L I P 6 C N R S

Logiques de description I

LREC – Cours 3

Jean-Gabriel Ganascia

Introduction aux logiques de description

Syntaxe des logiques de description

Sémantique

L
I
P
6
C
N
R
S

Références bibliographiques

- *Description Logics*, Franz Baader, Ian Horrocks, Ulrike Sattler, in « Handbook of Knowlefge Representation », editeurs Frank Van Harmelen, Vladimir Lifschitz, Bruce Porter, chapitre 3, pp. 135-179
- *The Description Logic Handbook: Theory, Implementation and Applications*, F. Baader, E. Franconi, B. Hollunder, B. Neble, H.-J. Profitlich, Cambridge University Press, 2003

Logiques terminologiques
Logiques de description…

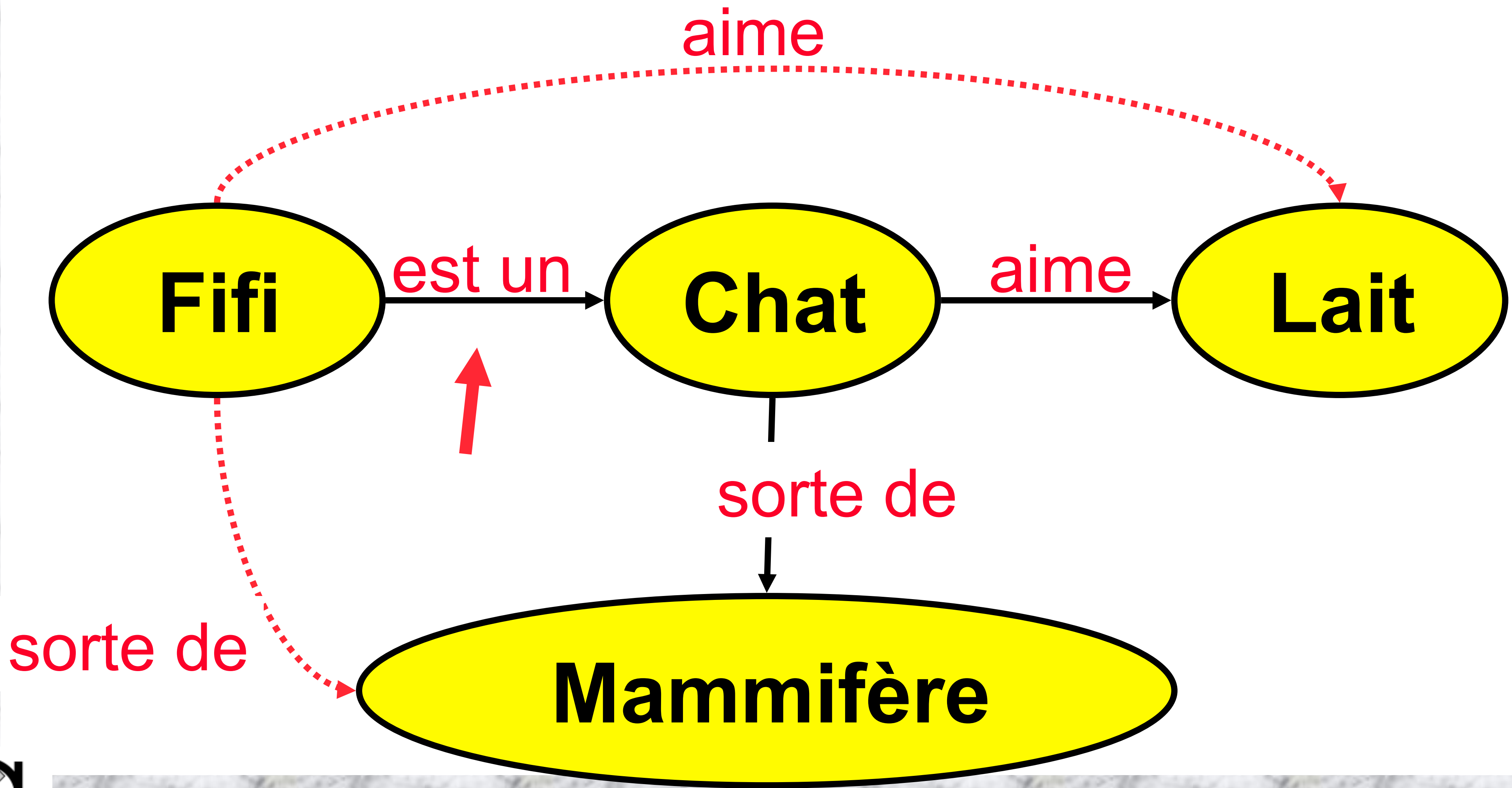
Formalismes inspirés des représentations sémantiques *(réseaux sémantiques, frame, graphes conceptuels, …)*

TKRS*: Terminological Knowledge Representation Systems*

Deux composants

- **Classes générales d'individus** – *T-Box*
  - Propriétés générales des classes
  - Relations entre les classes
- **Instanciation de ces schémas** – *A-Box*
  - Assertions relatives à des individus

Inférences: liens ‘est un’ ou ‘sorte de’ Un nœud hérite des propriétés de ses pères sauf s’il y a contradiction



L I P 6 C N R S

Représentation en logique des prédicats du premier ordre

- Prédicats d'arité 1 or 2 (unaires ou binaires)
  - Concepts: arité 1
  - Relations: arité 2
- Des règles peuvent être utilisées pour traduire l'héritage et quelques contraintes
- Mère EST-UN Parent

  $\forall X$ Mère(X) $\rightarrow$ Parent(X)
- Tous les enfants de Parent sont des Personne

  $\forall X,Y$ Parent(X) $\wedge$ aEnfant(X, Y) $\rightarrow$ Personne(Y)
- On s'attend à ce que certaines inférences soient faites
  - Héritage: toutes les propriétés d'une superclasse devraient aussi être des propriétés de ses sous-classes.
  - Ainsi, tous les enfants de Mère doit être des Personne

    $\forall X,Y$ Mère(X) $\wedge$ aEnfant(X, Y) $\rightarrow$ Personne(Y)

Logiques terminologiques
Logiques de description

…

Formalismes inspirés des représentations sémantiques *(réseaux sémantiques, frame, graphes conceptuels, …)*

Se distinguent des représentations sémantiques par une sémantique formelle

- **Fragments décidables de la logique du premier ordre**
- **Procédures de décision pour la résolution de problèmes clefs:**
  - **Satisfiabilité – cohérence**
  - **Subsomption**
- **Systèmes implémentés – très efficaces**

Logique de description

- Termes (noms de concepts + relations)
  - Concepts: prédicats unaires
  - Rôles: relations binaires

TBox

Terminologie

- Contraintes (propriétés et opérateurs)
  - Négation, intersection, union,
  - Quantification universelle, existentielle
  - Contraintes sur les cardinalités des ensembles (nbre côtes $\succeq$ 8)
  - …

- Assertions (énumérations)
  - Constantes
  - Instances des concepts et des rôles sur ces constantes

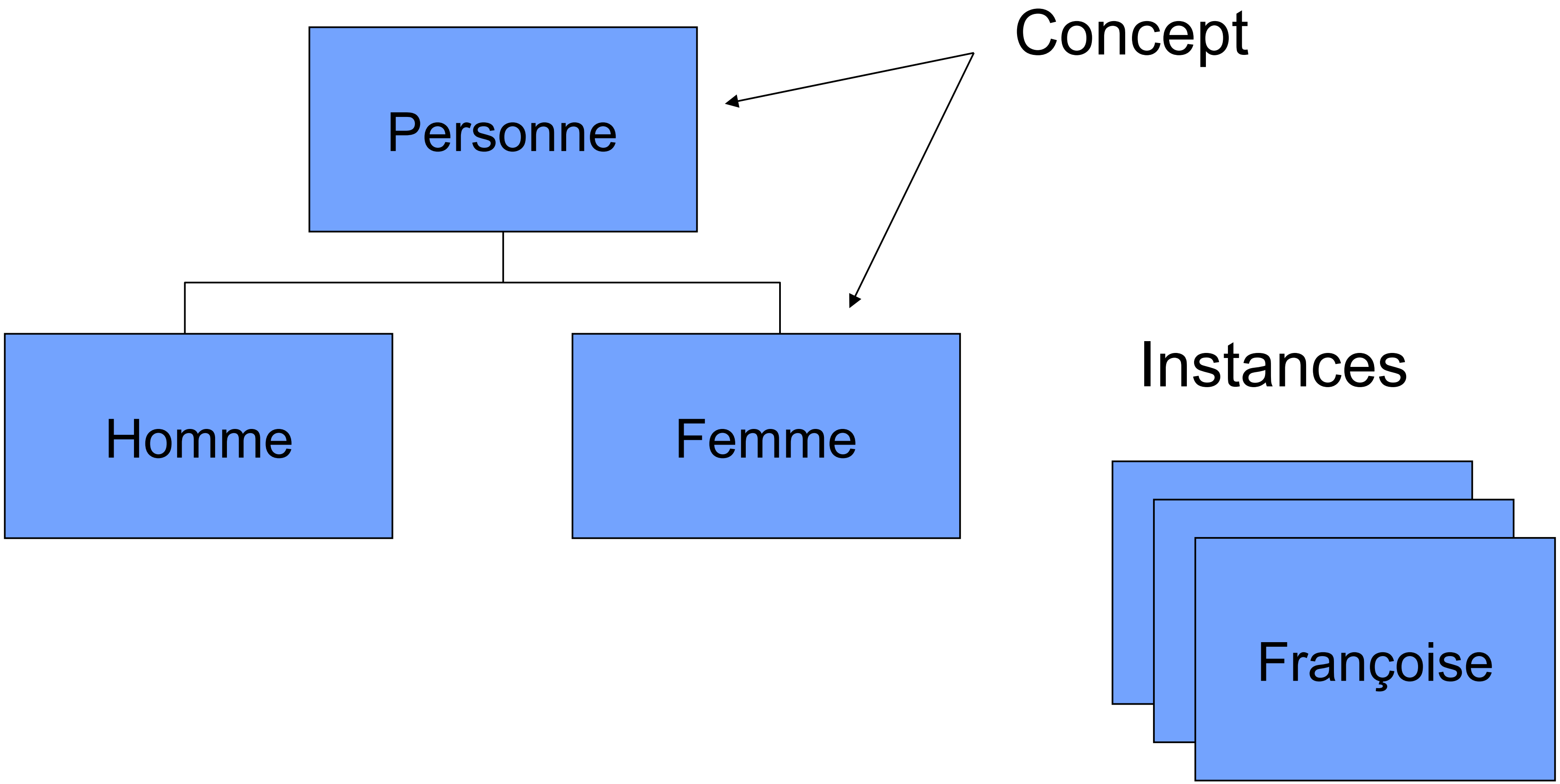
ABox

Assertions

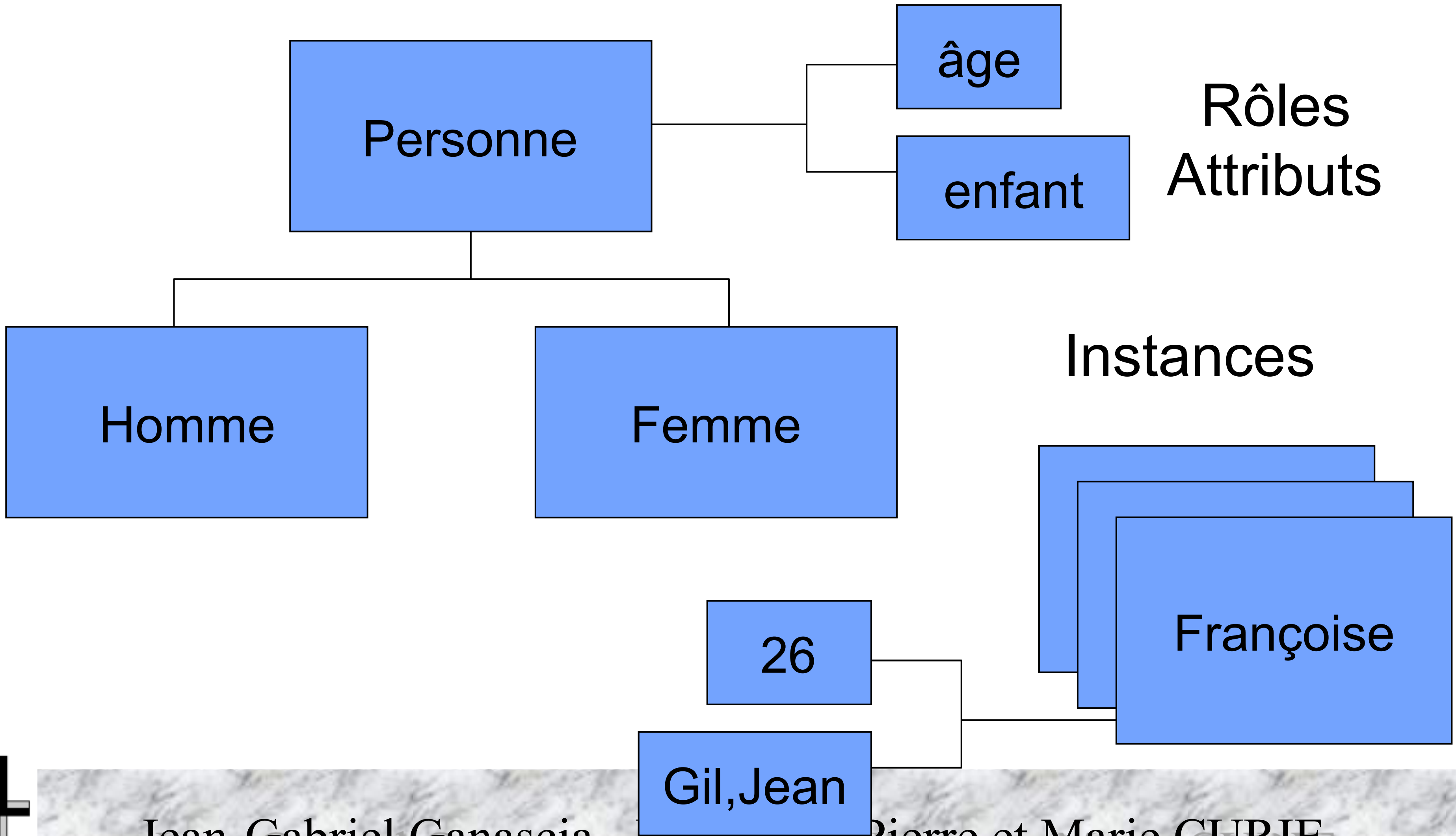
L I P 6 C N R S

L I P 6 C N R S

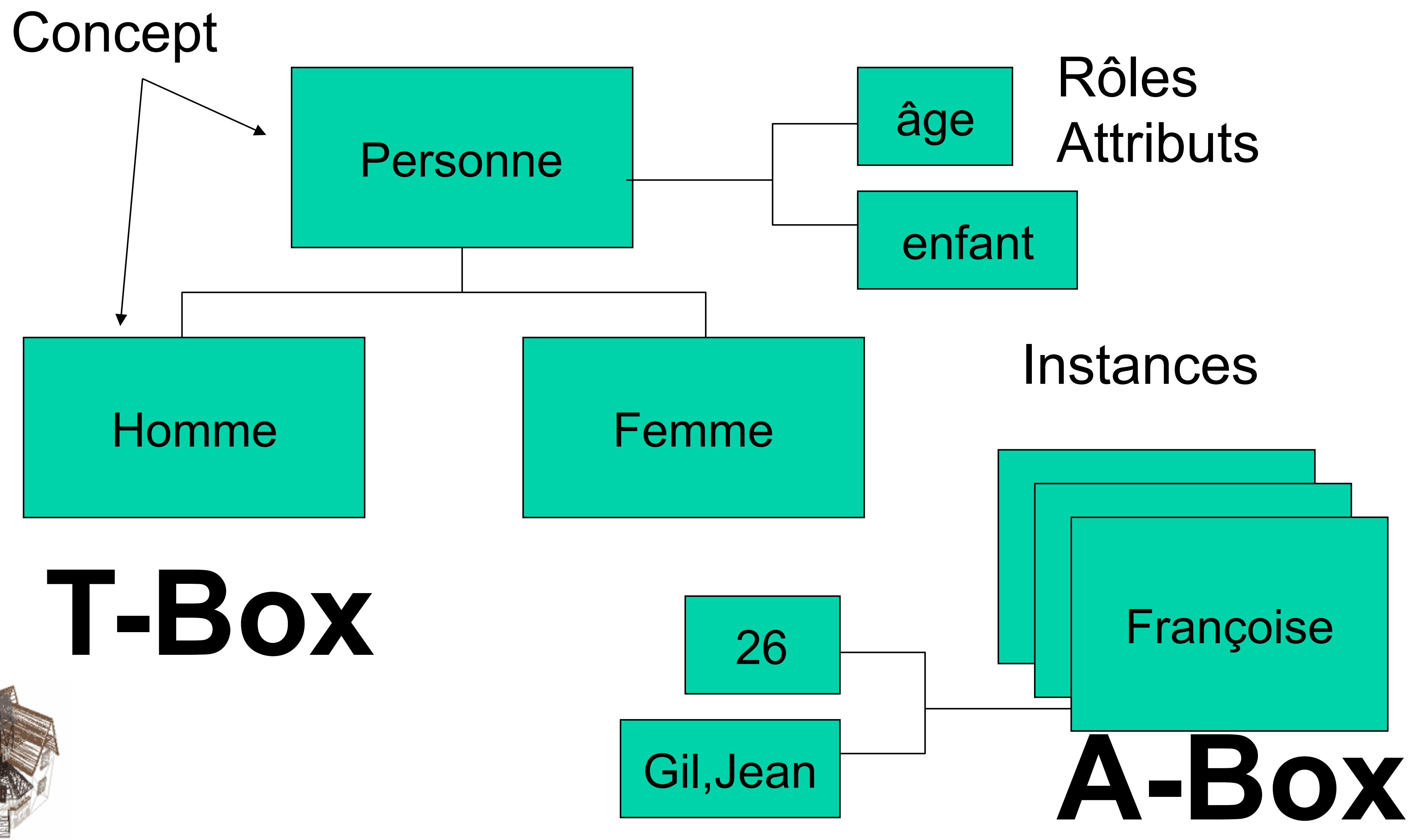
Inférence sur les représentations emboîtées: héritage et instances



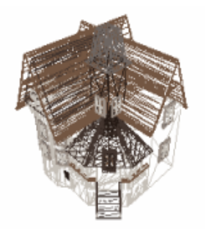
Inférences sur les représentations emboîtées: héritage et instances



T-Box et A-Box



Concept
Personne
âge
enfant
Rôles
Attributs
Homme
Femme
Instances
Françoise
26
Gil,Jean
T-Box
A-Box



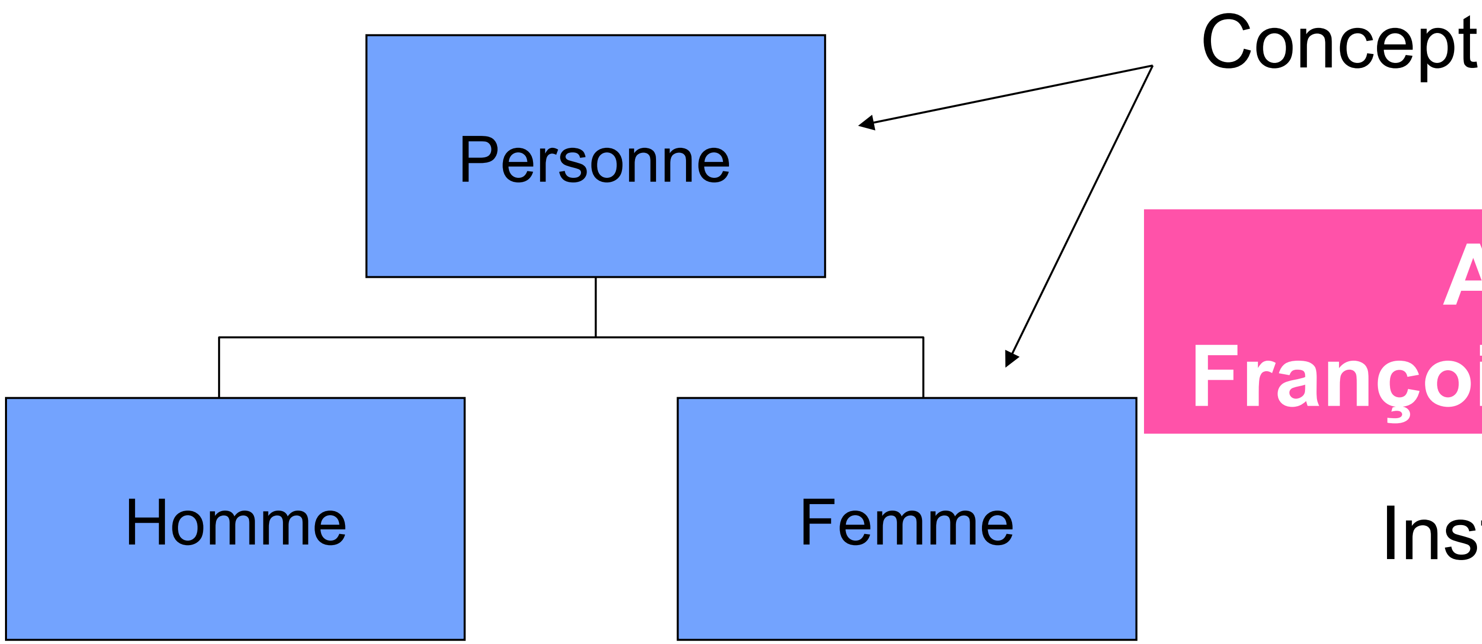
L I P 6 C N R S

Eléments de base du langage des logiques de description

- **Connecteurs de concepts:**
  - **Intersection: $\sqcap$**
  - **Union: $\sqcup$**
  - **Subsomption: $\sqsubseteq$ (Homme $\sqsubseteq$ Personne: Homme** *est subsumé par* **Personne)**

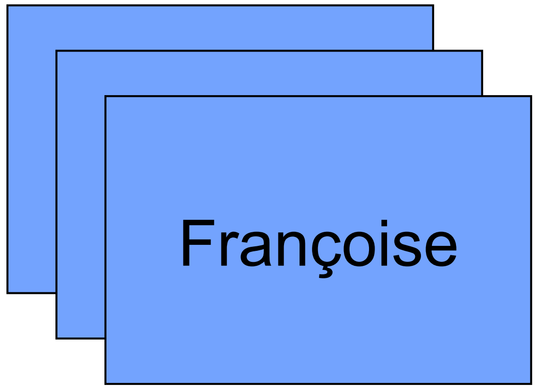
Jean-Gabriel Ganascia - Université Pierre et Marie CURIE

Représentation des concepts et instances à l’aide de logiques de descriptions



ABox
Françoise:Femme

Instances



TBox

$$\text{Homme} \sqsubseteq \text{Personne}$$

$$\text{Femme} \sqsubseteq \text{Personne}$$

$$\text{Homme} \sqcap \text{Femme} = \bot$$

L I P

Représ

Personn

ABox

Françoise:Femme

<Françoise, 26>:age

<Françoise, Gil>:enfant

<Françoise,Jean>:enfant

TBox

Homme $\sqsubseteq$ Pers

Femme $\sqsubseteq$ Personne

Homme $\sqcap$ Femme $\sqsubseteq \bot$

Personne $\sqsubseteq \exists$age

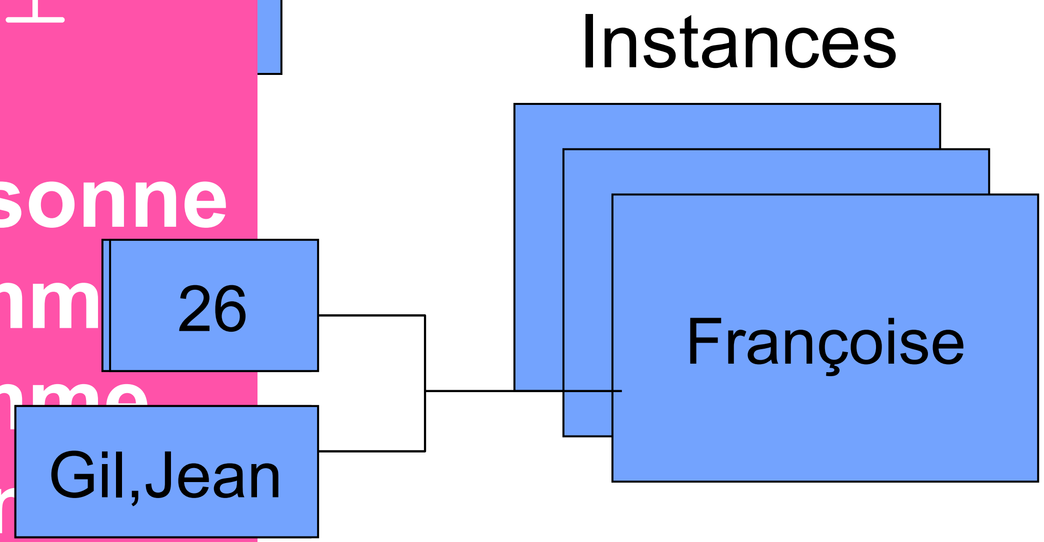
Parent $\equiv$ $\exists$enfant $\sqcap$ Personne

Père $\equiv$ $\exists$enfant $\sqcap$ Homm

Mère $\equiv$ $\exists$enfant $\sqcap$ Femme

Père $\equiv$ Parent $\sqcap$ Homm

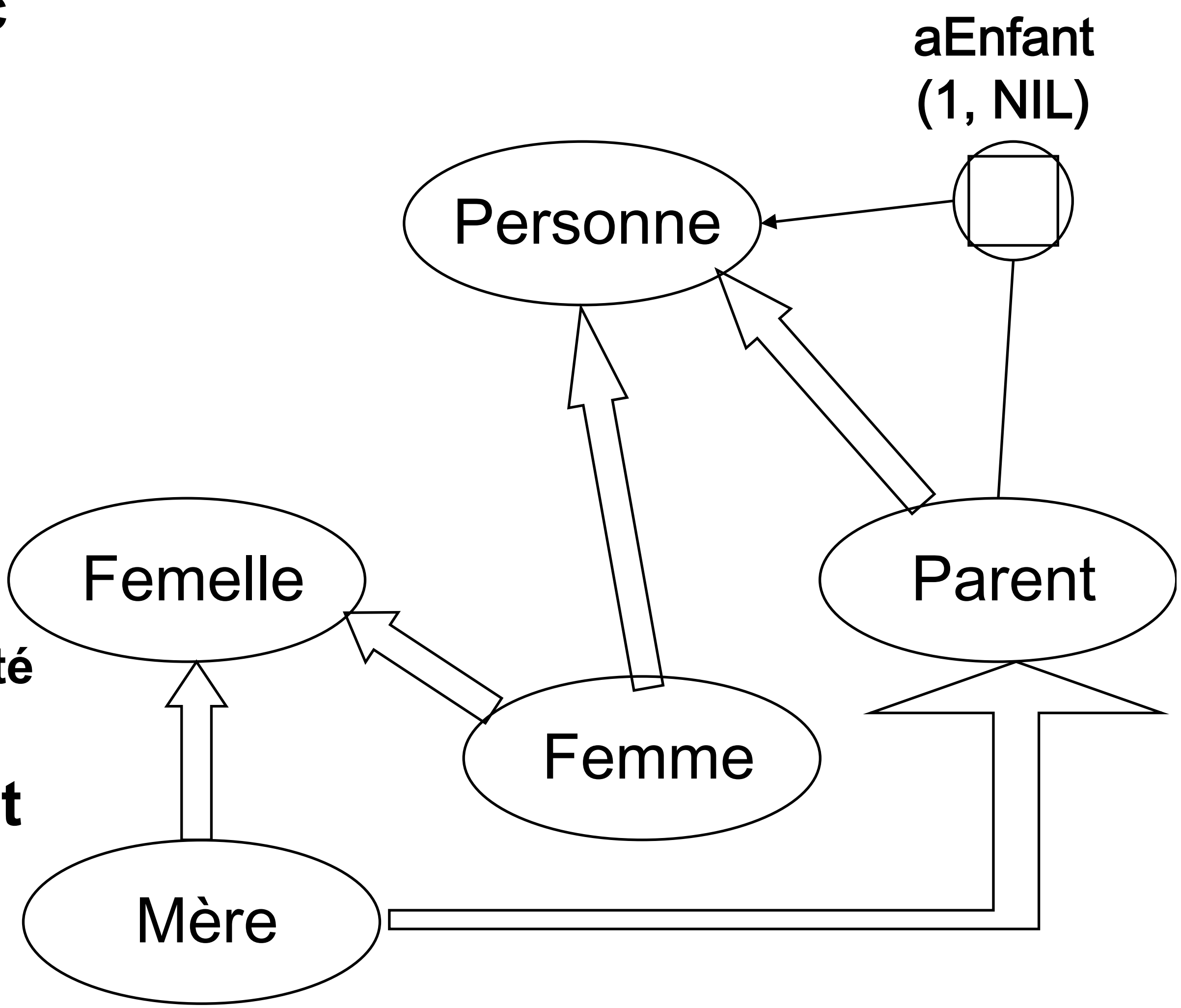
Mère $\equiv$ Parent $\sqcap$ Femme



L I P 6 C N R S

Un exemple

- **Personne**, **Femelle**, etc sont des concepts
- **aEnfant est une propriété associée au concept Personne**
  - **aEnfant relie Parent à Personne**
  - **(1,Nil) cardinalité Nil signifie infinité. Un Parent est une Personne avec entre 1 et une infinité d'enfants**
- **Les larges flèches sont des liens "EST-UN"**
  - **Une Mère est un (spécialisation d'un) Parent**



L I P 6 C N R S

Eléments de base du langage des logiques de description

- **Connecteurs de concepts:**
  - **Intersection:** $\sqcap$
  - **Union:** $\sqcup$
  - **Subsomption:** $\sqsubseteq$ **(Homme** $\sqsubseteq$ **Personne: Homme** *est subsumé par* **Personne)**
- **Restrictions de rôle:**
  - **Universelle:** $\forall r.C$
  - **Existentielle:** $\exists r.C$
  - **Cardinalité:** $\leq_n r.C$

Qu'est ce que $\forall r.C$ et $\exists r.C$ signifient?

- **Un « FouDeChiens » est quelqu'un dont les animaux de compagnie sont tous des chiens, ici {C}**

  FouDeChiens = $\forall$hasPet.Dog

  $\{p \mid \forall\ a, \langle p, a\rangle \in hasPet \rightarrow a \in Dog\}$

  On peut l'écrire plus simplement:

  $\{p \mid hasPet(p, a) \rightarrow Dog(a)\}$

- **Un « AmateurDeChiens » est quelqu'un qui possède un chien , ici {A, C}**

  AmateurDeChiens = $\exists$hasPet.Dog

  $\{p \mid \exists a\ hasPet(p, a)\ \&\ Dog(a)\}$

hasPet	
A	Fido
A	Fluffy
B	Tabby
C	Rover
C	Flip

Cat
Fluffy
Tabby

Dog
Fido
Rover
Flip

Pas de variables…

Homme $\sqcap$ ¬Femme $\sqcap$ ($\exists$ marié.Médecin) $\sqcap$ ($\forall$ aEnfant.(Médecin $\sqcup$ Avocat))

- Symbole union ($\sqcup$) et intersection ($\sqcap$) de concepts
- **Quantificateur existentiel**: $\exists$ marié.Médecin
  - Ensemble des individus mariés à **au moins** un médecin
- **Quantificateur universel**: ($\forall$ aEnfant.(Médecin $\sqcup$ Avocat))
  - Ensemble des individus dont **tous** les enfants sont soit médecin, soit avocats
- **Axiomes:** $\exists$ aEnfant.Humain $\sqsubseteq$ Humain (**subsomption**)
  - Seuls les êtres humains peuvent avoir des enfants humains
- **Axiomes:** Père $\equiv$ Homme $\sqcap\exists$aEnfant.T

L I P 6 C N R S

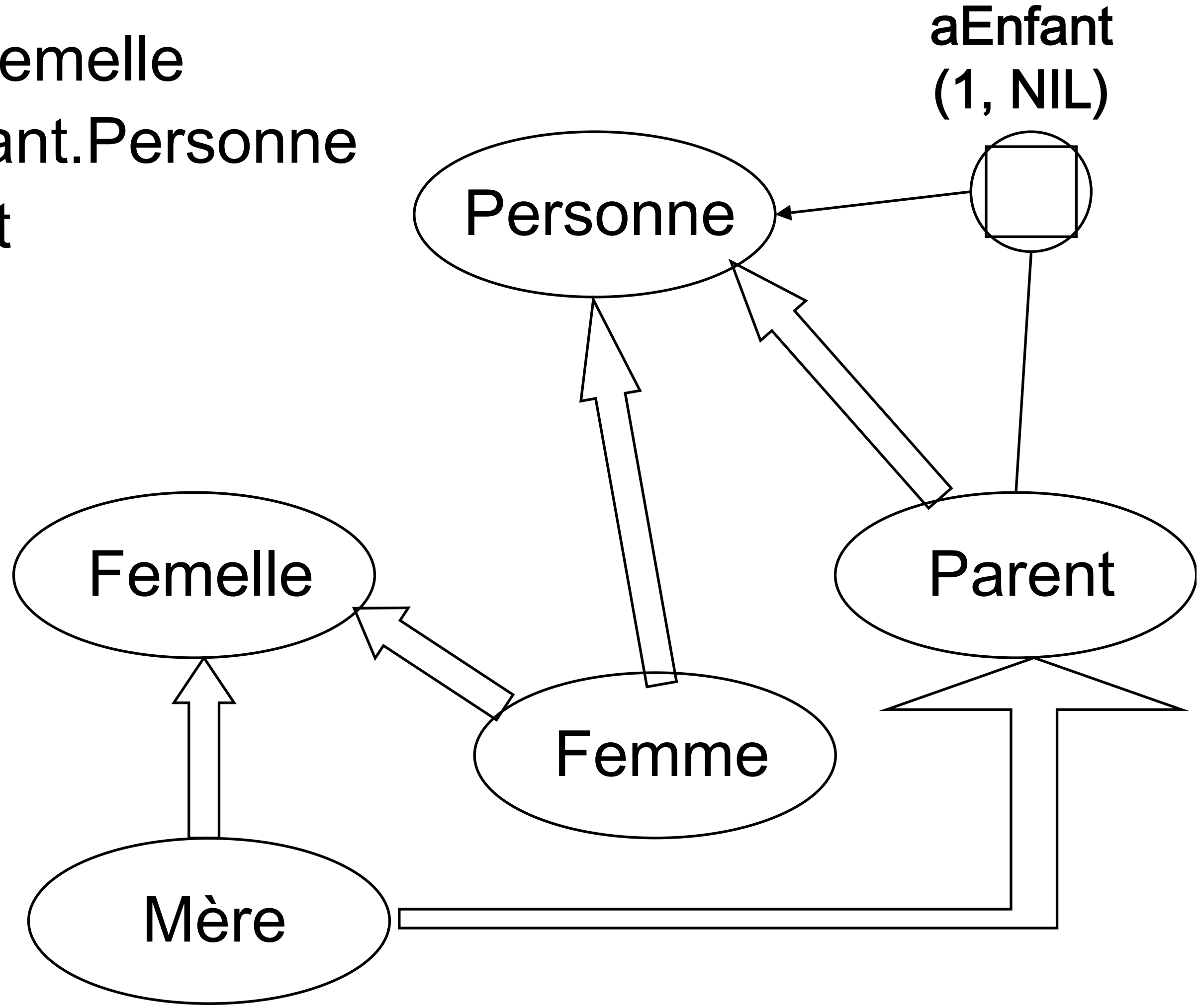
Autre exemple

TBox:

Femme ≡ Personne ⊓ Femelle

Mère ≡ Femme ⊓∃aEnfant.Personne

Mère ≡ Femelle ⊓Parent



ABox:

aEnfant(Marie, Pierre)

ou

<Marie, Pierre>:aEnfant

Remarque sur la notation

Usuellement

- **Les concepts sont des chaînes de caractères qui commencent par une majuscule: Homme, Femme, Personne, Femelle, Mère, Parent…**
- **Les rôles sont des chaînes de caractères qui commencent par une minuscule: age, enfant, aEnfant, aFemmeFamille…**

Expressions complexes

Personne $\sqcap \neg$Femelle

Homme $\sqcup$ Femme

Individus ayant une fille:

$\exists$aEnfant.Femme

Individus dont tous les enfants sont des filles:

$\forall$aEnfant.Femme

Restrictions sur les nombres $\geq_n$

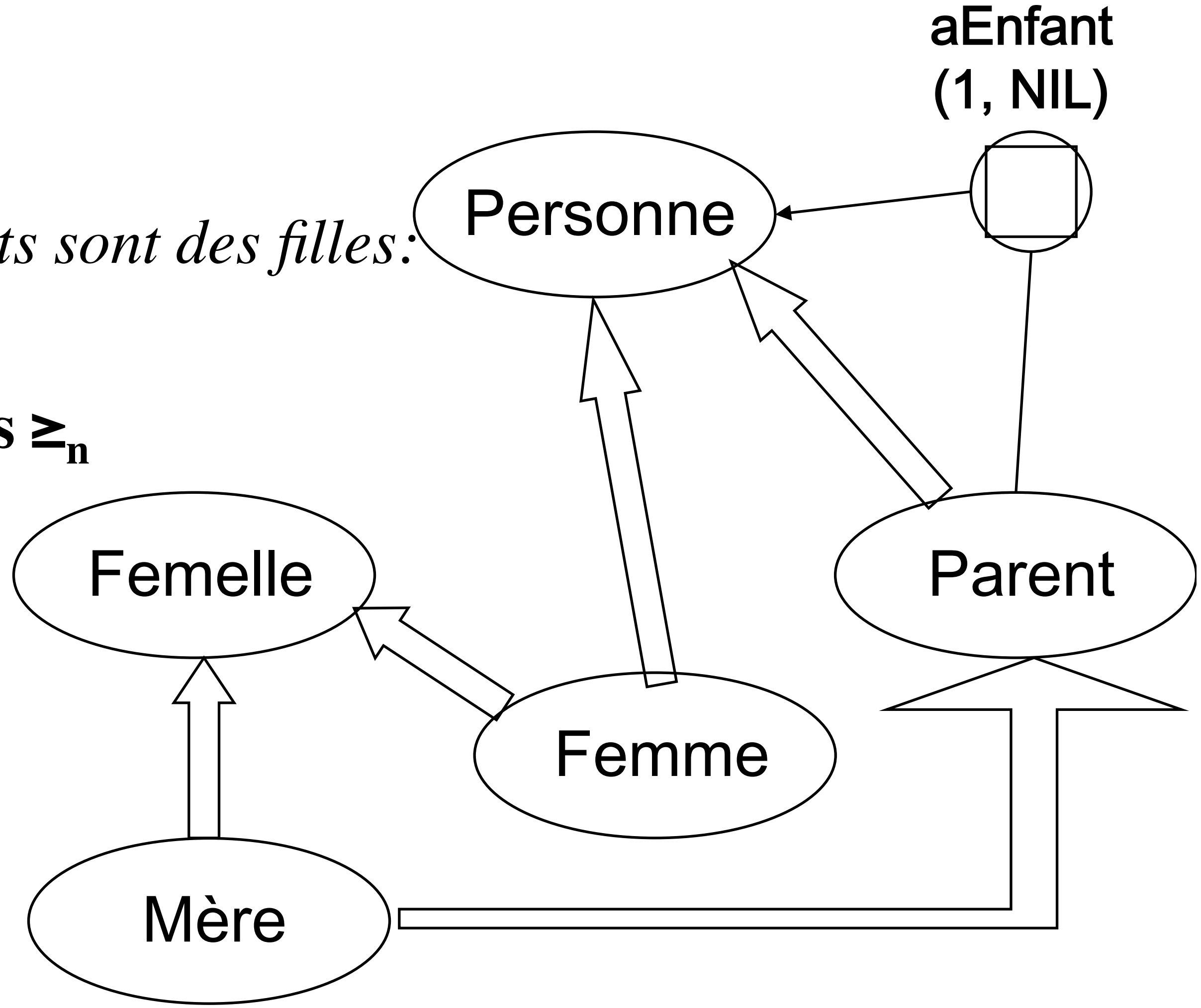
Personnes ayant au moins trois enfants:

$\geq_3$aEnfant

Intersection

Femme ayant au moins deux filles:

Femme $\sqcap \geq_2$aEnfant.Femme



Expressions complexes

Personne ⊓ ¬Femelle

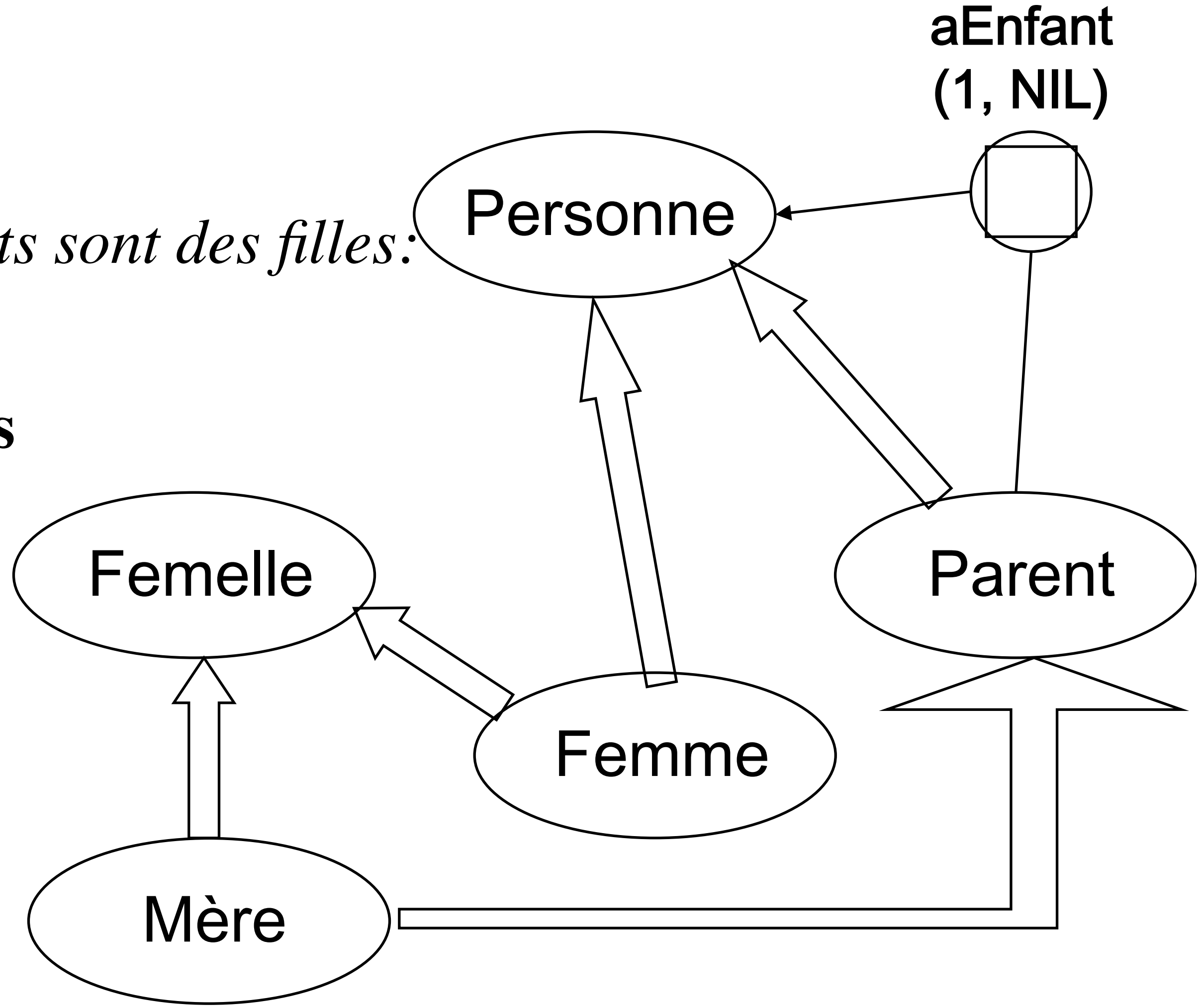
Homme ⊔ Femme

Individus ayant une fille:

∃aEnfant.Femme

Individus dont tous les enfants sont des filles:

∀aEnfant.Femme



Restrictions sur les nombres

Personnes ayant au moins trois enfants:

$\geq_3$aEnfant

Intersection de rôles

Femme ayant au moins deux filles:

Femme ⊓ $\geq_2$(aEnfant ⊓ aFemmeFamille)

[aFemmeFamille: *rôle qui associe à l'individu x toutes les femmes de sa famille*]

Exemple

Problème

Supposons que l'on veuille décricre le concept de

1. Etudiants qui assistent à des cours de LRC,

2. Etudiants qui n'assistent qu'aux cours de LRC

3. Etudiants qui assistent à tous les cours de LRC

utilisant

- les noms de concept **Etudiant** et **CoursLRC** et
- le nom de rôle **assiste** et **non_assiste**

Solution

1. **Etudiant** $\sqcap$ **$\exists$assiste.CoursLRC**

2. **Etudiant** $\sqcap$ **$\forall$assiste.CoursLRC**

3. **Rôle non_assiste**

   Etudiants qui n'assistent pas à un cours de LRC

   Etudiant $\sqcap$ **$\exists$non_assiste.CoursLRC**

   Etudiants qui assistent à tous les cours de LRC

   Etudiants $\sqcap$ **$\neg\exists$non_assiste.CoursLRC**

Histoire des logiques de description 1

- **Phase 0** *(1965-1980)***:** pre-DL → introduction réseaux sémantiques et frames. Critiques liées au manque de sémantique formelle. Tentatives de conception de *réseaux d'héritage structurés* (Brachman)
  KL-One: premier système de logique de description

- **Phase 1** *(1980-1990)***:** premières implémentation
  KL-One, K-Rep, Krypton, Back, Loom
  Utilisation d'*algorithmes de subsomption structurelle* très efficaces, mais non complets, voire même indécicables sauf pour des fragments très pauvres

L I P 6 C N R S

Histoire des logiques de description 2

- **Phase 2** *(1990-1995)***:** introduction d'algorithmes fondés sur les tableaux. Permet de décider de la cohérence d'une base de connaissance. Premiers systèmes utilisant ces méthodes: Kris et Krack. Implémentations efficaces, même si la complexité dans le pire des cas n'est plus polynomiale

- **Phase 3** *(1995-2000)***:** développement de procédures d'inférences pour des logiques de descriptions très expressives basées sur les tableaux ou la traduction dans des logiques modales. Exploration des liens avec le logiques modales

- **Phase 4** *(2000)***:** application web sémantique, systèmes d'information, … Utilisation DL moins expressives…

La « *famille* » des logiques de description

- **Une logique de description donnée et définie par des concepts, des roles et des opérateurs**
- **La logique $\mathcal{AL}$ (Attribute Language) contient uniquement la négation atomique et la quantification existentielle limitée**
  - **Les concepts sont construits en utilisant $\sqcap$, $\neg$, $\exists$ et $\forall$**
- **La plus petite logique de description contenant la logique propositionnelle est $\mathcal{ALC}$ (équivalente à la logique multimodale $K_{(m)}$) – cela signifie $\mathcal{AL}$ et complémentation $\mathcal{C}$**
  - **Les concepts sont construits en utilisant $\sqcap$, $\sqcup$, $\neg$, $\exists$ et $\forall$**
- **$\mathcal{FL}^-$ correspond à $\mathcal{AL}$ sans la négation atomique**
- **$\mathcal{FL}_0$ correspond à $\mathcal{FL}^-$ sans la quantification existentielle limitée**

L I P 6 C N R S

$\mathcal{FL}_0$: la plus simple logique de description
Syntaxe

Alphabet
- **concepts atomiques A, B, C, D…**
- **Rôles atomiques r, s, u, v, …**
- **Symboles {⊓, ∀, .}**

Grammaire

concept ::= <concept atomique> |
<concept> ⊓ <concept> |
∀<role atomic>.<concept>

$\mathcal{FL}^-$ Syntaxe

Alphabet

- **concepts atomiques A, B, C, D…**
- **Rôles atomiques r, s, u, v, …**
- **Symboles {⊓, ∃, ∀, .}**

Grammaire

concept ::= <concept atomique> |
<concept> ⊓ <concept> |
∃<role atomique> |
∀<role atomic>.<concept>

$\mathcal{FL}^-$: base de connaissance $\Sigma = $<TBox, ABox>

- **TBox: axiomes terminologiques C $\sqsubseteq$ D, C = D**
  - **Définitions**

  Parent=∃aENFANT ⊓ Personne
  - **Subsomptions**

  Homme $\sqsubseteq$ Personne *($\sqsubseteq$: subsomption)*

- **ABox: assertions a:C, <a, b>:R**
  - **Assertions de concepts**

  Jean:Parent

  Jean:Personne ⊓∃aENFANT

  Albert:personne
  - **Assertions de rôles**

  <Jean, Thomas>:aENFANT

L I P 6 C N R S

$\mathcal{FL}^-$: Sémantique intuitive

concept ::= <concept atomique> |
<concept> ⊓ <concept> |
∃<role atomique> |
∀<role atomic>.<concept>

- **Concepts: classes, ensemble d'individus**
- **Rôles: relations entres paires d'individus**
- **Concepts atomiques: concepts primitifs**
- ∃R**: existence d'un élément couvert par le rôle R**

exemple: ∃aENFANT : concept des choses qui ont des enfants

- C ⊓ D: **le concept conjoint C et D**

exemple: ∃aENFANT ⊓ personne: parents

- ∀R.C **: restriction d' un concept**

exemple: ∀aENFANT.Medecin : concept des choses dont tous les enfants sont médecins…

Expressions complexes

$Personne \sqcap \neg Femelle$

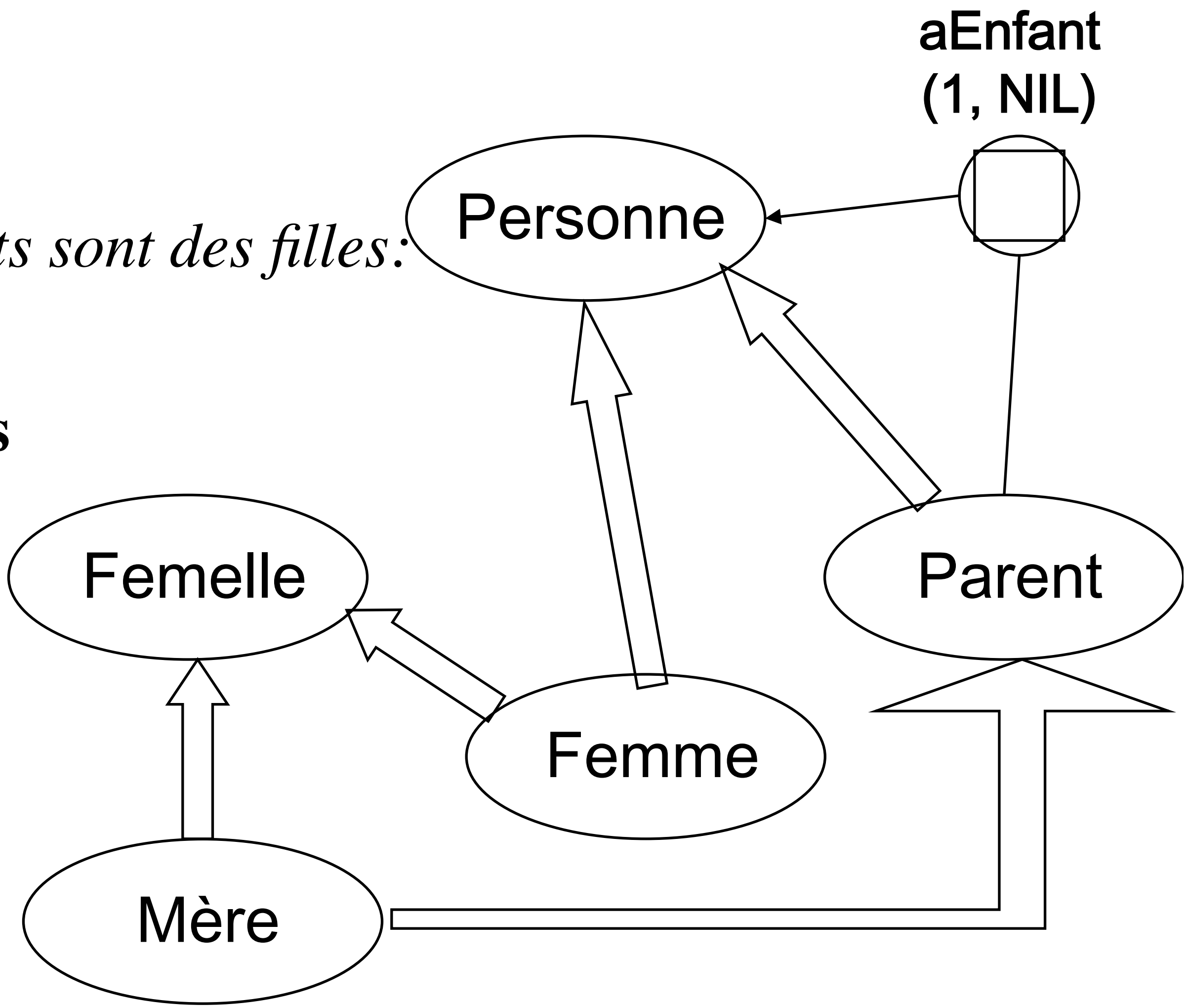
$Homme \sqcup Femme$

Individus ayant une fille:

$\exists aEnfant.Femme$

Individus dont tous les enfants sont des filles:

$\forall aEnfant.Femme$



Restrictions sur les nombres

Personnes ayant au moins trois enfants:

$\geq_3 aEnfant$

Intersection de rôles

Femme ayant au moins deux filles:

$Femme \sqcap \geq_2(aEnfant \sqcap aFemmeFamille)$

ABox:

aEnfant(Marie, Pierre) *ou* <Marie, Pierre>:aEnfant

L
I
P
6

C
N
R
S

$\mathcal{AL}$ Syntaxe

Alphabet

- **concepts atomiques A, B, C, D…**
- **Rôles atomiques r, s, u, v, …**
- **Symboles {⊓, ∃, ∀, ¬, .}**

Grammaire

concept ::= <concept atomique> |
<concept> ⊓ <concept> |
∃<role atomique> |
¬<concept atomique> |
∀<role atomic>.<concept>

$\mathcal{ALC}$: la plus simple des logiques de description propositionnelles

L I P 6 C N R S

Alphabet

- **Ensemble de concepts atomiques A, B, C, D…**
- **Ensemble de rôles atomiques R, S, U, V, …**
- **Symboles {$\sqcup$,$\sqcap$,$\exists$,$\forall$,$\neg$,$\top$,$\bot$,.}**

Grammaire

- **$\top$ et $\bot$ sont des concepts**

- **Si C et D sont des concepts:**
  - **$\neg$C est un concept** *(et pas uniquement un concept atomique)*
  - **C $\sqcup$ D et C $\sqcap$D sont des concepts**
- **Si R est un rôle et C un concept**
  - **$\forall$R.C et $\exists$R.C sont des concepts**

LIP6 CNRS

La « *famille* » des logiques de description: les extensions de $\mathcal{AL}$

- $\mathcal{S}$ est souvent utilisé pour dénoter $\mathcal{ALC}$ avec roles transitifs (R_+)
- Des lettres additionnelles indiquent d'autres extensions:
  - $\mathcal{H}$ pour les axiomes d'inclusion de rôles (hiérarchie de rôles aFille $\sqsubseteq$ aEnfant)
  - $\mathcal{O}$ pour noms (classes nominales – singleton, exemple: {Italie})
  - $\mathcal{I}$ pour les rôles inverses (estEnfantDe ´ aEnfant^{-1})
  - $\mathcal{N}$ pour les restrictions sur les nombres (de la forme $\not{n}R$,>nR ou $\exists^{\leq n}$, $\exists^{\geq n}$)
  - $\mathcal{Q}$ pour les restrictions qualifiées sur les nombres (of form 6nR.C, >nR.C)
- p.e. OWL est $\mathcal{ALC}$+ R_+ + hierarchie de rôles + classes nominales + inversion de rôles + restrictions qualitifées sur les nombres = $\mathcal{SHOIQ}$

$\mathcal{ALCN}$: ajout contraintes sur les cardinalités

Alphabet

- Ensemble de concepts atomiques A, B, C, D…
- Ensemble de rôles atomiques R, S, U, V, …
- Symboles $\{\sqcup, \sqcap, \exists, \forall, \neg, \top, \bot, ., \exists^{\leq n}, \exists^{\geq n}\}$

Grammaire

  - $\top$ et $\bot$ sont des concepts
- Si C et D sont des concepts:
  - $\neg C$ est un concept
  - $C \sqcup D$ et $C \sqcap D$ sont des concepts
- Si R est un rôle et C un concept
  - $\forall R.C$ et $\exists R.C$ sont des concepts
- Si R est un rôle
  - $\exists^{\leq n}R$ et $\exists^{\geq n}R$ sont des concepts

L I P 6 C N R S

Exercise

1. Nobody steal.	1. $\neg\exists steal.T$
2. No human does steal.	2. $\exists steal.\ T \sqcap Humain \sqsubseteq \bot$
3. All human are honest	3. $Human \sqsubseteq Honest$
4. At least one human is a king. *(with a king as a role)*	4. $Human \sqcap \exists king.T \neq \bot$ $\exists king^{-1}.Human$
5. At more one human is a king	5. $\exists^{\leq 1} king^{-1}.Human$
6. Pierre is a king	6. $Pierre{:}\exists king.T$ $Pierre{:}King$
7. One cannot be both a man and a woman	7. $Man \sqcap Woman \sqsubseteq \bot$

king and steal are roles

Exercise *(following)*

1. A minor is a person less than 18 years old
2. Family whose children are all minor.
3. Man who has more than three daughters
4. A woman whose children are less than 3 years old
5. A woman who is the child of a man who is older than 90

1. Minor ≡ Person ⊓ ∃hasAge.≤18
2. Family ⊓ ∀hasChildren.Minor
3. Man ⊓ $\exists^{\geq 3}$hasChildren.Woman
4. Woman ⊓∀hasChildren. ∃hasAge.≤3
5. Woman ⊓ hasChildren^{-1}. (Man⊓∃hasAge.≥90)

age is a role, ≤ 18 is a concept

Sémantique formelle: modèle

Si $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, .^{\mathcal{I}})$ est une interprétation

- a:C est satisfait par $\mathcal{I}$ si $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$
- <a,b>:R est satisfait par $\mathcal{I}$ si $\langle a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}} \rangle \in R^{\mathcal{I}}$
- Une interprétation $\mathcal{I}$ est dite être un modèle de la ABox $\mathcal{A}$ si toutes les assertions de $\mathcal{A}$ sont satisfaites par $\mathcal{I}$.

Une interprétation $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, .^{\mathcal{I}})$ est dite être un **modèle** de la base de connaissance Σ si tous les axiomes de Σ sont satisfaites par $\mathcal{I}$.

Une base de connaissance Σ est **satisfiable** si elle admet un modèle

$\mathcal{FL}^-$: Sémantique formelle

Une interprétation $\mathcal{I} = (\Delta^\mathcal{I}, .^\mathcal{I})$ consiste en

- **Un ensemble non vide $\Delta^\mathcal{I}$ (le *domaine*)**
- **Un fonction (la *fonction d'interprétation*) qui associe**
  - **À tout concept C, un sous-ensemble $C^\mathcal{I}$ de $\Delta^\mathcal{I}$**
  - **À tout rôle R, un sous-ensemble $R^\mathcal{I}$ de $\Delta^\mathcal{I} \times \Delta^\mathcal{I}$**
  - **À tout individu i, un élément $i^\mathcal{I}$ de $\Delta^\mathcal{I}$**

L I P 6 C N R S

$\mathcal{FL}^-$: Fonction d'extension

Une fonction d'interprétation $.^{\mathcal{I}}$ est une *fonction d'extension* ssi

- **$(C \sqcap D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}}$**
- **$(\forall R.C)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta \mid \forall y.\ (x, y) \in R^{\mathcal{I}} \Rightarrow y \in C^{\mathcal{I}}\}$**
- **$(\exists R)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta \mid \exists y.\ (x, y) \in R^{\mathcal{I}}\}$**

Remarque: $C^{\mathcal{I}}$ est l'ensemble des individus de l'extension de C dans l'interprétation $\mathcal{I}$

Ainsi, écrire $x \in C^{\mathcal{I}}$ est équivalent à C(x).

De même, $(x, y) \in R^{\mathcal{I}}$ est équivalent à R(x,y)

L I P 6 C N R S

La sémantique du langage $\mathcal{AL}$

Syntaxe	Sémantique
$\top^{\mathcal{I}}$	$\Delta^{\mathcal{I}}$(concept universel)
$\bot^{\mathcal{I}}$	$\emptyset$(concept vide)
$(\neg A)^{\mathcal{I}}$	$\Delta^{\mathcal{I}} \setminus A^{\mathcal{I}}$(négation atomique)
$(C \sqcap D)^{\mathcal{I}}$	$C^{\mathcal{I}} \sqcap D^{\mathcal{I}}$(intersection)
$(\forall R.C)^{\mathcal{I}}$	$\{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \forall b.(a,b) \in R^{\mathcal{I}} \rightarrow b \in C^{\mathcal{I}}\}$ (restriction de rôle)
$(\exists R.\top)^{\mathcal{I}}$	$\{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists b.(a,b) \in R^{\mathcal{I}}\}$ (quantification existentielle limitée)
R	$R^{\mathcal{I}} \subset \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$($R$ est un *rôle atomique*)
A	$A^{\mathcal{I}} \subset \Delta^{\mathcal{I}}$ (A est un *concept atomique*)

$\mathcal{ALC}$: la plus simple des logiques de description propositionnelles

L I P 6 C N R S

Alphabet

- **Ensemble de concepts atomiques A, B, C, D…**
- **Ensemble de rôles atomiques R, S, U, V, …**
- **Symboles {$\sqcup$,$\sqcap$,$\exists$,$\forall$,$\neg$,$\top$,$\bot$,.}**

Grammaire

- $\top$ et $\bot$ sont des concepts
- **Si C et D sont des concepts:**
  - $\neg$C est un concept
  - C $\sqcup$ D et C $\sqcap$D sont des concepts
- **Si R est un rôle et C un concept**
  - $\forall$R.C et $\exists$R.C sont des concepts

Sémantique $\mathcal{ALC}$

$$(C \sqcap D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}}$$
$$(C \sqcup D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cup D^{\mathcal{I}}$$
$$(\neg C)^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}}$$

Extensions $\mathcal{ALC}$

$$(\exists R.C)^{\mathcal{I}} = \{x \mid \exists y.\langle x, y\rangle \in R^{\mathcal{I}} \wedge y \in C^{\mathcal{I}}\}$$
$$(\forall R.C)^{\mathcal{I}} = \{x \mid \forall y.(x, y) \in R^{\mathcal{I}} \Rightarrow y \in C^{\mathcal{I}}\}$$

Sémantique générale

$$
\begin{array}{lcl}
(C \sqcap D)^{\mathcal{I}} & = & C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}} \\
(C \sqcup D)^{\mathcal{I}} & = & C^{\mathcal{I}} \cup D^{\mathcal{I}} \\
(\neg C)^{\mathcal{I}} & = & \Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}} \\
\{x\}^{\mathcal{I}} & = & \{x^{\mathcal{I}}\} \\
(\exists R.C)^{\mathcal{I}} & = & \{x \mid \exists y.\langle x, y\rangle \in R^{\mathcal{I}} \wedge y \in C^{\mathcal{I}}\} \\
(\forall R.C)^{\mathcal{I}} & = & \{x \mid \forall y.(x, y) \in R^{\mathcal{I}} \Rightarrow y \in C^{\mathcal{I}}\} \\
(\leqslant n R)^{\mathcal{I}} & = & \{x \mid \#\{y \mid \langle x, y\rangle \in R^{\mathcal{I}}\} \leqslant n\} \\
(\geqslant n R)^{\mathcal{I}} & = & \{x \mid \#\{y \mid \langle x, y\rangle \in R^{\mathcal{I}}\} \geqslant n\} \\
(R^{-})^{\mathcal{I}} & = & \{(x, y) \mid (y, x) \in R^{\mathcal{I}}\}
\end{array}
$$

Tbox définitoire

- Une **inclusion générale de concepts** est de la forme $C \sqsubseteq D$ où C et D sont des concepts.
- Une interprétation $\mathcal{I}$ est un modèle de si $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$.
- $\mathcal{I}$ est un modèle de la Tbox $\mathcal{T}$ si c'est un modèle de toutes les inclusions de concepts de $\mathcal{T}$.
- $C \equiv D$ est une abréviation pour $C \sqsubseteq D$ et $D \sqsubseteq C$
- Un axiome de la forme $A \equiv C$ où A est un nom de concept est appelé une **définition** de A
- Une Tbox $\mathcal{T}$ est dite **définitoire** si elle ne contient que des définitions avec les restrictions additionnelles suivantes:
  - $\mathcal{T}$ contient au plus une définition pour chaque nom de concept
  - $\mathcal{T}$ est acyclique

Base de connaissance
Knowledge Base

- **Une Base de connaissance $\mathcal{K}$ est une paire $\langle \mathcal{T},\mathcal{A} \rangle$ où**
  - **$\mathcal{T}$ est un ensemble d'axiomes "terminologiques" (la Tbox)**
  - **$\mathcal{A}$ est un ensemble d'axiomes "assertionels" (la Abox)**
- **Les axiomes sont de la forme**

  $C \sqsubseteq D, C \equiv D, R \sqsubseteq S, R \equiv S$ et $R^+ \sqsubseteq R$

  où C, D sont des concepts, R, S des rôles et R^+ un ensemble de rôles transitifs

  Remarque: le graphe des définitions doit être acyclique
- **Les axiomes de la Abox sont de la forme:**

  $x{:}D, \langle x,y \rangle{:}R$

  où x,y sont des noms d'individus, D un concept et R un rôle

Sémantique formelle: modèle

Si $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, .^{\mathcal{I}})$ est une interprétation

- **a:C est satisfait par $\mathcal{I}$ si $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$**
- **<a,b>:R est satisfait par $\mathcal{I}$ si $\langle a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}} \rangle \in R^{\mathcal{I}}$**
- **Une interprétation $\mathcal{I}$ est dite être un modèle de la ABox ($\mathcal{I}$ ² $\mathcal{A}$) si toutes les assertions de $\mathcal{A}$ sont satisfaites par $\mathcal{I}$.**
- **Une interprétation $\mathcal{I}$ est dite être un modèle de la TBox ($\mathcal{I}$ ² $\mathcal{T}$) si tous les axiomes de $\mathcal{T}$ sont satisfaites par $\mathcal{I}$.**

Une interprétation $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, .^{\mathcal{I}})$ est dite être un modèle de la base de connaissance Σ si tous les axiomes de Σ sont satisfaites par $\mathcal{I}$.

Une base de connaissance Σ est satisfiable si elle admet un modèle