Конспект лекции 2

Buchko Daniil, BEC175

25 октября 2020 г.

Небольшое отступление по поводу решения разностных уравнений

Если у нас имеется initial state, то мы вправе разворачивать уравнение индукционно и итоговый ответ будет решением разностного уравнения. Но если начального условия нет, то разворачивание не будет решением.

Пусть имеется уравнение:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Если его проитерировать, то получим:

$$\boxed{y_t = \alpha_1^t y_0 + \alpha_0 \sum_{i=0}^{t-1} \alpha_1^i + \sum_{i=0}^{t-1} \alpha_1^i \varepsilon_{t-i}}$$

Имея начальные условия, можно было бы подставить их вместо y_0, чтобы получить выражение y_t, как функцию, выраженную через его начальное состояние. Но в данном примере y_0 неизвестно и, следовательно, мы должны продолжить разворачивать уравнение:

$$y_0 = \alpha_0 + \alpha_1 y_{-1} + \varepsilon_0$$

$$y_t = \alpha_1^t y_0 + \alpha_0 \sum_{i=0}^{t-1} \alpha_1^i + \sum_{i=0}^{t-1} \alpha_1^i \varepsilon_{t-i}$$

$$y_t = \alpha_1^t \left(\alpha_0 + \alpha_1 y_{-1} + \varepsilon_0\right) + \alpha_0 \sum_{i=0}^{t-1} \alpha_1^i + \sum_{i=0}^{t-1} \alpha_1^i \varepsilon_{t-i}$$

$$y_t = \alpha_1^{t+1} y_{-1} + \alpha_0 \sum_{i=0}^{t-1+1} \alpha_1^i + \sum_{i=0}^{t-1+1} \alpha_1^i \varepsilon_{t-i}$$

$$y_t = \alpha_1^{t+m} y_{-m} + \alpha_0 \sum_{i=0}^{t-1+m} \alpha_1^i + \sum_{i=0}^{t-1+m} \alpha_1^i \varepsilon_{t-i}$$

Теперь, полагая, что $m \to \infty$, в то время, как $|\alpha_1| < 1$, можем заметить, что итоговое уравнение при бесконечном разложении будет сходиться к:

$$\boxed{y_t = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_1^i \varepsilon_{t-i}}$$

Можно легко убедиться в том, что полученное выражение является решением разностного уравнения, подставив его в начальное выражение:

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_1^i \varepsilon_{t-i} &= \alpha_0 + \alpha_1 \left[\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_1^i \varepsilon_{t-1-i} \right] + \varepsilon_t \\
\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_1^i \varepsilon_{t-i} &= \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_1^{i+1} \varepsilon_{t-1-i} + \varepsilon_t \\
\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_1^i \varepsilon_{t-i} &= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_1^{i+1} \varepsilon_{t-1-i} + \varepsilon_t
\end{aligned}$$

Последняя строчка тождественно выполняется. Но почему же это не решение? В процессе развертки исходного разностного уравнения, мы предполагали, что $\lim_{m\to\infty} \alpha_1^{t+m} y_{-m} = 0$, поэтому любое дополнительно слагаемое вида $A\alpha_1^t$ не повлияет на решение разностного уравнения:

$$\begin{aligned}
y_t := Aa_1^t + \frac{a_0}{1-a_1} + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \varepsilon_{t-i} &= a_0 + a_1 \left[Aa_1^{t-1} + \frac{a_0}{1-a_1} + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \varepsilon_{t-1-i} \right] + \varepsilon_t \\
\sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \varepsilon_{t-i} &= \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \varepsilon_{t-1-i} + \varepsilon_t
\end{aligned}$$

Последняя строка выполняется как тождество.

Предположим теперь, что нам стало известно начальное условие y_0, которое выполняется в период времени $t = 0$. Покажем, что бесконечная развертка легко превращается в решение, полученное в самом начале:

$$\begin{aligned}
y_0 &= Aa_1^0 + \frac{a_0}{1-a_1} + \sum_{i=0}^{\infty} a_1 \varepsilon_{t-i} \\
&= A + \frac{a_0}{1-a_1} + \sum_{i=0}^{\infty} a_1 \varepsilon_{t-i}
\end{aligned}$$

Выразим A:

$$A = y_0 - \frac{a_0}{1-a_1} - \sum_{i=0}^{\infty} a_1 \varepsilon_{t-i}$$

Теперь подставим его в бесконечную развертку:

$$y_t = \left[y_0 - \frac{a_0}{1-a_1} - \sum_{i=0}^{\infty} a_1 \varepsilon_{t-i} \right] a_1^t + \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_1^i \varepsilon_{t-i}$$

упростив, получим решение разностного уравнения:

$$\boxed{y_t = \left[y_0 - \frac{a_0}{1-a_1} \right] a_1^t + \frac{a_0}{1-a_1} + \sum_{i=0}^{t-1} \alpha_1^i \varepsilon_{t-i}}$$

А если раскроем скобки и аккуратно сделаем финт с пределами сумм, то получим изначальное индуктивное решение:

$$\boxed{y_t = \alpha_1^t y_0 + \alpha_0 \sum_{i=0}^{t-1} \alpha_1^i + \sum_{i=0}^{t-1} \alpha_1^i \varepsilon_{t-i}}$$

Случай, когда $|a_1| > 1$

Если имеем, что $|a_1| > 1$, то уже нельзя разложить уравнение в бесконечную сумму, потому что мы пользовались формулой суммы геометрической прогрессии. Но индуктивное разложение все еще работает.

Случай, когда $a_1 = 1$

Исходное разностное уранение первого порядка теперь примет вид:

$$y_t = a_0 + y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Пользуясь индуктивным разложением при известных начальных условиях, получим, что решение будет иметь вид:

$$y_t = y_0 + a_0 t + \sum_{i=0}^{t} \varepsilon_{t-i}$$

Заметим, что в отличие от уравнения первого порядка, здесь влияние шума не уменьшается со временем.

Решение разностных уравнений 2-го порядка

Имеем однородное разностное уравнение вида:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} \tag{1}$$

Чтобы его решить, составляется характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - a_1\lambda - a_2 = 0$$

Решив характеристичесоке уравнение относительно λ получим:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_1 \pm \sqrt{d}}{2}, \quad where \;\; d = a_1^2 + 4a_2$$

Форма однородного решения зависит от значения λ:

1. Если $d > 0$, тогда однородное решение будет иметь вид:

$$y_t^h = A_1(\lambda_1)^t + A_2(\lambda_2)^t$$

2. Если $d = 0$:

$$y_t^h = A_1(\lambda_1)^t + A_2 t(\lambda_1)^t$$

3. Если $d < 0$:

$$y_t^h = \beta_1 r^t \cos(\theta t + \beta_2), \quad r = \sqrt{-a_2}, \quad \theta\colon\ \cos(\theta) = \frac{a_1}{2\sqrt{-a_2}}$$

Лаговый оператор

По определению лаговый оператор это:

$$L^i y_t = y_{t-i}$$

Свойства лагового оператора:

1. $Lconst = const$
2. $(L^i + L^j)y_t = y_{t-i} + y_{t-j}$

3. $L^i L^j y_t = y_{t-i-j}$

4. $L^{-i} y_t = y_{t+i}$

5. Для $|a| < 1$: $(1 + aL + a^2L^2 + \dots)y_t = \frac{y_t}{1-aL}$

6. Для $|a| > 1$: $[1 + (aL)^{-1} + (aL)^{-2} + \dots]y_t = \frac{y_t}{1-1/aL} = -\frac{aLy_t}{1-aL}$

Нахождение particular solution, используя лаговые операторы. Найдем частное решение для модели

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\begin{aligned}
y_t - a_1 y_{t-1} &= a_0 + \varepsilon_t \\
(1 - a_1 L) y_t &= a_0 + \varepsilon_t \\
y_t &= \frac{a_0 + \varepsilon_t}{1 - aL} \\
y_t &= (a_0 + \varepsilon_t) \sum_{i=0}^{\infty} (aL)^i \\
y_t &= \sum_{i=0}^{\infty} a^i L^i a_0 + \sum_{i=0}^{\infty} a^i L^i \varepsilon_t \\
y_t &= a_0 \sum_{i=0}^{\infty} a^i + \sum_{i=0}^{\infty} a^i \varepsilon_{t-i}
\end{aligned}$$