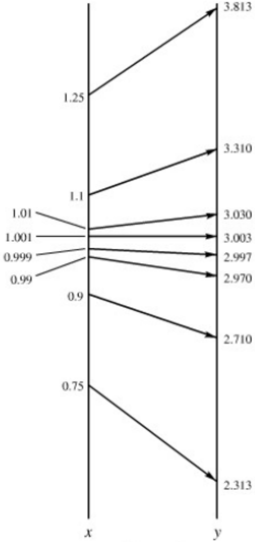
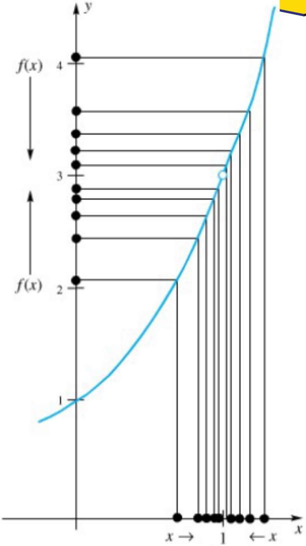
x	$y = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$
1.25	3.813
1.1	3.310
1.01	3.030
1.001	3.003
↓	↓
1.000	?
↑	↑
0.999	2.997
0.99	2.970
0.9	2.710
0.75	2.313

Table of values



Schematic diagram



Graph of $y = f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

Fungsi f dengan $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ mempunyai domain alami $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$.

Perhatikan $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$ (terdefinisi), walaupun $f(1)$ tidak terdefinisi (karena $1 \notin D_f$).

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} x^2 + x + 1 \\ &= 3. \end{aligned}$$

Catatan

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$ *bermakna nilai* $f(x)$ *dapat dibuat sedekat mungkin ke 3 jika* x *cukup dekat dengan 1, tapi* $x \neq 1$.

Intuisi Limit.

Notasi $\lim_{x \to c} f(x) = L$ berarti jika x dekat dengan c, maka $f(x)$ dekat dengan L.

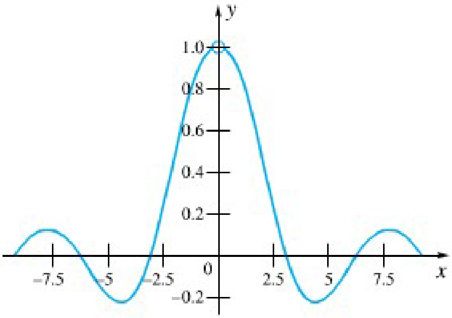
Catatan

Ide limit berkaitan dengan perilaku fungsi di sekitar $x = c$, *tapi tidak di* $x = c$.
Bahkan, $f(x)$ *tidak harus terdefinisi di* $x = c$.

Contoh 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

x	$\frac{\sin x}{x}$
1.0	0.84147
0.1	0.99833
0.01	0.99998
↓	↓
0	?
↑	↑
−0.01	0.99998
−0.1	0.99833
−1.0	0.84147

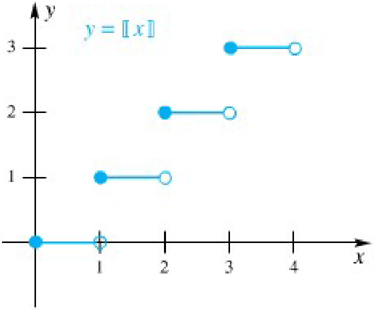


Contoh 2

$\lim_{x \to 1} [\![x]\!]$ tidak ada.

$\lim_{x \to 2} [\![x]\!]$ tidak ada.

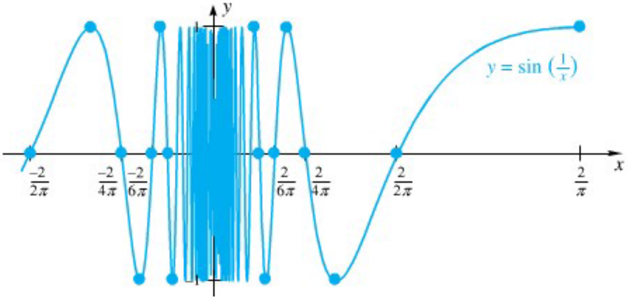
$\lim_{x \to 3} [\![x]\!]$ tidak ada.



Contoh 3

$\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ tidak ada.

x	$\sin \frac{1}{x}$
$2/\pi$	1
$2/(2\pi)$	0
$2/(3\pi)$	-1
$2/(4\pi)$	0
$2/(5\pi)$	1
$2/(6\pi)$	0
$2/(7\pi)$	-1
$2/(8\pi)$	0
$2/(9\pi)$	1
$2/(10\pi)$	0
$2/(11\pi)$	-1
$2/(12\pi)$	0
$\downarrow$	$\downarrow$
0	?



Limit.

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ berarti jika x dekat dengan c, maka $f(x)$ dekat dengan L.

Limit kanan.

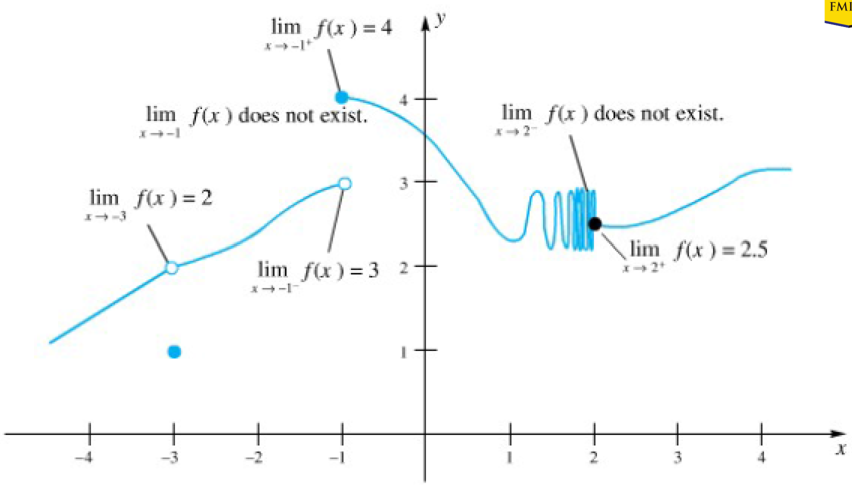
$\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$ berarti jika x dekat dengan c dari kanan, maka $f(x)$ dekat dengan L.

Limit kiri.

$\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L$ berarti jika x dekat dengan c dari kiri, maka $f(x)$ dekat dengan L.

Catatan

Perhatikan penggunaan c, c^+ dan c^-.


$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 4$
$\lim_{x \to -1} f(x)$ does not exist.
$\lim_{x \to -3} f(x) = 2$
$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 3$
$\lim_{x \to 2^-} f(x)$ does not exist.
$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2.5$
y
x
4
3
2
1
–4
–3
–2
–1
1
2
3
4

Teorema 4

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ *jika dan hanya jika* $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$ *dan* $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$.

Penyelesaian $\lim_{x \to c} f(x)$.

- Dalam *Geogebra*: Limit[f(x), c]
- Dalam *Wolfram Mathematica*: Limit[f(x), x −> c]

Penyelesaian $\lim_{x \to c^+} f(x)$.

- Dalam *Geogebra*: LimitAbove[f(x), c]
- Dalam *Wolfram Mathematica*:
  Limit[f(x), x −> c, Direction −> "FromAbove"]

Penyelesaian $\lim_{x \to c^-} f(x)$.

- Dalam *Geogebra*: LimitBelow[f(x), c]
- Dalam *Wolfram Mathematica*:
  Limit[f(x), x −> c, Direction −> "FromBelow"]

Teorema 1

Misalkan n adalah bilangan bulat positif dan k adalah bilangan konstan, $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ dan $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ ada.

1. $\lim\limits_{x\to c} k = k$,
2. $\lim\limits_{x\to c} x = c$,
3. $\lim\limits_{x\to c} k.f(x) = k.\lim\limits_{x\to c} f(x)$,
4. $\lim\limits_{x\to c} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x) + \lim\limits_{x\to c} g(x)$,
5. $\lim\limits_{x\to c} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x) - \lim\limits_{x\to c} g(x)$,
6. $\lim\limits_{x\to c} [f(x).g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x).\lim\limits_{x\to c} g(x)$,

(lanjutan)

7. $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$, dengan $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$,
8. $\lim\limits_{x\to c} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]^n$,
9. $\lim\limits_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$, dengan $\lim\limits_{x\to c} f(x) > 0$ jika n adalah bilangan genap.

Teorema di atas juga berlaku untuk limit kiri dan limit kanan.

Contoh 2

Hitunglah $\lim\limits_{x\to 3} 2\,x^4$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 3} 2\,x^4 &= 2\lim_{x\to 3} x^4 && \text{(butir 3)}\\
&= 2\left(\lim_{x\to 3} 2\,x\right)^4 && \text{(butir 8)}\\
&= 2.3^4 = 162.
\end{aligned}
$$

FMIPA

Teorema 3 (Teorema substitusi)

Jika f adalah fungsi polinomial atau fungsi rasional, maka

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c),$$

asalkan $f(c)$ terdefinisi.
Untuk kasus fungsi rasional, nilai penyebut di $x = c$ tidak boleh 0.

Contoh 4

Hitunglah $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^5 + 3\,x^3 - 1}{x^2 + x + 1}$.

Dengan menggunakan Teorema Substitusi,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^5 + 3\,x^3 - 1}{x^2 + x + 1} = \frac{1^5 + 3.\,1^3 - 1}{1^2 + 1 + 1} = 1.$$

FMIPA

Teorema 5

Jika

1. $f(x) = g(x)$ *untuk setiap* x *di suatu interval buka yang memuat bilangan* c, *kecuali mungkin pada bilangan* c *itu sendiri, dan*
2. $\lim\limits_{x \to c} g(x)$ *ada*,

maka

1. $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ *ada dan*
2. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x)$.

Contoh 6

Hitunglah $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

Misalkan $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ dan $g(x) = \sqrt{x}+1$.

Perhatikan $f(x) = g(x)$ untuk setiap $x \in (0,2)$, kecuali di $x = 1$.

Perhatikan pula $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x}+1 = 2$.

Akibatnya $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ada dan $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} g(x) = 2$.

Cara di atas dapat diringkas menjadi:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \sqrt{x}+1 = 2.$$

Teorema 7 (Teorema apit (*squeeze theorem*))

Misalkan f, g, h adalah fungsi yang memenuhi $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ untuk setiap x di dekat c, kecuali mungkin pada c.
Jika $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$, maka $\lim_{x \to c} g(x) = L$.

Contoh 8

Hitunglah $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$.

Perhatikan

$$1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

untuk setiap x di dekat 0, tapi tidak di $x = 0$.

Karena $\lim_{x \to 0} 1 - \frac{x^2}{6} = \lim_{x \to 0} 1 = 1$, maka berdasarkan Teorema Apit $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Latihan Mandiri

Hitunglah

1. $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2}.$$
2. $$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+x}{x^2+1}.$$
3. $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-1}.$$
4. $$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|}.$$
5. $$\lim_{x\to 0} x-[\![x]\!].$$
6. $$\lim_{x\to 0} [\![x^2+2x]\!].$$