FUNGSI

Matematika Diskrit

Fungsi

- Misalkan A dan B himpunan.
  Relasi biner f dari A ke B merupakan suatu fungsi jika *setiap* elemen di dalam A dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B.

  Jika f adalah fungsi dari A ke B kita menuliskan

  $$f : A \to B$$

  yang artinya f **memetakan** A ke B.

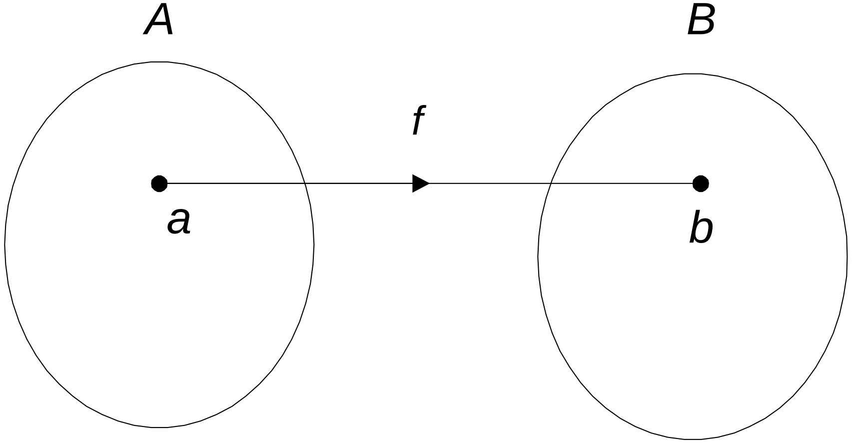
- A disebut **daerah asal** (*domain*) dari f dan B disebut **daerah hasil** (*codomain*) dari f.

- Nama lain untuk fungsi adalah **pemetaan** atau **transformasi**.

- Kita menuliskan $f(a) = b$ jika elemen a di dalam A dihubungkan dengan elemen b di dalam B.

- Jika $f(a) = b$, maka b dinamakan **bayangan** (*image*) dari a dan a dinamakan **pra-bayangan** (*pre-image*) dari b.

- Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan f disebut **jelajah** (*range*) dari f. Perhatikan bahwa jelajah dari f adalah himpunan bagian (mungkin *proper subset*) dari B.



- Fungsi adalah relasi yang khusus:
  1. Tiap elemen di dalam himpunan A harus digunakan oleh prosedur atau kaidah yang mendefinisikan f.

  2. Frasa "dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B" berarti bahwa jika $(a, b) \in f$ dan $(a, c) \in f$, maka $b = c$.

- Fungsi dapat dispesifikasikan dalam berbagai bentuk, diantaranya:
  1. Himpunan pasangan terurut.
     Seperti pada relasi.

  2. Formula pengisian nilai (*assignment*).
     Contoh: $f(x) = 2x + 10$, $f(x) = x^2$, dan $f(x) = 1/x$.

  3. Kata-kata
     Contoh: "*f* adalah fungsi yang memetakan jumlah bit 1 di dalam suatu *string* biner".

  4. Kode program (*source code*)
     Contoh: Fungsi menghitung $|x|$

```
function abs(x:integer):integer;
begin
   if x < 0 then
      abs:=-x
   else
      abs:=x;
end;
```

Contoh 26. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B. Di sini $f(1) = u$, $f(2) = v$, dan $f(3) = w$. Daerah asal dari f adalah A dan daerah hasil adalah B. Jelajah dari f adalah $\{u, v, w\}$, yang dalam hal ini sama dengan himpunan B.

Contoh 27. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B, meskipun u merupakan bayangan dari dua elemen A. Daerah asal fungsi adalah A, daerah hasilnya adalah B, dan jelajah fungsi adalah $\{u, v\}$.

Contoh 28. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi, karena tidak semua elemen A dipetakan ke B.

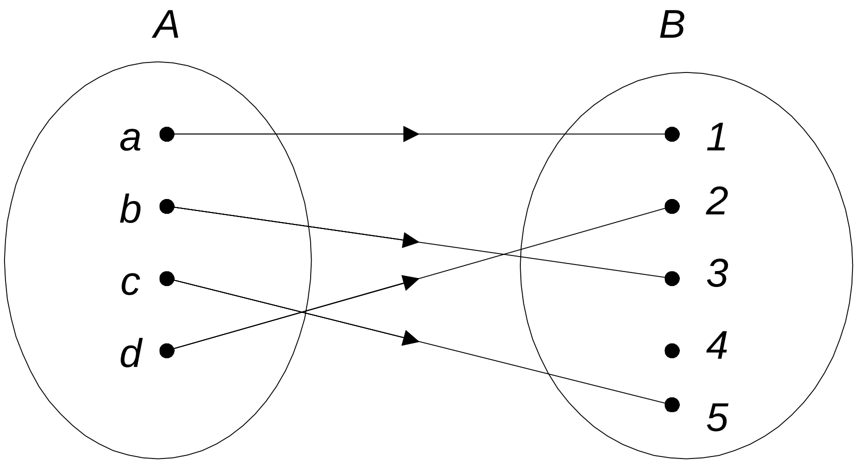
Contoh 29. Relasi

$$f = \{(1, u), (1, v), (2, v), (3, w)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi, karena 1 dipetakan ke dua buah elemen B, yaitu u dan v.

Contoh 30. Misalkan $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2$. Daerah asal dan daerah hasil dari f adalah himpunan bilangan bulat, dan jelajah dari f adalah himpunan bilangan bulat tidak-negatif.

- Fungsi *f* dikatakan **satu-ke-satu** (*one-to-one*) atau **injektif** (*injective*) jika tidak ada dua elemen himpunan *A* yang memiliki bayangan sama.



Contoh 31. Relasi

$$f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w, x\}$ adalah fungsi satu-ke-satu,

Tetapi relasi

$$f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi satu-ke-satu,
karena $f(1) = f(2) = u$.

Contoh 32. Misalkan $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi satu-ke-satu?

Penyelesaian:

(i) $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi satu-ke-satu, karena untuk dua x yang bernilai mutlak sama tetapi tandanya berbeda nilai fungsinya sama, misalnya $f(2) = f(-2) = 5$ padahal $-2 \neq 2$.

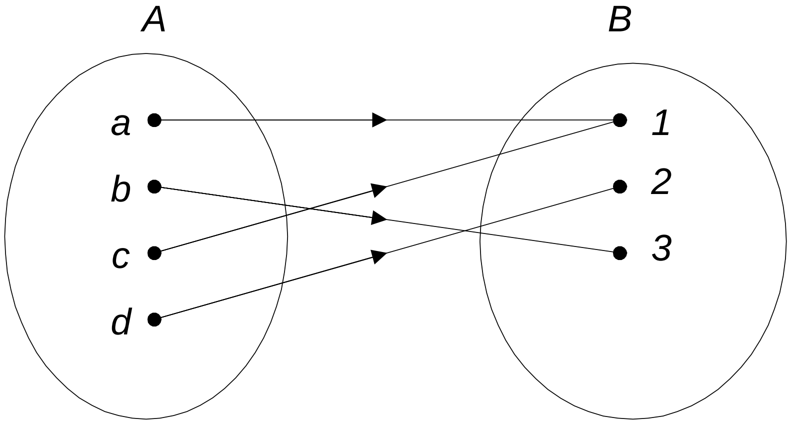
(ii) $f(x) = x - 1$ adalah fungsi satu-ke-satu karena untuk $a \neq b$,

$a - 1 \neq b - 1$.

Misalnya untuk $x = 2$, $f(2) = 1$ dan untuk $x = -2$, $f(-2) = -3$.

- Fungsi *f* dikatakan dipetakan **pada** (*onto*) atau **surjektif** (*surjective*) jika setiap elemen himpunan *B* merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan *A*.

- Dengan kata lain seluruh elemen *B* merupakan jelajah dari *f*. Fungsi *f* disebut fungsi pada himpunan *B*.



Contoh 33. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi pada karena w tidak termasuk jelajah dari f.

Relasi

$$f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ merupakan fungsi pada karena semua anggota B merupakan jelajah dari f.

Contoh 34. Misalkan $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi pada?

Penyelesaian:

(i) $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi pada, karena tidak semua nilai bilangan bulat merupakan jelajah dari f.

(ii) $f(x) = x - 1$ adalah fungsi pada karena untuk setiap bilangan bulat y, selalu ada nilai x yang memenuhi, yaitu $y = x - 1$ akan dipenuhi untuk $x = y + 1$.

- Fungsi f dikatakan **berkoresponden satu-ke-satu** atau **bijeksi** (*bijection*) jika ia fungsi satu-ke-satu dan juga fungsi pada.

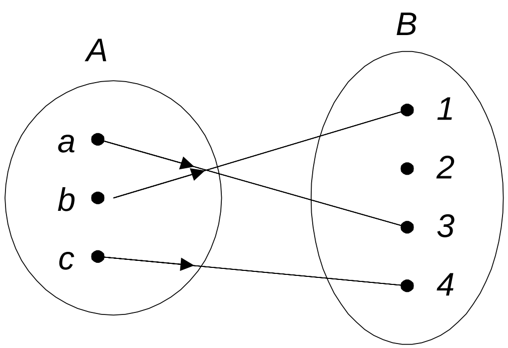
Contoh 35. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$$

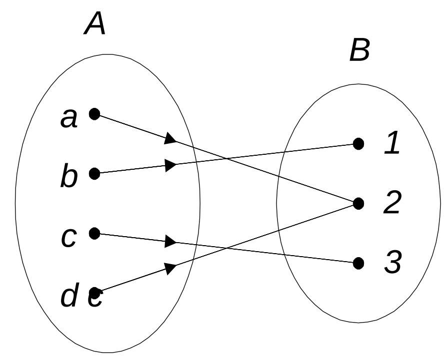
dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.

Contoh 36. Fungsi $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.

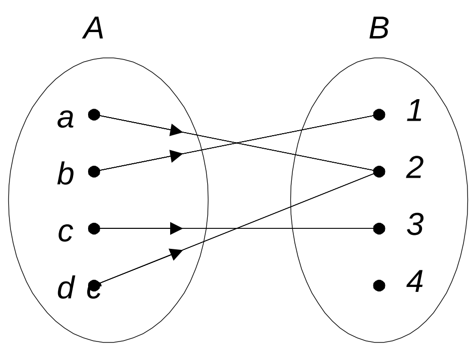
Fungsi satu-ke-satu,
bukan pada



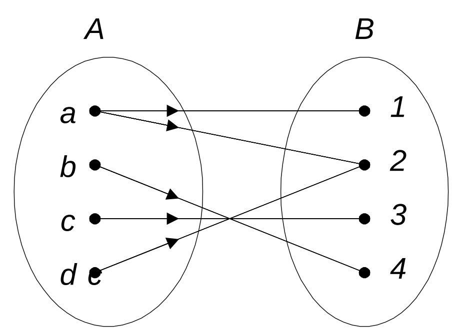
Fungsi pada,
bukan satu-ke-satu



Buka fungsi satu-ke-satu
maupun pada



Bukan fungsi



- Jika f adalah fungsi berkoresponden satu-ke-satu dari A ke B, maka kita dapat menemukan **balikan** (*invers*) dari f.

- Balikan fungsi dilambangkan dengan f^{-1}. Misalkan a adalah anggota himpunan A dan b adalah anggota himpunan B, maka $f^{-1}(b) = a$ jika $f(a) = b$.

- Fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu sering dinamakan juga fungsi yang *invertible* (dapat dibalikkan), karena kita dapat mendefinisikan fungsi balikannya. Sebuah fungsi dikatakan *not invertible* (tidak dapat dibalikkan) jika ia bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena fungsi balikannya tidak ada.

Contoh 37. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu. Balikan fungsi f adalah

$$f^{-1} = \{(u, 1), (w, 2), (v, 3)\}$$

Jadi, f adalah fungsi *invertible*.

Contoh 38. Tentukan balikan fungsi $f(x) = x - 1$.

Penyelesaian:
Fungsi $f(x) = x - 1$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, jadi balikan fungsi tersebut ada.
Misalkan $f(x) = y$, sehingga $y = x - 1$, maka $x = y + 1$. Jadi, balikan fungsi balikannya adalah $f^{-1}(y) = y + 1$.

Contoh 39. Tentukan balikan fungsi $f(x) = x^2 + 1$.

Penyelesaian:

Dari Contoh 3.41 dan 3.44 kita sudah menyimpulkan bahwa $f(x) = x - 1$ bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, sehingga fungsi balikannya tidak ada. Jadi, $f(x) = x^2 + 1$ adalah funsgi yang *not invertible*.

Komposisi dari dua buah fungsi.

Misalkan g adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B, dan f adalah fungsi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi f dan g, dinotasikan dengan $f \circ g$, adalah fungsi dari A ke C yang didefinisikan oleh

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

Contoh 40. Diberikan fungsi

$$g = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

yang memetakan $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$, dan fungsi

$$f = \{(u, y), (v, x), (w, z)\}$$

yang memetakan $B = \{u, v, w\}$ ke $C = \{x, y, z\}$. Fungsi komposisi dari A ke C adalah

$$f \circ g = \{(1, y), (2, y), (3, x) \}$$

Contoh 41. Diberikan fungsi $f(x) = x - 1$ dan $g(x) = x^2 + 1$. Tentukan $f \circ g$ dan $g \circ f$.

<u>Penyelesaian</u>:

(i) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = x^2 + 1 - 1 = x^2$.

(ii) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 1) = (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$.

Beberapa Fungsi Khusus

1. Fungsi *Floor* dan *Ceiling*

Misalkan *x* adalah bilangan riil, berarti *x* berada di antara dua bilangan bulat.

Fungsi *floor* dari x:

$\lfloor x \rfloor$ menyatakan nilai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan *x*

Fungsi *ceiling* dari *x*:

$\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan *x*

Dengan kata lain, fungsi *floor* membulatkan *x* ke bawah, sedangkan fungsi *ceiling* membulatkan *x* ke atas.

Contoh 42. Beberapa contoh nilai fungsi *floor* dan *ceiling*:

$$
\begin{array}{ll}
\lfloor 3.5 \rfloor = 3 & \lceil 3.5 \rceil = 4 \\
\lfloor 0.5 \rfloor = 0 & \lceil 0.5 \rceil = 1 \\
\lfloor 4.8 \rfloor = 4 & \lceil 4.8 \rceil = 5 \\
\lfloor -0.5 \rfloor = -1 & \lfloor -0.5 \rfloor = 0 \\
\lfloor -3.5 \rfloor = -4 & \lceil -3.5 \rceil = -3
\end{array}
$$

Contoh 42. Di dalam komputer, data dikodekan dalam untaian *byte*, satu *byte* terdiri atas 8 bit. Jika panjang data 125 bit, maka jumlah *byte* yang diperlukan untuk merepresentasikan data adalah $\lceil 125/8 \rceil = 16$ *byte*. Perhatikanlah bahwa $16 \times 8 = 128$ bit, sehingga untuk *byte* yang terakhir perlu ditambahkan 3 bit ekstra agar satu *byte* tetap 8 bit (bit ekstra yang ditambahkan untuk menggenapi 8 bit disebut *padding bits*).

2. Fungsi modulo

Misalkan a adalah sembarang bilangan bulat dan m adalah bilangan bulat positif.

a mod m memberikan sisa pembagian bilangan bulat bila a dibagi dengan m

a mod $m = r$ sedemikian sehingga $a = mq + r$, dengan $0 \leq r < m$.

Contoh 43. Beberapa contoh fungsi modulo

25 mod 7 = 4
15 mod 4 = 0
3612 mod 45 = 12
0 mod 5 = 5
–25 mod 7 = 3 (sebab –25 = 7 · (–4) + 3)

3. Fungsi Faktorial

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 1 \times 2 \times \cdots . \times (n-1) \times n & , n > 0 \end{cases}$$

4. Fungsi Eksponensial

$$a^n = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n} & , n > 0 \end{cases}$$

Untuk kasus perpangkatan negatif,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

5. Fungsi Logaritmik

Fungsi logaritmik berbentuk

$$y = {}^{a}\log x \quad \leftrightarrow \quad x = a^y$$

Fungsi Rekursif

- Fungsi f dikatakan fungsi rekursif jika definisi fungsinya mengacu pada dirinya sendiri.

Contoh: $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times (n - 1) \times n = (n - 1)! \times n$.

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ n \times (n-1)! & , n > 0 \end{cases}$$

Fungsi rekursif disusun oleh dua bagian:

(a) *Basis*

Bagian yang berisi nilai awal yang tidak mengacu pada dirinya sendiri. Bagian ini juga sekaligus menghentikan definisi rekursif.

(b) *Rekurens*

Bagian ini mendefinisikan argumen fungsi dalam terminologi dirinya sendiri. Setiap kali fungsi mengacu pada dirinya sendiri, argumen dari fungsi harus lebih dekat ke nilai awal (basis).

- Contoh definisi rekursif dari faktorial:

  (a) basis:

  $n! = 1 \quad , \text{jika } n = 0$

  (b) rekurens:

  $n! = n \times (n - 1)! \quad , \text{jika } n > 0$

5! dihitung dengan langkah berikut:

(1) $5! = 5 \times 4!$ (rekurens)

(2) $4! = 4 \times 3!$

(3) $3! = 3 \times 2!$

(4) $2! = 2 \times 1!$

(5) $1! = 1 \times 0!$

(6) $0! = 1$

(6’) $0! = 1$

(5’) $1! = 1 \times 0! = 1 \times 1 = 1$

(4’) $2! = 2 \times 1! = 2 \times 1 = 2$

(3’) $3! = 3 \times 2! = 3 \times 2 = 6$

(2’) $4! = 4 \times 3! = 4 \times 6 = 24$

(1’) $5! = 5 \times 4! = 5 \times 24 = 120$

Jadi, $5! = 120$.

Contoh 44. Di bawah ini adalah contoh-contoh fungsi rekursif lainnya:

1. $F(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ 2F(x-1) + x^2 & , x \neq 0 \end{cases}$

2. Fungsi Chebysev

$$T(n, x) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ x & , n = 1 \\ 2xT(n-1, x) - T(n-2, x) & , n > 1 \end{cases}$$

3. Fungsi fibonacci:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & , n = 0 \\ 1 & , n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2) & , n > 1 \end{cases}$$

Relasi Kesetaraan

DEFINISI. Relasi *R* pada himpunan *A* disebut **relasi kesetaraan** (*equivalence relation*) jika ia refleksif, setangkup dan menghantar.

- Secara intuitif, di dalam relasi kesetaraan, dua benda berhubungan jika keduanya memiliki beberapa sifat yang sama atau memenuhi beberapa persyaratan yang sama.

- Dua elemen yang dihubungkan dengan relasi kesetaraan dinamakan **setara** (*equivalent*).

- Contoh:

  A = himpunan mahasiswa, *R* relasi pada A:

  $(a, b) \in R$ jika *a* satu angkatan dengan *b*.

  R refleksif: setiap mahasiswa seangkatan dengan dirinya sendiri

  R setangkup: jika *a* seangkatan dengan *b*, maka *b* pasti seangkatan dengan *a*.

  R menghantar: jika *a* seangkatan dengan *b* dan *b* seangkatan dengan *c*, maka pastilah *a* seangkatan dengan *c*.

Dengan demikian, *R* adalah relasi kesetaraan.

Relasi Pengurutan Parsial

DEFINISI. Relasi R pada himpunan S dikatakan **relasi pengurutan parsial** (*partial ordering relation*) jika ia refleksif, tolak-setangkup, dan menghantar.

Himpunan S bersama-sama dengan relasi R disebut **himpunan terurut secara parsial** (*partially ordered set*, atau *poset*), dan dilambangkan dengan (S, R).

Contoh: Relasi $\geq$ pada himpunan bilangan bulat adalah relasi pengurutan parsial.

Alasan:

Relasi $\geq$ refleksif, karena $a \geq a$ untuk setiap bilangan bulat a;

Relasi $\geq$ tolak-setangkup, karena jika $a \geq b$ dan $b \geq a$, maka $a = b$;

Relasi $\geq$ menghantar, karena jika $a \geq b$ dan $b \geq c$ maka $a \geq c$.

Contoh: Relasi “habis membagi” pada himpunan bilangan bulat adalah relasi pengurutan parsial.

Alasan: relasi “habis membagi” bersifat refleksif, tolak-setangkup, dan menghantar.

- Secara intuitif, di dalam relasi pengurutan parsial, dua buah benda saling berhubungan jika salah satunya -- lebih kecil (lebih besar) daripada,

  - atau lebih rendah (lebih tinggi)

  daripada lainnya menurut sifat atau kriteria tertentu.

- Istilah pengurutan menyatakan bahwa benda-benda di dalam himpunan tersebut dirutkan berdasarkan sifat atau kriteria tersebut.

- Ada juga kemungkinan dua buah benda di dalam himpunan tidak berhubungan dalam suatu relasi pengurutan parsial. Dalam hal demikian, kita tidak dapat membandingkan keduanya sehingga tidak dapat diidentifikasi mana yang lebih besar atau lebih kecil.

- Itulah alasan digunakan istilah pengurutan parsial atau pengurutan tak-lengkap

Klosur Relasi (*closure of relation*)

- Contoh 1: Relasi R = {(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 2)} pada himpunan A = {1, 2, 3} tidak refleksif.

- Bagaimana membuat relasi refleksif yang sesedikit mungkin dan mengandung R?

- Tambahkan (2, 2) dan (3, 3) ke dalam *R* (karena dua elemen relasi ini yang belum terdapat di dalam *R*)

- Relasi baru, *S*, mengandung *R*, yaitu

S = {(1, 1), (1, 3), **(2, 2)**, (2, 3),
(3, 2), **(3, 3)** }

- Relasi *S* disebut **klosur refleksif** (*reflexive closure*) dari *R*.

- Contoh 2: Relasi R = {(1, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (3, 3)} pada himpunan A = {1, 2, 3} tidak setangkup.

- Bagaimana membuat relasi setangkup yang sesedikit mungkin dan mengandung R?

- Tambahkan (3, 1) dan (2, 3) ke dalam *R*

  (karena dua elemen relasi ini yang belum terdapat di dalam *S* agar *S* menjadi setangkup).

- Relasi baru, *S*, mengandung *R*:

  $S = \{(1, 3), (3, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

- Relasi *S* disebut **klosur setangkup** (*symmetric closure*) dari *R*.

- Misalkan *R* adalah relasi pada himpunan *A*. *R* dapat memiliki atau tidak memiliki sifat **P**, seperti refleksif, setangkup, atau menghantar. Jika terdapat relasi *S* dengan sifat **P** yang mengandung *R* sedemikian sehingga *S* adalah himpunan bagian dari setiap relasi dengan sifat *P* yang mengandung *R*, maka *S* disebut **klosur** (*closure*) atau tutupan dari *R* [ROS03].

Klosur Refleksif

- Misalkan R adalah sebuah relasi pada himpunan A.

- Klosur refleksif dari R adalah $R \cup \Delta$, yang dalam hal ini $\Delta = \{(a, a) \mid a \in A\}$.

- Contoh: R = {(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 2)} adalah relasi pada A = {1, 2, 3}

  maka Δ = {(1, 1), (2, 2), (3, 3)},

  sehingga klosur refleksif dari R adalah

$$R \cup \Delta = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 2)\} \cup \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$
$$= \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

- **Contoh:** Misalkan R adalah relasi

  $$\{(a, b) \mid a \neq b\}$$

  pada himpunan bilangan bulat.

  Klosur refleksif dari R adalah

$$R \cup \Delta = \{(a, b) \mid a \neq b\} \cup \{(a, a) \mid a \in \mathbf{Z}\}$$

$$= \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$$

Klosur setangkup

- Misalkan R adalah sebuah relasi pada himpunan A.

- Klosur setangkup dari R adalah $R \cup R^{-1}$, dengan $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b)\ a \in R\}$.

- Contoh: R = {(1, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (3, 3)} adalah relasi pada A = {1, 2, 3},

maka

R^{-1} = {(3, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3)}

sehingga klosur setangkup dari R adalah

$R \cup R^{-1}$ = {(1, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (3, 3)} $\cup$

{(3, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3)}

= {(1, 3), (3, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 3), (3, 3)}

- Contoh: Misalkan R adalah relasi

  {(a, b) | a habis membagi b}

  pada himpunan bilangan bulat.

  Klosur setangkup dari R adalah

$R \cup R^{-1}$ = {(a, b) | a habis membagi b} $\cup$ {(b, a) | b habis membagi a}

= {(a, b) | a habis membagi b atau b habis membagi a}

Klosur menghantar

- Pembentukan klosur menghantar lebih sulit daripada dua buah klosur sebelumnya.

- Contoh: R = {(1, 2), (1, 4), (2, 1), (3, 2)} adalah relasi A = {1, 2, 3, 4}.

  R tidak transitif karena tidak mengandung semua pasangan (a, c) sedemikian sehingga (a, b) dan (b, c) di dalam R.

  Pasangan (a, c) yang tidak terdapat di dalam R adalah (1, 1), (2, 2), (2, 4), dan (3, 1).

- Penambahan semua pasangan ini ke dalam R sehingga menjadi

$S = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (1, 1),$
$(2, 2), (2, 4), (3, 1)\}$

tidak menghasilkan relasi yang bersifat menghantar karena, misalnya terdapat $(3, 1) \in S$ dan $(1, 4) \in S$, tetapi $(3, 4) \notin S$.

- Kosur menghantar dari R adalah

$R^* = R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n$

- Jika M_R adalah matriks yang merepresentasikan R pada sebuah himpunan dengan n elemen, maka matriks klosur menghantar R^* adalah

$$M_{R^*} = M_R \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]} \vee \ldots \vee M_R^{[n]}$$

Misalkan R = {(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 2)} adalah relasi pada himpunan A = {1, 2, 3}. Tentukan klosur menghantar dari R.

<u>Penyelesaian:</u>
Matriks yang merepresentasikan relasi R adalah

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka, matriks klosur menghantar dari R adalah

$$M_{R^*} = M_R \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]}$$

Karena

$$M_R^{[2]} = M_R \cdot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad M_R^{[3]} = M_R^{[2]} \cdot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

maka

$$M_{R^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

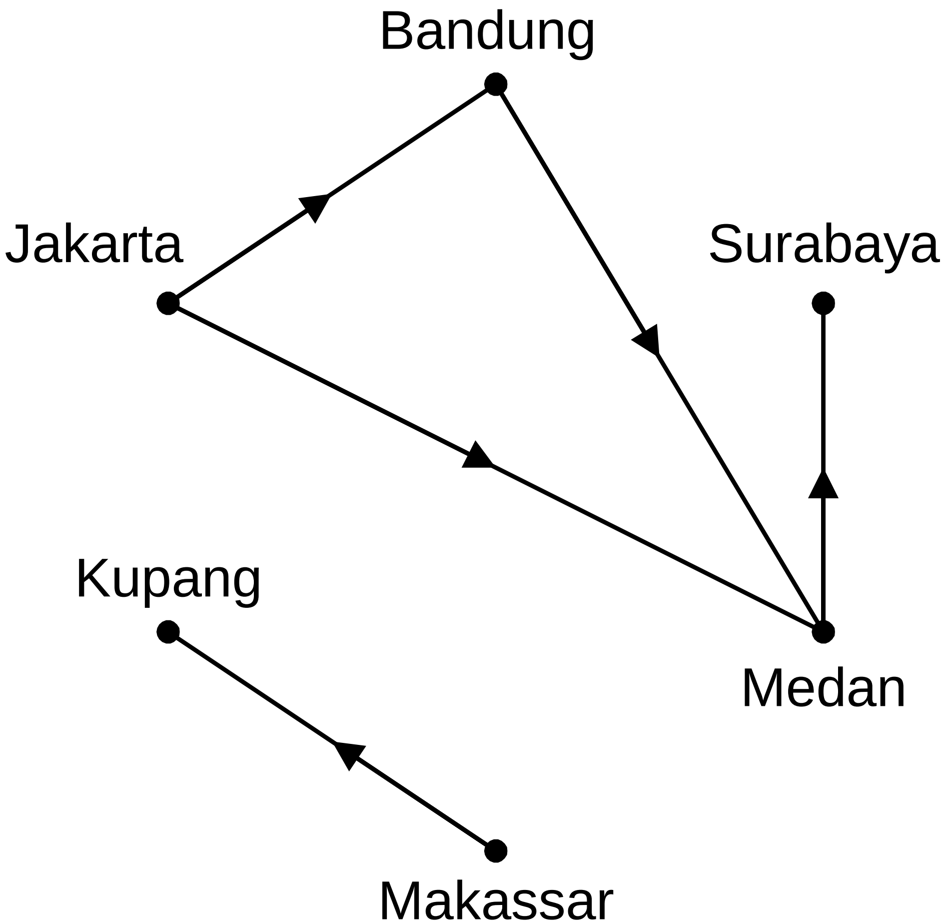
Dengan demikian, R^* = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3) }

Aplikasi klosur menghantar

- Klosur menghantar menggambarkan bagaimana pesan dapat dikirim dari satu kota ke kota lain baik melalui hubungan komunikasi langsung atau melalui kota antara sebanyak mungkin [LIU85].

- Misalkan jaringan komputer mempunyai pusat data di Jakarta, Bandung, Surabaya, Medan, Makassar, dan Kupang.

- Misalkan R adalah relasi yang mengandung (a, b) jika terdapat saluran telepon dari kota a ke kota b.


Bandung
Jakarta
Surabaya
Kupang
Medan
Makassar

- Karena tidak semua *link* langsung dari satu kota ke kota lain, maka pengiriman data dari Jakarta ke Surabaya tidak dapat dilakukan secara langsung.

- Relasi *R* tidak menghantar karena ia tidak mengandung semua pasangan pusat data yang dapat dihubungkan (baik *link* langsung atau tidak langsung).

- Klosur menghantar adalah relasi yang paling minimal yang berisi semua pasangan pusat data yang mempunyai link langsung atau tidak langsung dan mengandung *R*.