PERTEMUAN 12

ANTI TURUNAN

(Integral Tak Tentu)

Bagian 2

Teorema A (Teorema Aturan Pangkat)

Jika r adalah sebarang bilangan rasional kecuali -1 maka:

$$\int x^r \, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$$

Bukti:

Turunan ruas kanan adalah:

$$D_x\left[\frac{x^{r+1}}{r+1}+C\right]=\frac{1}{r+1}(r+1)x^r+C$$

Teorema ini mencakup $r = 0$ yaitu:

$$\int 1\ dx = x + C$$

Teorema ini tidak ada interval I yang dirinci, maka dipahami hanya untuk interval tempat x^r terdefinisi. Secara khusus, yang mengecualikan interval yang mengandung titik asal jika $r < 0$.

Teorema B

$$\int \sin x \; dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \; dx = \sin x + C$$

4.5. Integral Tak-Tentu adalah Linear

Perhatikan bahwa pada turunan, D_x merupakan suatu operator linear, yang memiliki dua sifat yaitu:

$$D_x[k\, f(x)] = kD_x f(x)$$

$$D_x[f(x) + g(x)] = D_x\, f(x) + D_x\, g(x)$$

Dari dua sifat tersebut maka menyusul sifat ketiga secara otomatis yaitu:

$$D_x[f(x) - g(x)] = D_x\, f(x) - D_x\, g(x)$$

Teorema C (Integral Tak-Tentu adalah Operator Linear)

Misalkan $f\ dan\ g$ mempunyai anti-turunan (integral tak-tentu) dan misalkan k suatu konstanta, maka:

$$\int k\, f(x)\ dx = k \int f(x)\ dx$$

$$\int [f(x) + g(x)]\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$$

$$\int [f(x) - g(x)]\ dx = \int f(x)\ dx - \int g(x)\ dx$$

Perhatikan ketika aturan rantai diterapkan pada pangkat suatu fungsi. Jika $u = g(x)$ merupakan fungsi yang dapat didiferensiasi dan r suatu bilangan rasional $(r \neq -1)$, maka:

$$D_x \left[\frac{u^{r+1}}{r+1} \right] = u^r \cdot D_x u$$

Atau dengan cara penulisan fungsional:

$$D_x \left[\frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} \right] = [g(x)]^r \cdot g'(x)$$

Teorema D (Aturan Pangkat yang Digeneralisir)

Misalkan g suatu fungsi yang dapat didiferensiasi dan r suatu bilangan rasional yang bukan -1 maka:

$$\int [g(x)]^r \cdot g'(x)\ dx = \left[\frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1}\right] + C\ dengan\ r \neq -1$$

Atau jika dimisalkan:

$$u = g(x)\ \ maka\ \ \ du = g'(x)dx$$

Sehingga diperoleh:

$$\int u^r\ du = \frac{u^{r+1}}{r+1} + C\ dengan\ r \neq -1$$