

Бройни системи

Изчисляване на стойността

$$A = a_n B^n + a_{n-1} B^{n-1} + \dots + a_1 B^1 + a_0 B^0 + a_{-1} B^{-1} + a_{-2} B^{-2} + \dots$$

A – число в позиционна бройна система;

a – цифра на бройната система;

B – основа на системата;

n – позиция (разряд) в записа на числото;

Най-голямото число с n позиции – B^{n-1}

Десетична бройна система

- основа 10
- 10 цифри: (0 ÷ 9)

Двоична бройна система

- основа 2
- 2 цифри (0 и 1 – бит (двоична цифра))

Шестнадесетична бройна система

- основа 16
- 16 цифри (0 ÷ 15: 0,1,...,9,A,B,C,D,E,F)

Осмична бройна система

- основа 8
- 8 цифри (0 ÷ 7)

Разряд (позиция)

7	6	5	4	3	2	1	0
$2^7=128$	$2^6=64$	$2^5=32$	$2^4=16$	$2^3=8$	$2^2=4$	$2^1=2$	$2^0=1$

Десетично число:

8	4	2	7
$10^3=1000$	$10^2=100$	$10^1=10$	$10^0=1$

$$\begin{aligned}\text{Десетично число: } 8 * 10^3 + 4 * 10^2 + 2 * 10^1 + 7 * 10^0 = \\ 8 * 1000 + 4 * 100 + 2 * 10 + 7 * 1 = 8427\end{aligned}$$

Двоично число:

1	1	0	1
$2^3=8$	$2^2=4$	$2^1=2$	$2^0=1$

$$\begin{aligned}\text{Десетично число: } 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = \\ 1 * 8 + 1 * 4 + 0 * 2 + 1 * 1 = 13\end{aligned}$$

Шестнадесетично число:

2	A	8	E
$16^3=4096$	$16^2=256$	$16^1=16$	$16^0=1$

$$\begin{aligned}\text{Десетично число: } 2 * 16^3 + 10 * 16^2 + 8 * 16^1 + 14 * 16^0 = \\ 2 * 4096 + 10 * 256 + 8 * 16 + 14 * 1 = 10894\end{aligned}$$

Двоично	Осмично	Десетично	Шестнадесетично
0	0	0	0
1	1	1	1
10	2	2	2
11	3	3	3
100	4	4	4
101	5	5	5
110	6	6	6
111	7	7	7
1000	10	8	8
1001	11	9	9
1010	12	10	A
1011	13	11	B
1100	14	12	C
1101	15	13	D
1110	16	14	E
1111	17	15	F

Преобразуване на цяло число от десетична система в бройна система с основа B

Алгоритъм

Започва се от най-младшият разряд, т.е. $i=0$;

повтаряй

разделя се целочислено числото A на основата B – $Q = A/B$;

остатъкът от делението се присвоява като значение на най-младшия разряд, т.е. $a_i = A - Q * B$;

новото число $A = Q$ – за следващото деление;

установява се следващият разряд – $i = i+1$;

докато частното от делението $R > 0$.

$$57_{10}=?_2$$

$i = 0$	$Q = 57 / 2 = 28$	$a_0 = 57 - 28 * 2 = 1$	$A = 28$
$i = 1$	$Q = 28 / 2 = 14$	$a_1 = 28 - 14 * 2 = 0$	$A = 14$
$i = 2$	$Q = 14 / 2 = 7$	$a_2 = 14 - 7 * 2 = 0$	$A = 7$
$i = 3$	$Q = 7 / 2 = 3$	$a_3 = 7 - 3 * 2 = 1$	$A = 3$
$i = 4$	$Q = 3 / 2 = 1$	$a_4 = 3 - 1 * 2 = 1$	$A = 1$
$i = 5$	$Q = 1 / 2 = 0$	$a_5 = 1 - 0 * 2 = 1$	$A = 0$

$$57_{10} = 111001_2$$

$$57_{10}=?_{16}$$

$i = 0$	$Q = 57 / 16 = 3$	$a_0 = 57 - 3 * 16 = 9$	$A = 3$
$i = 1$	$Q = 3 / 16 = 0$	$a_1 = 3 - 0 * 16 = 3$	$A = 0$

$$57_{10} = 39_{16}$$

Преобразуване на дробна част от десетична система в бройна система с основа V

Алгоритъм

започва се от разряд $i=-1$;

повтаряй

умножава се числото A с основата V , т.е.
произведението $P=A*V$;

цялата част на произведението се присвоява като
значение на разряда, $a_i=\text{цяла част}(P)$;

новото число $A = \text{дробна част}(P)$ – за следващото
умножение;

минава се на следващия разряд, $i=i+1$;

докато числото $A>0$.

$$0,25_{10}=?_2$$

$$i = -1 \quad P = 0,25 * 2 = 0,5 \quad a_{-1}=\mathbf{0} \quad A = 0,5$$

$$i = -2 \quad P = 0,5 * 2 = 1,0 \quad a_{-2}=\mathbf{1} \quad A = 0$$

$$0,25_{10}=0,01_2$$

$$0,25_{10}=?_{16}$$

$$i = -1 \quad P = 0,25 * 16 = 4,0 \quad a_{-1}=\mathbf{4} \quad A = 0$$

$$0,25_{10}=0,4_{16}$$

$$57,25_{10}=111001,01_2$$

$$57,25_{10}=39,4_{16}$$

Работа с точност

$$0,13_{10}=?_2$$

$$i = -1 \quad P = 0,13 * 2 = 0,26 \quad a_{-1}=\mathbf{0} \quad A = 0,26$$

$$i = -2 \quad P = 0,26 * 2 = 0,52 \quad a_{-2}=\mathbf{0} \quad A = 0,52$$

$$i = -3 \quad P = 0,52 * 2 = 1,04 \quad a_{-2}=\mathbf{1} \quad A = 0,04$$

$$i = -4 \quad P = 0,04 * 2 = 0,08 \quad a_{-2}=\mathbf{0} \quad A = 0,08$$

$$i = -5 \quad P = 0,08 * 2 = 0,16 \quad a_{-2}=\mathbf{0} \quad A = 0,16$$

...

$$0,13_{10} \approx 0,001_2$$

- Дробните числа (с плаваща запетая) при компютрите обикновено не са точни
 - 1.0 е обикновено стойност подобна на 0.99999981
- Когато се сравняват дробни числа, се използва определена точност за допускане на грешка
 - вместо ~~$a \neq b$~~ – $a \leq b + 0.01 \ \&\& \ a \geq b - 0.01$

Съкратени преобразувания

Основите, кратни на 2 (двоична, осмична и шестнадесетична система), допускат много бързи преобразувания между тях.

1. Преобразуване от двоична в шестнадесетична система
 - групират се битовете в групи по четири ($2^4 = 16$), започвайки LSB \rightarrow MSB
 - всяка група от четири бита се конвертира в шестнадесетична цифра

101 1111 1011 0011
└─┘ └─┘ └─┘ └─┘
5 F B 3

$101111110110011_2 = 5FB3_{16}$

2. Преобразуване от шестнадесетична в двоична система
- всяка шестнадесетична цифра се представя чрез същата стойност в четири двоични цифри
 - добавят се водещи нули към двоичната версия на всяка шестнадесетична цифра, ако е необходимо

4 0 C 6
┌───┐ ┌───┐ ┌───┐ ┌───┐
0100000011000110

$$40C6_{16} = 100000011000110_2$$

3. Преобразуване от двоична в осмична система
 - Аналогично на $2 \rightarrow 16$, но в групи по три ($2^3 = 8$)
4. Преобразуване от осмична в двоична система
 - Аналогично на $16 \rightarrow 2$, но всяка осмична цифра се представя чрез същата стойност в три двоични цифри

5. Преобразуване от шестнадесетична в осмична система
 - две съкратени преобразувания
 - от шестнадесетична в двоична система
 - от двоична в осмична система
6. Преобразуване от осмична в шестнадесетична система
 - две съкратени преобразувания
 - от осмична в двоична система
 - от двоична в шестнадесетична система

Събиране на двоични числа

$$0 + 0 = 0 \quad 1 + 0 = 1$$

$$0 + 1 = 1 \quad 1 + 1 = 0 \text{ (1 пренос / carry)}$$

$$\begin{array}{r} 01101 \text{ (13}_{10}\text{)} \\ + \\ 00110 \text{ (6}_{10}\text{)} \\ \hline \end{array}$$

$$10011 \text{ (19}_{10}\text{)}$$

Препълване (overflow)

$$\begin{array}{r} 01101 \text{ (13}_{10}\text{)} \\ + \\ 10110 \text{ (22}_{10}\text{)} \\ \hline \end{array}$$

+

$$10110 \text{ (22}_{10}\text{)}$$

$$\begin{array}{r} 100011 \text{ (3}_{10}\text{)} \end{array}$$

- Цифрата 1 в началото не може да бъде запазена, настъпва препълване (overflow) → грешен резултат

Изваждане на двоични числа

- Прав код – 0010 (+2) Събиране с отрицателното число – $a - b = a + (-b)$
- Отрицателни числа – първият бит (MSB) се използва за знак 0=+, 1= –
 - $\rightarrow 1010 (-2)$
 - Обратен код (one's complement), nicht oft benutzt
 - Invertieren 0110 (+6) $\rightarrow 1001 (-6)$
 - Допълнителен код (two's complement)
 - Invertieren und +1 summieren – 0110 (+6) $\rightarrow 1001 + 1 \rightarrow 1010 (-6)$
 - $2n - \text{die positive Zahl} - 6_{10} = 2^4 - 6 = 16 - 6 = 10_{10} = 1010_2$
 - Използване на числа със знак (signed) води до изместване на диапазона от стойности

$$11_{10} - 6_{10} = 11_{10} + (-6_{10}) =$$

$$1011_2 + 1010_2 = 0101_2 (! \text{ Überlauf wird ignoriert bei Zweierkomplement})$$

Побитови операции

- Инвертиране - \sim
 - $01100 \rightarrow 10011$

- „ИЛИ“ - $|$

$$\begin{array}{r} 01101 \\ | \\ 00110 \\ \hline 01111 \end{array}$$

op1	op2	
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

- „И“ - $\&$

$$\begin{array}{r} 01101 \\ \& \\ 00110 \\ \hline 00100 \end{array}$$

op1	op2	&
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

СИМВОЛИ

Dec	Hx	Oct	Char	Dec	Hx	Oct	Html	Chr	Dec	Hx	Oct	Html	Chr	Dec	Hx	Oct	Html	Chr
0	0	000	NUL (null)	32	20	040	 	Space	64	40	100	@	@	96	60	140	`	`
1	1	001	SOH (start of heading)	33	21	041	!	!	65	41	101	A	A	97	61	141	a	a
2	2	002	STX (start of text)	34	22	042	"	"	66	42	102	B	B	98	62	142	b	b
3	3	003	ETX (end of text)	35	23	043	#	#	67	43	103	C	C	99	63	143	c	c
4	4	004	EOT (end of transmission)	36	24	044	$	\$	68	44	104	D	D	100	64	144	d	d
5	5	005	ENQ (enquiry)	37	25	045	%	%	69	45	105	E	E	101	65	145	e	e
6	6	006	ACK (acknowledge)	38	26	046	&	&	70	46	106	F	F	102	66	146	f	f
7	7	007	BEL (bell)	39	27	047	'	'	71	47	107	G	G	103	67	147	g	g
8	8	010	BS (backspace)	40	28	050	((72	48	110	H	H	104	68	150	h	h
9	9	011	TAB (horizontal tab)	41	29	051))	73	49	111	I	I	105	69	151	i	i
10	A	012	LF (NL line feed, new line)	42	2A	052	*	*	74	4A	112	J	J	106	6A	152	j	j
11	B	013	VT (vertical tab)	43	2B	053	+	+	75	4B	113	K	K	107	6B	153	k	k
12	C	014	FF (NP form feed, new page)	44	2C	054	,	,	76	4C	114	L	L	108	6C	154	l	l
13	D	015	CR (carriage return)	45	2D	055	-	-	77	4D	115	M	M	109	6D	155	m	m
14	E	016	SO (shift out)	46	2E	056	.	.	78	4E	116	N	N	110	6E	156	n	n
15	F	017	SI (shift in)	47	2F	057	/	/	79	4F	117	O	O	111	6F	157	o	o
16	10	020	DLE (data link escape)	48	30	060	0	0	80	50	120	P	P	112	70	160	p	p
17	11	021	DC1 (device control 1)	49	31	061	1	1	81	51	121	Q	Q	113	71	161	q	q
18	12	022	DC2 (device control 2)	50	32	062	2	2	82	52	122	R	R	114	72	162	r	r
19	13	023	DC3 (device control 3)	51	33	063	3	3	83	53	123	S	S	115	73	163	s	s
20	14	024	DC4 (device control 4)	52	34	064	4	4	84	54	124	T	T	116	74	164	t	t
21	15	025	NAK (negative acknowledge)	53	35	065	5	5	85	55	125	U	U	117	75	165	u	u
22	16	026	SYN (synchronous idle)	54	36	066	6	6	86	56	126	V	V	118	76	166	v	v
23	17	027	ETB (end of trans. block)	55	37	067	7	7	87	57	127	W	W	119	77	167	w	w
24	18	030	CAN (cancel)	56	38	070	8	8	88	58	130	X	X	120	78	170	x	x
25	19	031	EM (end of medium)	57	39	071	9	9	89	59	131	Y	Y	121	79	171	y	y
26	1A	032	SUB (substitute)	58	3A	072	:	:	90	5A	132	Z	Z	122	7A	172	z	z
27	1B	033	ESC (escape)	59	3B	073	;	:	91	5B	133	[[123	7B	173	{	{
28	1C	034	FS (file separator)	60	3C	074	<	<	92	5C	134	\	\	124	7C	174	|	
29	1D	035	GS (group separator)	61	3D	075	=	=	93	5D	135]]	125	7D	175	}	}
30	1E	036	RS (record separator)	62	3E	076	>	>	94	5E	136	^	^	126	7E	176	~	~
31	1F	037	US (unit separator)	63	3F	077	?	?	95	5F	137	_	_	127	7F	177		DEL