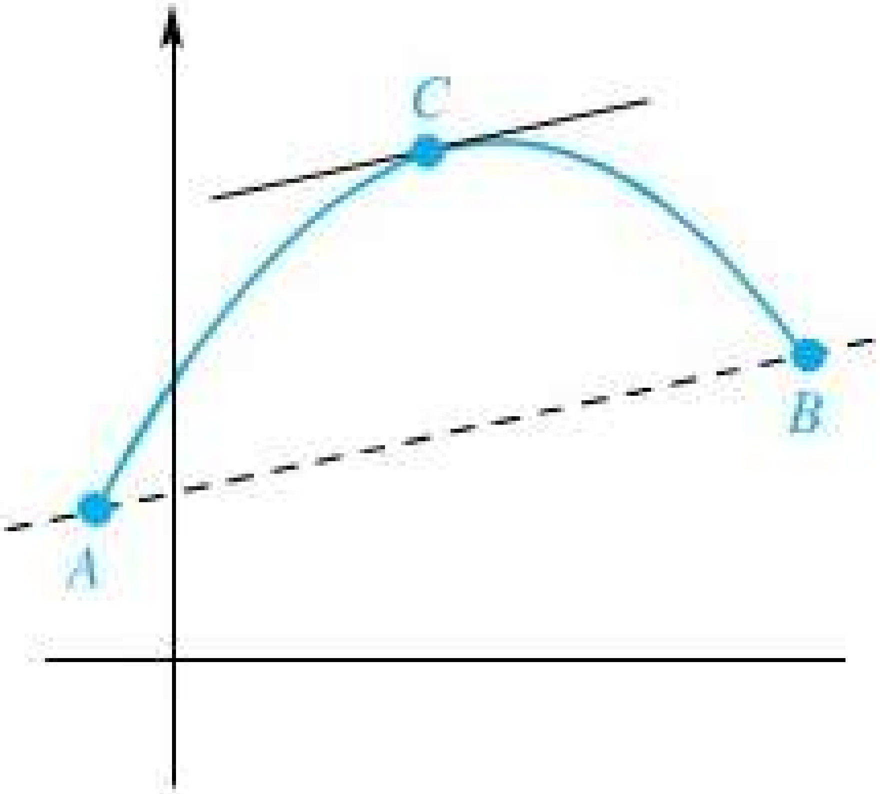
PERTEMUAN 10

TEOREMA NILAI RATAAN UNTUK TURUNAN

jika grafik sebuah fungsi kontinu mempunyai garis singgung tak vertikal pada setiap titik antara A dan B

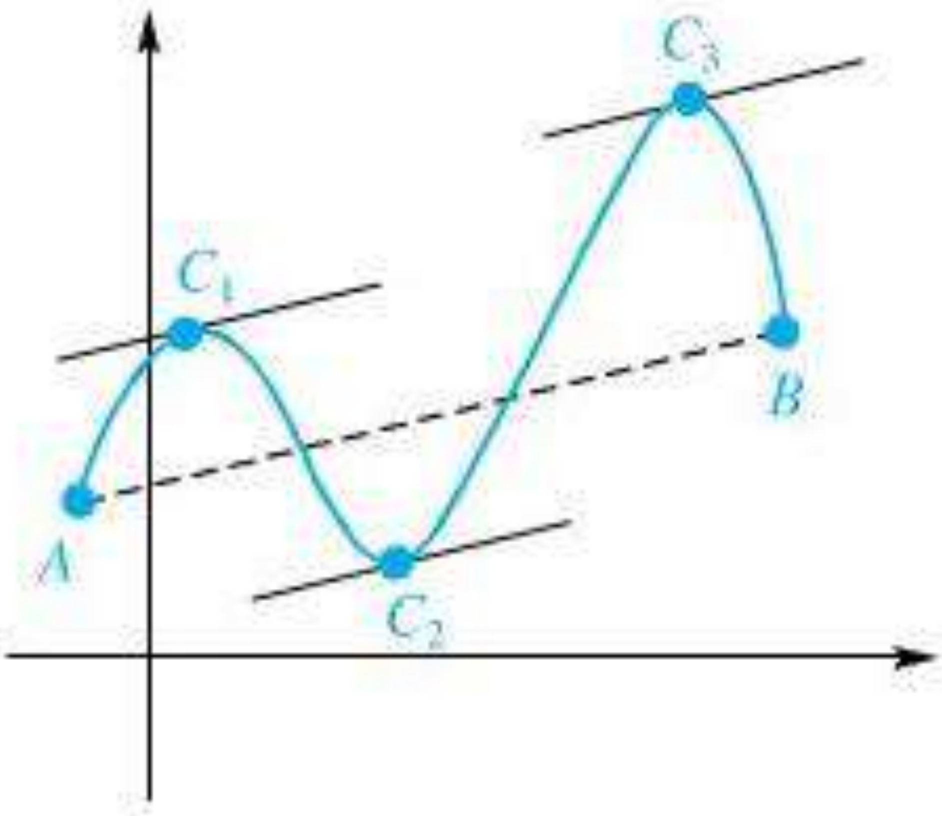
maka

terdapat paling sedikit satu titik C pada grafik antara A dan B sehingga garis singgung di titik C sejajar talibusur AB



hanya terdapat satu titik C

terdapat beberapa



1. **Teorema A (Teorema Nilai Rataan untuk Turunan)**

Jika f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ dan terdefinisikan pada titik dalamnya (a, b) maka terdapat paling sedikit satu bilangan c dalam (a, b) dengan:

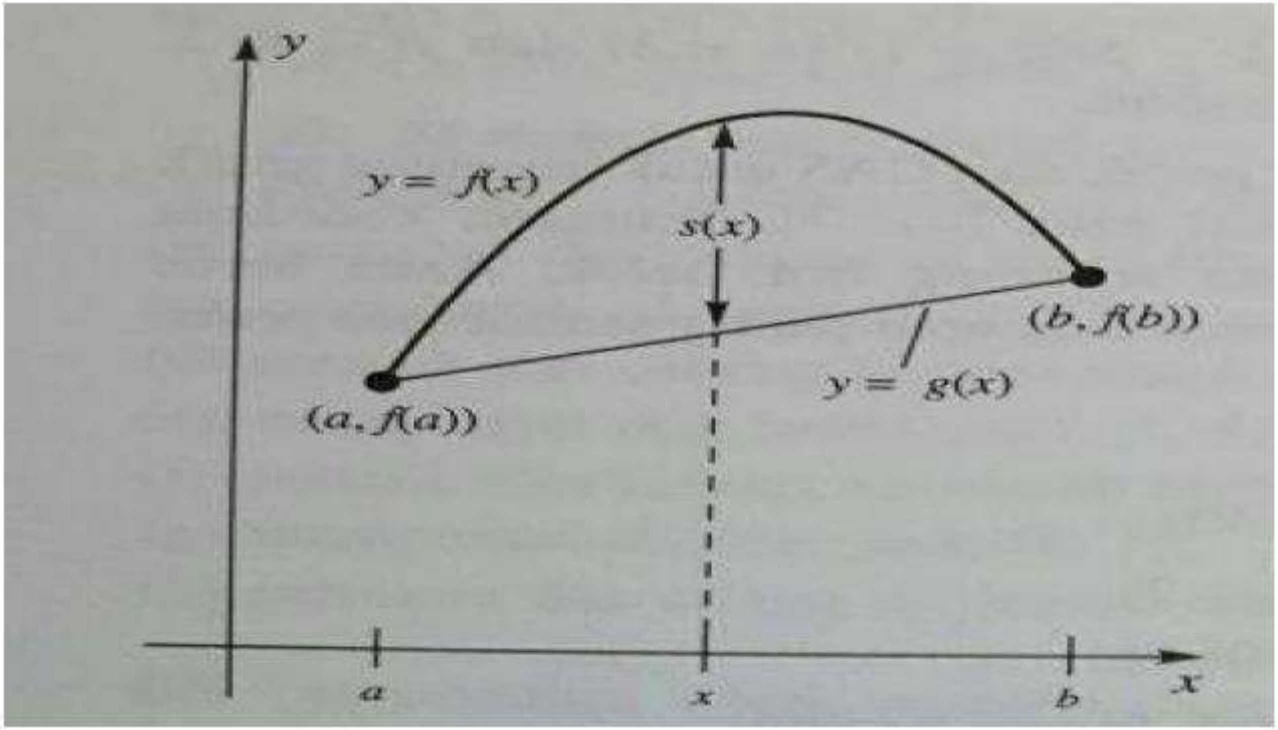
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Atau secara setara:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Bukti:

Analisis skema fungsi $s(x) = f(x) - g(x)$ yang tampak pada gambar berikut:



Tampak bahwa $y = g(x)$ merupakan persamaan garis yang melalui $(a, f(a))$ *dan* $(b, f(b))$. Garis ini memiliki kemiringan $\frac{[f(b)-f(a)]}{(b-a)}$ dan melalui titik $(a, f(a))$, bentuk kemiringan – titik untuk persamaannya adalah:

$$g(x) - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Kemudian menghasilkan rumus untuk $s(x)$:

$$s(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Perhatikan bahwa $s(b) = s(a) = 0$ dan untuk x dalam (a, b) maka:

$$s'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Perhatikan, apabila terdapat suatu bilangan c dalam (a, b) yang memnuhui $s'(c) = 0$ maka akan selesai, karena persamaan terakhir menyatakan bahwa:

$$0 = f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Yang setara dengan kesimpulan teorema tersebut.

Untuk melihat bahwa $s'(c) = 0$ untuk suatu c dalam (a, b) dengan alasan yaitu:

a. s kontinu pada $[a, b]$ karena merupakan selisih dua fungsi kontinu, sehingga menurut teorema maksimum minimum maka s harus mencapai baik nilai maksimum ataupun minimum pada $[a, b]$. Apabila kedua nilai kebetulan adalah nol maka $s(x)$ secara identik adalah 0 pada $[a, b]$ akibatnya $s'(x) = 0$ untuk semua x dalam (a, b), jauh lebih banyak dari yang diperlukan.

b. Jika salah satu nilai maksimum atau nilai minimum berlainan dengan 0 maka nilai tersebut dicapai pada sebuah titik dalam c, karena $s(a) = s(b) = 0$. Sekarang s mempunyai turunan di setiap titik dari (a, b) sehingga menurut teorema kritis maka $s'(c) = 0$.

Contoh:

(1) Tentukan bilangan c dengan teorema nilai rataan untuk $f(x) = 2\sqrt{x}\ pada\ [1, 4]$

(2) Misalkan $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1\ pada\ [-1,2]$. Tentukan semua bilangan yang memenuhi kesimpulan terhadap teorema nilai rataan.

(3) Misalkan $f(x) = x^{\frac{2}{3}}\ pada\ [-8, 27]$ maka perlihatkan bahwa kesimpulan terhadap teorema nilai rataan gagal dan jelaskan mengapa demikian.

Penyelesaian

2. Teorema B

Jika $F'(x) = G'(x)$ untuk semua x dalam (a, b) maka terdapat konstanta c sedemikian rupa sehingga:

$$F(x) = G(x) + c$$

Untuk semua x dalam (a, b).

Bukti:

Misalkan $H(x) = F(x) - G(x)$ maka:

$$H'(x) = F'(x) - G'(x)$$

Untuk semua x dalam (a, b).

Pilih x_1 sebagai suatu titik (tetap) dalam (a, b) dan misalkan x sebarang titik lain disana. Fungsi H memenuhui hipotesis teorema nilai rataan pada interval tertutup dengan titik-titik ujung $x_1\ dan\ x$. Jadi terdapat bilangan c sedemikian rupa sehingga:

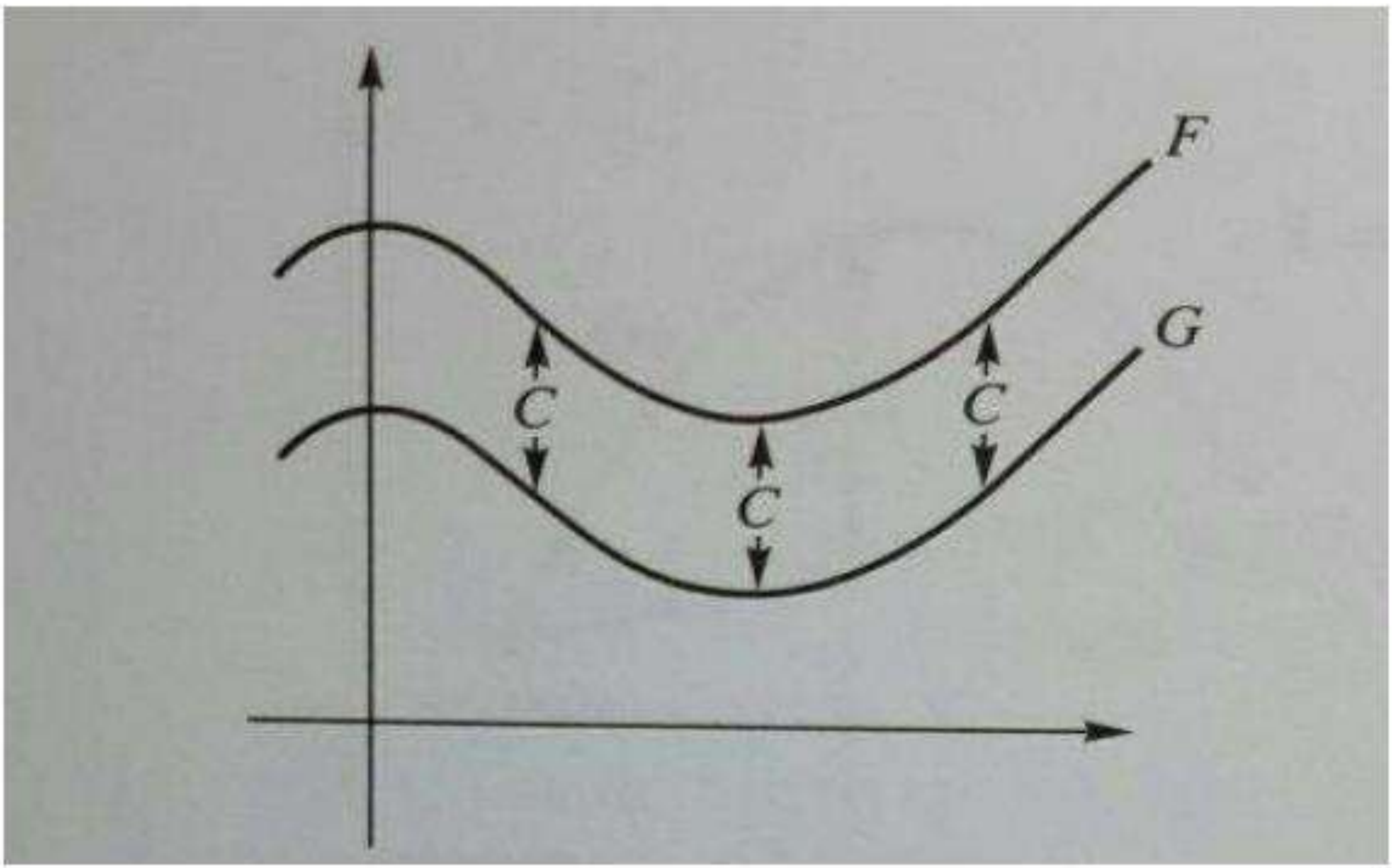
$$H(x) - H(x_1) = H'(c)(x - x_1)$$

Tetapi menurut hipotesis $H'(c) = 0$, sehingga $H(x) - H(x_1) = 0$

Atau $H(x) - H(x_1)$ untuk semua x dalam (a, b).

Karena $H(x) = F(x) - G(x)$ dapat disimpulkan bahwa $F(x) - G(x) = H(x_1)$

Misalkan $c = H(x_1)$ maka disimpulkan bahwa $F(x) = G(x) + c$



Soal

Didefinisikan sebuah fungsi dan diketahui sebuah interval tertutup. Putuskan apakah teorema nilai rataan dapat diberikan terhadap fungsi yang diketahui pada interval yang diberikan? Jika demikian, cari semua nilai c yang mungkin dan sketsalah grafik fungsi yang diketahui dengan interval yang diberikan!

a. $f(x) = x^2 + x\ ;\ [-2, 2]$

b. $H(s) = s^2 + 3s - 1\ ;\ [-3, 1]$

c. $f(z) = \frac{1}{3}(z^2 + z - 4)\ ;\ [-1, 2]$

d. $h(x) = \frac{x}{x-3}\ ;\ [0, 2]$

e. $h(t) = t^{\frac{2}{3}}\ ;\ [0, 2]$

f. $G(\theta) = \sin\theta\ ;\ [-\pi, \pi]$

g. $f(x) = x + \frac{1}{x}\ ;\ [1, 2]$

Penyelesaian:

(1) $f(x) = 2\sqrt{x}\ pada\ [1, 4]$

Maka:

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Dan

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{4 - 2}{3} = \frac{2}{3}$$

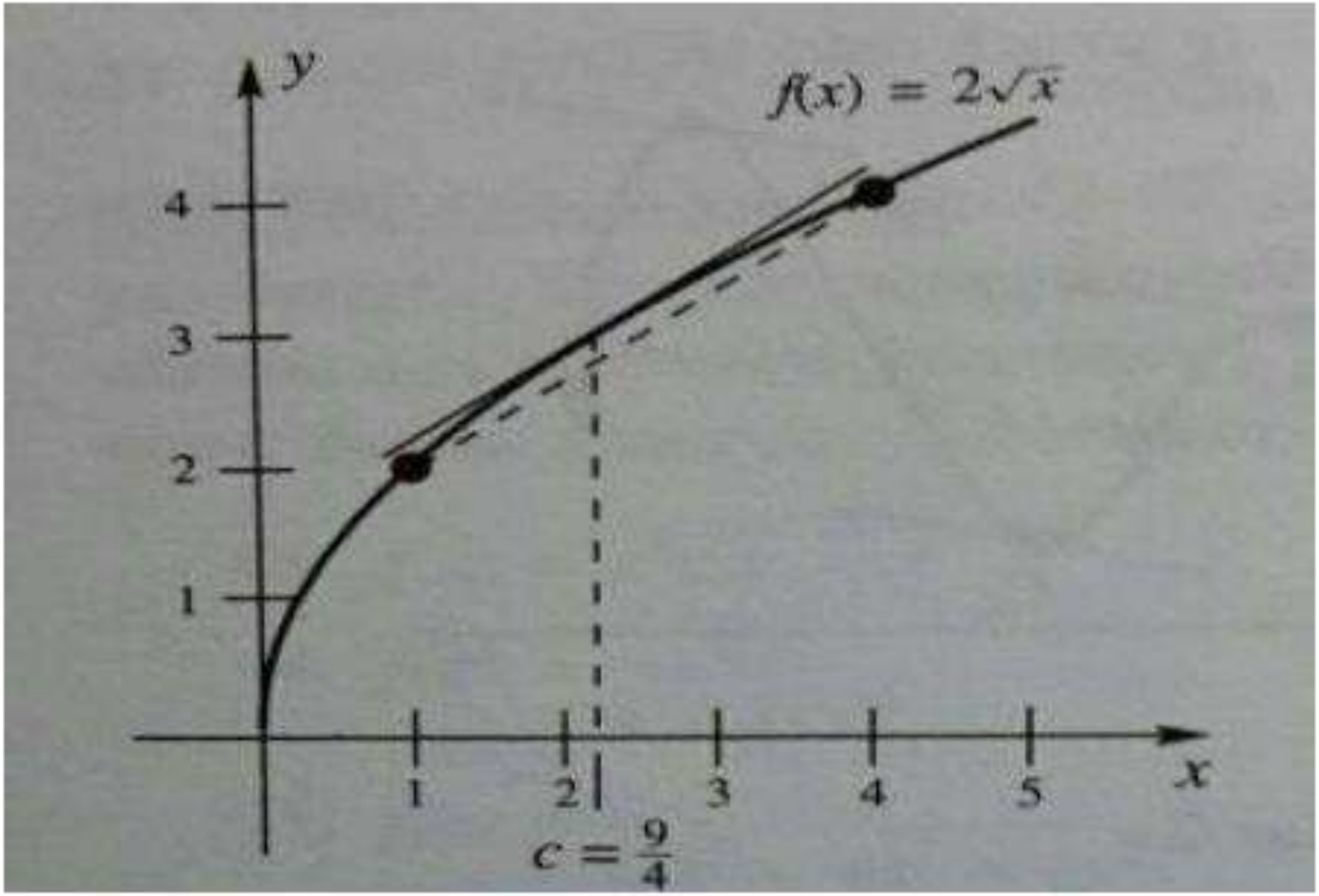
Sehingga:

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{2}{3}$$

Penyelesaian tunggalnya yaitu:

$$c = \frac{9}{4}$$

Tampak pada gambar berikut:



(2) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 \; pada \; [-1,2]$

Maka:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

Dan:

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{3 - 0}{3} = 1$$

Sehingga:

$$3c^2 - 2c - 1 = 1$$

Atau secara setara:

$$3c^2 - 2c - 2 = 0$$

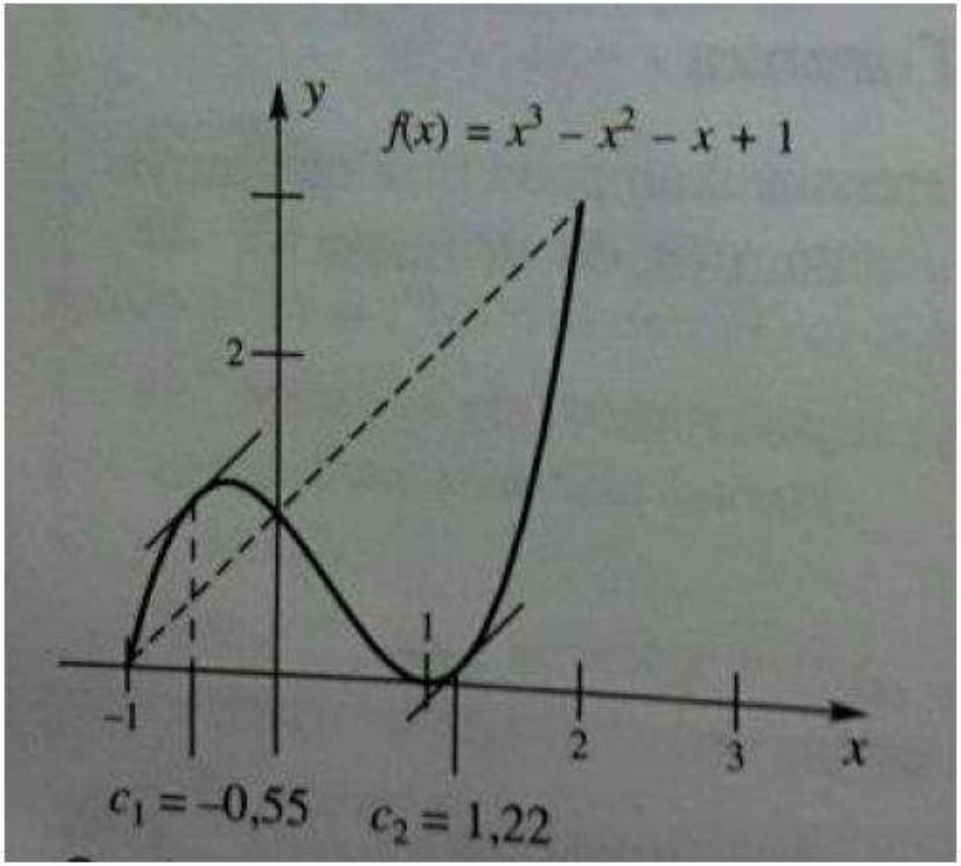
Penyelesaian ada dua yaitu:

$$c = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 24}}{6}$$

$$c_1 \approx -0{,}55 \; dan \; c_2 \approx 1{,}22$$

Kedua bilangan tersebut berada dalam interval $(-1, 2)$

Tampak pada gambar berikut:



(3) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}\, pada\ [-8, 27]$

Maka:

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\, dengan\ x \neq 0$$

Dan:

$$\frac{f(27) - f(-8)}{27 - (-8)} = \frac{9 - 4}{35} = \frac{1}{7}$$

Sehingga:

$$\frac{2}{3}c^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{7}$$

$$c = \left(\frac{14}{3}\right)^3 \approx 102$$

Tetapi $c = 102\ tidak\ pada\ inerval\ (-8, 27)$ seperti yang diisyaratkan dan tampak pada grafik bahwa $f'(0) gagal\ ada$, sehingga $f(x)$ tidak terdefinisikan dimana-mana pada $(-8, 27)$