Subiecte Analiza

1. Definiti suma Darboux superioara , inferioara si suma Riemann
2. Definiti integrala Darboux superioara , inferioara si integrala Riemann
3. Daca f este integrala Riemann este si integrala Darboux DEM
4. Suma a doua functii integrabile Riemann este integrala Riemann DEM
5. Teorema Darboux + Lema
6. Integrala functiei continue si monotone DEM
7. Teorema Leibniz-Newton DEM
8. Integrare prin parti / schimbarea de variabile DEM
9. Derivatele partiale si derivatele unei functii
10. Pastrarea integrabilitatii prin convergenta uniforma
11. Enuntul teoremei Lebesgue + neglijabila Lebesgue
12. Derivarea functiei compuse
13. Derivarea functiei inversabile
14. Enunt teorema de inversiune locala
15. Derivate partiale de ordin 2 si derivata unei functii
16. Enuntul teoremei Young
17. Enuntul teoremei Schwarz
18. Formula Taylor
19. Teorema Fermat DEM
20. Conditii necesare de extrem local
21. Enuntul teoremei multiplicatorilor lui Lagrange
22. Integrala curbilinica de tip1 si tip2
23. Proprietatile integralei curbilinie
24. Variatia unei functii , proprietati pentru functie
25. Formula Leibniz-Newton de integrare de al doilea tip DEM
26. Lema lui Poincare
27. Enuntul teoremei privind caracterizarea formelor exacte pe un domeniu
28. Suma Riemann , integrala Riemann , suma Darboux , integrala Darboux cu mai multe variabile
29. Enuntul teoremei Darboux
30. Enuntul teoremei Fubini
31. Multimi masurabile Jordan + proprietati
32. Proprietatea privind caracterizarea multimii masurabile Jordan
33. Integrala cu parametru
34. Derivarea unei integrale cu parametru
35. Teorema schimbarii de variabila

1) Definiți suma Darboux superioară, inferioară

Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită

$\Delta = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$

$$S_\Delta f = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i) \; ; \; M_i = \sup f(x)$$

$$s_\Delta f = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i) \; ; \; m_i = \inf f(x)$$

Suma Riemann

Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită

$$\sigma_\Delta (f, (\xi_i))_{i \in \overline{0,n-1}} = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

2) Integrala Darboux superioară, Inferioară

$$\cancel{\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup S_\Delta f}$$

$$\cancel{\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf S_\Delta f}$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf S_\Delta f$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup s_\Delta f$$

Integrala Riemann

f s.n. integrabilă Riemann dacă $\exists\, I \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall \varepsilon > 0$
$\Rightarrow \exists\, \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |I - \sigma_\Delta (f, (\xi_i))| < \varepsilon$

$$\|\Delta\| = \max_{i=0}^{n-1} |x_{i+1} - x_i|$$

$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f$ integrala Riemann a lui f.

3) <u>Dacă f este integrală Riemann este și integrală Darboux</u>

Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită

Dacă f este integrabilă Riemann $\Rightarrow \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$

<u>Dem</u>

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

f integrabilă Riemann $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î.

$$\|\Delta\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |I - \sigma_\Delta(f, (\xi_i))| < \varepsilon$$

$$I - \varepsilon < \sigma_\Delta(f, \xi) < I + \varepsilon$$

$$I - \varepsilon \leq \underbrace{\inf \sigma_\Delta(f, \xi)}_{= s_\Delta} \leq \underbrace{\sup \sigma_\Delta(f, \xi)}_{= S_\Delta} \leq I + \varepsilon$$

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$$

Atunci $I - \varepsilon < s_\Delta(f) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq S_\Delta f \leq I + \varepsilon$

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq 2\varepsilon, \forall \varepsilon > 0$$

$$\overline{\int_a^b} f(x) = \underline{\int_a^b} f(x)$$

4) Suma a două funcții integrabile Riemann este int. R

Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile Riemann

Atunci $f+g$ este integrală Riemann și

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f+g)(x)\,dx$$

Dem

Fie f integrală Riemann $\Rightarrow \exists I_1$ a.î. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta'_\varepsilon > 0$ a.î. $\|\Delta\| < \delta'_\varepsilon \Rightarrow |\sigma_\Delta(f, (\xi_i)) - I_1| < \varepsilon$

Fie g integrabilă Riemann $\Rightarrow \exists I_2$ a.î. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta''_\varepsilon > 0$ a.î. $\|\Delta\| < \delta''_\varepsilon \Rightarrow |\sigma_\Delta(g, (\xi_i)) - I_2| < \varepsilon$

$$\sigma_\Delta((f+g), (\xi_i)) = \sum_{i=0}^{n-1} ((f+g)(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) + \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) =$$

$$= \sigma_\Delta(f, (\xi_i)) + \sigma_\Delta(g, (\xi_i))$$

$$\|\Delta\| < \delta_\varepsilon = \min(\delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon) \Rightarrow |\sigma_\Delta((f+g), (\xi_i)) - (I_1 + I_2)| \leq$$

$$\leq |\sigma_\Delta(f, (\xi_i)) - I_1| + |\sigma_\Delta(g, (\xi_i)) - I_2| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = I_1 + I_2$$

5) Teorema Darboux + Lema

T. Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită. Atunci U.A.S.E:

1) f este integrală Riemann

2) $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$

3) $\forall \varepsilon > 0, \exists \Delta$ a.î. $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$

4) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$

Lema Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită. Atunci $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow S_\Delta(f) \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon$

6) Integrala funcției continue și monotone

a) Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci f este integrabilă Riemann.

Dem

f continuă pe $[a,b] \Rightarrow f$ uniform continuă pe $[a,b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x, y \in [a,b]$ cu $|x-y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$\Delta = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow$

$$\Rightarrow M_i - m_i = \sup_{x,y \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) \leq \varepsilon \cdot \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} - x_i =$$

$$= \varepsilon(b-a) \Rightarrow f \text{ integrabilă Riemann}$$

b) Integrala fct. monotone

Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ crescătoare. Atunci f este integrală Riemann

Dem

Fie Δ diviziune a intervalului $[a,b]$

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i)$$

f crescătoare $M_i = f(x_{i+1})$ și $m_i = f(x_i)$

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i))(x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \cdot \|\Delta\| =$$

$$= \|\Delta\| \, (f(\underset{b}{\overset{\shortparallel}{x_n}}) - f(\underset{a}{\overset{\shortparallel}{x_0}})) = \|\Delta\| \cdot (f(b) - f(a))$$

$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon \Rightarrow f$ integrală Riemann

7) Teorema Leibniz - Newton

Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ a.î. $\exists f'$ pe $[a,b]$ și f' să fie integrabilă Riemann

Atunci $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$

Dem

Fie Δ_n o diviziune a intervalului $[a,b]$

$\Delta_n = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$

$f(b) - f(a) = f(x_n) - f(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) - f(x_i)$.

Din teorema lui Lagrange aplicată lui f pe $[x_i, x_{i+1}] \Rightarrow c_i \in (x_i, x_{i+1})$

a.î. $f(x_{i+1}) - f(x_i) = (x_{i+1} - x_i) \cdot f'(c_i)$

$$\Rightarrow f(b) - f(a) = \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) = \sum_{i=0}^{n-1} f'(c_i)(x_{i+1} - x_i) = \sigma_{\Delta_n}(f', c_i)$$

Alegem Δ_n a.î. $\|\Delta_n\| = 0 \Rightarrow f(b) - f(a) = \sigma_{\Delta_n}(f', (c_i)_{i=\overline{0,n-1}}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^b f'(x)\,dx$ deoarece f' este integrabilă Riemann.

8) Integrare prin părți / schimbare de variabilă

a) Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile a.î. f' și g' integrabile Riemann. Atunci $f' \cdot g$ și $f \cdot g'$ sunt integrabile Riemann.

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

Dem

Deoarece f este derivabilă $\Rightarrow f$ continuă, deci integrală Riemann

g' este integrală Riemann $\Rightarrow$

$\Rightarrow f \cdot g'$ integrală Riemann

Analog $f' \cdot g$ integrală Riemann.

Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$

$(f \cdot g)' = f'g + f \cdot g' \Rightarrow (f \cdot g)'$ integrală Riemann $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^b (f \cdot g)'(x)\, dx = \int_a^b f'(x) g(x)\, dx + \int_a^b f(x) g'(x)\, dx$

b) Fie $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ bijectivă, crescătoare și derivabilă cu φ' continuă

Fie $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci $f \circ \varphi \circ \varphi' : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrală Riemann și $\int_a^b (f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x)\, dx = \int_c^d f(y)\, dy$

Dem

f continuă $\Rightarrow F : [a,b] \to \mathbb{R}$ a.î. $F' = f$

$\int_c^d F'(x)\, dx = F(d) - F(c) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$

$\int_a^b f \circ \varphi(x) \cdot \varphi'(x)\, dx = \int_a^b F' \circ \varphi(x) \cdot \varphi'(x)\, dx = \int_a^b (F \circ \varphi)'(x)\, dx =$

$= F \circ \varphi(b) - F \circ \varphi(a)$

9) Derivatele parțiale și derivatele unei funcții

a) Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ deschisă, $a \in D$, $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ și $f: D \to \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

$$g_v(t) = f(a + tv)$$

$$g'_v(0) = \frac{\partial f}{\partial v}(a)$$

b) Fie $f: (a,b) \to \mathbb{R}^n$ și $c \in (a,b)$, f s.n. derivabilă în $c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \in \mathbb{R}^n$

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

10) Păstrarea integrabilității prin convergența uniformă

Fie $f_n, f: [a,b] \to \mathbb{R}$ mărginite. Dacă $f_n \xrightarrow{u} f$ și f_n este integrabilă Riemann $\forall n \Rightarrow f$ este integrală Riemann și $\lim\limits_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

11) Teorema Lebesgue + neglijabilă Lebesgue

a) Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită, f este integrabilă Riemann $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow D_f$ (discontinuitatea lui f) este neglijabilă Lebesgue

b) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ s.n. neglijabilă Lebesgue dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists (I_n = (a_n, b_n))_{n \geq 1}$

a.î. $A \subset \bigcup\limits_{n \geq 1} (a_n, b_n)$

$$\sum_{n \geq 1} (b_n - a_n) < \varepsilon$$

12) Derivarea funcției compuse

$D \subset \mathbb{R}^n$ deschisă, $G \subset \mathbb{R}^m$ deschisă, $f: D \to G$, $g: G \to \mathbb{R}^k$ și $a \in D$. Dacă $\exists f'(a)$ și $\exists g'(f(a)) \Rightarrow \exists (g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

13) Derivarea funcției inversabile

Fie G, D mulțimi deschise din $\mathbb{R}^n$, $f: D \to G$ și $a \in D$. Dacă $\exists f'(a)$ și este inversabilă și f^{-1} este continuă în $a \Rightarrow$

$$(f^{-1})'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$$

$$\left((f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} \right)$$

14) Teorema de inversiune locală

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $a \in D$ și $f: D \to \mathbb{R}^n$. Dacă $\exists f'$ și este continuă și $\exists (f'(a))^{-1} \Rightarrow \exists D_1, D_2$ mulțimi deschise cu $a \in D_1 \subset D$ a.î. $f: D_1 \to D_2$ bij. și $\exists (f^{-1})'(f(a))$

15) Derivate parțiale de ordin 2 și derivata unei funcții

Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ deschisă, $f: D \to \mathbb{R}^m$ derivabilă

$$f': D \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \simeq \mathbb{R}^{n,m}$$

$$f'' \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \approx L_2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

$$L_2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \to L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$$

16) Teorema Young

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f: D \to \mathbb{R}^m$ și $a \in D$. Dacă $\exists f''(a)$ atunci $\forall u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(a) = f''(a)(u,v) = f''(a)(v,u)$$

17) Teorema Schwarz

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă $a \in D$, $f: D \to \mathbb{R}^m$ și $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Dacă $\exists \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ pe D și $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ este continuă

$$\Rightarrow \exists \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(a)$$

18) Formula Taylor

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $a \in D$, $f: D \to \mathbb{R}^m$ a.î. $\exists f''(a)$. Atunci $\exists\, \omega: D \to \mathbb{R}^m$ a.î.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a, x+a) + \|x-a\|^2 \cdot \omega(x)$$

$$\lim \omega(x) = 0$$

19) Teorema Fermat

Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ deschisă, $a \in D$ și $f: D \to \mathbb{R}$. Dacă $\exists f'(a)$ și a este punct de extrem local $\Rightarrow f'(a) = 0$

<u>Dem</u> $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$

$g: (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^m$, $g(t) = (a + tv)$

$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = f'(a)(v)$

g are un punct de extrem local în $0 \Leftrightarrow g'(x) = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0 \Rightarrow f'(a) = 0$

20) Condiții necesare de extrem local

Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ deschisă, $a \in D$ $f: D \to \mathbb{R}$ a.î. $\exists f''(a)$. Atunci:

1) dacă a punct de minim local $\Rightarrow f'(a) = 0$ și $f''(a) \geq 0$
2) dacă $f'(a) = 0$ și $f''(a) > 0 \Rightarrow$ punct de minim local
3) dacă a este punct de maxim local $\Rightarrow f'(a) = 0$ și $f''(a) \leq 0$
4) dacă $f'(a) = 0$ și $f''(a) < 0 \Rightarrow$ punct de maxim local

21) Enunțul teoremei multiplicatorilor lui Lagrange

Fie $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$ deschisă, $f: D \to \mathbb{R} \in C^1$, $g: \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n \in C^1$ și $a \in D$. Dacă a este punct de extrem local pentru f pe mulțimea $A = \{x \in D \mid g(x) = 0\}$

$g(a) = 0$ și rang $g' = n$ atunci $\exists \underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_n}_{\alpha} \in \mathbb{R}$ a.î. $h'_\alpha(a) = 0$ unde $h_\alpha = f + \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_n g_n$

22) Integrala curbilinică de tip 1 și tip 2

Tip 1 $f: D \to \mathbb{R}$ continuă, $D \subseteq \mathbb{R}^2$

$\gamma: [a,b] \to D \subseteq \mathbb{R}^2$ de clasă C^1 $(\gamma = (\gamma_1, \gamma_2))$

$$\int_\gamma f(x,y)\, dl = \int_a^b f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \cdot \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}\, dt$$

Tip 2 $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$

$P, Q, R: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad$ $\operatorname{Im} \gamma \subset D$

Dacă există integrala Riemann - Stieltjes

$I_1 = \int_a^b P(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))\, d\gamma_1(t)$

$I_2 = \int_a^b Q(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))\, d\gamma_2(t)$

$I_3 = \int_a^b R(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))\, d\gamma_3(t)$

Spunem că integrala curbilinică $\int_\gamma P dx + Q dy + R dz$ $(= I_1 + I_2 + I_3)$

23) Proprietățile integrali curbilinie

Tip 1

1) $\int_\gamma (f_1+f_2)\, dl = \int_\gamma f_1\, dl + \int_\gamma f_2\, dl$

2) $\int_\gamma (a\cdot f)\, dl = a\int_\gamma f\, dl$

3) $\left|\int_\gamma f\, dl\right| \leq l_\gamma \cdot \|f\|_\infty$

$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\gamma([a,b])} |f(x)|$

4) $\int_{\gamma_1 \vee \gamma_2} f\, dl = \int_{\gamma_1} f\, dl + \int_{\gamma_2} f\, dl$

5) $\int_{\gamma^-} f\, dl = \int_\gamma f\, dl$

Tip 2

1) $\int_\gamma \omega_1+\omega_2 = \int_\gamma \omega_1 + \int_\gamma \omega_2$

2) $\int_\gamma a\cdot\omega = a\cdot\int_\gamma \omega$

3) $\int_{\gamma_1\vee\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2}\omega$

4) $\int_{\gamma^-} \omega = -\int_\gamma \omega$

24) Variația unei funcții, prop. pentru funcție

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ s.m. cu variație mărginită dacă $\underbrace{\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)}_{\text{variația lui } f \text{ pe } [a,b]} = \sup V_\Delta f < \infty$

$\Delta = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$ diviziune

Not: $V_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})| = |f(x_1)-f(x_0)| + \dots + |f(x_n)-f(x_{n-1})|$

s.m. variația lui f asociat diviziunii Δ

Prop

1) f este cu variație mărginită $\Rightarrow f$ mărginită

2) f derivabilă cu derivata mărginită $\Rightarrow f$ cu variație mărginită

3) f monotonă $\Rightarrow f$ cu variație mărginită

4) f derivabilă cu f' continuă $\Rightarrow f$ cu variație mărginită

25) Formula Leibniz-Newton de integrare de al doilea tip

Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ deschisă și $f: D \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$ și $\gamma: [a,b] \to D$ $\gamma \in C^1$. Atunci $\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$

Dem

$f: D \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$

$\gamma: [a,b] \to D$

$$\int_\gamma df = \int_\gamma \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx_i = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t) \right) dt =$$

$$= \int_a^b (f \circ \gamma)'(t)\, dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

26) Lema lui Poincare

Fie D un domeniu convex, ω o formă diferențiabilă $f \in C^2$ închisă. Atunci ω este exactă

27) Teorema privind caracterizarea formelor exacte pe un domeniu

$D \subset \mathbb{R}^n$ este un domeniu, ω este o formă diferențiabilă continuă pe D. Atunci UASE:

1) $\exists f: D \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$ a.î. $df = \omega$

2) $\forall \gamma: [a,b] \to D$ închisă $\Rightarrow \int_\gamma \omega = 0$

3) $\forall \gamma_1, \gamma_2: [a,b] \to D$ a.î. $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ $\Rightarrow \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$

28) Suma Riemann, integrala Riemann, suma Darboux, int. Darboux

a) $$\sigma_{\Delta_1 \Delta_2}\left(f, (\alpha_{ij})_{\substack{i=\overline{0,n-1} \\ j=\overline{0,m-1}}}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(\alpha_{ij})(x_{i+1}-x_i)(x_{j+1}-x_j)$$

b) O funcție $f: D \to \mathbb{R}$ s.n. integrală Riemann dacă $\exists I \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\|\Delta_1\| < \delta_\varepsilon$ și $\|\Delta_2\| < \delta_\varepsilon$

$$\Rightarrow \left| \sigma_{\Delta_1 \Delta_2}\left(f, (\alpha_{ij})_{\substack{i=\overline{0,n-1} \\ j=\overline{0,m-1}}}\right) - I \right| < \varepsilon$$

c) $$s_{\Delta_1 \Delta_2}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \underset{\inf f(x,y)}{\underset{\parallel}{m_{ij}}} (x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)$$

$$S_{\Delta_1 \Delta_2}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \underset{\sup f(x,y)}{\underset{\parallel}{M_{ij}}} (x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)$$

d) $$\overline{\int}_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \inf_{\Delta_1,\Delta_2} S_{\Delta_1,\Delta_2}(f)$$

$$\underline{\int}_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \sup_{\Delta_1,\Delta_2} s_{\Delta_1,\Delta_2}(f)$$

29) Teorema Darboux

Fie $D = [a,b]\times[c,d]$ $f: D \to \mathbb{R}$ mărginită. Atunci U.A.S.E:

1) f este integrabilă Riemann pe D

2) $\overline{\int}_D f = \underline{\int}_D f$

3) $\forall \varepsilon > 0, \exists \Delta_1$ div. pe $[a,b]$ și Δ_2 div. pe $[c,d]$ a.î. $S_{\Delta_1\Delta_2}(f) - s_{\Delta_1\Delta_2}(f) < \varepsilon$

4) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall \Delta_1$ div. pe $[a,b]$ cu $\|\Delta_1\| < \delta_\varepsilon$
Δ_2 div. pe $[c,d]$ cu $\|\Delta_2\| < \delta_\varepsilon$

$$\Rightarrow S_{\Delta_1\Delta_2}(f) - s_{\Delta_1\Delta_2}(f) < \varepsilon$$

30) Teorema Fubini

Fie $D = [a,b] \times [c,d]$, $f: D \to \mathbb{R}$ continuă

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

31) Mulțimi masurabile Jordan + prop.

A s.n. masurabilă Jordan dacă $Fr(A)$ este neglijabilă Jordan

$$\mathcal{J}(\mathbb{R}^n) = \{ A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ masurabilă Jordan} \}$$

Prop

- $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$
- $Fr(A \cup B), Fr(A \setminus B), Fr(A \cap B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)$
- A neglijabilă Jordan $\Leftrightarrow \mu(A) = 0$
- $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$
- ~~$f+g$ este integrală Riemann și $\int_A f+g = \int_A f + \int_A g$~~
- ~~αf este integrală Riemann și $\int_A \alpha f = \alpha \int_A f$~~

- ~~$f \le g \Rightarrow \int_A f \le \int_A g$~~
- ~~$\int_A dx\,dy$~~

32) Prop. privind caracterizarea mulțimii masurabile Jordan

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mărginită. Atunci U.A.S.E:

1) $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

2) $\mu^*(Fr(A)) = 0$

3) $\bar{A}, \mathring{A} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \mu(\bar{A}) = \mu(\mathring{A})$

33) Integrala cu parametru

$F : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$

F continuă

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_c^d F(x,y)\,dy$$

34) Derivarea unei integrale cu parametru

Dacă $\exists \frac{\partial F}{\partial x}$ pe $[a,b]\times[c,d]$ și $\frac{\partial F}{\partial x}$ este continuă pe $[a,b]\times[c,d]$ atunci $\exists f'$ și $f'(x) = \int_c^d \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\,dy$

35) Teorema schimbării de variabilă

Fie D_1, D_2 două mulțimi deschise din $\mathbb{R}^n$, $\varphi : D_1 \longrightarrow D_2$ un difeomorfism de clasă C^1, $A \in J(\mathbb{R}^n)$ a. î. $\overline{A} \subset D$ și $f : \varphi(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrala Riemann

Atunci funcția $f \circ \varphi$, $|\det \varphi'|$ este integrală Riemann și $\int_A f \circ \varphi(x) \cdot |\det \varphi'(x)|\,dx = \int_{\varphi(A)} f(y)\,dy$