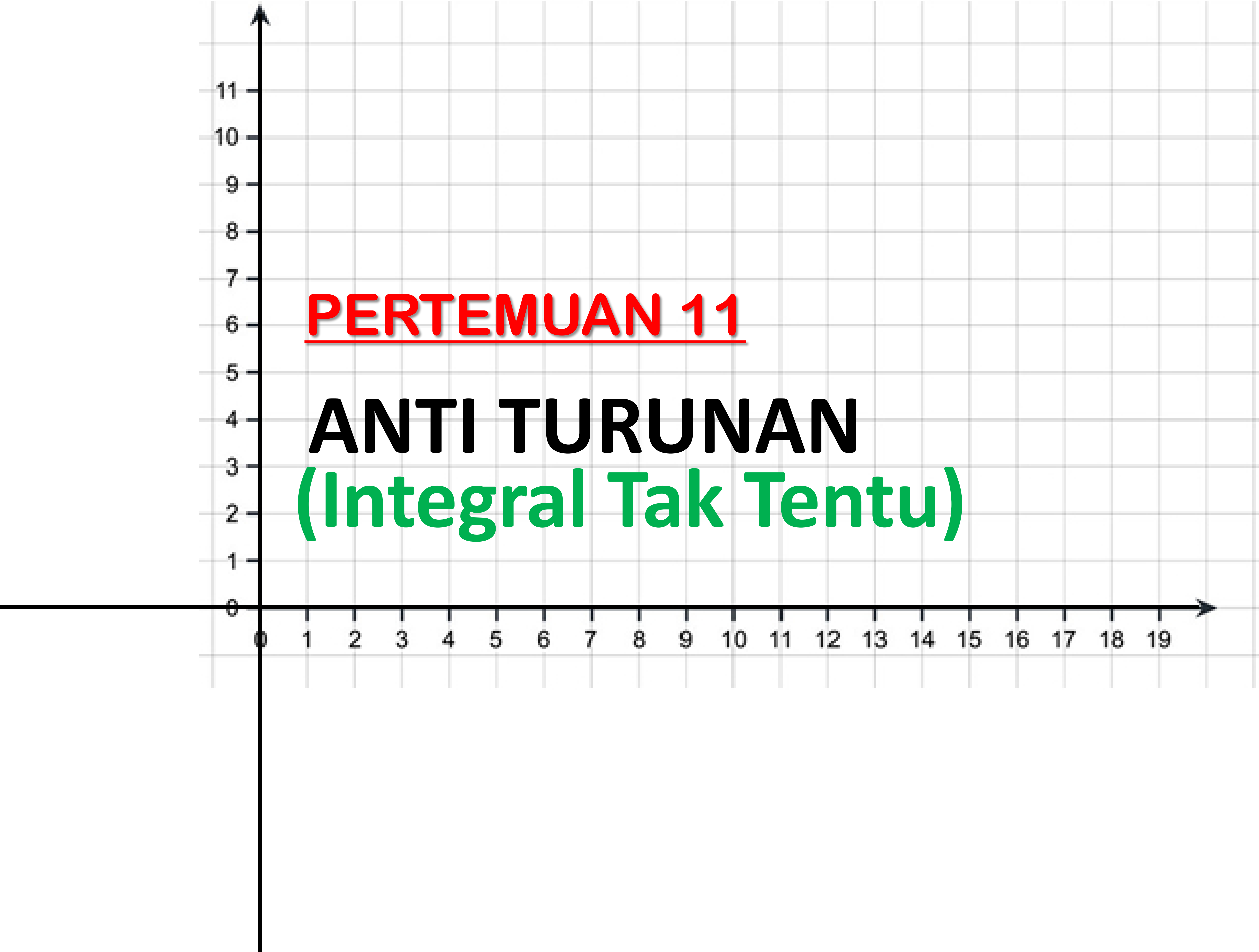
PERTEMUAN 11

ANTI TURUNAN

(Integral Tak Tentu)



Definisi 1.1

Fungsi F disebut suatu anti turunan dari fungsi f di suatu selang I apabila

$$F'(x) = \mathrm{f}(\mathrm{x})$$

Contoh 1.1

Apabila diberikan fungsi $F(x)=5x^3+3x^2+7$, maka $F'(x)=15x^2+6x$. Jadi apabila kita sebut $f(x)=15x^2+6x$ maka f adalah turunan dari F, ini berarti F adalah anti turunan dari f. Namun demikian apabila $G(x)=F(x)+C$; C suatu konstanta sebarang maka

$$G'(x)=F'(x)=f(x).$$

Ini berarti $G(x)$ juga merupakan anti turunan dari f. Jadi anti turunan dari fungsi f sangat banyak.

Contoh 1.2

Jika diberikan fungsi $F(x) = C$, C konstanta maka $F'(x) = 0$.

Ini berarti anti turunan dari fungsi $f(x) = 0$ adalah fungsi konstan.

Contoh 1.3

Misalkan dua fungsi f dan g memenuhi hubungan $f'(x) = g'(x)$. Selisih fungsi f dan g kita sebut $h(x) = f(x) - g(x)$. Sehingga didapat $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$. Dari Contoh 1.2, hal ini berarti $h(x) = C$, C konstan dan $C = f(x) - g(x)$ atau $f(x) = g(x) + C$.

Contoh ini memberi kesimpulan bahwa dua fungsi yang turunannya sama, maka kedua fungsi tersebut berbeda dalam konstanta.

Pembahasan selanjutnya akan digunakan istilah integral tak tentu untuk anti turunan.

Apabila $F'(x) = f(x)$, integral tak tentu dari fungsi f terhadap x adalah

$$\int f(x)dx = F(x) + C\ ; \quad C \text{ kontanta sembarang}$$

$f(x)$ disebut integran,

dx disebut integrator dan,

$F(x)$ disebut fungsi primitif.

Teorema 1.1

i. $\int dx = x + C$

ii. $\int k\ f(x)dx = k\int f(x)dx$; k konstan

iii. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

iv. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c; \quad n \neq -1.$

Hitunglah $\int (3x+7)dx$.

Tentukan $\int \sqrt[5]{x^3}\ dx$.

Hitunglah $\int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$

Hitunglah $\int (3x+7)dx$.

Jawab:

Dengan menggunakan (iii) dan (ii)

$$\begin{aligned}\int (3x+7)dx &= \int 3x\,dx + \int 7dx \\ &= 3\int x\,dx + 7\int dx \\ &= 3\left(\frac{1}{2}x^2 + c_1\right) + 7(x + c_2) \\ &= \frac{3}{2}x^2 + 3c_1 + 7x + 7c_2.\end{aligned}$$

Karena $3c_1 + 7c_2$ konstanta sebarang, hal tersebut dapat dinyatakan oleh C, sehingga diperoleh jawab

$$\frac{3}{2}x^2 + 7x + C$$

Hasil ini dapat diperiksa dengan menurunkan

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}x^2 + 7x + C\right) = 3x + 7.$$

Tentukan $\int \sqrt[5]{x^3}\ dx$.

Jawab:

$$\int \sqrt[5]{x^3}\ dx = \int x^{\frac{3}{5}} dx = \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + C$$

$$= \frac{5}{8} x^{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8} x \sqrt[5]{x^3} + C$$

Hitunglah $\int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$

Jawab:

$$\int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = \int \left(x^{-3} + x^{-1/3} \right) dx$$

$$= \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + \frac{x^{-1/3+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + \frac{x^{2/3}}{\frac{2}{3}} + C$$

$$= -\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{2} x^{2/3} + C$$

Dalam banyak hal untuk menentukan integral tak tentu tidak selalu bisa langsung diperoleh dengan menggunakan Teorema 1.1 di atas, tetapi terkadang dapat diusahakan dengan cara **mengganti peubahnya** contoh hitunglah integral berikut

$$\int 4x\sqrt{1-x^2}\ dx.$$

Substitusikan $u = 1 - x^2$ maka $du = -2x\,dx$ atau $4x\,dx = -2du$, sehingga

$$\int 4x\sqrt{1-x^2}\ dx = \int u^{1/2}(-2du) = -2\int u^{1/2}du$$

$$= -\frac{4}{3}u^{3/2} + C = -\frac{4}{3}(1-x^2)^{3/2} + C$$

Prosedur penyelesaian integral tersebut dapat dituangkan pada teorema berikut, yang analog dengan aturan rantai pada penurunan.

Teorema 1.2 (Aturan rantai untuk integral tak tentu)

Misalkan fungsi g dapat diturunkan terhadap x dan range dari fungsi g adalah selang I. Misalkan fungsi f terdefinisi di I dan F merupakan antiturunan dari f di I. Jika $u = g(x)$, maka

$$\int f\left(g(x)\right) \; g'(x)\, dx = C = F\left(g(x)\right) + C$$

Teorema 1.3

Jika g fungsi yang diferensiabel dan $u = g(x)$, maka

$$\int [g(x)]^n \; g'(x)dx = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C \text{ apabila}$$

$n \neq -1$.

Hitunglah $\int \sqrt{5x-4}\ dx$.

Jawab:

Dengan menggunakan Teorema 1.3.

Misalkan $u = 5x - 4$ maka $du = 5dx$ atau $\frac{1}{5}du = dx$, sehingga

$$\int \sqrt{5x-4}\ dx = \int u^{1/2} \cdot \frac{1}{5}du = \frac{1}{5}\int u^{1/2}du$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}u^{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{15}(5x-4)^{3/2} + C$$

Hitunglah $\int x(4+3x^2)^{10}\,dx$.

Jawab:

Karena $d(4+3x^2)=6x\,dx$, maka dapat ditulis

$$\int x(4+3x^2)^{10}\,dx=\frac{1}{6}\int (4+3x^2)^{10}\,d(4+3x^2)$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{11}(4+3x^2)^{11}+C$$

$$=\frac{1}{66}(4+3x^2)^{11}+C$$

Hitunglah $\int x^2 \sqrt{3+x}\, dx$.

Jawab:

Misalkan $u = \sqrt{3+x}$; maka $u^2 = 3+x$ atau $x = u^2 - 3$ dan diperoleh $dx = 2u\, du$.

Dengan substitusi ini didapat

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sqrt{3+x}\, dx &= \int (u^2 - 3)^2 \,.\, u \,.\, 2u\, du \\
&= \int (2u^6 - 12u^4 + 18u^2)du \\
&= \frac{2}{7}u^7 - \frac{12}{5}u^5 + 6u^3 + C \\
&= \frac{2}{7}(3+x)^{7/2} - \frac{12}{5}(3+x)^{5/2} + 6(3+x)^{3/2} + C
\end{aligned}$$