



Pertemuan 9

KEMONOTONAN & KECEKUNGAN

- Menentukan selang kemonotonan (dan titik ekstrim),
- selang kecekungan dan titik belok

Kemonotonan

Fungsi f dikatakan **naik** pada selang I apabila untuk setiap $x, y \in I$ dengan $x < y$ berlaku

$$f(x) < f(y).$$

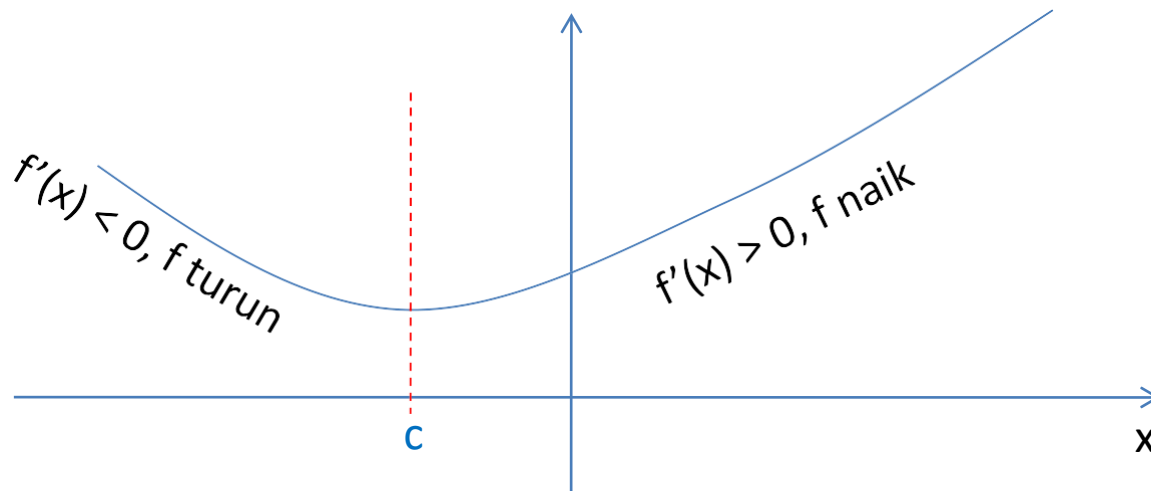
Fungsi f dikatakan **turun** pada selang I apabila untuk setiap $x, y \in I$ dengan $x < y$ berlaku

$$f(x) > f(y).$$

Fungsi naik atau turun pada selang I dikatakan **monoton** pada I .

Teorema Kemonotonan Fungsi

Misalkan f kontinu dan mempunyai turunan pada $I = (a,b)$. Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap $x \in I$, maka f naik pada I . Jika $f'(x) < 0$ untuk setiap $x \in I$, maka f turun pada I .



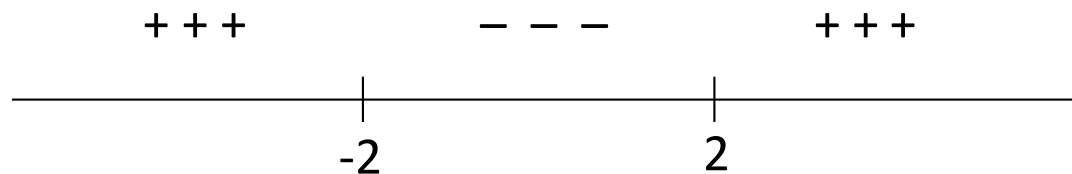
Catatan. Pada gambar di samping, titik c merupakan titik minimum.

Contoh 1

Diketahui $f(x) = x^3 - 12x$. Kita hitung turunannya:

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2).$$

Periksa tanda $f'(x)$ pada garis bilangan real:



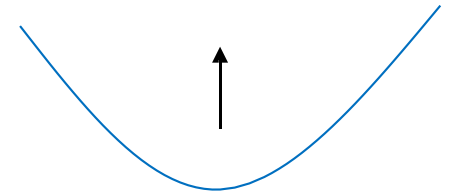
Menurut Teorema Kemonotonan, fungsi f naik pada $(-\infty, -2)$ dan juga pada $(2, \infty)$; dan f turun pada $(-2, 2)$.
[Ctt. $x = -2$ titik maks lokal, $x = 2$ titik min lokal \rightarrow §3.4.]

Kecekungan

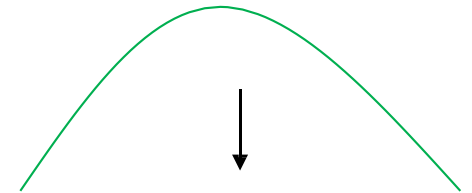
Misalkan f mempunyai turunan pada $I = (a,b)$.

Jika f' naik pada I , maka grafik fungsi f **cekung ke atas** pada I .

Jika f' turun pada I , maka grafik fungsi f **cekung ke bawah** pada I .



cekung ke atas

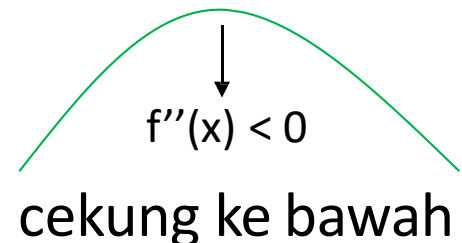
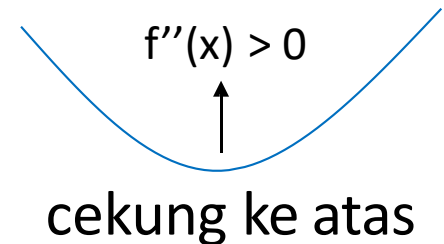


cekung ke bawah

Teorema Kecekungan Fungsi

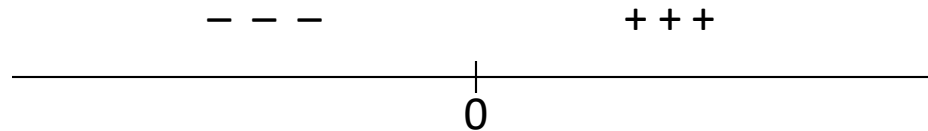
Misalkan f mempunyai turunan kedua pada I . Jika $f''(x) > 0$ untuk setiap $x \in I$, maka grafik fungsi f cekung ke atas pada I . Jika $f''(x) < 0$ untuk setiap $x \in I$, maka grafik fungsi f cekung ke bawah pada I .

Penjelasan. Jika $f''(x) > 0$, maka $f'(x)$ naik. Jadi f cekung ke atas. Jika $f''(x) < 0$, maka $f'(x)$ turun. Jadi f cekung ke bawah.



Contoh 2

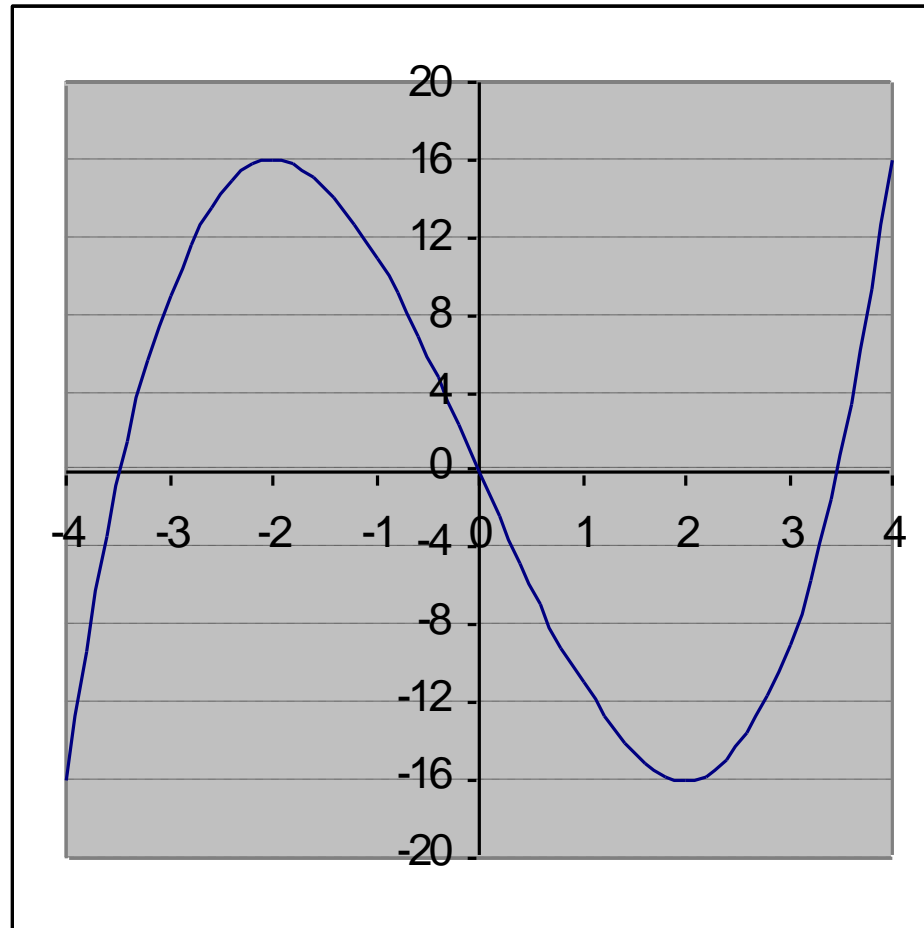
Diketahui $f(x) = x^3 - 12x$. Maka, $f'(x) = 3x^2 - 12$ dan $f''(x) = 6x$. Periksa tanda $f''(x)$:



Menurut Teorema Kecekungan, grafik fungsi f cekung ke atas pada $(0, \infty)$ dan cekung ke bawah pada $(-\infty, 0)$.

Catatan. Titik $x = 0$ merupakan **titik infleksi** (**titik belok**) grafik fungsi f . Di titik ini, grafik fungsi f mengalami perubahan kecekungan.

Grafik fungsi $f(x) = x^3 - 12x$.



Latihan

1. Tentukan pada selang mana grafik fungsi $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ naik atau turun. Tentukan pula pada selang mana ia cekung ke atas atau cekung ke bawah, serta titik belok-nya, bila ada.
2. Air dituangkan ke dalam tangki berbentuk kerucut terbalik dengan laju $8 \text{ dm}^3/\text{menit}$. Jika **tinggi** tangki tersebut adalah 24 dm dan **jari-jari** permukaan atasnya 12 dm , dan tinggi air (h) dipandang sebagai fungsi dari waktu (t), selidiki kemonotonan dan kecekungan grafik fungsi $h(t)$.

MA1101 MATEMATIKA 1A

3.3 MAKSIMUM DAN MINIMUM LOKAL

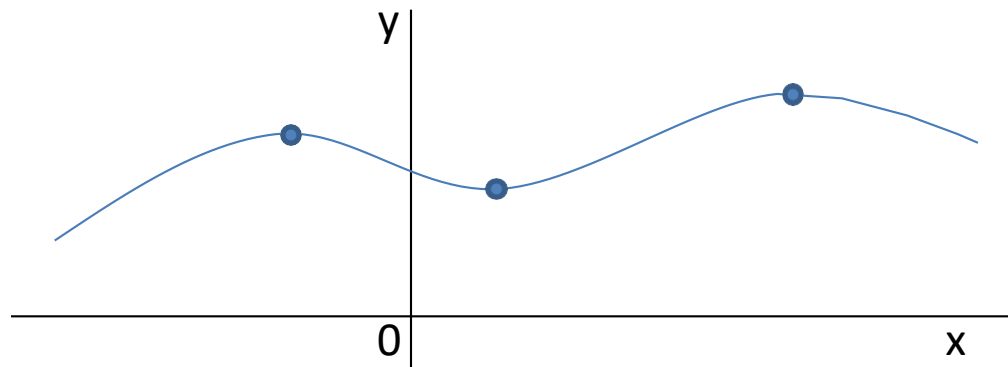
Menentukan **nilai maksimum dan minimum lokal** dari suatu fungsi yang diberikan.

Maksimum dan Minimum Lokal

Nilai $f(c)$ disebut **nilai maksimum lokal** f jika terdapat $\delta > 0$ sehingga $f(c) \geq f(x)$ pada $I \cap (c-\delta, c+\delta)$.

Nilai $f(c)$ disebut **nilai minimum lokal** f jika terdapat $\delta > 0$ sehingga $f(c) \leq f(x)$ pada $I \cap (c-\delta, c+\delta)$.

Nilai maksimum/minimum lokal disebut **nilai ekstrim lokal**.



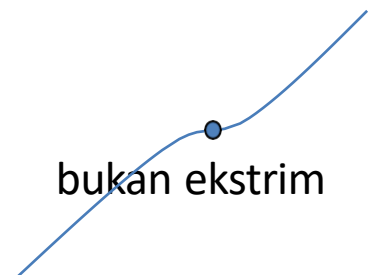
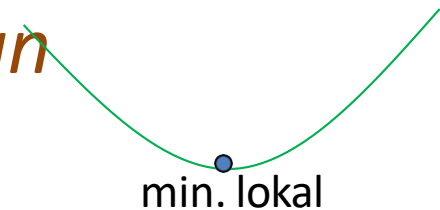
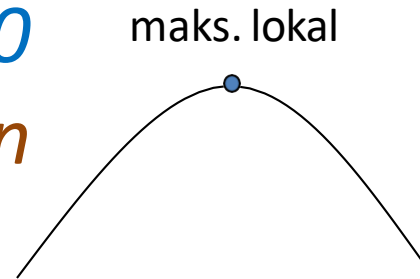
Teorema: Uji Turunan Pertama

Misalkan f kontinu di c .

Jika $f'(x) > 0$ di sekitar kiri c dan $f'(x) < 0$ di sekitar kanan c , maka $f(c)$ merupakan nilai maksimum lokal.

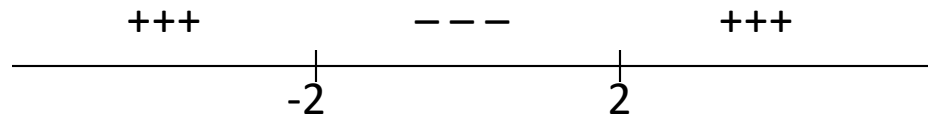
Jika $f'(x) < 0$ di sekitar kiri c dan $f'(x) > 0$ di sekitar kanan c , maka $f(c)$ merupakan nilai minimum lokal.

Jika $f'(x)$ bertanda sama di sekitar kiri dan kanan c , maka $f(c)$ bukan merupakan nilai ekstrim lokal.



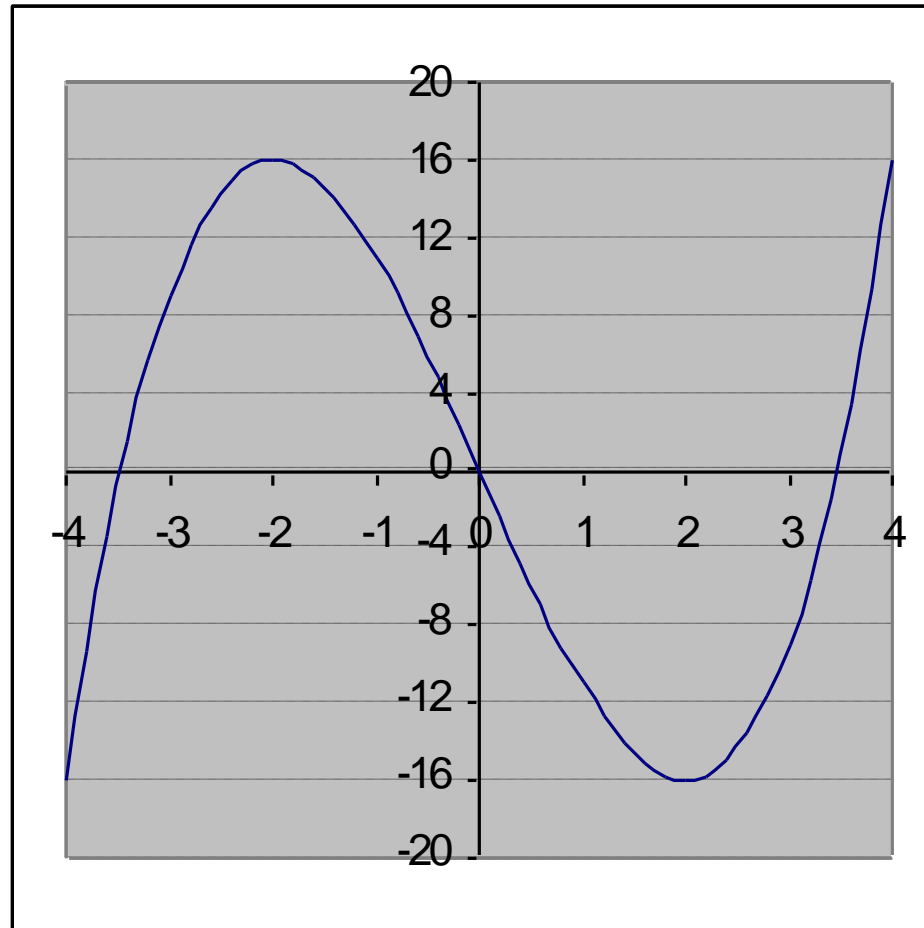
Contoh. Tentukan nilai maksimum dan minimum lokal $f(x) = x^3 - 12x$.

Jawab: $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2)$ mempunyai tanda sbb:



Menurut Uji Turunan Pertama, $f(-2)$ merupakan nilai maksimum lokal dan $f(2)$ merupakan nilai minimum lokal, sesuai dengan yang kita lihat pada grafiknya.

Grafik fungsi $f(x) = x^3 - 12x$.



Teorema: Uji Turunan Kedua

Misalkan $f'(c) = 0$ dan f mempunyai turunan kedua pada suatu selang yang memuat c .

Jika $f''(c) < 0$, maka $f(c)$ merupakan nilai maksimum lokal.

Jika $f''(c) > 0$, maka $f(c)$ merupakan nilai minimum lokal.

Catatan: Dalam hal $f''(c) = 0$, tidak ada kesimpulan apa-apa tentang $f(c)$. Titik $(c, f(c))$ juga **belum tentu** merupakan titik belok.

Contoh. Tentukan nilai maksimum dan minimum lokal $f(x) = x^3 - 12x$.

Jawab: $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$ di $x = -2$ dan di $x = 2$.

Dengan Uji Turunan Kedua, kita hitung

$f''(x) = 6x < 0$ di $x = -2$; jadi $f(-2)$ merupakan nilai maksimum lokal.

Sementara itu, $f''(x) = 6x > 0$ di $x = 2$; jadi $f(2)$ merupakan nilai minimum lokal.

Catatan: Hasil ini sesuai dengan hasil sebelumnya.

Latihan

Menggunakan Uji Turunan Pertama, tentukan nilai ekstrim lokal fungsi berikut:

1. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$.

2. $h(x) = x/2 - \sin x$, $0 < x < 2\pi$.

Menggunakan Uji Turunan Kedua, tentukan nilai ekstrim lokal fungsi berikut:

3. $g(x) = x + 1/x$, $x \neq 0$.

4. $F(x) = 64/(\sin x) + 27/(\cos x)$, $0 < x < \pi/2$.