Оставим предположение о квадратической функции полезности.

$u'(c_t) = E_t u'(c_{t+1})$, $u'''(c)>0 \Rightarrow c_t < E_t(c_{t+1})$ ⇐ сбережения по мотивам предосторожности

→ предельная полезность – выпуклая ф-я

* CRRA, 2×2 пример: $\Theta=\{\theta_1,\theta_2\}$, $t=1,2$, $y_1 = E_1 y_2$

  γ – норма неприятия риска.

$u(c)=\frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$

$u'(c)>0$

$u''(c)<0$

$u'''(c)>0$

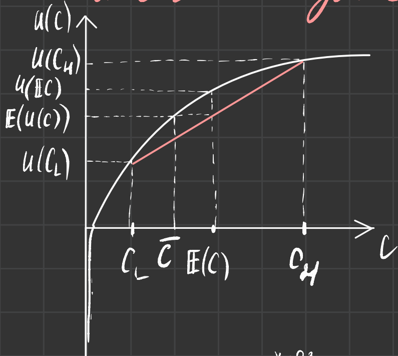
• Рассмотрим свойства CRRA:

$$u(c)=\frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma},\quad u'(c)=c^{-\gamma}>0,\quad u''(c)=-\gamma c^{-\gamma-1}<0,\quad u'''(c)=(\gamma+1)\gamma c^{-\gamma-2}>0$$

• Понятие неприятия риска:

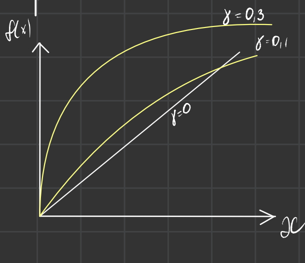
По определению(?): $\frac{-u''(c)c}{u'(c)} = \frac{-(-\gamma c^{-\gamma-1})c}{c^{-\gamma}} = \gamma$

Что она показывает:



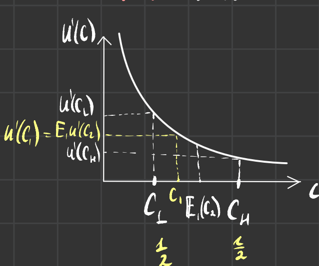
Рассмотрим лотерею: с вер-ю $\frac{1}{2}$ c_L и с вер-ю $\frac{1}{2}$ получим c_H.

Из-за выпуклости ф-ии полезности $u(E[c]) > E[u(c)]$



Вывод: $\gamma\in(0,1)$ и $\gamma\uparrow$ тем большей долей потребления мы жертвуем, чтобы избежать лотереи

• CRRA 2×2:



Посчитаем $E_1[u'(c)] = \frac{1}{2}u'(c_L)+\frac{1}{2}u'(c_H)$

при $r=\frac{1}{\beta}-1 \Rightarrow u'(c_1)=E_1(u'(c_2))$

Вывод: для функции с $u'''(c)>0 \Rightarrow c_1<E_1(c_2)$

$u'''(c)>0 \Rightarrow c_t < E_t c_{t+1}$

Пример:

Счетное число периодов: $u'(C_t)=\beta(1+r_t)\mathbb{E}_t u'(C_{t+1})$

+ норма дисконтирования: $\rho=-\ln(\beta)$

+ считаем, что C_t имеет логнормальное распределение $\Rightarrow$

$$\log C_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Имеем: $u'(C_t)=\beta(1+r_t)\mathbb{E}_t u'(C_{t+1})$

$$\Delta \log C_{t+1} \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}_t[\Delta \log C_{t+1}], Var_t[\Delta \log C_{t+1}])$$

Если $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, то $\mathbb{E}[e^{\varepsilon_t}] = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$

CRRA $\Rightarrow$ $u'(c)=c^{-\gamma}$

* EE: $C_t^{-\gamma}=\beta(1+r_t)\mathbb{E}_t[C_{t+1}^{-\gamma}] \;\Big|\; : C_t^{-\gamma}$

$$1=\beta(1+r_t)\mathbb{E}_t\left[\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}\right]$$

$$1=\beta(1+r_t)\mathbb{E}_t\left[e^{-\gamma\ln\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)}\right]$$

$$1=\beta(1+r_t)\mathbb{E}_t\left[e^{-\gamma\Delta\ln C_{t+1}}\right]$$, где $\Delta\ln C_{t+1}\sim\mathcal{N}(\cdot,\cdot)$ и $\mathbb{E}[e^{\varepsilon_t}]=e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$

$$\beta(1+r_t)e^{-\gamma\mathbb{E}_t[\Delta\ln C_{t+1}]+\frac{1}{2}\gamma^2 Var_t[\Delta\ln C_{t+1}]} = 1 \quad \Big| \text{ Логарифм обеих частей}$$

$$-\rho+r_t-\gamma\mathbb{E}_t[\Delta\ln C_{t+1}]+\frac{1}{2}\gamma^2 Var_t[\Delta\ln C_{t+1}] = 0$$

$$\boxed{\mathbb{E}_t[\Delta\ln C_{t+1}] = \frac{1}{\gamma}(r_t-\rho)+\frac{1}{2}\gamma Var_t[\Delta\ln C_{t+1}]}$$

Фактически это ожидание темпов изменения потребления в будущем по отношению к сегодня.

Чем больше r_t, тем больше ожидание темпов роста потребление.

Чем больше $\rho=-\ln\beta$ (меньше β) тем меньше ожидания темпов роста потребления.

Чем больше дисперсия изменения темпов роста потребления, тем больше наше ожидаемое изменение потребления.

Ограничение на заимствование:

$$r^{borrow} > r^{lend}$$

Будем рассматривать более простой вариант: $r^{borrow} = \infty \Leftrightarrow$ банки не дают кредитов $\Rightarrow$ если нет сбережений, агент может потратить только текущий доход.

Покажем, что такие ограничения тоже генерируют дополнительное сбережение. Почему? Люди пытаются избежать ситуации столкновения с ограничениями в будущем $\Rightarrow C_t \downarrow$

Предположение:

1. Квадратичная полезность
2. 3 периода
3. $r = \rho = 0$
4. y_1 deterministic, y_2, y_3 - случайны
5. A_0

$$u(C) = aC - \frac{1}{2}bC^2$$

$$u(C_1) + \mathbb{E}_1 u(C_2) + \mathbb{E}_1 u(C_3) \longrightarrow \max$$

$t=1$: $C_1 + A_1 \le A_0 + y_1$

$t=2$: $C_2 + A_2 \le A_1 + y_2$, $A_2 \ge 0$

$t=3$: $C_3 \le A_2 + y_3$

$$\mathcal{L} = u(A_0 + y_1 - A_1) + \mathbb{E}_1 u(A_1 + y_2 - A_2) + \mathbb{E}_1 u(A_2 + y_3) + \mu A_2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_1}: & -u'(C_1) + \mathbb{E}_1 u'(C_2) = 0 \Rightarrow u'(C_1) = \mathbb{E}_1 u'(C_2) \\ & \hookrightarrow \text{квадратичная полезность} \Rightarrow C_1 = \mathbb{E}_1 C_2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_2}: & -u'(C_2) + \mathbb{E}_2 u'(C_3) + \mu = 0 \Rightarrow u'(C_2) > \mathbb{E}_2 u'(C_3) \text{ — ур-е Эйлера нарушается} \\ & C_2 < \mathbb{E}_2 C_3 \end{cases}$$

Чему равно потребление в $t=3$? Если ограничение не работает, т.е. доходы высокие и он не берет в долг, то $C_2 = C_3$ и $\begin{cases} C_2 + A_2 = A_1 + y_2 \\ \mathbb{E}_2 C_3 = A_2 + \mathbb{E}_2 y_3 \end{cases} \Rightarrow$ $C_2 + \mathbb{E}_2 C_3 = A_1 + y_2 + \mathbb{E}_2 y_3$

$$C_2 = \frac{A_1 + y_2 + \mathbb{E}_2 y_3}{2}$$

Если ограничение работает, то $C_2 = A_1 + y_2$

$$C_2 = \min\left\{ \frac{A_1 + Y_2 + \mathbb{E}_2 Y_3}{2},\ A_1 + Y_2 \right\}$$

В $t=1$, если ограничение не биндится, то

$$C_1 = \mathbb{E}_1 C_2 < \mathbb{E}_1 \frac{A_1 + Y_2 + \mathbb{E}_2 Y_3}{2}$$

Заменим $A_1 = A_0 + Y_1 - C_1 \implies C_1 < \mathbb{E}_1 \frac{A_0 + Y_1 + Y_2 + \mathbb{E}_2 Y_3 - C_1}{2}$

$$\frac{3}{2} C_1 < \frac{1}{2}\left(A_0 + Y_1 + \mathbb{E}_1 Y_2 + \mathbb{E}_1 Y_3\right)$$

$$C_1 < \frac{A_0 + Y_1 + \mathbb{E}_1 Y_2 + \mathbb{E}_1 Y_3}{3}$$ → Перманентный доход