مقدمه ای بر آشوب و مدل سازی الکتریکی مدار
و حل عددی معادلات آشوب

«پروژه درس محاسبات عددی»

استاد: دکتر تدین

دانیال خشابی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران) – آذر ۱۳۸۸

d.khashabi@gmail.com

چکیده

دراین گزارش هدف ما حل عددی معادلات لورنز، موسوم به معادلات آشوب است. در ابتدا مقدمه ای بر سیستم های آشوب ناک و تاریخچه ی آن اشاره می شود. در ادامه مداری به نام مدار Chua معرفی می شود که توانایی مدل سازی فیزیکی آشوب را در ابعاد فیزیکی داراست. با استفاده از قوانین فیزیکی آنالیز مدار، معادلات آنالیز بدست می آیند. با توجه به اینکه این معادلات، حالتی از معادلات لورنز هستند، با حل این معادلات به ازای مقادیر خاصی از پارامتر های مدار، پدیده ی آشوب در مساله ظاهر می شود. با توجه به اینکه در معادلات لورنز، با دستگاه معادلات دیفرانسیل، روبرو هستیم، حل آنها را با استفاده از روش متداول رونگه-کوتای مرتبه ۴ انجام می دهیم.

واژه‌های کلیدی :آشوب، معادلات لورنز، مدار چوا، Runge-Kutta.

مقدمــه

نظریه آشوب، به شاخه‌ای از ریاضیات و فیزیک گفته می‌شود که مرتبط با سیستمهایی است که دینامیک آنها در برابر تغییر مقادیر اولیه، رفتار بسیار حساسی نشان می دهد؛ به طوری که رفتارهای آینده آنها دیگر قابل پیش‌بینی نمی‌باشد. به این سیستم‌ها، سیستم‌های آشوبی گفته می‌شود که از نوع سیستمهای غیرخطی دینامیک هستند. برای مثال جریانات هوایی، دوره اقتصادی، کوانتوم و .... می‌باشند.

پوانکاره اولین کسی بود که اثبات کرد، مساله سه جرم (به عنوان مثال، خورشید، زمین، ماه) مساله‌ای آشوبی و غیر قابل حل است. گفته می‌شود که پیر لاپلاس [1] یا عمر خیام قبل از پوانکاره، به این مشکل و پدیده پی برده بودند. طی چند دهه ی گذشته، در حوزه ریاضیات و فیزیک مدرن، تئوری جدید ی به نام "آشوب"[2] پا به عرصه گذاشته است. تئوری آشوب، سیستمهای دینامیکی بسیار پیچیده ای مانند اتمسفر زمین، جمعیت حیوانات، جریان مایعات، تپش قلب انسان، فرآیندهای زمین شناسی و ... را مورد بررسی قرار می دهد. انگاره اصلی و کلیدی تئوری آشوب این است که **«در هر بی نظمی ، نظمی**

1 Laplace
2 Chaos

نهفته است.» به این معنا که نباید نظم را تنها در یک مقیاس جستجو کرد؛ پدیده ای که در مقیاس محلی، کاملا تصادفی و غیرقابل پیش بینی به نظر می رسد چه بسا در مقیاس بزرگتر، کاملا پایا (Stationary) و قابل پیش بینی باشد.

نقاط تشابهی بین تئوری آشوب و علم آمار و احتمالات وجود دارد. آمار نیز به دنبال کشف نظم در بی نظمی است. نتیجه پرتاب یک سکه در هر بار ،تصادفی و نامعلوم است، زیرا دامنه محلی دارد. اما پیامدهای مورد انتظار این پدیده ، هنگامی که به تعداد زیادی تکرار شود، پایا و قابل پیش بینی است. وجود چنین نظمی است که باعث زنده ماندن صنعت قمار است وگرنه هیچ سرمایه گذاری حاضر نبود که در چنین صنعتی سرمایه گذاری کند. در واقع، قمار برای کسی که قمار می کند پدیده ای تصادفی و شانسی است (چون در مقیاس محلی قرار دارد) و برای صاحب قمارخانه، پدیده ای قابل پیش بینی و پایا است (چون در مقیاس بزرگتر[۳]، این پدیده دارای نظم است).
می توان به مصادیقی از این تئوری در حوزه علوم انسانی اشاره کرد. برای مثال بسیاری از وقایع تاریخی که در مقیاس ۲۰ ساله ممکن است کاملا تصادفی و بی نظم به نظر برسند، ممکن است که در مقیاس ۲۰۰ ساله، ۲۰۰۰ ساله یا ۲۰۰۰۰ ساله دارای دوره تناوب مشخص و یا نوعی نظم در رویداد ها باشند. در نگرش رفتارگرایی در حوزه روانشناسی، در واقع با نوعی تغییر مقیاس، به نظم رفتاری و قوانین آن دست می یابند و امکان پیش بینی و یا اصلاح اختلالات رفتاری فراهم می گردد، و الا اگر رفتارهای منفرد افراد مد نظر باشد ، چیزی جز چند رفتار تصادفی ، قابل پیش بینی نخواهد بود. متدولوژی که این تئوری در اختیار ما قرار می دهد، تغییر مقیاس در نگاه به وقایع است به گونه ای که بتوان نظم ساختاری آن را کشف کرد. صد البته، نگاه جدید این منطق به نظم، بسیاری از جدالهای سنتی در مورد برهان نظم و ... در فلسفه را نیز مورد چالش قرار می دهد.
موضوع جالب دیگری که در تئوری آشوب وجود دارد، تاکید آن بر وابستگی (یا حساسیت) به شرایط اولیه است. بدین معنی که تغییرات بسیار جزیی در مقادیر اولیه یک فرآیند می تواند منجر به اختلافات چشمگیری در سرنوشت فرآیند شود.
بسیاری از پدیده های طبیعی دارای چنین حساسیتی به شرایط اولیه هستند. برای مثال قلوه سنگی که در خط الراس یک کوه قرار دارد ممکن است تنها بر اساس اندکی تمایل به سمت چپ یا راست، به دره شمالی یا جنوبی بلغزد، در حالی که چند میلیون سال بعد، که توسط فرآیندهای زمین شناسی و تحت نیروهای باد و آب و ... چند هزار کیلومتر انتقال می یابد، می توان فهمید که آن تمایل اندک به راست و چپ به چه میزان در سرنوشت این قلوه سنگ تاثیرگذار بوده است.

اگر چه چنین وابستگی آشوبناک [۴] به شرایط اولیه را می توان در بسیاری از وقایع جامعه شناسی (از جمله انقلابها) و روانشناسی و .. جستجو کرد، لکن به جز چندین حوزه تاکنون توجه زیادی بدین مسائل صورت نگرفته است. به این معنا که اغلب برای تمام طول حیات یک پدیده، وزن یکسانی از نظر تاثیرگذاری عوامل درونی و بیرونی در نظر گرفته می شود، در حالی که تئوری آشوب، نقش کلیدی را در شرایط و المانهای مرزی اولیه می داند. ادوارد لورنز [۵]، دانشمند مشهور هواشناسی، سالها پیش جمله مشهور خود را که بعدها به " اثر پروانه ای"[۶] مشهور شد، چنین عنوان کرده است: "در یک سیستم دینامیکی مانند اتمسفر زمین، آشفتگی بسیار کوچک ناشی از به هم خوردن بالهای یک پروانه می تواند منجر به توفانهایی در مقیاس یک قاره بشود ". در بسیاری از وقایع جامعه شناختی و سیاسی نیز می توان به جای پیجویی عوامل بسیار پیچیده و نادیده گرفتن عوامل به ظاهر ساده، با جدی گرفتن عوامل به ظاهر بی ارزش به تحلیل صحیح تر و دقیقتری نسبت به آن واقعه رسید.

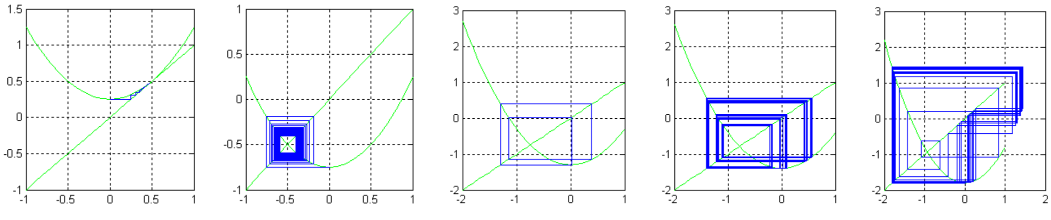
3 Global scale
4 Chaotic
5 Edward Lorenz
6 Butterfly Effect

در حوزه ی روانشناسی کار زیادی روی این نظریه انجام شده است. بر اساس تئوری عظیم نابغه دنیای روانشناسی، فروید، ریشه تمامی رفتارهای انسانها در طول زندگی را متاثر از دوران کودکی می داند و با پی گیری این رفتارها تا دوران کودکی، به تحلیل این رفتارها می پردازد. این گفته بیان دیگری از تئوری آشوب در حوزه ی روانشناسی است.
علاوه بر مطالبی که ذکر شد ،تئوری آشوب ، با ارائه نظریه فرکتالها [7] و ارائه مفهوم جدیدی از بعد فیزیکی و مفاهیمی مانند "خود تشابهی" و " خود تمایلی" ، دروازه جدیدی در کشف نظم در پدیده ها گشود که در جای خود می تواند به طور جدی ، مورد استفاده علوم انسانی قرار گیرد.

اثر پروانه ای

عبارت «اثر پروانه ای» در پی مقاله ای از ادوارد لورنز بوجود آمد. وی در صد سی و نهمین اجلاس IIIS در سال ۱۹۷۲ مقاله ای با این عنوان ارائه داد که «آیا بال زدن پروانه ای در برزیل می تواند باعث ایجاد تندباد در تکزاس شود؟»
لورنتس در حال تحقیق روی مدل ریاضی بسیار ساده ای که از آب و هوای زمین، به یک معادله دیفرانسیل غیر قابل حل رسید. وی برای حل این معادله به روشهای عددی با رایانه متوسل شد. او برای اینکه بتواند این کار را در روزهای متوالی انجام دهد، نتیجه آخرین خروجی یک روز را به عنوان شرایط اولیه روز بعد وارد می کرد. لورن ز در نهایت مشاهده کرد که نتیجه شبیه سازی های مختلف با شرایط اولیه یکسان با هم کاملا متفاوت است. بررسی خروجی چاپ شده رایانه نشان داده که رویال مکبی (Royal McBee)، رایانهای که لورنز از آن استفاده می کرد، خروجی را تا ۴ رقم اعشار گرد می کند. از آنجایی محاسبات داخل این رایانه با ۶ رقم اعشار صورت می گرفت، از بین رفتن دورقم آخر باعث چنین تاثیری شده بود. مقدار تغییرات در عمل گرد کردن نزدیک به اثر بال زدن یک پروانه است. این واقعیت غیر ممکن بودن پیش بینی آب و هوا در دراز مدت را نشان می دهد.
مشاهدات لورنز باعث پررنگ شدن مبحث نظریه آشوب شد. عبارت عامیانه «اثر پروانه ای» در زبان تخصصی نظریه آشوب، «وابستگی حساس به شرایط اولیه» ترجمه می شود.
اغلب سیستم ها در دنیای واقعی طی تکرار یک عملیات مشخص کار می کنند. در مثال آب و هوای لورن ز فرایند گرم شدن سطح زمین از طرف خورشید و سرد شدن جو از طریق تابش به فضای بیرون، فرایندی است که مدام تکرار می شود. می توان نشان داد که در چنین سیستمی بازه ای از مقادیر اولیه با عث ایجاد رفتار آشوبناک می شود.

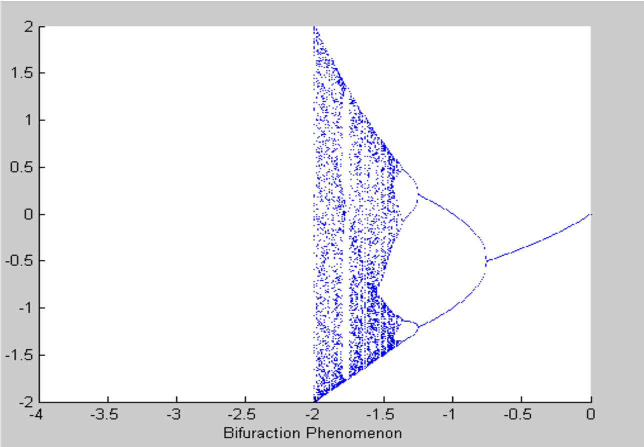
برای اینکه نتیجه عملکرد سیستم فوق را بتوانیم بهتر درک کنیم از نموداری به این شرح استفاده می کنیم:[6]
ابتدا تابع y = x2 + c را رسم کرده و خط y = x را نیز روی آن می کشیم. روی نمودار، مقداری اولیه ای برای x0 درنظر می گیریم. مقدار x1 با رسم یک خط عمودی از این عدد تا نمودار y = x2 + c بدست می آید. برای بدست آوردن نقطه بعدی باید مقدار قبلی y را به جای مقدار فعلی x بگذاریم. این کار با رسم یک خط افقی از نقطه برخورد قبلی تا نمودار y = x انجام میشود. شکلهای زیر با در نظر گرفتن x0 = 0 و به ترتیب، از راست به چپ، $c = \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, -1.3, -1.4015, -1.8$ رسم شده اند:



7 Fractals

مشاهده می‌شود که با ایجاد تغییرات جزیی در پارامتر، رفتار سیستم کاملاً تغییر می‌کند. به چنین رفتاری «وابستگی حساس به شرایط اولیه» یا «اثر پروانه ای» می گویند.

اگر مجموعه مقادیری که x در طول عملکرد سیستم به خود می گیرد را نسبت به c رسم کنیم، شکل بدست آمده یک فراکتال خواهد بود :



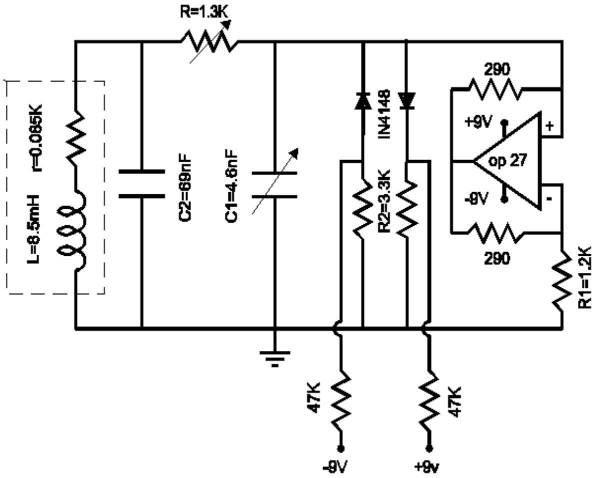
کد ۱- شکل فراکتال بدست آمده از دنباله ی $x_{n+1} = x_n^2 + c$

```
close all;
clear all;
c=0;
y=0.0;

hold on
while c > -4
        for i=1:100;
            y = y.^2 +c; %converge the iteration
        end
        for i=1:80

            y = y.^2 + c;
            plot(c,y,'.', 'MarkerSize',3); % plot the converged points
        end
        c=c-0.01;
end
xlabel('Bifuraction Phenomenon')
```

معرفی مدار Chua[8]

لیون چوا[9] در سال ۱۹۸۳ این مدار بسیار ساده را طراحی کرد تا نظریه ی آشوب را در قالب آزمایشی فیزیکی ساده و به صورتی عملی مدل کند. با استفاده از این مدار الکتریکی ساده به راحتی می توان، به مطالعه ی پدیده های آشوبناک پرداخت. مطالعه ی خاصیت آشوبگرایی بر اساس مدار الکتریکی بسیار مناسب است. در واقع مزیت اینگونه مدل سازی در این است که یک مدار الکتریکی این امکان را به ما می دهد تا اینکه با تغییر مقادیر پارامتر های مدار، از قبیل مقادیر مقاومت ها و ظرفیت خازن ها یا .... و مشاهده ی نتیجه بوسیله ی نوسان نما، بصورتی عملی درباره ی این نظریه بحث کنیم. البته باید گفت که بر اساس این ایده که می توان پدیده ی آشوب را بصورتی مداری مدل کرد، افراد مدل های گوناگونی را برای این مدل سازی پیشنهاد کرده اند که در این میان تعدادی از مدل سازی ها، صرفا جنبه ای تحقیقاتی دارند. در واقع برای ایجاد خاصیت غیرخطی در این عناصر، از عناصری غیر واقعی، استفاده شده است.

مداری که در شکل زیر نشان داده شده است، توسط مایکل کراس[10] [5] برای مدل سازی آشوب پیشنهاد شده است. ویژگی این مدار آن است که به گونه ای طراحی شده است که امکان پیاده سازی عملی آن وجود دارد. قسمت راست مدار(تمامی اجزایی که در سمت راست C1 قرار گرفته اند) نقش ایجاد خاصیت غیر خطی و مقاومت منفی را بر عهده دارند. معمولا از این المان به عنوان دیود چوا[11] یاد می شود. در واقع تقویت کننده ی عملیاتی و مقاومت های آن، مقاومت منفی R1– و دیود باعث ایجاد خاصیت غیرخطی در مدار می شود. سمت چپ مدار، یک مدار RLC است که بدون قسمت راست، نوسان میرا خواهد داشت.



شکل ۱- مدار چوای معرفی شده توسط مایکل کراس

آنالیز مدار

سه پارامتر را برای مدار بالا، در نظر می گیریم:

۱ - V1 ولتاژ دو سر خازن C1

۲ - V2 ولتاژ دو سر خازن C2

۳ - I جریان الکتریکی داخل سلف (خود القا)

با فرض اینکه $g(V1)$ جریان عبوری از ناحیه ی عیر خطی است، خواهیم داشت:

---

[8] Chua's Circuit
[9] Leon Chua
[10] Michael Cross
[11] Chua's Diode

$$\begin{cases} C1\left({dV1}/_{dt}\right) = \frac{V2-V1}{R} - g(V1) \\ C2\left({dV2}/_{dt}\right) = -\frac{V2-V1}{R} + I \\ L\left({dI}/_{dt}\right) = -rI - V2 \end{cases}$$

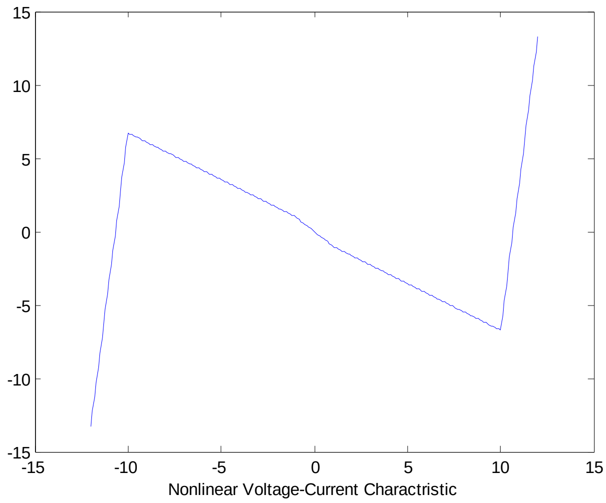
برای راحتی می توان با فرض های زیر، معادلات را بصورت زیر ساده کرد:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(y-x) - g(x) \\ \frac{dy}{dt} = s[-a(y-x) + z] \\ \frac{dz}{dt} = -c(y + pz) \end{cases}$$

$$p = \frac{r}{R1}, \qquad s = \frac{C1}{C2}, \qquad c = C1 * R1^2/L, \qquad b = 1 - R1/R2, \qquad a = R1/R$$

مدل سازی ساده ای سمت راست مدار، g(x) را می توان بصورت زیر نشان داد:

$$g(x) = \begin{cases} -x, & |x| \le 1 \\ -[1 + b(|x|-1)] * sign(x), & 1 < |x| \le 10 \\ [10(|x|-10) - 9(b+1)] * sign(x), & |x| > 10 \end{cases}$$



شکل ۲- خاصیت ولتاژ-جریان برای بخش غیر خطی مدار

در واقع تنها معادله ی دیفرانسیل اول غیر خطی است و دو معادله ی دیگر هردو خطی اند.

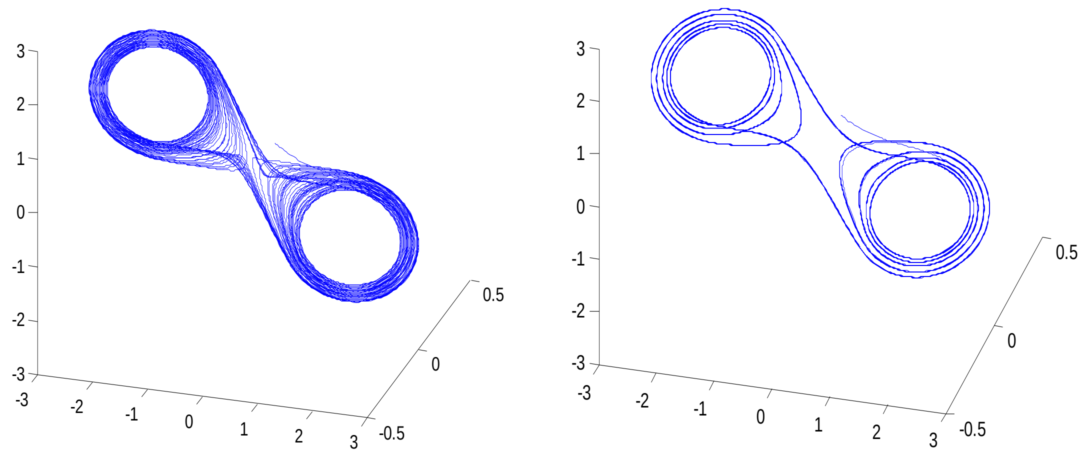
برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی بالا، از تابع *ode45* نرم افزار *MATLAB* استفاده شده است که درواقع از روش عددی *Runge-Kutta* برای بدست آوردن جواب معادلات دیفرانسیل معمولی بهره می برد.

در این مرحله احتیاج داریم به پارامتر های مسئله(R, r, R1, R2, C2, L)، مقادیر عددی نسبت دهیم و با تغییر دادن مقادیر C1 جواب مسئله در قبال پاسخ های مختلف، ببینیم. مقدار اولیه بطور پیش فرض (۰.۰۵، ۰.۱۵، ۰.۱) در نظر

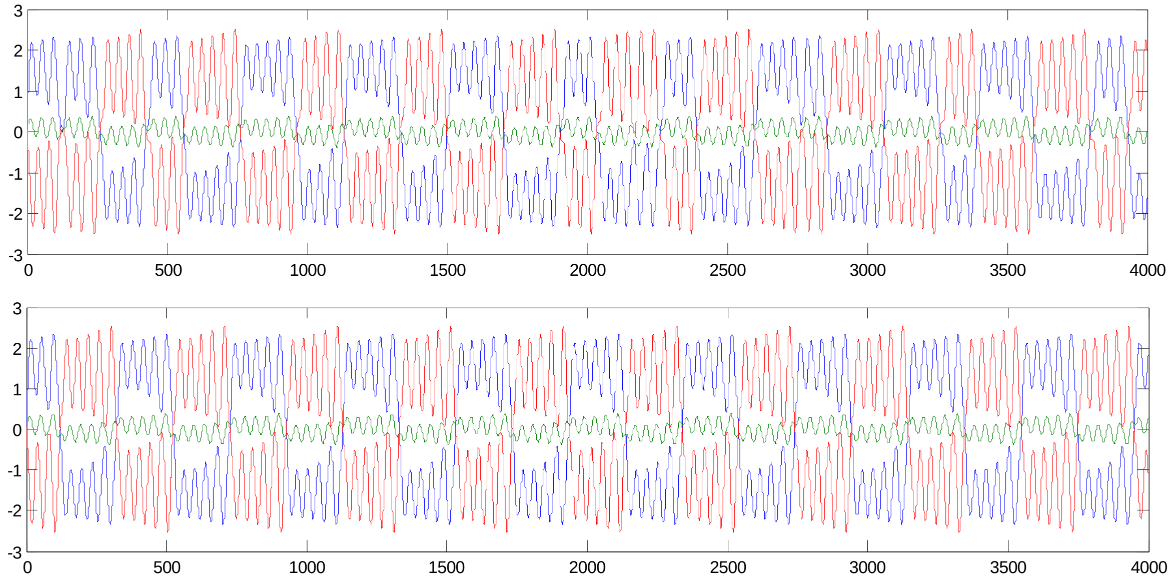
گرفته می شود. در زیر پاسخ را به ازای مقادیر C1=4.28e-9 و C2=4.32e-9 نشان داده شده است که به ترتیب نشان دهنده ی رفتار تناوبی و رفتار آشوبناک هستند.

جدول 1 - کمیت‌های

R	R1	R2	C2	L	r
1.3 K	1.2 K	3.3 K	69 nF	8.5 mH	0.085 K



شکل ۳- جواب دستگاه معادلات دیفرانسیلی وقتی که *C1=4.28e-9* *(راست،متناوب)* و *C2=4.32e-9* (چپ،آشوبناک)

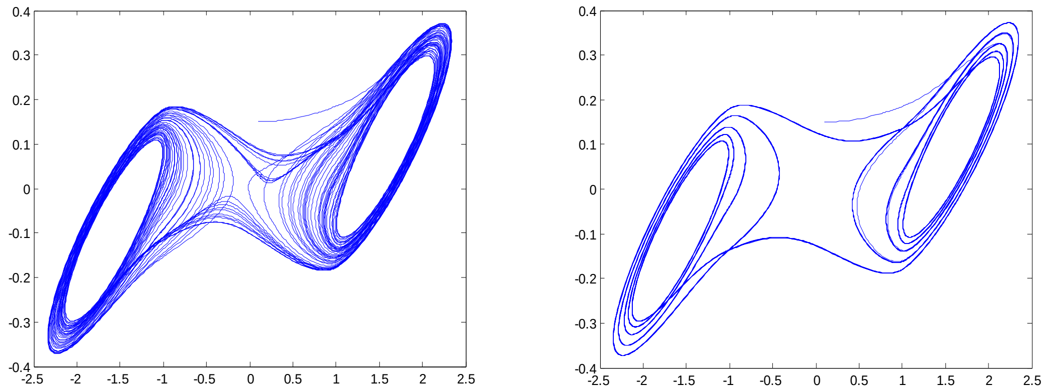


شکل ۳- جواب دستگاه معادلات دیفرانسیلی نسبت به زمان؛ C1=4.28e-9 (پایین، متناوب) و C2=4.32e-9 (بالا، آشوبناک)

کد ۱- حل دستگاه معادله دیفرانسیل مدار در MATLAB (شکل ۳ بعدی)

```
clear all;
x0=[0.1, 0.15, 0.05];
R = 1300;
r = 85;
L = 8.5e-3;
R1 = 1200;
R2 = 3300;
C2 = 69e-9;
C1 = 4.28e-9; %Choas: 4.32e-9, Periodic: 4.28e-9

% w(1) = a   w(2)=s   w(3) = c   w(4) = p   w(5) = b
w = [R1./R  C1./C2  (C1.*(R1)^2)./L  r./R1  1-R1./R2];

[t,x]=ode45(@chua,[0,4000],x0, odeset('reltol', 1e-6, 'abstol', 1e-9),
w);

figure(3)
plot( t, x )
figure(4)
plot3(x(:,1), x(:,2), x(:,3));
```

برای درک بهتر رفتار خروجی می توان تصویر خروجی مسئله را روی صفحه ی X-Y مشاهده کرد. در واقع این جواب متناظر با پارامتر های V1-V2 است.



شکل ۴- جواب دستگاه معادلات دیفرانسیلی وقتی که *C1=4.28e-9* (*راست،متناوب*) و *C2=4.32e-9* (چپ،آشوبناک)

کد ۲- حل دستگاه معادله دیفرانسیل مدار در MATLAB (شکل ۲ بعدی)

```
clear all;
x0=[0.1, 0.15, 0.05];
R = 1300;
r = 85;
L = 8.5e-3;
R1 = 1200;
R2 = 3300;
C2 = 69e-9;
C1 = 4.328e-9; %Choas: 4.32e-9, Periodic: 4.28e-9

% w(1) = a   w(2)=s   w(3) = c   w(4) = p   w(5) = b
w = [R1./R  C1./C2  (C1.*(R1)^2)./L  r./R1  1-R1./R2];

[t,x]=ode45(@chua,[0,4000],x0, odeset('reltol', 1e-6, 'abstol', 1e-9),
```

```
w);

figure(1)
plot(x(:,1), x(:,2));

figure(2)
subplot(3,1,1)
plot(t,x(:,1))
subplot(3,1,2)
plot(t,x(:,2))
subplot(3,1,3)
plot(t,x(:,3))
```

کد۳- عنصر غیر خطی معادله

```
function output = nonlinear(x, coef)
b = coef(1);

if abs(x) > 10
    output = (10*(abs(x)-10)-(9*b+1)).*sign(x);
elseif abs(x) > 1 & abs(x) <= 10
    output = -(1+b.*(abs(x)-1)).*sign(x);
elseif abs(x) <= 1
    output = -x;
end
```

مراجع

1- Peters D.A., and He C.J., “Correlation of Measured Induced Velocities with a Finite-State Wake Model,” Journal of the American Helicopter Society, Vol. 36, No. 3, 1991, pp. 59-70.

2- S. Weiland “Chaos in the Chua circuit”, Project for the Course on Dynamical Systems.

3- P.B.Mital, U.Kumar, R.A.Prasad, “Chua’s Circuit – A Universal Paradigm for Generating and Studying Chaos”, Journal of Active and Passive Electronic Devices, Vol. 3, pp. 51–63

4- Wikipedia: “Chaos Theory, Butterfly Effect, Chua’s Circuit, Leon Chua, Bifurcation”.

5- M. Cross. “Chua’s Circuit.” 2003. <http://www.cmp.caltech.edu/~mcc/chaos_new/Chua.html>.

۶- ویکی پدیا پارسی،"آشوب، اثر پروانه ای".