

Rumus-rumus Dasar Integral Tak Tentu

1.
$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$
, $n \neq -1$

$$2. \int \sin x dx = -\cos x + c$$

3.
$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$4. \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$5. \int e^X dx = e^X + c$$

6.
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

7.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c$$

8.
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = tgn^{-1}x + c$$

9.
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \sec^{-1} x + c$$

10.
$$\int \sec^2 x dx = tgnx + c$$

11.
$$\int \csc^2 x dx = ctgx + c$$

12.
$$\int \sec x t g n x dx = \sec x + c$$

13.
$$\int \cos e c x c t g x dx = \cos e c x + c$$

Integral Tentu

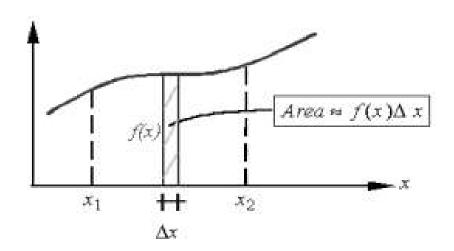
Definisi:

Misal f fungsi yang didefinisikan pada [a,b], f dikatakan terintegralkan pada [a,b] jika

$$\lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x_i \text{ ada, selanjutnya} \int_{a}^{b} f(x) dx \text{ disebut Integral Tentu (Integral Riemann)}$$

f dari a ke b, dan didefinisikan

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}) \Delta x_i.$$



 $\int f(x)dx$ menyatakan luas daerah yang tercakup diantara kurva y = f(x) dan sumbu x a dalam selang [a,b], jika $\int f(x)dx$ bertanda negatif maka menyatakan luas daerah yang

berada dibawah sumbu x.

Definisi:

$$\int_{a}^{a} f(x)dx = 0$$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = -\int_{b}^{a} f(x)dx, a > b$$

Teorema Dasar Kalkulus

Teorema Dasar Kalkulus memberikan kemudahan untuk menghitung Integral Tentu, berikut teorema tersebut:

Misal f kontinu pada [a,b] dan F sebarang anti turunan f, maka

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \mathbf{F(b)} - \mathbf{F(a)}$$
 Selanjutnya ditulis $\mathbf{F(b)} - \mathbf{F(a)} = [F(x)]_{a}^{b}$

Contoh:

Perlihatkan bahwa jika r ∈ Q dan r ≠ -1, maka

$$\int_{a}^{b} x^{r} dx = \frac{b^{r+1}}{r+1} - \frac{a^{r+1}}{r+1}$$

Jawab:

Karena F(x) = $\frac{x^{r+1}}{r+1}$ suatu anti turunan dari f(x) = x^r, maka menurut TDK,

$$\int_{a}^{b} x^{r} dx = F(b) - F(a) = \frac{b^{r+1}}{r+1} - \frac{a^{r+1}}{r+1}$$

Integral tentu sebagai operator linear, yaitu bersifat : Misal f dan g terintegralkan pada [a,b] dan k suatu konstanta, maka kf dan f + g terintegralkan, dengan

1.
$$\int_{a}^{b} kf(x)dx = k \int_{a}^{b} f(x)dx$$
2.
$$\int_{a}^{b} [f(x) + g(x)]dx = \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{a}^{b} g(x)dx$$

Sifat Integral Tentu

Sifat Penambahan Selang

Teorema:

Jika f terintegralkan pada suatu selang yang mengandung tiga titik a, b dan c, maka

$$\int_{a}^{c} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{c} f(x)dx$$
 bagaimanapun urutan a, b dan c.

Sifat Simetri

Teorema:

Jika f fungsi genap [f(-x) = f(x)] , maka
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2 \int_{0}^{a} f(x)dx$$
 dan $-a$ 0

Jika f fungsi ganjil [f(-x) = - f(x)], maka $\int_{a}^{a} f(x)dx = 0$.

$$1. \int_{0}^{2} x^{2} dx = \int_{0}^{1} x^{2} dx + \int_{1}^{2} x^{2} dx$$

$$2. \int_{0}^{2} x^{2} dx = \int_{0}^{3} x^{2} dx + \int_{3}^{2} x^{2} dx$$

$$\int_{0}^{2} x^{2} dx = \int_{0}^{-1} x^{2} dx + \int_{-1}^{2} x^{2} dx \qquad 4. \int_{-5}^{5} \frac{x^{5}}{x^{2} + 4} dx = 0$$

$$\sum_{0}^{2} x^{2} dx = \int_{0}^{3} x^{2} dx + \int_{3}^{2} x^{2} dx$$

$$\int_{-5}^{5} \frac{x^5}{x^2 + 4} dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx = 2 \int_{0}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx = 8 \int_{0}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} dx = 4\sqrt{2}$$

Teknik Pengintegralan

1. Teknik Subtitusi

a. Subtitusi Dalam Integral Tak Tentu

Teorema:

Misal g fungsi yang terdiferensialkan dan F suatu anti turunan dari f, jika u = g(x) maka $\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + c = F(g(x)) + c$

b. Subtitusi Dalam Integral Tentu.

Teorema:

Misal g mempunyai turunan kontinu pada [a,b] dan f kontinu pada daerah nilai g,

maka
$$\int_{a}^{b} f(g(x))g'(x)dx = \int_{a}^{g(b)} f(u)du$$

$$\frac{\text{Contoh:}}{\text{Hitung } \int_{0}^{1} \frac{x+1}{(x^2+2x+6)} dx}$$

Jawab:

Misal $u = x^2+2x+6$ sehingga du = 2x+2 dx = 2(x+1)dx perhatikan u = 6 jika x = 0 dan u = jika x = 1, jadi

$$\int_{0}^{1} \frac{x+1}{(x^{2}+2x+6)} dx = \frac{1}{2} \int_{0}^{1} \frac{2(x+1)}{(x^{2}+2x+6)} dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_{6}^{9} \frac{du}{u} = \frac{1}{2} [\ln u]_{6}^{9} = \frac{1}{2} (\ln 9 - \ln 6) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3}{2}\right)$$

2. Pengintegralan Bentuk-Bentuk Trigonometri

Jika n bilangan bulat positif ganjil, maka keluarkan faktor sin x atau cos x dan kemudian gunakan kesamaan sin 2 x + cos 2 x = 1.

Jika n bilangan bulat positif genap, maka gunakan rumus setengah sudut

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{\cos^2 x} = \frac{1 + \cos 2x}{\cos^2 x}$$

b. ∫ sin m x cos n x dx

Jika m atau n bilangan bulat positif ganjil dan eksponen lain sembarang, maka keluarkan faktor sin x atau cos x yang berpangkat ganjil tersebut kemudian gunakan kesamaan sin 2 x + cos 2 x = 1. Jika m dan n bilangan bulat positif genap, maka gunakan rumus setengah sudut.

c. $\int tg^n x dx$, $\int cotg^n x dx$.

Keluarkan faktor tg 2 x = sec 2 x - 1 dalam kasus tg atau faktor cotg 2 x = cosec 2 x - 1 dalam kasus cotg.

d. ∫ tg ^m x sec ⁿ x dx, ∫ cotg ^m x cosec ⁿ x dx

Jika n genap dan m sembarang, maka keluarkan faktor sec 2 x atau cosec 2 x.

Jika m ganjil dan n sembarang, keluarkan faktor tg x.sec x.

3. Pengintegralan Parsial

Pengintegralan parsial (sebagian) dapat dilakukan jika pengintegralan dengan teknik subtitusi tidak memberikan hasil, dan dengan catatan bagian sisa pengintegralan lebih sederhana dari integral mula-mula.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Contoh:

Misalkan
$$u = x$$
, $dv = e^x dx$ maka $du = dx$, $v = e^x$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

4. Integral Fungsi Akar (Subtitusi yang Merasionalkan).

a. Fungsi Integran yang memuat bentuk $\sqrt[n]{ax+b}$

Penyelesaian dengan menggunakan subtitusi : u = $\sqrt[n]{ax + b}$

Contoh: Hitung
$$\int x \sqrt[3]{x-4} dx$$

Jawab : Misalkan u = $\int x \sqrt[3]{x-4} dx$ maka $u^3 = x-4$ dan $3u^2$ du = dx

Shg
$$\int x\sqrt[3]{x-4}dx = \int (u^3+4)u \cdot 3u^2 du = \frac{3}{7}(x-4)^{\frac{3}{7}} + (x-4)^{\frac{4}{3}} + c$$

b. Integran yang memuat bentuk $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$

Gunakan berturut-turut subtitusi : $x = a \sin t$, $x = a \tan x = a \sec t$. Contoh :

1. Tentukan
$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$$

Jawab:

Jawab: Misalkan x = 2 sin t maka dx = 2 cos t dt dan $\sqrt{4-x^2}$ = 2 cos t, shg

$$\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2} dx = \int \frac{2\cos t}{4\sin^2 t} (2\cos t) dt = \int ctg^2 t dt = -\cot t + \cot t$$

$$= \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} - \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

5. Integral Fungsi Rasional

Fungsi Rasional merupakan fungsi hasil bagi dua fungsi Polinom yang ditulis :

8250.00

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$
, P(x) dan Q(x) fungsi –fungsi Polinom dengan Q(x) \neq 0

Fungsi Rasional dibedakan atas:

- Fungsi Rasional Sejati yaitu fungsi rasional dimana derajat fungsi polinom pada pembilang lebih kecil dari pada derajat fungsi polinom pada penyebut.
- Fungsi Rasional Tak Sejati yaitu fungsi rasional dimana derajat fungsi polinom pada pembilang lebih besar dari atau sama dengan derajat fungsi polinom pada penyebut.

Fungsi Rasional Tak Sejati dapat ditulis sebagai penjumlahan fungsi polinom dengan Fungsi Rasional Sejati dengan jalan membagi fungsi pembilang dengan fungsi penyebut.

Permasalahan mengintegralkan fungsi rasional terletak pada bagaimana mengintegralkan fungsi rasional sejati. Suatu fakta, bahwa fungsi rasional sejati dapat ditulis sebagai jumlah dari fungsi rasional sejati yang lebih sederhana Contoh:

$$\frac{5x-1}{x^2-1} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1}$$

 a. Penjabaran Fungsi Rasional atas Faktor Linear yang Berbeda Contoh :

Tentukan
$$\int \frac{5x+3}{x^3 - 2x^2 - 3x} dx$$

Jawab:

$$\frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x} = \frac{5x+3}{x(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3}$$

maka 5x + 3 = A(x+1)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x+1)dengan menyamakan koefisien pada kedua polinom diruas kiri dan ruas kanan maka diperoleh : A = -1, B = $-\frac{1}{2}$, dan C = $\frac{3}{2}$ sehingga

$$\int \frac{5x+3}{x^3 - 2x^2 - 3x} dx = \int \frac{-dx}{x} + \int \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} dx + \int \frac{\frac{3}{2}}{x-3} dx$$
$$= -\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln|x-3| + c$$

b. Penjabaran Fungsi Rasional atas Faktor Linear yang Berulang Contoh :

Tentukan
$$\int \frac{x}{(x-3)^2} dx$$

Jawab:

$$\frac{x}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}$$
 maka x = A(x-3) + B

dengan menyamakan koefisien pada kedua polinom diruas kiri dan ruas kanan diperoleh : A = 1 dan B = 3 sehingga

$$\int \frac{x}{(x-3)^2} dx = \int \frac{1}{x-3} dx + \int \frac{3}{(x-3)^2} dx = \ln|x-3| - \frac{3}{x-3} + c$$

Yang perlu diperhatikan untuk tiap faktor $\left(ax+b\right)^k$ dalam penyebut, maka ada sebanyak k suku penjabarannya, yaitu :

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_k}{(ax+b)^k}$$

 Penjabaran Fungsi Rasional atas Faktor Kuadrat yang Berbeda Contoh :

Tentukan
$$\int \frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x+1)(x^2+1)} dx$$

Jawab:

$$\frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{4x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

Selanjutnya tentukan A, B dan C seperti cara diatas dan kemudian hitung integral setiap sukunya.