Модель 2.1: нет неопределенности, бесконечный горизонт.

* $T=\infty$
* Решение:

$$\begin{cases}\sum_{i=0}^{T}\beta^i u\left(A_{t+i}+y_{t+i}-\frac{A_{t+i+1}}{1+r}\right)\to\max\\ s.t.\quad A_{t+i+1}=(1+r)(A_{t+i}+y_{t+i}-c_{t+i})\end{cases}$$

$$\mathcal{L}=\sum_{i=0}^{T}\beta^i u\left(A_{t+i}+y_{t+i}-\frac{A_{t+i+1}}{1+r}\right)\to\max$$

* $\partial\mathcal{L}/\partial A_{t+i}:\ \beta^i u'(c_{t+i})-\frac{\beta^{i-1}}{1+r}u'(c_{t+i-1})=0 \Rightarrow u'(c_{t+i})=\beta(1+r)u'(c_{t+i+1})$

  $\exists\, r=\frac{1}{\beta}-1 \Rightarrow u'(c_{t+i})=u'(c_{t+i+1})$

* $A_{t+i+1}=(1+r)(A_{t+i}+y_{t+i}-c_{t+i}) \Rightarrow$

$$\sum_{i=0}^{T}\left(\frac{1}{1+r}\right)^i c_{t+i}=A_t+\sum_{i=0}^{T}\left(\frac{1}{1+r}\right)^i y_{t+i}-\frac{A_{t+T+1}}{(1+r)^{T+1}}$$

Теперь будем предполагать, что $\lim_{T\to\infty}\frac{A_{t+T+1}}{(1+r)^{T+1}}=0$.

Применим $c_{t+i}=c_{t+i+1}$ и возьмем предел:

$$c_t\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^i=A_t+\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^i y_{t+i}$$

$$c_t=\frac{r}{1+r}A_t+\underbrace{\frac{r}{1+r}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^i y_{t+i}}_{\tilde{y}_t}$$

О неопределенности:

* В момент t природа может быть разного состояния $s_t\in S$ (пример: $S=\{\theta_1,\theta_2\}$)
* Случайная история: $s^t=(s_0,s_1,\dots,s_t)$
* Вероятность истории s^t: $\pi(s^t)$
* Одно-периодное БО: $A(s^t)=[1+r(s^t)][A(s^{t-1})+y(s^t)-c(s^t)]$
* $A(s^t)$ - цена выплачиваемая эмиссионером облигации, купленной в период t, к уплате в $t+1$

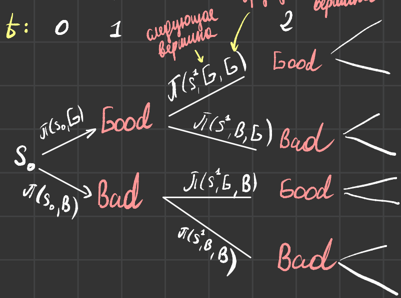
  То есть агент либо тратит деньги на потребление, либо вкладывается в однодневные облигации с доходностью $r(s^t)$
* $r(s^t)$ - безрисковая процентная ставка по бондам к уплате в $t+1$.
* Полезность при неопр-сти (UMP): $\sum_{t=0}^{T}\beta^t\underbrace{\sum_{s^t}\pi(s^t)u(c(s^t))}$ → матожидание полезности по всем возможным развитиям событий

$$U=\mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{T}\beta^t u(c_t)\,\middle|\,\Omega_0\right]$$

* $\mathbb{E}[\cdot|\Omega_0]$ – ожидание при условии информации, доступной на момент $t=0\Rightarrow$ предпочтения разделимы по состояниям природы и по времени. Пусть в каждый период t существует S_t возможных состояний мира. Каждое состояние имеет ненулевую вероятность $\pi_t(s)\ \forall s\in S_t\Rightarrow$

$$U=\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s\in S_t}\beta^t\pi_t(s)u(c_t(s))$$

$S_t \in \{Bad, Good\}$



* $A(s^T)=0, \quad \forall s^T \in S$
* $C(s^t) = A(s^{t-1}) + y(s^t) - \dfrac{A(s^t)}{1+r(s^t)}$
* $C(s^t) \longrightarrow$ UMP:

$$\begin{cases} \sum\limits_{t=0}^{T} \beta^t \sum\limits_{s^t} \pi(s^t)\, u\left(A(s^{t-1}) + y(s^t) - \dfrac{A(s^t)}{1+r(s^t)}\right) \longrightarrow \max \\ \text{s.t.} \quad A(s^T) = 0 \end{cases}$$

$$\partial \mathcal{L}/_{\partial A(s^t)}: \; -\frac{\beta^t \pi(s^t)}{1+r(s^t)} u'\left(c(s^t)\right) + \beta^{t+1} \sum_{s_{t+1}} \pi(s^t, s_{t+1})\, u'\left(c(s^t, s_{t+1})\right) = 0$$

$$u'(c(s^t)) = \left(1+r(s^t)\right) \beta \sum_{s_{t+1}} \frac{\pi(s^t, s_{t+1})}{\pi(s^t)} u'(c(s^t, s_{t+1}))$$

$$u'(c(s^t)) = (1+r(s^t)) \beta \sum_{s^{t+1}|s^t} \pi(s^{t+1}|s^t)\, u'(c(s^t, s_{t+1}))$$

где $\pi(s^{t+1}|s^t) = \dfrac{\pi(s^t, s_{t+1})}{\pi(s^t)}$.

Из производной $\Rightarrow u'(c_t) = (1+r_t)\beta\, \mathbb{E}_t u'(c_{t+1})$

Модель 3.1: неопределенность, конечный горизонт. Доходы диверсифицируются

Доходы диверсифицируются $\Leftrightarrow$ то есть неопределенность касается только индивидуального агента. Средний доход известен заранее $\Rightarrow$ нет агрегированного риска

* Задача агента:

$$\begin{cases} U_t = \mathbb{E}_t \sum\limits_{i=0}^{T} \beta^i u(C_{t+i}) \longrightarrow \max \\ \text{s.t.} \quad A_{t+i+1} = (1+r_{t+i+1})(A_{t+i} + y_{t+i} - C_{t+i}) \quad \forall i = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

Причем y_{t+i} и r_{t+i+1} — источники случайности

* Пусть еще $r_{t+i+1} = r = \dfrac{1}{\beta} - 1$
* $A_{t+T+1} \xrightarrow{p} 0$

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{T} \beta^i E_t[u(C_{t+i})] \longrightarrow \max \xrightarrow{\text{воспользуемся решением выше}} u'(C_t) = E_t[u'(C_{t+1})]$$

$$\sum_{i=0}^{T} \left(\tfrac{1}{1+r}\right)^i c_{t+i} = A_t + \sum_{i=0}^{T} \left(\tfrac{1}{1+r}\right)^i y_{t+i} - \frac{A_{t+T+1}}{(1+r)^{T+1}} = \mathbb{E}_t\left[A_t + \sum_{i=0}^{T}\left(\tfrac{1}{1+r}\right)^i y_{t+i} - \frac{A_{t+T+1}}{(1+r)^{T+1}}\right] = A_t + \sum_{i=0}^{T}\left(\tfrac{1}{1+r}\right)^i \mathbb{E}_t y_{t+i} - 0 = \overline{A_t}$$

$$\boxed{c_t = \frac{1-\frac{1}{1+r}}{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^{T+1}} \overline{A_t}}$$

Модель 3.2: y_t не диверсифицируется, но $u(C)$ - квадратична

Доходы не диверсифицируются $\Leftrightarrow$ случайны для каждого агента, средние тоже случайны

$$u(C)=C-\frac{a}{2}C^2 \Rightarrow u'(C)=1-aC \Rightarrow \text{EE: } u'(C_t)=\mathbb{E}_t[u'(C_{t+1})]$$

$$1-aC_t = 1-a\,\mathbb{E}_t C_{t+1} \Rightarrow C_t=\mathbb{E}_t C_{t+1}=\mathbb{E}_t C_{t+2}=\ldots=\mathbb{E}_t C_{t+T}$$

$$\sum_{i=0}^{T}\left(\frac{1}{1+r}\right)^i C_{t+i}=A_t+\sum_{i=0}^{T}\left(\frac{1}{1+r}\right)^i y_{t+i}-\frac{A_{t+T+1}}{(1+r)^{T+1}}$$ должно выполняться для всех случайных путей $\{y_{t+i}\}$

$$C_t=\frac{1-\frac{1}{1+r}}{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^{T+1}}\left(A_t+\sum_{i=0}^{T}\left(\frac{1}{1+r}\right)^i \mathbb{E}_t y_{t+i}\right)$$

$C_t \neq C_{t+1} \neq C_{t+2}$, т.к каждый период меняются ожидания

А как сильно меняются ожидания?

$$C_t-C_{t-1}=\frac{1-\frac{1}{1+r}}{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^{T+1}}\left(\sum_{i=0}^{T}\left(\frac{1}{1+r}\right)^i\left(\mathbb{E}_t y_{t+i}-\mathbb{E}_{t-1}y_{t+i}\right)\right)$$

Что влияет на изменение потребления?

* Пусть в $t-1$ не знали, что в t выиграем в лотерею. $\Rightarrow$ Информация обновилась, значит мат-е изменилось. $\Rightarrow$ есть изменение
* Пусть в $t-10$ нам пообещали повышение $\Rightarrow$ нет изменения в потреблении между $t-1$ и $t-2$ например.