KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

Aturan Rantai, Turunan Kedua, dan Laju yang Berkaitan dari Fungsi Trigonometri

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini, diharapkan Anda dapat menerapkan Aturan Rantai dalam menentukan turunan fungsi komposisi trigonometri, menentukan turunan kedua fungsi trigonometri, dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri khususnya laju yang berkaitan.

B. Uraian Materi

Aturan Rantai

Andaikan Anda diminta menentukan turunan fungsi $F(x) = \cos(3x - 5)$. Rumus turunan yang telah Anda pelajari tidak memungkinkan Anda untuk menghitung $F'(x)$.

Amati oleh Anda bahwa F berupa fungsi komposisi. Pada kenyataannya, andaikan $y = f(u) = \cos u$ dan $u = g(x) = 3x - 5$, maka kita dapat menuliskan $y = F(x) = f(g(x))$, yakni $F = f \circ g$. Kita ketahui bagaimana menentukan turunan fungsi f dan g, sehingga akan bermanfaat sebagai aturan yang memberitahu kita bagaimana menurunkan $F = f \circ g$ dalam bentuk turunan dari f dan g.

Ternyata turunan fungsi komposisi adalah hasil kali turunan f dan g. Fakta ini merupakan salah satu dari aturan turunan yang terpenting dan disebut **Aturan Rantai**.

Aturan Rantai

Jika f dan g keduanya fungsi fungsi yang dapat diturunkan dan $F = f \circ g$ adalah fungsi komposisi yang didefinisikan oleh $F = f(g(x))$, maka F dapat diturunkan menjadi F' yang diberikan oleh hasil kali

$$F'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x) \qquad (1)$$

Dalam notasi Leibniz, jika $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ keduanya fungsi yang dapat diturunkan, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \qquad (2)$$

Untuk lebih memahami lagi tentang aturan rantai pelajari contoh beriku.

Contoh 1

Carilah $F'(x)$ jika $F(x) = \cos(3x - 5)$.

Penyelesaian:

- **Menggunakan persamaan (1)**
  - Nyatakan F sebagai $F(x) = f \circ g\,(x) = f(g(x))$, dengan $f(u) = \cos u$ dan $u = g(x) = 3x - 5$
  - Cari turunan dari f dan g
    $f'(u) = -\sin u$
    $f'(g(x)) = -\sin g(x) = -\sin(3x - 5)$
    dan $g'(x) = 3$

- Cari $F'(x)$
  $F'(x) = f'(g(x))g'(x)$
  $= -\sin(3x - 5).(3)$
  $= -3\sin(3x - 5)$

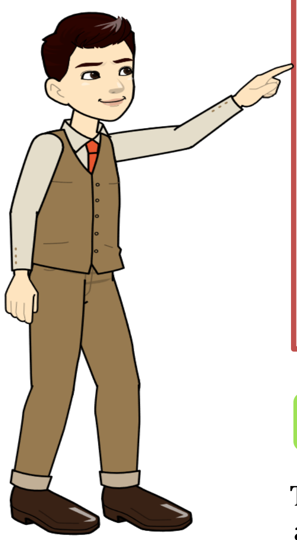
❖ Menggunakan persamaan (2)

Misalkan $u = 3x - 5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3$

dan $y = \cos u \Rightarrow \frac{dy}{du} = -\sin u$

maka

$$F'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = -\sin u\ (3) = -3\sin u = -3\sin(3x - 5)$$



Catatan:
Dalam menggunakan aturan rantai kita bekerja dari luar ke dalam. Rumus (1) mengatakan bahwa kita menurunkan fungsi sebelah luar f (pada fungsi lebih dalam $g(x)$) *dan kemudian kita kalikan dengan turunan fungsi sebelah dalam*.

$$\frac{d}{dx}\underbrace{f}_{\text{fungsi sebelah luar}}\underbrace{(g(x))}_{\text{dihitung pada fungsi sebelah dalam}} = \underbrace{f'}_{\text{turunan fungsi sebelah luar}}\underbrace{(g(x))}_{\text{dihitung pada fungsi sebelah dalam}}\cdot\underbrace{g'(x)}_{\text{turunan fungsi sebelah dalam}}$$

Contoh 2

Tentukan turunan pertama dari fungsi trigonometri berikut.

a. $y = \sin(x^2 - 3x)$
b. $y = \sin^2 x$

Penyelesaian:

a. Jika $y = \sin(x^2 - 3x)$, maka fungsi sebelah luar adalah fungsi sinus dan fungsi sebelah dalam adalah fungsi kuadrat, sehingga aturan rantai memberikan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{\sin}_{\text{fungsi sebelah luar}}\underbrace{(x^2 - 3x)}_{\text{dihitung pada fungsi sebelah dalam}} = \underbrace{\cos}_{\text{turunan fungsi sebelah luar}}\underbrace{(x^2 - 3x)}_{\text{dihitung pada fungsi sebelah dalam}}\cdot\underbrace{(2x - 3)}_{\text{turunan fungsi sebelah dalam}}$$

$$\frac{dy}{dx} = (2x - 3)\cos(x^2 - 3x)$$

b. Jika $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$, maka fungsi sebelah luar adalah fungsi kuadrat dan fungsi sebelah dalam adalah fungsi sinus, sehingga aturan rantai memberikan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{(\sin x)^2}_{\text{fungsi sebelah luar}} = \underbrace{2}_{\text{turunan fungsi sebelah luar}}\underbrace{(\sin x)}_{\text{dihitung pada fungsi sebelah dalam}}\cdot\underbrace{(\cos x)}_{\text{turunan fungsi sebelah dalam}}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\sin x\cos x$$

$= \sin 2x$ ($\sin 2x = 2\sin x\cos x$)

Dari Contoh 2 dapat disimpulkan sebagai berikut.

Aturan Rantai

$y = k\,u^n \Rightarrow y' = k\,n\,u^{n-1}\,.\,u'$
$y = \sin u \Rightarrow y' = \cos u\,.\,u'$
$y = \cos u \Rightarrow y' = -\sin u\,.\,u'$
$y = \tan u \Rightarrow y' = \sec^2 u\,.\,u'$
$y = \cot u \Rightarrow y' = -\csc^2 u\,.\,u'$
$y = \sec u \Rightarrow y' = \sec u \tan u\,.\,u'$
$y = \csc u \Rightarrow y' = -\csc u \cot u\,.\,u'$
dengan k kostanta dan $u = u(x)$

Contoh 3

Tentukan turunan pertama dari fungsi trigonometri berikut.
a. $y = \cos(3x^2 - 5)$
b. $y = \tan^2 x$

Penyelesaian:

a. $y = \cos(3x^2 - 5)$
$y = \cos u \Rightarrow y' = -\sin u\,.\,u'$
$y = \cos(3x^2 - 5) \Rightarrow y = -\sin(3x^2 - 5)\,.\,(6x) = -6x\sin(3x^2 - 5)$

b. $y = \tan^2 x = (\tan x)^2$
$y = k\,u^n \Rightarrow y' = k\,n\,u^{n-1}\,.\,u'$
$y = \tan^2 x = (\tan x)^2 \Rightarrow y' = 2\tan x\,.\,(\sec^2 x) = 2\tan x\,.\,\sec^2 x$

Alasan untuk nama “Aturan Rantai” menjadi jelas pada waktu kita membuat rantai yang lebih panjang dengan cara menambahkan mata rantai lain. Andaikan bahwa $y = f(u)$, $u = g(v)$, dan $v = h(x)$, dengan fungsi f, g, dan dapat diturunkan. Maka, untuk menghitung turunan y terhadap x, kita gunakan Aturan rantai dua kali:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$$

Contoh 4

Tentukan turunan pertama dari fungsi trigonometri $y = \sin^3(2x^2 - 3x)$

Penyelesaian:
Cara 1
$y = \sin^3(2x^2 - 3x)$
Misalkan $v = 2x^2 - 3x \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 4x - 3$
$u = \sin v \Rightarrow \frac{du}{dv} = \cos v$
$y = u^3 \Rightarrow \frac{dy}{du} = 3u^2$

maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$$

$= 3u^2 \cos v\,(4x - 3)$

$= 3(\sin v)^2 \cos(2x^2 - 3x)\,(4x - 3)$
$= 3\sin^2(2x^2 - 3x)\cos(2x^2 - 3x)\,(4x - 3)$
$= 3\,(4x - 3)\sin^2(2x^2 - 3x)\cos(2x^2 - 3x)$
$= (12x - 9)\sin^2(2x^2 - 3x)\cos(2x^2 - 3x)$

Cara 2

Fungsi sebelah luar adalah fungsi kubik, fungsi tengah adalah fungsi sinus, dan fungsi dalam adalah fungsi kuadrat.

$$\frac{dy}{dx} = 3\sin^2(2x^2 - 3x)\frac{d}{dx}(\sin(2x^2 - 3x))$$
$$= 3\sin^2(2x^2 - 3x)(\cos(2x^2 - 3x))\frac{d}{dx}(2x^2 - 3x)$$
$$= 3\sin^2(2x^2 - 3x)\cos(2x^2 - 3x)\left(4x \quad - 3\right)$$
$$= (12x - 9)\sin^2(2x^2 - 3x)\cos(2x^2 - 3x)$$

Cara 3

$y = \sin^n u \quad \Rightarrow y' = n \sin^{n-1} u . \cos u . u'$

$y = \sin^3(2x^2 - 3x) \quad \Rightarrow y' = 3\sin^2(2x^2 - 3x). \cos(2x^2 - 3x). (4x - 3)$

$y' = (12x - 9)\sin^2(2x^2 - 3x). \cos(2x^2 - 3x). (4x - 3)$

Jadi, untuk aturan rantai lainnya diperoleh:

Aturan Rantai

$y = \sin^n u \Rightarrow y' = n \sin^{n-1} u . \cos u . u'$

$y = \cos^n u \Rightarrow y' = -n \cos^{n-1} u . \sin u . u'$

$y = \tan^n u \Rightarrow y' = n \tan^{n-1} u . \sec^2 u . u'$

$y = \cot^n u \Rightarrow y' = -n \cot^{n-1} u . \csc^2 u . u'$

$y = \sec^n u \Rightarrow y' = n \sec^{n-1} u . \sec u \tan u . u'$

$y = \csc^n u \Rightarrow y' = -n \csc^{n-1} u . \csc u \cot u . u'$

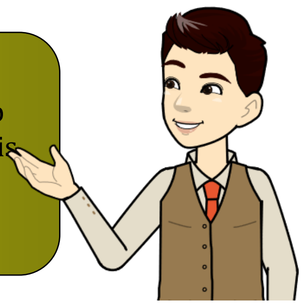
dengan $u = u(x)$

Turunan Kedua

Jika f fungsi yang terturunkan, maka turunannya f' juga berupa fungsi, sehingga f' boleh jadi mempunyai turunan tersendiri, yang dinyatakan oleh $(f')' = f''$. Fungsi f'' yang baru ini disebut turunan kedua dari f karena dia berupa turunan dari turunan f.

Definisi 1

Jika $f'(x)$ (turunan pertama suatu fungsi) diturunkan lagi terhadap x, maka akan diperoleh turunan kedua fungsi $f(x)$ terhadap x, ditulis dengan $f''(x)$ atau y'' atau $\frac{d^2 f}{dx^2}$ atau $\frac{d^2 y}{dx^2}$ atau $D^2 f(x)$.



Contoh 5

Tentukan turunan kedua fungsi trigonometri berikut.

a. $y = \sin(3x + \pi)$
b. $y = \cos^2 x$
c. $y = x \cos x$

Penyelesaian :

a. $y = \sin(3x + \pi)$

$y' = 3\cos(3x + \pi)$ (turunan $y = \sin u$ adalah $y' = u' \cos u$)

$y'' = -9\sin(9x + \pi)$ (turunan $y = \cos u$ adalah $y' = -u' \sin u$)

b. $y = \cos^2 x$
$y' = -2\cos x \sin x$ (turunan $y = u^2$ adalah $y' = 2u \cdot u'$)
$y' = -\sin 2x$ ($\sin 2x = 2\sin x \cos x$)
$y'' = -2\cos 2x$ (turunan $y = \sin u$ adalah $y' = u' \cos u$)

c. $y = x\cos x$
$y' = \cos x - x\sin x$ ($y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$)
$y'' = -\sin x - (\sin x + x\cos x)$ ($y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$)
$y'' = -2\sin x - x\cos x$

Laju yang Berkaitan

Hal utama dalam persoalan laju yang berkaitan adalah menghitung laju perubahan suatu besaran dalam bentuk laju perubahan besaran lain (yang boleh jadi jauh lebih mudah diukur). Jika variabel y tergantung kepada waktu, maka turunannya $\frac{dy}{dt}$ disebut **laju sesaat perubahan**. Tentu saja, jika y mengukur jarak, maka laju sesaat perubahan ini juga disebut kecepatan (v). Laju sesaat dari perubahan kecepatan akan menghasilkan percepatan (a).

- kecepatan $v \Rightarrow v(t) = \frac{dy}{dt} = y'(t)$
- percepatan $a \Rightarrow a(t) = \frac{dv}{dt} = v'(t) = \frac{d^2y}{dt^2} = y''(t)$

Kita tertarik pada beraneka laju sesaat, laju air mengalir ke dalam ember, laju membesarnya luas pencemaran minyak, laju bertambahnya nilai kapling tanah, dan lain-lain.

Strategi untuk pemecahan masalah khususnya mengenai laju yang berkaitan, adalah:
1. Baca masalah secara seksama.
2. Gambarkan diagram jika mungkin.
3. Perkenalkan notasi. Berikan lambing kepada semua besaran yang merupakan fungsi waktu.
4. Nyatakan informasi yang diketahui dan laju yang diperlukan dalam bentuk turunan.
5. Tuliskan persamaan yang mengaitkan beragam besaran dari masalah tersebut. Jika perlu, gunakan geometri untuk menghilangkan satu peubah melalui substitusi.
6. Gunakan aturan rantai untuk menurunkan kedua ruas persamaan terhadap *t*.
7. Substitusikan informasi yang diketahui ke dalam persamaan yang dihasilkan dan pecahkan untuk laju yang tidak diketahui tersebut.

Contoh 6

Sebuah gelombang transversal merambat dengan persamaan
$y = 0{,}1 \sin\left(\frac{1}{4}\pi t - \frac{1}{4}\pi x\right)$. Sebuah penelitian dilakukan pada jarak 2 meter dari pusat gelombang. Berapakah kecepatan dan percepatan partikel gelombang itu pada saat detik ke-3?

Penyelesaian:

$$y = 0{,}1 \sin\left(\frac{1}{4}\pi t - \frac{1}{4}\pi x\right)$$

Persamaan kecepatan dan percepatan gelombang tersebut adalah:

$v = y' = \left(\frac{1}{4}\pi\right) 0{,}1 \cos\left(\frac{1}{4}\pi t - \frac{1}{4}\pi x\right) = 0{,}025\pi \cos\left(\frac{1}{4}\pi t - \frac{1}{4}\pi x\right)$, dan

$a = v' = y'' = \left(\frac{1}{4}\pi\right) 0{,}025\pi \sin\left(\frac{1}{4}\pi t - \frac{1}{4}\pi x\right) = 0{,}00625\pi^2 \sin\left(\frac{1}{4}\pi t - \frac{1}{4}\pi x\right)$

Pada saat $t = 3$ detik dan $x = 2$ meter, maka

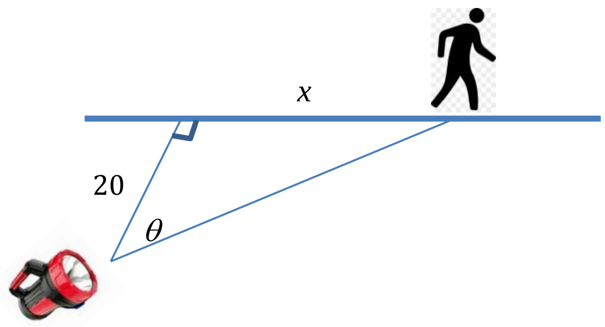
$$v = 0{,}025\pi \cos\left(\frac{1}{4}\pi(3) - \frac{1}{4}\pi(2)\right)$$
$$= 0{,}025\pi \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)$$
$$= 0{,}025\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$
$$= 0{,}0125\pi\sqrt{2}$$
$$\approx 0{,}056$$
$$a = 0{,}00625\pi^2 \sin\left(\frac{1}{4}\pi(3) - \frac{1}{4}\pi(2)\right)$$
$$= 0{,}00625\pi^2 \sin\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$= 0{,}00625\pi^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$
$$\approx 0{,}0436$$

Jadi, kecepatan partikel gelombang pada detik ke-3 di posisi 2 meter dari pusat gelombang adalah 0,056 m/detik dan percepatan partikel gelombangnya adalah 0,0436 m^2/detik.

Contoh 7

Seseorang berjalan menurut tapak lurus pada kecepatan 4 meter/detik. Lampu pencari terletak di tanah sejauh 20 meter dari tapak dan tetap dipusatkan pada orang itu. Pada laju berapa lampu pencari berputar jika orang itu berada 15 meter dari titik pada tapak yang terdekat ke lampu pencari?

Penyelesaian:



Kita lukiskan seperti gambar di atas dan misalkan x adalah jarak dari titik pada tapak yang terdekat ke lampu pencari ke orang tersebut. Kita misalkan θ adalah sudut antara sinar lampu pencari dan garis tegak lurus pada tapak.

Diketahui bahwa $\frac{dx}{dt} = 4$ meter/detik dan diminta mencari $\frac{d\theta}{dt}$ pada saat $x = 15$. Persamaan yang mengaitkan x dan θ dapat dituliskan berdasarkan Gambar.

$$\frac{x}{20} = \tan\theta$$
$$x = 20\tan\theta$$

Dengan menurunkan masing-masing ruas terhadap t, diperoleh

$$\frac{dx}{dt} = 20\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

Sehingga

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{20}\cos^2\theta\,\frac{dx}{dt} = \frac{1}{20}\cos^2\theta(4) = \frac{1}{5}\cos^2\theta$$

Pada saat x = 15, panjang sinar adalah 25, sehingga $\cos\theta = \frac{4}{5}$ dan

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{125} = 0{,}128$$

Jadi, lampu pencari berputar pada laju 0,128 radian/detik.

C. Rangkuman

- Jika f dan g keduanya fungsi fungsi yang dapat diturunkan dan $F = f \circ g$ adalah fungsi komposisi yang didefinisikan oleh $F = f(g(x))$, maka F dapat diturunkan menjadi F' yang diberikan oleh hasil kali

$$F'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

Dalam notasi Leibniz, jika $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ keduanya fungsi yang dapat diturunkan, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}$$

- Misalkan $u = u(x)$, maka rumus umum turunan fungsi trigonometri adalah:
  - $y = \sin^n u \Rightarrow y' = n \sin^{n-1} u\,.\cos u\,.\,u'$
  - $y = \cos^n u \Rightarrow y' = -n \cos^{n-1} u\,.\,\sin u\,.\,u'$
  - $y = \tan^n u \Rightarrow y' = n \tan^{n-1} u\,.\,\sec^2 u\,.\,u'$
  - $y = \cot^n u \Rightarrow y' = -\,n \cot^{n-1} u\,.\csc^2 u\,.\,u'$
  - $y = \sec^n u \Rightarrow y' = n \sec^{n-1} u\,.\sec u \tan u\,.\,u'$
  - $y = \csc^n u \Rightarrow y' = -\,n \csc^{n-1} u\,.\csc u \cot u\,.\,u'$
- Jika $f'(x)$ (turunan pertama suatu fungsi) diturunkan lagi terhadap x, maka akan diperoleh turunan kedua fungsi $f(x)$ terhadap x, ditulis dengan $f''(x)$ atau y'' atau $\frac{d^2 f}{dx^2}$ atau $\frac{d^2 y}{dx^2}$.
- Laju yang berkaitan adalah menghitung laju perubahan suatu besaran dalam bentuk laju perubahan besaran lain (yang boleh jadi jauh lebih mudah diukur). Jika variabel y tergantung kepada waktu, maka turunannya $\frac{dy}{dt}$ disebut laju sesaat perubahan.

D. Latihan Soal

Kerjakan latihan soal berikut dengan jujur dan benar.

1. Tentukan turunan pertama dari fungsi trigonometri berikut.
   a. $f(x) = \cos(4x - \pi)$
   b. $f(x) = \cos^5(3 - 2x)$
   c. $f(x) = x\cos^2 2x - 2x^3$
2. a. Jika $f(x) = 4\cos^3 x$, maka tentukan nilai $f'(x)$ untuk $x = \frac{\pi}{3}$
   b. Jika $f(x) = \sin^2(2x + \frac{\pi}{6})$, maka tentukan nilai $f'(0)$.
3. Tentukan turunan kedua dari fungsi trigonometri berikut.
   a. $y = \cos(2x + \pi)$
   b. $y = \sin^2 x$
4. Sebuah gelombang transversal merambat dengan persamaan $y = 2\sin(5\pi t - \pi x)$. Sebuah penelitian dilakukan pada jarak 4 meter dari pusat gelombang. Berapakah kecepatan dan percepatan partikel gelombang itu pada saat detik ke-2?
5. Disebuah menara yang tingginya 100 m dari atas tanah, seorang penjaga pantai melihat sebuah kapal mendekat dengan laju 5 m/s. Tentukan laju perubahan sudut depresi penjaga pantai terhadap waktu pada saat jarak kapal terhadap menara 100 m.

Kunci Jawaban dan Pembahasan

1. Tentukan turunan pertama dari fungsi trigonometri berikut.
   a. $f(x) = \cos(4x - \pi)$
   b. $f(x) = \cos^5(3 - 2x)$
   c. $f(x) = x\cos^2 2x - 2x^3$

   Penyelesaian:

   a. $f(x) = \cos(4x - \pi)$ **(skor maksimum 10)**

   $y = \cos u \Rightarrow y' = -\sin u \,.\, u'$

   maka

   $f'(x) = -\sin(4x - \pi)\,(4)$

   $f'(x) = -4\sin(4x - \pi)$

   b. $f(x) = \cos^5(3 - 2x)$ **(skor maksimum 10)**

   $y = \cos^n u \Rightarrow y' = -n\cos^{n-1} u \,.\, \sin u \,.\, u'$

   maka

   $f'(x) = -5\cos^4(3 - 2x)\sin(3 - 2x)\,(-2)$

   $= 10\cos^4(3 - 2x)\sin(3 - 2x)$

   $= 5\cos^3(3 - 2x)\,[2\cos(3 - 2x)\sin(3 - 2x)$

   $= 5\cos^3(3 - 2x)\sin 2(3 - 2x)$

   $= 5\cos^3(3 - 2x)\sin(6 - 4x)$

   c. $f(x) = x\cos^2 2x - 2x^3$ **(skor maksimum 10)**

   $$\begin{aligned} f'(x) &= 1.\cos^2 2x + x.(2.\cos 2x.(-\sin 2x).2) - 6x^2 \\ &= \cos^2 2x - 4x.\cos 2x\sin 2x - 6x^2 \\ &= \cos^2 2x - 2x.(2\cos 2x\sin 2x) - 6x^2 \\ &= \cos^2 2x - 2x.\sin 2(2x) - 6x^2 \\ &= \cos^2 2x - 2x.\sin 4x - 6x^2 \end{aligned}$$

2. a. Jika $f(x) = 4\cos^3 x$, maka tentukan nilai $f'(x)$ untuk $x = \frac{\pi}{3}$

   Penyelesaian: **(skor maksimum 10)**

   $f(x) = 4\cos^3 x$

   $f'(x) = 4.3.\cos^2 x.(-\sin x)$

   $f'(x) = -12.\sin x.\ \cos^2 x$

   $$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -12\sin\frac{\pi}{3}.\ \cos^2\frac{\pi}{3} \\ &= -12\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{3}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

   b. Jika $f(x) = \sin^2(2x + \frac{\pi}{6})$, maka tentukan nilai $f'(0)$.

   Penyelesaian: **(skor maksimum 10)**

   $f(x) = \sin^2(2x + \frac{\pi}{6})$

   $$f'(x) = 2.\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).2$$

   $$f'(x) = \sin 2\left(\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\right).2$$

   $$\begin{aligned} f'(0) &= 2.\sin 2(2.0 + \frac{\pi}{6}) \\ &= 2.\sin\frac{2\pi}{6} \\ &= 2.\sin\frac{\pi}{3} \\ &= 2.\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$= 1$

3. Tentukan turunan kedua dari fungsi trigonometri berikut.
   a. $y = \cos(2x + \pi)$
   b. $y = \sin^2 x$

   Penyelesaian:

   a. $y = \cos(2x + \pi)$ **(skor maksimum 10)**

   $y' = -2\sin(2x + \pi)$ (turunan $y = \cos u$ adalah $y' = -u' \sin u$)

   $y'' = -4\cos(2x + \pi)$ (turunan $y = \sin u$ adalah $y' = u' \cos u$)

   b. $y = \sin^2 x$ **(skor maksimum 10)**

   $y' = 2\sin x \cos x$ (turunan $y = u^2$ adalah $y' = 2u \,.\, u'$)

   $y' = \sin 2x$ ($\sin 2x = 2\sin x \cos x$)

   $y'' = 2\cos 2x$ (turunan $y = \sin u$ adalah $y' = u' \cos u$)

4. Sebuah gelombang transversal merambat dengan persamaan $y = 2\sin(5\pi t - \pi x)$. Sebuah penelitian dilakukan pada jarak 4 meter dari pusat gelombang. Berapakah kecepatan dan percepatan partikel gelombang itu pada saat detik ke-2?

   Penyelesaian: **(skor maksimum 10)**

   $y = 2\sin(5\pi t - \pi x)$

   Persamaan kecepatan dan percepatan gelombang tersebut adalah:

   $v = y' = (5\pi)\, 2\cos(5\pi t - \pi x) = 10\pi\cos(5\pi t - \pi x)$, dan

   $a = v' = y'' = -(5\pi)10\pi\sin(5\pi t - \pi x) = -50\pi^2\sin(5\pi t - \pi x)$

   Pada saat $t = 2$ detik dan $x = 4$ meter, maka

   $v = 10\pi\cos\big(5\pi(2) - \pi(4)\big) = 10\pi\cos(6\pi) = 10\pi$

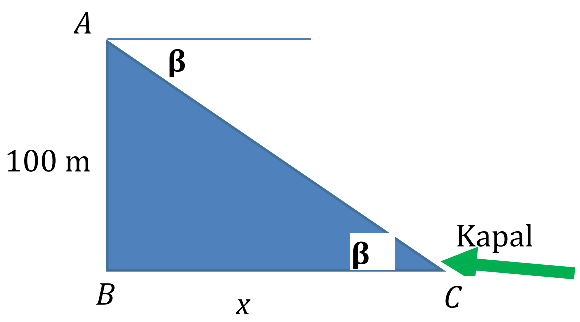
   $a = -50\pi^2\sin\big(5\pi(2) - \pi(4)\big) = -50\pi^2\sin(6\pi) = 0$

   Jadi, kecepatan partikel gelombang pada detik ke-2 di posisi 4 meter dari pusat gelombang adalah 10π m/detik dan percepatan partikel gelombangnya adalah 0.

5. Disebuah menara yang tingginya 100 m dari atas tanah, seorang penjaga pantai melihat sebuah kapal mendekat dengan laju 5 m/s. Tentukan laju perubahan sudut depresi penjaga pantai terhadap waktu pada saat jarak kapal terhadap menara 100 m.

   Penyelesaian: **(skor maksimum 10)**

   Perhatikan gambar berikut:



Diketahui : $\frac{dx}{dt} = 5$ m/s, $AB = 100$ m, $BC = 100$ m

Ditanyakan : $\frac{d\beta}{dt}$

Dari ΔABC, perhatikan

$\cot\beta = \frac{BC}{AB} = \frac{x}{100}$

$x = 100.\cot\beta$

Ruas kiri dan ruas kanan diturunkan terhadap t.

$\frac{dx}{dt} = 100.(-\csc^2\beta)\frac{d\beta}{dt}$, Subtitusikan $\frac{dx}{dt} = 5$ dan $\tan\beta = \frac{BC}{AB} = \frac{100}{100} = 1 \rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$

5 = 100.$(-\csc^2 \frac{\pi}{4})\frac{d\beta}{dt}$

$\frac{5}{100} = -(\sqrt{2})^2 \frac{d\beta}{dt}$

$\frac{1}{20} = -2\frac{d\beta}{dt}$

$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{1}{40}$ (tanda negative hanya menunjukkan arah)

Jadi, laju perubahan sudut depresi penjaga pantai terhadap waktu $\frac{1}{40}$ radian/sekon.

E. Penilaian Diri

Ananda isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang Anda ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Anda mampu menentukan turunan fungsi trigonometri ?		
2.	Apakah Anda telah memahami penggunaan aturan rantai?		
3.	Apakah Anda dapat menggunakan aturan rantai dalam turunan fungsi trigonometri?		
4.	Apakah Anda dapat menentukan turunan kedua fungsi trigonometri?		
5.	Dapatkah Anda menyelesaikan masalah penggunaan turunan fungsi trigonometri dalam laju yang berkaitan?		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

EVALUASI

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat.

1. Jika $y = 3x^4 + \sin 2x + \cos 3x$, maka $\frac{dy}{dx}$ = ...
   A. $12x^3 + 2\cos 2x + 3\sin 3x$
   B. $12x^3 + \cos 2x - \sin 3x$
   C. $12x^3 - 2\cos 2x + 3\sin 3x$
   D. $12x^3 - 2\cos 2x - 3\sin 3x$
   E. $12x^3 + 2\cos 2x - 3\sin 3x$
2. Jika $y = 3\sin 2x - 2\cos 3x$, maka $\frac{dy}{dx} = \cdots$.
   A. $6\cos 2x + 6\sin 3x$
   B. $-6\cos 2x - 6\sin 3x$
   C. $6\cos 2x - 6\sin 3x$
   D. $3\cos 2x + 3\sin 3x$
   E. $3\cos 2x - 3\sin 3x$
3. Jika $f(x) = a\tan x + bx$, dengan $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$ dan $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 9$, nilai $a + b$ = ...
   A. 0
   B. 1
   C. $\frac{1}{2}\pi$
   D. 2
   E. π
4. Jika $f(x) = a\cot x + bx$ dan $f'(\frac{1}{6}\pi) = 5$ dan $f'(\frac{1}{4}\pi) = 1$, maka nilai $a.b$ = ...
   A. -6
   B. -3
   C. 3
   D. 6
   E. 8
5. Jika fungsi $f(x) = \sin ax + \cos bx$ memenuhi $f'(0) = b$ dan $f'\left(\frac{\pi}{2a}\right) = -1$, maka $a + b$ = ...
   A. -1
   B. 0
   C. 1
   D. 2
   E. 3
6. Jika $f(x) = x\cos x$, maka $f'(x + \frac{1}{2}\pi)$ = ...
   A. $-\sin x - x\cos x + \frac{1}{2}\pi\cos x$
   B. $-\sin x - x\cos x - \frac{1}{2}\pi\cos x$
   C. $-\sin x + x\cos x - \frac{1}{2}\pi\cos x$
   D. $-\sin x + x\cos x + \frac{1}{2}\pi\cos x$
   E. $-\cos x + x\sin x + \frac{1}{2}\pi\cos x$
7. Turunan pertama fungsi $f(x) = 5\sin x\cos x$ adalah $f'(x)$ = ...
   A. $5\sin 2x$
   B. $5\cos 2x$
   C. $5\sin^2 x\cos x$
   D. $5\sin x\cos^2 x$
   E. $5\sin 2x\cos x$

8. Turunan pertama dari $f(x) = (3x^2 - 5)\cos x$ adalah $f'(x) = ...$
   A. $3x \sin x + (3x^2 - 5) \cos x$
   B. $3x \cos x + (3x^2 - 5) \sin x$
   C. $-6x \sin x - (3x^2 - 5) \cos x$
   D. $6x \cos x + (3x^2 - 5) \sin x$
   E. $6x \cos x - (3x^2 - 5) \sin x$
9. Turunan pertama dari $y = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$ adalah $y' = ...$
   A. $\dfrac{\cos x}{(\sin x + \cos x)^2}$
   B. $\dfrac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$
   C. $\dfrac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$
   D. $\dfrac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^2}$
   E. $\dfrac{2\sin x \cos x}{(\sin x + \cos x)^2}$
10. Diketahui $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}$. Jika $f'(x)$ adalah turunan dari $f(x)$ maka nilai dari $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = ...$
   A. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   B. $-\frac{1}{2}$
   C. $\frac{1}{4}\sqrt{2}$
   D. $\frac{1}{2}$
   E. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
11. Jika $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x}$, $\sin x \neq 0$ dan $f'(x)$ adalah turunan $f(x)$, maka $f'(\frac{\pi}{2}) = ...$
   A. -2
   B. -1
   C. 0
   D. 1
   E. 2
12. Nilai turunan pertama $y = \sin(x + 20^o)$ pada $x = 10^o$ adalah ....
   A. $\frac{1}{2}$
   B. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   C. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
   D. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   E. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
13. Jika $f(x) = -(\cos^2 x - \sin^2 x)$, maka $f'(x)$ adalah ....
   A. $2(\sin x + \cos x)$
   B. $2(\cos x - \sin x)$
   C. $\sin x \cos x$
   D. $2 \sin x \cos x$
   E. $4 \sin x \cos x$

14. Diketahui fungsi $f(x) = (x + \sin 3x)$ dan $g(x) = x^2$. Jika $u(x) = g(f(x))$, maka turunan pertama dari $u(x)$ adalah $u'(x) = ...$
    A. $2(x + \sin 3x + 3x \sin 3x + 3 \sin^2 3x)$
    B. $2x + 2 \sin 3x + 6x \cos 3x + 3 \sin 6x$
    C. $2x + 6 \sin 3x + \cos 3x$
    D. $2(x + \sin 3x + 3 \sin 3x + \sin^2 3x)$
    E. $2x + 6 \sin 3x + 3x \cos 3x + \sin 3x \cos 3x$
15. Turunan pertama $f(x) = \cos^3 x$ adalah ….
    A. $f'(x) = -\frac{3}{2} \cos x \sin 2x$
    B. $f'(x) = \frac{3}{2} \cos x \sin 2x$
    C. $f'(x) = -3 \sin x \cos x$
    D. $f'(x) = 3 \sin x \cos x$
    E. $f'(x) = -3\cos^2 x$
16. Diketahui $F(x) = \sin^2(2x + 3)$. Turunan pertama dari $F(x)$adalah….
    A. $F'(x) = -4\sin(4x + 6)$
    B. $F'(x) = -2\sin(4x + 6)$
    C. $F'(x) = \sin(4x + 6)$
    D. $F'(x) = 2\sin(4x + 6)$
    E. $F'(x) = 4\sin(4x + 6)$
17. Turunan pertama dari $f(x) = \sqrt[3]{\sin^2 3x}$ adalah $f'(x) = \ldots.$
    A. $\frac{2}{3}\cos^{-\frac{1}{3}} 3x$
    B. $2\cos^{-\frac{1}{3}} 3x$
    C. $\frac{2}{3}\cos^{-\frac{1}{3}} 3x \sin 3x$
    D. $-2\cot 3x \cdot \sqrt[3]{\sin^2 3x}$
    E. $2\cot 3x \cdot \sqrt[3]{\sin^2 3x}$
18. Jika $f(x) = \sin^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, maka nilai dari $f'(0) = \ldots.$
    A. $2\sqrt{3}$
    B. 2
    C. $\sqrt{3}$
    D. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
    E. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
19. Diketahui $y = x \cos x$, maka $y'' + y = ….$
    A. $\sin x \cos x$
    B. $2 \cos x$
    C. $-2 \sin x$
    D. $\cos x - \sin x$
    E. $2 \cos x - 1$
20. Turunan kedua dari $f(x) = \cos^2 2x$ adalah ....
    A. $-6 \sin 2x$
    B. $-8 \cos 4x$
    C. $8 \cos 4x$
    D. $8 \sin 4x$
    E. $3 \sin 2x \cos 2x$
21. Sebuah partikel sedang bergerak dengan persamaan perpindahan dari titik awal gerak $x = 5\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$ dengan x dalam meter dan t dalam sekon. Kecepatan awal partikel adalah ….

A. 2
B. 3
C. 4
D. 5
E. $5\sqrt{3}$

22. Sebuah gelombang merambat dengan persamaan $y = 3\sin(2\pi t - \pi x)$. Sebuah penelitian dilakukan pada jarak 2 meter dari pusat gelombang. Kecepatan gelombang itu pada saat detik ke-2 adalah ….
A. 3π m/detik
B. 4π m/detik
C. 6π m/detik
D. 7π m/detik
E. 8π m/detik

23. Rata-rata pertumbuhan suatu bakteri setelah t detik diberikan oleh persamaan $N(t)$ = cos t + 5 tan 5t. Laju sesaat pertumbuhan bakteri tersebut ketika mencapai 30 detik ….
A. $\frac{197}{12}$ bakteri/detik
B. $\frac{197}{6}$ bakteri/detik
C. $\frac{100}{3}$ bakteri/detik
D. $\frac{197}{3}$ bakteri/detik
E. $\frac{197}{2}$ bakteri/detik

24. Sebuah layang-layang terbang 100 kaki di atas tanah, bergerak dalam arah horizontal dengan laju 10 kaki / detik. Seberapa cepat sudut antara tali dan perubahan horizontal ketika panjang tali yang terulur 300 kaki keluar?
A. $\frac{1}{90}$
B. $\frac{1}{45}$
C. $\frac{1}{30}$
D. 30
E. 90

25. Dua sisi sebuah segitiga mempunyai panjang 4 m dan 5 m dan sudut diantaranya bertambah pada laju 0,06 radial/detik. Laju bertambahnya luas segitiga pada waktu sudut antar sisi panjang tetap $\frac{\pi}{3}$ adalah ….
A. 0,03 m^2/detik
B. 0,1 m^2/detik
C. 0,2 m^2/detik
D. 0,3 m^2/detik
E. 0,6 m^2/detik