}_s(\sigma) := B_\sigma$.

→ Pasul de inducție:

dacă $\sigma: s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$ ~~atunci~~ $\cancel{\tilde{e}_s(\sigma) := B_\sigma}$ și $t_1 \in T_\Sigma(X)_{s_1}, \ldots, t_n \in T_\Sigma(X)_{s_n}$ a.î. $\tilde{e}_{s_1}(t_1), \ldots, \tilde{e}_{s_n}(t_n)$ definite, atunci $\tilde{e}_s(\sigma(t_1, \ldots, t_n)) := B_\sigma(\tilde{e}_{s_1}(t_1), \ldots, \tilde{e}_{s_n}(t_n))$.

Conform principiului inducției pe termeni, $\tilde{e}(t)$ este definit pt orice $t \in T_\Sigma(X)$. Evident, $\tilde{e}_s(x) = e_s(x)$, or. $x \in X_s$.

Demonstrăm că $\tilde{e}$ este morfism

- dacă $\sigma: \to s \in \Sigma$, at $\tilde{e}_s(T_\sigma) = \tilde{e}_s(\sigma) = B_\sigma$,
- dacă $\sigma: s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$ și $t_1 \in (T_\Sigma(X))_{s_1}, \ldots, t_n \in (T_\Sigma(X))_{s_n}$, atunci

$\tilde{e}_s(T_\sigma(t_1, \ldots, t_n)) = \tilde{e}_s(\sigma(t_1, \ldots, t_n)) = B_\sigma(\tilde{e}_{s_1}(t_1), \ldots, \tilde{e}_{s_n}(t_n))$.

• Unicitatea:

Fie $g : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$ un morfism a.î. $g_s(x) = e_s(x)$, or. $x \in X_s$. Demonstrăm că $g = \tilde{e}$ prin inducție pe termeni

$$(P(t) = \text{"} g_s(t) = \tilde{e}_s(t) \text{"}).$$

• pasul inițial

→ dacă $x \in X$, atunci $g_s(x) = e_s(x) = \tilde{e}_s(x)$,

→ dacă $\sigma : \to s \in \Sigma$, at $g_s(\sigma) = \mathcal{B}_\sigma = \tilde{e}_s(\sigma)$.

• pasul de inducție

dacă $\sigma : s_1 \dots s_n \to s \in \Sigma$ și $t_1 \in T_\Sigma(X)_{s_1}, \dots, t_n \in T_\Sigma(X)_{s_n}$ a.î. $g_{s_1}(t_1) = \tilde{e}_{s_1}(t_1), \dots, g_{s_n}(t_n) = \tilde{e}_{s_n}(t_n)$, atunci

$g_s(\sigma(t_1, \dots, t_n)) = \mathcal{B}_\sigma(g_{s_1}(t_1), \dots, g_{s_n}(t_n)) =$
$\mathcal{B}_\sigma(\tilde{e}_{s_1}(t_1), \dots, \tilde{e}_{s_n}(t_n)) = \tilde{e}_s(\sigma(t_1, \dots, t_n))$.

Conform principiului inducției pe termeni, $g_s(t) = \tilde{e}_s(t)$, oricare $t \in T_\Sigma(X)_s$, deci $g = \tilde{e}$.

③ Propoziția 6:

1) Fie $h: A \to B$ un (S,Σ)-morfism surjectiv și X o mulțime de variabile.
Pt orice (S,Σ)-morfism $f: T_\Sigma(X) \to B$, există un (S,Σ)-morfism $g: T_\Sigma(X) \to A$ a.î. $g;h = f$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] & B \\ & T_\Sigma(X) \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, dashed, "g"] \end{tikzcd}$$

Demonstrație:

Fie $f: T_\Sigma(X) \to B$ un morfism.
Cum h este surjectiv, pt or. $x \in X$, $\exists\, a \in A_s$ a.î. $h_s(a) = f_s(x)$
Pt orice $s \in S$ și $x \in X_s$, alegem $a \in A_s$ a.î. $h_s(a) = f_s(x)$
și definim $e_s(x) := a$.
Deci $e: X \to A$.
Considerăm $\tilde{e}: T_\Sigma(X) \to A$ extensia unică a lui $e: X \to A$.
Cum $T_\Sigma(X)$ este algebră liberă și $(\tilde{e};h)_s(x) = f_s(x)$, oricare $x \in X_s$, obținem că $\tilde{e};h = f$.

Luăm $g := \tilde{e}$

(4) Propoziția 7:

Fie $\mathcal{B}$ o (S,Σ)-algebră și X o mulțime de variabile. Dacă $f: T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$ și $g: T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$ sunt morfisme, atunci

$$g = f \iff g \upharpoonright X = f \upharpoonright X.$$

Demonstrație:

Se demonstrează că $g = f$ prin inducție pe termeni

$$(P(t) = \text{"} g_s(t) = f_s(t) \text{"})$$

- Pasul inițial

dacă $\sigma : \to s \in \Sigma$, atunci $g_s(\sigma) = g_s(T_\sigma) = \mathcal{B}_\sigma = f_s(\sigma)$

- Pasul de inducție

dacă $\sigma : s_1 \dots s_n \to s \in \Sigma$ și

$t_1 \in (T_\Sigma)_{s_1}, \dots, t_n \in (T_\Sigma)_{s_n}$ a.î.

$g_{s_1}(t_1) = f_{s_1}(t_1), \dots, g_{s_n}(t_n) = f_{s_n}(t_n)$ at

$$g_s(\sigma(t_1, \dots, t_n)) = g_s(T_\sigma(t_1, \dots, t_n)) = \mathcal{B}_\sigma(g_{s_1}(t_1), \dots, g_{s_n}(t_n)) =$$

$$= \mathcal{B}_\sigma(f_{s_1}(t_1), \dots, f_{s_n}(t_n)) = f_s(\sigma(t_1, \dots, t_n)).$$

Conform principiului inducției pe termeni, $g_s(t) = f_s(t)$, oricare $t \in T_{\Sigma, s}$, deci $g = f$ □

Propoziție:

Dacă $X \simeq Y$, atunci $T_\Sigma(X) \cong T_\Sigma(Y)$

Demonstrație:

Fie $h : X \to Y$ un izomorfism și $g : Y \to A$.

Atunci $g(Y) = g;h;h^{-1}(Y) = g;h(X) = g;h(T_\Sigma(X)) \Rightarrow$

$\Rightarrow T_\Sigma(X)$ și $T_\Sigma(Y)$ sunt liber generate de $Y \Rightarrow T_\Sigma(X) \cong T_\Sigma(Y)$

(12) Propoziția:

Dacă $X \simeq Y$, atunci $T_\Sigma(X) \simeq T_\Sigma(Y)$

Demonstrație:

Fie $h : X \to Y$ un izomorfism și $g : Y \to A$.

Atunci $g(Y) = g;h;h^{-1}(Y) = g;h(X) = g;h(T_\Sigma(X)) \Rightarrow$

$\Rightarrow T_\Sigma(X)$ și $T_\Sigma(Y)$ sunt liber generate de $Y \Rightarrow T_\Sigma(X) \simeq T_\Sigma(Y)$.

(12) Propoziția 3:

1) Dacă $ker(f)$ este o congruență pe A.

Demonstrație:

Fie $s_1 s_2 \dots s_n \in S^*$, $s \in S$ și $\sigma \in \Sigma_{s_1 \dots s_n, s}$

Pp că $a_i \; ker(f_{s_i}) \; b_i$ în A_{s_i} pt orice $1 \leq i \leq n$

$\Rightarrow f_{s_i}(a_i) = f_{s_i}(b_i)$ pt orice $1 \leq i \leq n$.

Prin urmare

$$f_s(A_\sigma(a_1, a_2, \dots, a_n)) =$$
$$B_\sigma(f_{s_1}(a_1), f_{s_2}(a_2), \dots, f_{s_n}(a_n)) =$$
$$B_\sigma(f_{s_1}(b_1), f_{s_2}(b_2), \dots, f_{s_n}(b_n)) =$$
$$f_s(A_\sigma(b_1, b_2, \dots, b_n))$$

$\Rightarrow A_\sigma(a_1, a_2, \dots, a_n) \; ker(f_s) \; A_\sigma(b_1, b_2, \dots, b_n)$

$\Rightarrow ker(f)$ este congruență

(13) Teorema 4: Proprietatea de universalitate a algebrei cât.

Fie $\mathcal{A}$ o (S,Σ)-algebră și $\equiv$ o congruență pe $\mathcal{A}$. pt orice (S,Σ)-algebră și pentru orice morfism $h: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ a.î. $\equiv \subseteq Ker(h)$, at există un unic morfism $\overline{h}: \mathcal{A}/_{\equiv} \to \mathcal{B}$ a.î. $[\cdot]_{\equiv} ; \overline{h} = h$.

Demonstrație

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "{[\cdot]_{\equiv}}"] \arrow[d, "h"] & \mathcal{A}/_{\equiv} \arrow[dl, dashed, "\overline{h}"] \\ \mathcal{B} & \end{tikzcd}$$

Fie $\mathcal{B}$ o (S,Σ)-algebră și $h: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfism a.î. $\equiv \subseteq Ker(h)$.

• Existența:

Definim $\overline{h}_s([a]_{\equiv_s}) := h_s(a)$, pt orice $a \in A_s$

$\to \overline{h}$ este bine: Tb să arătăm $[a_1]_{\equiv_s} = [a_2]_{\equiv_s} \Rightarrow h_s(a_1) = h_s(a_2)$.

Pp că $[a_1]_{\equiv_s} = [a_2]_{\equiv_s}$. Atunci $(a_1, a_2) \in \equiv_s \subseteq Ker(h)$ deci $h_s(a_1) = h_s(a_2)$.

$\to \overline{h}$ este morfism:

dacă $\sigma: \to s \in \Sigma$, at $\overline{h}_s((\mathcal{A}/_{\equiv})_\sigma) = \overline{h}_s([A_\sigma]_{\equiv_s}) = h_s(A_\sigma) = B_\sigma$.

dacă $\sigma: s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$ și $a_1 \in A_{s_1}, \ldots a_n \in A_{s_n}$, at

$\overline{h}_s((\mathcal{A}/_{\equiv})_\sigma([a_1]_{\equiv_{s_1}}, \ldots, [a_n]_{\equiv_{s_n}})) =$
$\overline{h}_s([A_\sigma(a_1, \ldots, a_n)]_{\equiv_s}) = h_s(A_\sigma(a_1, \ldots, a_n)) =$
$B_\sigma(h_{s_1}(a_1), \ldots, h_{s_n}(a_n)) = B_\sigma(\overline{h}_{s_1}([a_1]_{\equiv_{s_1}}), \ldots, \overline{h}_{s_n}([a_n]_{\equiv_{s_n}}))$.

• Unicitatea:

Fie $g: \mathcal{A}/_{\equiv} \to \mathcal{B}$ a.î. $[\cdot]_{\equiv} ; g = h$. Atunci

$g_s([a]_{\equiv_s}) = h_s(a) = \overline{h}_s([a]_{\equiv_s})$, or. $a \in A_s$ □

(14) Teorema 6:

Fie $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ două (S,Σ)-algebre a.î. $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ și $\gamma := (\forall X)\, t \doteq_s t'$ if H. Atunci $\mathcal{A} \models \gamma \iff \mathcal{B} \models \gamma$.

Demonstrație:

"$\Rightarrow$" Fie $i : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ un izomorfism

Fie $e : X \to B_s$ a.î. $\tilde{e}_{s'}(u) = \tilde{e}_{s'}(v)$, or. $u \doteq_{s'} v \in H$

Definim $f : X \to A_s$ prin $f := e ; i$.

Deoarece $\tilde{f} \upharpoonright X = (\tilde{e} ; i) \upharpoonright X$, obținem $\tilde{f} = \tilde{e} ; i$.

Atunci $\tilde{f}_{s'}(u) = i_{s'}(\tilde{e}_{s'}(u)) = i_{s'}(\tilde{e}_{s'}(v)) = \tilde{f}_{s'}(v)$, or. $u \doteq_{s'} v \in H$.

Cum $\mathcal{A} \models \gamma \Rightarrow \tilde{f}_s(t) = \tilde{f}_s(t')$, i.e. $i_s(\tilde{e}_s(t)) = i_s(\tilde{e}_s(t'))$.

Cum i este injectivă, obținem $\tilde{e}_s(t) = \tilde{e}_s(t')$, deci $\mathcal{B} \models \gamma$.

"$\Leftarrow$" (similar) Fie $i : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un izomorfism

Fie $e : X \to A_s$ a.î. $\tilde{e}_{s'}(u) = \tilde{e}_{s'}(v)$ or. $u \doteq_{s'} v \in H$

Definim $f : X \to B_s$ prin $f := e ; i$

Deoarece $\tilde{f} \upharpoonright X = (\tilde{e} ; i) \upharpoonright X$, obținem $\tilde{f} = \tilde{e} ; i$.

Atunci $\tilde{f}_{s'}(u) = i_{s'}(\tilde{e}_{s'}(u)) = i_{s'}(\tilde{e}_{s'}(v)) = \tilde{f}_{s'}(v)$, or. $u \doteq_{s'} v \in H$.

Cum $\mathcal{B} \models \gamma \Rightarrow \tilde{f}_s(t) = \tilde{f}_s(t')$, i.e.

$i_s(\tilde{e}_s(t)) = i_s(\tilde{e}_s(t'))$.

Cum i este injectivă, obținem $\tilde{e}_s(t) = \tilde{e}_s(t')$, deci $\mathcal{A} \models \gamma$ □ 19/

(16) **Propoziția 11**

Dacă $\equiv$ este o congruență pe $\mathcal{A}$ închisă la substituții atunci $\mathcal{A}/_{\equiv} \models \Gamma$.

Demonstrație

~~Algebra~~ Fie $(\forall X)\, t \doteq_s t'$ if $H \in \Gamma$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "{[\cdot]_{\equiv}}"] & \mathcal{A}/_{\equiv} \\ & T_\Sigma(X) \arrow[u, "\tilde{e}"'] \arrow[ul, dashed, "g"] \end{tikzcd}$$

Arătăm că $\mathcal{A}/_{\equiv} \models (\forall X)\, t \doteq_s t'$ if H.

Fie $e : X \to \mathcal{A}/_{\equiv}$ a.î. $\tilde{e}_{s'}(u) = \tilde{e}_{s'}(v)$, or $u \doteq_{s'} v \in H$

Cum $[\cdot]_{\equiv} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/_{\equiv}$ morfism surjectiv și $\tilde{e} : T_\Sigma(X) \to \mathcal{A}/_{\equiv}$, există $g : T_\Sigma(X) \to \mathcal{A}$ a.î. $g ; [\cdot]_{\equiv} = \tilde{e}$.

Atunci $[g_{s'}(u)]_{\equiv_{s'}} = [g_{s'}(v)]_{\equiv_{s'}}$, i.e. $g_{s'}(u) \equiv_{s'} g_{s'}(v)$ or $u \doteq_{s'} v \in H$.

Cum $\equiv$ congruență pe $\mathcal{A}$ închisă la substituții, obținem $g_s(t) \equiv_s g_s(t')$. Deci $\tilde{e}_s(t) = \tilde{e}_s(t')$. $\square$

(15) Propoziția 4.4

Regulile de deducție R, S, T, C_Σ, Sub_Γ sunt corecte.

- C_Σ
  - Fie $\sigma : s_1 \dots s_n \to s \in \Sigma$ și presupunem $\Gamma \models (\forall X) t_1 \doteq_{s_1} t_1', \dots, \Gamma \models (\forall X) t_n \doteq_{s_n} t_n'$.
  - Trebuie să arătam că $\Gamma \models (\forall X) \sigma(t_1, \dots, t_n) \doteq_s \sigma(t_1', \dots, t_n')$:
    -> fie $\mathcal{A} \models \Gamma$ și $f : T_\Sigma(X) \to \mathcal{A}$ un morfism
    -> din ip $f_{s_1}(t_1) = f_{s_1}(t_1') \dots f_{s_n}(t_n) = f_{s_n}(t_n')$
    -> avem $f_s(\sigma(t_1, \dots, t_n)) = A_\sigma(f_{s_1}(t_1), \dots f_{s_n}(t_n))$
    $= A_\sigma(f_{s_1}(t_1'), \dots, f_{s_n}(t_n')) = f_s(\sigma(t_1', \dots, t_n'))$
    => deci $\mathcal{A} \models (\forall X) \sigma(t_1, \dots, t_n) \doteq_s \sigma(t_1', \dots, t_n')$ □
- Sub_Γ
  - Fie $(\forall Y) t \doteq_s t'$ if $H \in \Gamma$, $H = \{u_1 \doteq_{s_1} v_1, \dots, u_n \doteq_{s_n} v_n\}$ și $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$ a.î. $\Gamma \models (\forall X) \theta(u_i) \doteq_{s_i} \theta(v_i)$ or. $1 \le i \le n$
  - Trebuie să arătam că $\Gamma \models (\forall X) \theta(t) \doteq_s \theta(t')$:
    -> fie $\mathcal{A} \models \Gamma$ și $f : T_\Sigma(X) \to \mathcal{A}$ un morfism
    -> atunci $\tilde{\theta}; f; T_\Sigma(Y) \to \mathcal{A}$
    -> din ip., avem $(\tilde{\theta}; f)_{s_i}(u_i) = (\tilde{\theta}; f)_{s_i}(v_i)$ or $1 \le i \le n$.
    -> deoarece $\mathcal{A} \models (\forall Y) t \doteq_s t'$ if $H \in \Gamma$, obținem
    $(\tilde{\theta}; f)_s(t) = (\tilde{\theta}; f)_s(t')$, i.e. $f_s(\tilde{\theta}(t)) = f_s(\tilde{\theta}(t'))$.
    -> deci $\mathcal{A} \models (\forall X) \tilde{\theta}(t) \doteq_s \tilde{\theta}(t')$, echivalent cu $\mathcal{A} \models (\forall X) \theta(t) \doteq_s \theta(t')$ □

(16) Teorema 7:

$\Gamma \vdash (\forall X) t \doteq_s t' \Rightarrow \Gamma \models (\forall X) t \doteq_s t'$

Demonstrație:

- Fie $e_1, \dots, e_n = (\forall X) t \doteq_s t'$ o Σ-demonstrație
- Demonstrăm că $\Gamma \models e_i$ prin inducție după $i = 1, \dots, n$:
  - → Pt. $i = 1$ avem 3 cazuri:
    - $e_1 \in \Gamma$
    - $e_1 = (\forall X) t_1 \doteq_{s_1} t_1$ prin R,
    - $e_1 = (\forall X) \theta(t_1) \doteq_{s_1} \theta(t_1')$ prin Sub_Γ pt $(\forall Y) t_1 \doteq_{s_1} t_1' \in \Gamma$ și $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$.
    - Cum R și Sub_Γ sunt corecte, rezultă $\Gamma \models e_1$.
  - → Pres. $\Gamma \models e_1, \dots, \Gamma \models e_{i-1}$.
    - Știm că e_i se obț din $e_1, \dots e_{i-1}$ aplicând una din $R, S, T, C_\Sigma, Sub_\Gamma$
    - Cum $R, S, T, C_\Sigma, Sub_\Gamma$ sunt corecte $\Rightarrow \Gamma \models e_i$ □

• ~~R~~

În continuare vom reprezenta termenii prin variabile

Cunoaștem faptul că $a \ker(f)\, b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$

• R

$arb(t) \ker(f)\, arb(t) \Rightarrow$ regulă corectă

• S

$arb_1(t_1) \ker(f)\, arb_2(t_2) \Rightarrow arb_2(t_2) \ker(f)\, arb_1(t_1)$

$\Rightarrow$ regulă corectă

• T

$$\left.\begin{array}{l} arb_1(t_1) \ker(f)\, arb_2(t_2) \\ \text{și} \\ arb_2(t_2) \ker(f)\, arb_2(t_3) \end{array}\right\} \Rightarrow arb_1(t_1) \ker(f)\, arb_3(t_3)$$

$\Rightarrow$ regulă corectă.

(17) <u>Propoziția 16:</u>

1) $\sim$ este congruență pe $T_\Sigma(X)$
2) $\sim$ este închisă la $R, S, T, C\Sigma$.

<u>Demonstrație</u>

"$\Rightarrow$" Pp $\sim$ congruență pe T_Σ.
Cum $\sim$ este o relație de congruență pe $T_\Sigma(X)$
$\Rightarrow$ $\sim$ relație de echivalență i.e este reflexivă, simetrică și tranzitivă ~~$\Rightarrow$ $\sim$ este~~, iar mai mult de atât este compatibilă cu operațiile
$\Rightarrow$ pt or $\sigma: s_1 \ldots s_n \to s$ și $t_1 \sim_{s_1} t_1', \ldots, t_n \sim_{s_n} t_n'$
avem $\sigma(t_1, \ldots, t_n) \sim_s \sigma(t_1', \ldots, t_n')$ ∎
$\Rightarrow$ $\sim$ este închisă la $R, S, T, C\Sigma$. ∎

"$\Leftarrow$" Pp. că $\sim$ este închisă la $R, S, T, C\Sigma$.
Cum $\sim$ este închisă la R, S, T $\Rightarrow$ $\sim$ este reflexivă, simetrică și tranzitivă $\Rightarrow$ $\sim$ este echivalență pe $T_\Sigma(X)$.

Arătăm că $\sim$ este compatibilă cu operațiile
Fie $\sigma: s_1 \ldots s_n \to s$ și $t_1 \sim_{s_1} t_1', \ldots, t_n \sim_{s_n} t_n'$
deoarece $\sim$ este închisă la $C\Sigma$, obț

$\sigma(t_1, \ldots, t_n) \sim_s \sigma(t_1', \ldots, t_n')$ ∎

(26) <u>Teorema:</u>

$\Gamma \models (\forall X)\, t \doteq_s t' \Rightarrow \Gamma \vdash (\forall X)\, t \doteq_s t'$.

<u>Demonstrație</u>

- echivalența sintactică: $t \sim_{\Gamma_s} t' \Leftrightarrow \Gamma \vdash (\forall X)\, t \doteq_s t'$.
- echivalența semantică: $t \equiv_{\Gamma_s} t' \Leftrightarrow \Gamma \models (\forall X)\, t \doteq_s t'$.
- $\sim_\Gamma$ congruență pe $T_\Sigma(X)$ închisă la subst.
- $\equiv_\Gamma$ este cea mai mică congruență pe $T_\Sigma(X)$ închisă la substituție.

$\Rightarrow \equiv_\Gamma \subseteq \sim_\Gamma$, i.e. $\Gamma \models (\forall X)\, t \doteq_s t' \Rightarrow$

$\Rightarrow \Gamma \vdash (\forall X)\, t \doteq_s t'$ $\square$

Propoziția 10:

SR_Γ este regulă de deducție corectă.

Demonstrație:

- Fie $(\forall Y)\, t \doteq_s t'$ și $H \in \Gamma$, $H = \{u_1 \doteq_{s_1} v_1, \ldots, u_n \doteq_{s_n} v_n\}$, $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$ substituție, $c \in T_\Sigma(X \cup \{z\})_{s'}$, $z \notin X$, $nr_z(c) = 1$ a.î. ~~$\Gamma \models (\forall X)\, c[z \leftarrow \theta(t)] \doteq_{s'} c[z \leftarrow \theta(t')]$~~

  $\Gamma \models (\forall X)\, \theta_X(u_i) \doteq_{s_i} \theta_X(v_i)$, or. $1 \le i \le n$.
- Demonstrăm că $\Gamma \models (\forall X)\, c[z \leftarrow \theta(t)] \doteq_{s'} c[z \leftarrow \theta(t')]$ prin inducție după $|c|$ (lungimea lui c):
  - → dacă $|c| = 1$, atunci $c = z$ și $\Gamma \models (\forall X)\, \theta(t) \doteq_{s'} \theta(t')$ deoarece Sub_Γ este corectă.
  - → pres. că $\Gamma \models (\forall X)\, c'[z \leftarrow \theta(t)] \doteq_{s'} c'[z \leftarrow \theta(t')]$ dacă $|c'| < |c|$.
  - → există $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s' \in \Sigma$, $t_1 \in T_\Sigma(X)_{s_1}, \ldots, t_n \in T_\Sigma(X)_{s_n}$ și k a.î. $c = \sigma(t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_n)$ și $nr_z(t_k) = 1$
  - → pt contextul t_k aplicăm ipoteza de inducție:

    $\Gamma \models (\forall X)\, t_k[z \leftarrow \theta(t)] \doteq_{s_k} t_k[z \leftarrow \theta(t')]$
  - → Cum regula R este corectă, avem $\Gamma \models (\forall X)\, t_i \doteq_{s_i} t_i$, $i \neq k$
  - → Cum regula C_Σ este corectă obținem:

    $\Gamma \models (\forall X)\, \sigma(t_1, \ldots, t_k[z \leftarrow \theta(t)], \ldots, t_n) \doteq_{s'} \sigma(t_1, \ldots, t_k[z \leftarrow \theta(t')], \ldots, t_n)$
  - → observăm că $c[z \leftarrow P] = \sigma(t_1, \ldots, t_k[z \leftarrow P], \ldots, t_n)$ or. $P \in T_\Sigma(X)_s$.
  - → $\Gamma \models (\forall X)\, c[z \leftarrow \theta(t)] \doteq_{s'} c[z \leftarrow \theta(t')]$. ∎

(22) Teorema 10:

Sunt echivalente

1) $\Gamma \vdash_{R,S,T,C_\Sigma,Sub_\Gamma} (\forall X)\, t \doteq_s t'$
2) $\Gamma \vdash_{R,S,T,SR_\Gamma} (\forall X)\, t \doteq_s t'$.

Demonstrație

"⇒" Este suficient să arătăm că $\sim_\Gamma = \sim_{SR}$.

"⇒" $\sim_{SR}$ congruență pe $T_\Sigma(X)$ închisă la substituții.

$\sim_\Gamma = \equiv_\Gamma$ și $\equiv_\Gamma$ cea mai mică congruență pe $T_\Sigma(X)$ închisă la substituții $\Rightarrow \sim_\Gamma \subseteq \sim_{SR}$.

"⇐"

Din corectitudinea regulii SR_Γ, obținem $\sim_{SR} \subseteq \equiv_\Gamma$

$\Rightarrow \sim_{SR} \subseteq \equiv_\Gamma = \sim_\Gamma$. □

(23) Teorema 11:

$E \vdash (\forall X)\, t \doteq_s t' \Leftrightarrow t \leftrightarrow^*_E t'$

Propozițiile 19 – 25:

19: Fie $(T, \to)$ sistem de rescriere. Dacă $t \downarrow t'$, atunci $t \overset{*}{\leftrightarrow} t'$

D: Dacă $t \downarrow t'$, at $\exists$ t_0 a.î. $t \overset{*}{\to} t_0 \overset{*}{\leftarrow} t'$, i.e. $t \overset{*}{\leftrightarrow} t'$ □

20: Fie $(T, \to)$ sistem de rescriere noetherian $\Rightarrow$ $\forall$ elem are f.n

D: evident. □

21: Fie $(T, \to)$ sistem de rescriere complet $\Rightarrow$ orice elem are o unică formă normală $fn(t)$.

D: Deoarece $(T, \to)$ noetherian, t are o formă normală, i.e $t \overset{*}{\to} t'$ și t în f.n.

Pp că t mai are o altă formă normală t''!

Cum $t \overset{*}{\to} t''$ și $t \overset{*}{\to} t'$ din confluență avem $t' \downarrow t''$

Cum t' și t'' sunt în f.n $\Rightarrow$ $t' = t''$. □

23: Fie $(T, \to)$ sistem de rescriere confluent $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ local confluent

D: evident □

25: Fie $(T, \to)$ sistem de rescriere complet.

$$t \overset{*}{\leftrightarrow} t' \Leftrightarrow fn(t) = fn(t').$$

D:

"$\Leftarrow$" Dacă $fn(t) = fn(t')$, at evident $t \downarrow t'$. Aplicăm $P19^{(1)}$.

"$\Rightarrow$" Cum $(T, \to)$ este complet, este confluent și or. elem are o unică formă normală. Din $P22^{(4)}$ este Church-Rosser.

Deoarece $t \overset{*}{\leftrightarrow} t'$, obț că $t \downarrow t'$ i.e. există w a.î $t \overset{*}{\to} w \overset{*}{\leftarrow} t'$.

Fie u unica f.n a lui w.

$\Rightarrow$ $t \overset{*}{\to} u \overset{*}{\leftarrow} t'$ $\Rightarrow$ $fn(t) = fn(t')$.

P22: Fie $(T, \to)$ sistem de rescriere. Acesta este confluent $\Leftrightarrow$ este Church-Rosser.

D:

"$\Leftarrow$" Pp. $t_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} t_2$ at $t_1 \xleftrightarrow{*} t_2$ cum $(T, \to)$ este Church-Rosser $\Rightarrow t_1 \downarrow t_2 \Rightarrow (T, \to)$ este confluent.

"$\Rightarrow$" Pp. $t_1 \xleftrightarrow{*} t_2$. At $\exists$ n și $t_1', \dots, t_n'$ a.î.:
$t_1 = t_1' \leftrightarrow t_2' \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t_n' = t_2$.

Dem prin inducție după n că dacă $t_1' \leftrightarrow t_2' \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t_n'$, atunci $t_1' \downarrow t_n'$:

- $n = 1$ evident $t_1' \downarrow t_1'$
- $n \to n+1$: Pp $t_1' \leftrightarrow t_2' \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t_n' \leftrightarrow t_{n+1}'$

Din ip de inducție știm $t_1' \downarrow t_n'$. At există w a.î. $t_1' \xrightarrow{*} w \xleftarrow{*} t_n'$. Avem 2 cazuri

$\to$ $t_{n+1}' \to t_n'$: evident $t_1' \xrightarrow{*} w \xleftarrow{*} t_n' \leftarrow t_{n+1}'$, deci $t_1' \downarrow t_{n+1}'$.

$\to$ $t_n' \to t_{n+1}'$: cum $w \xleftarrow{*} t_n' \to t_{n+1}'$ și $(T, \to)$ ~~noetherian~~ confluent obținem $w \downarrow t_{n+1}'$. Deci există w' a.î. $w \xrightarrow{*} w' \xleftarrow{*} t_{n+1}'$, deci $t_1' \xrightarrow{*} w \xrightarrow{*} w' \xleftarrow{*} t_{n+1}'$, adică $t_1' \downarrow t_{n+1}'$.

$\Rightarrow t_1 \downarrow t_2$ □

P24: Fie $(T, \to)$ sistem de rescriere noetherian + confluent local $\Rightarrow$ confluent.

D:

(26) <u>Teorema 13</u>

Fie G o mulțime de ecuații de forma $(\forall X)\, t \doteq_s t'$, $t, t' \in T_\Sigma(X)$

Sunt echivalente:

1) $\Gamma \models (\exists X)\, G$,

2) $T_{\Sigma,\Gamma} \models (\exists X)\, G$,

3) există un morfism $\psi : T_\Sigma(X) \to T_\Sigma$ a.î. $\Gamma \models (\forall \emptyset)\, \psi(G)$

<u>Demonstrație:</u>

1 => 3

$\Gamma \models (\exists X)\, G \Rightarrow T_{\Sigma,\Gamma} \models (\exists X)\, G$

- Știm $\Gamma \models (\exists X)\, G$: or. $\mathcal{A}$ a.î. $\mathcal{A} \models \Gamma$, $\mathcal{A} \models (\exists X)\, G$.

dar $T_{\Sigma,\Gamma}$ este Γ-algebră inițială, deci $T_{\Sigma,\Gamma} \models \Gamma$.

$\Rightarrow T_{\Sigma,\Gamma} \models (\exists X)\, G$.

2 => 3

$T_{\Sigma,\Gamma} \models (\exists X)\, G \Rightarrow$ ex. $\psi : T_\Sigma(X) \to T_\Sigma$ a.î. $\Gamma \models (\forall \emptyset)\, \psi(G)$

- Știm $T_{\Sigma,\Gamma} \models (\exists X)\, G$: ex. $h : T_\Sigma(X) \to T_{\Sigma,\Gamma}$ a.î. $h_s(t) = h_s(t')$ or. $(\forall X)\, t \doteq_s t' \in G$.

$\eta : T_\Sigma \to T_{\Sigma,\Gamma} := T_\Sigma/_{\equiv_{\Gamma, T_\Sigma}}$ morfism surjectiv

$\Rightarrow \exists\, \psi : T_\Sigma(X) \to T_\Sigma$ a.î. $\psi ; \eta = h$

$\Rightarrow \eta_s(\psi_s(t)) = \eta_s(\psi_s(t'))$, or. $(\forall X)\, t \doteq_s t' \in G$

$$\begin{tikzcd} T_\Sigma \arrow[r, "\eta"] & T_{\Sigma,\Gamma} \\ & T_\Sigma(X) \arrow[ul, "\psi"] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Cum $\eta : T_\Sigma \to T_{\Sigma,\Gamma}$ este morfism de factorizare, obț.
$\psi_s(t) \equiv_{\Gamma, T_\Sigma} \psi_s(t')$, or. $(\forall x)\, t \doteq_s t' \in G$.

Dar $\equiv_{\Gamma, T_\Sigma} := \cap \{ ker(g) \mid g : T_\Sigma \to B,\ B \models \Gamma \}$

Deci $\psi_s(t) \equiv_{\Gamma, T_\Sigma} \psi_s(t')$ | înseamnă $g_s(\psi_s(t)) = g(\psi_s(t'))$
or $g : T_\Sigma \to B \models T$.

Trebuie să arătăm $\Gamma \models (\forall \emptyset)\, \psi(G)$: or. $B \models \Gamma$, or g:
$g : T_\Sigma \to B$, $g_s(\psi_s(t)) = g(\psi_s(t'))$ or $(\forall x)\, t \doteq_s t' \in G$.

$3 \Rightarrow 1$

există $\psi : T_\Sigma(X) \to T_\Sigma$ a.î. $\Gamma \models (\forall \emptyset)\, \psi(G) \Rightarrow \Gamma \models (\exists X) G$

- Fie M o Γ-algebră. Arătăm că $M \models (\exists X) G$.

există $h : T_\Sigma(X) \to M$ a.î. $h_s(t) = h_s(t')$, or $(\forall x)\, t \doteq_s t' \in G$

Fie $f_M : T_\Sigma \to M$ unicul morfism de la T_Σ la M.

Arătăm că pt $\psi ; f_M : T_\Sigma(X) \to M$,
$(\psi ; f_M)_s(t) = (\psi ; f_M)_s(t')$ or. $(\forall x)\, t \doteq_s t' \in G$.

~~Fie $f_M : T_\Sigma \to M$ unicul morfism de la~~

Deoarece $M \models \Gamma$, din ipoteză obținem $M \models (\forall \emptyset)\, \psi(G)$
pt or. $g : T_\Sigma \to M$, $g_s(\psi_s(t)) = g_s(\psi_s(t'))$, or. $(\forall x)\, t \doteq_s t' \in G$

pt morfismul $f_M : T_\Sigma \to M$ obținem
$(f_M)_s(\psi_s(t)) = (f_M)_s(\psi_s(t'))$, or. $(\forall x)\, t \doteq_s t' \in G$

$\Rightarrow M \models (\exists X) G$, or. M o Γ-algebră $\Rightarrow \Gamma \models (\exists X) G$.