

Definisi 1 (fungsi kontinu di suatu titik)

Misalkan fungsi f terdefinisi pada interval buka yang memuat c .
Fungsi f disebut **kontinu** pada $x = c$ jika

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

Contoh 2

Apakah fungsi $y = f(x) = x^2 - 9$ kontinu di $x = 3$? Jelaskanlah!

Perhatikan $f(3) = 0$ dan $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 9 = 0$.

Karena $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 9 = f(3)$, maka fungsi f kontinu di $x = 3$.

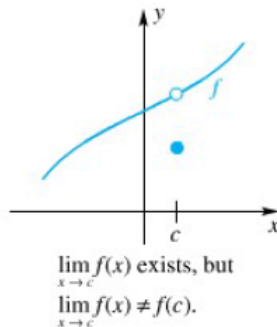
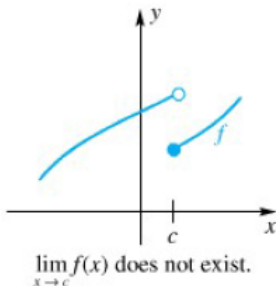
Contoh 3

Tentukanlah di titik apa saja fungsi $y = \llbracket x \rrbracket$ tidak kontinu!

Misalkan n adalah bilangan bulat.

$\lim_{x \rightarrow n} \llbracket x \rrbracket$ tidak ada karena $\lim_{x \rightarrow n^+} \llbracket x \rrbracket = n$ tapi $\lim_{x \rightarrow n^-} \llbracket x \rrbracket = n - 1$.

Jadi fungsi $y = \llbracket x \rrbracket$ tidak kontinu di x yang merupakan bilangan bulat.



Ketidakkontinuan fungsi f di $x = c$ (gambar kiri) **tidak dapat** diperbaiki karena fungsi f tidak punya limit.

Ketidakkontinuan fungsi f di $x = c$ (gambar kanan) **dapat** diperbaiki jika nilai $f(c)$ **didefinisikan ulang**, sehingga $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

Contoh 4

Misalkan $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x \neq 2$. Bagaimana f didefinisikan di $x = 2$ agar f kontinu di $x = 2$?

Perhatikan

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4.$$

Agar fungsi f kontinu di $x = 2$, definisikan $f(2) = 4$.

Teorema 5 (Kekontinuan fungsi polinomial dan fungsi rasional)

*Fungsi polinomial kontinu di **setiap** bilangan riil c .*

*Fungsi rasional kontinu di **setiap** bilangan riil c dalam domainnya, yaitu di setiap titik, kecuali di titik yang nilai penyebutnya nol.*

Teorema 6 (Kekontinuan fungsi nilai mutlak dan fungsi akar ke n)

*Fungsi nilai mutlak kontinu di **setiap** bilangan riil c .*

*Jika n adalah bilangan ganjil, fungsi akar ke n kontinu di **setiap** bilangan riil c .*

*Jika n adalah bilangan genap, fungsi akar ke n kontinu di **setiap** bilangan riil positif c .*

Teorema 7 (Kekontinuan terhadap operasi fungsi)

Jika fungsi f dan g kontinu di $x = c$, maka

- ① $k.f$,
- ② $f + g$,
- ③ $f - g$,
- ④ $f.g$,
- ⑤ $\frac{f}{g}$ (dengan syarat $g(c) \neq 0$),
- ⑥ f^n , dan
- ⑦ $\sqrt[n]{f}$ (dengan syarat $f(c) > 0$ jika n adalah bilangan genap)

juga kontinu di $x = c$.

Teorema 8 (Kekontinuan fungsi trigonometri)

*Fungsi sinus dan cosinus kontinu di **setiap** bilangan riil c .*

*Fungsi $\tan(x)$, $\cot(x)$, $\sec(x)$, dan $\csc(x)$ kontinu di **setiap** bilangan riil c dalam domain mereka.*

Teorema 9 (Teorema limit komposisi)

*Jika $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$ dan f **kontinu** di $x = L$, maka*

$$\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow c} g(x)\right) = f(L).$$

Secara khusus, jika g kontinu di $x = c$ dan f kontinu di $x = g(c)$, maka komposisi $f \circ g$ kontinu di $x = c$.

Definisi 10 (Kekontinuan fungsi pada interval)

Fungsi f dikatakan **kontinu kanan** di $x = a$ jika

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

Fungsi f dikatakan **kontinu kiri** di $x = b$ jika

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

Fungsi f dikatakan kontinu pada **interval buka** (a, b) jika f kontinu pada **setiap** titik di (a, b) .

Fungsi f dikatakan kontinu pada **interval tutup** $[a, b]$ jika f kontinu pada interval buka (a, b) , f kontinu kanan di $x = a$ dan f kontinu kiri di $x = b$.

Teorema 11 (Teorema nilai antara (*intermediate value theorem*))

Misalkan f adalah fungsi yang terdefinisi pada interval tutup $[a, b]$ dan W adalah sembarang bilangan di antara $f(a)$ dan $f(b)$.

Jika f **kontinu** pada $[a, b]$,
maka ada **paling sedikit 1** bilangan c di antara a dan b ,
sedemikian sehingga $f(c) = W$

Catatan

Manfaat Teorema Nilai Antara: menentukan apakah suatu persamaan mempunyai solusi dalam suatu interval.

Contoh 12

Buktikanlah bahwa persamaan $x^5 + 4x^3 - 7x + 14 = 0$ mempunyai paling sedikit 1 solusi riil!

Misalkan $f(x) = x^5 + 4x^3 - 7x + 14$.

Perhatikan f terdefinisi pada $[-2, 1]$, $f(-2) = -70$ dan $f(1) = 12$.

Lebih lanjut, $-70 = f(-2) < 0 < f(1) = 12$.

Karena fungsi polinomial f adalah fungsi kontinu, maka berdasarkan Teorema Nilai Antara ada paling sedikit 1 bilangan c di antara -2 dan 1 sedemikian sehingga $f(c) = 0$.

Jadi persamaan tersebut mempunyai paling sedikit 1 solusi riil.

Latihan Mandiri.

- 1 Apakah fungsi $y = x^2 - 9$ kontinu di $x = 3$? Jelaskanlah!
- 2 Tentukanlah di titik apa saja fungsi $y = \llbracket 2x \rrbracket$ tidak kontinu!
- 3 Tentukanlah di titik apa saja fungsi $y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ tidak kontinu!
- 4 Apakah persamaan $(\cos x) x^3 + 6 \sin^5 x - 3 = 0$ punya solusi riil antara 0 dan 2π ?