

Teorema 1 (Limit fungsi trigonometri)

Untuk setiap bilangan riil c dalam domain fungsi trigonometri yang bersesuaian.

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow c} \sin(x) = \sin(c),$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow c} \cos(x) = \cos(c),$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow c} \tan(x) = \tan(c),$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow c} \cot(x) = \cot(c),$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow c} \sec(x) = \sec(c),$$

$$\textcircled{6} \quad \lim_{x \rightarrow c} \csc(x) = \csc(c).$$

Contoh 2

Hitunglah $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cos t}{1 + t}$.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cos t}{1 + t} = \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{1 + t} \right) \left(\lim_{t \rightarrow 0} \cos t \right) = 0.1 = 0.$$

Teorema 3 (Limit trigonometri khusus)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1, \quad (1)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0. \quad (2)$$

Contoh 4

Hitunglah $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3.$$

Latihan Mandiri.

Hitunglah

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \tan x}{\sin x}.$$

$$\textcircled{2} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3\tau}{2\tau}.$$

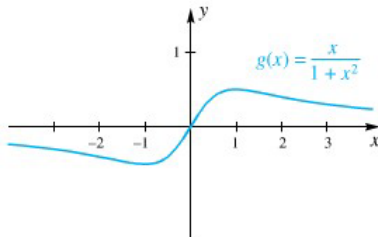
$$\textcircled{3} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}.$$

$$\textcircled{4} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(3t) + 4t}{t \sec t}.$$

Limit di tak-hingga

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^2} = \dots$$

x	$\frac{x}{1+x^2}$
10	0.099
100	0.010
1000	0.001
10000	0.0001
↓	↓
∞	?



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^2} = 0.$$

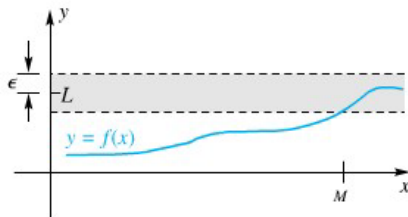
Catatan

$x \rightarrow \infty$: nilai x semakin besar dan tanpa batas, ∞ bukan bilangan.

Definisi 1

Misalkan fungsi f terdefinisi di $[c, \infty)$ untuk suatu bilangan c .

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, **ada** bilangan M , sedemikian sehingga jika $x > M$, maka $|f(x) - L| < \varepsilon$.



Definisi 2

Misalkan fungsi f terdefinisi di $[c, \infty)$ untuk suatu bilangan c .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, **ada** bilangan M , sedemikian sehingga jika $x < M$, maka $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Contoh 3

Misalkan k adalah bilangan bulat positif.

Buktikanlah $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^k} = 0$.

Ambil $\varepsilon > 0$.

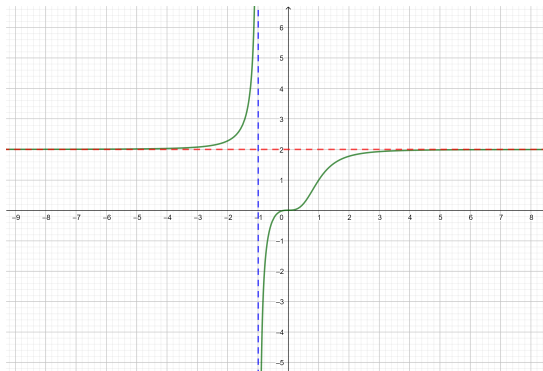
Pilih $M = \sqrt[k]{1/\varepsilon}$.

Jika $x > M$, maka

$$\left| \frac{1}{x^k} - 0 \right| = \frac{1}{x^k} < \frac{1}{M^k} = \varepsilon.$$

Contoh 4

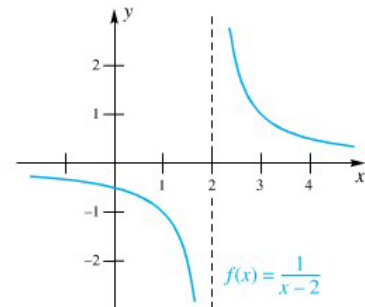
Hitunglah $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{1+x^3}$.



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{1+x^3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1/x^3 + 1} \\ &= \frac{2}{0+1} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Limit tak-hingga

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = \dots, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \dots$$



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \text{ (tidak ada)}, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty \text{ (tidak ada)}.$$

Definisi 5

$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty$ jika untuk setiap bilangan positif M , **ada** bilangan $\delta > 0$, sedemikian sehingga jika $0 < x - c < \delta$, maka $f(x) > M$.

Contoh 6

Hitunglah $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x^2-5x+6}$ (jika ada).

Perhatikan

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x^2-5x+6} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{(x-3)(x-2)} = -\infty.$$

Jadi $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x^2-5x+6}$ tidak ada.

Garis $x = c$ disebut **asimtot vertikal** dari grafik fungsi f jika salah satu dari pernyataan berikut benar:

- ❶ $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty$ atau
- ❷ $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$ atau
- ❸ $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \infty$ atau
- ❹ $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$.

Catatan

Asimtot vertikal berkaitan dengan penyebut fungsi yang bernilai 0.

Garis $y = b$ disebut **asimtot horizontal** dari grafik fungsi f jika salah satu dari pernyataan berikut benar:

- ① $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ atau
- ② $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$

Contoh 7

Tentukanlah asimtot vertikal dan asimtot horizontal dari grafik fungsi f dengan $f(x) = \frac{3x}{x+1}$.

Asimtot vertikalnya adalah $x = -1$ karena

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x}{x+1} = -\infty \quad \text{dan} \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x}{x+1} = \infty.$$

Asimtot horizontalnya adalah $y = 3$ karena

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x+1} = 3 \quad \text{dan} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x+1} = 3.$$

Garis $y = ax + b$ disebut **asimtot miring** (*oblique asymptote*) dari grafik fungsi $y = f(x)$ jika berlaku salah satu berikut.

- ① $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ atau
- ② $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$

Catatan

Ciri fungsi $y = f(x)$ punya asimtot miring adalah f merupakan fungsi rasional dengan derajat fungsi polinomial pembilang $>$ derajat fungsi polinomial penyebut.

Contoh 8

Tentukanlah asimtot miring dari $y = \frac{3x^3 + 4x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$.

Perhatikan $\frac{3x^3 + 4x^2 - x + 1}{x^2 + 1} = 3x + 4 + \frac{4x + 3}{x^2 + 1}$.

Lebih lanjut,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 - x + 1}{x^2 + 1} - (3x + 4) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 3}{x^2 + 1} = 0 \text{ dan}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 + 4x^2 - x + 1}{x^2 + 1} - (3x + 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 3}{x^2 + 1} = 0.$$

Jadi asimtot miringnya adalah garis $y = 3x + 4$.

Penyelesaian $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

- Dalam *Geogebra*: Limit[f(x), infinity]
- Dalam *Wolfram Mathematica*: Limit[f(x), x \rightarrow Infinity]

Latihan Mandiri.

Hitunglah (jika ada)

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{4 - x^3}$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 t}{t^2 - 5}$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x + 1}}{x + 4}$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{t \rightarrow \pi^+} \frac{t^2}{\sin t}$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\llbracket x \rrbracket}{x}$$

$$\textcircled{6} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\llbracket x \rrbracket}{x}$$