Ценообразование активов.

Основные вопросы:

1. Какие характеристики бумаг учитываются при покупке?
2. Как сформировать портфель?
3. Как формируются цены?

* До этого предполагали, что активы — безрисковые
* Теперь считаем, что есть рискованные активы
* В основном, агент захочет вложиться в диверсифицированный портфель, а не в одну акцию.
* От чего зависит спрос на рисковый актив?
* Что определяет цены, ожидаемую доходность рисковых активов в равновесии?

Задача построения оптимального портфеля

* $t \in \{1, 2\}$.
* Агент распределяет потребление наследства W_0 между потреблениями в двух периодах.
* Сбережение между периодами: портфель, купленный в $t=1$ принесёт доход в $t=2$
* Доступные активы:
  1. Безрисковый актив с дох-ю r_f
  2. Рисковый актив со случайной доходностью r_j, $j = 1 \dots n$. Совм. распр. вероятностей известно.

Задача Агента:

$$\begin{cases} u(C_1) + \beta \mathbb{E}_t u(C_2) \to \max \\ C_2 = (\underbrace{W_0 - C_1}_{S_1}) \left[1 + r_f + \sum_{j=1}^{n} x_j (r_j - r_f) \right] \end{cases}$$

$x_j \to$ вес бумаги в портфеле.

Всего $n+1$ активов:

$P \to$ портфель

$r_Б \to$ дох-сть портфеля

$$C_1 + P = W_0$$

$$C_2 = (1 + r_Б) P, \text{ причем } r_Б = \sum_{j=1}^{n} x_j r_j + r_f \underbrace{\left(1 - \sum_{j=1}^{n} x_j\right)}_{\text{доля безрискового портфеля}}$$

$$r_B = \sum_{j=1}^{n} x_j r_j + r_f\left(1 - \sum_{j=1}^{n} x_j\right) = r_f + \sum_{j=1}^{n} x_j (r_j - r_f) \Rightarrow$$

$$C_2 = (1+r_B)P = (W_0 - C_1)\left(1 + r_f + \sum_{j=1}^{n} x_j (r_j - r_f)\right)$$

Тогда Лагранжиан:

Знак матожидания скрывает все состояния мира, поэтому x_j встречается больше 1 раза

$$\mathcal{L} = u(C_1) + \beta \mathbb{E}_t\, u\left(\left(W_0 - C_1\right)\left(1 + r_f + \sum_{j=1}^{n} x_j (r_j - r_f)\right)\right) \to \max_{C_1, x_j}$$

$$\begin{cases} \partial \mathcal{L}/\partial C_1: \quad u'(C_1) = \beta \mathbb{E}_1\left[\underline{\left(1 + r_f + \sum_{j=1}^{n} x_j (r_j - r_f)\right)} u'(C_2)\right] \\ \\ \partial \mathcal{L}/\partial x_j: \quad \beta \mathbb{E}_1\left[(W_0 - C_1)(r_j - r_f) u'(C_2)\right] = 0 \end{cases}$$

не можем вынести из-под матожидания, т.к. не знаем r_j

(n уравнений)

Просуммируем n уравнений, домножим обе части $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1}$ на $(W_0 - C_1)$ и вычтем из первой пр-й сумму остальных:

$$\beta \mathbb{E}_1\left[(W_0 - C_1) u'(C_2) \sum_{j=1}^{n} x_j (r_j - r_f)\right] = 0$$

Вычитаем:

$$(W_0 - C_1) u'(C_1) = \beta \mathbb{E}_1\left[(W_0 - C_1)(1 + r_f) u'(C_2)\right] \Rightarrow \boxed{u'(C_1) = \beta (1 + r_f)\, \mathbb{E}_1\left[u'(C_2)\right]} \quad (1)$$

Теперь преобразуем FOC для каждого рискового актива:

$$\left.\begin{aligned} \partial \mathcal{L}/\partial x_j: \quad & \beta \mathbb{E}_1\left[(W_0 - C_1)(r_j - r_f) u'(C_2)\right] = 0 \\ & + \\ & \beta (1 + r_f)\mathbb{E}_1\left[u'(C_2)\right] = u'(C_1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{u'(C_1) = \beta\, \mathbb{E}_1\left[(1 + r_j) u'(C_2)\right]} \quad (2)$$

(2)–(1):

$$\beta \mathbb{E}_1\left[\underbrace{(r_j - r_f)}_{\text{сл.в. 1}} \underbrace{u'(C_2)}_{\text{сл.в. 2}}\right] = 0 \Rightarrow \left\{ \mathbb{E}[xy] - \mathbb{E}[x]\mathbb{E}[y] = \operatorname{cov}(x, y) \right\} \Rightarrow$$

$$\mathbb{E}_1\left[(r_j - r_f) u'(C_2)\right] = \operatorname{Cov}_1\left(r_j - r_f, u'(C_2)\right) + \mathbb{E}_1\left[r_j - r_f\right]\mathbb{E}_1\left[u'(C_2)\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{-\frac{\operatorname{Cov}_1\left(r_j, u'(C_2)\right)}{\mathbb{E}_1\left[u'(C_2)\right]} = \mathbb{E}_1 r_j - r_f}$$

* Потребление второго периода зависит от доходностей каждого из активов. $\Rightarrow \mathbb{E}_1 r_j < r_f$
* $Cov_1(r_j, u'(C_2)) > 0 \Leftrightarrow$ доходность ниже r_f, ассоциирующая с низким потреблением, то есть актив j предоставляет страховку агенту и при прочих равных, агент будет хотеть иметь положительное кол-во актива, чтобы портфель диверсифицировался
* Пусть $\mathbb{E}_1 r_j - r_f > -\dfrac{Cov_1(r_j, u'(C_2))}{\mathbb{E}_1[u'(C_2)]}$ $\Rightarrow$ недостаточная корреляция доходности актива с предельной полезностью $\Rightarrow$ увеличиваем долю актива в портфеле $\Rightarrow$ ковариация $\uparrow$ (по модулю)

* Если $\mathbb{E}_1 r_j < r_f$, то речь идет о какой-нибудь страховке, вероятность доходности от которой очень мала (выплаты, если сгорит дом). То есть я плачу премию за каждый период.

* В общем сеттинге, где $t = 1 \ldots$ имеем следующую формулу:

$$\mathbb{E}_t r_{j,t+1} - r_{f,t+1} = -\frac{Cov_t(r_{j,t+1}, u'(C_{t+1}))}{\mathbb{E}_t[u'(C_{t+1})]}$$

Consumption CAPM:

Пусть теперь все агенты одинаковы $\Rightarrow$ есть репрезентативный агент и пусть потребление известно. В силу оптимальности потребления, можем построить ценообразование на рынке.

$$\mathbb{E}_t r_{j,t+1} - r_{f,t+1} = -\frac{Cov_t(r_{j,t+1}, u'(C_{t+1}))}{\mathbb{E}_t[u'(C_{t+1})]} \quad \Big| : \frac{\beta}{u'(C_t)}$$

$$\mathbb{E}_t r_{j,t+1} - r_{f,t+1} = -\frac{Cov_t\left(r_{j,t+1}, \beta\frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)}\right)}{\mathbb{E}_t\left[\beta\frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)}\right]}$$

ЧТО ДАЛЬШЕ?

Обычная CAPM:

$$r_{j,t+1} = \alpha_j + \beta_j r_{M,t+1} + u_{j,t+1}$$

$$r_j - r_f = \alpha + \beta(r_m - r_f) + u$$