

断层图像重建的迭代算法^{*}

桂大为 金永杰

(清华大学工程物理系, 北京 100084)

随着计算机运算速度的飞速发展, 以前只是被看成一种研究方法的迭代算法在图像重建中越来越引起人们的重视, 并且已经在科研、工业和医学领域中得到了实际应用。文章从投影模型出发, 归纳了各种迭代算法的优化准则, 并比较了它们的优缺点和应用前景。最后采用胸部数学模型, 得到投影数据, 然后利用迭代算法重建出断层图像, 再与模型相比较, 从而确定各算法的优劣, 总结出如何选择合适的图像重建算法。文章的最后还提出了将多目标优化方法应用于衰减校正的构想。

关键词: 图像重建

1. 引言

CT 技术诞生以来人们已经发展了众多的断层图像重建算法, 但是各种算法都存在着各自的优缺点。如快速的滤波(卷积)反投影算法、各种代数迭代算法、ML-EM、极大熵迭代算法、级数迭代算法等等。由于核事件发生是随机的, 所以核素三维成像大多采用基于概率统计模型的迭代算法。

2. 投影与重建模型概述

定量描述放射性药物发射的 γ 光子数目和其浓度之间的关系有两种不同的考虑方式。如果将这种关系看成确定的, 将引出滤波反投影、Chang 的方法、加权反投影等算法; 而如果把这种关系看成符合 Poisson 随机函数, 将得到各种按照随机参数估计方法得到的各种迭代算法, 如 ML-EM、OS-EM、RAMLA、Gibbs 平滑重建、Bayesian 重建等。

2.1. 按确定性关系来理解:

假设在人体某断层中单位面积内发射的 γ 光子数为 $f(x, y)$, 它反映了放射性药物的浓度分布, 如图 1 所示, 人体组织对该 γ 光子的衰减系数分布为 $\mu(x, y)$ 。那么探头在某个位置 θ 探测到的 γ 光子数 $P_\theta(x_r)$ 就是沿着投影路径 ray 发射的光子数的总和, 考虑人体衰减的影响有:

$$P_\theta(x_r) = \int f(x_r, y_r) e^{-\int_{-\infty}^{y_r} \mu(x_r, y_r') dy_r'} dy_r \quad (1)$$

如果将图像离散化, 即将区域分成 n 个互不重叠的子区域, 称之为像素, 如图 2 所示。与每一个像素 j 相对应的图像的值为 x_j , x 表示 n 维图像矢量, 其第 j 个元素为 x_j 。假设围绕目标一周共获得了 m 个投影, y_i 表示沿着第 i 条投影线 ($i=1, \dots, m$) 图像的线积分。那么, 整个投影过程可以表示为:

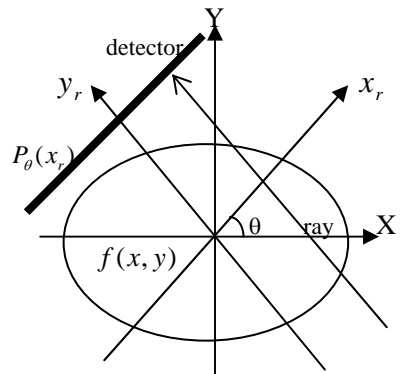


图1 连续断层图像投影示意图

^{*} 本课题得到国家自然科学基金资助(批准号39670227)

$$y_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} \times x_j$$

其中, r_{ij} 表示第 j 个像素对第 j 条投影线的贡献, 可以通过投影线穿过像素的长度或者该像素中心到投影线距离来表示。写成向量的形式即为: $Y = RX$ 。由于在重建的过程中图像矢量 X 是未知量, 如果我们就用重建结果 \tilde{X} 表示, 那么只要添加误差矢量 E , 就可以将原方程写成: $Y = R\tilde{X} + E$ 。另外, 我们如果考虑其它因素对投影贡献的大小, 如像素沿着投影线积分时有线性衰减等等, 那么在迭代时都应该体现在 r_{ij} 的值中。

2.2. 按随机Poisson分布来理解:

如同前面所提到的, 将图像区域分成 n 个互不重叠的子区域, 称之为像素, 如图 2 所示。与每一个像素 j 相对应的估计参数为 x_j , 它与放射性核素在该处的浓度成正比; x 表示 n 维图像矢量, 其第 j 个元素表示 x_j 。假设围绕目标一周共获得了 m 个投影, b_i 表示沿着第 i 条投影线 ($i=1, \dots, m$) 所探测到的光子数目。如果 a_{ij} ($a_{ij} \geq 0$) 表示从像素 j 发射的光子被第 i 条投影线所经过的探测单元测量到的几率, 那么 b_i 就是期望值为 $E(b_i)$ 的 Poisson 分布的一个样本, 其中

$$E(b_i) = \langle a^i, x \rangle = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (2)$$

此处 \langle, \rangle 是标准内积; a^i 是 $m \times n$ 投影矩阵 $A = (a_{ij})$ 的转置矩阵 A^T 的第 i 个列向量。

γ 光子被探测到的几率与物体对它的衰减和散射、准直器的深度响应函数等有关。如果忽略散射的作用, 准直器的深度响应函数用 d_{ij} ($0 \leq d_{ij} \leq 1$) 来表示, 物体对该 γ 光子的衰减系数为 μ_{ij} , l_j 表示像素 x_j 沿投影线到探测器的长度, 那么

$$a_{ij} = e^{-\sum_{j=1}^n \mu_{ij} l_j} d_{ij} \quad (3)$$

值得指出的是, 由于我们将衰减因子、探测器响应函数等因素归结到投影矩阵 a^i 中, 所以下面与之相关的各种算法中并未见到一些特定的因子。但是我们在实现图像重建的过程中, 要将上述因素算到投影矩阵中去。

3. 断层重建优化准则

对于按连续、确定性关系来理解的图像重建, 一般采用经典的滤波反投影算法来完成。基于公式 1, 如果不考虑目标物体对光子的衰减作用, 我们可以得到标准的滤波反投影算法:

$$f_0(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty P(\rho, \theta) |\rho| e^{i2\pi \rho x_r} d\rho \quad (4)$$

其中 x_r 是点 (r, ϕ) 的旋转坐标, $P(\rho, \theta)$ 是 $P_\theta(x_r)$ 的傅立叶变换:

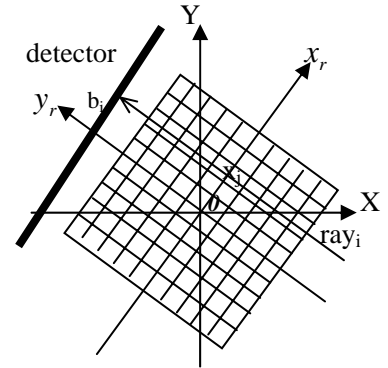


图2 离散断层图像投影示意图

$$P(\rho, \theta) = \int P_\theta(x_r) e^{-i2\pi\rho x_r} dx_r \quad (5)$$

注：像素在极坐标中表示为 (r, ϕ) ，而在旋转坐标中同一点表示为 (x_r, y_r) ，这是为方便起见这样表示。

若想在此基础上获得更为精确的重建结果，比较自然的想法是：先由重建得到近似的图像结果 \tilde{x} ，然后按照投影过程求出此图像的投影 \tilde{y} ；将此投影与真实的投影做比较，求出误差投影 Δy ，然后将此误差投影用滤波反投影求出误差图像 Δx ，最后将 Δx 迭加到前面由滤波反投影求得的图像 \tilde{x} ，得到新的图像结果 $\tilde{x} + \Delta x$ 。如果想进一步做下去，只需按照刚才的步骤继续下去即可。

这样的解决办法表面上是可行的，但在实际中并不可行，原因主要有二：

1. 滤波反投影对噪声比较敏感，所以经过几次上述迭代过程以后，会发现得到的结果不仅没有变好，反而会越来越坏，最终导致发散。
2. 滤波反投影不能解决其它因素对重建的影响，比如准直器的响应函数、组织的衰减校正等等。在上述情况下，滤波反投影可能得到与实际情况相差较远的结果。

所以为了适应更为复杂的情况和得到更为精确的结果，各种迭代算法相继诞生了。对于各种迭代算法，其不同之处主要也是两点：1. 算法的优化准则；2. 从准则出发所使用的数学手段。下面介绍从确定性和随机性出发所提出的各种优化准则。

3.1. 离散、确定性模型

如果考虑图像矢量和误差矢量都是随机变量的样本，它们分别具有概率密度函数 P_x 和 P_e ，那么图像矢量的 Bayesian 估计就是使 $P_e(Y - R_{\tilde{x}})P_x(\tilde{X})$ 最大。

但是这其中有个问题，即我们必须预先知道 P_x 和 P_e 的分布形式。基于后面数学上和计算上的简便，一般就采用高斯分布。以 μ_x 表示预期的图像矢量重建结果，并且假设预期的误差矢量是零矢量，那么使 $P_e(Y - R_{\tilde{x}})P_x(\tilde{X})$ 最大，也就是使

$$(Y - R\tilde{X})^T V_e^{-1} (Y - R\tilde{X}) + (\tilde{X} - \mu_x)^T V_x^{-1} (\tilde{X} - \mu_x)$$

最大，其中 V_e 和 V_x 表示两种分布的协方差矩阵。如果 V_e 和 V_x 都是单位矩阵的某个倍数，那么在这种情况下问题就变成了求如下表达式的最小值：

$$r^2 \|Y - R\tilde{X}\|^2 + \|\tilde{X} - \mu_x\|^2, \quad (6)$$

其中剩余泛数 $\|Y - R\tilde{X}\| = \left[\sum_{i=1}^m \left[y_i - \sum_{j=1}^n r_{ij} \tilde{x}_j \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ ， r 为信噪比，由 V_e 和 V_x 的对角元

决定，而 $\|\tilde{X} - \mu_x\| = \left[\sum_{j=1}^n [\tilde{x}_j - (\mu_x)_j]^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ 。如果信噪比很大，那么第一项就起主要作用，

问题实际上变成了常规的最小均方根估计了。

以上介绍了无限制的 Bayesian 优化准则以及各种简化形式。在实际应用中，往往加入对图像区域进行限制的各种条件，下面是图像重建中最常见的三种约束。

C_1 、图像矢量必须满足

$$-\varepsilon_i \leq y_i - \sum_{j=1}^n r_{ij} \tilde{x}_j \leq \varepsilon_i \quad 1 \leq i \leq n \quad (7)$$

其中 ε_i 表示对第 i 次测量中误差的容忍程度。理论上存在一种情况是对所有测量都有误差为零，即 $\varepsilon_i=0$ 。将这种情况记为 C_1 。

C_2 、图像矢量必须满足

$$\sum_{j=1}^n \tilde{x}_j = S \quad (8)$$

假设 S 的值对我们来说是已知的。这个限制就是说整副图像的平均值是某个定值，这个值我们可以通过测量到的投影值求出来。

C_3 、图像矢量的元素必须非负，即

$$\tilde{x}_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq n \quad (9)$$

这个约束是参照实际问题中的物理意义而制定的。

上面讨论了非约束优化准则，在图像重建中，还提出了许多其它的优化准则，特别是将优化限制在某一个合理的区域之内，例如由 Gordon, Bender, and Herman[6] 提出的如下两种情况：

1. 最小泛数法。如果图像满足如上所说的限制 C_1 ，可以考虑使如下的方差最小：

$$\sum_{j=1}^n (\tilde{x}_j - \bar{x})^2 \quad (10)$$

其中 $\bar{x} = \frac{S}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tilde{x}_j$ 。如果用 $C_{1,2}$ 对图像进行限制，那么上面的方差最小就是

使如下的泛数最小：

$$\|\tilde{X}\| = \left[\sum_{j=1}^n \tilde{x}_j^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

2. 极大熵法。如果用 $C_{1,2,3}$ 对图像进行限制，那么使熵

$$-\sum_{j=1}^n \tilde{x}_j \ln \tilde{x}_j \quad (12)$$

极大（ $0 \ln 0$ 定义成 0）也就是使

$$-\sum_{j=1}^n \left(\frac{\tilde{x}_j}{\bar{x}} \ln \left(\frac{\tilde{x}_j}{\bar{x}} \right) \right) \quad (13)$$

最大。

3.2. 离散、随机性模型

Sheep 和 Vardi[7]以及 Snyder[8]等将极大似然一期望最大化（ML-EM）算法引入图像重建，再由 Miller[9]等应用到 SPECT 的重建算法中。ML-EM 算法稳定，收敛性好，因而受到广泛的关注。其不足之处是收敛速度很慢。

基于公式 2，如果图像矢量为 x ，那么得到测量矢量 b 的概率为

$$P_L(b|x) = \prod_{i=1}^m \left[\frac{\langle a^i, x \rangle^{b_i}}{b_i!} e^{-\langle a^i, x \rangle} \right] \quad (14)$$

ML 方法是在限制 x 为非负的条件下使得这个概率最大，也就是使似然函数

$$L(x) = \sum_{i=1}^m (b_i \log \langle a_i, x \rangle - \langle a_i, x \rangle) \quad (15)$$

最大。

4. 算法描述与分析

按照上述两种模型，我们归纳和描述各种重建算法如下。

4.1. ART2算法 (Algebraic Reconstruction Techniques 2)

在图像条件约束 $C_{1,2,3}$ 下，ART2 算法使表达式 (11) 最小，即使泛数最小。算法描述如下：

- 1) $\tilde{x}_j^{(0)} = \hat{x}_j^{(0)} = \bar{x} = \frac{S}{n}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad k = 1。$
- 2) $\hat{X}_0^{(k)} = \tilde{X}^{(k)}。$
- 3) $\hat{X}_{iy}^{(k)} = \hat{X}_{iy-1}^{(k)} + \frac{(y_{iy} - R_{iy} \hat{X}^{(k)})}{\|R_{iy}\|^2} R_{iy},$ 迭代 m 次，即 $iy = 1 \wedge m。$
- 4) $\tilde{x}_j^{(k+1)} = \begin{cases} \hat{x}_j^{(k+1)}, & \text{如果 } \hat{x}_j^{(k+1)} \geq 0 \\ 0, & \text{其它情况} \end{cases}, \quad j = 1 \wedge n。$
- 5) 如果满足结束条件，则结束，否则 $k++$ ，转 2)。

4.2. MART算法

在图像条件约束 $C_{1,2,3}$ 下，有下面的算法产生的序列收敛到使式 (12) 最小，即使熵最小。算法描述如下：

- 1) $\tilde{x}_j^{(0)} = \bar{x} = \frac{S}{n}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad k = 0。$
- 2) $x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} \left[\frac{y_{iy}}{\langle R_{iy} \tilde{X}^{(k)} \rangle} \right]^{R_{iy,j}}, \quad j = 1 \wedge n。$ 迭代 m 次，即 $iy = 1 \wedge m。$
- 3) 如果满足结束条件，则结束，否则 $k++$ ，转 2)。

4.3. ML-EM算法 (Maximum Likelihood—Expectation Maximization Algorithm)

$$\frac{\partial L}{\partial x_l} = 0$$

在表达式 (15) 中令 $\frac{\partial L}{\partial x_l}$ ，由 EM 算法可得图像矢量的估计值：

$$x_j^{(k+1)} = \frac{x_j^{(k)}}{\sum_{i=1}^m a_{ij}} \sum_{i=1}^m \frac{a_{ij} b_i}{\langle a^i, x^{(k)} \rangle}, \quad (16)$$

4.4. OS-EM加速算法 (Ordered Subsets—Expectation Maximization Algorithm)

由于 ML-EM 算法比较耗时，特别是在计算机速度受到限制时。因此人们竞相发展各种加速算法提高收敛速度，如运用线性搜索算法、共轭梯度法和截断牛顿法[10]等等。但是这些算法对于收敛速度的提高都是非常有限的。

1994 年 Hudson[11]等人提出了 OS-EM 算法，使得收敛速度的提高有了很大的飞跃。其主要思想是将投影集分成若干个有序的子集，然后按照一定的顺序对各个子集单独进行迭代，所有子集迭代完一次就完成了一次整体的迭代。

让 \hat{x}^0 表示迭代初始图像，可以是均匀非负值、滤波反投影得到的图像或者加权反投影得到的图像， \hat{x}^m 表示 m 次迭代以后的结果。让 S_1, S_2, \dots, S_p 表示按照一定顺序选择的投影子集。那么 OS-EM 算法可以描述为：

- 1) $m=0$, \hat{x}^m 为正的初始值
- 2) 重复如下迭代过程直到 \hat{x}^m 满足收敛性条件，
 - a) $x^1 = \hat{x}^m$, $m=m+1$
 - b) 对于子集 $i=1, \dots, p$
 - ☛ 投影。对于属于 S_i 的投影，计算投影的期望值：

$$b_t^i = \sum_{j=1}^n a_{tj} x_j^i \quad (17)$$

- ☛ 反投影。对于像素 $j=1, \dots, n$ ，计算

$$x_j^{i+1} = \frac{x_j^i}{\sum_{t \in S_i} a_{tj}} \sum_{t \in S_i} \frac{b_t a_{tj}}{b_t^i} \quad (18)$$

- c) $\hat{x}^m = x^{n+1}$ 。

4.5. RAMLA重建 (Row-Action Maximum Likelihood Algorithm)

RAMLA[12]可以说是多种重建算法综合的产物。其思想主要来自于 Herman 的代数重建算法[13]和 Hudson 等人的 OS-EM 算法，以及 Twomey 解决离散 Fredholm 积分方程时使用的迭代算法[14]。它也是将投影集分成一系列不相交的投影子集，并引入一个松弛因子。具体来说算法描述如下：

- 1) $m=0$, x^0 为正的初始值
- 2) 重复如下迭代过程直到 x^k 满足收敛性条件，
 - d) $x^{(k,p)} = x^{(k)}$, $m=m+1$
 - e) 对于子集 $i=1, \dots, p$
 - ☛ 误差计算。对于属于 S_i 的投影，计算校正误差：

$$\Delta p^{(k,i)} = \lambda_k x_j^{(k,i-1)} \sum_{l \in S_i} a_{lj} \left(\frac{b_l}{\langle a^l, x^{(k,i-1)} \rangle} - 1 \right) \quad (19)$$

其中

$$0 < \lambda_k c_{ij} \leq 1, \quad (\text{如果 } c_{ij} \neq 0) \quad (20)$$

$$c_{ij} = \sum_{l \in S_i} a_{lj} \quad (21)$$

迭代。对于像素 $j=1, \dots, n$, 计算

$$x_j^{(k,i)} = x_j^{(k,i-1)} + \Delta p^{(k,i)} \quad (22)$$

f) $x^k = x^{(k,p)}$ 。

4.6. Gibbs平滑和Bayesian重建

Gibbs 平滑[15]是由引入一个 Bayesian 能量因子 $e^{-U(\theta)}$ 来实现的, 能量函数 $U(\theta)$ 是表征相邻像素之间的差别的惩罚函数。这个因子和原始的似然函数相乘, 然后求这个修正的似然函数的极大值, 从而估计出待求的图像。乘以 Bayesian 能量因子以后, 如式(14)所示, 此时 $L(x)$ 变成

$$L'(x) = L(x) - U(x) \quad (23)$$

从这个表达式来看, 要 $L'(x)$ 极大, 即要使 $U(x)$ 尽可能的小。而 $U(\theta)$ 函数的通常形式为:

$$U(\theta) = \gamma \sum_{\{j,k\} \in N} w_{jk} v(\theta_j - \theta_k) \quad (24)$$

其中 γ 和 w_{jk} 是正常量, $v(r)$ 是势函数 (r 是实数), 无序像素对 $\{j,k\}$ 的集合 N 定义了一个由临近像素构成的系统。对于正方形的像素方阵, 并列的两个像素其 w_{jk} 一般取 1, 而对角线之间的像素其 w_{jk} 一般取 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 。Manbeck 的工作表明其实这些数的实际值是多少并不重要。一般只考虑邻近的四个像素之间的关系, 更远距离的像素就不予讨论了。势函数 $v(r)$ 有七个特性, 但是满足这七个特性的函数仍然可以有好多形式, 如 $r^2, r^2(1+r^2)^{-1}, \ln(1+r^2), \ln(\cosh(r))$ 等等, 具体内容请见文献[15]。

引入 Gibbs 平滑以后, ML-EM 重建公式就变成

$$x_j^{(k+1)} = \frac{x_j^{(k)}}{\sum_{i=1}^m \left(a_{ij} + \frac{\partial U}{\partial \lambda_j}(x^{(k)}) \right)} \sum_{i=1}^m \frac{a_{ij} b_i}{\langle a^i, x^{(k)} \rangle}, \quad (25)$$

Bayesian 重建[16][17][18][19]和 ML 重建可以说是一对关系密切的姊妹, 因为 ML 是求图像的估计值, 使得从此图像得到已知投影 $f(b|x)$ 的概率最大; 而 Bayesian 是从已知的投影出发, 要求在给定投影下所求图像的概率 $f(x|b)$ 最大。这两个概率之间满足如下的 Bayesian 关系:

$$f(x|b) = \frac{f(b|x)f(x)}{f(b)} \quad (26)$$

由于 $f(b)$ 是常数, 它们之间就差一个系数 $f(x)$ 。而 Gibbs 分布函数 $\frac{1}{k} e^{-U(\theta)/\beta}$ 又

是一种描述 x 具有现在的分布的一种概率函数，所以 Bayesian 重建给出了 Gibbs 平滑理论上的来源，二者实际上是一回事。

5. 算法比较和分析

1. **ART 方法**: 从几何的角度, ART 方法可视为把 m 个线性方程组看作是 n 维空间中的 m 个超平面, 然后从 n 维空间的某个初始点 $M_0^{(0)}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \Lambda x_m^{(0)})$ 出发, 相继在这 m 个超平面上作投影: 从 $M_0^{(0)}$ 向第一个超平面作投影点, 然后以此投影点 $M_1^{(0)}$ 向第二个超平面作投影点 $M_2^{(0)}$ 等等, 相继作下去, 得到第 m 个投影点以后, 这才算完成了一次迭代。
2. **ML-EM**: 由于迭代算法使得每一次迭代以后似然函数都在增加, 所以 ML-EM 的收敛性比较好, 但是收敛速度很慢, 一般需要几十次迭代才能得到结果。另外我们经过数学模型的模拟发现如果对迭代以后的图像经过某种滤波将会加速迭代过程, 图像质量也会明显提高。这种滤波可以是 Metz 滤波, 中值滤波或者采用 Gibbs 平滑等。
3. **OS-EM**: 投影子集的选取会影响算法的收敛性和收敛速度, 但是经过实践证明发现投影子集不能选得太多, 否则可能导致不收敛, 或者收敛到局部收敛点。这一点在文献[12]中有比较详细的说明。而且 Brown 等人证明 OS-EM 算法并不收敛到 ML-EM 的收敛点, 所以虽然在一定的条件下其收敛性和收敛速度都比较令人满意, 但是也应该注意子集的选取, 并且在迭代过程中应该加入别的平滑和滤波措施, 如 Gibbs 平滑、中值滤波或 Metz 滤波等等。
4. **RAMLA**: 该算法可以从理论上证明其收敛到 ML 的收敛点, 并且其收敛速度和合适的 OS-EM 情况下差不多。可以说这是一个折中的产物。实践说明在其中也应该加入如前面提到的处理措施, 如平滑和滤波等等。
5. **Gibbs 平滑与 Bayesian 重建**: Gibbs 能量项是一个人为加入的对图像特征的约束量, 它可以限制迭代过程中图像的像素值致偏离收敛点太远, 从而加速迭代速度, 提高收敛性能。应该说这实际上只是一种辅助的加速收敛速度, 提高收敛性能的措施, 但是由于它对于图像整体质量的控制, 效果显得比较好, 并具有一定的通用性。

6. 模拟实验

我们在计算机上利用胸部数学模型对反投影、ML-EM 和 OS-EM 算法进行了比较和研究。其中原始图像采用胸部模型, 其由计算机产生的正弦图和模型图像如图 3 所示, 其中正弦图按照要求分别为有噪声和无噪声两个。

采用滤波反投影法、Chang 的方法、ML-EM, OS-EM 算法, 从 360° 投影数据重建的图像如图 4、图 5、图 6 中的 c、e、g 所示。

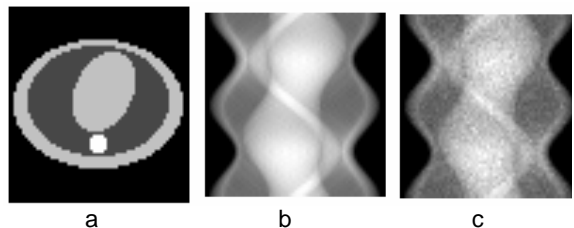


图3 a: 胸部数学模型模型, b: 无噪声投影正弦图, c: 有噪声投影正弦图

为了更为综合地评价图像的质量,我们还给出了相应图像的剖面曲线和与标准发射图像的均方差。每帧图像的右方的剖面曲线,是从上方到下方直线上的像素计数数值分布曲线。至于均方差的计算,若原始图像矩阵为

$X = \{x_{i,j}, 0 \leq i, j \leq N\}$, 重建图像矩阵为 $X' = \{x'_{i,j}, 0 \leq i, j \leq N\}$, 则

$$\sigma = \frac{\sqrt{\sum_{i,j} (x_{i,j} - x'_{i,j})^2}}{\sqrt{\sum_{i,j} x_{i,j}^2}}$$

从重建出的图像、剖面曲线和均方差(表1)可以看出,单纯的滤波反投影,其重建的发射图像c的质量还是存在的问题,主要原因是反投影过程中不可避免地存在着条状伪象,这一点我们很容易从图像上看得出来。我们只有从根本上采取迭代的算法,从ART、ML-EM、OS-EM、RAMLA到Bayesian重建等,才能最终得到良好的重建图像(e、g)。从重建出来的图像上我们可以看到条状伪象基本上已经消除,只是在图像上有一些块状的伪象,这个特征对于OS-EM比较明显,尤其是存在Poisson噪声的情况下。

从OS-EM与ML-EM的

重建结果比较可以看出,OS-EM确实比ML-EM具有快得多的收敛速度。对照无噪声时的情况,从图像剖面线和均方误差来看,OS-EM迭代3次的结果几乎和ML-EM迭代30次时的结果差不多。所以在临床应用上看,OS-EM比单纯的ML-EM具有更大的吸引力。

我们还发现,即使对于后面这几种算法,如果不采取其它的措施,它们很可能会收

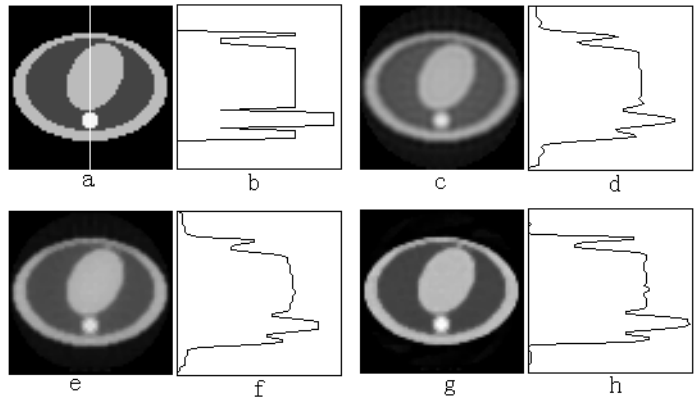


图4 投影无噪声, a: 胸腔数学模型, c: 滤波反投影算法, e: ML-EM 迭代3次, g: OS-EM 迭代3次, b,d,f,h 分别为其垂直剖面曲线

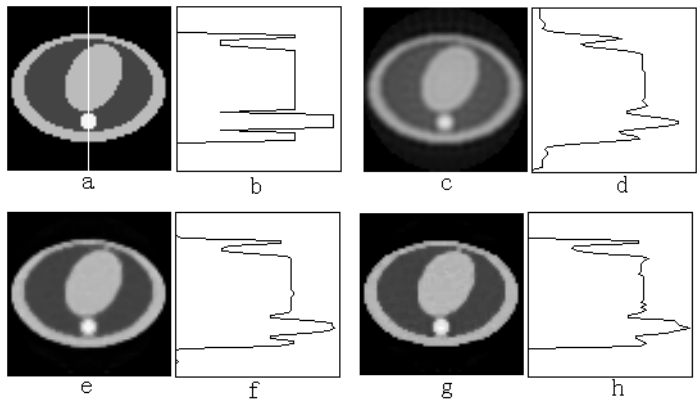


图5 投影无噪声, a: 胸腔数学模型, c: 滤波反投影算法, e: ML-EM

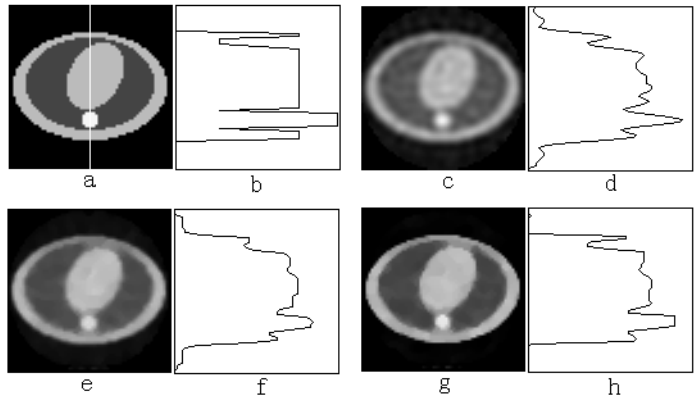


图6 投影有噪声, a: 胸腔数学模型, c: 滤波反投影算法, e: ML-EM 迭代5次, g: OS-EM 迭代5次, b,d,f,h 分别为其垂直剖面曲线

敛到局部收敛点，也就是说，最终重建出来的图像会有某些点或区域有特别强的噪声，从而和原始图像差别较大。图 4、图 5、图 6 中的几种迭代算法中，都采用了中值滤波。并且当有噪声时，这种滤波显得更为重要。如果没有中值滤波或者仅采用九点平滑等线性平滑滤波器，最终结果是收敛到局部收敛点。

7. 结论与进一步的考虑

从上面对各种算法的比较可以看出，从基于 ML-EM 得到的算法具有真正的吸引力，其在今后临床使用的 SPECT 系统中一定会占有主要的地位。因为虽然这些迭代算法相对滤波反投影来说需要较长的时间，但是随着 CPU 速度的不断提高，运算速度并不成为限

表 1 图像重建算法结果的均方差比较

算法 迭代次数	滤波反投影	ML-EM	OS-EM
3 (无噪声)	0.282616072 2909	0.23842813318 34	0.150408775491 6
30 (无噪声)		0.14751690970 28	0.103774442899 0
5 (有噪声)	0.300875003	0.25243269594	0.188629184276

制其使用的真正障碍。我们在 Pentium-II 233 MHz 的计算机上使用 Visual C++ 5.0 实现 ML-EM 算法时，图像矩阵为 64×64 ，投影矩阵为 60×64 ，尽管没有对代码进行优化，每次迭代时间也在 1 秒左右。可以想见，如果进行优化，时间可以缩短到原来的几分之一。如果对图像质量和计算速度都有比较严格的要求，那么 OS-EM 和 RAMLA 可能会更适合一些。另一方面，在实现这些算法时，应当尽可能加进别的控制图像质量的手段，比如中值滤波、Gibbs 平滑等。而且实践证明，如果单用矩形窗平滑，将会得到令人失望的结果。

从上面的情况可以看出，加入 Gibbs 平滑以后，虽然每一次迭代的计算量增加了，但是这些计算会使图像更快地朝着目标图像的方向进行。所以我们正在考虑运用多目标优化的方法[20]，将熵、Gibbs 能量项等别的准则与似然函数结合起来，从而得到更高的图像质量，更快的收敛结果。

基本的思路如下：

假设 ML 方法中似然函数为 $L(x)$ ，则考虑新的可能的目标函数：

$$L_o(x) = L(x)U(\theta)(\sum x \ln x)(X^T X),$$

然后利用 EM 和多目标优化方法求得使 $L_o(x)$ 最大的图像值，迭代若干次以后得到满意的重建图像。

参考文献

- [1] Chang L. T. A method for attenuation correction in radionuclide computed tomography. IEEE Trans. Nucl. Sci., 1987, Vol. NS-25: 638-643.
- [2] Manglos S H, Jaszczak R J, Floyd E D et al. Non-isotropic attenuation in SPECT: phantom tests of quantitative effects and compensation techniques. J. Nucl. Med., 1987, Vol. 28: 1584-1591.
- [3] Manglos S H, Jaszczak R J, Floyd E D. Weighted back-projection implemented with a non-uniform atenuation map for improved SPECT quantitation. IEEE Trans. Nucl. Sci., 1988, Vol. NS-35: 625-628.
- [4] Tanak E a, Toyamat H and Murayama H. Convolutional image reconstruction for quantitative single photon emission computed tomography,” Phys. Med. Biol., July 1984, Vol. 29, No. 12: 1489-1500.
- [5] Manglos S H, Jaszczak R J, and Floyd C E. Weighted backprojection implemented with a

- non-uniform attenuation map for improved SPECT quantitation," IEEE Trans. Nucl. Sci, February 1988., Vol. 35, No.1: 625-628.
- [6] Smith C Ray, Grandy W T. Jr. Maximum-Entropy and Bayesian Methods in Inverse Problems, D. Reidel Publishing Company, 1985, 319-338.
- [7] Sheep L A And Vardi W. Maximum likelihood reconstruction for emission tomography. IEEE Trans. Med. Imag. , October 1982, Vol. MI-1, No. 2: 113-121.
- [8] Snyder D L and Politte D G. Image reconstruction from list-mode data in an emission tomography system having time-of-flight measurements. IEEE Trans. Nucl. Sci, June 1983., Vol. NS-20, No. 3: 1843-1849.
- [9] Miller M I, Snyder D L, and Miller T R. Maximum-likelihood reconstruction for single-photon emission computed tomography. IEEE Trans. Nucl. Sci, February 1985., Vol. NS-32, No. 1:769-778.
- [10] Kaufman L. Implementing and accelerating the EM algorithm for positron emission tomography. IEEE Trans. Med. Imag. , March 1987, Vol. MI-6, No. 1:37-51.
- [11] Hudson H M And Larkin R S. Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data. IEEE Trans. Med. Imag, December 1994., Vol. 13, No. 4:601-609.
- [12] Browne J. and De Pierro A R.. A row-action alternative to the EM algorithm for maximizing likelihood in emission tomography. IEEE Trans. Med. Imag, October 1996., Vol. 15, No. 5:687-699.
- [13] Herman G T and Meyer L B. Algebraic reconstruction techniques can be made computationally efficient. IEEE Trans. Med. Imag, September 1993., Vol. 12, No. 3:600-609
- [14] Twomey S. Comparison of constrained linear inversion and alternative nonlinear algorithm applied to the indirect estimation of particle size distributions. J. Comput. Phys, 1985., Vol. 18: 188-200.
- [15] Kenneth L. Convergence of EM image reconstruction algorithms with Gibbs smoothing. IEEE Trans. Med. Imag, December 1990., Vol. 9, No. 4:439-446.
- [16] Hebert T and Leahy R. A generalized EM algorithm for 3-D bayesian reconstruction from poisson data using Gibbs priors. IEEE Trans. Med. Imag, June 1989., Vol. 8, No. 2:194-202.
- [17] Geman S and McClure D E. Bayesian image analysis: an application to single photon emission tomography. Procl Amer. Statist. Assoc., Stat. Comp., 1985, sect.: 12-18.
- [18] Geman S and McClure D E. Statistical methods for tomographic image reconstruction. ISI Tokyo session. Bull. Int. Stat. Inst. , 1987, Vol. LII-4: 5-21
- [19] Green P J. Bayesian reconstruction from emission tomography data using a modified EM algorithm. IEEE Trans. Med. Imag. , March 1990, Vol. 9, No. 1:84-93.
- [20] Lu W, Wang Y and Luo J. A new approach to medical image reconstruction. IEEE Eng. Med. & Biol., Jul./Aug. 1997: 41-46.

Iterative Algorithms in Tomographic Reconstruction

Gui Dawei Jin Yongjie

(Department of Engineering Physics, Tsinghua University, Beijing, 100084)

Abstract

As the calculation speed of the CPU is fast developed, more consideration is paid to the iterative algorithms in tomographic reconstruction, which are only experimented as a research method before. Further more, it has been applied to practical use in such fields as science research, industry and medicine. Started from projection models, this paper summarizes the optimization criteria of kinds of iterative reconstruction algorithms, makes comparisons between them, and gives the prosperity of application in the future. In order to approve the summarization, mathematical phantom is used to test the listed algorithms. In the end, a new method to apply multi-objective optimization method to tomographic reconstruction is proposed.

(Key Words: Tomographic Reconstruction Iterative Reconstruction Algorithm
Algebraic Iterative Algorithm Maximum Likelihood)