سیزدهمین کنفرانس دانشجویی مهندسی برق ایران

کاربرد موجک در تقریب توابع یک بعدی و حل معادلات دیفرانسیل معمولی

سیدمحسن موسوی و دانیال خشابی

دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

{moosavi.sm,d.khashabi}@gmail.com

سرفصل ها

- مقدمه ای بر موجک
- تقریب توابع یک متغیره با موجک Haar
- چگونگی حل معادله ی دیفرانسیل معمولی با موجک Haar
- نتایج

مقدمه ای بر موجک

[1] A.W.Galli, G.T.Heydt and P.F.Ribeiro, “Exploring the Power of Wavelet Analysis”, *IEEE Computer Application in Power*, Oct 1996, pp.37 – 41.

مقدمه ای بر موجک

- موجک ها ◀ مجموعه ای از توابع متعامد پایه

  کاربردهای زیادی در زمینه‌ی ریاضیات، فیزیک، علوم کامپیوتر و مهندسی
- برای مثال فشرده‌سازی اطلاعات اعم از تصویر، حذف نویز اطلاعات، پردازش سیگنال اعم از تصویر یا صدا، آنالیزهای عددی[1]

[1] A.W.Galli, G.T.Heydt and P.F.Ribeiro, “Exploring the Power of Wavelet Analysis”, *IEEE Computer Application in Power*, Oct 1996, pp.37 – 41.

سیزدهمین کنفرانس دانشجویی مهندسی برق ایران
دانشگاه تربیت مدرس

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

مقدمه ای بر موجک

- موجک ها ◄ مجموعه ای از توابع متعامد پایه
  کاربردهای زیادی در زمینه‌ی ریاضیات، فیزیک، علوم کامپیوتر و مهندسی
- برای مثال فشرده‌سازی اطلاعات اعم از تصویر، حذف نویز اطلاعات، پردازش سیگنال اعم از تصویر یا صدا، آنالیزهای عددی[1]
- استفاده از موجک در آنالیزهای عددی معادلات دیفرانسیل
  معمولی یا پاره‌ای
  - در مطالعه ی پدیده های طبیعی و آزمایش های عملی، نتیجه ی آزمایش به حل یک معادله‌ی دیفرانسیل منجر می شود.

[1] A.W.Galli, G.T.Heydt and P.F.Ribeiro, “Exploring the Power of Wavelet Analysis”, *IEEE Computer Application in Power*, Oct 1996, pp.37 – 41.

تقریب توابع یک متغیره با موجک Haar

P.Chang, P.PiauSimple, “Procedure for the Designation of Haar Wavelet Matrices for Differential Equations”, *International Multi-Conference of Engineers and Computer Scientists*, 2008

تقریب توابع یک متغیره با موجک Haar

- موجک Haar به علت سادگی◄ محبوبیت بیشتری نسبت به سایر موجک ها[1]

P.Chang, P.PiauSimple, "Procedure for the Designation of Haar Wavelet Matrices for Differential Equations", *International Multi-Conference of Engineers and Computer Scientists*, 2008

تقریب توابع یک متغیره با موجک Haar

- موجک Haar به علت سادگی◄ محبوبیت بیشتری نسبت به سایر موجک ها[1]
- موجک توانایی همگرایی دقیق‌تری در مقیاس محلی دارد.

P.Chang, P.PiauSimple, “Procedure for the Designation of Haar Wavelet Matrices for Differential Equations”, *International Multi-Conference of Engineers and Computer Scientists*, 2008

تقریب توابع یک متغیره با موجک Haar

- موجک Haar به علت سادگی◄ محبوبیت بیشتری نسبت به سایر موجک ها[1]
- موجک توانایی همگرایی دقیق‌تری در مقیاس محلی دارد.

یکی از دلایلی برتری آنالیز موجک بر سایرتقریب ها ◄ میل سریع ضرایب حقیقی توابع پایه آن به ازای کلاس های مختلف از سیگنال ها

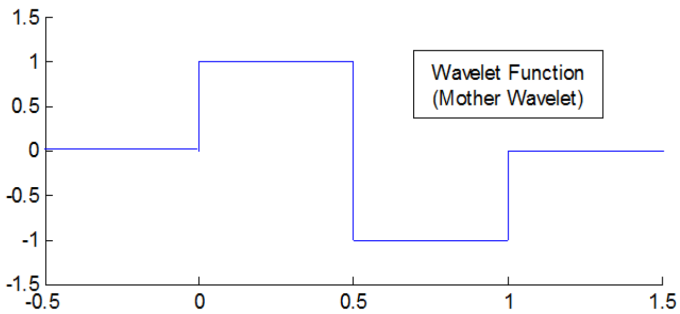
P.Chang, P.PiauSimple, “Procedure for the Designation of Haar Wavelet Matrices for Differential Equations”, *International Multi-Conference of Engineers and Computer Scientists*, 2008

تقریب توابع یک متغیره با موجک Haar

- موجک Haar به علت سادگی◄ محبوبیت بیشتری نسبت به سایر موجک ها[1]
- موجک توانایی همگرایی دقیق‌تری در مقیاس محلی دارد.

یکی از دلایلی برتری آنالیز موجک بر سایرتقریب ها ◄ میل سریع ضرایب حقیقی توابع پایه آن به ازای کلاس های مختلف از سیگنال ها

خ



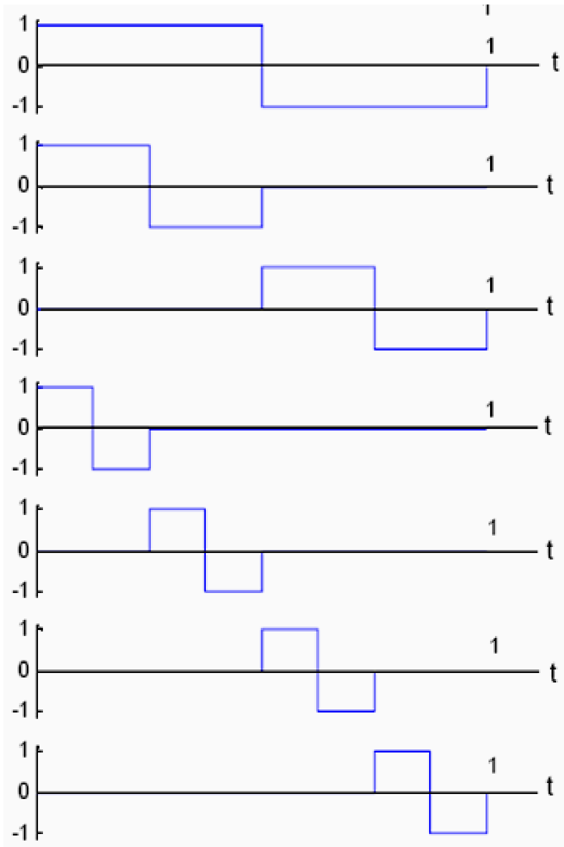
انتقال: $\psi_{0,k}(x) = \psi(x-k)$

تغییر مقیاس: $\psi_{j,0}(x) = \psi(2^j x)$

انتقال و مقیاس: $\psi_{j,k}(x) = \psi(2^j x - k)$

P.Chang, P.PiauSimple, “Procedure for the Designation of Haar Wavelet Matrices for Differential Equations”, *International Multi-Conference of Engineers and Computer Scientists*, 2008

تقریب توابع یک متغیره با موجک Haar



- خانواده ی موجک مادر Haar:

$$\psi_{j,k}(x)=\psi(2^{j}x-k)$$

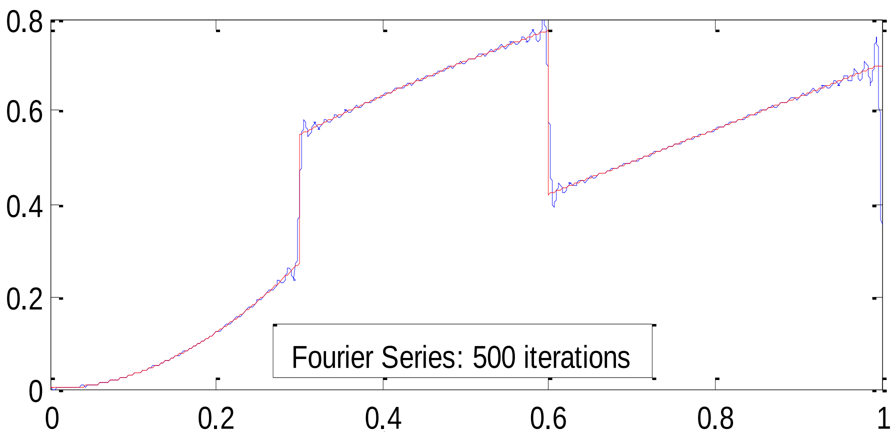
$$\psi_{m,k}(x)=\begin{cases}1 & \dfrac{k}{m}\le t<\dfrac{k+0.5}{m}\\ -1 & \dfrac{k+0.5}{m}\le t<\dfrac{k+1}{m}\\ 0 & else\end{cases}$$

$$\begin{cases}m=2^{j};\ j=0,1,2,3,\ldots,J\\ k=0,1,2,\ldots,m-1\end{cases}$$

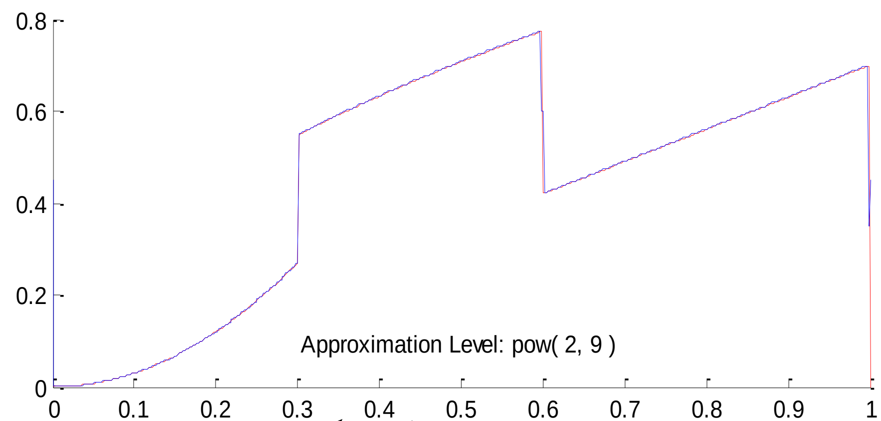
تقریب توابع یک متغیره با موجک Haar

$$f_J(t) = c_0 + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=1}^{2^j} < f(\tau), \psi_{j,k}(\tau) > . \psi_{j,k}(t)$$

- J بیشتر، دقت بیشتر!



تقریب سری فوریه
و پدیده گیبس



تقریب با موجک

[1] S.Mallat, “a Wavelet Tour of Signal Processing, The Sparse Way”, 3rd Edition, 2009, Elsevier Pub.

حل معادله ی دیفرانسیل معمولی با موجک

- عدم امکان استفاده مستقیم از موجک Haar به علت ناپیوستگی! چاره؟

[1] C.Cattani, “Haar wavelet spline”, *Journal of Interdisciplinary Math.*4 (2001) 35-47.
[2] *C.F.Chen, C.H.Hsiao, “Haar Wavelet Method for Solving Lumped and Distributed-Parameter Systems”,IEEEProc.Pt.D144 (1)(1997) 87-94.*

حل معادله ی دیفرانسیل معمولی با موجک

- عدم امکان استفاده مستقیم از موجک Haar به علت ناپیوستگی! چاره؟
  - هموارکردن موجک Haar با استفاده از درون یابی[1] ◄ موجب پیچیدگی زیاد.

[1] C.Cattani, “Haar wavelet spline”, *Journal of Interdisciplinary Math.*4 (2001) 35-47.
[2] *C.F.Chen, C.H.Hsiao, “Haar Wavelet Method for Solving Lumped and Distributed-Parameter Systems”,IEEEProc.Pt.D144 (1)(1997) 87-94.*

حل معادله ی دیفرانسیل معمولی با موجک

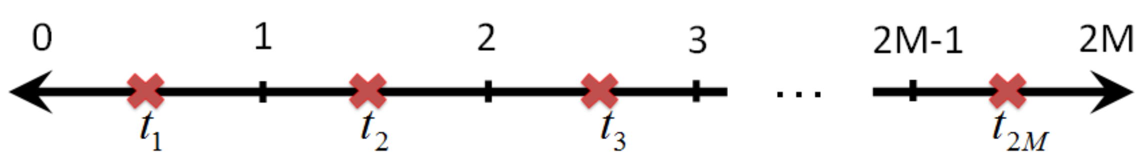
- عدم امکان استفاده مستقیم از موجک Haar به علت ناپیوستگی! چاره؟
  - هموارکردن موجک Haar با استفاده از درون یابی[1] ◄ موجب پیچیدگی زیاد.
  - تبدیل مشتق ها به انتگرال ها[2] ◄ انتگرال گرفتن (به جای مشتق) ◄ از بین رفتن مشکل ناپیوستگی
    - لذا میتوان یک معادله ی دیفرانسیل را به یک **معادله ی جبری** تبدیل کرد.

[1] C.Cattani, "Haar wavelet spline", *Journal of Interdisciplinary Math.*4 (2001) 35-47.
[2] *C.F.Chen, C.H.Hsiao, "Haar Wavelet Method for Solving Lumped and Distributed-Parameter Systems",IEEEProc.Pt.D144 (1)(1997) 87-94.*

حل معادله ی دیفرانسیل معمولی با موجک

- عدم امکان استفاده مستقیم از موجک Haar به علت ناپیوستگی! چاره؟
  - هموارکردن موجک Haar با استفاده از درون یابی[1] ◄ موجب پیچیدگی زیاد.
  - تبدیل مشتق ها به انتگرال ها[2] ◄ انتگرال گرفتن (به جای مشتق) ◄ از بین رفتن مشکل ناپیوستگی
    - لذا میتوان یک معادله ی دیفرانسیل را به یک **معادله ی جبری** تبدیل کرد.
- با مشخص بودن دسته توابع پایه(در اینجا Haar) ◄ میتوان ساختارهایی ایجاد کرد که در هر محاسبه با پیش فرض مشخص بودن آنها به حل معادله پرداخت! ◄ افزایش سرعت محاسبات
- برای انجام آنالیز ◄ نیاز به گسسته سازی روی زمان:

$$t_l = \frac{l-0.5}{2M}; l = 1, 2, 3, \ldots, 2M$$



[1] C.Cattani, “Haar wavelet spline”, *Journal of Interdisciplinary Math.*4 (2001) 35-47.
[2] *C.F.Chen, C.H.Hsiao, “Haar Wavelet Method for Solving Lumped and Distributed-Parameter Systems”,IEEEProc.Pt.D144 (1)(1997) 87-94.*

سیزدهمین کنفرانس دانشجویی مهندسی برق ایران دانشگاه تربیت مدرس

دانشگاه تربیت مدرس دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

حل معادله ی دیفرانسیل معمولی با موجک

- دو ماتریس به عنوان ابزار حل معادلات با پایه های موجک Haar معرفی میشود[3]:
  - ماتریس H : برای خود توابع موجک
  - ماتریس P : برای ایجاد انتگرال توابع از روی تقریب با ماتریس H

$$H_{2M\times 2M}$$

[1] U.Lepik, “Numerical Solution of Differential Equations Using Haar Wavelets”, *Mathematics and Computers in Simulation* 68 (2005) 127–143.

حل معادله ی دیفرانسیل معمولی با موجک

- دو ماتریس به عنوان ابزار حل معادلات با پایه های موجک Haar معرفی میشود[3]:
  - ماتریس H : برای خود توابع موجک
  - ماتریس P : برای ایجاد انتگرال توابع از روی تقریب با ماتریس H
- ماتریس $H_{2M\times 2M}$

$$H(i,l) \triangleq h_i(t_l)$$

[1] U.Lepik, "Numerical Solution of Differential Equations Using Haar Wavelets", *Mathematics and Computers in Simulation* 68 (2005) 127–143.

حل معادله ی دیفرانسیل معمولی با موجک

- دو ماتریس به عنوان ابزار حل معادلات با پایه های موجک Haar معرفی میشود[3]:
  - ماتریس H : برای خود توابع موجک
  - ماتریس P : برای ایجاد انتگرال توابع از روی تقریب با ماتریس H
- ماتریس $H_{2M\times 2M}$ $\qquad H(i,l) \triangleq h_i(t_l)$
- چند خانواده ی اول:

$$\mathrm{H}_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\quad \mathrm{H}_4=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\quad \mathrm{H}_8=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

[1] U.Lepik, “Numerical Solution of Differential Equations Using Haar Wavelets”, *Mathematics and Computers in Simulation* 68 (2005) 127–143.

حل معادله ی دیفرانسیل معمولی با موجک

- ماتریس $[P]_{2M\times 2M}$:[1]
  - چند خانواده ی اول:

$$[(PH)_{li}] = [\int_0^{t_l} h_i(t)dt]$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_4 = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 8 & -4 & -2 & -2 \\ 4 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[1] U.Lepik, “Numerical Solution of Differential Equations Using Haar Wavelets”, *Mathematics and Computers in Simulation* 68 (2005) 127–143.

حل معادله ی دیفرانسیل معمولی با موجک

- در نشان [1] داده شده است که می توان ماتریس P را از رابطه ی بازگشتی زیر بدست آورد:

$$P_\mu = \begin{bmatrix} P_{0.5\mu} & -\frac{1}{2\mu}H_{0.5\mu} \\ \frac{1}{2\mu}H_{0.5\mu}^{-1} & O \end{bmatrix}$$

- محاسبه ی ماتریس P و H $\quad H_{m\times m}^{-1} = \frac{1}{m}H_{m\times m}^{T}diag(r)$
  - با یکبار محاسبه، می توان آنها را برای هر معادله‌ی دلخواه بکار برد.

[1] C.F.Chen, C.H.Hsiao, “Haar Wavelet Method for Solving Lumped and Distributed-Parameter Systems”,*IEEEProc.*Pt.D144 (1)(1997) 87-94.
U.Lepik, “Numerical Solution of Differential Equations Using Haar Wavelets”, *Mathematics and Computers in Simulation* 68 (2005) 127–143

حل معادله ی دیفرانسیل معمولی با موجک

حل معادله ی دیفرانسیل معمولی با موجک

- اگر $Y^{(m)}_{2M\times 1}$ تقریبی از $y^{(m)}(t)$ بر اساس ماتریس ضرایب مجهول باشد:

$$Y^{(m)}_{2M\times 1} = H_{2M\times 2M}\, X_{2M\times 1}$$

  - H : ماتریس پایه های موجک.
  - X : ماتریس ضرایب.

حل معادله ی دیفرانسیل معمولی با موجک

- اگر $Y^{(m)}_{2M\times 1}$ تقریبی از $y^{(m)}(t)$ بر اساس ماتریس ضرایب مجهول باشد: $Y^{(m)}_{2M\times 1} = H_{2M\times 2M} X_{2M\times 1}$
  - H : ماتریس پایه های موجک.
  - X : ماتریس ضرایب.
  - هدف: بدست آوردن $Y^{(m-1)}_{2M\times 1}$ به صورت یک عبارت ماتریسی بر اساس X :

حل معادله ی دیفرانسیل معمولی با موجک

- اگر $Y^{(m)}_{2M\times 1}$ تقریبی از $y^{(m)}(t)$ بر اساس ماتریس ضرایب مجهول باشد: $Y^{(m)}_{2M\times 1} = H_{2M\times 2M} X_{2M\times 1}$
  - H : ماتریس پایه های موجک.
  - X : ماتریس ضرایب.
  - هدف: بدست آوردن $Y^{(m-1)}_{2M\times 1}$ به‌صورت یک عبارت ماتریسی بر اساس X :

$$Y^{(m)}_{2M\times 1} = H_{2M\times 2M} X_{2M\times 1} \rightarrow Y^{(m)}_{l,1} = \sum_{i'=1}^{2M} H_{l,i'} X_{i',1}$$

حل معادله ی دیفرانسیل معمولی با موجک

- اگر $Y^{(m)}_{2M\times 1}$ تقریبی از $y^{(m)}(t)$ بر اساس ماتریس ضرایب مجهول باشد: $Y^{(m)}_{2M\times 1} = H_{2M\times 2M} X_{2M\times 1}$
  - H : ماتریس پایه های موجک.
  - X : ماتریس ضرایب.
  - هدف: بدست آوردن $Y^{(m-1)}_{2M\times 1}$ به صورت یک عبارت ماتریسی بر اساس X :

$$Y^{(m)}_{2M\times 1} = H_{2M\times 2M} X_{2M\times 1} \rightarrow Y^{(m)}_{l,1} = \sum_{i'=1}^{2M} H_{l,i'} X_{i',1}$$

$$y^{(m-1)}(t) = \int_0^t y^{(m)}(\tau) d\tau + y^{(m-1)}(0) \rightarrow Y^{(m-1)}_{l,1} = \sum_{l'=1}^{l} Y^{(m)}_{l',1} + y^{(m-1)}(0)$$

حل معادله ی دیفرانسیل معمولی با موجک

- اگر $Y^{(m)}_{2M\times 1}$ تقریبی از $y^{(m)}(t)$ بر اساس ماتریس ضرایب مجهول باشد: $Y^{(m)}_{2M\times 1}=H_{2M\times 2M}X_{2M\times 1}$
  - H : ماتریس پایه های موجک.
  - X : ماتریس ضرایب.
  - هدف: بدست آوردن $Y^{(m-1)}_{2M\times 1}$ به صورت یک عبارت ماتریسی بر اساس : X

$$Y^{(m)}_{2M\times 1}=H_{2M\times 2M}X_{2M\times 1}\rightarrow Y^{(m)}_{l,1}=\boxed{\sum_{i'=1}^{2M}H_{l,i'}X_{i',1}}$$

$$y^{(m-1)}(t)=\int_0^t y^{(m)}(\tau)d\tau+y^{(m-1)}(0)\rightarrow Y^{(m-1)}_{l,1}=\sum_{l'=1}^{l}Y^{(m)}_{l',1}+y^{(m-1)}(0)$$

حل معادله ی دیفرانسیل معمولی با موجک

- اگر $Y^{(m)}_{2M\times1}$ تقریبی از $y^{(m)}(t)$ بر اساس ماتریس ضرایب مجهول باشد: $Y^{(m)}_{2M\times1}=H_{2M\times2M}X_{2M\times1}$
  - H : ماتریس پایه های موجک.
  - X : ماتریس ضرایب.
  - هدف: بدست آوردن $Y^{(m-1)}_{2M\times1}$ به صورت یک عبارت ماتریسی بر اساس X :

$$Y^{(m)}_{2M\times1}=H_{2M\times2M}X_{2M\times1}\rightarrow Y^{(m)}_{l,1}=\boxed{\sum_{i'=1}^{2M}H_{l,i'}X_{i',1}}$$

$$y^{(m-1)}(t)=\int_0^t y^{(m)}(\tau)d\tau+y^{(m-1)}(0)\rightarrow Y^{(m-1)}_{l,1}=\sum_{l'=1}^{l}Y^{(m)}_{l',1}+y^{(m-1)}(0)=\sum_{l'=1}^{l}\sum_{i'=1}^{2M}H_{l',i'}X_{i',1}+y^{(m-1)}(0)$$

حل معادله ی دیفرانسیل معمولی با موجک

- اگر $Y^{(m)}_{2M\times1}$ تقریبی از $y^{(m)}(t)$ بر اساس ماتریس ضرایب مجهول باشد: $Y^{(m)}_{2M\times1}=H_{2M\times2M}X_{2M\times1}$
  - H : ماتریس پایه های موجک.
  - X : ماتریس ضرایب.
  - هدف: بدست آوردن $Y^{(m-1)}_{2M\times1}$ به صورت یک عبارت ماتریسی بر اساس X :

$$Y^{(m)}_{2M\times1}=H_{2M\times2M}X_{2M\times1}\rightarrow Y^{(m)}_{l,1}=\boxed{\sum_{i'=1}^{2M}H_{l,i'}X_{i',1}}$$

$$y^{(m-1)}(t)=\int_0^t y^{(m)}(\tau)d\tau+y^{(m-1)}(0)\rightarrow Y^{(m-1)}_{l,1}=\sum_{l'=1}^{l}Y^{(m)}_{l',1}+y^{(m-1)}(0)=\sum_{l'=1}^{l}\sum_{i'=1}^{2M}H_{l',i'}X_{i',1}+y^{(m-1)}(0)$$

حل معادله ی دیفرانسیل معمولی با موجک

- اگر $Y^{(m)}_{2M\times1}$ تقریبی از $y^{(m)}(t)$ بر اساس ماتریس ضرایب مجهول باشد: $Y^{(m)}_{2M\times1} = H_{2M\times2M}X_{2M\times1}$
  - H : ماتریس پایه های موجک.
  - X : ماتریس ضرایب.
  - هدف: بدست آوردن $Y^{(m-1)}_{2M\times1}$ به صورت یک عبارت ماتریسی بر اساس : X

$$Y^{(m)}_{2M\times1} = H_{2M\times2M}X_{2M\times1} \rightarrow Y^{(m)}_{l,1} = \boxed{\sum_{i'=1}^{2M} H_{l,i'}X_{i',1}}$$

$$y^{(m-1)}(t) = \int_0^t y^{(m)}(\tau)d\tau + y^{(m-1)}(0) \rightarrow Y^{(m-1)}_{l,1} = \sum_{l'=1}^{l} Y^{(m)}_{l',1} + y^{(m-1)}(0) = \sum_{l'=1}^{l}\sum_{i'=1}^{2M} H_{l',i'}X_{i',1} + y^{(m-1)}(0)$$

$$= \sum_{i'=1}^{2M} X_{i',1}\sum_{l'=1}^{l} H_{l',i'} + y^{(m-1)}(0) = (*)$$

حل معادله ی دیفرانسیل معمولی با موجک

- اگر $Y^{(m)}_{2M\times 1}$ تقریبی از $y^{(m)}(t)$ بر اساس ماتریس ضرایب مجهول باشد: $Y^{(m)}_{2M\times 1}=H_{2M\times 2M}X_{2M\times 1}$
  - H : ماتریس پایه های موجک.
  - X : ماتریس ضرایب.
  - هدف: بدست آوردن $Y^{(m-1)}_{2M\times 1}$ به صورت یک عبارت ماتریسی بر اساس X :

$$Y^{(m)}_{2M\times 1}=H_{2M\times 2M}X_{2M\times 1}\rightarrow Y^{(m)}_{l,1}=\boxed{\sum_{i'=1}^{2M}H_{l,i'}X_{i',1}}$$

$$y^{(m-1)}(t)=\int_0^t y^{(m)}(\tau)d\tau+y^{(m-1)}(0)\rightarrow Y^{(m-1)}_{l,1}=\sum_{l'=1}^{l}Y^{(m)}_{l',1}+y^{(m-1)}(0)=\sum_{l'=1}^{l}\sum_{i'=1}^{2M}H_{l',i'}X_{i',1}+y^{(m-1)}(0)$$

$$=\sum_{i'=1}^{2M}X_{i',1}\boxed{\sum_{l'=1}^{l}H_{l',i'}}+y^{(m-1)}(0)=(*)$$

حل معادله ی دیفرانسیل معمولی با موجک

- اگر $Y^{(m)}_{2M\times1}$ تقریبی از $y^{(m)}(t)$ براساس ماتریس ضرایب مجهول باشد: $Y^{(m)}_{2M\times1}=H_{2M\times2M}X_{2M\times1}$
  - H : ماتریس پایه های موجک.
  - X : ماتریس ضرایب.
  - هدف: بدست آوردن $Y^{(m-1)}_{2M\times1}$ به صورت یک عبارت ماتریسی بر اساس X :

$$Y^{(m)}_{2M\times1}=H_{2M\times2M}X_{2M\times1}\rightarrow Y^{(m)}_{l,1}=\boxed{\sum_{i'=1}^{2M}H_{l,i'}X_{i',1}}$$

$$y^{(m-1)}(t)=\int_0^t y^{(m)}(\tau)d\tau+y^{(m-1)}(0)\rightarrow Y^{(m-1)}_{l,1}=\sum_{l'=1}^{l}Y^{(m)}_{l',1}+y^{(m-1)}(0)=\sum_{l'=1}^{l}\sum_{i'=1}^{2M}H_{l',i'}X_{i',1}+y^{(m-1)}(0)$$

$$=\sum_{i'=1}^{2M}X_{i',1}\boxed{\sum_{l'=1}^{l}H_{l',i'}}+y^{(m-1)}(0)=(*)$$

$$(PH)_{l,i}=\int_0^{t_l}h_i(t)dt\rightarrow(PH)_{l,i}=\sum_{l'=1}^{l}H_{l',i}$$

حل معادله ی دیفرانسیل معمولی با موجک

- اگر $Y^{(m)}_{2M\times1}$ تقریبی از $y^{(m)}(t)$ براساس ماتریس ضرایب مجهول باشد: $Y^{(m)}_{2M\times1} = H_{2M\times2M} X_{2M\times1}$
  - H : ماتریس پایه های موجک.
  - X : ماتریس ضرایب.
  - هدف: بدست آوردن $Y^{(m-1)}_{2M\times1}$ به صورت یک عبارت ماتریسی بر اساس X :

$$Y^{(m)}_{2M\times1} = H_{2M\times2M} X_{2M\times1} \rightarrow Y^{(m)}_{l,1} = \boxed{\sum_{i'=1}^{2M} H_{l,i'} X_{i',1}}$$

$$y^{(m-1)}(t) = \int_0^t y^{(m)}(\tau)d\tau + y^{(m-1)}(0) \rightarrow Y^{(m-1)}_{l,1} = \sum_{l'=1}^{l} Y^{(m)}_{l',1} + y^{(m-1)}(0) = \sum_{l'=1}^{l}\sum_{i'=1}^{2M} H_{l',i'} X_{i',1} + y^{(m-1)}(0)$$

$$= \sum_{i'=1}^{2M} X_{i',1} \boxed{\sum_{l'=1}^{l} H_{l',i'}} + y^{(m-1)}(0) = (*)$$

$$(PH)_{l,i} = \int_0^{t_l} h_i(t)dt \rightarrow (PH)_{l,i} = \sum_{l'=1}^{l} H_{l',i}$$

حل معادله ی دیفرانسیل معمولی با موجک

- اگر $Y^{(m)}_{2M\times 1}$ تقریبی از $y^{(m)}(t)$ بر اساس ماتریس ضرایب مجهول باشد: $Y^{(m)}_{2M\times 1} = H_{2M\times 2M}X_{2M\times 1}$
  - H : ماتریس پایه های موجک.
  - X : ماتریس ضرایب.
  - هدف: بدست آوردن $Y^{(m-1)}_{2M\times 1}$ بصورت یک عبارت ماتریسی بر اساس X :

$$Y^{(m)}_{2M\times 1} = H_{2M\times 2M}X_{2M\times 1} \rightarrow Y^{(m)}_{l,1} = \boxed{\sum_{i'=1}^{2M} H_{l,i'}X_{i',1}}$$

$$y^{(m-1)}(t) = \int_0^t y^{(m)}(\tau)d\tau + y^{(m-1)}(0) \rightarrow Y^{(m-1)}_{l,1} = \sum_{l'=1}^{l} Y^{(m)}_{l',1} + y^{(m-1)}(0) = \sum_{l'=1}^{l}\sum_{i'=1}^{2M} H_{l',i'}X_{i',1} + y^{(m-1)}(0)$$

$$= \sum_{i'=1}^{2M} X_{i',1}\boxed{\sum_{l'=1}^{l} H_{l',i'}} + y^{(m-1)}(0) = (*)$$

$$(PH)_{l,i} = \int_0^{t_l} h_i(t)dt \rightarrow (PH)_{l,i} = \sum_{l'=1}^{l} H_{l',i}$$

$$\rightarrow (*) = \sum_{i'=1}^{2M}(PH)_{l,i'}X_{i',1} + y^{(m-1)}(0) \Rightarrow Y^{(m-1)}_{2M\times 1} = (PH)_{2M\times 2M}X_{2M\times 1} + [y^{(m-1)}(0)]_{2M\times 1}$$

حل معادله ی دیفرانسیل معمولی با موجک

- اگر $Y^{(m)}_{2M\times1}$ تقریبی از $y^{(m)}(t)$ براساس ماتریس ضرایب مجهول باشد: $Y^{(m)}_{2M\times1} = H_{2M\times2M} X_{2M\times1}$
  - H : ماتریس پایه های موجک.
  - X : ماتریس ضرایب.
  - هدف: بدست آوردن $Y^{(m-1)}_{2M\times1}$ به‌صورت یک عبارت ماتریسی بر اساس : X

$$Y^{(m)}_{2M\times1} = H_{2M\times2M} X_{2M\times1} \to Y^{(m)}_{l,1} = \boxed{\sum_{i'=1}^{2M} H_{l,i'} X_{i',1}}$$

$$y^{(m-1)}(t) = \int_0^t y^{(m)}(\tau)d\tau + y^{(m-1)}(0) \to Y^{(m-1)}_{l,1} = \sum_{l'=1}^{l} Y^{(m)}_{l',1} + y^{(m-1)}(0) = \sum_{l'=1}^{l}\sum_{i'=1}^{2M} H_{l',i'} X_{i',1} + y^{(m-1)}(0)$$

$$= \sum_{i'=1}^{2M} X_{i',1} \boxed{\sum_{l'=1}^{l} H_{l',i'}} + y^{(m-1)}(0) = (*)$$

$$(PH)_{l,i} = \int_0^{t_l} h_i(t)dt \to (PH)_{l,i} = \sum_{l'=1}^{l} H_{l',i}$$

$$\to (*) = \sum_{i'=1}^{2M} (PH)_{l,i'} X_{i',1} + y^{(m-1)}(0) \Rightarrow Y^{(m-1)}_{2M\times1} = (PH)_{2M\times2M} X_{2M\times1} + [y^{(m-1)}(0)]_{2M\times1}$$

حل معادله ی دیفرانسیل معمولی با موجک

- در حالت کلی داریم:

$$if: y^{(m)}(t) = HX$$

$$\rightarrow st: m \geq n; then: Y^{(n)} = (P^{m-n}H)X + \sum_{i=0}^{m-n-1} \frac{y^{(n+i)}(0)}{i!} T^{(.)i}$$

$$t = t_0$$

حل معادله ی دیفرانسیل معمولی با موجک

- در حالت کلی داریم:

$$if : y^{(m)}(t) = HX$$

$$\rightarrow st : m \geq n; then : Y^{(n)} = (P^{m-n}H)X + \sum_{i=0}^{m-n-1} \frac{y^{(n+i)}(0)}{i!} T^{(.)i}$$

- اگر $t = t_0$ را به عنوان مبدا آنالیز در نظر بگیریم:

$$\rightarrow Y^{(n)} = (P^{m-n}H)X + \sum_{i=0}^{m-n-1} \frac{y^{(n+i)}(t_0)}{i!} T^{(.)i}$$

- با توجه به رابطه فوق ◄ بدیهی است هر ODE را می توان بصورت جبری حل کرد.
  - X مجهول است!

مثال و نتایج

- معادله ی زیر را در نظر می گیریم:

$$y''' + ay'' + by' + cy = i(t)$$

مثال و نتایج

- معادله ی زیر را در نظر می گیریم:

$$y''' + ay'' + by' + cy = i(t)$$

- داریم:

$$HX + a(PH)X + b(P^2H)X + c(P^3H)X$$
$$= I - [ay''(0) + by'(0) + cy(0)\ ]\ T^{(.)0}$$
$$-[by''(0) + cy'(0)]\ T^{(.)1}$$
$$-(\frac{cy''(0)}{2})T^{(.)2}$$

مثال و نتایج

- معادله ی زیر را در نظر می گیریم:

$$y''' + ay'' + by' + cy = i(t)$$

- داریم:

$$\begin{aligned} HX + a(PH)X + b(P^2H)X + c(P^3H)X \\ = I - [ay''(0) + by'(0) + cy(0)\ ]\ T^{(.)0} \\ -[by''(0) + cy'(0)]\ T^{(.)1} \\ -(\frac{cy''(0)}{2})T^{(.)2} \end{aligned}$$

- مقادیر مقابل را در نظر بگیرید:

$$a = 1, b = 0, c = 2, i(t) = \sin(5t)$$

$$y''(0) = 0, y'(0) = 0, y(0) = 0 \longrightarrow y''' + y'' + 25y' + 25y = \sin(5t)$$

مثال و نتایج

- معادله ی زیر را در نظر می گیریم:

$$y''' + ay'' + by' + cy = i(t)$$

- داریم:

$$HX + a(PH)X + b(P^2H)X + c(P^3H)X$$
$$= I - [ay''(0) + by'(0) + cy(0)]\, T^{(.)0}$$
$$-[by''(0) + cy'(0)]\, T^{(.)1}$$
$$-\left(\frac{cy''(0)}{2}\right)T^{(.)2}$$

- مقادیر مقابل را در نظر بگیرید:

$$a = 1, b = 0, c = 2, i(t) = \sin(5t)$$

$$y''(0) = 0, y'(0) = 0, y(0) = 0 \longrightarrow y''' + y'' + 25y' + 25y = \sin(5t)$$

- جواب دقیق به این صورت است:

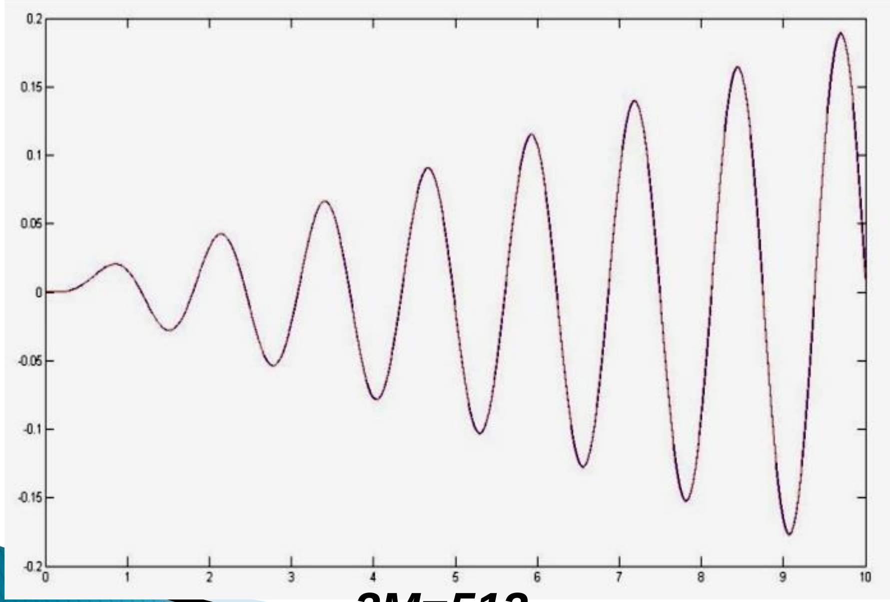
$$y(t) = \frac{e^{-t}\left[125 + e^{t}\left(-5(25+13t)\cos(5t) + (38-325t)\sin(5t)\right)\right]}{16900}$$

مثال و نتایج

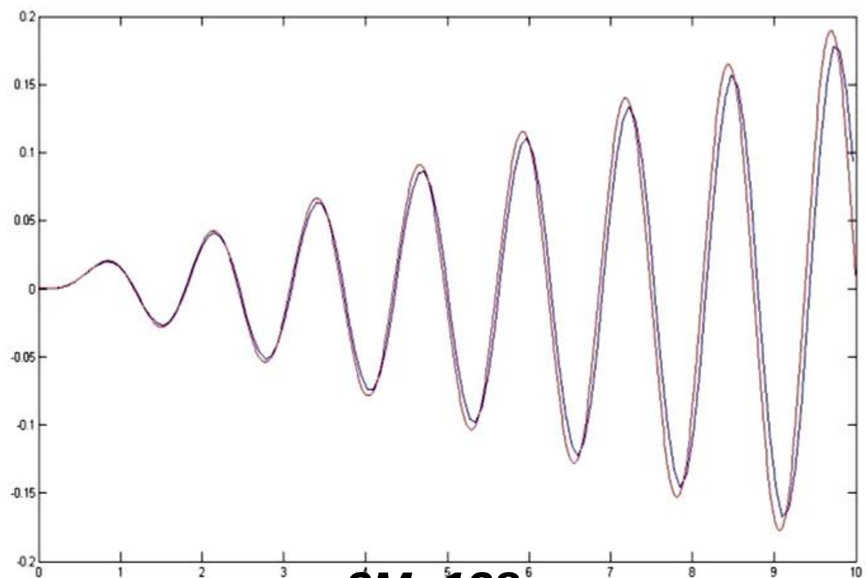
- جواب نهایی به اینصورت است:

$$Y=(P^{3}H)X+\frac{y''(0)}{2!}T^{(.)2}+y'(0)\ T^{(.)1}+y(0)T^{(.)0}$$

- نتیجه ی محاسبه ی ماتریسی با استفاده از موجک بصورت زیر است:



2M=512



2M=128

جمع بندی و کارآینده

- معرفی کلی موجک ها◄موجک Haar◄ استفاده برای تقریب توابع◄حل ODE
- روشی ساده و در عین حال روشی سریع
  - امکان استفاده از ساختار های محاسباتی اسپارس
  - امکان ذخیره سازی ماتریس های P و H برای دقت های بالا
  - قابلیت استفاده برای حل معادله خطی با ضرایب متغیر با زمان
- نیازمند آنالیز پایداری برای مرتبه های بالا است◄به علت خطی سازی محلی[1][2]

[1] U.Lepik, “Numerical Solution of Differential Equations Using Haar Wavelets”, Mathematics and Computers in Simulation 68 (2005) 127–143
[2] U.Lepik, “Haar Wavelet Method for Solving Stiff Differential Equations”, Mathematical Modeling and Analysis, Vol.14, No. 4, 2009, pp. 467-481.
[3] H.Akca, M.H.Ali-Lail, “Survey on Wavelet Transform and Application on ODE and Wavelet Network”, Advances in Dynamical Systems and Applications, Vol.1-Number 2(2006), pp.129-162.

جمع بندی وکارآینده

- معرفی کلی موجک ها◄موجک Haar ◄استفاده برای تقریب توابع◄حل ODE
- روشی ساده و در عین حال روشی سریع
  - امکان استفاده از ساختار های محاسباتی اسپارس
  - امکان ذخیره سازی ماتریس های P و H برای دقت های بالا
  - قابلیت استفاده برای حل معادله خطی با ضرایب متغیر با زمان
- نیازمند آنالیز پایداری برای مرتبه های بالا است◄به علت خطی سازی محلی[1][2]
- گستردگی معادلات انتگرال-دیفرانسیل◄بررسی دقیق موردی روش ها
- امکان ترکیب چنین روشی با سایر روش های عددی وجود دارد:
  - Wavelet-Galerkin ◄PDE [3]
  - Wavelet Finite Element Method ◄PDE
  - ...

[1] U.Lepik, “Numerical Solution of Differential Equations Using Haar Wavelets”, Mathematics and Computers in Simulation 68 (2005) 127–143
[2] U.Lepik, “Haar Wavelet Method for Solving Stiff Differential Equations”, Mathematical Modeling and Analysis, Vol.14, No. 4, 2009, pp. 467-481.
[3] H.Akca, M.H.Ali-Lail, “Survey on Wavelet Transform and Application on ODE and Wavelet Network”, Advances in Dynamical Systems and Applications, Vol.1-Number 2(2006), pp.129-162.

سوال/پیشنهاد/انتقاد؟

سوال/پیشنهاد/انتقاد؟

با تشکر از توجه شما!