

### TEOREMA DASAR KALKULUS I

Menggunakan Teorema Dasar Kalkulus I untuk menghitung integral tentu.

## Teorema Dasar Kalkulus

Sejauh ini kita telah dapat mengatakan apakah sebuah fungsi terintegralkan pada suatu selang, dengan melihat apakah fungsi tersebut terbatas dan kontinu kecuali di sejumlah terhingga titik.

Namun, untuk menghitung integral tentu fungsi tersebut, selain dengan menggunakan definisinya, kita memerlukan 'senjata' yang lebih ampuh.

Salah satu alat bantu untuk menghitung integral tentu adalah **Teorema Dasar Kalkulus**.

## Teorema Dasar Kalkulus I

Jika f kontinu dan mempunyai anti-turunan F pada [a, b], maka

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a).$$

#### **Catatan:**

- 1. Teorema ini mengaitkan integral tak tentu dengan integral tentu.
- 2. Notasi  $F(x)|_a^b$  biasa digunakan untuk menyatakan F(b) F(a).

## Bukti Teorema Dasar Kalkulus I

Misalkan f kontinu dan mempunyai anti-turunan F pada [a, b]. Maka, f terintegralkan pada [a, b], dan untuk setiap partisi  $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$  kita mempunyai

$$F(b)-F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

$$=\sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i.$$

Karena itu 
$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot \Delta x_i = F(b) - F(a).$$

## Contoh

1. Fungsi  $f(x) = x^2$  kontinu dan mempunyai antiturunan  $F(x) = x^3/3$  pada [0, 1]; jadi

$$\int_{0}^{1} x^{2} dx = \frac{x^{3}}{3} \Big|_{0}^{1} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

2. Lebih umum, untuk  $r \ne -1$ , fungsi  $f(x) = x^r$  kontinu dan mempunyai anti-turunan  $F(x) = x^{r+1}/(r+1)$  pada [a, b] (dalam daerah asal f); jadi  $\int_a^b x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} \Big|_a^b = \frac{b^{r+1}}{r+1} - \frac{a^{r+1}}{r+1}.$ 

# Kelinearan Integral Tentu

$$\int_{a}^{b} k.f(x)dx = k.\int_{a}^{b} f(x)dx;$$

$$\int_{a}^{b} [f(x) + g(x)]dx = \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{a}^{b} g(x)dx.$$

**Contoh**: Dengan menggunakan kelinearan integral tentu, kita dapat menghitung

3. 
$$\int_{0}^{2} (x^{2} + \sqrt{x}) dx = \int_{0}^{2} x^{2} dx + \int_{0}^{2} \sqrt{x} dx = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} \sqrt{2}.$$

## Latihan

$$1.\int_{0}^{\pi/2} (1+\cos x) dx = \dots$$

$$2.\int_{1}^{4} (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}) dx = \dots$$

$$3.\int_{1}^{5} \frac{x^3 - 1}{x^2} dx = \dots$$

### **METODE SUBSTITUSI**

Menggunakan metode substitusi dalam penghitungan integral tentu.

## Bagaimana menghitung integral ini?

$$\int_{0}^{4} \sqrt{x^2 + x} \cdot (2x + 1) dx.$$

## Atau integral ini:

$$\int_{0}^{\pi^2/4} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

Dengan menggunakan Aturan Pangkat yang Diperumum, kita dapat menghitung integral tak tentunya:

$$\int (x^2 + x)^{\frac{1}{2}} \cdot (2x + 1) dx = \frac{2}{3}(x^2 + x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Dengan demikian, integral tentu tadi dapat dihitung:

$$\int_{2}^{2} (x + x) (2x + 1) dx = (x + x) \int_{3/2}^{2} \int_{0}^{4} = \frac{2}{3} (20)^{3/2}.$$

Integral semacam ini, baik integral tentu maupun integral tak tentu, dapat pula dihitung dengan **metode substitusi**, yang akan kita bahas selanjutnya.

Sebagai contoh, untuk menghitung integral tak tentu

$$\int (x^2 + x)^{\frac{1}{2}} \cdot (2x + 1) dx$$

kita gunakan *substitusi peubah*  $u = x^2 + x$ , sehingga du = (2x + 1)dx dan integral di atas menjadi  $\int u^{1/2} du$ . Dengan Aturan Pangkat, kita peroleh

$$\int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C.$$

Substitusikan kembali  $u = x^2 + x$ , kita dapatkan

$$\int (x^2 + x)^{\frac{1}{2}} \cdot (2x + 1) dx = \frac{2}{3}(x^2 + x)^{\frac{3}{2}} + C,$$

sebagaimana yang kita peroleh sebelumnya dengan Aturan Pangkat yang Diperumum. Sekarang, untuk menghitung integral tentu

$$\int_{0}^{4} (x^2 + x)^{1/2} (2x + 1) dx,$$

kita lakukan substitusi seperti tadi:  $u = x^2 + x$ , du = (2x + 1)dx. Selanjutnya kita perhatikan efek substitusi ini terhadap kedua batas integral.

Pada saat x = 0, kita peroleh u = 0; sementara pada saat x = 4, kita dapatkan u = 20. Dengan demikian

$$\int_{0}^{4} (x^{2} + x)^{1/2} (2x + 1) dx = \int_{0}^{20} u^{1/2} du = \frac{2}{3} u^{3/2} \int_{0}^{0} = \frac{2}{3} (20)^{3/2},$$

sama seperti yang kita peroleh sebelumnya.

## **Catatan**

Dalam menghitung integral tentu dengan metode substitusi, kedua batas integral pada umumnya berubah; dan kita dapat menghitung integral dalam peubah baru tanpa harus mensubstitusikan kembali peubah lama.

Bila agak rumit, integral tentu tsb dapat dihitung dalam dua tahap: pertama cari dahulu integral tak tentunya, setelah itu baru gunakan Teorema Dasar Kalkulus. Secara umum, dengan melakukan substitusi peubah u = g(x), du = g'(x)dx, kita peroleh

**Integral tak tentu**:  $\int f(g(x)).g'(x)dx = \int f(u) du$ .

Integral tentu: 
$$\int_{a}^{b} f(g(x)).g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

Jika F adalah anti-turunan dari f, maka

$$\int_{a}^{b} f(g(x)).g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = F(g(b)) - F(g(a)).$$

## Latihan. Hitung integral tentu/tak tentu berikut:

- 1.  $\int \sqrt{3x + 2} \, dx$ .
- 2.  $\int \cos(3x + 2) dx$ .

3. 
$$\int_{0}^{1} (3x+2)^{3} dx.$$

$$4. \int_{0}^{\pi^2/4} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$5. \int_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt{t}(\sqrt{t}+1)^3} dt.$$

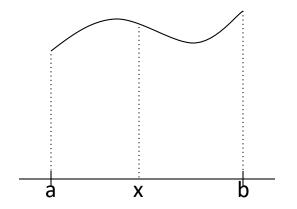
### TEOREMA DASAR KALKULUS II

Menggunakan Teorema Dasar Kalkulus II untuk menentukan turunan dari integral.

# Fungsi Akumulasi

Misalkan *f* terintegralkan pada [a, b]. Definisikan

$$G(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt.$$



Di sini, G(x) menyatakan "luas daerah" di bawah kurva y = f(t),  $a \le t \le x$  (lihat gambar).

Perhatikan bahwa 
$$G(a) = 0$$
 dan  $G(b) = \int_{a}^{b} f(t)dt$ .

Fungsi G disebut **fungsi akumulasi** dari *f*.

## Teorema Dasar Kalkulus II

G'(x) = 
$$f(x)$$
 pada [ $a$ ,  $b$ ]; yakni,  

$$\frac{d}{dx} \left( \int_{a}^{x} f(t) dt \right) = f(x), \forall x \in [a, b].$$

#### **Catatan:**

- 1. TDK II menyatakan bahwa fungsi akumulasi merupakan anti-turunan dari f.
- TDK I dan TDK II menyatakan bahwa turunan dan integral merupakan semacam kebalikan satu terhadap yang lainnya.

## Bukti Teorema Dasar Kalkulus II

Menurut definisi turunan,

$$G'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \begin{bmatrix} x+h \\ f(t)dt - \int_{a}^{x} f(t)dt \end{bmatrix}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} f(t)dt.$$

Ketika h kecil, f tak berubah banyak pada [x, x+h]. Pada selang ini,  $f(t) \approx f(x)$ , sehingga integral-nya kira-kira sama dengan h.f(x). Jadi G'(x) = f(x).

## Catatan

TDK I dapat dibuktikan pula dengan menggunakan TDK II. Karena dua anti-turunan dari f berselisih konstan, kita mempunyai

$$\int_{a}^{x} f(t)dt = F(x) + C, \qquad x \in [a,b].$$

Nah, untuk x = a, ruas kiri sama dengan 0. Jadi F(a) + C = 0, sehingga C = -F(a). Karena itu

$$\int_{a}^{x} f(t)dt = F(x) - F(a), \qquad x \in [a,b].$$

Dalam hal x = b, kita peroleh TDK I.

10/30/2013

## Contoh

$$1. \quad \frac{d}{dx} \left( \int_{1}^{x} t^3 dt \right) = x^3.$$

$$2. \quad \frac{d}{dx} \left( \int_{x}^{1} t^3 dt \right) = \frac{d}{dx} \left( -\int_{1}^{x} t^3 dt \right) = -x^3.$$

3. 
$$\frac{d}{dx} \left( \int_{1}^{2x} t^3 dt \right)^{u=2x} = \frac{d}{du} \left( \int_{1}^{u} t^3 dt \right) \frac{du}{dx} = u^3.2 = 16x^3.$$

4. 
$$\frac{d}{dx} \left( \int_{x}^{2x} t^{3} dt \right) = \frac{d}{dx} \left( \int_{x}^{1} t^{3} dt \right) + \frac{d}{dx} \left( \int_{1}^{2x} t^{3} dt \right)$$

$$= -x^{3} + 16x^{3} = 15x^{3}.$$

## Latihan

$$1.\frac{d}{dx}\left(\int_{1}^{x} (2t^2 + \sqrt{t})dt\right) = \dots$$

$$2.\frac{d}{dx} \left( \int_{1}^{x} x^{2} t . dt \right) = \dots$$

3. Diketahui  $f(x) = \int_{0}^{x} \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} ds$ .

Tentukan **selang** di mana grafik y = f(x) (a) naik, (b) cekung ke atas.