# PENDAHULUAN

## A. Identitas Modul

| | | |
|---|---|---|
| Mata Pelajaran | : | Matematika Peminatan |
| Kelas | : | XII |
| Alokasi Waktu | : | 12 jam pelajaran |
| Judul Modul | : | Turunan Fungsi Trigonometri |

## B. Kompetensi Dasar

3.3 Menggunakan prinsip turunan ke fungsi trigonometri sederhana
4.3 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri

## C. Deskripsi Singkat Materi

Salam jumpa melalui pembelajaran matematika dengan materi Turunan Fungsi Trigonometri. Modul ini disusun sebagai satu alternatif sumber bahan ajar siswa untuk memahami materi matematika peminatan kelas XII khususnya Turunan Fungsi Trigonometri. Melalui modul ini Anda diajak untuk memahami konsep Turunan Fungsi Trigonometri, Sifat-sifat Turunan Trigonometri dan Pemecahan Masalah yang terkait dengan Turunan Fungsi Trigonometri.

Jika berbicara mengenai kecepatan, percepatan, nilai maksimum dan minimum suatu fungsi maka sebenarnya kita sedang membahas mengenai turunan. Turunan terkait dengan perubahan. Sesuatu yang bersifat tetap di dunia ini adalah perubahan itu sendiri, banyak kejadian-kejadian yang melibatkan perubahan. Misalnya gerak suatu obyek (kendaraan berjalan, roket bergerak, laju pengisian air suatu tangki), pertumbuhan bibit suatu tanaman, pertumbuhan ekonomi, inflasi mata uang, berkembangbiaknya bakteri, peluruhan muatan radioaktif dan sebagainya. Konsep dasar dari turunan suatu fungsi adalah laju perubahan nilai fungsi.

Tokoh-tokoh yang berjasa dalam mempelajari konsep perubahan sehingga menghasilkan cabang ilmu matematika kalkulus diferensial (turunan) diantaranya: Archimedes (287 – 212 SM), Kepler (1571 – 1630), Galileo (1564 – 1642), Newton (1642 – 1727) dan Leibniz (1646 – 1716). Menurut pendapat para ahli Newton dan Leibniz-lah dua orang yang paling banyak andilnya pada pertumbuhan kalkulus diferensial.

## D. Petunjuk Penggunaan Modul

Modul ini dirancang untuk memfasilitasi Anda dalam melakukan kegiatan pembelajaran secara mandiri. Untuk menguasai materi ini dengan baik, ikutilah petunjuk penggunaan modul berikut.

1. Berdoalah sebelum mempelajari modul ini.
2. Pelajari uraian materi yang disediakan pada setiap kegiatan pembelajaran secara berurutan.
3. Perhatikan contoh-contoh penyelesaian permasalahan yang disediakan dan kalau memungkinkan cobalah untuk mengerjakannya kembali.
4. Kerjakan latihan soal yang disediakan, kemudian cocokkan hasil pekerjaan Anda dengan kunci jawaban dan pembahasan pada bagian akhir modul.

5. Jika menemukan kendala dalam menyelesaikan latihan soal, cobalah untuk melihat kembali uraian materi dan contoh soal yang ada.
6. Setelah mengerjakan latihan soal, lakukan penilaian diri sebagai bentuk refleksi dari penguasaan Anda terhadap materi pada kegiatan pembelajaran.
7. Di bagian akhir modul disediakan soal evaluasi, silahkan mengerjakan soal evaluasi tersebut agar Anda dapat mengukur penguasaan terhadap materi pada modul ini. Cocokkan hasil pengerjaan dengan kunci jawaban yang tersedia.
8. Ingatlah, keberhasilan proses pembelajaran pada modul ini tergantung pada kesungguhan Anda untuk memahami isi modul dan berlatih secara mandiri.

## E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi 2 kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Rumus Dasar Turunan Fungsi Trigonometri dan Sifat-sifatnya

Kedua : Aturan Rantai, Turunan Kedua, dan Laju yang Berkaitan dari Fungsi Trigonometri

# KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
# Rumus Dasar Turunan Fungsi Trigonometri dan Sifat-sifatnya

## A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini, diharapkan Anda dapat membuktikan rumus-rumus dasar turunan fungsi trigonometri dan menggunakan prinsip atau aturan-aturan turunan ke fungsi trigonometri sederhana.

## B. Uraian Materi

Masih ingatkah Anda dengan definisi turunan yang sudah dipelajari saat Anda di kelas XI? Atau pelajaran trigonometri yang sudah Anda pelajari di kelas X dan XI? Mudah-mudahan masih ingat, termasuk materi limit fungsi trigonometri yang sudah dipelajari pada modul sebelumnya, karena materi-materi tersebut merupakan materi prasyarat untuk memahami konsep turunan fungsi trigonometri.

### Rumus Dasar Turunan Fungsi Trigonometri

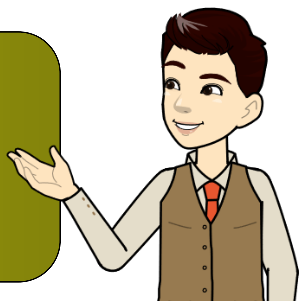
Anda telah melihat pada modul sebelumnya bahwa gradien garis singgung dan kecepatan sesaat adalah manifestasi dari pemikiran dasar yang sama, yaitu *diferensial* atau *turunan*.

**Definisi 1**

Diferensial/turunan pertama fungsi $f$ adalah fungsi lain $f'$ (dibaca "$f$ aksen") yang nilainya pada sebarang bilangan $x$ adalah

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Jika limitnya ada.



Notasi turunan pertama adalah

$f'(x) = y' = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = D_x f(x)$

$f'(x) = y'$ diperkenalkan oleh Joseph Louis Lagrange

$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$ diperkenalkan oleh Gottfried Leibniz

$D$ dan $\frac{d}{dx}$ merupakan operator turunan

Dengan menggunakan definisi turunan mari kita buktikan rumus dasar turunan fungsi trigonometri untuk $y = \sin x$, $y = \sec x$, dan $y = \tan x$, untuk fungsi trigonometri lainnya, yaitu $y = \cos x$, $y = \csc x$, dan $y = \cot x$ diberikan sebagai latihan.

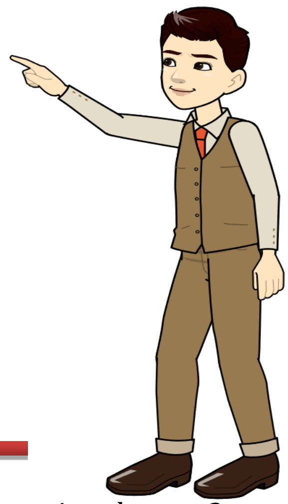
**Contoh 1**

Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri $y = f(x) = \sin x$.

**Penyelesaian:**

Sebelum Anda menentukan turunan pertama fungsi trigonometri $y = f(x) = \sin x$, Anda harus mengingat kembali identitas trigonometri sudut rangkap, jumlah dan selisih sudut dan limit fungsi trigonometri.

## Mengingat Kembali



- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{1}{2}(x + y)\sin\frac{1}{2}(x - y)$
- $1 - \cos ax = 2\sin^2\frac{1}{2}(ax)$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{1}{2}x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{1}{2}x\sin\frac{1}{2}x}{x}$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}x}{x}\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{2}x = 2.\frac{1}{2}.\sin(0) = 0$$

Anda akan disajikan menentukan turunan pertama fungsi $y = \sin x$ dengan 2 cara.

### Cara 1

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ (definisi turunan)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$ (substitusikan $f(x) = \sin x$)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h + \cos x\sin h - \sin x}{h}$$ ($\sin(x+h) = \sin x\cos h + \cos x\sin h$)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\sin h - \sin x\,(1 - \cos h)}{h}$$ (sifat distributif)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\sin h}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\,(1 - \cos h)}{h}$$ (sifat limit)

$$= \cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} - \sin x\lim_{h\to 0}\frac{(1 - \cos h)}{h}$$ (sifat limit)

$$= \cos x(1) - \sin x\,(0)$$ (rumus limit)

$$= \cos x$$

### Cara 2

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ (definisi turunan)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$ (substitusikan $f(x) = \sin x$)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{1}{2}(x+h+x)\sin\frac{1}{2}(x+h-x)}{h}$$ ($\sin x - \sin y = 2\cos\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)$)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{1}{2}h\right)\sin\frac{1}{2}h}{h}$$ (penyederhanaan)

$$= \lim_{h\to 0}2\cos\left(x+\frac{1}{2}h\right)\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{h}$$ (sifat limit)

$$= 2\cos x\,.\frac{1}{2}$$ (sifat limit)

$$= \cos x$$

Jadi, turunan pertama fungsi trigonometri $f(x) = \sin x$ adalah $f'(x) = \cos x$

## Contoh 2

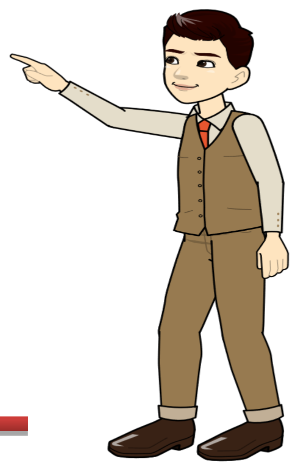
Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri $y = f(x) = \sec x$.

**Penyelesaian:**

Sebelum Anda menentukan turunan pertama fungsi trigonometri $y = f(x) = \sec x$, Anda harus mengingat kembali identitas trigonometri sudut rangkap, jumlah dan selisih sudut dan limit fungsi trigonometri.

### Mengingat Kembali

- $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $\cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\cos x - \cos y = -2\sin \frac{1}{2}(x + y) \sin \frac{1}{2}(x - y)$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$



$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} && \text{(definisi turunan)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sec(x+h) - \sec x}{h} && \text{(substitusikan } f(x) = \sec x\text{)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x}\right) && \left(\sec x = \frac{1}{\cos x}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\cos x - \cos(x+h)}{\cos(x+h)\cos x}\right) && \text{(samakan penyebut)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\cos x - [\cos x \cos h - \sin x \sin h]}{\cos(x+h)\cos x}\right) && (\cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\cos x - \cos x \cos h + \sin x \sin h}{\cos(x+h)\cos x}\right) && \text{(penyederhanaan)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\cos x\,(1 - \cos h) + \sin x \sin h}{\cos(x+h)\cos x}\right) && \text{(sifat distributif)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x\,(1 - \cos h)}{h\cos(x+h)\cos x} + \frac{\sin x \sin h}{h\cos(x+h)\cos x} && \text{(penyederhanaan)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(1 - \cos h)}{h\cos(x+h)} + \frac{\sin x}{\cos x}\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h\cos(x+h)} && \text{(sifat limit)} \\
&= \frac{0}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{\cos x} && \text{(sifat limit)} \\
&= \sec x \tan x
\end{aligned}$$

Jadi, turunan pertama fungsi trigonometri $f(x) = \sec x$ adalah $f'(x) = \sec x \tan x$.

**Contoh 3**

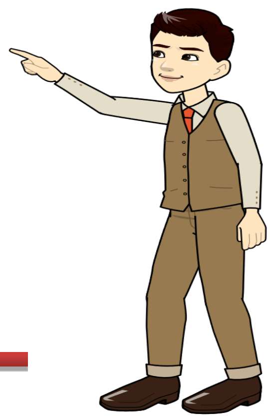
Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri $y = f(x) = \tan x$.

**Penyelesaian:**

Sebelum Anda menentukan turunan pertama fungsi trigonometri $y = f(x) = \tan x$, Anda harus mengingat kembali identitas trigonometri, jumlah dan selisih sudut dan limit fungsi trigonometri.

**Mengingat Kembali**

- $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
- $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$



$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{(definisi turunan)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h} \qquad \text{(substitusikan } f(x) = \tan x\text{)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\tan x + \tan h}{1 - \tan x \tan h} - \tan x\right) \qquad \left(\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\tan x + \tan h - \tan x\,(1 - \tan x \tan h)}{1 - \tan x \tan h}\right) \qquad \text{(samakan penyebut)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\tan x + \tan h - \tan x + \tan^2 x \tan h}{1 - \tan x \tan h}\right) \qquad \text{(penyederhanaan)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\tan h\,(1 + \tan^2 x)}{h(1 - \tan x \tan h)} \qquad \text{(sifat distributif)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\tan h}{h} \lim_{h \to 0} (1 + \tan^2 x) \lim_{h \to 0} \frac{1}{1 - \tan x \tan h} \qquad \text{(sifat limit)}$$

$$= (1)\,(1 + \tan^2 x)\,(1) \qquad \text{(sifat limit)}$$

$$= \sec^2 x \qquad (1 + \tan^2 x = \sec^2 x)$$

Jadi, turunan fungsi trigonometri $f(x) = \tan x$ adalah $f'(x) = \sec^2 x$.

Sebagai lantihan Anda harus membuktikan turunan fungsi trigonometri berikut.

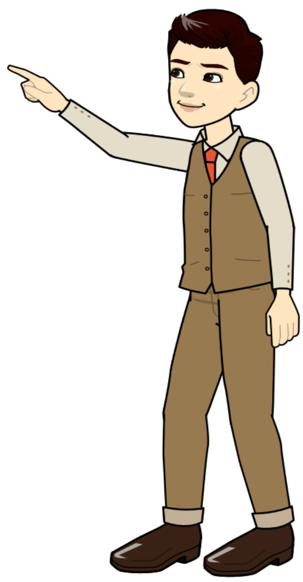
- $f(x) = \cos x \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \csc x \Rightarrow \quad f'(x) = -\csc x \cot x$
- $f(x) = \cot x \Rightarrow \quad f'(x) = -\csc^2 x$

### Prinsip Turunan untuk Fungsi Trigonometri Sederhana

Proses pencarian turunan suatu fungsi menggunakan definisi, yakni $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ memakan waktu. Karena itu pada pembelajaran berikutnya kita akan menggunakan aturan pencarian turunan yang telah dipelajari di Kelas XI saat belajar turunan fungsi aljabar untuk memperpendek proses dari fungsi-fungsi yang tampak rumit.

Namun, sebelumnya kita ulas kembali aturan dasar pencarian turunan dari fungsi aljabar dan fungsi trigonometri.

## Mengingat Kembali



- $f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$, dengan $k$ konstanta
- $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$
- $f(x) = k\,x^n \Rightarrow f'(x) = k.n.x^{n-1}$
- $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$
- $f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = -\csc^2 x$
- $f(x) = \sec x \Rightarrow f'(x) = \sec x \tan x$
- $f(x) = \csc x \Rightarrow f'(x) = -\csc x \cot x$

Jika $k$ suatu konstanta dan $u$, $v$ adalah fungsi dari $x$ dan terturunkan, maka aturan pencarian turunan fungsi aljabar berlaku juga pada turunan fungsi trigonometri .

**1. Aturan Jumlah, Selisih, dan Perkalian dengan Konstanta**

- $f(x) = k\,u \Rightarrow f'(x) = k\,u'$
- $f(x) = u + v \Rightarrow f'(x) = u' + v'$
- $f(x) = u - v \Rightarrow f'(x) = u' - v'$

dengan $k$ konstanta, $u = u(x)$, dan $v = v(x)$

### Contoh 4

Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri berikut.

a. $f(x) = \sin x - \cos x$.
b. $f(x) = 3x^2 - 4 \cos x$
c. $f(x) = 2\tan x + 3x$

**Penyelesaian:**

a. $f(x) = \sin x - \cos x$

pilih : $u = \sin x \Rightarrow u' = \cos x$

$v = \cos x \Rightarrow v' = -\sin x$

$f(x) = \sin x - \cos x = u - v$

maka

$f'(x) = u' - v'$

$f'(x) = \cos x - (-\sin x)$

$f'(x) = \cos x + \sin x$

b. $f(x) = 3x^2 - 4 \cos x$

pilih : $u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$

$v = \cos x \Rightarrow v' = -\cos x$

$k_1 = 3$ dan $k_2 = 4$

$f(x) = 3x^2 - 3\cos x = k_1 u + k_2 v$

maka

$f'(x) = k_1\, u' + k_2\, v'$

$f'(x) = 3\,(2x) - 3\,(-\sin x)$

$f'(x) = 6x + 3\sin x$

c. $f(x) = 2\tan x + 3x$

pilih : $u = \tan x \Rightarrow u' = \sec^2 x$

$v = x \Rightarrow v' = 1$

$k_1 = 2$ dan $k_2 = 3$

$f(x) = 2\tan x + 3x = k_1 u + k_2 v$

maka

$f'(x) = k_1\, u' + k_2\, v'$

$f'(x) = 2\sec^2 x + 3$

**Contoh 5**

Jika $f(x) = \sin x + \cos x + \tan x$ , maka $f'(0) = \ldots.$

**Penyelesaian:**

$f(x) = \sin x + \cos x + \tan x$

$f'(x) = \cos x - \sin x + \sec^2 x$

$f'(0) = \cos 0 - \sin 0 + \sec^2 0$

$= 1 - 0 + 1$

$= 2$

**2. Aturan Perkalian**

$f(x) = u\,.\,v \Rightarrow f'(x) = u'.\,v + u\,.\,v'$ dengan $u = u(x)$ dan $v = v(x)$

**Contoh 6**

Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri berikut.

a. $f(x) = x^2 \sin x$

b. $f(x) = 3x \sin x + \cot x$

c. $f(x) = 2\cos x \sin x$

**Penyelesaian:**

a. $f(x) = x^2 \sin x$

pilih $u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$

$v = \sin x \Rightarrow v' = \cos x$

$f(x) = x^2 \sin x = u\,.\,v$

maka

$f'(x) = u'.\,v + u\,.\,v'$

$f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$

b. $f(x) = 3x \sin x + \cot x$

pilih $u = 3x \Rightarrow u' = 3$

$v = \sin x \Rightarrow v' = \cos x$

$w = \cot x \Rightarrow w' = -\csc^2 x$

$f(x) = 3x \sin x + \cot x = u\,.\,v + w$

maka

$f'(x) = u'\,.\,v + u\,.\,v' + w'$

$f'(x) = 3\sin x + 3x\cos x + (-\csc^2 x)$

$= 3 \sin x + 3x \cos x - \csc^2 x$

c. $f(x) = 2 \cos x \sin x$
pilih $u = 2 \cos x \Rightarrow u' = -2 \sin x$
$v = \sin x \Rightarrow v' = \cos x$
$f(x) = 2 \cos x \sin x = u \,.\, v$
maka
$f'(x) = u' \,.\, v + u \,.\, v'$
$f'(x) = (-2 \sin x)(\sin x) + (2 \cos x)(\cos x)$
$f'(x) = -2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x$
$f'(x) = 2 (\cos^2 x - \sin^2 x)$
$f'(x) = 2 \cos 2x$ $(\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x)$

**3. Aturan Pembagian**

$f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ dengan $u = u(x)$ dan $v = v(x)$

**Contoh 7**

Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri berikut.

a. $f(x) = \tan x$

b. $f(x) = \frac{\cos x}{1+\cos x}$

c. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}$

**Penyelesaian:**

a. $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
pilih $u = \sin x \Rightarrow u' = \cos x$
$v = \cos x \Rightarrow v' = -\sin x$

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{u}{v}$$

maka

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\cos^2 x + \sin^2 x = 1)$$

$$f'(x) = \sec^2 x \qquad \left(\frac{1}{\cos x} = \sec x\right)$$

Menunjukkan hasil yang sama dengan turunan $f(x) = \tan x$ menggunakan definisi.

b. $f(x) = \frac{\cos x}{1+\cos x}$
pilih $u = \cos x \Rightarrow u' = -\sin x$
$v = 1 + \cos x \Rightarrow v' = -\sin x$

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \cos x} = \frac{u}{v}$$

maka

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
$$f'(x) = \frac{(-\sin x)(1+\cos x) - (\cos x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{-\sin x - \sin x\cos x + \cos x\sin x}{(1+\cos x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{-\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

c. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}$

pilih $u = \cos x \Rightarrow u' = -\sin x$

$v = \sin x + \cos x \Rightarrow v' = \cos x - \sin x$

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{u}{v}$$

maka

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
$$f'(x) = \frac{(-\sin x)(\sin x + \cos x) - (\cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin^2 x - \sin x\cos x - \cos^2 x + \cos x\sin x}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x}$$
$$f'(x) = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{1 + \sin 2x} \qquad (2\sin x\cos x = \sin 2x)$$
$$f'(x) = \frac{-1}{1+\sin 2x} \qquad (\cos^2 x + \sin^2 x = 1)$$

## C. Rangkuman

- Diferensial/turunan pertama fungsi $f$ adalah fungsi lain $f'$ (dibaca "$f$ aksen") yang nilainya pada sebarang bilangan $x$ adalah
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
Jika limitnya ada.

- Rumus dasar turunan pertama fungsi trigonometri
  - $f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x$
  - $f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x$
  - $f(x) = \tan x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \sec^2 x$
  - $f(x) = \cot x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\csc^2 x$
  - $f(x) = \sec x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \sec x \tan x$
  - $f(x) = \csc x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\csc x \cot x$

- Jika $k$ suatu konstanta dan $u$, $v$ adalah fungsi dari $x$ dan terturunkan, maka aturan pencarian turunan fungsi aljabar berlaku juga pada turunan fungsi trigonometri .
  - $f(x) = k\,u \quad \Rightarrow \quad f'(x) = k\,u'$
  - $f(x) = u + v \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u' + v'$
  - $f(x) = u - v \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u' - v'$
  - $f(x) = u \,.\, v \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u' .\, v + u \,.\, v'$
  - $f(x) = \frac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

## D. Latihan Soal

Kerjakan latihan soal berikut dengan jujur dan benar.

1. Buktikan rumus dasar turunan fungsi trigonometri berikut dengan definisi.
   a. $f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x$
   b. $f(x) = \csc x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\csc x \cot x$
   c. $f(x) = \cot x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\csc^2 x$
2. Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri berikut.
   a. $f\ (x) = 3x \sin x + \cos x$
   b. $f\ (x) = 2x \cos x - x^3$
   c. $f\ (x) = \frac{\cos x}{5+\sin x}$
3. Tentukan $f'(x)$ dan nilai $f'(x)$ dari fungsi $f(x) = 3x - \cos x + \tan x$ untuk $x = \frac{\pi}{3}$.
4. Tentukan $f'(x)$ untuk $f(x) = \cos^3(2x - 1)$

## Kunci Jawaban dan Pembahasan

1. Buktikan rumus dasar turunan fungsi trigonometri berikut dengan definisi.

a. $f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x$ ***(Skor Maksimum 20)***

**Penyelesaian:**

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ (definisi turunan)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$ (substitusikan $f(x) = \cos x$)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}$$ ($\cos(x+h)=\cos x\cos h - \sin x \sin h$)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\,(\cos h-1)-\sin x\sin h}{h}$$ (sifat distributif)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\,(\cos h-1)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\sin h}{h}$$ (sifat limit)

$$= \cos x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$ (sifat limit)

$$= \cos x(0)-\sin x\,(1)$$ (rumus limit)

$$= -\sin x$$

Jadi, turunan pertama fungsi trigonometri $f(x) = \cos x$ adalah $f'(x) = -\sin x$.

b. $f(x) = \csc x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\csc x \cot x$ ***(Skor Maksimum 20)***

**Penyelesaian:**

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ (definisi turunan)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\csc(x+h)-\csc x}{h}$$ (substitusikan $f(x) = \sec x$)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\sin(x+h)}-\frac{1}{\sin x}\right)$$ ($\csc x = \frac{1}{\sin x}$)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\sin x-\sin(x+h)}{\sin(x+h)\sin x}\right)$$ (samakan penyebut)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\sin x-[\sin x\cos h+\cos x\sin h]}{\sin(x+h)\sin x}\right)$$ ($\sin(x+y) = \sin x\cos y - \cos x \sin y$)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\sin x-\sin x\cos h-\cos x\sin h}{\sin(x+h)\sin x}\right)$$ (penyederhanaan)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\sin x\,(1-\cos h)-\cos x\sin h}{\sin(x+h)\sin x}\right)$$ (sifat distributif)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\,(1-\cos h)}{h\sin(x+h)\sin x}-\frac{\cos x\sin h}{h\sin(x+h)\sin x}$$ (penyederhanaan)

$$= \frac{\cos x}{\sin x}\lim_{h\to 0}\frac{(1-\cos h)}{h\sin(x+h)}-\frac{\cos x}{\sin x}\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h\sin(x+h)}$$ (sifat limit)

$$= \cot x\frac{0}{\cos x}-\cot x\frac{1}{\sin x}$$ (sifat limit)

$$= -\csc x\cot x$$

Jadi, turunan pertama fungsi trigonometri $f(x) = \csc x$ adalah $f'(x) = -\csc x \cot x$.

c. $f(x) = \cot x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\csc^2 x$ ***(Skor Maksimum 20)***

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ (definisi turunan)

$= \lim_{h \to 0} \frac{\cot(x+h) - \cot x}{h}$ (substitusikan $f(x) = \cot x$)

$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{\tan(x+h)} - \frac{1}{\tan x}\right)$ $(\cot x = \frac{1}{\tan x})$

$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1-\tan x \tan h}{\tan x + \tan h} - \frac{1}{\tan x}\right)$ $(\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y})$

$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{(1-\tan x \tan h)\tan x - (\tan x + \tan h)}{(\tan x + \tan h)\tan x}\right)$ (samakan penyebut)

$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\tan x - \tan^2 x \tan h - \tan x - \tan h}{(\tan x + \tan h)\tan x}\right)$ (penyederhanaan)

$= \lim_{h \to 0} \frac{-\tan h\,(\tan^2 x + 1)}{h\,(\tan x + \tan h)\tan x}$ (sifat distributif)

$= \lim_{h \to 0} \frac{-\tan h}{h} \lim_{h \to 0}(\tan^2 x + 1) \lim_{h \to 0} \frac{1}{(\tan x + \tan h)\tan x}$ (sifat limit)

$= (-1)\,(1 + \tan^2 x)\,(\frac{1}{\tan^2 x})$ (sifat limit)

$= -\sec^2 x(\frac{1}{\tan^2 x})$ $(1 + \tan^2 x = \sec^2 x)$

$= -\frac{1}{\cos^2 x}(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x})$ $(\sec x = \frac{1}{\cos x}, \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x})$

$= -\frac{1}{\sin^2 x}$

$= -\csc^2 x$

Jadi, turunan fungsi trigonometri $f(x) = \cot x$ adalah $f'(x) = -\csc^2 x$.

2. Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri berikut.

a. $f(x) = 3x \sin x + \cos x$ ***(Skor Maksimum 10)***

**Penyelesaian:**

$y = 3x \sin x + \cos x$

Untuk $3x.\sin x$ dimisalkan:

$u = 3x \rightarrow u' = 3$

$v = \sin x \rightarrow v' = \cos x$

Jadi,

$y' = 3\sin x + 3x\cos x + (-\sin x)$

$y' = 2\sin x + 3x\cos x$

b. $f(x) = 2x \cos x - x^3$ ***(Skor Maksimum 10)***

**Penyelesaian:**

$y = 2x \cos x - x^3$

Untuk $2x.\cos x$ dimisalkan:

$u = 2x \rightarrow u' = 2$

$v = \cos x \rightarrow v' = -\sin x$

Jadi,

$y' = 2.(\cos x) + 2x.(-\sin x) - 3x^2$

$y' = 2\cos x - 2x\sin x - 3x^2$

c. $f(x) = \frac{\cos x}{5 + \sin x}$ ***(Skor Maksimum 10)***

**Penyelesaian:**

$f(x) = \frac{\cos x}{5 + \sin x}$

Misalkan:

$u = \cos x \rightarrow u' = -\sin x$

$v = 5 + \sin x \rightarrow v' = \cos x$

Jadi,

$$f\ '\ (x) = \frac{u\ 'v - uv\ '}{v^2}$$
$$= \frac{(-\sin x\ )(5 + \sin x\ ) - \cos x\ \cos x}{(5 + \sin x\ )^2}$$
$$= \frac{-5\sin x\ - \sin^2 x\ - \cos^2 x}{(5 + \sin x\ )^2}$$
$$= \frac{-5\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x\ )}{(5 + \sin x\ )^2}$$
$$= \frac{-5\sin x\ - 1}{(5 + \sin x\ )^2}$$

3. Tentukan $f'(x)$ dan nilai $f'(x)$ dari fungsi $f(x) = 3x - \cos x + \tan x$ untuk $x = \frac{\pi}{3}$.

***(Skor Maksimum 10)***

**Penyelesaian:**

$f(x) = 3x - \cos x + \tan x$

$f'(x) = 3 + \sin x - \sec^2 x$ dan

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 + \sin\frac{\pi}{3} - \sec^2\frac{\pi}{3}$$
$$= 3 + \frac{1}{2}\sqrt{3} - 4$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1$$