Выбор портфеля в непрерывном времени.

* $u(c) = \dfrac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$

* 2 актива:
  1) Безрисковая облигация (r)
  2) Рисковой актив, ожидаемая дох-сть $r+\pi$, дисперсия известна σ^2.

Винеровский процесс.

Случайный процесс W_t называется винеровским, если:

1. $W_0 = 0$
2. W_t – процесс с независимыми приращениями
3. $W_t - W_s \sim N(0, \sigma^2(t-s))$
4. $t \in [0,1]$
5. Возьмем $t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n \in [0,1]$, тогда

$$\left(\underbrace{W_{t_1} - W_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}\right)$$

приращение – независимы и нормально распределены

6. Почти наверное непрерывная история

Love u ♡

Love u ♡

Пусть имеем маленькое приращение Δt смотрим на приращение Винеровского процесса: $W_{t+\Delta t} - W_t \sim N(0, \Delta t)$

$$Var(\Delta W) = \mathbb{E}(\Delta W^2) - \mathbb{E}^2(\Delta W) = \mathbb{E}(\Delta W^2) = \Delta t$$

Будем пользоваться другими обозначениями:

z – винеровский процесс

$dz \sim N(0, dt)$ – приращение процесса

$(dz)^2 \xrightarrow{P} dt$

$(dt)^2 \longrightarrow 0$

Диффузионный процесс: $dx = \underbrace{\mu(x,t)}_{\text{дрейф во времени}} dt + \underbrace{\sigma(x,t)}_{\text{волатильность}} \underbrace{dz}_{\text{Винеровский процесс}}$

Пример: $dx = \underbrace{\mu dt + \sigma}_{\text{const}} dz \to$ броуновское движение

$dx = \mu x dt + \sigma dz \rightarrow$ геометрическое движение

$dx = (\mu - x) dt + \sigma dz \rightarrow$ Onstein (для процентных ставок)

$dy = \mu dt + \sigma dz$

$dx = \mu x dt + \sigma x dx \;\Big|\, :x \Rightarrow \frac{dx}{x} = \mu dt + \sigma dz$

$y = \ln(x)$: броуновское движение

Как построить приращение y? $\exists\, y = f(x,t)$, $dx = \mu(x,t)dt + \sigma(x,t)dz$

Можем построить апроксимацию Тейлора:

$$y \approx f(x_0,t_0) + \frac{\partial f(x_0,t_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0,t_0)}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_0,t_0)}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_0,t_0)}{\partial t^2}(dt)^2 + \frac{\partial^2 f(x_0,t_0)}{\partial x \partial t}dx dt$$

$$\underbrace{y - f(x_0,t_0)}_{dy} \approx \frac{\partial f(x_0,t_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0,t_0)}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_0,t_0)}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_0,t_0)}{\partial t^2}(dt)^2 + \frac{\partial^2 f(x_0,t_0)}{\partial x \partial t}dx dt$$

$$(dx)^2 = (\mu^2(x_0,t_0)(dt)^2 + 2\mu(x_0,t_0)\sigma(x_0,t_0)dt\,dz + \sigma^2(x_0,t_0)(dz)^2)$$

$$dy \approx \frac{\partial f(x_0,t_0)}{\partial x}(\mu(x_0,t_0)dt + \sigma(x_0,t_0)dz) + \dots$$

$(dt)^2 \to 0 \qquad (dz)^2 \to dt \qquad dz\,dt \to 0 \qquad dx\,dt \to 0$

Тогда ненулевой порядок малости у $\dots dx + \dots (dx)^2$

$$dy = \left(\frac{\partial f(x_0,t_0)}{\partial x}\mu(x_0,t_0) + \frac{\partial f(x_0,t_0)}{\partial t} + \frac{\partial^2 f(x_0,t_0)}{\partial x^2}\frac{\sigma^2(x_0,t_0)}{2}\right)dt + \frac{\partial f(x_0,t_0)}{\partial x}\sigma(x_0,t_0)dz$$

Это и есть лемма Ито: если знаем диффузионный процесс dz и какую-то функцию $y = f(x,t)$, то можем найти функцию приращения для y.

Пример:

$$\begin{cases} dx = \mu x dt + \sigma x dz \\ y = \ln(x) \end{cases} \Rightarrow dy = d\ln(x) = ?$$

$$dy = \left(\frac{\mu x}{x} + 0 - \frac{(\sigma x)^2}{2x^2}\right)dt + \frac{\sigma x}{x}dz = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz$$

Задача Мертона по формированию портфеля

* CRRA: $u(c)=\dfrac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$

* Два актива:
    1. Облигации с доходностью r
    2. Рисковый актив, доходность которого – случайный процесс с матожиданием $r+\pi$ и волатильностью σ^2.

премия за риск

$$dP=(r+\overset{\downarrow}{\pi})P\,dt+\sigma P\,dz \qquad\qquad dF=rF\,dt$$

Как выглядит богатство человека, вложившегося в портфель ценных бумаг?

$$dx=\underbrace{[(r+\pi\theta)x-c]}_{\mu(x,\theta,c)}dt+\underbrace{\theta\sigma x}_{\sigma(x,\theta,c)}dz$$

винеровский процесс

вес рискового актива в портфеле

X_t - стоим-сть портфеля

t: θx

$(1-\theta)x$

$$t+dt:\ dx=\underbrace{\underbrace{(r+\pi)\theta x\,dt}_{\text{риск. актив}}+\sigma\theta x\,dz+\underbrace{r(1-\theta)x\,dt}_{\text{безриск. актив}}\underbrace{-c\,dt}_{\text{потребление}}}_{}$$

приращение стоимости вложения в портфель