1

LOGIKA PROPOSISI

1.1. PERNYATAAN

Logika proposisi sering juga disebut logika matematika ataupun logika deduktif.

Logika proposisi berisi pernyataan-pernyataan (dapat tunggal maupun gabungan).

Pernyataan adalah kalimat deklarasi yang dinyatakan dengan huruf-huruf kecil, misalnya:

p, q, r, s

Pernyataan mempunyai sifat dasar yaitu dapat bernilai benar (pernyataan benar) atau bernilai salah (pernyataan salah), tetapi tidak mungkin memiliki sifat kedua-duanya.

Kebenaran atau kesalahan sebuah pernyataan dinamakan nilai kebenaran dari pernyataan tersebut.

Contoh:

1. Bilangan biner digunakan dalam sistem digital adalah pernyataan yang benar.

2. Sistem analog lebih akurat daripada sistem digital adalah pernyataan yang salah.
3. Astaga, mahal sekali harga notebook itu adalah kalimat keheranan, bukan pernyataan.
4. Siang tadi notebook Ira jatuh dari meja adalah bukan pernyataan karena dapat bernilai benar maupun bernilai salah.
5. Corezdeo lebih bagus kinerjanya dan lebih mahal dari pentium IV generasi sebelumnya adalah pernyataan yang benar.

Kalimat-kalimat yang tidak termasuk pernyataan, adalah:

- ¤ Kalimat perintah
- ¤ Kalimat pertanyaan
- ¤ Kalimat keheranan
- ¤ Kalimat harapan
- ¤ Kalimat ……walaupun…..

1.2 Pernyataan Gabungan

Beberapa pernyataan dapat digabung dengan kata penghubung dan, atau, tidak/bukan, serta variatifnya, yang selanjutnya disebut pernyataan gabungan atau pernyataan majemuk atau *compound statement.*

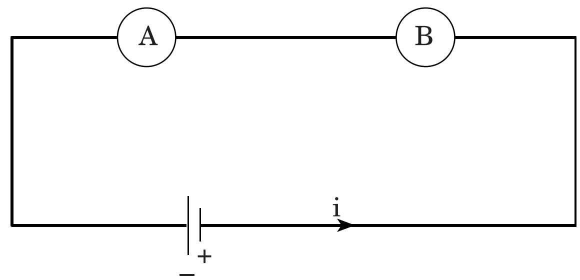
Macam-macam pernyataan gabungan.

1.2.1 Konjungsi

Konjungsi adalah pernyataan gabungan dari dua pernyataan dengan kata penghubung **dan** Notasi-notasi konjungsi:

$$p \wedge q\ ,\ p \times q,\ p.q,\ pq$$

Bagaimana menentukan benar atau salah sebuah konjungsi? Konjungsi dianalogikan dengan sebuah rangkaian listrik seri:



Bila lampu B dan lampu A hidup maka arus listrik dapat mengalir dari kutup positip menuju kutup negatip sebuah baterai, akibatnya kedua lampu A dan B menyala/hidup.Bila lampu B mati dan lampu A hidup atau sebaliknya, maka arus listrik tidak dapat mengalir menuju kutub negatip baterai, akibatnya kedua lampu A dan B tidak menyala/mati. Demikian juga bila lampu A dan B mati. Dengan demikian dapat di simpulkan bahwa konjungsi benar bila keduanya hidup, selain itu salah.

Tabel Kebenaran Konjungsi

p	q	$p \wedge q$
+	+	+
+	−	−
−	+	−
−	−	−

atau

p	$\wedge$	q
+	+	+
+	−	−
−	−	+
−	−	−

dimana + berarti benar dan - berarti salah

Contoh:

p = sistem analog adalah suatu sistem dimana tanda fisik/ kuantitas, dapat berbeda secara terus-menerus melebihi jarak tertentu adalah pernyataan benar

q = sistem digital adalah suatu sistem dimana tanda fisik/ kuantitas, hanya dapat mengasumsikan nilai yang berlainan adalah pernyataan yang benar.

r = sistem bilangan desimal adalah sistem bilangan yang digunakan dalam sistem digital adalah pernyataan yang salah

s = aljabar linear adalah alat matematika dasar untuk disain logika adalah pernyataan salah.

Maka:

$p \wedge q$ adalah konjungsi yang benar karena p benar, q benar.

$q \times r$ adalah konjungsi yang salah karena q benar, r salah.

$r \, . \, s$ adalah konjungsi yang salah karena r salah, s salah.

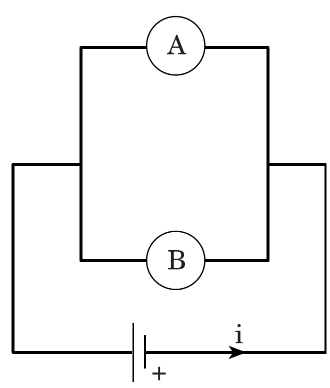
1.2.2 Disjungsi

Disjungsi adalah pernyataan gabungan dari dua pernyataan dengan kata penghubung **atau**.

Notasi-notasi disjungsi:

$$p \vee q, \; p + q$$

Bagaimana menentukan benar atau salah sebuah disjungsi? Disjungsi dapat dianalogikan dengan sebuah rangkaian listrik yang pararel:



Bila lampu A dan lampu B hidup maka arus listrik i dapat bergerak/mengalir dari kutup positip ke kutup negatip sebuah baterai, akibatnya lampu A dan B menyala.

Bila lampu A hidup dan lampu B mati (atau sebaliknya), maka arus listrik i masih dapat mengalir dari kutup positip ke kutup negatip sebuah baterai. Akibatnya lampu yang hidup akan menyala dan yang mati tidak menyala.

Bila lampu A dan B mati, maka arus listrik i tidak dapat mengalir ke kutup negatip.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa disjungsi salah bila kedua lampu mati, selain itu benar.

Tabel Kebenaran Disjungsi

p	q	$p \vee q$
+	+	+
+	–	+
–	+	+
–	–	–

atau

p	$\vee$	q
+	+	+
+	+	–
–	+	+
–	–	–

Catatan:

Simbol tabel kebenaran yang biasa digunakan :

Benar = T, B, +, 1
Salah = F, S, –, 0

Contoh:

p = keyboard adalah alat yang dapat digunakan untuk input data kedalam komputer adalah pernyataan benar.

q = Harddisk adalah alat yang menentukan kecepatan kerja komputer adalah pernyataan salah.

r = Procesor alat yang berfungsi sebagai otak dari sebuah komputer adalah pernyataan benar.

s = Windows XP adalah sistematika menulis buku adalah pernyataan salah.

Maka:

$p \vee q$ adalah disjungsi yang benar karena p benar, q salah.

$p \vee r$ adalah disjungsi yang benar karena p benar, r benar.

$q \vee s$ adalah disjungsi yang salah karena q salah, s salah.

1.2.3 Negasi

Negasi adalah sebuah pernyataan yang meniadakan pernyataan yang ada, dapat di bentuk dengan menulis "adalah salah bahwa…" atau dengan menyisipkan kata " tidak" dalam sebuah pernyataan.

Notasi-notasi negasi:

$$\sim p, p', \overline{p}$$

Contoh:

p = Harddisk adalah alat yang menentukan kecepatan kerja komputer adalah pernyataan salah

Maka

~ p = Adalah salah bahwa harddisk adalah alat yang menentukan kecepatan kerja komputer adalah pernyataan benar.

Jadi kebenaran sebuah negasi adalah lawan dari kebenaran pernyataannya.

Tabel kebenaran negasi:

p	~p
+	–
–	+

1.2.4 Jointdenial (Not OR/ NOR)

Jointdenial adalah pernyataan gabungan yang dihasilkan dari menegasikan disjungsi.

Notasi NOR:

$$p \downarrow q, \text{p nor q}, \sim(p \vee q)$$

Karena jointdenial adalah negasi dari or, maka tabel kebenaran NOR adalah sebagai berikut:

p	q	$p \vee q$	$p \downarrow q$
+	+	+	−
+	−	+	−
−	+	+	−
−	−	−	+

atau

$\sim$	$(p$	$\vee$	$q)$
−	+	+	+
−	+	+	−
−	−	+	+
+	−	−	−

1.2.5 Not And (NAND)

NAND adalah pernyataan gabungan yang dihasilkan dari menegasikan konjungsi.

Notasi NAND:

$$\sim(p \wedge q), (p \wedge q)'$$

Karena NAND negasi dari konjungsi, maka tabel kebenaran NAND adalah sebagai berikut:

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$
+	+	+	−
+	−	−	+
−	+	−	+
−	−	−	+

atau

$\sim$	$(p$	$\wedge$	$q)$
−	+	+	+
+	+	−	−
+	−	−	+
+	−	−	−

1.2.6 Exclusive or (exor)

Exor adalah pernyataan gabungan dimana salah satu p atau q (tidak kedua-duanya) adalah benar

Notasi exor:

$$p \veebar q$$

Contoh:

p = sistem analog adalah suatu sistem dimana tanda fisik/ kuantitas, dapat berbeda secara terus-menerus melebihi jarak tertentu. adalah pernyataan benar

q = sistem digital adalah suatu sistem dimana tanda fisik/ kuantitas, hanya dapat mengasumsikan nilai yang berlainan adalah pernyataan yang benar.

r = sistem bilangan desimal adalah sistem bilangan yang digunakan dalam system digital adalah pernyataan yang salah.

s = aljabar linear adalah alat matematika dasar untuk disain logika adalah pernyataan salah.

Maka:

$p \veebar q$ adalah exor yang salah karena p benar, q benar.
$p \veebar r$ adalah exor yang benar karena p benar, r salah.
$s \veebar q$ adalah exor yang benar karena q benar, s salah.
$r \veebar s$ adalah exor yang salah karena r salah, s salah.

dengan demikian tabel kebenaran exor dapat ditulis sebagai berikut:

p	q	$p \veebar q$
+	+	–
+	–	+
–	+	+
–	–	–

atau

p	$\veebar$	q
+	–	+
+	+	–
–	+	+
–	–	–

1.2.7 Exclusive NOR (ExNOR)

EXNOR adalah pernyataan gabungan **ingkaran** dari EXOR di mana nilai kebenarannya benar bila kedua pernyataannya benar atau salah.

Notasi EXNOR:

$$\sim (p \veebar q)$$

Contoh:

p = sistem analog adalah suatu sistem dimana tanda fisik/ kuantitas, dapat berbeda secara terus-menerus melebihi jarak tertentu. adalah pernyataan benar

q = sistem digital adalah suatu sistem dimana tanda fisik/ kuantitas, hanya dapat mengasumsikan nilai yang berlainan adalah pernyataan yang benar.

r = sistem bilangan desimal adalah sistem bilangan yang digunakan dalam sistem digital adalah pernyataan yang salah

s = aljabar linear adalah alat matematika dasar untuk disain logika adalah pernyataan salah.

Maka:

p EXNOR q, adalah pernyataan yang benar
p EXNOR r, adalah pernyataan yang salah
s EXNOR q, adalah pernyataan yang salah
r EXNOR s, adalah pernyataan yang benar

Dengan demikian tabel kebenaran EXNOR:

p	q	$\sim (p \veebar q)$
+	+	+
+	–	–
–	+	–
–	–	+

1.3 TAUTOLOGI DAN KONTRADIKSI

Proposisi dipandang dari nilai kebenarannya dapat digolongkan menjadi 2 yaitu

1.3.1 Tautologi

Tautologi adalah proposisi yang selalu benar apapun pernyataannya.

Notasi tautologi:

$$p \vee \sim p$$

Contoh:

p = Harddisk adalah alat yang menentukan kecepatan kerja komputer adalah pernyataan salah

~p = adalah salah bahwa harddisk adalah alat yang menentukan kecepatan kerja komputer adalah pernyataan benar.

Maka

$p \vee \sim p$ adalah proposisi yang benar

Tabel kebenaran tautologi:

p	~ q	p∨ ~ p
+	–	+
–	+	+

atau

p	∨	~ p
+	+	–
–	+	+

1.3.2 Kontradiksi

Kontradiksi adalah proposisi yang selalu salah apapun pernyataannya

Notasi kontradiksi:

$$p \wedge \sim p$$

Contoh:

p = Harddisk adalah alat yang menentukan kecepatan kerja komputer adalah pernyataan salah

~p = adalah salah bahwa harddisk adalah alat yang menentukan kecepatan kerja komputer adalah pernyataan benar.

Maka

$p \wedge \sim p$ adalah proposisi yang salah

Tabel kebenaran kontradiksi:

p	~ p	$p \wedge \sim p$
+	–	–
–	+	–

1.4 KESETARAAN LOGIS

Dua buah pernyataan yang berbeda dikatakan setara bila nilai kebenarannya sama

Contoh:

1. Tidak benar, bahwa aljabar linear adalah alat matematika dasar untuk disain logika adalah pernyataan benar.
2. Aljabar Boole adalah alat matematika dasar untuk disain logika adalah pernyataan benar.

Kedua pernyataan di atas mempunyai nilai kebenaran yang sama. Jadi kedua pernyataan di atas setara/ekivalen.

Akibatnya dua proposisi P(p, q, r, ...) dan Q(p, q, r, ...) dapat dikatakan setara jika memiliki tabel kebenaran yang sama. Dua buah proposisi yang setara dapat dinyatakan dengan P(p, q, r, ...) $\equiv$ Q(p, q, r, ...).

Contoh:

Selidiki apakah kedua proposisi di bawah setara:

1. Tidak benar, bahwa sistem bilangan biner digunakan dalam sistem digital atau sistem digital hanya dapat mengasumsikan nilai yang berlainan.
2. Sistem bilangan biner tidak digunakan dalam sistem digital dan tidak benar bahwa sistem digital hanya dapat mengasumsikan nilai yang berlainan.

Kedua proposisi di atas dapat dituliskan dengan notasi sbb:

1. $\sim (p \vee q)$
2. $\sim p \wedge \sim q$

sehingga tabel kebenarannya sebagai berikut:

p	q	~p	~q	$(p \vee q)$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p \vee \sim q$
+	+	–	–	+	–	–
+	–	–	+	+	–	–
–	+	+	–	+	–	–
–	–	+	+	–	+	+

Jadi, kedua proposisi tersebut setara atau $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

1.5 Aljabar Proposisi

Aljabar proposisi merupakan penerapan hukum-hukum aljabar dalam logika proposisi.

Hukum-hukum tersebut adalah:

1. Idempoten

   $p \vee p \equiv p$

   $p \wedge p \equiv p$

2. Asosiatif

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

3. Komutatif

$p \vee q \equiv q \vee p$

$p \wedge q \equiv q \wedge p$

4. Distribusi

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

5. Identitas

$p \vee f \equiv p$ $\quad$ $p \wedge f \equiv f$

$p \vee t \equiv t$ $\quad$ $p \wedge t \equiv p$

6. Komplemen

$p \vee \sim p = t$ $\quad$ $\sim t = f$

$p \wedge \sim p = f$ $\quad$ $\sim f = t$

7. Involution

$\sim p(\sim p) \equiv p$

8. De Morgan's

$\sim (p \wedge q) = \sim p \vee q$

$\sim (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$

9. Absorbsi

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

10. Implikasi

$p \rightarrow q = \sim p \vee q$

11. Biimplikasi

$p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

12. Kontraposisi

$p \rightarrow q = \sim q \rightarrow \sim p$

Salah satu manfaat hukum-hukum aljabar proposisi adalah untuk menyederhanakan pernyataan gabungan.

Contoh:

Sederhanakan proposisi di bawah (buktikan hukum. Absorbsi):

$$\begin{aligned} p \wedge (p \vee q) &\equiv (p \vee f) \wedge (p \vee q) \\ &\equiv p \vee (f \wedge q) \\ &\equiv p \vee f \\ &\equiv p \end{aligned}$$

1.6 IMPLIKASI DAN BIIMPLIKASI

1.6.1 Implikasi

Perhatikan pernyataan berikut: jika memakai Microsoft Word maka Windows adalah sistem operasinya.

Microsoft Word merupakan syarat cukup bagi Windows, sedangkan Windows merupakan syarat perlu bagi Microsoft Word, artinya Microsoft Word tidak dapat digunakan tanpa windows tetapi Windows dapat digunakan tanpa Microsoft Word.

Contoh pernyataan di atas disebut pernyataan bersyarat atau conditional statement.

Notasi implikasi:

$p \rightarrow q$

dibaca: jika p maka q

1.6.1.1 Kebenaran implikasi

1. Jika Microsoft Word maka Windows sistem operasinya adalah implikasi benar, karena keduanya buatan Microsoft.

Mengacu pada implikasi di atas maka:

2. Jika Microsoft Word maka bukan Windows sistem operasinya adalah pernyataan salah, karena sistem operasi Microsoft Word adalah Windows
3. Jika bukan Microsoft Word maka Windows sistem operasinya adalah pernyataan benar karena aplikasi under Windows tidak hanya Microsoft Word
4. Jika bukan Microsoft word maka bukan windows sistem operasi-nya adalah pernyataan benar, karena aplikasi selain Microsoft Word, sistem operasinya bisa jadi bukan Windows.

   Tabel kebenaran implikasi sebagai berikut:

p	q	$p \to q$
+	+	+
+	–	–
–	+	+
–	–	+

Contoh:

Misalkan pernyataan p adalah benar, q adalah salah dan r adalah benar, tentukan kebenaran proposisi berikut:

$$(p \vee q) \to \overline{r}$$

Jawab:

Proposisi di atas dapat diubah menjadi

$$(t \vee f) \to f$$
$$t \to f$$
$$f$$

Jadi proposisi di atas salah

Bukti dengan tabel :

p	$\vee$	q	$\rightarrow$	$\bar{r}$	r
+		+		−	+
+		+		+	−
+	+	−	Δ	−	+
+		−		+	−

1.6.1.2 Konvers, Invers, dan Kontraposisi

Jika implikasi: $p \rightarrow q$

Maka: Konversnya : $q \rightarrow p$

Inversnya : $\sim p \rightarrow \sim q$

Kontrapositipnya : $\sim q \rightarrow \sim p$

Contoh:

Jika Microsoft Word maka Windows sistem operasinya adalah implikasi yang benar, berdasarkan implikasi di atas maka:

Konversennya : Jika Windows sistem operasinya maka Microsoft Word aplikatifnya.

Inversenya : Jika bukan Microsoft Word maka bukan Windows sistem operasinya

Kontrapositipnya : Jika bukan windows sistem operasinya maka bukan Microsoft Word aplikatifnya

Tabel kebenaran

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow \sim p$	$q \rightarrow p$	$\sim p \rightarrow \sim q$
+	+	−	−	+	+	+	+
+	−	−	+	−	−	+	+
−	+	+	−	+	+	−	−
−	−	+	+	+	+	+	+

setara setara

Jadi dapat disimpulkan bahwa proposisi yang saling kontra-positif mempunyai nilai kebenaran yang sama (*ekuivalen*).

Berdasarkan sifat tersebut maka kita dapat membuktikan suatu dalil dalam bentuk implikasi melalui nilai kebenaran kontra-positipnya.

Contoh:

Buktikan bahwa:

Jika x^2 bilangan genap, maka x juga bilangan genap

dapat ditulis : x^2 = genap $\rightarrow$ x = genap

Jawab:

Kontrapositif dari implikasi di atas adalah:

Jika x bukan bilangan genap maka x^2 juga bukan bilangan genap.

dapat ditulis :

Jika x = ganjil maka x^2 = ganjil

Setiap bilangan bulat bukan genap adalah ganjil, sehingga x ganjil ditulis $x = 2k + 1$, k bilangan bulat, akibatnya:

$$\begin{aligned} x^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

Karena	k	bilangan bulat maka:
	k^2	juga bilangan bulat
	2k	juga bilangan genap
	$2k^2 + 2k$	juga bilangan genap

sehingga x^2 = bilangan ganjil, karena bilangan genap ditambah 1 sama dengan bilangan ganjil.

Jadi kontrapositipnya benar akibatnya implikasinya juga benar.

1.6.2 *Biimplikasi*

Perhatikan pernyataan berikut:

Microsoft Word jika dan hanya jika ingin membuat dokumen dengan sistem operasi Windows

Pernyataan tersebut disebut biimplikasi atau biconditional statement.

Notasi biimplikasi : $p \leftrightarrow q$
dibaca: p jika dan hanya jika q

1.6.2.1. *Kebenaran Biimplikasi*

1. Microsoft Word jika dan hanya jika ingin membuat dokumen dengan sistem operasi Windows adalah pernyataan benar

Berdasarkan biimplikasi diatas, maka:

2. Microsoft Word jika dan hanya jika tidak membuat dokumen dengan sistem operasi Windows adalah pernyataan salah
3. Bukan Microsoft Word jika dan hanya jika membuat dokumen dengan sistem operasi Windows adalah pernyataan salah
4. Bukan Microsoft Word jika dan hanya jika tidak membuat dokumen dengan sistem operasi Windows adalah pernyataan benar

Tabel kebenaran biimplikasi:

p	q	$p \leftrightarrow q$
+	+	+
+	–	–
–	+	–
–	–	+

1.7 ARGUMENTASI

Argumentasi adalah kumpulan pernyataan-pernyataan atau kumpulan premis-premis atau kumpulan dasar pendapat serta kesimpulan (konklusi)

Notasi:

$$
\begin{array}{l}
P(p,q,\cdots) \\
Q(p,q,\cdots) \\
\vdots \\
\therefore C(p,q,\cdots)
\end{array}
$$

P, Q, …	masing-masing disebut dasar pendapat atau premis
{P, Q, … }	bersama-sama disebut hipotesa
C	adalah conclusion/kesimpulan

Contoh:

Jika rajin belajar maka lulus ujian
tidak lulus ujian

$\therefore$ tidak rajin belajar

1.7.1. Kebenaran/Validitas Argumen

Validitas argument tergantung dari nilai kebenaran masing-masing premis dan kesimpulannya.

Suatu argument dikatakan valid bila masing-masing premisnya benar dan kesimpulannya juga benar.

Contoh 1:

Jika merancang gerbang logika maka memakai sistem bilangan biner

Jika memakai sistem bilangan biner maka sistem yang dibangun digital

---

$\therefore$ Jika merancang gerbang logika maka sistem yang dibangun digital

Argumen tersebut dapat dituliskan dengan notasi sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$$

Sekarang perhatikan tabel kebenaran:

p	q	r	p→q	q → r	p→r
+	+	+	+	+	+
+	+	–	+	–	–
+	–	+	–	+	+
+	–	–	–	+	–
–	+	+	+	+	+
–	+	–	+	-	+
–	–	+	+	+	+
–	–	–	+	+	+

Keterangan :

Lingkari tabel premis 1 dan tabel premis 2 yang keduanya sama dengan benar. Kemudian tandai tabel kesimpulan dengan Δ. (Kesimpulan yang sejajar dengan premis 1 dan 2 yang telah dilingkari). Perhatikan tanda yang ada di dalam Δ, ternyata semua bernilai benar.

Kesimpulan:

Argumen tersebut di atas valid, karena dengan premis yang benar semua kesimpulannya juga benar semua.

Contoh 2:

Jika merancang gerbang logika maka memakai sistem bilangan biner
Memakai sistem bilangan biner

$\therefore$ Merancang gerbang logika

Argumen di atas dapat dituliskan dengan notasi

$p \rightarrow q$ disebut premis 1
q disebut premis 2
$\therefore p$ disebut kesimpulan

Dengan cara yang sama kita dapat menentukan nilai kebenaran argumen di atas.

p	q	$p \rightarrow q$
+	+	+
+	−	−
−	+	+
−	−	+

Kesimpulan:

Argumen di atas tidak valid karena dengan premis-premis benar, kesimpulannya bisa benar, bisa salah.

1.7.2 Bentuk-bentuk Dasar Menarik Kesimpulan

1. Conjunction

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{q \quad} \\ \therefore p \wedge q \end{array}$$

2. Addition

$$\frac{p}{\therefore p \vee q}$$

3. Modus Ponens

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \qquad} \\ \therefore q \end{array}$$

4. Constructive Dilemma

$$\begin{array}{l} (p \to q) \wedge (r \to s) \\ \underline{p \vee r \qquad\qquad\qquad} \\ \therefore q \vee s \end{array}$$

5. Hypothetical syllogism

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ \therefore p \to r \end{array}$$

6. Simplification

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$$

7. Disjunctive syllogism

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\sim p \qquad} \\ \therefore q \end{array}$$

8. Modus Tollens

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\qquad \sim q \quad} \\ \therefore \quad \sim p \end{array}$$

9. Destructive Dilemma

$$\begin{array}{l} (p \to q) \wedge (r \to s) \\ \sim q \vee \sim s \\ \hline \therefore \quad \sim p \vee \sim r \end{array}$$

10. Absorption

$$\begin{array}{l} \quad p \to q \\ \hline \therefore p \to (p \wedge q) \end{array}$$

Contoh pemanfaatan:

Buatlah kesimpulan dari argumen di bawah sehingga argumen tersebut valid

1. Jika hasilnya akurat maka sistemnya digital
2. Jika sistem digital maka rancangan jaringannya kombinasi
3. Jika sistem digital maka menggunakan dua nilai tanda bilangan biner
4. Hasil akurat

∴ ?

Jawab:

$$\begin{array}{ll} \text{Premis 1 :} & p \to q \\ \text{Premis 2 :} & q \to r \\ \text{Premis 3 :} & q \to s \\ \text{Premis 4 :} & p \\ \hline & \therefore ? \end{array}$$

Dengan Hypothetical Syllogism

$$\begin{array}{l} \quad p \to q \\ \quad q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array} \qquad \begin{array}{l} \quad p \to q \\ \quad q \to s \\ \hline \therefore p \to s \end{array}$$

Sehingga argumentasi dapat ditulis ulang

$$\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ p \rightarrow s \\ p \\ \hline \therefore ? \end{array}$$

Dengan Modus Ponen

$$\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ p \\ \hline \therefore r \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \rightarrow s \\ p \\ \hline \therefore s \end{array}$$

Sehingga argumentasi dapat ditulis ulang

$$\begin{array}{l} r \\ s \\ \hline \therefore ? \end{array}$$

Dengan conjuntion kesimpulannya dapat ditulis $r \wedge s$, sehingga argumentasi menjadi

$$\begin{array}{l} r \\ s \\ \hline \therefore r \wedge s \end{array}$$

adalah valid

Bukti dengan tabel kebenaran

p	q	r	s	$p \to q$	$q \to r$	$q \to s$	$r \wedge s$
+	+	+	+	+	+	+	+
+	+	+	–	+	+	–	–
+	+	–	+	+	–	+	–
+	+	–	–	+	–	–	–
+	–	+	+	–	+	+	+
+	–	+	–	–	+	+	–
+	–	–	+	–	+	+	–
+	–	–	–	–	+	+	–
–	+	+	+	+	+	+	+
–	+	+	–	+	+	–	–
–	+	–	+	+	–	+	–
–	+	–	–	+	–	–	–
–	–	+	+	+	+	+	+
–	–	+	–	+	+	+	–
–	–	–	+	+	+	+	–
–	–	–	–	+	+	+	–
4				1	2	3	$\therefore$

$\therefore$ argumen di atas valid

1.8 KUANTOR PERNYATAAN

Misalkan P(x) adalah pernyataan yang menyangkut variabel x dan q adalah sebuah himpunan, maka P adalah fungsi proposisi jika untuk setiap $x \in D$ berlaku P(x) adalah sebuah proposisi.

Contoh:

Misalkan P(x) adalah pernyataan dengan x adalah sebuah bilangan genap bulat.

Misalkan D = himpunan bilangan bulat positip

Maka fungsi proposisi P(x) dapat ditulis:

Jika x = 1 maka proposisinya
1 adalah bilangan bulat genap (f)

Jika x = 2 maka proposisinya
2 adalah bilangan bulat genap (t)
dan seterusnya.

Jadi dapat kita lihat ada sejumlah (kuantitas) proposisis yang benar. Untuk menyatakan kuantitas suatu objek dalam proposisi tersebut digunakan notasi-notasi yang disebut kuantor.

1.8.1 Macam-macam Kuantor

Macam-macam kuantor yang sering digunakan dalam proposisi:

1. Untuk setiap x, P(x)
   disebut kuantor universal
   simbol yang digunakan $\forall$
2. Untuk beberapa (paling sedikit satu) $x, P(x)$
   disebut kuantor existensial
   simbol yang digunakan $\exists$

Contoh

Misalkan x himpunan warga negara Indonesia, P predikat membayar pajak, R predikat membeli printer,

Maka

1. $\forall x P(x)$, artinya: Semua warga negara membayar pajak
2. $\exists x R(x) P(x)$, artinya: Ada beberapa warga negara pembeli printer membayar pajak
3. $\forall x R(x) \rightarrow P(x)$, artinya: Setiap warga negara jika membeli printer maka membayar pajak

4. $\exists x R(x) \wedge \bar{P}(x)$, artinya: Ada warga negara membeli printer dan tidak membayar pajak

1.8.2 Negasi Kuantor

$\sim \forall x = \exists x$

$\sim \exists x = \forall x$

maka :

$\sim (\forall x P(x)) = \exists x \overline{P(x)}$

$\sim (\exists x P(x)) = \forall x \overline{P(x)}$

$$\begin{aligned}
\sim (\forall x P(x) \rightarrow Q(x)) &= \exists x \overline{(P(x) \rightarrow Q(x))} \\
&= \exists x P(x) \ \wedge \overline{Q(x)} \\
\sim (\exists x P(x) \rightarrow Q(x)) &= \forall x \overline{(P(x) \rightarrow Q(x))} \\
&= \forall x P(x) \wedge \overline{Q(x)}
\end{aligned}$$

Soal - soal :

1. Tuliskan tabel kebenaran dari proposisi di bawah:
   (a) $\bar{p} \wedge (p \vee q)$
   (b) $\sim (p \wedge q) \vee (r \wedge \sim q)$
   (c) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
   (d) $\sim (p \wedge q) \vee \sim (p \leftrightarrow q)$
   (e) $\sim (p \veebar q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
   (f) $(p \wedge \sim (\sim p \vee q)) \vee (p \wedge q)$
   (g) $\sim ((\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)) \vee (p \wedge q)$
2. Sederhanakanlah proposisi di bawah:
   (a) $(p \vee q) \wedge (\bar{p} \vee q) \wedge (p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})$
   (b) $(p \wedge \sim (p \vee \sim q)) \vee q \wedge (q \vee p)$

(c) $((p \vee q) \wedge \sim p) \vee \sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$

(d) $(p \vee (\sim q \rightarrow p)) \vee ((p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow (q \wedge \sim p))$

(e) $(p \wedge (q \rightarrow \sim r)) \vee ((\sim p \vee r) \leftrightarrow \sim q)$

3. Buktikanlah bahwa proposisi $P \equiv Q$
   (a) $P \equiv p \vee \sim p$

   $Q \equiv (p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$

   (b) $P \equiv p \rightarrow (p \vee q)$

   $Q \equiv (p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$

   (c) $P \equiv (p \wedge q)$

   $Q \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$

   (d) $P \equiv (p \vee q)$

   $Q \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$

4. Dengan kontrapositif buktikanlah kebenaran implikasi di bawah:
   (a) Jika hasil kali 2 bilangan adalah ganjil, maka kedua bilangan tersebut adalah ganjil
   (b) Jika x bukan bilangan bulat kalipatan 3, maka x^2 juga bukan bilangan bulat kelipatan 3

5. Selidiki validitas argumentasi di bawah :
   (a) 1. Jika microsoft word maka windows sistem operasinya
   2. Jika bukan product microsoft maka bukan windows sistem operasinya
   3. Linux

   $\therefore$ bukan microsoft word

   (b) Buat kesimpulan yang valid dari argumentasi di bawah:

1. Jika memakai sistem digital maka hasilnya akurat dan jika merancang gerbang logika harus menguasai Aljabar Boole
2. Sistim digital atau gerbang logika
3. Tidak akurat atau bukan Aljabar Boole
4. Tidak akurat

$\therefore$?

(c) 1. MsOffice mudah dipakai maka banyak pembeli dan mudah dicari
2. Karena mudah dicari dan banyak pembeli maka dibajak
3. Karena dibajak maka negara dirugikan
4. Negara tidak dirugikan

$\therefore$ bukan microsoft Office

(d)
$$p \to r$$
$$p \to q$$
$$\therefore p \to (r \wedge q)$$

(e)
$$p \to (r \vee q)$$
$$r \to \overline{q}$$
$$\therefore p \to r$$

6. Tentukan nilai kebenaran pernyataan di bawah, bila domain pembicaraannya himpunan bilangan real:

(a) $\forall x \forall y\, P(x^2 < y + 1)$

$\forall x \exists y\, P(x^2 < y + 1)$

$\exists x \forall y\, P(x^2 < y + 1)$

$\exists x \exists y\, P(x^2 < y + 1)$

(b) $\forall x \forall y \, P\big((x < y) \rightarrow (x^2 < y^2)\big)$

$\forall x \exists y \, P\big((x < y) \rightarrow (x^2 < y^2)\big)$

$\exists x \forall y \, P\big((x < y) \rightarrow (x^2 < y^2)\big)$

$\exists x \exists y \, P\big((x < y) \rightarrow (x^2 < y^2)\big)$

-oo0oo-