Модели жизненного цикла

Модель 1: нет неопределенности, конечный горизонт

* Агент выбирает потребление: $\max V_t = \sum_{i=0}^{T} \beta^i u(C_{t+i})$, $u'(\cdot) > 0$, $u''(\cdot) < 0$
  на ограничении $A_{t+i+1} = (1+r_{t+i+1})(A_{t+i} + y_{t+i} - C_{t+i})$, $\forall i = 0, 1, \dots T$
  при заданных A_t, $\{r_{t+i}, y_{t+i}\}_{i=0}^{T}$ и $A_{t+T+1} \geq 0$
* $r_{t+i} = r = \frac{1}{\beta} - 1$

Решаем задачу тремя методами: Лагранж, ур-е Беллмана, подстановка бюджетного ограничения в максимизирующую функцию.

$$\begin{cases} V_t = \sum_{i=0}^{T} \beta^i u(C_{t+i}) \to \max \\ A_{t+i+1} = (1+r)(A_{t+i} + y_{t+i} - C_{t+i}) \Rightarrow C_{t+i} = A_{t+i} + y_{t+i} - \frac{A_{t+i+1}}{1+r} \\ A_{t+T+1} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L} = \sum_{i=0}^{T} \beta^i u\left(A_{t+i} + y_{t+i} - \frac{A_{t+i+1}}{1+r}\right) + \mu_{i-1} A_{t+T+1} \longrightarrow \max \\ \partial\mathcal{L}/\partial A_{t+i} = \beta^i u'\left(A_{t+i} + y_{t+i} - \frac{A_{t+i+1}}{1+r}\right) - \frac{\beta}{1+r} u'\left(A_{t+i-1} + y_{t+i-1} - \frac{A_{t+i}}{1+r}\right) = 0 \Rightarrow u'(C_{t+i}) = \beta(1+r) u'(C_{t+i+1}) \\ \partial\mathcal{L}/\partial A_{t+T+1} = -\frac{\beta^T}{1+r} u'(C_{t+T}) + \mu = 0 \Rightarrow \beta^T u'(C_{t+T+1}) = \mu(1+r) \end{cases}$$

Логика уравнения Эйлера: мы не можем выиграть от переноса потребления между периодами.

$$u'(C_{t+i}) \vee \beta(1+r) u'(C_{t+i+1})$$

* Если $>$, то агент может потребить больше сейчас $\Rightarrow$ сбережение $\downarrow$ $\Rightarrow$ сможет меньше потребить в $t+i+1 \Rightarrow u'(C_{t+i+1}) \uparrow$

* Рассмотрим $\beta^T u'(C_{t+T+1}) = \mu(1+r) \Rightarrow \mu > 0$. Условие К.Т.: $\mu A_{t+T+1} = 0 \Rightarrow A_{t+T+1} = 0$

* Применим: $r = \frac{1}{\beta} - 1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} u'(C_{t+i}) = u'(C_{t+i+1}) \Rightarrow \text{из-за того что } u(\cdot) \text{ строго возрастает} \Rightarrow C_{t+i} = C_{t+i+1} \\ \beta^T u'(C_{t+T+1}) = \frac{\mu}{\beta} \end{cases}$$

* Хотим выразить потребление из Б.О. $C_{t+i} = A_{t+i} + y_{t+i} - \frac{A_{t+i+1}}{1+r}$:

$$\frac{A_{t+i+1}}{1+r} = A_{t+i} + y_{t+i} - C_{t+i} \Rightarrow \begin{cases} i=0: \frac{A_{t+1}}{1+r} = A_t + y_t - C_t \\ i=1: \frac{1}{1+r}\frac{A_{t+2}}{1+r} = \frac{1}{1+r}(A_{t+1} + y_{t+1} - C_{t+1}) \end{cases} \oplus \Rightarrow \frac{A_{t+2}}{(1+r)^2} = \frac{y_{t+1} - C_{t+1}}{1+r} + A_t + y_t - C_t$$

$i=2: \frac{1}{(1+r)^2}\frac{A_{t+3}}{1+r} = \frac{1}{(1+r)^2}(A_{t+2}+y_{t+2}-C_{t+2})$

Далее суммируем ур-я:

$$\begin{cases} \frac{A_{t+2}}{(1+r)^2} = A_t + y_t + \frac{y_{t+1}}{1+r} - \left(C_t + \frac{C_{t+1}}{1+r}\right) \\ \frac{A_{t+3}}{(1+r)^3} = A_t + y_t + \frac{y_{t+1}}{1+r} + \frac{y_{t+2}}{(1+r)^2} - \left(C_t + \frac{C_{t+1}}{1+r} + \frac{C_{t+2}}{(1+r)^2}\right) \\ \dots \\ \underbrace{\frac{A_{t+T+1}}{(1+r)^{T+1}}}_{=0\ (NPGC)} = A_t + \sum_{i=0}^{T}\frac{y_{t+i}}{(1+r)^i} - \sum_{i=0}^{T}\frac{C_{t+i}}{(1+r)^i} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\sum_{i=0}^{T}\frac{C_{t+i}}{(1+r)^i} = A_t + \sum_{i=0}^{T}\frac{y_{t+i}}{(1+r)^i}}$$

+ ур-е Эйлера:

$$C_t \underbrace{\sum_{i=0}^{T}\frac{1}{(1+r)^i}}_{=\frac{1-q^{T+1}}{1-q}} = A_t + \sum_{i=0}^{T}\frac{1}{(1+r)^i}y_{t+i}$$

$$C_t\frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^{T+1}}{1-\frac{1}{1+r}} = A_t + \sum_{i=0}^{T}\frac{1}{(1+r)^i}y_{t+i} \Rightarrow C_t = \frac{1-\frac{1}{1+r}}{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^{T+1}}\left(A_t + \sum_{i=0}^{T}\frac{1}{(1+r)^i}y_{t+i}\right)$$

Перманентный доход. Отражает текущий и все будущие доходы

* Пусть $r=0 \Rightarrow C_t = \frac{1}{T}A_t + \frac{1}{T}\sum_{i=0}^{T}y_{t+i}$

Сравним с Кейнс. мод.: $C_t = a + bY_t$