Постановка задачи (2005—№32)

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{\ddot{x}^2(t)\left(\cos(\alpha x(t)) + 2\right)}{1+\alpha t^2}\,dt \to \mathrm{extr}, \\ x(0) = \dot{x}(1) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \\ \alpha \in \{0;\ 0.1;\ 1;\ 10;\ 10.5;\ 11\} \end{cases}$$

Дополнительно: посчитать значение функционала и проверить условие якоби

Сведение задачи к задаче Лагранжа

Введём переменные:

$$y(t) = \dot{x}(t), \quad u(t) = \dot{y}(t) = \ddot{x}(t).$$

Тогда задача принимает вид:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{u^2\left(\cos(\alpha x) + 2\right)}{1+\alpha t^2}\,dt \to \mathrm{extr}, \\ \dot{x} = y, \\ \dot{y} = u, \\ x(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y(0) = 1. \end{cases}$$

Система необходимых условий

Функционал Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \lambda_0 \int_0^1 \frac{u^2(\cos(\alpha x)+2)}{1+\alpha t^2}\,dt + \lambda_1 x(0) + \lambda_2 y(1) + \lambda_3 (y(0)-1) + \int_0^1 p_1(\dot{x}-y) + p_2(\dot{y}-u)\,dt.$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 &= -\lambda_0 \frac{\alpha u^2 \sin(\alpha x)}{1+\alpha t^2}, \\ \dot{p}_2 &= -p_1. \end{cases}$$

Условия трансверсальности:

$$\begin{cases} p_1(0) = \lambda_1, \quad p_1(1) = 0, \\ p_2(0) = \lambda_3, \quad p_2(1) = -\lambda_2. \end{cases}$$

Стационарность по u:

$$2\lambda_0 \frac{u(\cos(\alpha x)+2)}{1+\alpha t^2} = p_2.$$

Анализ анормального случая

При $\lambda_0 = 0$ система вырождается:

$$p_2 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = p_1 = 0,$$

что нарушает НЕРОН. Следовательно, $\lambda_0 \neq 0$. Нормируем $\lambda_0 = \frac{1}{2}$.

Аналитическое решение при $\alpha = 0$

При $\alpha = 0$ уравнения упрощаются:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = 0, \\ \dot{p}_2 = -p_1, \\ 3u = p_2, \\ \dot{x} = y, \\ \dot{y} = u, \\ p_1(0) = \lambda_1, \quad p_1(1) = 0, \\ p_2(0) = \lambda_3, \quad p_2(1) = -\lambda_2, \\ y(0) = 1, \quad y(1) = 0, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Решая данную систему получим:

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{t^2}{2} + t, \\ \lambda_1 = 0, \; \lambda_3 = -\lambda_2 = -3. \end{cases}$$

Краевая задача

Выразим $u(t)$:

$$u = \frac{p_2(1 + \alpha t^2)}{\cos(\alpha x) + 2}.$$

Тогда краевая задача принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\frac{\alpha p_2^2(1+\alpha t^2)\sin(\alpha x)}{2(\cos(\alpha x)+2)^2}, \\ \dot{p}_2 = -p_1, \\ \dot{y} = \frac{p_2(1+\alpha t^2)}{\cos(\alpha x)+2}, \\ \dot{x} = y, \\ p_1(0) = \lambda_1, \quad p_1(1) = 0, \\ p_2(0) = \lambda_3, \quad p_2(1) = -\lambda_2, \\ y(0) = 1, \quad y(1) = 0, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Чтобы посчитать значение функционала введем дополнительную переменную:

$$\begin{cases} z = \int_0^t \frac{u^2(\cos(\alpha x)+2)}{1+\alpha t^2} dt, \ u = \frac{p_2(1+\alpha t^2)}{\cos(\alpha x)+2} \\ \dot{z} = \frac{u^2(\cos(\alpha x)+2)}{1+\alpha t^2}; \\ z(0) = 0; \\ z(1) = \int_0^t \frac{u^2(\cos(\alpha x)+2)}{1+\alpha t^2} dt \end{cases}$$

Условие Якоби

$$L = \frac{u^2(cos(\alpha x)+2)}{2(1+\alpha t^2)} + p_1(\dot{x}-y) + p_2(\dot{y}-u)$$

Тогда вторая вариация функционала принимает вид:

$$\tilde{\mathcal{L}} = \int_0^1 \frac{(cos(\alpha x)+2)}{1+\alpha t^2}\delta u^2 - 2\frac{\alpha sin(\alpha x)}{1+\alpha t^2}\delta x\delta u - \frac{1}{2}\frac{\alpha^2 u^2 cos(\alpha x)}{1+\alpha t^2}\delta x^2 dt$$

Получим систему:

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{L}} \to extr, \\ \dot{\delta x} = \delta y, \\ \dot{\delta y} = \delta u, \\ \delta x(0) = \delta y(0) = 0. \end{cases}$$

$$\tilde{L} = \frac{(cos(\alpha x)+2)}{1+\alpha t^2}\delta u^2 - 2\frac{\alpha sin(\alpha x)}{1+\alpha t^2}\delta x\delta u - \frac{1}{2}\frac{\alpha^2 u^2 cos(\alpha x)}{1+\alpha t^2}\delta x^2 + q_1(\dot{\delta x}-\delta y) + q_2(\dot{\delta y}-\delta u)$$

Необходимые условия оптимальности:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = -2\frac{\alpha sin(\alpha x)}{1+\alpha t^2}\delta u - \frac{\alpha^2 u^2 cos(\alpha x)}{1+\alpha t^2}\delta x, \\ \dot{q}_2 = -q_1, \\ 2\frac{(cos(\alpha x)+2)}{1+\alpha t^2}\delta u - 2\frac{\alpha sin(\alpha x)}{1+\alpha t^2}\delta x - q_2 = 0 \end{cases}$$

Откуда:

$$\delta u = \frac{\alpha sin(\alpha x)}{(cos(\alpha x)+2)}\delta x - \frac{q_2(1+\alpha t^2)}{2(cos(\alpha x)+2)}$$

Итоговая система:

$$\begin{cases} \dot{q_1^i} = -2\frac{\alpha sin(\alpha x)}{1+\alpha t^2}\left(\frac{\alpha sin(\alpha x)}{(cos(\alpha x)+2)}\delta x_i - \frac{q_2(1+\alpha t^2)}{2(cos(\alpha x)+2)}\right) - \frac{\alpha^2 u^2 cos(\alpha x)}{1+\alpha t^2}\delta x_i, \\ \dot{q_2^i} = -q_1^i, \\ \dot{\delta x_i} = \delta y_i, \\ \dot{\delta y_i} = \left(\frac{\alpha sin(\alpha x)}{(cos(\alpha x)+2)}\delta x_i - \frac{q_2(1+\alpha t^2)}{2(cos(\alpha x)+2)}\right), \\ \delta x_i(0) = \delta y_i(0) = 0, \\ q_i^j(0) = \delta_i^j \end{cases}$$

Условие Якоби выполнено, если

$$det\begin{pmatrix} q_1^1 & q_1^2 \\ q_2^1 & q_2^2 \end{pmatrix} \neq 0, \text{ для любого } t \in (0,1)$$

Метод Ньютона

Необходимо найти корень уравнения:

$$F(x) = 0$$

Пусть имеется какое-то приближенное значение x_n, тогда следующее значение вычисляется по формуле:

$$x_{n+1} = x_n - \gamma_n h_n,$$

$$\text{где } h_n \;-\; \text{корень } F'(x_n)h_n = F(x_n)$$

$$\gamma_n \in \{1,\ 2^{-1},\ 2^{-2},\ ...\}, \quad \text{т.ч. } \|F(x_n+\gamma_n h_n)\| < \|F(x_n)\|$$

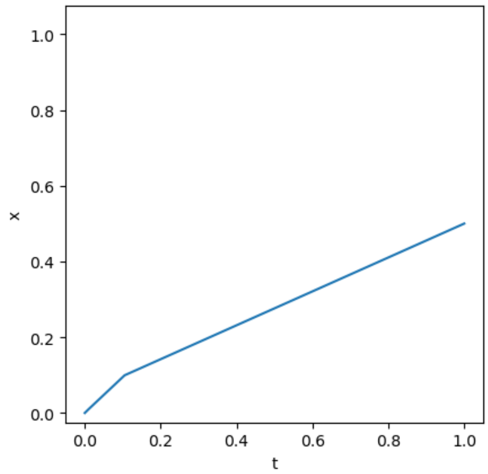
Условия выхода из цикла при выполнения метода Ньютона:
1) $\|F(x_n)\| < \varepsilon$ - программа успешно вычисляет значение корня.
2) $\gamma_n < \varepsilon$ - значение γ слишком мало, цикл уходит в бесконечность.
3) $n > 1000$ - значение n слишком велико, цикл уходит в бесконечность.
Для решения системы линейных уравнений используем метод Гаусса с выбором главного элемента.

Ход работы

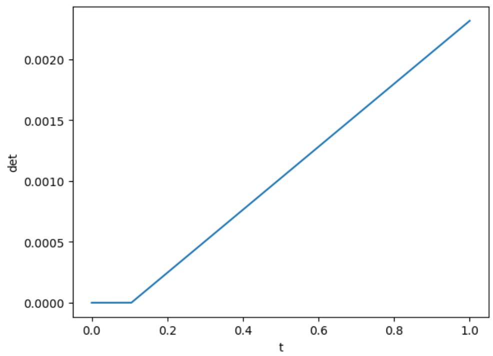
Пусть R(p) - функция прослойки, которая по параметрам пристрелки $p = (\lambda_1,\ \lambda_3)$ решает систему дифференциальных уравнений и считает невязку $R(p) = (p_1(1), y(1))$, эта функция будет использована в методе Ньютона для поиска начальных значений.
Чтобы отыскать решения при всех заданных параметрах α воспользуемся методом продолжения по параметру. При $\alpha = 0$ найдены точные начальные значения $p = (0, -3)$, используем метод Рунге-Кутта, далее итеративно прибавляем 0.1 к α и пристреливаемся методом Ньютона, а в необходимых значениях α после пристрелки выписываем полученные начальные параметры и используем метод Рунге-Кутты.

Результаты

Все вычисления велись с точностью $\varepsilon = 10^{-7}$
При $\alpha = 0$, параметры пристрелки $p = (0, -3)$, значение функционала: 3



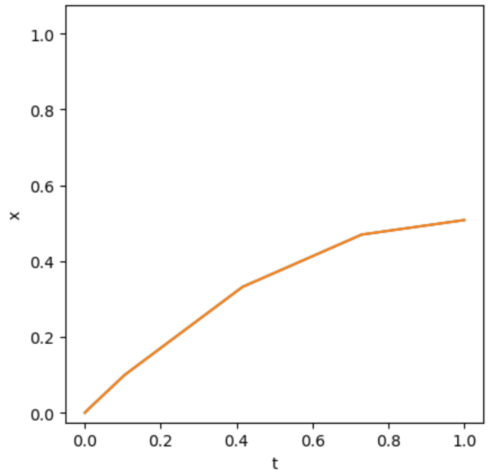
(a) Экстремаль x(t) при $\alpha = 0$



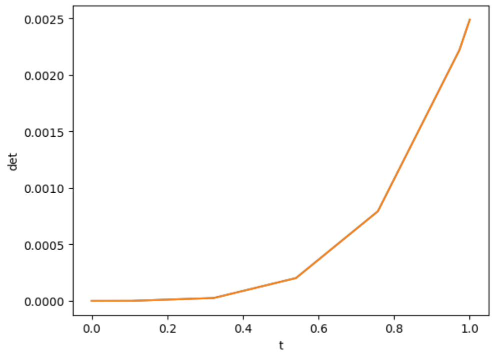
(b) Определитель при $\alpha = 0$

Определитель больше нуля, следовательно условие Якоби выполнено, разность подсчитанной экстремали и истинного значения меньше $1e-17$.

При $\alpha = 0.1$, параметры пристрелки $p = (0.00164978, -2.90188)$, значение функционала: 2.90255

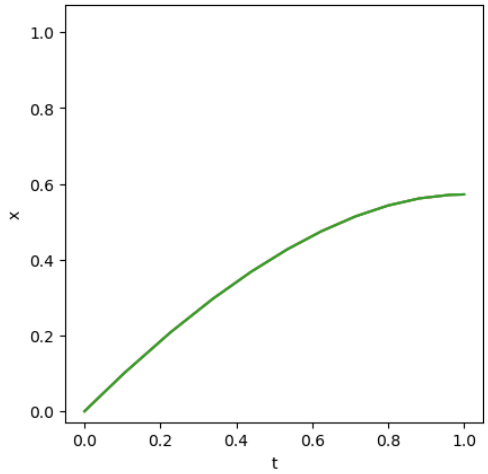


(a) Экстремаль x(t) при $\alpha = 0.1$

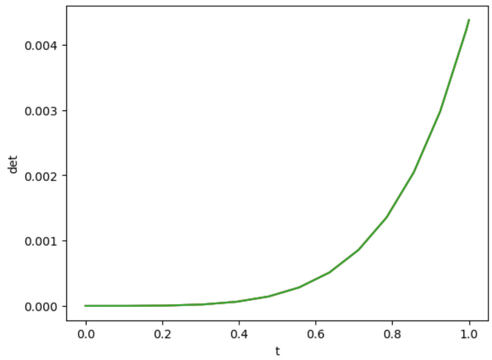


(b) Определитель при $\alpha = 0.1$

Определитель больше нуля, следовательно условие Якоби выполнено. При $\alpha = 1$, параметры пристрелки $p = (0.148711, -2.10954)$, значение функционала: 2.18019



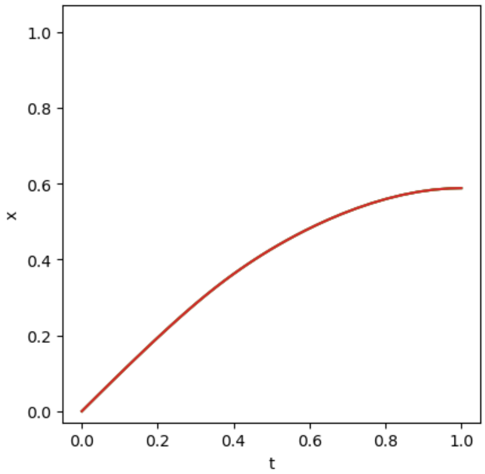
(a) Экстремаль x(t) при $\alpha = 1$



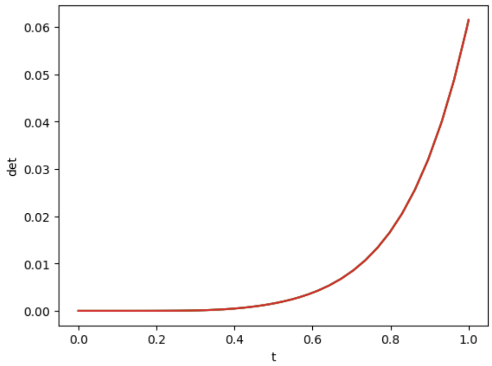
(b) Определитель при $\alpha = 1$

Определитель больше нуля, следовательно условие Якоби выполнено.

При $\alpha = 10$, параметры пристрелки $(-0.393803, -0.757981)$, значение функционала: 0.513176

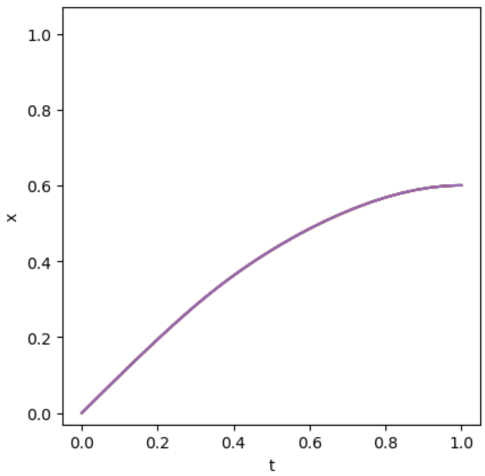


(a) Экстремаль x(t) при $\alpha = 10$

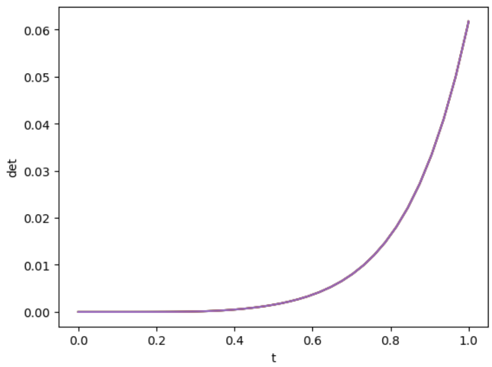


(b) Определитель при $\alpha = 10$

Определитель больше нуля, следовательно условие Якоби выполнено.
При $\alpha = 10.5$, параметры пристрелки $(-0.313163, -0.70587)$, значение функционала: 0.517939



(a) Экстремаль x(t) при $\alpha = 10.5$



(b) Определитель при $\alpha = 10.5$

Определитель больше нуля, следовательно условие Якоби выполнено.