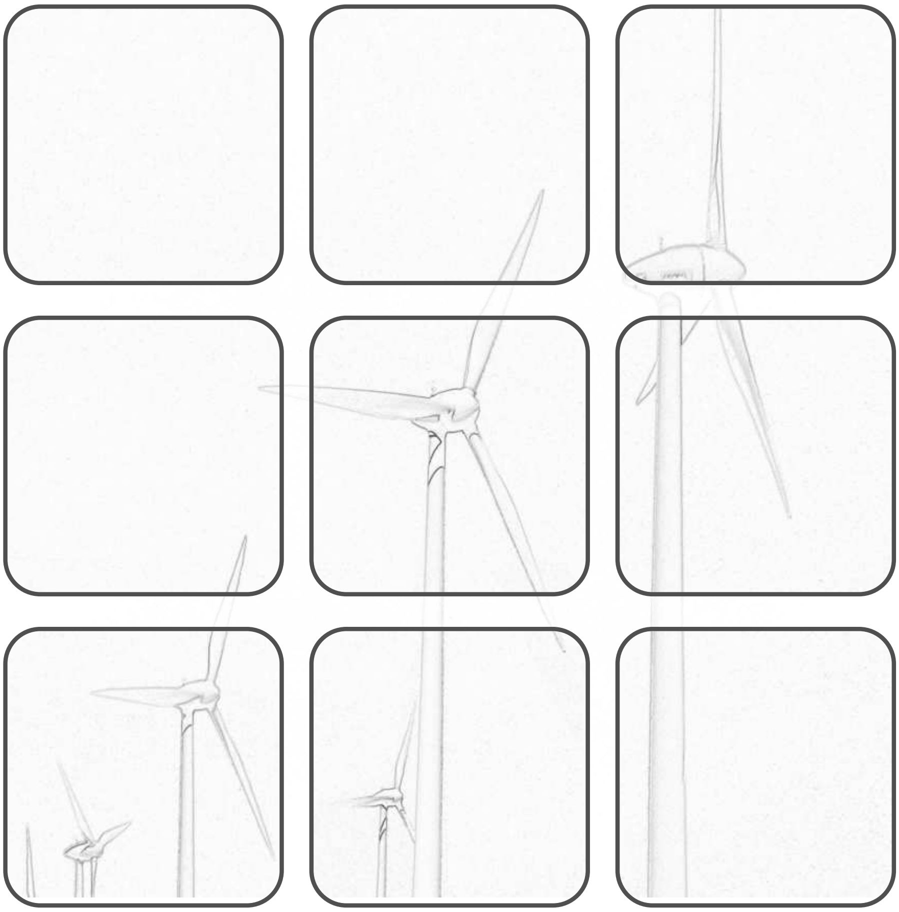
TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

AUTOMATION & CONTROL INSTITUTE
INSTITUT FÜR AUTOMATISIERUNGS- & REGELUNGSTECHNIK

Übung
SS 2017

Univ.-Prof. Dr. techn. Andreas Kugi

FACHVERTIEFUNG
AUTOMATISIERUNGS- & REGELUNGSTECHNIK



Fachvertiefung Automatisierungs- und Regelungstechnik

Übung
SS 2017

Univ.-Prof. Dr. techn. Andreas Kugi

TU Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik
Gruppe für komplexe dynamische Systeme

Gusshausstrasse 27-29
1040 Wien
Telefon: +43 1 58801 – 37615
Internet: http://www.acin.tuwien.ac.at

Inhaltsverzeichnis

0 Organisation

0.1 Inhalt

Diese Übung ist Teil der Lehrveranstaltung VU Fachvertiefung Automatisierungs- und Regelungstechnik. Voraussetzung für die Teilnahme an der Übung ist der Besuch des zugehörigen Vorlesungsteils sowie der Vorlesungen Automatisierung und Modellbildung.

Das Ziel dieser Übung ist es, einen Einblick in die Modellbildung von mechatronischen Systemen basierend auf physikalischen Gesetzmäßigkeiten sowie in den Entwurf und die Implementierung von linearen Reglern zu erhalten. Es werden vier Übungseinheiten abgehalten. Nach einer Einführung in die Softwarepakete MAPLE und MATLAB/SIMULINK werden die Themen

- Modellbildung und Simulation sowie
- der Zustandsreglerentwurf und der Reglerentwurf mittels Frequenzkennlinienverfahren

erarbeitet.

0.2 Ablauf

0.2.1 Vorbereitung

Rechtzeitig vor den Übungsterminen wird der entsprechende Teil dieses Skriptums ausgegeben. **Zur Vorbereitung auf die jeweilige Übungseinheit sind alle in diesem Skriptum gestellten Aufgaben in Zweier-Gruppen zu lösen.** Selbst wenn die Vorbereitung in Zweier-Gruppen erfolgt, wird davon ausgegangen, dass alle Teilnehmenden die gestellten Aufgaben eigenständig lösen können. Bitte prüfen Sie Ihre Berechnungs- und Simulationsergebnisse auf Plausibilität und achten Sie auf funktionierende Simulationsmodelle.

Wenden Sie sich bei Problemen oder Fragen rechtzeitig an die in den jeweiligen Übungsangaben genannten Ansprechpersonen. Insbesondere wird während der Übung keine Zeit mehr für die Korrektur fehlerhaft oder unvollständig ausgearbeiteter Vorbereitungen zur Verfügung stehen.

Studentenlizenzen für die zur Bearbeitung der Aufgaben benötigten Softwarepakete können Sie z. B. beim Zentralen Informatikdienst der TU Wien (http://www.zid.tuwien.ac.at) beziehen. Ferner stehen Ihnen im Computerlabor des Instituts (Labor 8, Raum CA0426) Montag bis Freitag in der Zeit von 9.00 bis 18.00 Uhr Rechner zur Verfügung, sofern der jeweilige Tag nicht vorlesungsfrei ist und der Raum nicht durch Lehrveranstaltungen belegt ist. Der Raum wird bei Bedarf aufgeschlossen. Die Rechnerzugangsdaten werden bei der Vorbesprechung bekanntgegeben. Auf den Rechnern im Computerlabor sind MAPLE 2016 sowie MATLAB R2016b installiert.

0.2.2 Laborübung

Während der vierstündigen Übungseinheiten werden einerseits die von Ihnen ausgearbeiteten Lösungen der Aufgaben sowie die zugrunde liegende Theorie besprochen und andererseits weiterführende Aufgaben bearbeitet. Schließlich werden Sie Gelegenheit haben, einige Ihrer Regelungsalgorithmen an praktischen Laborversuchen zu erproben.

0.2.3 Anforderungen und Beurteilung

Während der Übungseinheiten besteht Anwesenheitspflicht. **Die Ausarbeitung aller Aufgaben sowie die Ausführbarkeit aller erstellten Simulationen sind notwendig für eine positive Beurteilung der Vorbereitung und damit für eine Teilnahme am Übungstermin**.

In die positive Beurteilung gehen

- die Richtigkeit Ihrer vorbereiteten Lösungen,
- Ihre Mitarbeit während der Laborübungen und
- die für die Übung notwendigen Theoriekenntisse

ein.

Für eine **positive Gesamtbeurteilung müssen Sie alle Übungseinheiten positiv** abschließen.

0.3 Termine

Die Vorbesprechung zur Lehrveranstaltung findet am 26.01.2017 von 10:00 bis 10:30 Uhr im Hörsaal EI 3 Sahulka statt. Es ist notwendig, dass alle Teilnehmenden zur Vorbesprechung anwesend sind. Die Einteilung in Zweiergruppen erfolgt online im Zuge der Anmeldung zur Lehrveranstaltung und ist später unter http://www.acin.tuwien.ac.at/?id=61 abrufbar.

Alle weiteren Übungstermine werden zu den nachfolgend genannten Zeiten im Computerlabor des Instituts (Labor 8, Raum CA0426) abgehalten.

Datum		Zeit	Übungseinheit
Donnerstag	09.03.2017	08:00 bis 12:00	Übung 1
		13:00 bis 17:00	
Donnerstag	23.03.2017	08:00 bis 12:00	Übung 2
		13:00 bis 17:00	
Donnerstag	06.04.2017	08:00 bis 12:00	Übung 3
		13:00 bis 17:00	
Donnerstag	04.05.2017	08:00 bis 12:00	Übung 4
		13:00 bis 17:00	

0.4 Ansprechpersonen für organisatorische Belange

Bei Fragen oder Anregungen organisatorischer Natur wenden Sie sich bitte an

- Christian Krämer `<kraemer@acin.tuwien.ac.at>`
- Herwig Koppauer `<koppauer@acin.tuwien.ac.at>`.

0.5 Weitere Informationen

Aktuelle Informationen zur Lehrveranstaltung sind auf der Instituts-Homepage http://www.acin.tuwien.ac.at/?id=61 abrufbar. Dort sind auch weitere Materialien (vor allem Maple- und Matlab-Dateien) für Sie zum Download bereitgestellt.

1 Systemanalyse mit Maple

Ziel dieser Übung ist es, das Computeralgebraprogramm MAPLE für die Systemanalyse einzusetzen. Alle Aufgabenstellungen dieser Übungseinheit sind mit diesem Softwarepaket zu lösen.

Studieren Sie als Vorbereitung auf die Übung zumindest folgende Skripten:

- Skriptum zur VU Automatisierung (WS 2016/17) [1.1]
  - Kapitel 1, vollständig
  - Kapitel 2, vollständig
  - Kapitel 3, Abschnitt 3.1 bis inkl. 3.4
- Skriptum zur VU Fachvertiefung Automatisierungs- und Regelungstechnik (WS 2016/17) [1.2]
  - Kapitel 3.1, vollständig
- Skriptum zur VU Modellbildung (SS 2015) [1.3]
  - Kapitel 2.3, vollständig

Bei Fragen oder Anregungen zu dieser Übung wenden Sie sich bitte an

- Lukas Jadachowski <jadachowski@acin.tuwien.ac.at> oder
- Martin Müller <martin.mueller@acin.tuwien.ac.at>.

Im Rahmen der VU Fachvertiefung Automatisierungs- und Regelungstechnik wird MAPLE ausschließlich im *Worksheet Mode* und *nicht* im *Document Mode* verwendet, wobei für Eingabezellen das *Text*-Format (*Maple Notation*) und nicht *Math*-Format (*2D-Math Notation*) zu verwenden ist. Eine neue Arbeitsblatt-Datei im *Worksheet Mode* erhält man unter *File/New/Worksheet Mode*. Damit MAPLE automatisch im richtigen Modus startet, kann unter *Tools/Options.../Display* im Feld *Input display* der Wert *Maple Notation* sowie unter *Tools/Options.../Interface* im Feld *Default format for new worksheets* der Wert *Worksheet* ausgewählt werden.

Im Computerlabor des Institutes steht MAPLE in der Version 2016 zur Verfügung.

1.1 Grundlegende Befehle von Maple

Nachfolgend sind grundlegende Befehle von MAPLE beschrieben. Sollten Sie mit MAPLE bereits vertraut sein, können Sie gleich bei Abschnitt 1.2 fortsetzen. Neben der Programmhilfe von MAPLE sind weiterführende Dokumentationen z. B. in den Referenzen [1.4], [1.5], [1.6], [1.7], [1.8] zu finden.

MAPLE-Arbeitsblatt-Dateien besitzen die Endung `*.mw`. Als Beispiel können Sie das Arbeitsblatt `start_here.mw` von der Homepage der Lehrveranstaltung `http://www.acin.tuwien.ac.at/?id=61` herunterladen.

Aufgabe 1.1. Öffnen Sie die Datei `start_here.mw` mit MAPLE und arbeiten Sie beginnend bei der Eingabezelle `restart;` alle Befehle schrittweise durch. Zum Ausführen eines Befehls ist der Cursor in die jeweilige Eingabezelle zu stellen und die Eingabe-Taste zu drücken. Versuchen Sie alle Befehle zu verstehen und machen Sie gegebenenfalls von der Hilfefunktion und den oben genannten Referenzen Gebrauch.

1.2 Einfache Rechnungen mit Maple

Aufgabe 1.2.

1. Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit Hilfe des Befehls `solve()`. Analysieren Sie, ob und wieviele Lösungen existieren.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} -x_1 - 8x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 13x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_2 - x_3 &= -3 \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} -x_1 - 8x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 13x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned} \tag{1.3}$$

2. Stellen Sie die linearen Gleichungssysteme in Matrixform dar und bestimmen Sie die jeweiligen Lösungsvektoren $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ unter Zuhilfenahme des Packages `LinearAlgebra`.

Aufgabe 1.3. Tabelle 1.1 zeigt bekannte Resultate der z-Transformation.

1. Zeigen Sie die Gültigkeit der in Tabelle 1.1 angegebenen Korrespondenzen durch Auswertung der jeweiligen Laurent-Reihe. Sie können dazu den Befehl `sum()` verwenden.

2. Führen Sie die Rechnung erneut mit Hilfe des Befehls `ztrans()` durch.

Abtastfolgen (f_k)	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	z-Bildbereich $f_z(z)$
(1)	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{z}{z-1}$
(kT_a)	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{T_a z}{(z-1)^2}$
$\left(\mathrm{e}^{akT_a}\right)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{z}{z-\mathrm{e}^{aT_a}}$
$\left(kT_a\mathrm{e}^{akT_a}\right)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{T_a z \mathrm{e}^{aT_a}}{(z-\mathrm{e}^{aT_a})^2}$

Tabelle 1.1: Einige Korrespondenzen der z-Transformation.

1.3 Ein mechanisches System

Es wird der in Abbildung 1.1 skizzierte translatorische Zweimassenschwinger betrachtet. Die beiden Starrkörper m_1 und m_2 gleiten in x_0-Richtung reibungsfrei auf einer Unterlage. Ihre Position wird mit den Koordinaten (Freiheitsgraden) s_1 und s_2 bezeichnet. Die Geschwindigkeiten werden mit $w_1 = \dot{s}_1$ und $w_2 = \dot{s}_2$ benannt. Der Stelleingang u des Systems ist die Kraft F_1 und die Störung d entspricht der Kraft F_2. Als Ausgang y wird die Differenz $s_2 - s_1$ gewählt.

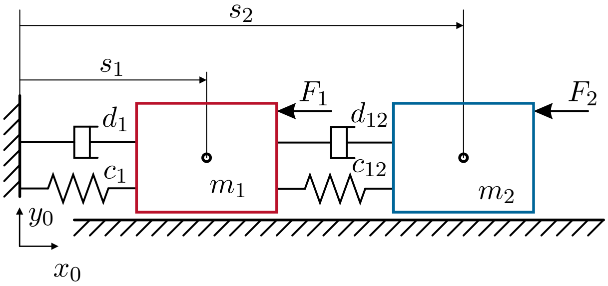


Abbildung 1.1: Translatorischer Zweimassenschwinger.

Die beiden Federn sind *nichtlinear*, besitzen im entspannten Zustand die Längen $s_{10} \neq 0$ und $s_{120} \neq 0$ und setzen einer Längenänderung die Federkräfte

$$f_{c_1}(s_1) = c_1 \sinh\left(\frac{s_1}{s_{10}} - 1\right) \tag{1.4a}$$

$$f_{c_{12}}(s_2 - s_1) = c_{12} \sinh\left(\frac{s_2 - s_1}{s_{120}} - 1\right) \tag{1.4b}$$

entgegen. Die beiden Dämpfer sind viskos, d. h. sie erzeugen eine geschwindigkeitsproportionale Kraft und haben die Dämpfungskoeffizienten d_1 und d_{12}.

Hinweis: Ein ähnliches, allerdings lineares System wird im Skriptum zur VU Fachvertiefung Automatisierungs- und Regelungstechnik (WS 2016/17) [1.2] Beispiel 3.2 analysiert.

1.3.1 Lagrange-Formalismus

Im Folgenden wird zur Herleitung der Bewegungsgleichungen der *Lagrange*-Formalismus verwendet. Als generalisierte Koordinaten werden die Freiheitsgrade $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ festgelegt.

Die kinetische Energie des Systems ergibt sich zu

$$T = \frac{1}{2} m_1 w_1^2 + \frac{1}{2} m_2 w_2^2 \ . \tag{1.5}$$

Für die in einer Feder mit der Länge s und der entspannten Länge s_0 gespeicherte Energie gilt

$$V_c(s) = \int_{s_0}^{s} f_c(\xi) \mathrm{d}\xi, \tag{1.6}$$

woraus die potentielle Energie

$$V = c_1 s_{10} \left(\cosh\left(\frac{s_1}{s_{10}} - 1 \right) - 1 \right) + c_{12} s_{120} \left(\cosh\left(\frac{s_2 - s_1}{s_{120}} - 1 \right) - 1 \right) \tag{1.7}$$

des Systems folgt. Die dissipative Wirkung der Dämpfer wird mit Hilfe der Rayleighschen Dissipationsfunktion

$$R = \frac{1}{2} d_1 w_1^2 + \frac{1}{2} d_{12} (w_2 - w_1)^2 \tag{1.8}$$

berücksichtigt. Ferner lautet der Vektor der verallgemeinerten (äußeren) Kräfte $\boldsymbol{\tau} = -\begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Mit Hilfe der Lagrange-Funktion $L = T - V$ erhält man aus dem Lagrange-Formalismus

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} L \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} L + \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} R = \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}} \tag{1.9}$$

die Bewegungsgleichungen des Systems. Diese können als System von Differentialgleichungen erster Ordnung in der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, d) \tag{1.10a}$$

$$y = g(\mathbf{x}, u, d) \tag{1.10b}$$

dargestellt werden. Im vorliegenden Fall gilt mit $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} s_1 & w_1 & s_2 & w_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $u = F_1$ und

$d = F_2$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} s_1 = w_1 \tag{1.11a}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} w_1 = \frac{1}{m_1}\biggl(&-c_1 \sinh\biggl(\frac{s_1}{s_{10}} - 1\biggr) - d_1 w_1 + c_{12} \sinh\biggl(\frac{s_2 - s_1}{s_{120}} - 1\biggr) \\ &+ d_{12}(w_2 - w_1) - F_1\biggr)\end{aligned} \tag{1.11b}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} s_2 = w_2 \tag{1.11c}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} w_2 = \frac{1}{m_2}\biggl(-c_{12} \sinh\biggl(\frac{s_2 - s_1}{s_{120}} - 1\biggr) - d_{12}(w_2 - w_1) - F_2\biggr) \tag{1.11d}$$

sowie

$$y = s_2 - s_1 \ . \tag{1.11e}$$

1.3.2 Bestimmung der Ruhelage

Nehmen der Stelleingang und die Störung den stationären Wert $u_R = F_{1R}$ und $d_R = F_{2R}$ an, so folgt für die Ruhelage des Systems aus $\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, u_R, d_R) = \mathbf{0}$ mit (1.11)

$$s_{1R} = s_{10}\biggl(1 - \operatorname{asinh}\biggl(\frac{F_{1R} + F_{2R}}{c_1}\biggr)\biggr) \tag{1.12a}$$

$$w_{1R} = 0 \tag{1.12b}$$

$$s_{2R} = s_{10}\biggl(1 - \operatorname{asinh}\biggl(\frac{F_{1R} + F_{2R}}{c_1}\biggr)\biggr) + s_{120}\biggl(1 - \operatorname{asinh}\biggl(\frac{F_{2R}}{c_{12}}\biggr)\biggr) \tag{1.12c}$$

$$w_{2R} = 0 \ . \tag{1.12d}$$

Es existiert also genau eine Ruhelage, in welcher für den Ausgang

$$y_R = s_{120}\biggl(1 - \operatorname{asinh}\biggl(\frac{F_{2R}}{c_{12}}\biggr)\biggr) \tag{1.12e}$$

gilt.

1.3.3 Linearisierung

Linearisiert man das System (1.11) gemäß Skriptum zur VU Automatisierung (WS 2016/17) [1.1] Satz 2.6 um die Ruhelage (1.12), so erhält man mit den neuen Koordinaten $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R$, dem Stelleingang $\Delta u = u - u_R$, der Störung $\Delta d = d - d_R$ und dem Ausgang $\Delta y = y - y_R$ das lineare System

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta\mathbf{x} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}_u \Delta u + \mathbf{b}_d \Delta d \\ \Delta y &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{x} + d_u \Delta u + d_d \Delta d\end{aligned} \tag{1.13a}$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{(F_{1R}+F_{2R})^2+c_1^2}}{m_1 s_{10}} - \frac{\sqrt{F_{2R}^2+c_{12}^2}}{m_1 s_{120}} & -\frac{d_1+d_{12}}{m_1} & \frac{\sqrt{F_{2R}^2+c_{12}^2}}{m_1 s_{120}} & \frac{d_{12}}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{F_{2R}^2+c_{12}^2}}{m_2 s_{120}} & \frac{d_{12}}{m_2} & -\frac{\sqrt{F_{2R}^2+c_{12}^2}}{m_2 s_{120}} & -\frac{d_{12}}{m_2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_u = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{m_2} \end{bmatrix}, \tag{1.13b}$$

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad d_u = 0 \qquad \text{und} \qquad d_d = 0 \; .$$

Aufgabe 1.4. Arbeiten Sie das zum Download auf der Homepage der Lehrveranstaltung `http://www.acin.tuwien.ac.at/?id=61`verfügbare MAPLE-Arbeitsblatt **`aufgabe_1_4.mw`** durch. Es zeigt, wie obige Rechnungen mit Unterstützung von MAPLE durchgeführt werden können.

1.4 Gleichstrommaschine mit Propeller

Abbildung 1.2 zeigt schematisch eine permanenterregte Gleichstrommaschine (Index GSM), die über eine linear elastische und dämpfende Welle (konstante Steifigkeit c_{GSMP}, viskose Dämpfung d_{GSMP}) einen Propeller (Index P) antreibt. Die Freiheitsgrade $\mathbf{q}$ des Systems sind die Drehwinkel $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \varphi_{GSM} & \varphi_P \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Die zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten werden mit $\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \omega_{GSM} & \omega_P \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ benannt. Im Folgenden wird stets von $\omega_{GSM} > 0$ und $\omega_P > 0$ ausgegangen, so dass Haftreibungseffekte beim Nulldurchgang der Geschwindigkeit unberücksichtigt bleiben können.

Auf den Propeller (Massenträgheitsmoment J_P) wirkt ein Lastmoment der Form

$$M_P = d_{cP} + d_{vP}\omega_P + d_{qP}\omega_P^2 + M_{ext}, \tag{1.14}$$

wobei d_{cP} die Coulombsche Reibkonstante, d_{vP} die viskose Dämpfungskonstante, d_{qP} der Koeffizient des zum Geschwindigkeitsquadrat proportionalen Dämpfungsanteils und M_{ext} ein zusätzliches externes Moment ist. Das Massenträgheitsmoment der Gleichstrommaschine wird mit J_{GSM} bezeichnet. Die Lagerung des Ankers verursacht ein Reibmoment der Form

$$M_{rGSM} = d_{cGSM} + d_{vGSM}\omega_{GSM} \tag{1.15}$$

mit der Coulombschen Reibkonstante d_{cGSM} und der viskosen Dämpfungskonstante d_{vGSM}.

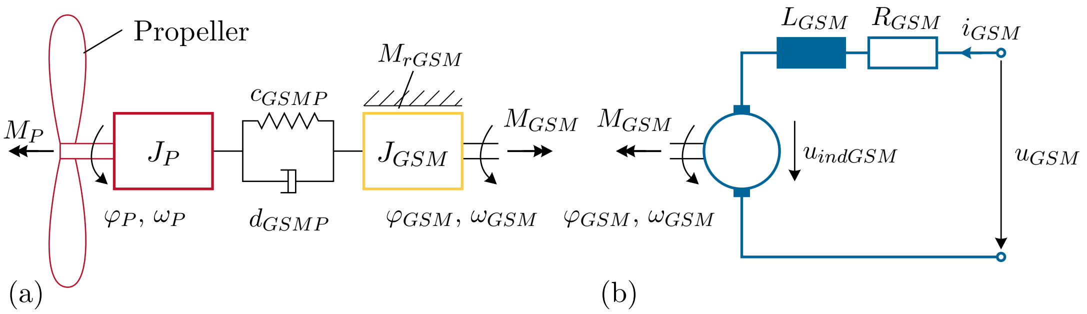


Abbildung 1.2: Gleichstrommaschine mit Propeller, (a) mechanisches Teilsystem, (b) elektrisches Teilsystem.

Das von der (idealen) Gleichstrommaschine erzeugte elektrische Moment ist $M_{GSM} = k_{GSM} i_{GSM}$, wobei k_{GSM} für die Ankerkreiskonstante steht. Für die induzierte Spannung gilt $u_{indGSM} = k_{GSM}\omega_{GSM}$. Die Ankerkreisinduktivität wird mit L_{GSM}, der Ankerkreiswiderstand mit R_{GSM} und die Eingangsspannung mit u_{GSM} bezeichnet.

Parameter	Wert	
L_{GSM}	1.4	mH
R_{GSM}	0.46	Ω
k_{GSM}	0.1	Nm/A
J_{GSM}	$12.4 \cdot 10^{-3}$	$\mathrm{kg\,m^2}$
d_{cGSM}	0.152	Nm
d_{vGSM}	$1.8 \cdot 10^{-3}$	Nm s/rad
J_P	$32.5 \cdot 10^{-3}$	$\mathrm{kg\,m^2}$
d_{cP}	0.169	Nm
d_{vP}	$2.7 \cdot 10^{-3}$	Nm s/rad
d_{qP}	$1 \cdot 10^{-4}$	$\mathrm{Nm\,s^2/rad^2}$
c_{GSMP}	0.6822	Nm/rad
d_{GSMP}	$1 \cdot 10^{-5}$	Nm s/rad

Tabelle 1.2: Parameter des Systems Gleichstrommaschine mit Propeller.

Aufgabe 1.5.

1. Berechnen Sie das mathematische Modell des mechanischen Teilsystems nach Abbildung 1.2(a) unter Zuhilfenahme des Lagrange-Formalismus. Stellen Sie

das Modell in der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}_m = \mathbf{f}_m(\mathbf{x}_m, u_m, d) \tag{1.16}$$

dar. Wählen Sie die Zustandsgrößen $\mathbf{x}_m = \begin{bmatrix}\varphi_{GSM} & \omega_{GSM} & \varphi_P & \omega_P\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, den Eingang $u_m = M_{GSM}$ und die Störung $d = M_{ext}$. Als Grundlage Ihrer Berechnungen können Sie die in Aufgabe 1.4 verwendete MAPLE-Datei heranziehen.

2. Beachten Sie, dass im resultierenden System (1.16) die Größen φ_{GSM} und φ_P stets in Form der Differenz $(\varphi_{GSM} - \varphi_P) = \varphi_{GSMP}$ auftreten. Mit Hilfe der nichtregulären Zustandstransformation

$$\mathbf{x}_M = \begin{bmatrix}\varphi_{GSMP} \\ \omega_{GSM} \\ \omega_P\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}_m \tag{1.17}$$

kann daher eine Differentialgleichung eingespart werden. Führen Sie diese Transformation durch, d. h. bestimmen Sie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}_M = \mathbf{f}_M(\mathbf{x}_M, u_M, d), \tag{1.18}$$

wobei $u_m = u_M$ gelten soll.

3. Bestimmen Sie das mathematische Modell des elektrischen Teilsystems nach Abbildung 1.2(b) in der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_E = f_E(x_E, \mathbf{u}_E)\ . \tag{1.19}$$

Verwenden Sie den Zustand $x_E = i_{GSM}$ und die Eingänge $\mathbf{u}_E = \begin{bmatrix}\omega_{GSM} & u_{GSM}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

4. Vereinigen Sie die beiden Teilmodelle (1.18) und (1.19) so, dass das resultierende System vierter Ordnung den Zustandsvektor $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}x_E & \mathbf{x}_M^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}i_{GSM} & \varphi_{GSMP} & \omega_{GSM} & \omega_P\end{bmatrix}$, den Eingang $u = u_{GSM}$ und die Störung $d = M_{ext}$ besitzt. Als Ausgang des Systems soll $y = \omega_P$ verwendet werden. Bestimmen Sie für stationäre Eingangswerte die Ruhelage dieses Systems und linearisieren Sie es bezüglich derselben.

5. Berechnen Sie (numerisch) die Eigenwerte der Dynamikmatrix des unter 4 linearisierten Systems, wobei die Parameterwerte aus Tabelle 1.2 und für die stationären Werte $u_{GSMR} = 5.6\,\mathrm{V}$ und $M_{extR} = 0\,\mathrm{Nm}$ zu verwenden sind.

Kontrollhinweis: Die Eigenwerte des linearisierten Systems sind $\lambda_1 = -326.8089\,\mathrm{s}^{-1}$, $\lambda_2 = -0.7266\,\mathrm{s}^{-1} + \mathrm{I}\,8.6739 s^{-1}$, $\lambda_3 = -0.7266\,\mathrm{s}^{-1} - \mathrm{I}\,8.6739 s^{-1}$ und $\lambda_4 = -0.7268\,\mathrm{s}^{-1}$.

6. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\Delta y(s)}{\Delta u(s)} \tag{1.20}$$

des unter 4 linearisierten Systems, wobei wieder die Parameterwerte aus Tabelle 1.2 und für die stationären Werte $u_{GSMR} = 5.6\,\mathrm{V}$ und $M_{extR} = 0\,\mathrm{Nm}$ zu verwenden sind.

Hinweis:

- Die Berechnung der Ruhelage wird besonders einfach, wenn Sie die Gleichungen schrittweise auflösen. Dabei können die unbekannten Zustandsgrößen in folgender Reihenfolge eliminiert werden: ω_{GSM}, φ_{GSMP}, i_{GSM} und ω_P.
- Weisen Sie Parameterwerte nicht direkt den gleichnamigen Variablen zu, sondern speichern Sie diese in Form von Wertelisten (z. B. `liste:=[LGSM=1.4e-3, RGSM=0.46,...]`), die nur im Bedarfsfall mit dem Befehl `eval(...,liste)` angewandt werden. Dies entspricht dem Prinzip, Rechnungen weitgehend algebraisch durchzuführen und erst abschließend numerische Ergebnisse für spezielle Parameterwerte zu bestimmen.

1.5 Gewöhnliche Differentialgleichung

Gegeben ist die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha\dot{y}(t) + y(t) = \beta \tag{1.21}$$

mit der beliebigen aber konstanten Inhomogenität β. Für die Konstante α gilt $0 < \alpha < 1$.

Aufgabe 1.6.

1. Lösen Sie die Differentialgleichung (1.21) mit Hilfe des Befehls `dsolve()`. Treffen Sie anhand der Nullstellen des charakteristischen Polynoms eine Aussage über die Stabilität des Systems.

2. Schreiben Sie die Differentialgleichung (1.21) durch Einführung geeigneter Koordinaten in Zustandsraumdarstellung mit dem Eingang β und dem Ausgang y an. Treffen Sie anhand der Eigenwerte der Dynamikmatrix eine Aussage über die Stabilität des Systems. Berechnen Sie die allgemeine Lösung des Systems, z. B. mit Hilfe der Lösungsformel für lineare, zeitinvariante Systeme (siehe Skriptum zur VU Automatisierung (WS 2016/17) [1.1] Satz 2.4).

3. Berechnen Sie numerisch die Lösung für die Parameterwerte $\alpha = 1/6$, $\beta = -1$

und die Anfangsbedingungen $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$. Stellen Sie die Lösungstrajektorie $t \mapsto [\,y(t), \dot{y}(t), t\,]$ für Zeiten $t \in [\,0, 30\,]$ als Plots der Zustände dar. *Kontrollhinweis:* An der Stelle $t = 10$ sollte die Lösung den Wert $y(10) = -1.4502$ annehmen.

Hinweis: Verwenden Sie für Zahlenwerte wieder eine Werteliste (z. B. `liste:= [alpha=1/6,beta=-1,...]`), die nur im Bedarfsfall mit dem Befehl `eval(...,liste)` angewandt wird.

1.6 Literatur

[1.1] A. Kugi, *Skriptum zur VU Automatisierung (WS 2016/17)*, <http://www.acin.tuwien.ac.at/?id=42>, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien, 2016.

[1.2] ——, *Skriptum zur VU Fachvertiefung Automatisierungs- und Regelungstechnik (WS 2016/17)*, <http://www.acin.tuwien.ac.at/?id=46>, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien, 2016.

[1.3] ——, *Skriptum zur VU Modellbildung (SS 2016)*, <http://www.acin.tuwien.ac.at/?id=333>, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien, 2016.

[1.4] C. Eberhart, *Problem Solving with Maple - A handbook for calculus students*, <http://www.msc.uky.edu/carl/Maple_Handbook/Maple_Handbook.pdf>, 2003.

[1.5] A. Heck, *Introduction to Maple*, 3. Aufl. New York: Springer-Verlag, 2000.

[1.6] M. Kofler, G. Bitsch und M. Komma, *Maple - Einführung, Anwendung, Referenz*, 5. Aufl. München: Addison-Wesley, 2000.

[1.7] Maplesoft. (2011). Maple user manual, Adresse: http://www.maplesoft.com/documentation_center/.

[1.8] L. Bernardin, P. Chin, P. DeMarco, K. Geddes, D. Hare, K. Heal und G. Labahn. (2011). Maple programming guide, Maplesoft, Adresse: http://www.maplesoft.com/documentation_center/.