1

LOGIKA PROPOSISI

1.1. Pernyataan

Logika proposisi sering juga disebut logika matematika ataupun logika deduktif.

Logika proposisi berisi pernyataan-pernyataan (dapat tunggal maupun gabungan).

Pernyataan adalah kalimat deklarasi yang dinyatakan dengan huruf-huruf kecil, misalnya:

$$p, q, r, s$$

Pernyataan mempunyai sifat dasar yaitu dapat bernilai benar (pernyataan benar) atau bernilai salah (pernyataan salah), tetapi tidak mungkin memiliki sifat kedua-duanya.

Kebenaran atau kesalahan sebuah pernyataan dinamakan nilai kebenaran dari pernyataan tersebut.

Contoh:

1. Bilangan biner digunakan dalam sistem digital adalah pernyataan yang benar.

2. Sistem analog lebih akurat daripada sistem digital adalah pernyataan yang salah.
3. Astaga, mahal sekali harga notebook itu adalah kalimat keheranan, bukan pernyataan.
4. Siang tadi notebook Ira jatuh dari meja adalah bukan pernyataan karena dapat bernilai benar maupun bernilai salah.
5. Corezdeo lebih bagus kinerjanya dan lebih mahal dari pentium IV generasi sebelumnya adalah pernyataan yang benar.

Kalimat-kalimat yang tidak termasuk pernyataan, adalah:

- Kalimat perintah
- Kalimat pertanyaan
- Kalimat keheranan
- Kalimat harapan
- Kalimat ……walaupun…..

1.2 PERNYATAAN GABUNGAN

Beberapa pernyataan dapat digabung dengan kata penghubung dan, atau, tidak/bukan, serta variatifnya, yang selanjutnya disebut pernyataan gabungan atau pernyataan majemuk atau *compound statement.*

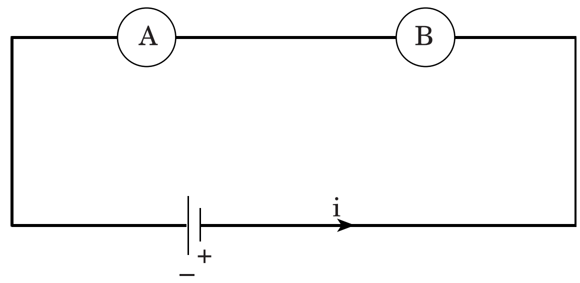
Macam-macam pernyataan gabungan.

1.2.1 Konjungsi

Konjungsi adalah pernyataan gabungan dari dua pernyataan dengan kata penghubung **dan** Notasi-notasi konjungsi:

$$p \wedge q\text{ , } p \text{ x } q\text{, } p.q\text{, } pq$$

Bagaimana menentukan benar atau salah sebuah konjungsi? Konjungsi dianalogikan dengan sebuah rangkaian listrik seri:



Bila lampu B dan lampu A hidup maka arus listrik dapat mengalir dari kutup positip menuju kutup negatip sebuah baterai, akibatnya kedua lampu A dan B menyala/hidup.Bila lampu B mati dan lampu A hidup atau sebaliknya, maka arus listrik tidak dapat mengalir menuju kutub negatip baterai, akibatnya kedua lampu A dan B tidak menyala/mati. Demikian juga bila lampu A dan B mati. Dengan demikian dapat di simpulkan bahwa konjungsi benar bila keduanya hidup, selain itu salah.

Tabel Kebenaran Konjungsi

p	q	$p \wedge q$
+	+	+
+	−	−
−	+	−
−	−	−

atau

p	$\wedge$	q
+	+	+
+	−	−
−	−	+
−	−	−

dimana + berarti benar dan - berarti salah

Contoh:

p = sistem analog adalah suatu sistem dimana tanda fisik/ kuantitas, dapat berbeda secara terus-menerus melebihi jarak tertentu adalah pernyataan benar

q = sistem digital adalah suatu sistem dimana tanda fisik/ kuantitas, hanya dapat mengasumsikan nilai yang berlainan adalah pernyataan yang benar.

r = sistem bilangan desimal adalah sistem bilangan yang digunakan dalam sistem digital adalah pernyataan yang salah

s = aljabar linear adalah alat matematika dasar untuk disain logika adalah pernyataan salah.

Maka:

$p \wedge q$ adalah konjungsi yang benar karena p benar, q benar.

$q \times r$ adalah konjungsi yang salah karena q benar, r salah.

$r \,.\, s$ adalah konjungsi yang salah karena r salah, s salah.

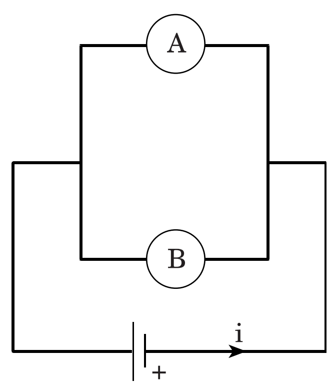
1.2.2 Disjungsi

Disjungsi adalah pernyataan gabungan dari dua pernyataan dengan kata penghubung **atau**.

Notasi-notasi disjungsi:

$$p \vee q,\ p + q$$

Bagaimana menentukan benar atau salah sebuah disjungsi? Disjungsi dapat dianalogikan dengan sebuah rangkaian listrik yang pararel:



Bila lampu A dan lampu B hidup maka arus listrik i dapat bergerak/mengalir dari kutup positip ke kutup negatip sebuah baterai, akibatnya lampu A dan B menyala.

Bila lampu A hidup dan lampu B mati (atau sebaliknya), maka arus listrik i masih dapat mengalir dari kutup positip ke kutup negatip sebuah baterai. Akibatnya lampu yang hidup akan menyala dan yang mati tidak menyala.

Bila lampu A dan B mati, maka arus listrik i tidak dapat mengalir ke kutup negatip.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa disjungsi salah bila kedua lampu mati, selain itu benar.

Tabel Kebenaran Disjungsi

p	q	$p \vee q$
+	+	+
+	–	+
–	+	+
–	–	–

atau

p	$\vee$	q
+	+	+
+	+	–
–	+	+
–	–	–

Catatan:

Simbol tabel kebenaran yang biasa digunakan :

Benar = T, B, +, 1
Salah = F, S, –, 0

Contoh:

p = keyboard adalah alat yang dapat digunakan untuk input data kedalam komputer adalah pernyataan benar.

q = Harddisk adalah alat yang menentukan kecepatan kerja komputer adalah pernyataan salah.

r = Procesor alat yang berfungsi sebagai otak dari sebuah komputer adalah pernyataan benar.

s = Windows XP adalah sistematika menulis buku adalah pernyataan salah.

Maka:

$p \vee q$ adalah disjungsi yang benar karena p benar, q salah.

$p \vee r$ adalah disjungsi yang benar karena p benar, r benar.

$q \vee s$ adalah disjungsi yang salah karena q salah, s salah.

1.2.3 Negasi

Negasi adalah sebuah pernyataan yang meniadakan pernyataan yang ada, dapat di bentuk dengan menulis "adalah salah bahwa…" atau dengan menyisipkan kata " tidak" dalam sebuah pernyataan.

Notasi-notasi negasi:

$$\sim p, p', \overline{p}$$

Contoh:

p = Harddisk adalah alat yang menentukan kecepatan kerja komputer adalah pernyataan salah

Maka

~ p = Adalah salah bahwa harddisk adalah alat yang menentukan kecepatan kerja komputer adalah pernyataan benar.

Jadi kebenaran sebuah negasi adalah lawan dari kebenaran pernyataannya.

Tabel kebenaran negasi:

p	~p
+	–
–	+

1.2.4 Jointdenial (Not OR/ NOR)

Jointdenial adalah pernyataan gabungan yang dihasilkan dari menegasikan disjungsi.

Notasi NOR:

$$p \downarrow q, \text{p nor q}, \sim (p \vee q)$$

Karena jointdenial adalah negasi dari or, maka tabel kebenaran NOR adalah sebagai berikut:

p	q	$p \vee q$	$p \downarrow q$
+	+	+	–
+	–	+	–
–	+	+	–
–	–	–	+

atau

~	(p	$\vee$	q)
–	+	+	+
–	+	+	–
–	–	+	+
+	–	–	–

1.2.5 Not And (NAND)

NAND adalah pernyataan gabungan yang dihasilkan dari menegasikan konjungsi.

Notasi NAND:

$$\sim (p \wedge q), (p \wedge q)'$$

Karena NAND negasi dari konjungsi, maka tabel kebenaran NAND adalah sebagai berikut:

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$
+	+	+	–
+	–	–	+
–	+	–	+
–	–	–	+

atau

~	(p	$\wedge$	q)
–	+	+	+
+	+	–	–
+	–	–	+
+	–	–	–

1.2.6 Exclusive or (exor)

Exor adalah pernyataan gabungan dimana salah satu p atau q (tidak kedua-duanya) adalah benar

Notasi exor:

$$p \veebar q$$

Contoh:

p = sistem analog adalah suatu sistem dimana tanda fisik/ kuantitas, dapat berbeda secara terus-menerus melebihi jarak tertentu. adalah pernyataan benar

q = sistem digital adalah suatu sistem dimana tanda fisik/ kuantitas, hanya dapat mengasumsikan nilai yang berlainan adalah pernyataan yang benar.

r = sistem bilangan desimal adalah sistem bilangan yang digunakan dalam system digital adalah pernyataan yang salah.

s = aljabar linear adalah alat matematika dasar untuk disain logika adalah pernyataan salah.

Maka:

$p \veebar q$ adalah exor yang salah karena p benar, q benar.
$p \veebar r$ adalah exor yang benar karena p benar, r salah.
$s \veebar q$ adalah exor yang benar karena q benar, s salah.
$r \veebar s$ adalah exor yang salah karena r salah, s salah.

dengan demikian tabel kebenaran exor dapat ditulis sebagai berikut:

p	q	$p \veebar q$
+	+	–
+	–	+
–	+	+
–	–	–

atau

p	$\veebar$	q
+	–	+
+	+	–
–	+	+
–	–	–

1.2.7 Exclusive NOR (ExNOR)

EXNOR adalah pernyataan gabungan **ingkaran** dari EXOR di mana nilai kebenarannya benar bila kedua pernyataannya benar atau salah.

Notasi EXNOR:

$$\sim (p \veebar q)$$

Contoh:

p = sistem analog adalah suatu sistem dimana tanda fisik/ kuantitas, dapat berbeda secara terus-menerus melebihi jarak tertentu. adalah pernyataan benar

q = sistem digital adalah suatu sistem dimana tanda fisik/ kuantitas, hanya dapat mengasumsikan nilai yang berlainan adalah pernyataan yang benar.

r = sistem bilangan desimal adalah sistem bilangan yang digunakan dalam sistem digital adalah pernyataan yang salah

s = aljabar linear adalah alat matematika dasar untuk disain logika adalah pernyataan salah.

Maka:

p EXNOR q, adalah pernyataan yang benar
p EXNOR r, adalah pernyataan yang salah
s EXNOR q, adalah pernyataan yang salah
r EXNOR s, adalah pernyataan yang benar

Dengan demikian tabel kebenaran EXNOR:

p	q	$\sim (p \veebar q)$
+	+	+
+	–	–
–	+	–
–	–	+

1.3 TAUTOLOGI DAN KONTRADIKSI

Proposisi dipandang dari nilai kebenarannya dapat digolongkan menjadi 2 yaitu

1.3.1 Tautologi

Tautologi adalah proposisi yang selalu benar apapun pernyataannya.

Notasi tautologi:

$$p \vee \sim p$$

Contoh:

p = Harddisk adalah alat yang menentukan kecepatan kerja komputer adalah pernyataan salah

~p = adalah salah bahwa harddisk adalah alat yang menentukan kecepatan kerja komputer adalah pernyataan benar.

Maka

$p \vee \sim p$ adalah proposisi yang benar

Tabel kebenaran tautologi:

p	~ q	p∨ ~ p
+	–	+
–	+	+

atau

p	∨	~ p
+	+	–
–	+	+

1.3.2 Kontradiksi

Kontradiksi adalah proposisi yang selalu salah apapun pernyataannya

Notasi kontradiksi:

$$p \wedge \sim p$$

Contoh:

p = Harddisk adalah alat yang menentukan kecepatan kerja komputer adalah pernyataan salah

~p = adalah salah bahwa harddisk adalah alat yang menentukan kecepatan kerja komputer adalah pernyataan benar.

Maka

$p \wedge \sim p$ adalah proposisi yang salah

Tabel kebenaran kontradiksi:

p	~ p	$p \wedge \sim p$
+	–	–
–	+	–

1.4 KESETARAAN LOGIS

Dua buah pernyataan yang berbeda dikatakan setara bila nilai kebenarannya sama

Contoh:

1. Tidak benar, bahwa aljabar linear adalah alat matematika dasar untuk disain logika adalah pernyataan benar.
2. Aljabar Boole adalah alat matematika dasar untuk disain logika adalah pernyataan benar.

Kedua pernyataan di atas mempunyai nilai kebenaran yang sama. Jadi kedua pernyataan di atas setara/ekivalen.

Akibatnya dua proposisi P(p, q, r, ...) dan Q(p, q, r, ...) dapat dikatakan setara jika memiliki tabel kebenaran yang sama. Dua buah proposisi yang setara dapat dinyatakan dengan $P(p, q, r, ...) \equiv Q(p, q, r, ...)$.

Contoh:

Selidiki apakah kedua proposisi di bawah setara:

1. Tidak benar, bahwa sistem bilangan biner digunakan dalam sistem digital atau sistem digital hanya dapat mengasumsikan nilai yang berlainan.
2. Sistem bilangan biner tidak digunakan dalam sistem digital dan tidak benar bahwa sistem digital hanya dapat mengasumsikan nilai yang berlainan.

Kedua proposisi di atas dapat dituliskan dengan notasi sbb:

1. $\sim(p \vee q)$
2. $\sim p \wedge \sim q$

sehingga tabel kebenarannya sebagai berikut:

p	q	~p	~q	$(p \vee q)$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \vee \sim q$
+	+	–	–	+	–	–
+	–	–	+	+	–	–
–	+	+	–	+	–	–
–	–	+	+	–	+	+

Jadi, kedua proposisi tersebut setara atau $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

1.5 Aljabar Proposisi

Aljabar proposisi merupakan penerapan hukum-hukum aljabar dalam logika proposisi.

Hukum-hukum tersebut adalah:

1. Idempoten

   $p \vee p \equiv p$

   $p \wedge p \equiv p$

2. Asosiatif

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

3. Komutatif

$p \vee q \equiv q \vee p$
$p \wedge q \equiv q \wedge p$

4. Distribusi

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

5. Identitas

$p \vee f \equiv p$ $\quad$ $p \wedge f \equiv f$
$p \vee t \equiv t$ $\quad$ $p \wedge t \equiv p$

6. Komplemen

$p \vee \sim p = t$ $\quad$ $\sim t = f$
$p \wedge \sim p = f$ $\quad$ $\sim f = t$

7. Involution

$\sim p(\sim p) \equiv p$

8. De Morgan's

$\sim (p \wedge q) =\sim p \vee q$
$\sim (p \vee q) =\sim p \wedge \sim q$

9. Absorbsi

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

10. Implikasi

$p \rightarrow q =\sim p \vee q$

11. Biimplikasi

$p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

12. Kontraposisi

    $p \to q = \sim q \to \sim p$

Salah satu manfaat hukum-hukum aljabar proposisi adalah untuk menyederhanakan pernyataan gabungan.

Contoh:

Sederhanakan proposisi di bawah (buktikan hukum. Absorbsi):

$$\begin{aligned} p \wedge (p \vee q) &\equiv (p \vee f) \wedge (p \vee q) \\ &\equiv p \vee (f \wedge q) \\ &\equiv p \vee f \\ &\equiv p \end{aligned}$$

1.6 IMPLIKASI DAN BIIMPLIKASI

1.6.1 Implikasi

Perhatikan pernyataan berikut: jika memakai Microsoft Word maka Windows adalah sistem operasinya.

Microsoft Word merupakan syarat cukup bagi Windows, sedangkan Windows merupakan syarat perlu bagi Microsoft Word, artinya Microsoft Word tidak dapat digunakan tanpa windows tetapi Windows dapat digunakan tanpa Microsoft Word.

Contoh pernyataan di atas disebut pernyataan bersyarat atau conditional statement.

Notasi implikasi:

$$p \to q$$

dibaca: jika p maka q

1.6.1.1 Kebenaran implikasi

1. Jika Microsoft Word maka Windows sistem operasinya adalah implikasi benar, karena keduanya buatan Microsoft.

Mengacu pada implikasi di atas maka:

2. Jika Microsoft Word maka bukan Windows sistem operasinya adalah pernyataan salah, karena sistem operasi Microsoft Word adalah Windows
3. Jika bukan Microsoft Word maka Windows sistem operasinya adalah pernyataan benar karena aplikasi under Windows tidak hanya Microsoft Word
4. Jika bukan Microsoft word maka bukan windows sistem operasi-nya adalah pernyataan benar, karena aplikasi selain Microsoft Word, sistem operasinya bisa jadi bukan Windows.

Tabel kebenaran implikasi sebagai berikut:

p	q	$p \rightarrow q$
+	+	+
+	–	–
–	+	+
–	–	+

Contoh:

Misalkan pernyataan p adalah benar, q adalah salah dan r adalah benar, tentukan kebenaran proposisi berikut:

$$(p \vee q) \rightarrow \overline{r}$$

Jawab:

Proposisi di atas dapat diubah menjadi

$$(t \vee f) \rightarrow f$$
$$t \rightarrow f$$
$$f$$

Jadi proposisi di atas salah

Bukti dengan tabel :

p	$\vee$	q	$\rightarrow$	$\bar{r}$	r
+		+		–	+
+		+		+	–
+	+	–	Δ	–	+
+		–		+	–

1.6.1.2 Konvers, Invers, dan Kontraposisi

Jika implikasi: $p \rightarrow q$

Maka: Konversnya : $q \rightarrow p$

Inversnya : $\sim p \rightarrow \sim q$

Kontrapositipnya : $\sim q \rightarrow \sim p$

Contoh:

Jika Microsoft Word maka Windows sistem operasinya adalah implikasi yang benar, berdasarkan implikasi di atas maka:

Konversennya : Jika Windows sistem operasinya maka Microsoft Word aplikatifnya.

Inversenya : Jika bukan Microsoft Word maka bukan Windows sistem operasinya

Kontrapositipnya : Jika bukan windows sistem operasinya maka bukan Microsoft Word aplikatifnya

Tabel kebenaran

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow \sim p$	$q \rightarrow p$	$\sim p \rightarrow \sim q$
+	+	–	–	+	+	+	+
+	–	–	+	–	–	+	+
–	+	+	–	+	+	–	–
–	–	+	+	+	+	+	+

setara setara

Jadi dapat disimpulkan bahwa proposisi yang saling kontra-positif mempunyai nilai kebenaran yang sama (*ekuivalen*).

Berdasarkan sifat tersebut maka kita dapat membuktikan suatu dalil dalam bentuk implikasi melalui nilai kebenaran kontra-positipnya.

Contoh:

Buktikan bahwa:

Jika x^2 bilangan genap, maka x juga bilangan genap

dapat ditulis : x^2 = genap $\rightarrow$ x = genap

Jawab:

Kontrapositif dari implikasi di atas adalah:

Jika x bukan bilangan genap maka x^2 juga bukan bilangan genap.

dapat ditulis :

Jika x = ganjil maka x^2 = ganjil

Setiap bilangan bulat bukan genap adalah ganjil, sehingga x ganjil ditulis $x = 2k + 1$, k bilangan bulat, akibatnya:

$$\begin{aligned} x^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

Karena	k	bilangan bulat maka:
	k^2	juga bilangan bulat
	2k	juga bilangan genap
	$2k^2 + 2k$	juga bilangan genap

sehingga x^2 = bilangan ganjil, karena bilangan genap ditambah 1 sama dengan bilangan ganjil.

Jadi kontrapositipnya benar akibatnya implikasinya juga benar.

1.6.2 *Biimplikasi*

Perhatikan pernyataan berikut:

> Microsoft Word jika dan hanya jika ingin membuat dokumen dengan sistem operasi Windows

Pernyataan tersebut disebut biimplikasi atau biconditional statement.

Notasi biimplikasi : $p \leftrightarrow q$
dibaca: p jika dan hanya jika q

1.6.2.1. *Kebenaran Biimplikasi*

1. Microsoft Word jika dan hanya jika ingin membuat dokumen dengan sistem operasi Windows adalah pernyataan benar

Berdasarkan biimplikasi diatas, maka:

2. Microsoft Word jika dan hanya jika tidak membuat dokumen dengan sistem operasi Windows adalah pernyataan salah
3. Bukan Microsoft Word jika dan hanya jika membuat dokumen dengan sistem operasi Windows adalah pernyataan salah
4. Bukan Microsoft Word jika dan hanya jika tidak membuat dokumen dengan sistem operasi Windows adalah pernyataan benar

Tabel kebenaran biimplikasi:

p	q	$p \leftrightarrow q$
+	+	+
+	–	–
–	+	–
–	–	+

1.7 Argumentasi

Argumentasi adalah kumpulan pernyataan-pernyataan atau kumpulan premis-premis atau kumpulan dasar pendapat serta kesimpulan (konklusi)

Notasi:

$$\begin{array}{l} P(p,q,\cdots) \\ Q(p,q,\cdots) \\ \vdots \\ \hline \therefore C(p,q,\cdots) \end{array}$$

P, Q, …	masing-masing disebut dasar pendapat atau premis
{P, Q, … }	bersama-sama disebut hipotesa
C	adalah conclusion/kesimpulan

Contoh:

Jika rajin belajar maka lulus ujian
tidak lulus ujian

$\therefore$ tidak rajin belajar

1.7.1. Kebenaran/Validitas Argumen

Validitas argument tergantung dari nilai kebenaran masing-masing premis dan kesimpulannya.

Suatu argument dikatakan valid bila masing-masing premisnya benar dan kesimpulannya juga benar.

Contoh 1:

Jika merancang gerbang logika maka memakai sistem bilangan biner

Jika memakai sistem bilangan biner maka sistem yang dibangun digital

$\therefore$ Jika merancang gerbang logika maka sistem yang dibangun digital

Argumen tersebut dapat dituliskan dengan notasi sebagai berikut:

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

Sekarang perhatikan tabel kebenaran:

p	q	r	p→q	q → r	p→r
+	+	+	+	+	+
+	+	−	+	−	−
+	−	+	−	+	+
+	−	−	−	+	−
−	+	+	+	+	+
−	+	−	+	-	+
−	−	+	+	+	+
−	−	−	+	+	+

Keterangan :

Lingkari tabel premis 1 dan tabel premis 2 yang keduanya sama dengan benar. Kemudian tandai tabel kesimpulan dengan Δ. (Kesimpulan yang sejajar dengan premis 1 dan 2 yang telah dilingkari). Perhatikan tanda yang ada di dalam Δ, ternyata semua bernilai benar.

Kesimpulan:

Argumen tersebut di atas valid, karena dengan premis yang benar semua kesimpulannya juga benar semua.

Contoh 2:

Jika merancang gerbang logika maka memakai sistem bilangan biner
Memakai sistem bilangan biner

$\therefore$ Merancang gerbang logika

Argumen di atas dapat dituliskan dengan notasi

$p \rightarrow q$	disebut premis 1
q	disebut premis 2
$\therefore p$	disebut kesimpulan

Dengan cara yang sama kita dapat menentukan nilai kebenaran argumen di atas.

p	q	$p \rightarrow q$
+	+	+
+	−	−
−	+	+
−	−	+

Kesimpulan:

Argumen di atas tidak valid karena dengan premis-premis benar, kesimpulannya bisa benar, bisa salah.

1.7.2 Bentuk-bentuk Dasar Menarik Kesimpulan

1. Conjunction

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{q} \\ \therefore p \wedge q \end{array}$$

2. Addition

$$\frac{p}{\therefore p \vee q}$$

3. Modus Ponens

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \qquad\quad} \\ \therefore q \end{array}$$

4. Constructive Dilemma

$$\begin{array}{l} (p \to q) \wedge (r \to s) \\ \underline{p \vee r \qquad\qquad\qquad} \\ \therefore q \vee s \end{array}$$

5. Hypothetical syllogism

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ \therefore p \to r \end{array}$$

6. Simplification

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$$

7. Disjunctive syllogism

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\sim p \qquad} \\ \therefore q \end{array}$$

8. Modus Tollens

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\qquad \sim q} \\ \therefore \quad \sim p \end{array}$$

9. Destructive Dilemma

$$\begin{array}{l} (p \to q) \wedge (r \to s) \\ \sim q \vee \sim s \\ \hline \therefore \quad \sim p \vee \sim r \end{array}$$

10. Absorption

$$\begin{array}{l} \quad p \to q \\ \hline \therefore p \to (p \wedge q) \end{array}$$

Contoh pemanfaatan:

Buatlah kesimpulan dari argumen di bawah sehingga argumen tersebut valid

1. Jika hasilnya akurat maka sistemnya digital
2. Jika sistem digital maka rancangan jaringannya kombinasi
3. Jika sistem digital maka menggunakan dua nilai tanda bilangan biner
4. Hasil akurat

∴ ?

Jawab:

$$\begin{array}{ll} \text{Premis 1 :} & p \to q \\ \text{Premis 2 :} & q \to r \\ \text{Premis 3 :} & q \to s \\ \text{Premis 4 :} & p \\ \hline & \therefore ? \end{array}$$

Dengan Hypothetical Syllogism

$$\begin{array}{l} \quad p \to q \\ \quad q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \quad p \to q \\ \quad q \to s \\ \hline \therefore p \to s \end{array}$$

Sehingga argumentasi dapat ditulis ulang

$$\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ p \rightarrow s \\ p \\ \hline \therefore ? \end{array}$$

Dengan Modus Ponen

$$\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ p \\ \hline \therefore r \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \rightarrow s \\ p \\ \hline \therefore s \end{array}$$

Sehingga argumentasi dapat ditulis ulang

$$\begin{array}{l} r \\ s \\ \hline \therefore ? \end{array}$$

Dengan conjuntion kesimpulannya dapat ditulis $r \wedge s$, sehingga argumentasi menjadi

$$\begin{array}{l} r \\ s \\ \hline \therefore r \wedge s \end{array}$$

adalah valid

Bukti dengan tabel kebenaran

p	q	r	s	$p \to q$	$q \to r$	$q \to s$	$r \wedge s$
+	+	+	+	+	+	+	+
+	+	+	–	+	+	–	–
+	+	–	+	+	–	+	–
+	+	–	–	+	–	–	–
+	–	+	+	–	+	+	+
+	–	+	–	–	+	+	–
+	–	–	+	–	+	+	–
+	–	–	–	–	+	+	–
–	+	+	+	+	+	+	+
–	+	+	–	+	+	–	–
–	+	–	+	+	–	+	–
–	+	–	–	+	–	–	–
–	–	+	+	+	+	+	+
–	–	+	–	+	+	+	–
–	–	–	+	+	+	+	–
–	–	–	–	+	+	+	–
4				1	2	3	$\therefore$

$\therefore$ argumen di atas valid

1.8 KUANTOR PERNYATAAN

Misalkan P(x) adalah pernyataan yang menyangkut variabel x dan q adalah sebuah himpunan, maka P adalah fungsi proposisi jika untuk setiap $x \in D$ berlaku P(x) adalah sebuah proposisi.

Contoh:

Misalkan P(x) adalah pernyataan dengan x adalah sebuah bilangan genap bulat.

Misalkan D = himpunan bilangan bulat positip

Maka fungsi proposisi P(x) dapat ditulis:

Jika x = 1 maka proposisinya
1 adalah bilangan bulat genap (f)

Jika x = 2 maka proposisinya
2 adalah bilangan bulat genap (t)
dan seterusnya.

Jadi dapat kita lihat ada sejumlah (kuantitas) proposisis yang benar. Untuk menyatakan kuantitas suatu objek dalam proposisi tersebut digunakan notasi-notasi yang disebut kuantor.

1.8.1 Macam-macam Kuantor

Macam-macam kuantor yang sering digunakan dalam proposisi:

1. Untuk setiap x, P(x)
   disebut kuantor universal
   simbol yang digunakan $\forall$
2. Untuk beberapa (paling sedikit satu) $x, P(x)$
   disebut kuantor existensial
   simbol yang digunakan $\exists$

Contoh

Misalkan x himpunan warga negara Indonesia, P predikat membayar pajak, R predikat membeli printer,

Maka

1. $\forall x P(x)$, artinya: Semua warga negara membayar pajak
2. $\exists x R(x) P(x)$, artinya: Ada beberapa warga negara pembeli printer membayar pajak
3. $\forall x R(x) \rightarrow P(x)$, artinya: Setiap warga negara jika membeli printer maka membayar pajak

4. $\exists x R(x) \wedge \overline{P}(x)$, artinya: Ada warga negara membeli printer dan tidak membayar pajak

1.8.2 Negasi Kuantor

$\sim \forall x = \exists x$

$\sim \exists x = \forall x$

maka :

$\sim (\forall x P(x)) = \exists x \overline{P(x)}$

$\sim (\exists x P(x)) = \forall x \overline{P(x)}$

$$
\begin{aligned}
\sim (\forall x P(x) \to Q(x)) &= \exists x \overline{(P(x) \to Q(x))} \\
&= \exists x P(x) \wedge \overline{Q(x)} \\
\sim (\exists x P(x) \to Q(x)) &= \forall x \overline{(P(x) \to Q(x))} \\
&= \forall x P(x) \wedge \overline{Q(x)}
\end{aligned}
$$

Soal - soal :

1. Tuliskan tabel kebenaran dari proposisi di bawah:
   (a) $\overline{p} \wedge (p \vee q)$
   (b) $\sim (p \wedge q) \vee (r \wedge \sim q)$
   (c) $(p \wedge q) \to (p \vee q)$
   (d) $\sim (p \wedge q) \vee \sim (p \leftrightarrow q)$
   (e) $\sim (p \veebar q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
   (f) $(p \wedge \sim (\sim p \vee q)) \vee (p \wedge q)$
   (g) $\sim ((\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)) \vee (p \wedge q)$
2. Sederhanakanlah proposisi di bawah:
   (a) $(p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee q) \wedge (p \vee \overline{q}) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})$
   (b) $(p \wedge \sim (p \vee \sim q)) \vee q \wedge (q \vee p)$

(c) $((p \vee q) \wedge \sim p) \vee \sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$

(d) $(p \vee (\sim q \rightarrow p)) \vee ((p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow (q \wedge \sim p))$

(e) $(p \wedge (q \rightarrow \sim r)) \vee ((\sim p \vee r) \leftrightarrow \sim q)$

3. Buktikanlah bahwa proposisi $P \equiv Q$

   (a) $P \equiv p \vee \sim p$

   $Q \equiv (p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$

   (b) $P \equiv p \rightarrow (p \vee q)$

   $Q \equiv (p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$

   (c) $P \equiv (p \wedge q)$

   $Q \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$

   (d) $P \equiv (p \vee q)$

   $Q \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$

4. Dengan kontrapositif buktikanlah kebenaran implikasi di bawah:

   (a) Jika hasil kali 2 bilangan adalah ganjil, maka kedua bilangan tersebut adalah ganjil

   (b) Jika x bukan bilangan bulat kalipatan 3, maka x^2 juga bukan bilangan bulat kelipatan 3

5. Selidiki validitas argumentasi di bawah :

   (a) 1. Jika microsoft word maka windows sistem operasinya

   2. Jika bukan product microsoft maka bukan windows sistem operasinya

   3. Linux

   $\therefore$ bukan microsoft word

   (b) Buat kesimpulan yang valid dari argumentasi di bawah:

1. Jika memakai sistem digital maka hasilnya akurat dan jika merancang gerbang logika harus menguasai Aljabar Boole
2. Sistim digital atau gerbang logika
3. Tidak akurat atau bukan Aljabar Boole
4. Tidak akurat

$\therefore$?

(c) 1. MsOffice mudah dipakai maka banyak pembeli dan mudah dicari
2. Karena mudah dicari dan banyak pembeli maka dibajak
3. Karena dibajak maka negara dirugikan
4. Negara tidak dirugikan

$\therefore$ bukan microsoft Office

(d)
$$p \rightarrow r$$
$$p \rightarrow q$$
$$\therefore p \rightarrow (r \wedge q)$$

(e)
$$p \rightarrow (r \vee q)$$
$$r \rightarrow \overline{q}$$
$$\therefore p \rightarrow r$$

6. Tentukan nilai kebenaran pernyataan di bawah, bila domain pembicaraannya himpunan bilangan real:

(a)
$$\forall x \forall y \, P(x^2 < y + 1)$$
$$\forall x \exists y \, P(x^2 < y + 1)$$
$$\exists x \forall y \, P(x^2 < y + 1)$$
$$\exists x \exists y \, P(x^2 < y + 1)$$

(b) $\forall x \forall y\, P\left((x < y) \rightarrow \left(x^2 < y^2\right)\right)$

$\forall x \exists y\, P\left((x < y) \rightarrow \left(x^2 < y^2\right)\right)$

$\exists x \forall y\, P\left((x < y) \rightarrow \left(x^2 < y^2\right)\right)$

$\exists x \exists y\, P\left((x < y) \rightarrow \left(x^2 < y^2\right)\right)$

-oo0oo-

2

TEORI HIMPUNAN

2.1 Himpunan

Salah satu kemampuan yang kita kuasai setelah kita mempelajari logika proposisi adalah kemampuan untuk membedakan. Membedakan apakah tautologi, kontradiksi atau bentuk proposisi yang lain, membedakan apakah proposisi bernilai benar atau salah, membedakan apakah kuantor universal atau existential.

Untuk dapat menguasai teori himpunan, kemampuan untuk membedakan sangat diperlukan, karena himpunan merupakan kumpulan benda atau objek yang didefinisikan secara jelas. Himpunan dapat dipandang sebagai kumpulan benda-benda yang berbeda tetapi dalam satu segi dapat ditanggapi sebagai suatu kesatuan. Objek-objek ini disebut anggota atau elemen himpunan.

Notasi:

Himpunan : A, B, C, ...

Anggota himpunan : a, b, c, ...

Contoh:

Kita definisikan himpunan software under windows, maka kita menulis

A = {MsWord, MsExcel, Ms PowerPoint, ...}

atau

B = {x | x software under windows}

Cara menuliskan himpunan A disebut menulis secara tabulasi
Cara menuliskan himpunan B disebut menulis secara deskripsi.

Masing-masing objek dalam himpunan A disebut anggota atau elemen himpunan, dituliskan

$x \in A$ artinya x anggota himpunan A
$x \notin A$ artinya x bukan anggota himpunan A

2.1.1 Kardinalitas

Jumlah elemen di dalam A disebut kardinal dari himpunan A.

Notasi: $n(A)$ atau $|A|$

Contoh.

$B = \{ x \mid x$ merupakan bilangan prima yang lebih kecil dari 20 },

atau $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ maka $|B| = 8$

T = {perkutut,kutilang,kenari,dara,beo}, maka $|T| = 5$

$A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$, maka $|A| = 3$

2.1.2 Himpunan Berhingga dan Tak Berhingga

Himpunan berhingga adalah himpunan dimana jumlah anggota-nya berhingga artinya bila kita menghitung elemen-elemen yang berbeda dari himpunan ini, maka proses berhitungnya dapat selesai.

Bila tidak demikian maka himpunan tak berhingga.

A = himpunan software anti virus
A = {x|x software anti virus}
A = (Norton, McAfee, Panda, KaperSky, Norman)

Contoh:

B = himpunan bilangan asli
B = (x|x bilangan asli}
B = {1, 2, 3,......}

maka A berhingga

2.1.3 Kesamaan Dua Himpunan dan Subhimpunan

Dua himpunan A dan B dikatakan sama dengan jika dan hanya jika keduanya bersama-sama memiliki anggota yang sama.

Contoh:

A = {WordPad, MsWord, WordPerfect, WS}
B = {WordPerfect, WS, MsWord, WordPad}

Maka

A = B

Dua himpunan A dan B dengan elemen-elemen yang berbeda dikatakan setara jika dan hanya jika jumlah anggota himpunan A sama dengan jumlah anggota himpunan B.

Contoh:

A = {MsExcel, Lotus 123}
B = {Mouse, Keyboard}

Maka

A~B

Himpunan A dikatakan sub himpunan B jika dan hanya jika semua elemen-elemen A adalah anggota himpunan B.

Contoh:

A = {Win3.1, Win3.11, Win95, Win97}
B = {Win3.1, Win3.11, Win95, Win97, Win98, Win98SE, WinME, Win2000, WinXP}

Maka

$A \subset B$

Bila tidak demikian dikatakan bukan sub himpunan.

Contoh:

A = {WinXP, Linux, Unix}
B = {Win3.1, Win3.11, Win95, Win97, Win98, Win98SE, WinME, Win2000, WinXP}
C = {monitor, printer, scanner}

Maka

$A \not\subset B$, A bukan sub himpunan B
$C \not\subset B$, C bukan sub himpunan B

2.1.4 Macam-macam Himpunan

2.1.4.1 Himpunan Kosong/Entry Set

Himpunan dengan kardinal = 0 disebut dengan himpunan kosong.

Notasi: $\varnothing, \{\ \}$

Contoh:

A = himpunan software aplikasi yang bisa dipakai dengan semua sistem operasi

$A = \varnothing = \{\ \}$

2.1.4.2 Singleton Set

Singleton set adalah himpunan yang hanya memiliki 1 anggota

Contoh:

A = himpunan devices yang berfungsi sebagai input devices sekaligus output devices

A = {touch screen}

2.1.4.3 Himpunan Semesta/Universal Set

Dalam setiap membicarakan himpunan, maka semua himpunan yang ditinjau adalah subhimpunan dari sebuah himpunan tertentu yang disebut himpunan semesta.

Dengan kata lain himpunan semesta adalah himpunan dari semua objek yang berbeda.

Notasi: U

Contoh:

U = Semesta pembicaraan, yaitu sistem operasi produksi Microsoft

U = {Win 3.1, ..., WinXP, ...}

2.1.4.4 Himpunan Kuasa

Dari sebuah himpunan, kita dapat membuat subhimpunan subhimpunannya.

Himpunan dari semua subhimpunan yang dapat dibuat dari sebuah himpunan disebut himpunan kuasa.

Banyaknya himpunan bagian dari sebuah himpunan A adalah

2^x, x adalah banyak elemen A

Notasi: 2^A

Contoh:

A = {mouse, keyboard}

B = {monitor, printer, scanner}

Maka

$$2^A = \{A,\{\text{mouse}\},\{\text{keyboard}\},\varnothing\}$$
$$2^B = \{B,\{\text{monitor}\},\{\text{printer}\},\{\text{scanner}\},\{\text{monitor,printer}\},$$
$$\{\text{monitor,scanner}\},\{\text{printer,scanner}\},\varnothing\}$$

2.2 OPERASI HIMPUNAN

2.2.1 Union/Gabungan dari 2 himpunan

Gabungan 2 himpunan A dan B adalah himpunan yang anggotanya semua anggota A atau B atau keduanya.

Notasi:

$A \cup B$

$A + B$

Contoh:

A = {mouse, keyboard}

B = {monitor, printer, scanner}

C = {mouse, keyboard, CPU, monitor}

Maka

$$A \cup B = \{\text{mouse, keyboard, monitor, printer, scanner}\}$$
$$A \cup C = C$$
$$B \cup C = \{\text{monitor,printer,scanner,mouse,keyboard,CPU}\}$$

2.2.2 Intersection/Irisan dari 2 Himpunan

Irisan dari 2 himpunan A dan B adalah himpunan yang anggotanya dimiliki bersama oleh himpunan A dan B.

Notasi: $A \cap B$

Contoh:

A = {mouse, keyboared, touch screen}
B = {monitor, touch screen, printer, scanner}

Maka

$A \cap B = \{\text{ tauch screen}\}$

2.2.3. Relative Complement/Selisih Antara 2 Himpunan

Selisih antara himpunan A dan B adalah himpunan yang anggotanya hanya menjadi anggota himpunan A tetapi tidak termasuk anggota himpunan B.

Notasi:

A – B

Contoh:

A = {SQL server, MySQL, MsAcces}

B = {MySQL, MsAcces, Oracle}

Maka:

$A - B = \{\text{SQL server}\}$

2.2.4 Komplemen dari Himpunan

Komplemen dari sebuah himpunan A adalah himpunan yang anggotanya bukan anggota A.

Dengan kata lain komplemen A adalah himpunan yang anggotanya merupakan hasil dari U – A.

Notasi:

A', A^c

Contoh:

U = {Win3.1, Win3.11, Win95, Win97, Win98, Win98SE, WinME, Win2000, WinXP, ...}
A = {Win3.1, Win3.11, Win95, Win97}
A' = {Win98, Win98SE, WinME, Win2000, WinXP, ...}

2.2.5 Symmetic Difference/Beda Setangkup

Beda setangkup 2 himpunan A dan B adalah himpunan yang anggotanya merupakan anggota himpunan A atau anggota himpunan B tetapi bukan merupakan anggota kedua himpunan secara bersamaan.

Notasi:

$A \oplus B$

Contoh:

A = {Win3.1, Win3.11, Win95, Win97}
B = {Win95, Win97, Win98, Win98SE, WinME, Win2000}

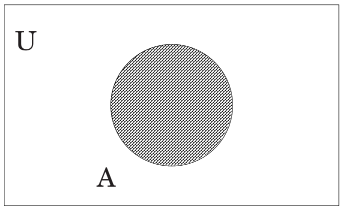
Maka

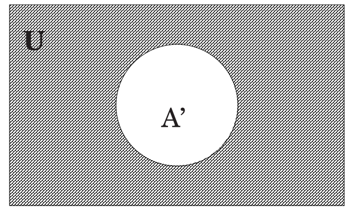
$A \oplus B$ = {Win3.1, Win3.11, Win98, Win98SE, WinME, Win2000}

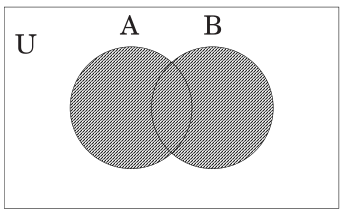
2.3 Diagram Venn

Diagram venn adalah suatu cara untuk menggambarkan hubungan antara himpunan-himpunan. Dalam diagram venn himpunan biasanya dinyatakan dengan suatu daerah bidang yang dibatasi oleh sebuah lingkaran.

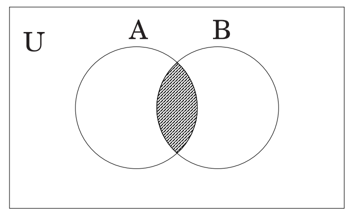
Contoh:



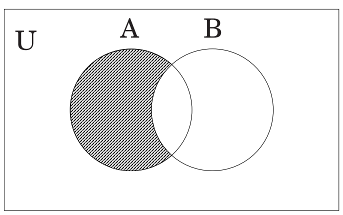




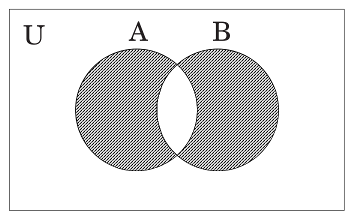
$A \cup B$



$A \cap B$



$A - B$



$A \oplus B$

2.4 HUKUM-HUKUM ALJABAR HIMPUNAN

Hukum-hukum aljabar yang berlaku pada proposisi, berlaku juga bagi himpunan, yaitu:

1. Hukum Idempoten

   $A \cup A = A$

   $A \cap A = A$

2. Hukum Asosiatif

   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3. Hukum komutatif

   $A \cup B = B \cup A$

   $A \cap B = B \cap A$

4. Hukum Distribusi

   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5. Hukum Identitas

   $A \cup \varnothing = A$ $\qquad$ $A \cap U = A$

   $A \cup U = U$ $\qquad$ $A \cap \varnothing = \varnothing$

6. Hukum Involution

   $\left(A^C\right)^C = A$

7. Hukum Komplemen

   $A \cup A^C = U$ $\qquad$ $U^C = \varnothing$

   $A \cap A^C = \varnothing$ $\qquad$ $\varnothing^C = U$

8. Hukum DeMorgan

   $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

   $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

9. Hukum penyerapan (absorpsi):

   $A \cup (A \cap B) = A$

   $A \cap (A \cup B) = A$

Contoh

Sederhanakan

$$A \cup (A \cap B)$$

Jawab

$$
\begin{aligned}
A \cup (A \cap B) &= (A \cap U) \cup (A \cap B) \\
&= A \cap (U \cup B) \\
&= A \cap U \\
&= A
\end{aligned}
$$

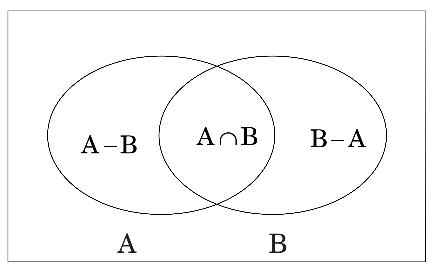
2.5 PERHITUNGAN HIMPUNAN GABUNGAN

Satu hal yang penting dalam matematika diskrit adalah proses menghitung, seperti bagaimana kita menghitung jumlah anggota dari sebuah himpunan.

Berikut adalah proses penghitungan jumlah anggota dari himpunan gabungan.

2.5.1. Gabungan dari 2 Himpunan

Jumlah angota dari 2 himpunan yang digabungkan dapat dicari sebagai berikut:



$$N_A = N_{A-B} + N_{A \cap B}$$
$$N_B = N_{B-A} + N_{A \cap B}$$
$$N_A + N_B = N_{A-B} + N_{B-A} + 2N_{A \cap B} \qquad (1)$$
$$N_{A \cup B} = N_{A-B} + N_{B-A} + N_{A \cap B} \qquad (2)$$

Substitusi (2) ke (1)

$$N_A + N_B = N_{A\cup B} + N_{A\cap B}$$

Sehingga

$$N_{A\cup B} = N_A + N_B - N_{A\cap B} \qquad (3)$$

2.5.2 Gabungan dari 3 Himpunan

Jumlah anggota dari 3 himpunan yang digabungkan dapat dicari sebagai berikut:

$$(A\cup B\cup C) = A\cup(B\cup C),\ \text{asosiatif}$$

Substitusikan rumus (3), maka

$$N_{A\cup B\cup C} = N_A + N_{B\cup C} - N_{A\cap(B\cup C)}$$

Substitusikan rumus (3), ke $N_{B\cup C}$

$$N_{A\cup B\cup C} = N_A + N_B + N_C - N_{B\cap C} - N_{A\cap(B\cup C)} \qquad (4)$$

Hukum distribusi :

$$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C),$$

Hukum distribusi dan rumus (3) dapat dipakai pada suku $N_{A\cap(B\cup C)}$, karena

$$\begin{aligned} N_{A\cap(B\cup C)} &= N_{(A\cap B)\cup(A\cap C)} \\ &= N_{A\cap B} + N_{A\cap C} - N_{(A\cap B)\cap(A\cap C)} \\ &= N_{A\cap B} + N_{A\cap C} - N_{A\cap B\cap C} \end{aligned}$$

Substitusikan ke persamaan (4) diperoleh:

$$N_{A\cup B\cup C} = N_A + N_B + N_C - N_{B\cap C} - N_{A\cap B} - N_{A\cap C} + N_{A\cap B\cap C} \qquad (5)$$

SOAL-SOAL

1. Tuliskan dalam bentuk deskripsi

   A = {Adobe Photoshop, Macromedia Fireworks, PrintShopPro,GIMP, ...}

   B = {SQL Server, MySQL, Ms Access, Oracle, SAP DB, PostGre SQL, ...}

   C = {PHP, ASP, Cold Fusion, ...}

   D = {Windows, Linux, Unix, MacOS, OS/2, ...}

   E = {disket, CD-R, Hardisk, ...}

   F = {mouse, keyboard, touch screen, ...}

2. Misalkan semesta pembicaraan adalah sistem operasi produksi Microsoft dan himpunan-himpunan lainnya dinyatakan oleh:

   A = {Win3.1, Win3.11, Win95, Win97}

   B = {Win97, Win98, Win98SE, WinME}

   C = {WinME, Win2000, WinXP, ...}

   Carilah:

   a. $(A \cup B) - B$
   b. $(A \cap B) \cup C'$
   c. $(A \oplus B) - C$
   d. $(B - C) \oplus A$
   e. $(A \cap B) \cup (A \cap C)'$
   f. $(A - B) \cap C'$
   g. 2^A
   h. 2^B
   i. $N_{A \cup B}$
   j. $N_{A \cap B}$

3. Dari 1200 mahasiswa TI diketahui

   582 menguasai Linux
   627 menguasai Windows
   543 menguasai Unix
   227 menguasai Linux dan Windows
   307 menguasai Linux dan Unix
   250 menguasai Windows dan Unix
   222 orang menguasai ketiganya.

   Berapa orang yang tidak menguasai ketiga jenis sistem operasi di atas?

   Berapa orang yang hanya menguasai Linux tetapi tidak menguasai Windows dan Unix?

4. Dari 37 orang programmer yang mengikuti wawancara untuk sebuah pekerjaan diketahui

   25 menguasai Pascal
   28 menguasai C++
   2 tidak menguasai keduannya

   Berapa orang yang menguasai keduannya?

5. Hasil survey mengenai input data dari kelas Akuntansi Komputasi diketahui

   32 orang suka memakai mouse
   20 orang suka memakai touch screen
   45 orang suka memakai keyboard
   15 orang suka mouse dan keyboard
   7 orang suka mouse dan touch screen
   10 orang suka keyboard dan touch screen
   5 orang suka memakai ketiganya

   Berapa jumlah mahasiswa yang disurvei?

   Berapa jumlah mahasiswa yang hanya suka memakai satu jenis input devices?

Berapa jumlah mahasiswa yang suka memakai keyboard dan mouse tetapi tidak suka memakai touch screen?

6. Dalam suatu kelas x semua ikut belajar pengunaan software Maple dan Matlab.
   Kalau dihitung yang belajar Maple ada 20 mahasiswa, 25% di antaranya juga belajar Matlab. Apabila diketahui perbandingan jumlah mahasiswa yang belajar Maple dan Matlab adalah 5 : 4, maka berapa jumlah mahasiswa di kelas x tersebut? Berapa jumlah mahasiswa yang hanya belajar Maple?
7. Dalam kelas x perbandingan jumlah mahasiswa yang ikut belajar penggunaan software Java, C, dan Pascal adalah 5:4:3.
   Kalau dihitung yang belajar:
   - Java ada 50 mahasiswa; 10% di antaranya juga belajar C dan Pascal sekaligus; 20% di antaranya belajar C dan 20% lagi belajar Pascal.
   - Pascal dan C tetapi tidak belajar Java 10 orang.
     Berapa jumlah mahasiswa kelas x?
     Berapa jumlah mahasiswa yang hanya belajar Pascal tetapi tidak belajar Java maupun C?

     Gambarkan dengan diagram venn!
8. Misalkan A himpunan mahasiswa tahun pertama, B himpunan mahasiswa tahun ke dua, C himpunan mahasiswa jurusan Matematika, D himpunan mahasiswa jurusan Teknik Informatika, E himpunan mahasiswa yang mengambil kuliah Matematika Diskrit, F himpunan mahasiswa yang nonton pertandingan tinju pada hari Senin malam, G himpunan mahasiswa yang belajar sampai lewat tengah malam pada hari Senin malam.

Nyatakan pernyataan bereikut dalam notasi teori Himpunan :

a. Semua mahasiswa tahun ke dua jurusan Teknik Informatika mengambil kuliah matematika Diskrit.
b. Hanya mereka yang mengambil kuliah Matematika Diskrit atau yang nonton pertandingan tinju atau yang belajar sampai lewat tengah malam pada hari Senin malam.
c. Mahasiswa yang mengambil kuliah Matematika Diskrit tidak ada yang nonton pertandingan tinju pada hari senin malam.
d. Semua mahasiswa tahun ke dua yang bukan dari jurusan Matematika ataupun jurusan Teknik Informatika pergi nonton pertandingan tinju.

9. Diantara 100 mahasiswa, 32 orang mempelajari Matematika, 20 orang mempelajari Fisika, 45 orang mempelajari Biologi, 15 orang mempelajari Matematika dan Biologi, 7 orang mempelajari Matematika dan Fisika, 10. Orang mempelajari Fisika dan Biologi, 30 orang tidak mempelajari satupun diantara ketiga bidang tersebut.
   a. Hitung banyaknya mahasiswa yang mempelejari ke 3 bidang tersebut
   b. Hitung banyaknya mahasiswa yang hanya mempelajari satu dari ke tiga bidang tersebut.
10. Survey 25 mobil baru yang dijual memiliki (A) AC, (R) Radio, (W) Power Window dengan penyebaran sebagai berikut : 15 (A), 12 (R), 11 (W), 5 (A & W), 9 (A & R), 4 (R & W), 3 (A&R&W).
   Jumlah mobil yang :
   a. Hanya ber Power Window
   b. Hanya ber AC

c. Hanya ber Radio
d. Hanya ber R dan W tetapi tidak ber A.
e. Hanya ber A dan R tetapi tidak ber W.
f. Tidak memakai ketiga-tiganya.

-oo0oo-

3

TEORI HIMPUNAN FUZZY

Teori himpunan fuzzy merupakan pengembangan teori himpunan (*crisp set*). Dalam perjalanannya perkembangan teori himpunan fuzzy dapat dibagi menjadi 3 phase, yaitu:

- Phase akademik, periode 1965-1977
- Phase tranformasi, periode 1978-1988
- Phase fuzzy boom, periode setelah, 1989

Teori himpunan fuzzy diperkenalkan oleh Prof Lotfi A. Zadeh pada tahun 1965 dan sekarang telah banyak digunakan di bidang industri dan niaga.

3.1 FUNGSI KEANGGOTAAN

Berbeda dengan teori himpunan di mana nilai keanggotaan hanya bernilai 1 atau 0, fungsi keanggotaan himpunan fuzzy ada didalam interval 0 sampai 1.

Contoh:

A = Himpunan sistem operasi yang banyak digunakan masyarakat pengguna.

Dalam teori himpunan (crisp set) himpunan A ditulis

A = {Linux, Unix, Windows, MacOs, OS2}

Artinya, Linux, Unix, Windows, MacOs, Os2 adalah anggota himpunan dengan nilai keanggotaan 1, selain kelima elemen diatas bukan anggota himpunan maka nilai keanggotaannya 0.

Dari kelima anggota himpunan A tersebut kita tidak dapat memperoleh informasi mana yang sangat banyak, banyak, cukup, kurang atau sedikit diminati oleh masyarakat pengguna, karena derajat keanggotaan kelima anggota himpunan tersebut sama.

Dalam teori himpunan fuzzy himpunan A dapat ditulis:

A = {<Linux,0.7>, <Unix,0.5>,< Windows,0.9>, <MacOs,0.2>, < OS2,0.4>}

atau

A = 0,7/Linux + 0,5/Unix + 0,9/Windows + 0,2/MacOs + 0,4/OS2

Artinya, windows paling banyak diminati oleh masyarakat pengguna karena memiliki nilai keanggotaan 0,9 disusul Linux 0,7 dan seterusnya sampai sistem operasi yang paling sedikit peminatnya yaitu MacOs dengan keanggotaan 0,2.

Notasi keanggotaan himpunan fuzzy:

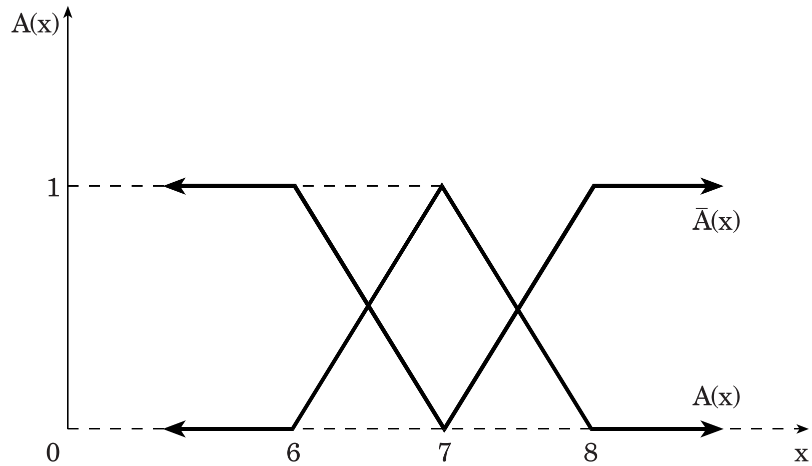
$$A : x \rightarrow [0,1]$$

Karena derajat keanggota himpunan fuzzy ada dalam interval 0 sampai 1, maka ada kalanya keanggotaan himpunan fuzzy dinyatakan dalam bentuk fungsi.

Contoh:

$$A(x) = \left\{ \begin{matrix} x - 6 \text{ untuk } 6 \le x \le 7 \\ 8 - x \text{ untuk } 7 \le x \le 8 \\ 0 \text{ untuk } x < 6 \text{ dan } x > 8 \end{matrix} \right\}$$

Gambar dari fungsi keanggotaan A(x) tersebut adalah:



Gambar 3.1 Fungsi keanggotaan A (x) dan $\bar{A}$ (x)

3.2 Operasi Himpunan Fuzzy

3.2.1 Komplemen

Komplemen himpunan fuzzy A adalah $\bar{A}$ dengan fungsi keanggotaan:

$$\bar{A}(x) = 1 - A(x)$$

Lihat gambar 3.1

Contoh:

$$\begin{aligned} A(x) &= x - 6 \text{ untuk } 6 \le x \le 7 \\ \bar{A}(x) &= 1 - A(x) \\ &= 1 - (x - 6) \\ &= -x + 7, \text{ untuk } 6 \le x \le 7 \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama kita dapat mencari fungsi keanggotaan $\overline{A}(x)$ untuk A(x) = 8-x.

3.2.2 Gabungan/Union Himpunan Fuzzy

Gabungan himpunan fuzzy A dan B adalah himpunan fuzzy $A \cup B$, dengan fungsi keanggotaan

$$(A \cup B)(x) = \max\left[A(x), B(x)\right]$$

untuk semua $x \in X$.

Contoh:

Misalkan A(x) fungsi keangotaan himpunan fuzzy terbatas (finite):

$$A(x) = 0/5,75 + 0/6 + 0,25/6,25 + 0,5/6,5 + 0,75/6,75 + 1/7 + 0,75/7,25 + 0,5/7,5 + 0,25/7,75 + 0/8 + 0/8,25$$

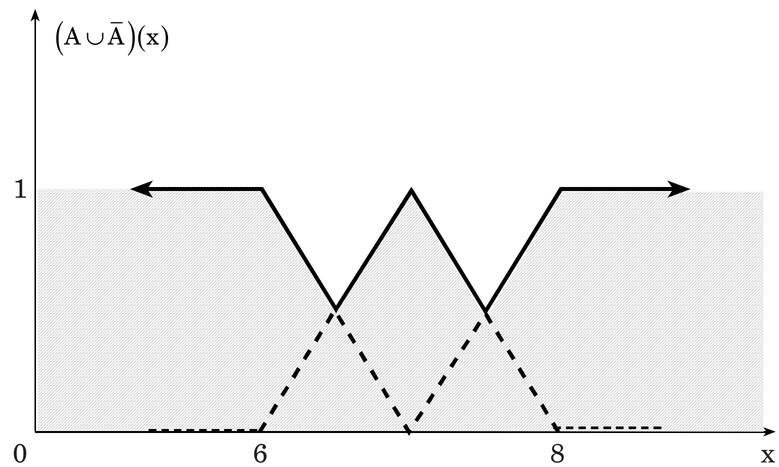
dan komplemennya adalah:

$$\overline{A}(x) = 1/5,75 + 1/6 + 0,75/6,25 + 0,5/6,5 + 0,25/6,75 + 0,7 + 0,25/7,75 + 0,5/7,5 + 0,75/7,75 + 1/8,25$$

Maka:

$$\begin{aligned}(A \cup \overline{A})(x) = {} & 1/5,75 + 1/6 + 0,75/6,25 + 0,5/6,75 + 0,75/6,75 \\ & + 1/7 + 0,75/7,75 + 0,5/7,5 + 0,75/7,75 + 1/8 \\ & + 1/8,35\end{aligned}$$

Gambar $\left(A \cup \bar{A}\right)(x)$ adalah:



Gambar fungsi keanggotaan $\left(A \cup \bar{A}\right)(x)$

3.2.3 Irisan/Intersection Himpunan Fuzzy

Irisan dari himpunan fuzzy A dan B adalah himpunan fuzzy dengan fungsi keanggotaan $A \cap B$

$$(A \cap B)(x) = \min[A(x), B(x)]$$

untuk semua $x \in X$

Contoh:

Misalkan A(x) fungsi keangotaan himpunan fuzzy terbatas (finite):

A(x) = 5/5,75+0/6+0,25/6,25+0,5/6,5+0,75/6,75+1/7+0,75/7,25+0,5/7,5+0,25/7,75+0,8+0,8,25

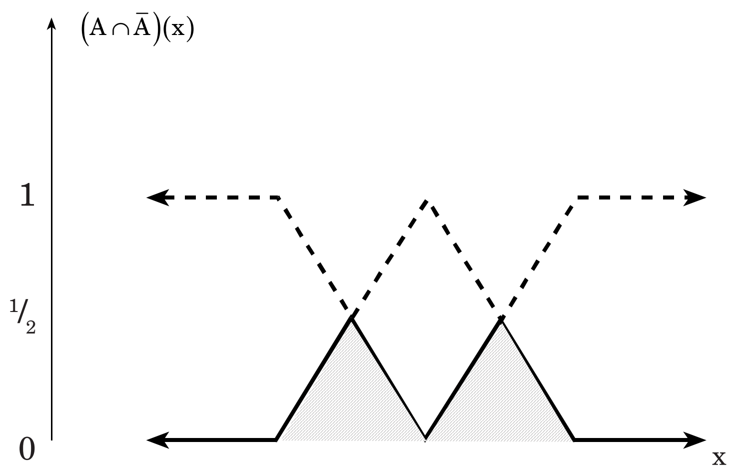
dan kpmplemennya adalah:

$\overline{A}(x)$ = 1/5.75+1/6+0,75/6,25+0,5/6,5+0,25/6,75+0/7+0,25/7,75+0,5/7,5+0,75/7,75+1/8+1/8,25

Maka

$$(A \cap \bar{A})(x) = 0/5,75+0/6+0,25/6,25+0,5/6,5+0,25/6,75+ 0,7+0,25/7,25+0,5/7,25+0,25/7,75+0,8+0/8,25$$

Gambar $(A \cap \bar{A})(x)$ adalah:



Gambar fungsi keanggotaan $(A \cap \bar{A})(x)$

3.2.4 Pemotongan/Cut Himpunan Fuzzy

Pemotongan pada sebuah himpunan fuzzy dapat dilakukan dimana saja pada selang nilai derajat keanggotaan himpunan fuzzy tersebut. Hasil pemotongan sebuah himpunan fuzzy adalah himpunan fuzzy yang memiliki derajat keanggotaan lebih besar atau sama dengan nilai potongnya

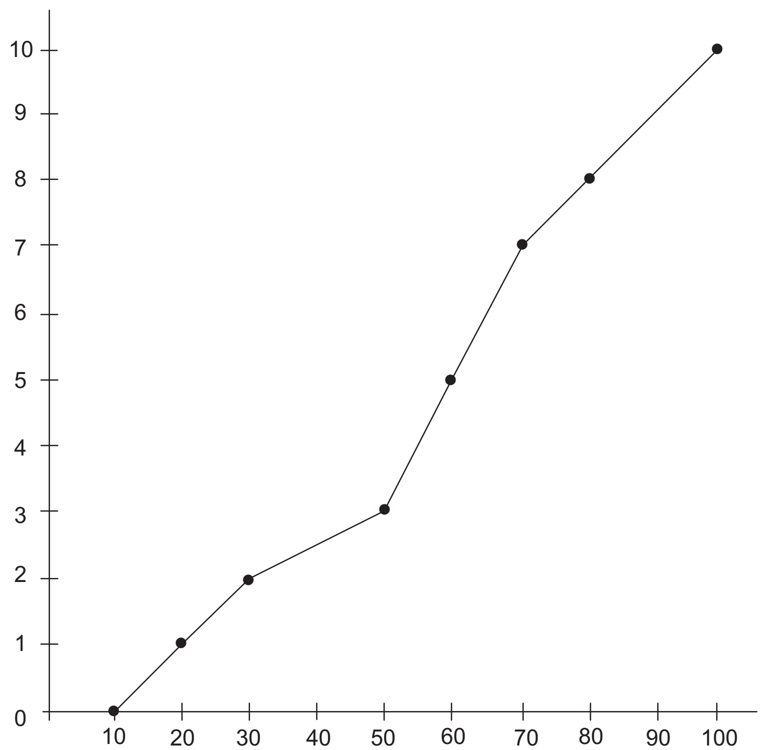
Notasi:

$$A_{\infty} = \{x \in X \mid A(x) \geq \infty\}$$

Contoh:

Himpunan fuzzy terbatas dimana sumbu Y atau A (X) dengan selang nilai 0 sampai 1 mewakili derajat keanggotaan processor : 286(10),386(20), 486(30), Pentium 1(50), Pentium 2(60), Pentium 3(70), Pentium 4(80) dan core2duo(100), serta sumbu X mewakili semesta pembicaraan yaitu harga terhadap produk yang berhubungan sebagai berikut :

A (x) = 0/10 + 0,1/20 + 0,2/30 + 0,3/50 + 0,5/60 + 0,7/70 + 0,8/80 + 1/100



Maka:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= A(x)\\
A_{0,1} &= 0{,}1/20 + 0{,}2/30 + 0{,}3/50 + 0{,}5/60 + 0{,}7/70 + 0{,}8/80 + 1/100\\
A_{0,2} &= 0{,}2/30 + 0{,}3/50 + 0{,}5/60 + 0{,}7/70 + 0{,}8/80 + 1/100\\
A_{0,3} &= 0{,}3/50 + 0{,}5/50 + 0{,}7/70 + 0{,}8/80 + 1/100\\
A_{0,5} &= 0{,}5/50 + 0{,}7/70 + 0{,}8/80 + 1/100\\
A_{0,7} &= 0{,}7/70 + 0{,}8/80 + 1/100\\
A_{0,8} &= 0{,}8/80 + 1/100\\
A_1 &= 1/100
\end{aligned}
$$

Perhatikan bahwa:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= 1/100\\
A_{0,8} &= 0{,}8/8 + 1/100
\end{aligned}
$$

Maka

$$A_1 \cup A_{0,8} = A_{0,8}$$

demikian juga

$$A_{0,8} \cup A_{0,5} = A_{0,5}$$

dan seterusnya sehinga dapat disimpulkan

$$A_1 \cup A_{0,8} \cup_{0,7} \cup A_{0,5} \cup A_{0,3} \cup A_{0,2} \cup A_{0,1} \cup A_0 = A(x)$$

dinotasikan:

$$
\begin{aligned}
&A = \cup A_{\mu}\\
&\propto \in [0,1]
\end{aligned}
$$

Bagaimana dengan irisan? Kita perhatikan:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= A(x) \\
A_{0,1} &= 0{,}1/20 + 0{,}2/30 + 0{,}3/50 + 0{,}5/60 + 0{,}7/70 + 0{,}8/80 + 1/100 \\
A_{0,2} &= 0{,}2/30 + 0{,}3/50 + 0{,}5/60 + 0{,}7/70 + 0{,}8/80 + 1/100 \\
A_{0,3} &= 0{,}3/50 + 0{,}5/50 + 0{,}7/70 + 0{,}8/80 + 1/100 \\
A_{0,5} &= 0{,}5/50 + 0{,}7/70 + 0{,}8/80 + 1/100 \\
A_{0,7} &= 0{,}7/70 + 0{,}8/80 + 1/100 \\
A_{0,8} &= 0{,}8/80 + 1/100 \\
A_1 &= 1/100
\end{aligned}
$$

Maka

$$A_0 \cap A_{0,1} = A_{0,1}$$
$$A_{0,1} \cap A_{0,2} = A_{0,2}$$

sehinga dapat disimpulkan

$$A_0 \cap A_{0,1} \cap A_{0,2} \cap A_{0,3} \cap A_{0,5} \cap A_{0,7} \cap A_{0,8} \cap A_1 = A_1$$

3.2.5 Pendukung (Support) Himpunan Fuzzy

Pendukung himpunan fuzzy terbatas A pada semesta pembicaraan X adalah himpunan yang terdiri dari elemen X yang derajat keanggotaannya lebih besar dari 0.

Notasi:

$$\text{Supp}(A) = \{x \in X \mid A(x) > 0\}$$

Contoh:

$A(x) =$ 0/5,75+0/6+0,25/6,25+0,5/6,5+0,75/6,75+1/7 +0,75/7,25+0,5/7,5+0,25/7,75+0/8

Supp (A) = {6.25, 6.5, 6.75, 7, 7.25, 7.5, 7.75}

3.2.5.1 Inti (Core) Himpunan Fuzzy

Inti himpunan fuzzy terbatas A pada semesta pembicaraan X adalah himpunan yang terdiri dari elemen X yang derajat keanggotaanya sama dengan 1

Notasi:

$$\mathrm{Core}(A) = \{x \in X \mid A(x) = 1\}$$

Contoh:

A(x) = 0/5,75 + 0/6 +0,25/6,25+0,5/6,5+0,75/6,75+1/7+ 0,75/7,25+0,5/7,5+0,25/7,75+0/8+0/8,25

Core (A) = {7}

3.2.5.2 Tinggi (Height) Himpunan Fuzzy

Tinggi dari himpunan fuzzy dapat dilihat dari nilai tertinggi derajat keanggotaan himpunan fuzzy tersebut.

Notasi:

h(A)

Bila h (A) = 1, maka himpunan fuzzy dikatakan normal

Bila h (A) < 1, maka himpunan fuzzy dikatakan subnormal.

Contoh:

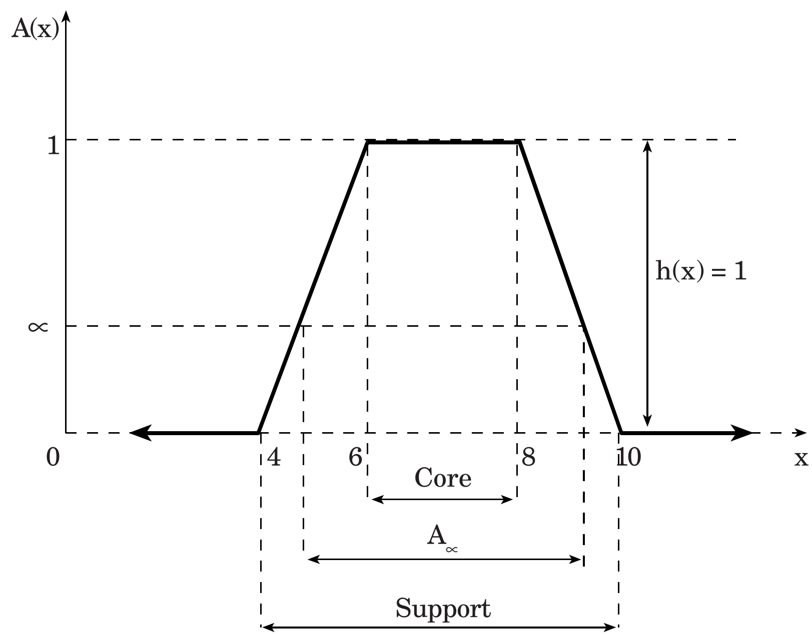
Himpunan fuzzy A pada semesta pembicaraan X dinyatakan dengan fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{untuk } x < 4 \\ 1/2x - 2, & \text{untuk } 4 \le x \le 6 \\ 1, & \text{untuk } 6 \le x \le 8 \\ -1/2x + 5 & \text{untuk } 8 \le x \le 10 \\ 0, & \text{untuk } x > 10 \end{array} \right\}$$

Gambarkan fungsi keanggotaan tersebut, kemudian tentukan Supp(A) dan h(A)

Jawab:

3.2.6 Scalar Cardinality



$$\text{Supp}(A) = \{x \in X | 4 < A(x) < 10\}$$

$$\text{Core}(A) = \{x \in X | 6 \le A(x) \le 8\}$$

$$h(A) = 1$$

Scalar cardinality dari sebuah himpunan fuzzy A pada semesta pembicaraan X adalah jumlah semua derajat keanggota-an elemen X dalam himpunan fuzzy A

Notasi:

$$|A| = \sum_{x \in X} A(x)$$

Contoh:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= A(x)\\
A_{0,1} &= 0{,}1/20 + 0{,}2/30 + 0{,}3/50 + 0{,}5/60 + 0{,}7/70 + 0{,}8/80 + 1/100\\
A_{0,2} &= 0{,}2/30 + 0{,}3/50 + 0{,}5/60 + 0{,}7/70 + 0{,}8/80 + 1/100\\
A_{0,3} &= 0{,}3/50 + 0{,}5/50 + 0{,}7/70 + 0{,}8/80 + 1/100\\
A_{0,5} &= 0{,}5/50 + 0{,}7/70 + 0{,}8/80 + 1/100\\
A_{0,7} &= 0{,}7/70 + 0{,}8/80 + 1/100\\
A_{0,8} &= 0{,}8/80 + 1/100\\
A_1 &= 1/100
\end{aligned}
$$

Maka:

$$|A(x)| = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}5 + 0{,}7 + 0{,}8 + 1 = 3{,}6$$

3.3 KESAMAAN DAN HIMPUNAN BAGIAN

Himpunan fuzzy A dikatakan sama dengan himpunan fuzzy B (A = B) jika dan hanya jika

$$A(x) = B(x)$$

untuk setiap $x \in X$

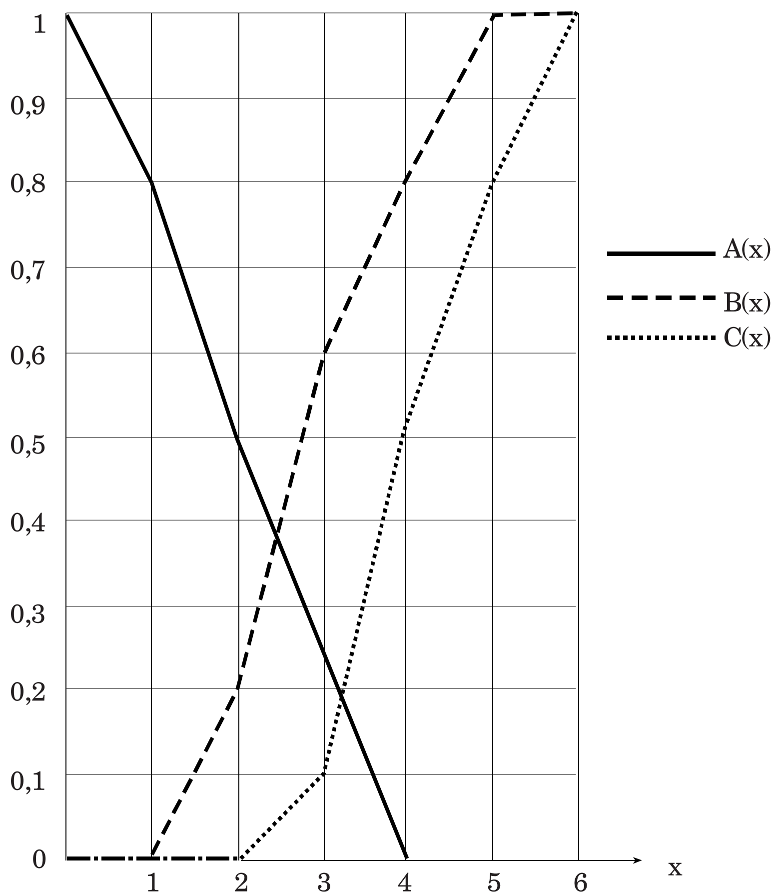
Himpunan fuzzy A dikatakan himpunan bagian dari himpunan fuzzy B, jika dan hanya jika

$$A(x) \le B(x)$$

untuk setiap $x \in X$

Contoh:

Himpunan fuzzy A (masyarakat berpendidikan rendah), himpunan fuzzy B (masyarakat berpendidikan sedang), himpunan fuzzy C (masyarakat berpendidikan tingi) digambarkan dengan grafik tingkat pendidikan bawah.



Misalkan semesta pembicaraan X adalah

$$x = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{atau}$$
$$x = \{SD, SMP, SMA, D_3, S_1, S_2, S_3\}$$

Maka dapat dibuat tabel dari ketiga himpunan fuzzy A(x), B(x), dan C(x), sebagai berikut:

Pendidikan	A(x)	B(x)	C(x)
0 = SD	1	0	0
1 = SMP	0,8	0	0
2 = SMA	0,5	0,2	0
3 = D3	0,25	0,6	0,1
4 = S1	0	0,8	0,5
5 = S3	0	1	0,8
6 = S3	0	1	1

Jadi:

$$A \neq B \neq C$$

karena derajat keangotaannya tidak sama untuk setiap elemen x

$$C(x) \subset B(x)$$

karena derajat keanggotaan $C(x) \leq B(x)$ untuk semua elemen x.

SOAL-SOAL

1. a. Gambarkanlah himpunan fuzzy yang fungsi keanggotaannya digambarkan oleh:

$$A(x) = \begin{Bmatrix} a\left(1 - \dfrac{|x-b|}{c}\right), & \text{untuk } b-c \leq x \leq b+c \\ 0, & \text{untuk } x < b-c \text{ dan } x > b+c \end{Bmatrix}$$

Bila a = 1;

b. Tuliskanlah himpunan fuzzy A

c. Gambar dan tuliskanlah himpunan fuzzy $\bar{A}$

d. Gambarkan dan tuliskanlah himpunan fuzzy $\bar{A} \cup A$ dan $\bar{A} \cap A$

2. a. Kerjakan separti nomer 1a bila fungsi keanggota-anya

$$A(x) = \begin{cases} \dfrac{(a-x)e}{a-b}, & \text{untuk } a \le x \le b \\ e, & \text{untuk } b \le x \le c \\ \dfrac{(d-x)e}{d-c}, & \text{untuk } c \le x \le d \\ 0, & \text{untuk } x < a \text{ dan } x > d \end{cases}$$

Bila e = 0,5;

b. Kerjakan seperti 1b
c. Kerjakan seperti 1c
d. Kerjakan seperti 1d
e. Tuliskan $\text{Supp}(A \cup \bar{A})$, $\text{Core}(A \cup \bar{A})$, dan $h(A \cup \bar{A})$
f. Tunjukan bahwa $h(A \cap \bar{A})$ tidak pernah lebih besar dari 0,5 dan $h(A \cup \bar{A})$ selalu $\ge 0{,}5$

3. Misalkan himpunan fuzzy A dan B didefinisikan oleh fungsi keanggotaan

$$A(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x-6|}{4}, & \text{untuk } 2 \le x \le 10 \\ 0, & \text{untuk } x < 2 \text{ dan } x > 10 \end{cases}$$

$$B(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x-8|}{4}, & \text{untuk } 4 \le x \le 12 \\ 0, & \text{untuk } x < 4 \text{ dan } x > 12 \end{cases}$$

a. Gambarkan himpunan fuzzy A dan B
b. Tuliskan himpunan fuzzy A dan B
c. Gambar dan tiliskan himpunan fuzzy $\bar{A}$ dan $\bar{B}$
d. Gambar dan tuliskan himpunan fuzzy $A \cup B$, $A \cap B$, $\bar{A} \cup \bar{B}$, dan $\bar{A} \cap \bar{B}$
e. Tuliskan supp dari $A \cup B, A \cap B, \bar{A} \cup \bar{B}, \bar{A} \cap \bar{B}$

f. Tuliskan core dari $A \cup B, A \cap B, \bar{A} \cup \bar{B}, \bar{A} \cap \bar{B}$

g. Tuliskan height dari $A \cup B, A \cap B, \bar{A} \cup \bar{B}, \bar{A} \cap \bar{B}$

4. Kerjakan seperti nomer 3 bila:

$$A(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 - \frac{|x-4|}{2}, & \text{untuk } 2 \le x \le 6 \\ 0, & \text{untuk } x < 2 \text{ dan } x > 6 \end{array} \right\}$$

$$B(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x/4, & \text{untuk } 0 \le x \le 2 \\ 1/2, & \text{untuk } 2 \le x \le 6 \\ -1/4\,x + 2, & \text{untuk } 6 \le x \le 8 \\ 0, & \text{untuk } x < 0 \text{ dan } x > 8 \end{array} \right\}$$

5. Hitung scalar cardinality untuk masing - masing himpunan fuzzy di bawah

(a) $A = 0{,}4/v + 0{,}2/w + 0{,}5/x + 0{,}4/y + 1/z$

(b) $B = \frac{x}{x+1}$, untuk $x \in X$, $X = \{ 0,1,\ldots,10 \}$

(c) $C = 1 - \frac{1}{x}$, untuk $x \in X$, , $X = \{1,\ldots,10 \}$

6. Fuzzy set A, B dan C dinyatakan oleh fungsi keanggotaan

$$A(x) = \frac{x}{x+2}; \; B(x) = 2^{-x}; \; C(x) = \frac{1}{1+10(x-2)}$$

Bila X himpunan bilangan Real dengan interval $X = [\,0, 10\,]$

a) gambarkan graph fungsi keanggotaan A (x), B (x) dan C (x)

b) gambarkan graph fungsi keanggotaan A (x), B (x) dan C (x) kemudian tuliskan formulasi matematikanya.

c) Seperti nomor (b) untuk $A \cup B, A \cup C, B \cup C$

d) Seperti nomor (b) untuk $A \cap B, A \cap C, B \cap C$

e) Seperti nomor (b) untuk $A \cup B \cup C, A \cap B \cap c$

7. Himpunan Fuzzy A, B dan C dimana X = [0,80] dinyatakan oleh fungsi keanggotaan

$$A(x) = \begin{Bmatrix} 1 & \text{untuk } x < 20 \\ (35 - x)/15 & \text{untuk } 20 \le x \le 35 \\ 0 & \text{untuk } x > 35 \end{Bmatrix}$$

$$B(x) = \begin{Bmatrix} 0 & \text{untuk } x < 20 \text{ atau } x > 60 \\ (x - 20)/15 & \text{untuk } 20 \le z \le 35 \\ (60 - x)/15 & \text{untuk } 45 \le x \le 60 \\ 1 & \text{untuk } 35 < x < 45 \end{Bmatrix}$$

$$A(x) = \begin{Bmatrix} 0 & \text{untuk } x < 45 \\ (x - 45)/15 & \text{untuk } 45 \le x \le 60 \\ 1 & \text{untuk } x > 60 \end{Bmatrix}$$

Kerjakan seperti no 6

-oo0oo-

5

RELASI KLASIK

5.1 PENDAHULUAN

Relasi Klasik (*crisp relation*) menggambarkan ada tidaknya interaksi atau koneksi antara elemen-elemen dari 2 atau lebih himpunan dalam urutan tertentu.

Contoh:

Dua orang yaitu Rosa dan Marina memiliki hubungan sebagai berikut; "Rosa adalah kakak kandung Marina" jadi relasinya adalah hubungan famili. Banyak sekali jenis relasi, tetapi ada 2 yang sering digunakan yaitu relasi; "lebih besar dari dan kurang dari".

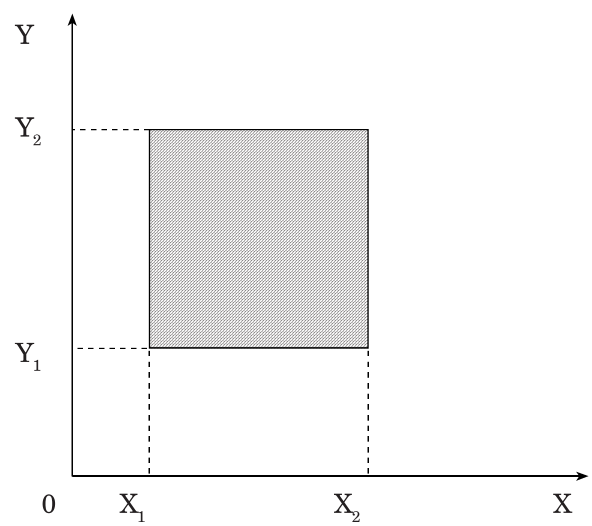
Kita dapat mendefisinikan sebuah relasi melalui perkalian skalar pada koordinat cartesian dimana sumbu x mewakili variabel x dan sumbu y mewakili variabel y. Misalnya variable x dan y adalah bilangan real dalam interval tertutup $[x_1, x_2]$ dan $[y_1, y_2]$ atau misalkan himpunan:

X = {x1,x2}

Y = {y1,y2}

Maka:

$X \times Y = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2)\}$
$Y \times X = \{(y_1, x_1), (y_2, x_1), (y_1, x_2), (y_2, x_2)\}$
$X \times X = \{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_1), (x_2, x_2)\}$
$Y \times Y = \{(y_1, y_1), (y_1, y_2), (y_2, y_1), (y_2, y_2)\}$



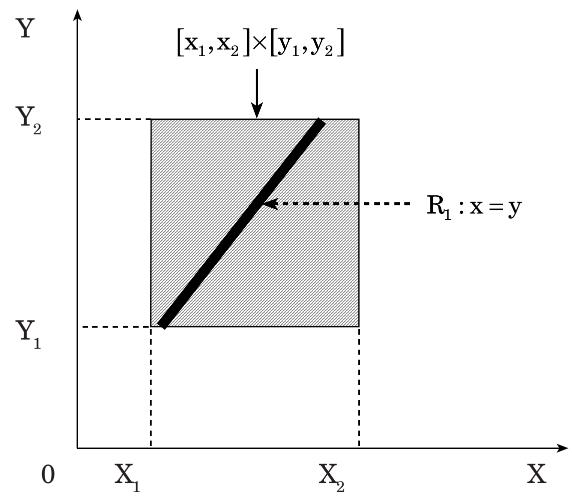
Maka relasi R antara elemen-elemen dalam himpunan X dan himpunan Y adalah:

$R \subseteq X \times Y$

Pasangan-pasangan elemen dalam R menggambarkan relasi, karena ada 2 himpunan yang terlibat dalam relasi R, maka relasi demikian disebut relasi binary.

Contoh:

Misalkan kita definisikan sebuah relasi X = Y dengan notasi R_1, maka $R_1 \subset X \times Y$ dapat kita gambarkan dalam koordinat cartesian sebagai berikut:



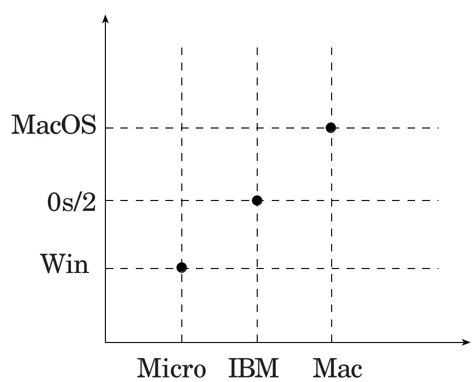
Relasi dapat melibatkan n himpunan yang disebut relasi berdimensi n. Dalam buku ini hanya dibahas relasi binary.

5.2 PEMAPARAN RELASI

5.2.1 Pemaparan Koordinat

Relasi dapat dipaparkan melalui sistem koordinat, sebagai contoh relasi.

R = {(Microsoft, Windows), (IBM, 0s/2), (Macintosh, MacOS)}



Tanda titik pada gambar di atas menjelaskan bahwa pasangan tersebut termasuk dalam relasi.

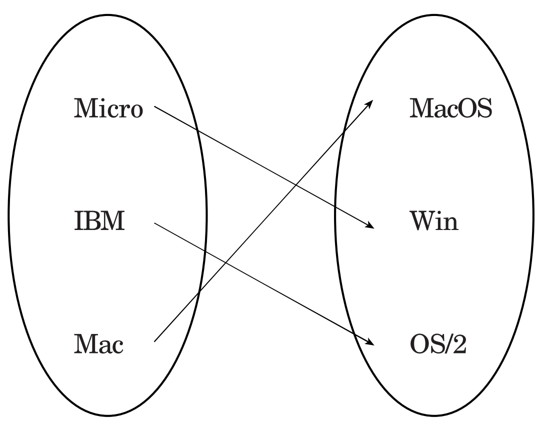
5.2.2 Pemaparan Matrik

Relasi dapat dipaparkan melalui sebuah matrik, yaitu dengan nilai 1 apabila ada relasi antara 2 elemen pasangan terurut, atau O apabila tidak ada relasi antara 2 elemen pasangan terurut.

	Micro	IBM	Mac
MacOS	0	0	1
OS/2	0	1	0
Win	1	0	0

5.2.3 Pemetaan

Pemetaan adalah paparan visual relasi dengan menghubungkan anggota suatu himpunan dengan anggota himpunan yang lain, sebagai contoh:

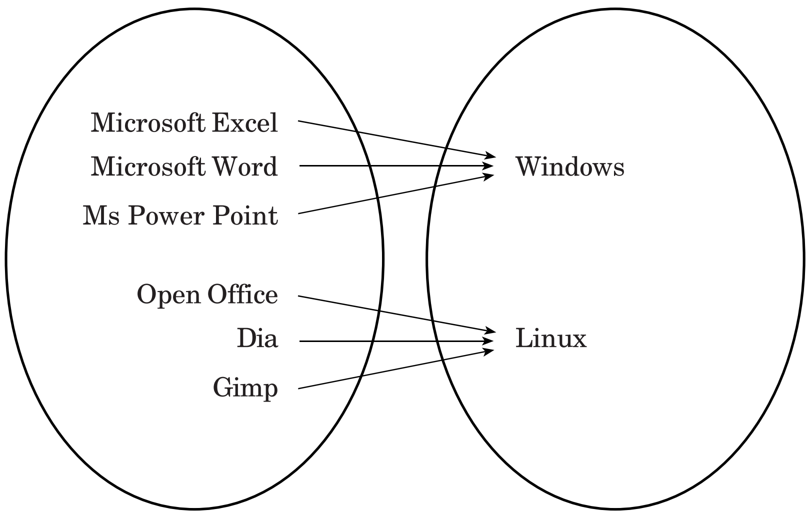


Dalam sebuah relasi, satu anggota pada himpunan pertama dapat dipetakan ke lebih dari satu anggota himpunan kedua. Relasi binary adalah relasi dimana tidak ada anggota pada himpunan pertama yang dihubungkan dengan lebih dari satu anggota pada himpunan kedua. Relasi binary disebut fungsi dengan notasi:

$R \subseteq A \times B$ atau

$R : A \rightarrow B$

Contoh:



5.2.4 Graph Berarah

Graph berarah merupakan gambaran yang paling tepat untuk relasi $R \subseteq X^2$ dengan aturan-aturan sebagai berikut:

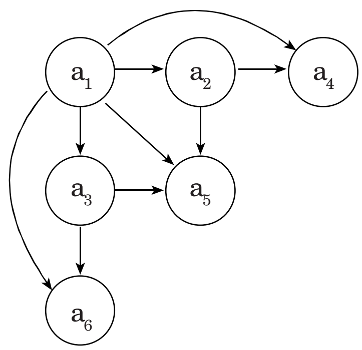
a. Setiap anggota himpunan X digambarkan dengan lingkaran
b. Garis berarah antar lingkaran menggambarkan adanya relasi antara anggota himpunan, jadi pasangan-pasangan anggota himpunan tersebut termasuk dalam relasi.

Contoh:

a_1 Prasyarat untuk semua bagian yang lain

a_3 Prasyarat untuk a_5 dan a_6

a_6 Bukan prasyarat untuk semua bagian yang lain.



5.3 OPERASI DALAM RELASI BINARY

Semua operasi dalam himpunan juga dapat diaplikasikan ke dalam relasi, namun demikian ada beberapa operasi yang tidak ada hubungannya dengan operasi dalam himpunan, seperti inverse relasi dan komposisi relasi

5.3.1 Inverse Relasi (R^{-1})

Inverse relasi R^{-1} adalah kebalikan dari relasi R, inverse relasi R, didefinisikan dengan menukar susunan anggota di semua pasangan yang ada dalam relasi, jadi

Jika: $R: X \to Y$, maka

$R^{-1}: Y \to X$

dan kebalikan dari R^{-1} adalah relasi R yang asli, yaitu

$$\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$$

untuk semua relasi binary R.

5.3.2 Komposisi Relasi

Komposisi relasi adalah operasi mengkombinasikan 2 buah relasi binary yang cocok/sesuai dan menghasilkan sebuah relasi binary yang baru. Agar dua buah relasi dapat dikomposisikan maka relasi P dan Q didefinisikan sebagai:

$$P : X \rightarrow Y$$
$$Q : Y \rightarrow Z$$

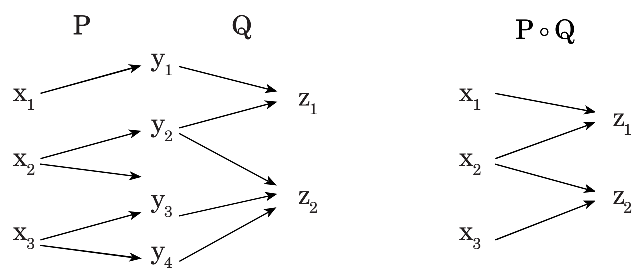
di mana Y di P harus sama dengan Y di Q.

Relasi P ke Q atau $P \circ Q$, didefinisikan sebagai relasi:

$$R : X \rightarrow Z$$

Dengan $(x, z) \in R$ jika dan hanya jika anggota y dalam himpunan Y mempunyai pasangan minimal 1 dalam himpunan P dan Q.

Contoh:



Sifat-sifat Komposisi Relasi

a. Asosiatif
   $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$
b. Tidak Komutatif
   $P \circ Q \neq Q \circ P$
c. $(P \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ P^{-1}$

5.4 Ekivalen, Kompatibel dan Ordering Relasi

Ekivalen relasi, kompatibel relasi dan ordering relasi adalah tiga jenis relasi yang penting.

5.4.1 Relasi Ekivalen

Sebuah relasi binary dikatakan ekivalen bila memenuhi sifat refleksi, simetri,dan transitif.

Sebuah relasi bersifat refleksi jika dan hanya jika $(x, x) \in R$ untuk setiap $x \in X$.

Sebuah relasi bersifat simetri jika dan hanya jika untuk setiap pasangan anggota himpunan X katakanlah (x, y) adalah anggota relasi, maka (y, x) juga anggota relasi. Atau jika $(x, y) \in R$ maka $(y, x) \in R$.

Sebuah relasi bersifat transitif jika dan hanya jika untuk 3 anggota x,y,z dalam himpunan X; $(x, y) \in R$, $(y, z) \in R$ maka $(x, z) \in R$.

Contoh:

Misalkan nama mahasiswa, nilai , mata kuliah, umur ditabelkan seperti di bawah.

Tabel 5.1 Contoh Relasi Ekivalen

Nama	Nilai	Mata kuliah	Umur
Ali	B	MatDis	19
Beni	C	Met Num	19
Cica	C	Kalkulus	20
Dani	A	Kalkulus	19
Eva	A	Kalkulus	19
Fani	A	Fisika	21
Galih	B	Alin	21
Hani	C	MatDis	19
Ina	B	MatDis	19
Jono	B	Fisika	21

Karena huruf pertama nama-nama mahasiswa berlainan, maka himpunan mahasiswa dapat kita definisikan sebagai

X = {A, B, C, D, E, F, G, H, I, J}

Sekarang kita buat sebuah relasi R dari X ke X berdasarkan nilai mahasiswa

$R : X \to X$

R = {(A, A), (A, G), (A, I), (A, J), (B, B), (B, C), (B, H), (C, B), (C, C), (C, H), (D, D),(D, E), (D, F), (E, D), (E, E), (E, F), (F, D), (F, E), (F, F), (G, A), (G, G), (G, J), (G , I), (H, B), (H, C), (H, H), (I, A), (I, G), (I, I), (I, J), (J, A), (J, G), (J, I), (J, J)}

Bila relasi $R : X \to X$ kita paparkan dalam bentuk matrik:

R	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1
B	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
C	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
D	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
E	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
F	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
G	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1
H	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
I	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1
J	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1

Perhatikan;

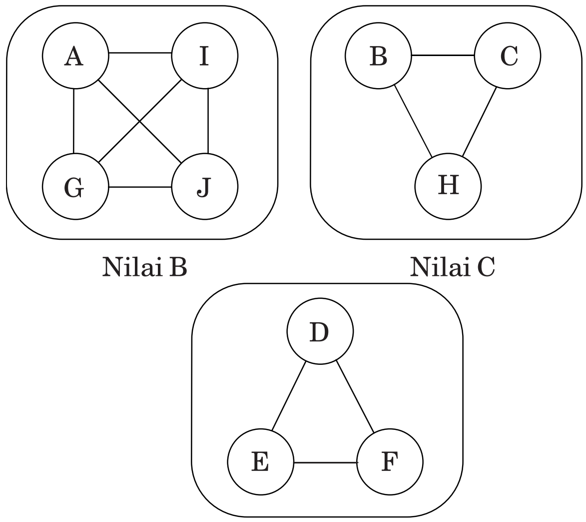
R refleksi karena(A,A),(B,B),..., (J,J) anggota relasi

R simetri karena (A, G), (G, A), ... semua pasangan bolak-baliknya anggota R

R transitif karena (A,G), (G,J) dan (A,J) anggota R

Jadi $R : X \to X$ berdasarkan nilai mahasiswa adalah relasi ekivalen.

Paparan relasi ekivalen dengan graph berarah.

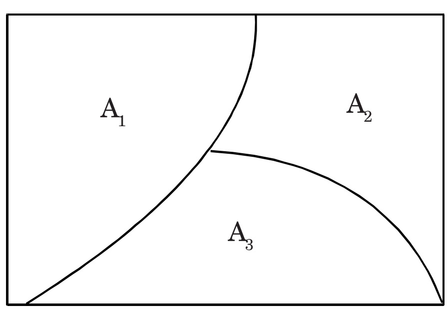


Nilai B Nilai C

Nilai A

Pada graph di atas setiap lingkaran mempunyai relasi dengan dirinya sendiri (refleksi) dan garis penghubung boleh tidak diberi arah, yang berarti setiap garis penghubung mempunyai arah bolak-balik. Relasi ekivalen yang kita kelompok berdasarkan nilai diatas disebut equivalen classes.

Partisi adalah himpunan bagian dari suatu himpunan dengan aturan: tidak overlap, lengkap dan bukan subhimpunan kosong. Partisi dari equivalen classes di atas adalah:



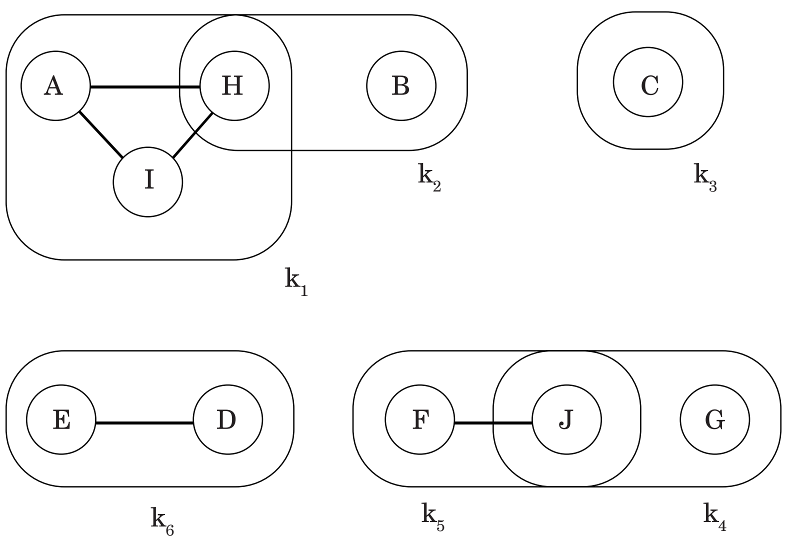
Sel A_1 adalah himpunan bagian dari himpunan relasi $R: X \to X$ dengan nilai B

Sel A_2 adalah himpunan bagian dari himpunan relasi $R: X \to X$ dengan nilai C

Sel A_3 adalah himpunan bagian dari himpunan relasi $R: X \to X$ dengan nilai A

5.4.2 Relasi Kompatibel

Sebuah relasi binary dikatakan kompatibel bila memenuhi sifat refleksi dan simetri, tetapi tidak harus transitif. Dari Tabel 5.1 kita dapat membuat relasi kompatibel sebagai berikut:



Dari contoh di atas ada enam kelompok mahasiswa dengan relasi kompatibel, yaitu:

- Ali, Hani dan Ina
- Hani dan Beni
- Cica dengan dirinya sendiri
- Galih dan Jono

- Fani dan Jono
- Dani dan Eva

5.4.3 Poset (Partially Orderet Set)

Sebuah relasi binary R pada himpunan semesta S dikatakan poset, jika relasi R tersebut bersifat: refleksi, antisimetri dan transitif.

Sebuah relasi binari bersifat anti simetri jika dan hanya jika untuk x dan y anggota himpunan X, bila $(x, y) \in R$ dan $(y, x) \in R$ maka x = y.

Partially ordered set sering dinyatakan dengan "mendahului" atau "didahului" seperti

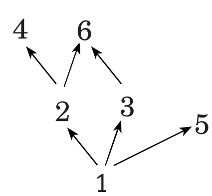
$a < b$, a mendahului b
$a \leq b$, a langsung mendahului b
$b > a$, b didahului a
$b \geq a$, b langsung didahului a
$a // b$, a tidak dapat di bandingkan dengan b

Partially ordered set sering kali dipaparkan dengan diagram Hess seperti contoh dibawah.

Misalkan relasi R adalah hubungan dalam himpunan A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} yang didefinisikan oleh

"x membagi y"

maka R adalah sebuah orde partial dalam A yang dapat digambarkan dengan diagram Hess sebagai berikut:



Dari diagram Hess di atas dapat kita lihat bahwa:

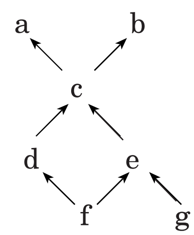
$1 < 4$, 1 mendahului 4
$1 \leq 2$, 1 langsung mendahului 2
$2 // 3$, 2 tidak dapat dibandingkan dengan 3
$4 > 1$, 4 didahului 1
$2 \geq 1$, 2 langsung didahului 1

Dalam Poset terdapat istilah-istilah yang penting seperti:

- *Upper bound* (ub) = batas atas
  adalah semua elemen himpunan diatas himpunan bagian yang akan kita cari batas atas nya, dimana setiap elemen dalam himpunan bagian itu dapat dibandingkan dengan semua elemen batas atasnya
- *Least upper bound* (lub) = supremum = batas atas terkecil
  adalah elemen dari upper bound yang paling dekat atau langsung didahului himpunan bagian yang kita cari batas atas terkecilnya
- *Lower bound* (lb) = batas bawah
  adalah semua elemen himpunan di bawah himpunan bagian yang akan kita cari batas bawah nya, dimana setiap elemen dalam himpunan bagian itu dapat dibandingkan dengan semua elemen batas bawah nya.
- *Greatest lower bound* (glb) = Infimum = batas bawah terbesar.
  adalah elemen dari lower bound yang paling dekat atau langsung mendahului himpunan bagian yang kita cari batas bawah terbesarnya.

Contoh:

Misalkan himpunan A = {a, b, c, d, e, f, g} diorder menurut diagram Hess di bawah.



Pandang sub himpunan A yaitu himpunan B = {c, d, e}

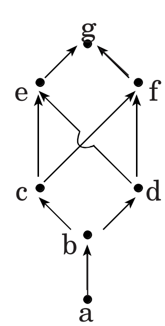
Maka

- batas atas dari B = ub (B) = a, b, c. c termasuk batas atas karena c mendominsi d dan e. c termasuk batas atas dari B karena c langsung didahului oleh d dan e
- batas bawah dari B = lb (B) = f, g bukan batas bawah dari B karena g tidak mendahului d, g dan d tidak dapat dibandingkan
- batas atas terkecil dari B adalah c karena c langsung mendahului a dan b (c mendominasi a dan b)
- batas bawah terbesar dari B = glb (B) = f

Poset dapat memiliki glb dan lub lebih dari 1 (tidak tunggal)

Contoh:

Misalkan himpunan A = {a, b, c, d, e, f, g} di order dengan diagram Hess



Pandang himpunan B = {c, d}, maka

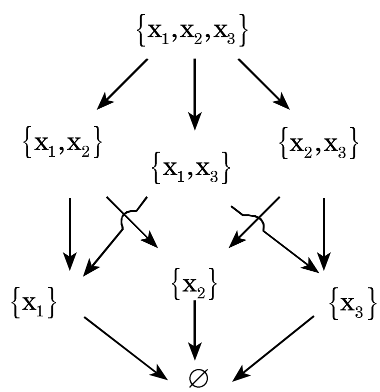
gl b (B) = b
lub (B) = e dan f

Namun demikian ada Poset khusus yang hanya boleh memiliki 1 buah (tunggal) glb dan lub,poset demikian disebut latis (Lattice). Dengan kata lain Lattice adalah poset yang setiap 2 elemennya mempunyai lub dan glb masing-masing satu buah (tunggal).

Contoh:

$A = \{x_1, x_2, x_3\}$ dan
$2^A = \{\varnothing, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}\}$

diorder dengan diagram Hess



Kita perhatikan disini bahwa setiap 2 elemen dalam poset diatas hanya memiliki 1 lub dan 1 glb.

- lub dari $\{\{x_1\}, \{x_2\}\}$ adalah ϕ
  glb dari $\{\{x_1\}, \{x_2\}\}$ adalah $\{x_1, x_2\}$
- lub dari $\{\{x_1, x_2\}, \{x_1\}\}$ adalah $\{x_1\}$
  glb dari $\{\{x_1, x_2\}, \{x_1\}\}$ adalah $\{x_1, x_2\}$

SOAL

1. Misalkan himpunan A = {1, 2, 3} dan relasi yang ada adalah $R : A \to A$. Tentukan apakah relasi-relasi dibawah mempunyai sifat refleksi, simetri, transitif atau antisimetri.

   a) $R_1 = \{(a, b) | a < b\}$

   b) $R_2 = \{(a, b) | a \leq b\}$

   c) $R_3 = \{(a, b) | a = b\}$

   d) $R_4 = \{(a, b) | 2a = b\}$

   e) $R_5 = \{(a, b) | a = b - 1\}$

   f) $R_6 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 2), (0, 2), (3, 3)\}$

   g) $R_7 = \{(a, b) | a < b \text{ atau } a > b\}$

   h) $R_8 = \{(0,0), (0,3), (1,1), (2,2), (1,0), (0,1), (3,1), (3,3),$
   $3,0), (1,3)\}$

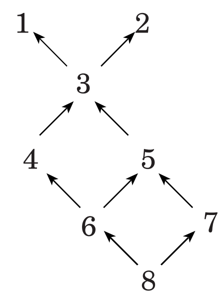
   i) $R_9 = \{(a, b) | a = b \text{ atau } a = b - 1 \text{ atau } a - 1 = b\}$

   j) $R_{10} = \{(0, 1), (1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$

2. Tentukan R^{-1} dari masing-masing relasi pada nomer 1.
3. Carilah komposisi relasi di bawah dimana masing-masing relasinya diambil dari soal nomor 1 dan 2

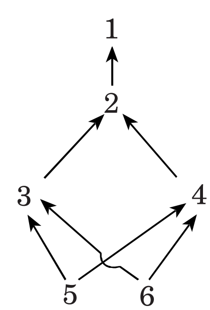
   a) $R_1 \circ R_1$
   b) $R_1 \circ R_1^{-1}$
   c) $R_1 \circ R_2$
   d) $R_3 \circ R_2^{-1}$
   e) $R_3 \circ R_3$
   f) $R_4 \circ R_5$
   g) $R_6 \circ R_6$
   h) $R_6 \circ R_6^{-1}$
   i) $R_1 \circ R_7$
   j) $R_2 \circ R_7$
   k) $R_3 \circ R_7$
   l) $R_8 \circ R_8$
   m) $R_8 \circ R_8^{-1}$
   n) $R_9 \circ R_{10}$

4. Misalkan himpunan A = {1, 2, …, 8} diorder dengan diagram Hess



a) Tuliskan simbol-simbol >, ≥, //
   1 … 2
   1 … 5
   8 … 5
   6 … 4
   6 … 5
b) Pandang himpunan-himpunan bagian A yaitu himpunan B = {4, 5, 6}, C = {2, 3, 6} dan D = {4, 5, 7}. Tentukan masing-masing ub, lub, lb, dan glb dari himpunan B, C dan D.

5. Misalkan himpunan A = {1, 2, 3, …, 6} diorder dengan diagram Hess



pandang himpunan bagian A yaitu B = { 2,3,4 }

Tentukan:

ub, lub, lb dan glb dari B

6. Dari Tabel 5.1 selidikilah apakah $R : X \rightarrow X$ adalah relasi yang ekuivalen dipandang dari mata kuliah yang diambil, kalau ya buatlah partisinya berdasarkan kelas ekuivalennya.
7. Sama dengan Soal nomor 6, dipandang dari umur mahasiswa.
8 Relasi R adalah relasi dalam himpunaan A = { 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 36, 48, 54, 72, 81, 108, 144, 162, 216, 324, 432, 648, 1296 }
yang didefinisikan oleh : " x membagi y "

(a). Gambarkan poset diatas dengan diagram Hess.

(b). Cari : ub, lub, lb dan glb dari himpunan-himpunan:

B = { 8, 12, 18, 27 }

C = { 12, 18, 36, 72, 108, 216 }

D = { 6, 12, 18, 24, 36, 54 }

E = { 6, 12, 36, 72 }

-oo0oo-

6

FUNGSI

6.1 DEFINISI FUNGSI

Fungsi adalah sebuah relasi binary dimana masing-masing anggota dalam himpunan A (domain) hanya mempunyai satu bayangan pada himpunan B (kodomain).

Notasi Fungsi:

$f : A \rightarrow B$

dibaca f adalah fungsi dari A ke dalam B atau f memetakan A ke dalam B.

Jika himpunan A = B, maka $f : A \rightarrow A$ disebut operator atau transformasi pada A.

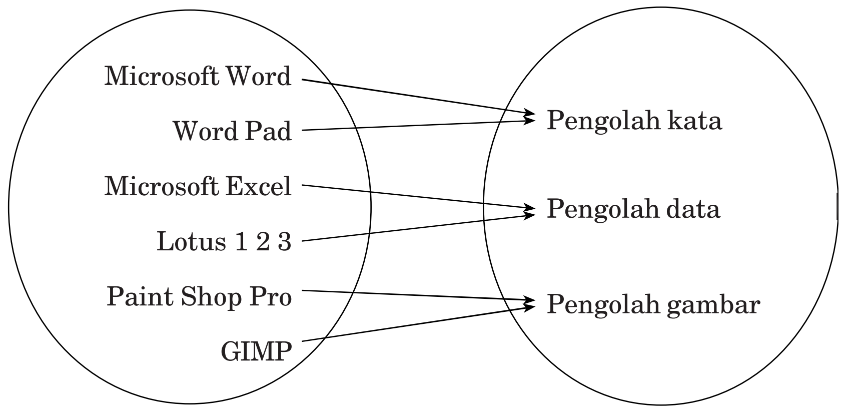
Contoh:

Misalkan A = {Microsoft Word, Word Pad, Microsoft Excel, Lotus 123, Paint Shop Pro, Gimp}

B = {Pengolah kata, Pengolah data, Pengolah gambar}

Misalkan $f : A \rightarrow B$

Maka:



Himpunan A disebut ranah (domain) dari fungsi f.
Himpunan B disebut ko-ranah (kodomain) dari fungsi f.

Pengolah kata adalah bayangan dari Microsoft Word dan Word Pad, dinyatakan oleh:

f (Microsoft Word) dan
f (Word Pad)

Jangkauan (range) dari f adalah (Pengolah kata, Pengolah data dan Pengolah gambar).

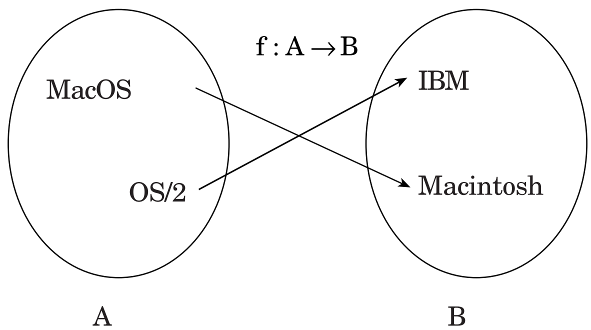
6.2 MACAM-MACAM FUNGSI

6.2.1 Fungsi satu-satu

Sebuah fungsi $f : A \rightarrow B$ dikatakan fungsi satu-satu jika dan hanya jika setiap elemen pada himpunan A mempunyai bayangan yang tidak sama pada elemen himpunan B.

Contoh:

A = himpunan sistem operasi
A = {MacOS, OS/2}
B = himpunan Komputer
B = {IBM, Macintosh}

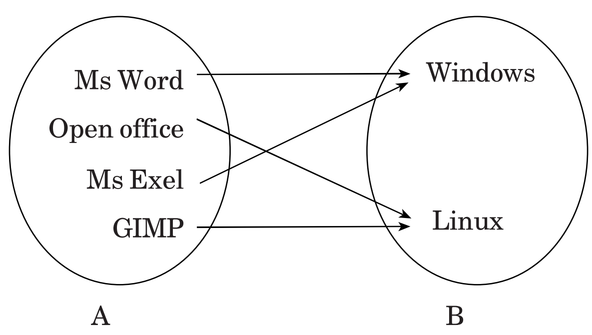


6.2.2 Fungsi pada

Sebuah fungsi $f : A \rightarrow B$ dikatakan fungsi pada jika dan hanya jika setiap elemen himpunan B muncul sebagai bayangan dari sekurang-kurangnya satu elemen himpunan A.

Contoh:

A = himpunan sofware aplikasi
B = himpunan sistem operasi

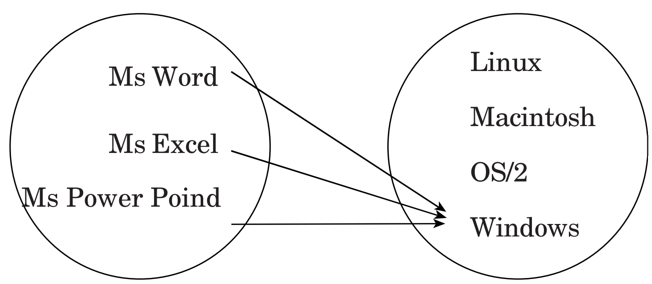


6.2.3 Fungsi konstan

Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ dikatakan fungsi konstan jika dan hanya jika hanya ada satu elemen himpunan B yang menjadi bayangan dari seluruh elemen himpunan A.

Contoh:

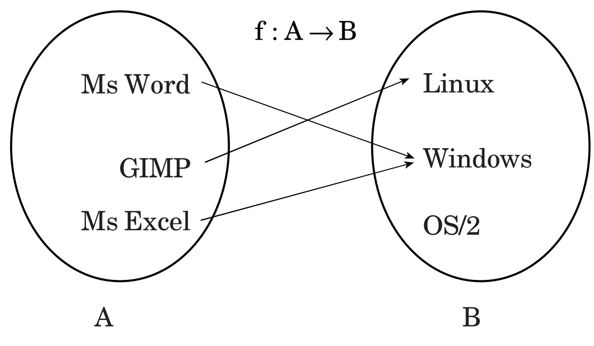
A = himpunan sofware aplikasi
B = himpunan sistem operasi



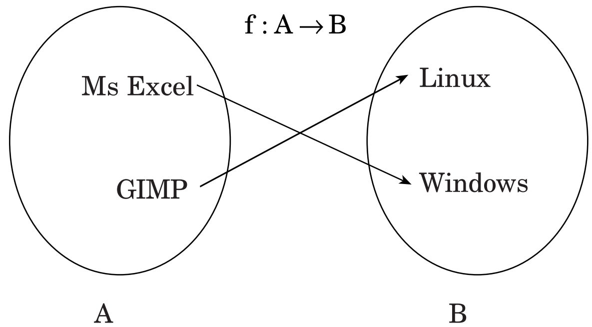
6.2.4 Fungsi Invers

Fungsi invers $f^{-1} : B \rightarrow A$ adalah sebuah fungsi dimana untuk setiap $b \in B$ mempunyai bayangan tunggal dalam himpunan A. Dengan demikian hanya fungsi satu-satu yang memiliki fungsi invers.

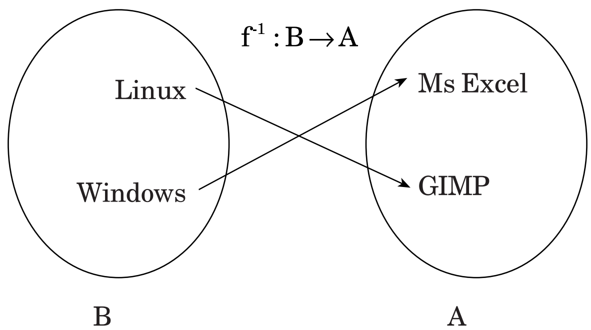
Contoh:



$f: A \rightarrow B$ bukan fungsi satu-satu , sehingga tidak memiliki fungsi invers f^{-1}



$f: A \rightarrow B$ adalah fungsi satu-satu sehingga fungsi invers $f^{-1}: B \rightarrow A$ ada yaitu



Contoh lain :

Misalkan $f(x) = {}^{3}\log(x-2)$, maka $f^{-1}(x)$ adalah

$$y = {}^{2}\log(x-2)$$
$$3^{y} = x - 2$$
$$x = 3^{y} + 2$$
$$y = 3^{x} + 2$$
$$\therefore f^{-1} = 3^{x} + 2$$

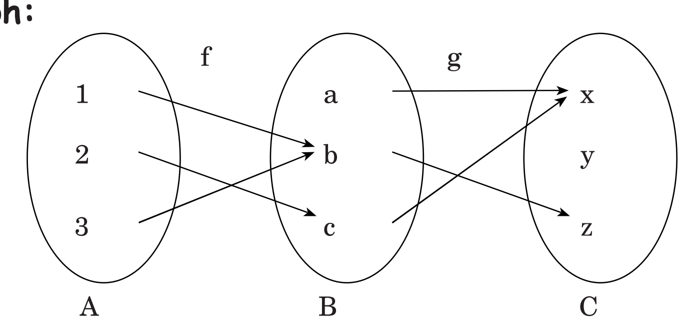
6.3 Komposisi Fungsi

Komposisi fungsi dari fungsi f dan g dinyatakan oleh $(g \circ f)$ atau (gf).

Jika $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$, maka

$$(g \circ f) : A \rightarrow C$$
$$(g \circ f)(a) \equiv g(f(a))$$

Contoh:



Maka $(g \circ f) : A \rightarrow C$ adalah

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(b) = z$$
$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(c) = x$$
$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(b) = z$$

Misalkan $f(x) = x^2 - 1$ dan $g(x) = x + 3$.

Maka

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(5) = 24$$
$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(3) = 6$$

6.4 FUNGSI KARAKTERISTIK

Fungsi karakteristik adalah sebuah fungsi yang memetakan semesta pembicaraan ke dalam himpunan {1,0}, dinotasikan

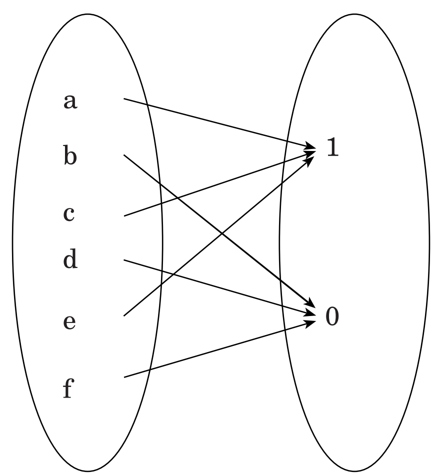
$K_A : U \to (0,1)$

dimana $$K_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ jika } x \in A \\ 0 \text{ jika } x \notin A \end{cases}$$

Contoh:

1) Misalkan U = {a, b, c, d, e, f}
A = {a, c, e}

Maka $K_A : U \to (0,1)$ dapat didefinisikan melalui diagram di bawah:



2) Misal U = {a, e, i, o, u}
A = {a, e, i}
B = {e, i, o}

Buktikan $K_{A \cap B} = K_A K_B$

Jawab:

$e \in (A \cap B)$ maka $e \in A$ dan $e \in B$

$\therefore K_{A \cap B}(e) = 1,\ K_A(e) = 1$, dan $K_B(e) = 1$

Jadi:

$K_{A \cap B}(e) = (K_A K_B)(e) = 1 \cdot 1 = 1$

$\therefore K_{A \cap B} = K_A \cdot K_B$

SOAL

1. Buatlah 5 buah contoh fungsi satu-satu yang ada kaitannya dengan software maupun hardware.
2. Buatlah 5 buah contoh fungsi pada yang ada kaitanya dengan software maupun hardware.
3. Misalkan fungsi-fungsi f dan g pada bilangan-bilangan riel $R^{\#}$ didefinisikan oleh

   $f(x) = 2x^2 + x - 3$

   $g(x) = 5x - 2$

   a) Carilah rumus-rumus dari $g \circ f$ dan $f \circ g$.
   b) Hitung $(g \circ f)(3)$ dan $(f \circ g)(3)$.
4. Misalkan $f : R^{\#} \to R^{\#}$ didefinisikan oleh $f(x) = 3x - 2$.
   a) Buktikanlah bahwa $f(x)$ adalah fungsi satu-satu dan fungsi pada
   b) Carilah rumus fungsi invers f^{-1}.
5. Misalkan U = {1, 2, 3, . . . , 10}
   A = {1, 2, . . . , 6}
   B = {5, 6, . . . , 10}

Buktikan:

a. $K_{A \cap B} = K_A \cdot K_B$

b. $K_{A \cup B} = K_A + K_B - K_{A \cap B}$

c. $K_{A - B} = K_A - K_{A \cap B}$

-oo0oo-