

# **TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI**


# 1. Turunan Fungsi Sinus dan Cosinus

$$a. f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$b. f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$$

**Bukti:**

a. Misal  $f(x) = \sin x$  maka

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sinh - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( -\sin x \frac{1 - \cosh}{h} + \cos x \frac{\sinh}{h} \right) \\ &= (-\sin x) \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cosh}{h} \right) + (\cos x) \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\sinh}{h} \right) \\ &= (\cos x) \cdot 1 \end{aligned}$$


b. Misal  $f(x) = \cos x$  maka

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cosh - \sin x \sinh - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( -\cos x \frac{1 - \cosh}{h} - \sin x \frac{\sinh}{h} \right) \\ &= (-\cos x) \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cosh}{h} \right) - (\sin x) \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\sinh}{h} \right) \\ &= -\sin x \cdot 1 \end{aligned}$$



Untuk turunan fungsi trigonometri yang lain dapat diperoleh dengan menerapkan rumus perhitungan turunan, khususnya turunan bentuk  $u/v$

$$c. \frac{d(\tan x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{dx} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$d. \frac{d(\cot x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)}{dx} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$e. \frac{d(\sec x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{\cos x}\right)}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x$$

$$f. \frac{d(\csc x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{\sin x}\right)}{dx} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\sin x} = -\csc x \cot x$$

## Soal Latihan

Tentukan turunan ( $y'$ ) dari bentuk fungsi trigonometri berikut:

1.  $y = 4\sin x - 2\cos x$

2.  $y = \sin x \cos x - 2\sin x$



## 2. ATURAN RANTAI

- Andaikan  $y = f(u)$  dan  $u = g(x)$ . Jika  $\frac{dy}{du}$  dan  $\frac{du}{dx}$  ada , maka 
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

Contoh : Tentukan  $\frac{dy}{dx}$  dari  $y = \sin(x^2 + 1)$   
Jawab :

Jika  $y = f(u)$ ,  $u = g(v)$ ,  $v = h(x)$ , dan  $\frac{dy}{du}, \frac{du}{dv}, \frac{dv}{dx}$  Ada, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx}$$

Contoh : Tentukan  $\frac{dy}{dx}$  dari  $y = \sin^4(x^3 + 5)$

Jawab :

$$\text{Misal } v = x^3 + 5 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 3x^2$$

$$u = \sin v \rightarrow \frac{du}{dv} = \cos v = \cos(x^3 + 5)$$

$$y = u^4 \rightarrow \frac{dy}{du} = 4u^3 = 4\sin^3(x^3 + 5)$$

sehingga

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = 12x^2 \sin^3(x^3 + 5) \cos(x^3 + 5)$$



## Soal Latihan

Tentukan turunan ( $y'$ ) dari bentuk fungsi berikut:

1.  $y = (4x^2 - 5x + 3)^{10}$

2.  $y = \sin(x^2 + 3x)$

3.  $y = \sqrt{7x^2 - 4x}$

4.  $y = (5x^2 - 2)(2x + 3)^5$





### 3. TURUNAN TINGKAT TINGGI

- Turunan ke- $n$  didapatkan dari penurunan turunan ke- $(n-1)$ .

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} \left( f^{(n-1)}(x) \right)$$

- Turunan pertama  $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$

- Turunan kedua  $f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$

- Turunan ketiga  $f'''(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}$

- Turunan ke- $n$   $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$

- **Contoh** : Tentukan  $y''$  dari  $y = 4x^3 + \sin x$

- **Jawab** :  $y' = 12x^2 + \cos x$  maka  $y'' = 24x - \sin x$

## Soal Latihan

A. Tentukan turunan kedua dari

1.  $y = \sin(2x - 1)$

2.  $y = (2x - 3)^4$

B. Tentukan nilai  $c$  sehingga  $f''(c) = 0$  bila  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x - 6$

C. Tentukan nilai  $a$ ,  $b$  dan  $c$  dari  $g(x) = ax^2 + bx + c$  bila  $g(1) = 5$ ,  
 $g'(1) = 3$  dan  $g''(1) = -4$

## 4. TURUNAN FUNGSI IMPLISIT

- Jika hubungan antara  $y$  dan  $x$  dapat dituliskan dalam bentuk  $y = f(x)$  maka  $y$  disebut **fungsi eksplisit** dari  $x$ , yaitu antara peubah bebas dan tak bebasnya dituliskan dalam ruas yang berbeda. Bila tidak demikian maka dikatakan  $y$  **fungsi implisit dari  $x$** .

Contoh :

1.  $x^3 y^2 + x^2 + y = 10$

2.  $\sin(xy) + x^2 = y^2 + 1$

- Untuk menentukan turunan dari bentuk implisit digunakan aturan rantai dan anggap  $y$  fungsi dari  $x$ .



Tentukan  $dy/dx$  dari bentuk implisit berikut

1.  $x^3 y^2 + x^2 + y = 10$

2.  $\sin(xy) + x^2 = y^2 + 1$

**Jawab**

1.  $D_x(x^3 y^2 + x^2 + y) = D_x(10)$

$$D_x(x^3 y^2) + D_x(x^2) + D_x(y) = D_x(10)$$

$$(3x^2 y^2 + 2x^3 y y') + 2x + y' = 0$$

$$(2x^3 y + 1)y' = -2x - 3x^2 y^2$$

$$y' = \frac{-2x - 3x^2 y^2}{2x^3 y + 1}$$

2.  $D_x(\sin(xy) + x^2) = D_x(y^2 + 1)$

$$\cos(xy)(y + xy') + 2x = 2yy' + 0$$

$$(x \cos(xy) - 2y)y' = -2x - y \cos(xy)$$

$$y' = \frac{-2x - y \cos(xy)}{x \cos(xy) - 2y}$$

## Soal Latihan

Tentukan turunan pertama ( $y'$ ) dari bentuk implisit

1.  $x^3 - 3x^2y + y^2 = 0$

2.  $y + \sin(xy) = 1$

