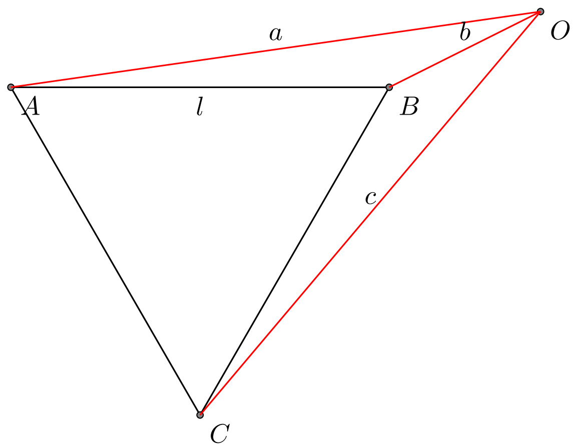
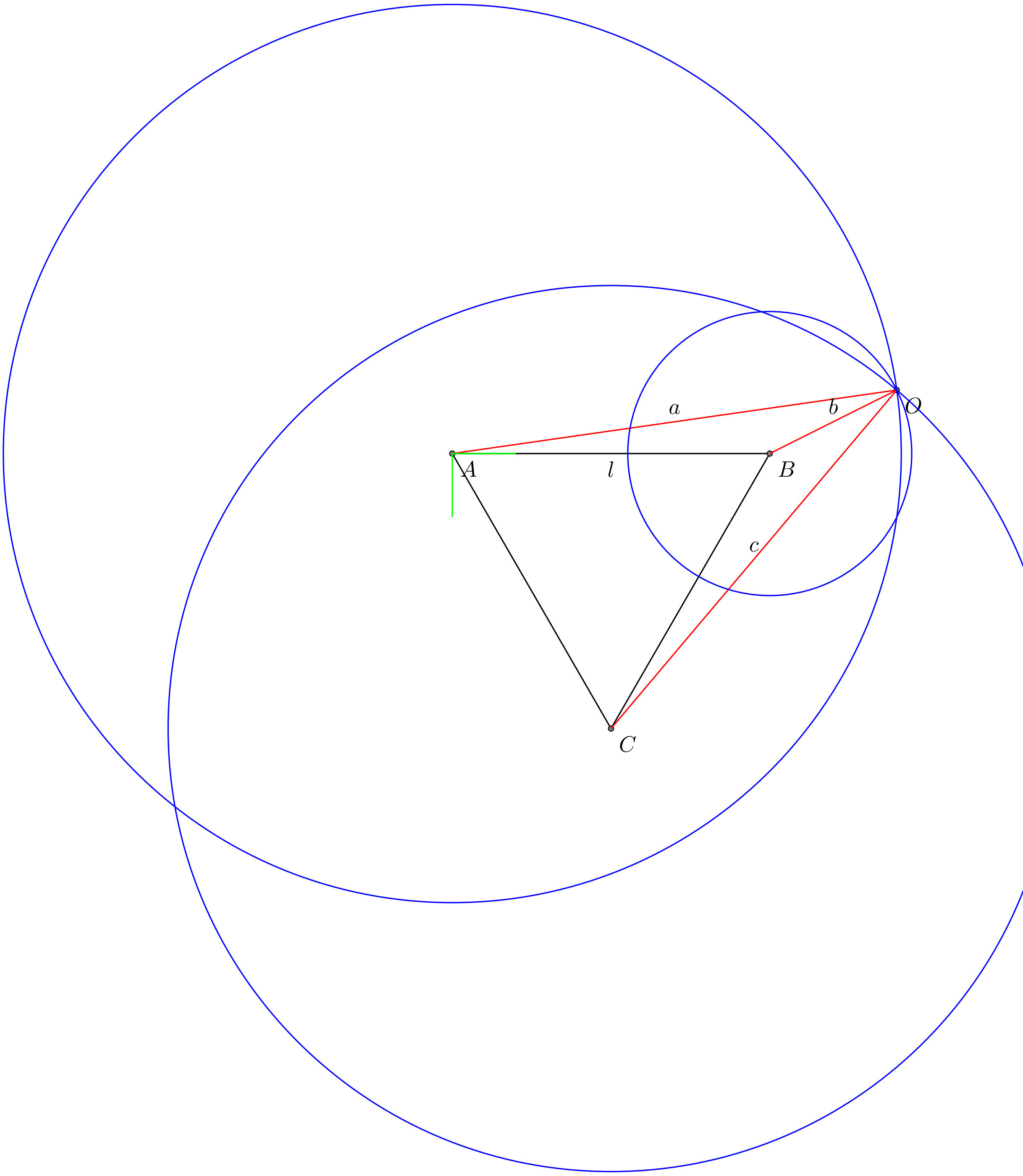
Дан равносторонний треугольник $\triangle ABC, AB = BC = AC = l$ и точка $O$, $\|OA\| = a$, $\|OB\| = b$, $\|OC\| = c$.




Точка $O$ – также уникальная точка пересечения трех окружностей с центрами в $A$, $B$, $C$ и радиусами $a$, $b$, $c$ соответственно. Построим эти окружности.

Также введем систему координат $\{A; \vec{x}; \vec{y}\}$ так, что $\vec{x} \upuparrows \vec{AB}$, $\vec{y} \perp \vec{x}$, $\cos \widehat{\vec{y}; \vec{AC}} > 0$.




Поскольку $O$ находится на пересечении трех окружностей, она также задается тремя уравнениями окружности. Дальше следуют алгебраические преобразования (часть из которых сделана с помощью Wolfram|Alpha).

$$\begin{cases} a^2 = x^2 + y^2 \\ b^2 = (x-l)^2 + y^2 \\ c^2 = (x-0.5l)^2 + (y - \frac{\sqrt{3}}{2}l)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = x^2 + y^2 \\ b^2 - a^2 = \cancel{x^2} - 2xl + l^2 + \cancel{y^2} - \cancel{(x^2 + y^2)} \\ c^2 = x^2 - xl + 0.25l^2 + y^2 - \sqrt{3}yl + 0.75l^2 = x^2 + y^2 + l^2 - xl - \sqrt{3}yl \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = x^2 + y^2 \\ b^2 - a^2 = -2xl + l^2 \\ c^2 = a^2 + l^2 - xl - \sqrt{3}yl \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = x^2 + y^2 \\ (b-a)(b+a) = l^2 - 2xl \Rightarrow x = \frac{a^2-b^2+l^2}{2l} \Downarrow \\ c^2 = a^2 + l(l - x - \sqrt{3}y) \Leftarrow c^2 = a^2 + l(l - \frac{a^2-b^2+l^2}{2l} - \sqrt{3}y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = x^2 + y^2 \\ x = \frac{a^2-b^2+l^2}{2l} \\ c^2 = a^2 + l(l - \frac{a^2-b^2+l^2}{2l} - \sqrt{3}y) \Rightarrow y = \frac{a^2+b^2-2c^2+l^2}{2\sqrt{3}l} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = (\frac{a^2-b^2+l^2}{2l})^2 + (\frac{a^2+b^2-2c^2+l^2}{2\sqrt{3}l})^2 \\ x = \frac{a^2-b^2+l^2}{2l} \\ y = \frac{a^2+b^2-2c^2+l^2}{2\sqrt{3}l} \end{cases}$$

$$a^2 = (\frac{a^2-b^2+l^2}{2l})^2 + (\frac{a^2+b^2-2c^2+l^2}{2\sqrt{3}l})^2$$

$$a^2 = \frac{(a^2-b^2+l^2)^2}{4l^2} + \frac{(a^2+b^2-2c^2+l^2)^2}{12l^2}$$

$$a^2 = \frac{3(a^2-b^2+l^2)^2+(a^2+b^2-2c^2+l^2)^2}{12l^2}$$

$$a^2 = \frac{\cancel{4}(a^4-a^2b^2-a^2c^2+b^4-b^2c^2+c^4+l^2(2a^2-b^2-c^2+l^2))}{\cancel{12}^{3} \quad l^2}$$

$$a^2 = \frac{(a^4-a^2b^2-a^2c^2+b^4-b^2c^2+c^4)}{3l^2} + 2a^2 - b^2 - c^2 + l^2$$

$$a^4 + b^4 + c^4 + 3l^4 = a^2(b^2 + c^2 - 3l^2) + 3l^2(b^2 + c^2) + b^2c^2$$