PERTEMUAN 13

Jumlah Riemann

Partisi P pada selang $[a,b]$

Yang dimaksud dengan partisi P pada selang $[a,b]$ adalah himpunan yang beranggotakan $n+1$ titik-titik yang berurutan pada $[a,b]$

$$P: \quad x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

$[x_{i-1}, x_i]$, $\quad i = 1,2,\ldots,n$ $\qquad\qquad$ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\quad i = 1,2,\ldots,n$

Norm P, dinotasikan dengan $|\mathrm{P}|$, adalah $|\mathrm{P}| = \max\{\Delta x_i \mid i = 1,2,\ldots,n\}$

Jumlah Riemann

f terdefinisi pada selang tutup $[a,b]$

$P: \; x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ partisi P pada selang $[a,b]$

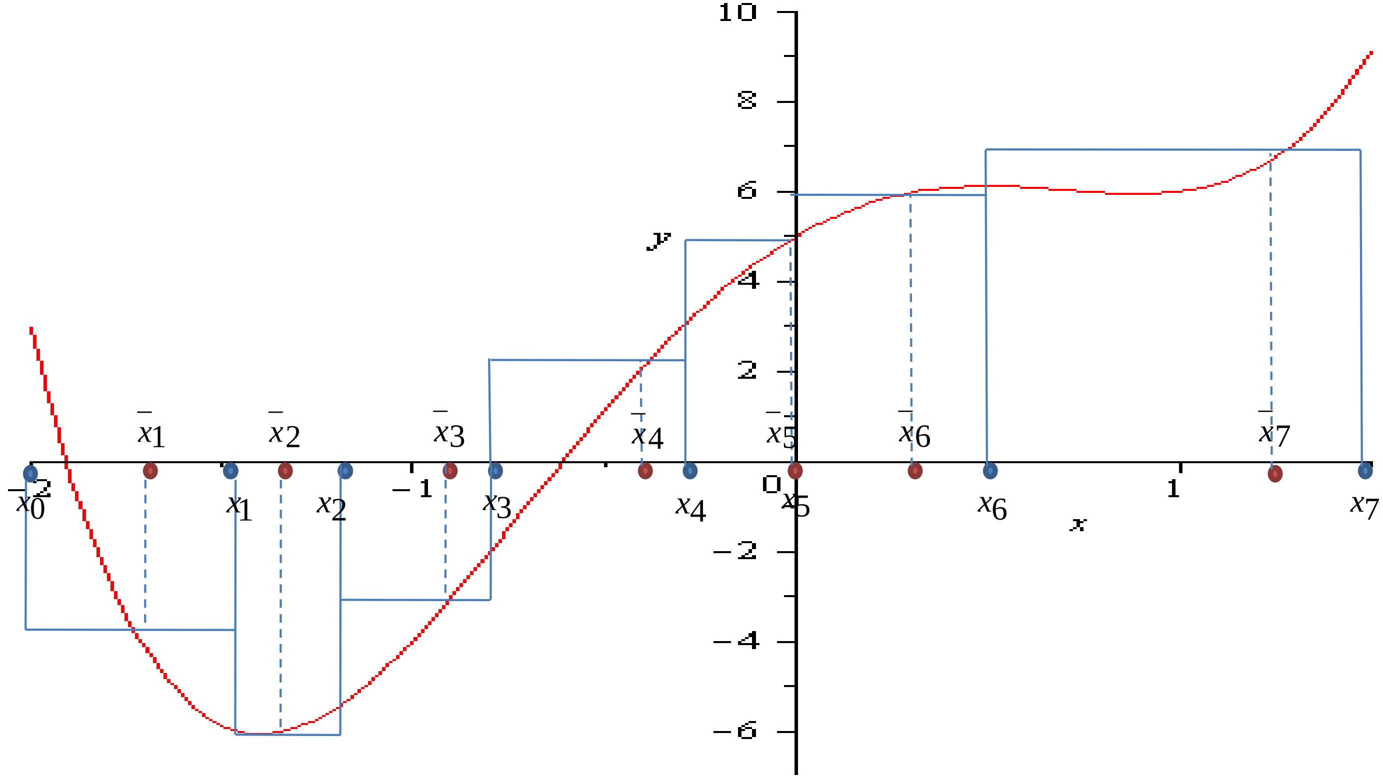
Pada setiap selang bagian ambil sebuah titik sebarang $\bar{x}_i$ (mungkin saja sebuah titik ujung), disebut titik sampel

Penjumlahan

$$R_P = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

dinamakan Jumlah Riemann untuk f yang bersesuaian dengan partisi P

Ilustrasi



Latihan :

Hitung jumlah Riemann untuk $f(x) = -\frac{x}{2} + 3$ yang bersesuaian dengan partisi

$P: -3 < -1{,}3 < 0 < 0{,}9 < 2$, dengan titik sampel $\bar{x}_1 = -2$ $\bar{x}_2 = -0{,}5$ $\bar{x}_3 = 0$ $\bar{x}_4 = 2$

$\bar{x}_i$	$f(\bar{x}_i)$	Δx_i
-2	$-\frac{(-2)}{2} + 3 = 4$	$-1{,}3 - (-3) = 1{,}7$
$-0{,}5$	$-\frac{(-0{,}5)}{2} + 3 = 3{,}25$	$0 - (-1{,}3) = 1{,}3$
0	$-\frac{0}{2} + 3 = 3$	$0{,}9 - (0) = 0{,}9$
2	$-\frac{2}{2} + 3 = 2$	$2 - (0{,}9) = 1{,}1$

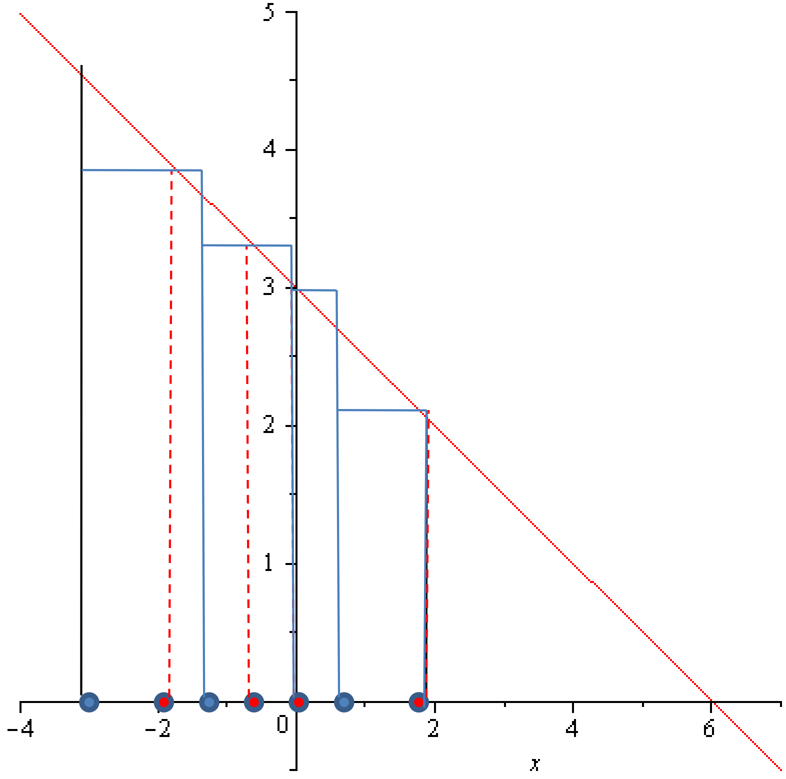
$$R_P = \sum_{i=1}^{4} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

$$= 4(1{,}7) + 3{,}25(1{,}3) + 3(0{,}9) + 2(1{,}1)$$

Latihan :

Buat diagram untuk jumlah Riemann untuk $f(x) = -\frac{x}{2} + 3$ yang bersesuaian dengan partisi $P: -3 < -1{,}3 < 0 < 0{,}9 < 2$ dengan titik sampel

$\bar{x}_1 = -2 \quad \bar{x}_2 = -0{,}5 \quad \bar{x}_3 = 0 \quad \bar{x}_4 = 2$



Definisi

Misal f suatu fungsi yang didefinisikan pada selang tutup $[a,b]$. Jika $\lim\limits_{|P|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$ ada kita katakan f terintegralkan pada $[a,b]$. Lebih lanjut $\int_a^b f(x)dx$ disebut integral tentu (integral Riemann) dari a ke b, diberikan oleh

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

Konsep yang digunakan pada definisi integral tentu atau integral Riemann hampir sama dengan konsep yang dibahas pada pendahuluan luas, tetapi beberapa hal mengalami perubahan

- f boleh negatif pada sebagian atau seluruh $[a, b]$
- panjang interval bagian Δx_i yang terbentuk oleh partisi tidak harus sama
- titik sampel $\overline{x_i}$ boleh berupa titik sebarang pada setiap interval bagian

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i = L$$

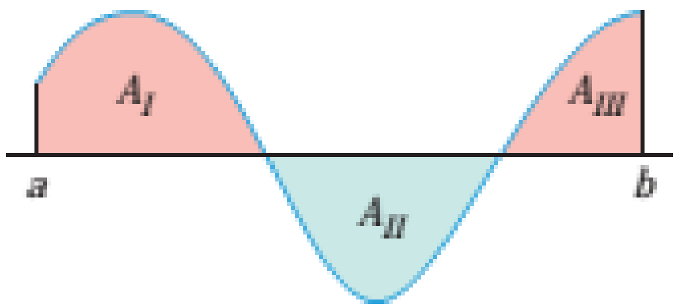
Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i - L \right| < \varepsilon$$

untuk setiap jumlah Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i$ yang bersesuaian dengan partisi P dengan $|P| < \delta$

Secara geometris $\int_a^b f(x)dx$ menyatakan luas bertanda daerah antara kurva $y = f(x)$ dan sumbu- x dalam selang $[a,b]$

Ilustrasi :



$$\int_a^b f(x)dx = A_{\text{atas}} - A_{\text{bawah}} = (A_I + A_{III}) - A_{II}$$

Catatan :

- Pada lambang $\int_a^b f(x)dx$, a disebut batas bawah pengintegralan dan b disebut batas atas pengintegralan
- $\int_a^a f(x)dx = 0$ dan $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- x adalah peubah boneka, sehingga

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(s)ds$$

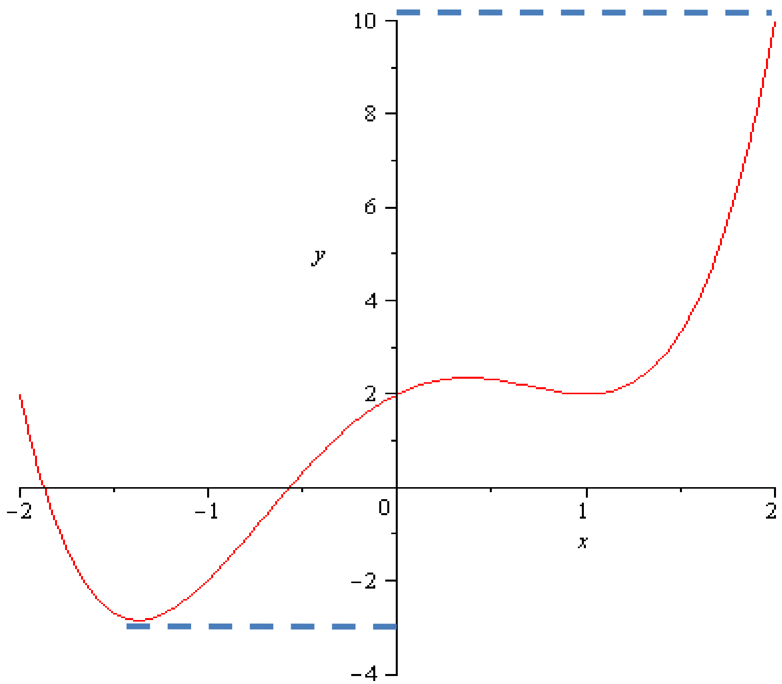
x

Apakah setiap fungsi terintegralkan ? Adakah fungsi yang tidak terintegralkan ?

Fungsi terbatas

Fungsi f dikatakan terbatas pada selang $[a,b]$ jika terdapat konstanta M demikian sehingga $|f(x)| \le M$ untuk semua $x \in [a,b]$

Ilustrasi :



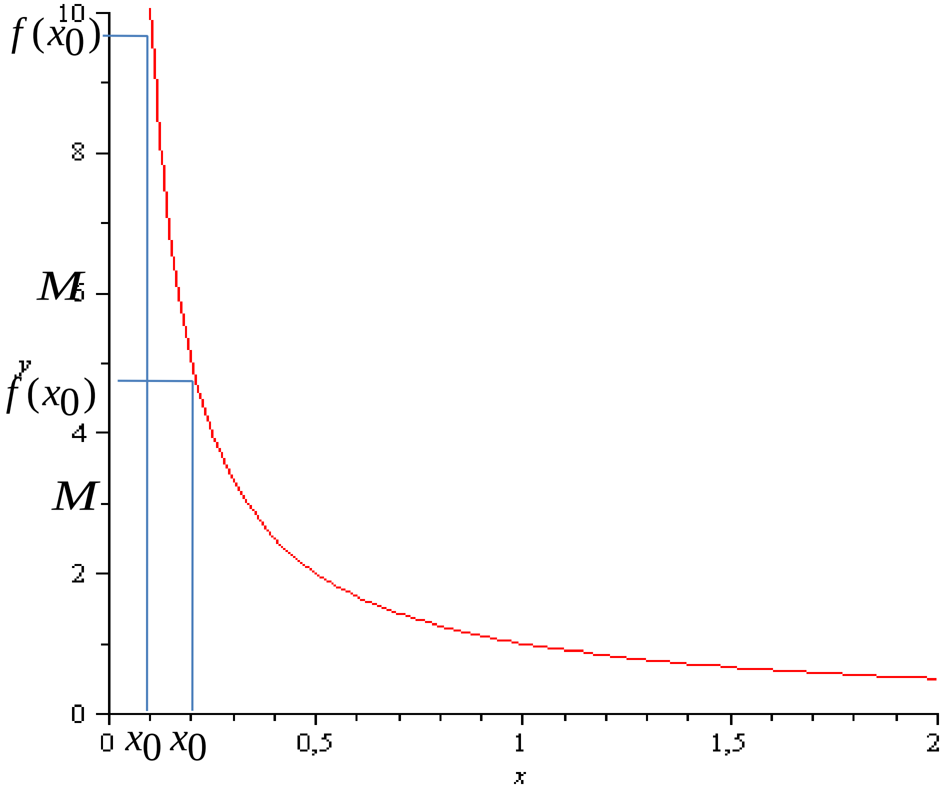
$$|f(x)| \le 10$$

$$\forall x \in [-2,2]$$

Fungsi tidak terbatas

Fungsi f dikatakan tidak terbatas pada selang $[a,b]$ jika untuk setiap konstanta M terdapat $x_0 \in [a,b]$ demikian sehingga $|f(x_0)| > M$

Ilustrasi



Contoh fungsi yang terintegralkan Riemann

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{jika} \quad x\neq 0\\ 0 & \text{jika} \quad x=0\end{cases} \quad \text{pada interval } [-1,1]$$

Contoh fungsi yang tidak terintegralkan Riemann

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{jika} \quad x \text{ irasional}\\ 1 & \text{jika} \quad x \text{ rasional}\end{cases} \quad \text{pada interval } [0,1]$$

Apakah kita bisa mendapatkan suatu kelompok fungsi-fungsi terintegralkan ?

Teorema

Jika f terintegralkan pada $[a,b]$ maka f terbatas pada $[a,b]$

Teorema

Jika f terbatas pada $[a,b]$ dan kontinu pada interval $[a,b]$ tersebut kecuali pada sejumlah berhingga titik maka f terintegralkan pada $[a,b]$

Khususnya jika f kontinu pada selang $[a,b]$, maka f terintegralkan pada $[a,b]$

Akibat teorema ini maka pada sebarang selang tertutup, fungsi-fungsi polinom, sinus, kosinus dan fungsi rasional (asal tidak mengandung titik-titik yang mengakibatkan penyebut nol) terintegralkan

Latihan :

Mana diantara fungsi yang berikut terintegralkan dan mana yang tidak terintegralkan pada $[-2,2]$

a. $f(x) = x^3 + \sin x$

b. $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$

c. $f(x) = \tan x$

d. $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & jika \quad x \neq 0 \\ 0 & jika \quad x = 0 \end{cases}$

Nyatakan benar atau salah

Jika f suatu fungsi terbatas pada $[a,b]$ maka f terintegralkan pada $[a,b]$

Jika f tidak kontinu pada $[a,b]$ maka f tidak terintegralkan pada $[a,b]$

Jika diketahui bahwa suatu fungsi terintegralkan maka kita boleh menghitung integralnya memakai suatu partisi tetap (selang bagiannya sama panjang) dan mengambil titik sampel dalam cara yang mudah bagi kita

Latihan :

Hitung $\int_{-2}^{3} x + 3 \; dx$

dengan menghitung limit dari jumlah Riemann menggunakan partisi tetap dan titik sampel titik ujung kanan selang bagian $(\bar{x}_i = x_i)$

Latihan :

Hitung $\int_{-1}^{2} (x^2 - 1)dx$

dengan menghitung limit dari jumlah Riemann menggunakan partisi tetap dan titik sampel titik ujung kiri selang bagian ($\bar{x}_i = x_{i-1}$)