



PROGRAM STUDI TEKNIK INFORMATIKA  
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG

# Pengantar Matematika Diskrit

**Bahan Kuliah IF2120 Matematika Diskrit**

**RINALDI MUNIR**

Lab Ilmu dan Rekayasa Komputasi  
Kelompok Keahlian Informatika

Institut Teknologi Bandung



# Kampus ITB yang indah...



Foto oleh Eko Purwono (AR ITB)

# Inilah STEI-ITB...





LabTek V, di sini Informatika ITB berada



Salah satu mata kuliahnya....

## IF2120 Matematika Diskrit



Sumber gambar: [http://www.zazzle.com/i\\_can\\_be\\_functionally\\_discrete\\_or\\_continuous\\_tshirt-235341012435015470](http://www.zazzle.com/i_can_be_functionally_discrete_or_continuous_tshirt-235341012435015470)

***Rasa ingin tahu adalah ibu dari semua ilmu  
pengetahuan***

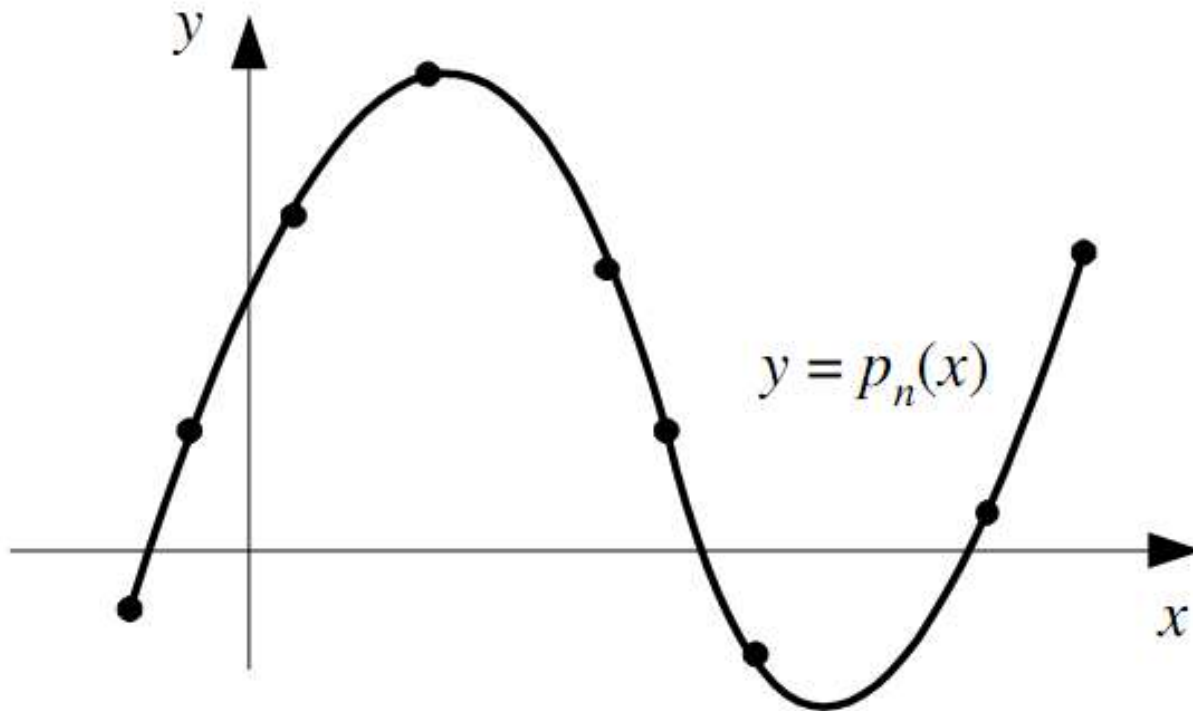
***Tak kenal maka tak sayang, tak sayang  
maka tak cinta***

***Perjalanan satu mil dimulai dari satu langkah***

# Apakah Matematika Diskrit itu?

- Apa yang dimaksud dengan kata **diskrit** (*discrete*)?
- Objek disebut diskrit jika:
  - terdiri dari elemen yang berbeda (*distinct*) dan terpisah secara individual, atau
  - elemen-elemennya tidak bersambungan (*unconnected*).Contoh: himpunan bilangan bulat (*integer*)
- Lawan kata diskrit: **kontinyu** atau **menerus** (*continuous*).  
Contoh: himpunan bilangan riil (*real*)

## Diskrit versus kontinu



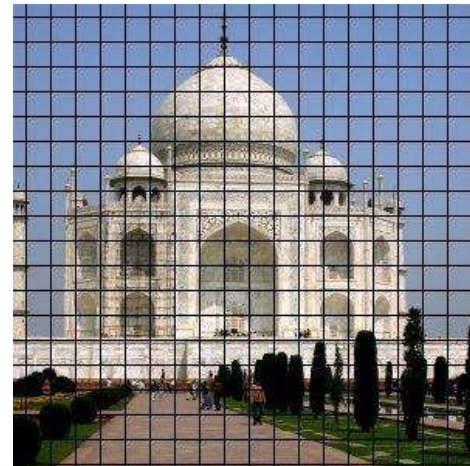
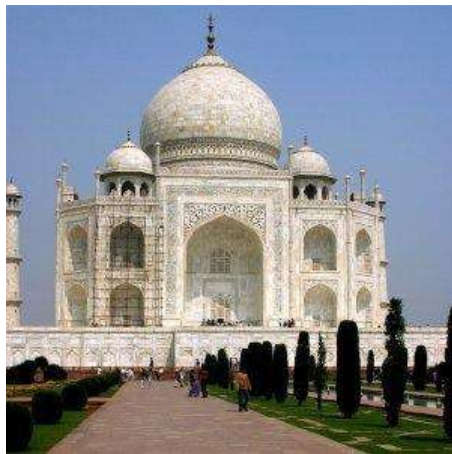
Kurva mulus: himpunan menerus

Titik-titik tebal di kurva: himpunan diskrit



- **Matematika Diskrit**: cabang matematika yang mengkaji objek-objek yang nilainya berbeda (*distinct*) dan terpisah (*separate*) satu sama lain.
- Lawannya: **Matematika Menerus** (*continuous mathematics*), yaitu cabang matematika dengan objek yang sangat mulus (*smoothy*), termasuk di dalamnya *calculus*.

- Komputer digital bekerja secara diskrit. Informasi yang disimpan dan dimanipulasi oleh komputer adalah dalam bentuk diskrit.
- Kamera digital menangkap gambar (analog) lalu direpresentasikan dalam bentuk diskrit berupa kumpulan *pixel* atau *grid*. Setiap *pixel* adalah elemen diskrit dari sebuah gambar



## Topik bahasan di dalam Matematika Diskrit:

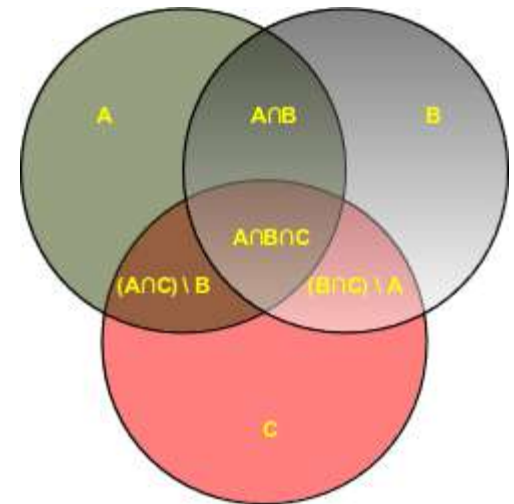
- Logika (*logic*) dan penalaran ✓ → Pengantar
- Teori Himpunan (*set*) ✓
- Relasi dan Fungsi (*relation and function*) ✓
- Induksi Matematik (*mathematical induction*) ✓
- Algoritma (*algorithms*) ✓ → sebagian
- Teori Bilangan Bulat (*integers*) ✓
- Barisan dan Deret (*sequences and series*) → kuliah Kalkulus
- Teori Grup dan *Ring* (*group and ring*) → advance
- Aljabar Boolean (*Boolean algebra*) → ke kuliah Arskom
- Kombinatorial (*combinatorics*) ✓
- Teori Peluang Diskrit (*discrete probability*) → ke kuliah Probstat
- Fungsi Pembangkit dan Analisis Rekurens → ke kuliah Modsim
- Teori Graf (*graph – included tree*) ✓
- Kompleksitas Algoritma (*algorithm complexity*) ✓
- Otomata & Teori Bahasa Formal → ke kuliah TBO
- Relasi Rekurens ✓ → Baru!

# 1. Logika

Basic statement	Equivalent
$p \vee q$	$q \vee p$
$p \wedge q$	$q \wedge p$
$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
	$\neg q \rightarrow \neg p$
$p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
	$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$
$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r$
$p \vee (q \vee r)$	$(p \vee q) \vee r$
$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$p \rightarrow (q \vee r)$	$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$

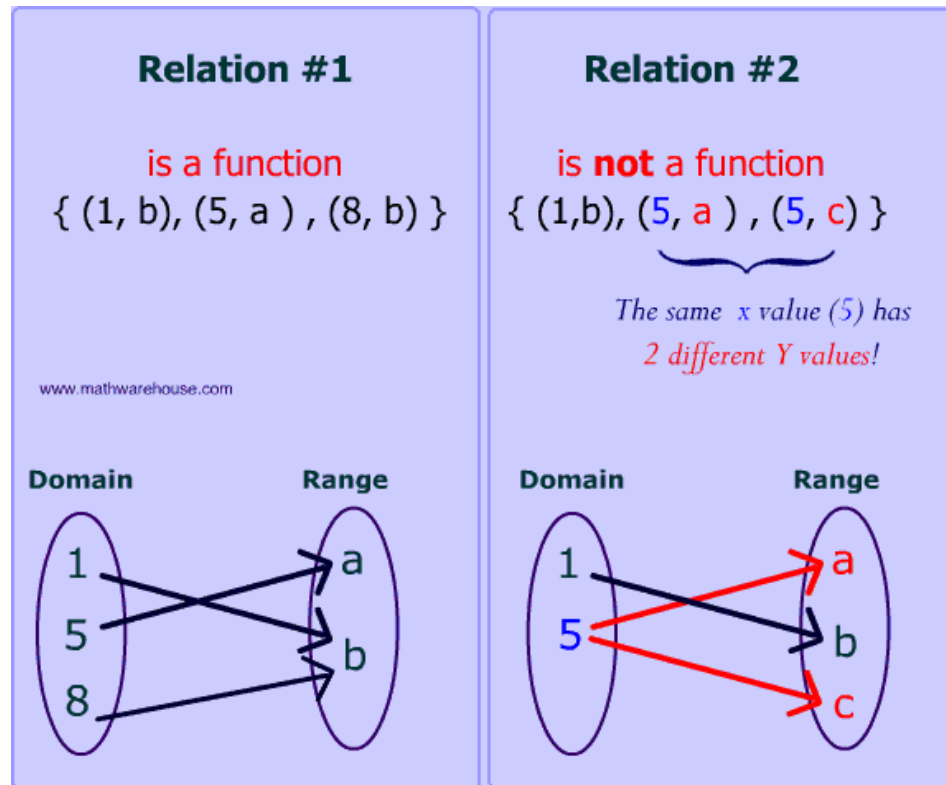
## 2. Teori Himpunan

- 1). if  $A \subset B$  and  $B \subset C$ , then  $A \subset C$  (transitivity),
- 2). if  $A \subset B$  and  $B \subset A$ , then  $A = B$ ,
- 3).  $A \cup A = A$ ,
- 4).  $A \cup \emptyset = A$ ,
- 5).  $A \cap A = A$ ,
- 6).  $A \cap \emptyset = \emptyset$ ,
- 7).  $A - A = \emptyset$ ,
- 8).  $A \cup B = B \cup A$  (commutability of addition),
- 9).  $A \cap B = B \cap A$  (commutability of multiplication),
- 10).  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$  (associativity of addition),
- 11).  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$  (associativity of multiplication),
- 12).  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  (distributivity of multiplication over addition),
- 13).  $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$  (distributivity of multiplication over subtraction),
- 14).  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  (distributivity of addition over multiplication).



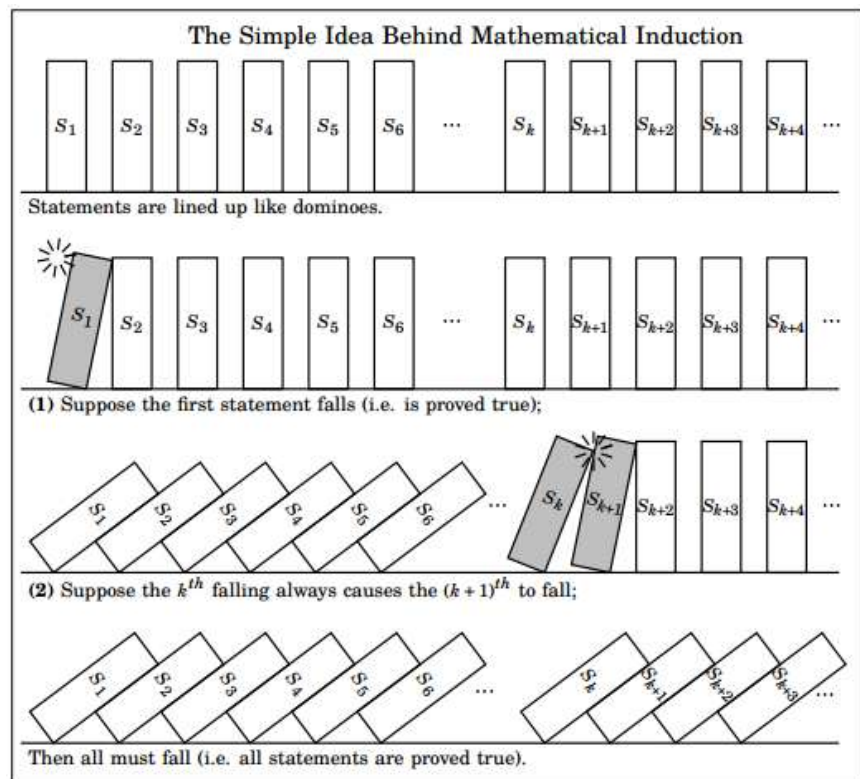


### 3. Relasi dan Fungsi



Sumber: [www.mathwarehouse.com](http://www.mathwarehouse.com)

# 4. Induksi Matematik



prove by mathematical induction

$$1.2.3 + 2.3.4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$\text{let } P(n): 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$\text{for } n=1, \text{ L.H.S} = 1.2.3 = 6, \text{ R.H.S} = \frac{1.(1+1).(1+2).(1+3)}{4} = 6$$

$\therefore P(1)$  is true.

Assume  $P(k)$  is true

Sumber gambar: [math.stackexchange.com](http://math.stackexchange.com)

## 5. Teori Bilangan

$$\begin{cases} N \equiv 4 \pmod{7} \\ N \equiv 6 \pmod{11} \end{cases}$$

$$N = 7k + 4$$

$$7k + 4 \equiv 6 \pmod{11}$$

$$7k \equiv 2 \pmod{11}$$

$$-21k \equiv -6 \pmod{11}$$

$$k \equiv -6 \pmod{11}$$

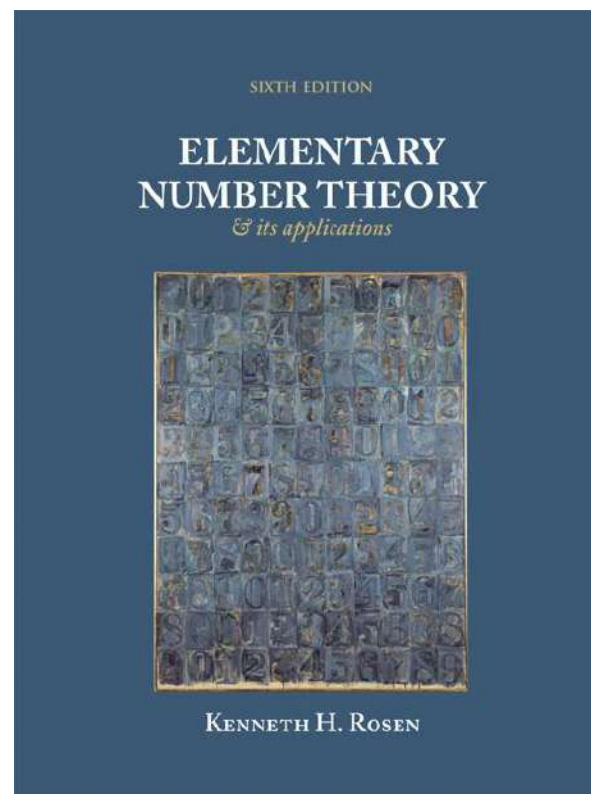
$$k = 11m - 6$$

$$N = 77m - 38$$

$$1000 < 77m - 38 < 2000 \Rightarrow 13 < m < 27$$

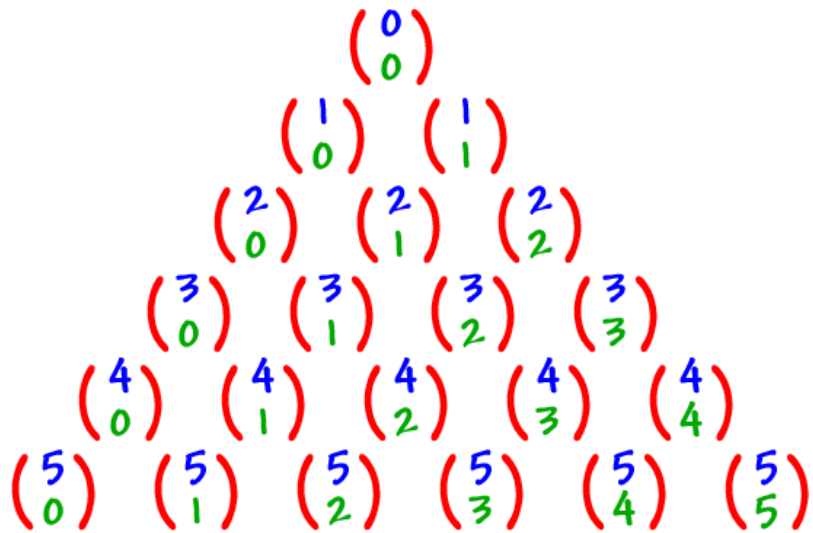
$$77m - 38 \equiv -m + 1 \equiv 27 - m \pmod{13}$$

Sumber: [mymathforum.com](http://mymathforum.com)



Sumber: [www.pearsonhighered.com](http://www.pearsonhighered.com)

## 6. Kombinatorial

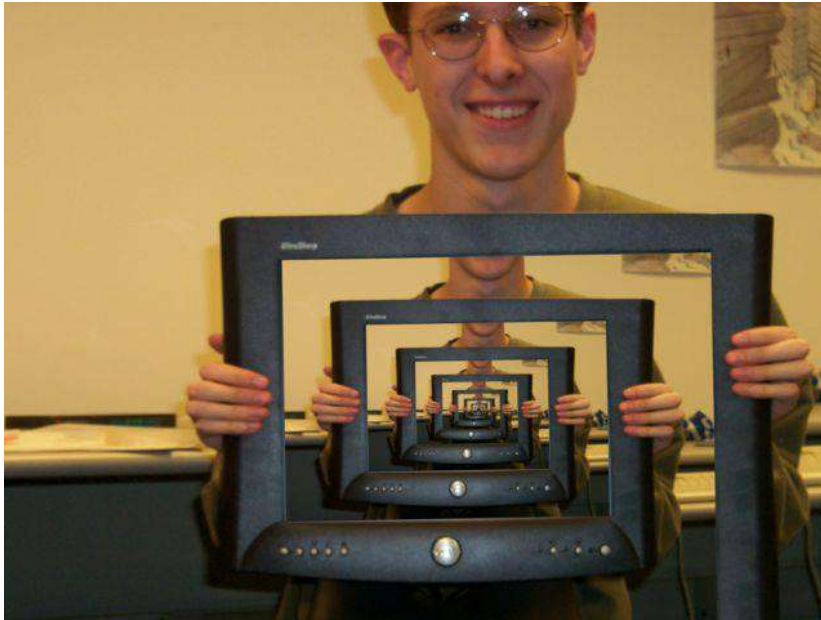


Sumber: [www.coolmath.com](http://www.coolmath.com)



Sumber: [ronsden.com](http://ronsden.com)

## 7. Rekursif dan relasi rekurens



Sumber: [www.ilxor.com](http://www.ilxor.com)

$$\begin{aligned}g(n) &= 4g(n-1)+4 \\&= 4(4g(n-2)+4)+4 \\&= 4^2g(n-2)+4^2+4 \\&= 4^2(4g(n-3)+4)+4^2+4 \\&= 4^3g(n-3)+4^3+4^2+4 \\&= \vdots \\&= 4^n g(0)+4^n+4^{n-1}+\dots+4^3+4^2+4 \\&= 4^n+4^{n-1}+\dots+4^3+4^2+4 \\&= 4\left(\frac{4^n-1}{3}\right) \\&= \frac{4^{n+1}-4}{3}\end{aligned}$$

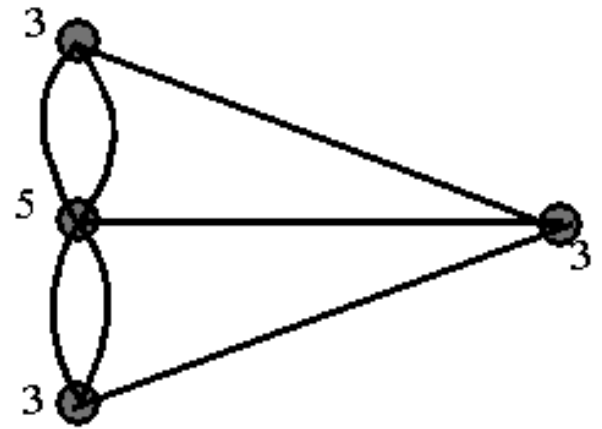
Sumber: [cas.bethel.edu](http://cas.bethel.edu)



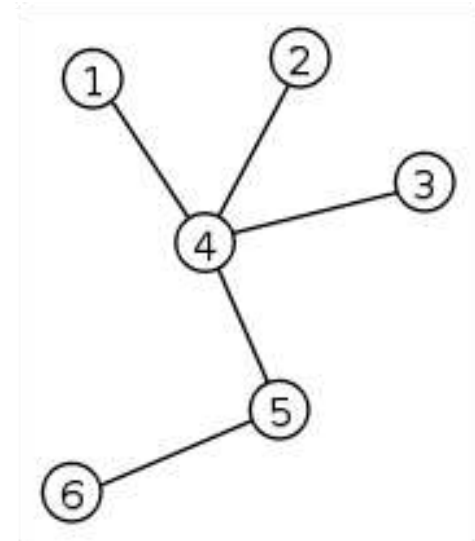
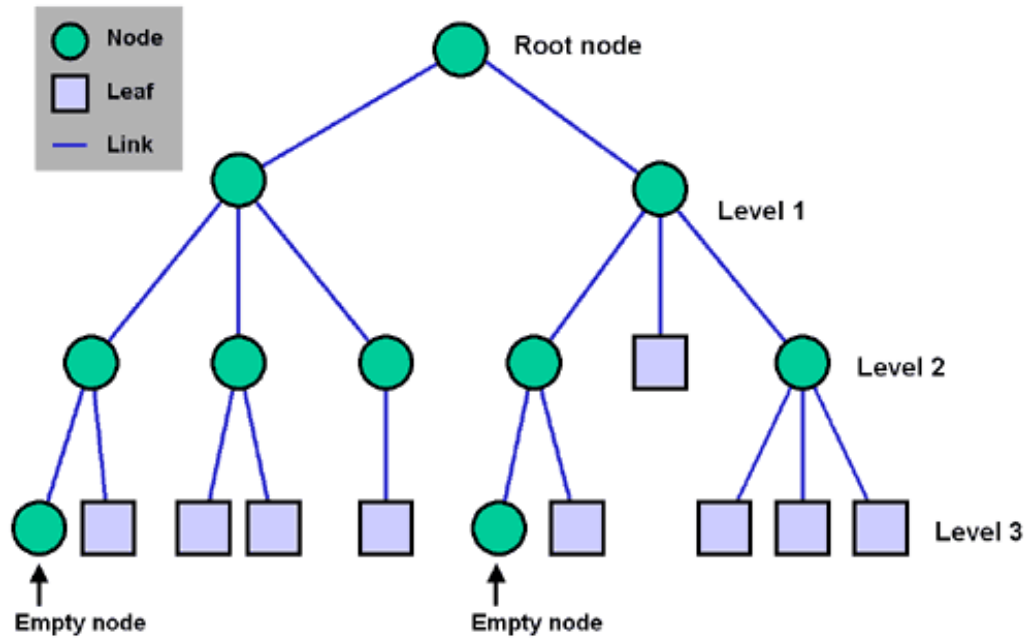
## 8. Teori Graf



Sumber: [simonkneebone.com](http://simonkneebone.com)

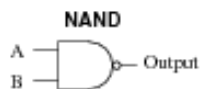


# 9. Pohon

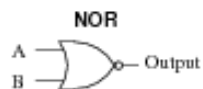


Sumber: [ubuntuforums.org](http://ubuntuforums.org)

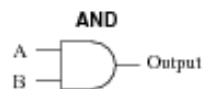
# 10. Aljabar Boolean



A	B	Output
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



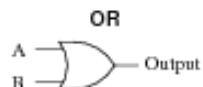
A	B	Output
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



A	B	Output
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



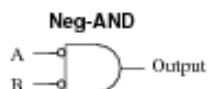
A	B	Output
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



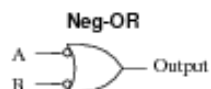
A	B	Output
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



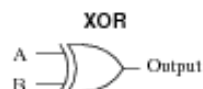
A	Output
0	1
1	0



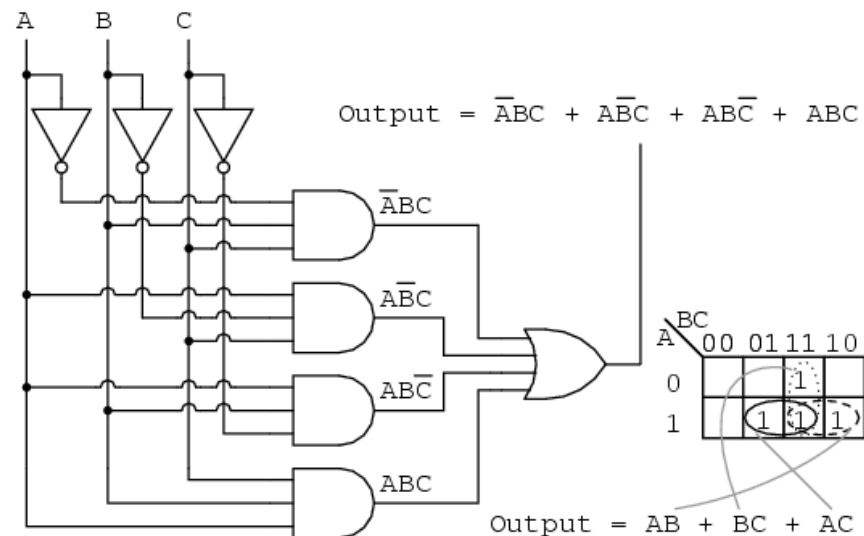
A	B	Output
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



A	B	Output
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



A	B	Output
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

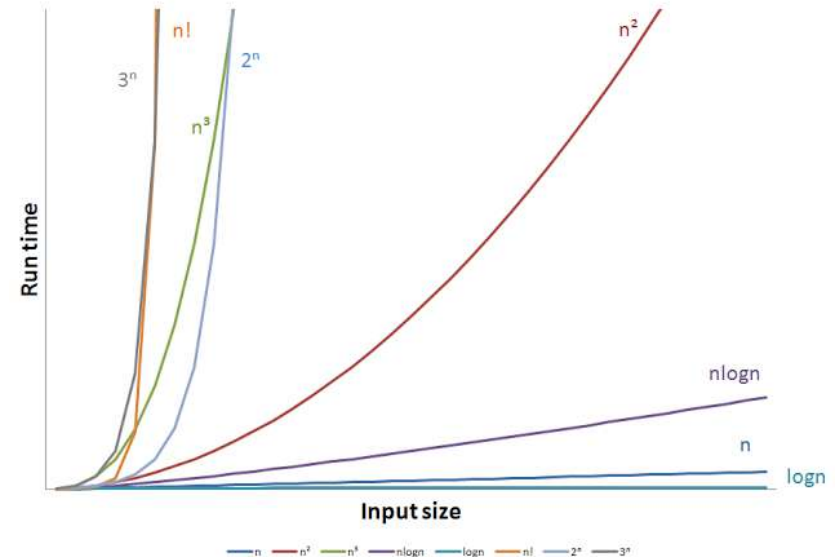


Sumber: [www.ibibilio.org](http://www.ibibilio.org)

Sumber: [www.allaboutcircuits.com](http://www.allaboutcircuits.com)

# 11. Kompleksitas Algoritma

$T(n)$	Name	Problems
$O(1)$	constant	easy-solved
$O(\log n)$	logarithmic	
$O(n)$	linear	
$O(n \log n)$	linear-logarithmic	
$O(n^2)$	quadratic	
$O(n^3)$	cubic	hard-solved
$O(2^n)$	exponential	
$O(n!)$	factorial	



Sumber: [agafonovslava.com](http://agafonovslava.com)

Sumber: [blog.philenotfound.com](http://blog.philenotfound.com)

Contoh-contoh persoalan di dalam Matematika Diskrit:

- Berapa banyak kemungkinan jumlah *password* yang dapat dibuat dari 8 karakter?
- Bagaimana nomor ISBN sebuah buku divalidasi?
- Berapa banyak *string* biner yang panjangnya 8 bit yang mempunyai bit 1 sejumlah ganjil?
- Bagaimana menentukan lintasan terpendek dari satu kota  $a$  ke kota  $b$ ?
- Buktikan bahwa perangko senilai  $n$  ( $n \geq 8$ ) rupiah dapat menggunakan hanya perangko 3 rupiah dan 5 rupiah saja
- Diberikan dua buah algoritma untuk menyelesaikan sebuah persoalan, algoritma mana yang terbaik?



- Bagaimana rangkaian logika untuk membuat peraga digital yang disusun oleh 7 buah batang (*bar*)?
- Dapatkah kita melalui semua jalan di sebuah kompleks perumahan tepat hanya sekali dan kembali lagi ke tempat semula?
- “Makanan murah tidak enak”, “makanan enak tidak murah”. Apakah kedua pernyataan tersebut menyatakan hal yang sama?

# Mengapa Mempelajari Matematika Diskrit?

Ada beberapa alasan:

1. Mengajarkan mahasiswa untuk berpikir secara matematis
  - mengerti argumen matematika
  - mampu membuat argumen matematika.

Contoh: Jumlah derajat semua simpul pada suatu graf adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graf tersebut. Akibatnya, untuk sembarang graf  $G$ , banyaknya simpul berderajat ganjil selalu genap.

## 2. Mempelajari fakta-fakta matematika dan cara menerapkannya.

Contoh: (*Chinese Remainder Problem*) Pada abad pertama, seorang matematikawan China yang bernama Sun Tse mengajukan pertanyaan sebagai berikut:

*Tentukan sebuah bilangan bulat yang bila dibagi dengan 5 menyisakan 3, bila dibagi 7 menyisakan 5, dan bila dibagi 11 menyisakan 7.*

3. Matematika diskrit memberikan landasan matematis untuk kuliah-kuliah lain di informatika.

→ algoritma, struktur data, basis data, otomata dan teori bahasa formal, jaringan komputer, keamanan komputer, sistem operasi, teknik kompilasi, dsb.

- Matematika diskrit adalah matematika yang khas informatika

→ **Matematika-nya orang Informatika!**

# Lima pokok kuliah di dalam Matematika Diskrit

1. Penalaran matematika (*Mathematical reasoning*)  
Mampu membaca dan membentuk argumen matematika  
(Materi: logika)
2. Analisis kombinatorial (*Combinatorial analysis*)  
Mampu menghitung atau mengenumerasi objek-objek  
(materi: kombinatorial → permutasi, kombinasi, dll)
3. Struktur diskrit  
Mampu bekerja dengan struktur diskrit. Yang termasuk struktur diskrit: Himpunan, Relasi, Permutasi dan kombinasi, Graf, Pohon, *Finite-state machine*



#### 4. Berpikir algoritmik

Mampu memecahkan persoalan dengan menspesifikasikan algoritmanya

(Materi: pada sebagian besar kuliah ini dan kuliah Algoritma dan Struktur Data)

#### 5. Aplikasi dan pemodelan

Mampu mengaplikasikan matematika diskrit pada hampir setiap area bidang studi, dan mampu memodelkan persoalan dalam rangka *problem-solving skill*.

(Materi: pada sebagian besar kuliah ini)

# Kemana lanjutan kuliah ini?

- Matematika Diskrit memberikan dasar untuk banyak mata kuliah mata kuliah:
  1. IF2122 Probabilitas dan Statistik  
Materi: Kombinatorial
  2. IF2130 Organisasi dan Arsitektur Komputer  
Materi: Aljabar Boolean
  3. IF2220 Teori Bahasa dan Otomata  
Materi: Himpunan, Graf
  4. IF2240 Basisdata  
Materi: Relasi dan Fungsi

5. IF2211 Strategi Algoritma

Materi: Graf, pohon, kombinatorial, kompleksitas algoritma

6. IF3130 Jaringan Komputer

Materi: Graf, pohon

7. IF2110 Algoritma dan Struktur Data

Materi: Graf, pohon, kompleksitas algoritma

8. IF4020 Kriptografi

Materi: Teori Bilangan, Kombinatorial

9. Dan masih banyak kuliah lainnya

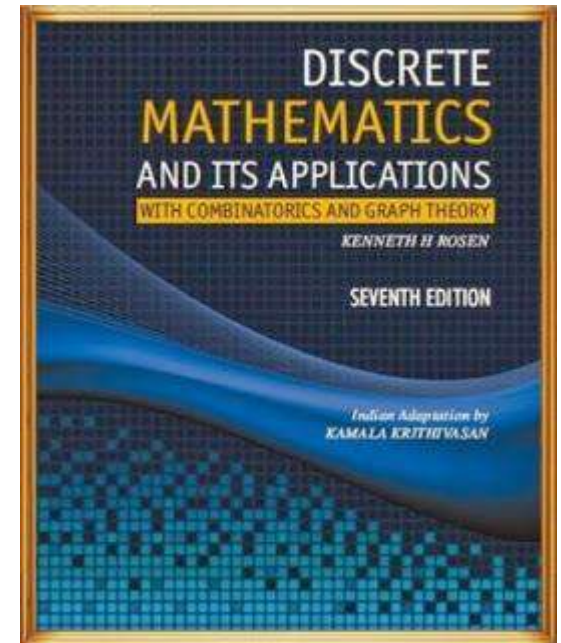
## *Moral of this story...*

- Mahasiswa informatika harus memiliki pemahaman yang kuat dalam Matematika Diskrit, agar tidak mendapat kesulitan dalam memahami kuliah-kuliah lainnya di informatika.

# Referensi Kuliah

Utama:

1. Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and Application to Computer Science 7<sup>th</sup> Edition*, Mc Graw-Hill.
2. Rinaldi Munir, *Diktat kuliah Matematika Diskrit (Edisi Keempat)*, Teknik Informatika ITB, 2003. (juga diterbitkan dalam bentuk buku oleh Penerbit Informatika)



## Pendukung:

1. Susanna S. Epp, *Discrete Mathematics with Application*, 4<sup>th</sup> Edition, Brooks/Cle, 2010
2. Peter Grossman, *Discrete Mathematics for Computing*, 2<sup>nd</sup> edition, Palgrave MacMillan, 2002
3. C.L. Liu, *Element of Discrete Mathematics*, McGraw-Hill, Inc, 1985.
4. Richard Johnsonbaugh, *Discrete Mathematics*, Prentice-Hall, 1997.



# URL

- Informasi perkuliahan (bahan kuliah, bahan ujian, soal kuis tahun2 sebelumnya, pengumuman, dll), bisa diakses di:

<http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/matdis.htm>

atau masuk dari:

<http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/>