4. TURUNAN

4.1 Konsep Turunan

4.1.1 Turunan di satu titik

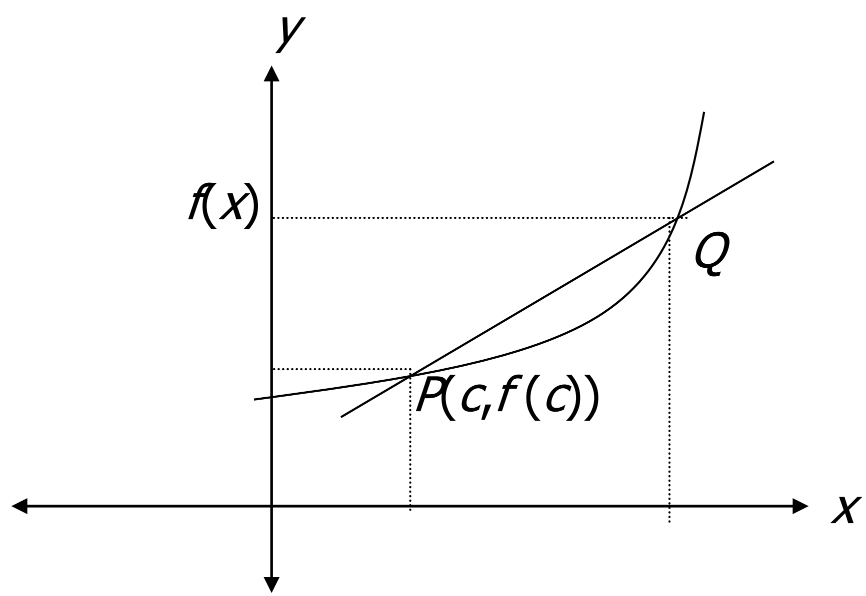
- **Definisi 4.1** Misalkan fungsi f terdefinisi pada selang I yang memuat c. Turunan pertama fungsi f di titik c, ditulis $f'(c)$ didefinisikan sebagai $f'(c) = \lim_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ bila limit ini ada.

- Arti geometris: Perhatikan gambar disamping
- Kemiringan tali busur PQ adalah :

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

- Jika $x \to c$, maka tali busur PQ akan berubah menjadi garis singgung di ttk P dgn kemiringan

$$m = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$$



- Jadi, arti geometris dari $f'(c)$ adalah kemiringan garis singgung kurva *f* di titik (*c*,*f*(*c*)).

- Sedangkan arti fisis dari $f'(c)$ adalah laju perubahan nilai fungsi *f*(*x*) terhadap peubah *x*.

- Notasi Lain : $\dfrac{df(c)}{dx}, y'(c)$

- **Contoh** Diketahui $f(x) = \dfrac{1}{x}$, tentukan $f'(3)$
- **Jawab :**

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{3-x}{3x(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{-1}{3x} = -\frac{1}{9}$$

4.1.2 Turunan Sepihak

- Turunan kiri dari fungsi f di titik c, didefinisikan sebagai :

$$f_{-}^{'}(c) = \lim_{x \to c^{-}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

- Turunan kanan dari fungsi f di titik c, didefinisikan sebagai :

$$f_{+}^{'}(c) = \lim_{x \to c^{+}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

bila limit ini ada.

- Fungsi f dikatakan mempunyai turunan (diferensiabel) di c atau, $f'(c)$

ada jika $f_{-}^{'}(c) = f_{+}^{'}(c)$ dan $f'(c) = f_{-}^{'}(c) = f_{+}^{'}(c)$

sebaliknya f dikatakan tidak mempunyai turunan di c.

Contoh : Diketahui $$f(x)=\begin{cases} x^2-x+3 & ,x<1 \\ 1+2\sqrt{x} & ,x\geq 1\end{cases}$$

Selidiki apakah $f(x)$ diferensiabel di $x=1$

Jika ya, tentukan $f'(1)$

Jawab :

a. $$f_-'(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x+3-(1+2\sqrt{1})}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{x-1}=1$$

b. $$f_+'(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1+2\sqrt{x}-(1+2\sqrt{1})}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x}-2}{x-1}=2\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=1$$

Jadi, f diferensiabel di $x=1$. $f_-'(1)=f_+'(1)=1$, maka $f'(1)=1.$

- **Teorema 4.1** Jika *f* diferensiabel di *c* ➔ *f* kontinu di *c*.
- **Bukti :** Yang perlu ditunjukkan adalah bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

- Perhatikan bahwa $$f(x) = f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.(x - c) \quad , \quad x \neq c$$
- Maka $$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \left[f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c) \right]$$
$$= \lim_{x \to c} f(c) + \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.\lim_{x \to c}(x - c)$$
$$= f(c) + f'(c).0$$
$= f(c)$. Terbukti.
- Sifat tersebut tidak berlaku sebaliknya. Artinya, Jika *f* kontinu di *c*, maka belum tentu *f* diferensiabel di *c*. Hal ini, ditunjukkan oleh contoh berikut.

4.2 Aturan Pencarian Turunan

- **Fungsi Turunan Pertama**

- **Definisi 4.3** Misalkan *f* (x) terdefinisi pada selang *I*. Fungsi turunan pertama dari *f*, ditulis $f'(x)$, didefinisikan sebagai

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad , \ \forall x \in \mathrm{I}$$

- atau jika *h=t-x*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \ , \forall x \in \mathrm{I}$$

bila limitnya ada.

- Notasi lain $y', \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}, D_x y, D_x f(x)$,bentuk $\frac{dy}{dx}$ dikenal

sebagai notasi **Leibniz.**

≠

- Dengan menggunakan definisi tersebut dapat diturunkan **aturan untuk mencari turunan** sebagai berikut :

1. Jika $f(x)$=k, maka $f'(x) = 0$

- 2. $\dfrac{d\left(x^r\right)}{dx} = r\,x^{r-1}\ ;\ x > 0\ ,\ r \in R$
- 3. $\dfrac{d\left(f(x)+g(x)\right)}{dx} = f'(x) + g'(x)$
- 4. $\dfrac{d\left(f(x)g(x)\right)}{dx} = f'(x)\ g(x) + f(x)\ g'(x)$
- 5. $\dfrac{d\left(f(x)/g(x)\right)}{dx} = \dfrac{f'(x)\ g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$ dengan $g(x) \neq 0$.

Contoh Tentukan fungsi turunan pertama dari $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+1}$

Jawab:

$$f'(x) = \frac{1.(x^2+1) - 2x(x+3)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-6x-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-6x+1}{(x^2+1)^2}$$

- Carilah turunan nya

1. $y = \left(5x^2 - 7\right)\left(3x^2 - 2x + 1\right)$

2. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 2x - 3}$

3. jari-jari sebuah semangka bulat tumbuh dg laju tetap sebesar 2 cm/minggu. Ketebalan kulitnya selalu sepersepuluh jari-jarinya. Seberapa cepat isi kulit berkembang pada akhir minggu kelima? Anggap jari-jari semula nol

4.3 Turunan Fungsi Sinus dan Cosinus

$$f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$$

Turunan fungsi trigonometri yang lain :

- 1. $\dfrac{d(\tan x)}{dx} = \sec^2 x$ 2. $\dfrac{d(\cot x)}{dx} = -\csc^2 x$
- 3. $\dfrac{d(\sec x)}{dx} = \sec x \tan x$ 4. $\dfrac{d(\csc x)}{dx} = -\csc x \cot x$
- **Contoh:** Tentukan $f'(x)$ dari $f(x) = x^2 \sin x$

4.4 Aturan Rantai

- Andaikan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$. Jika $\frac{dy}{du}$ dan $\frac{du}{dx}$ ada , maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$
- Jika $y = f(u)$, $u = g(v)$, dan $v = h(x)$ maka : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$
- **Contoh: Jika** $y = 3u^2$; $u = 2v + 1$; $v = x^2 - 1$

  Tentukan $\frac{dy}{dx}$

Jawab: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx} = 6u.2.2x = 6(2v+1).4x = 6(2(x^2-1)+1).4x$

$$= 24x(x^2 - 1)$$

Carilah turunan dari

1. $y = \left(2x^2 - 4x + 1\right)^{60}$

2. $y = \dfrac{1}{\left(2x^5 - 7\right)^3}$

3. $\left\{\sin\left[\cos\left(x^2\right)\right]\right\}$

4.5 Notasi leibniz

- Notasi lain $y', \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{df(x)}{dx}, D_x y, D_x f(x)$,bentuk $\dfrac{dy}{dx}$ dikenal

  sebagai notasi **Leibniz.**

1. Cari $\frac{dy}{dx}$ jika $y = x^3 - 3x^2 + 7x$

2. Cari $\frac{dy}{dx}$ jika $y = \cos^3(x^2 + 1)$

4.5 Turunan Tingkat Tinggi

- Turunan ke-*n* didapatkan dari penurunan turunan ke-(*n*-1).

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}\left(f^{(n-1)}(x)\right)$$

- Turunan pertama $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$
- Turunan kedua $f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$
- Turunan ketiga $f'''(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}$
- Turunan ke-n $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$

- **Contoh** : Tentukan y'' dari $y = 4x^3 + \sin x$
- **Jawab** : $y' = 12x^2 + \cos x$, maka $y'' = 24x - \sin x$

4.6 Turunan Fungsi Implisit

- Jika hubungan antara y dan x dapat dituliskan dalam bentuk $y = f(x)$ maka y disebut **fungsi eksplisit** dari x, yaitu antara peubah bebas dan tak bebasnya dituliskan dalam ruas yang berbeda.
- Bila tidak demikian maka dikatakan ***y* fungsi implisit dari *x***. Untuk menentukan turunan dari bentuk implisit digunakan aturan rantai dan anggap y fungsi dari x.
- **Contoh:** Tentukan y' dari bentuk implisit $\mathrm{Sin}(xy) = x^2 + 1$
- **Jawab:** $D_x(\mathrm{Sin}\,xy) = D_x(x^2 + 1)$

$$\mathrm{Cos}(xy)\,D_x(xy) = 2x$$

$$\mathrm{Cos}(xy)\,(y + x\,y') = 2x$$

Maka $$y' = \frac{2x - y\,\mathrm{Cos}(xy)}{x\,\mathrm{Cos}(xy)}$$