Конспекты по лекции 1

12 октября 2020 г.

Зачем нужны временные ряды?

Мы моделируем какие-либо процессы, оценивая параметры линейных моделей во времени. Пример оцениваемой модели:

$$y_{t+1} = \alpha_0 + \alpha_1 y_t + \varepsilon_{t+1}$$

Получив оценки параметров α_i мы сможем делать предсказания, относительно будущих значений зависимой переменной:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_t y_{t+1} &= \alpha_0 + \alpha_1 \mathbb{E}_t y_t \\
&= \alpha_0 + \alpha_1 y_t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_t y_{t+2} &= \alpha_0 + \alpha_1 \mathbb{E}_t y_{t+1} = \\
&= \alpha_0 + \alpha_1(\alpha_0 + \alpha_1 y_t) \\
&= \alpha_0 + \alpha_1 \alpha_0 + \alpha_1^2 y_t
\end{aligned}$$

Временные ряды позволяют устанавливать динамические экономические связи, то есть определять, как зависимости меняются во времени; строить **стилизованные факты**, то есть позволяют основать фундамент для дальнейшего экономического обоснования наблюдаемых зависимостей.

Гипотеза случайного блуждания

Мы говорим, что оцениваемая модель подчиняется закону случайного блуждания, если она может описаться следующей моделью:

$$\begin{aligned}
y_{t+1} &= y_t + \varepsilon_{t+1} \\
\Delta y_{t+1} &= \varepsilon_{t+1}
\end{aligned}$$

В реальности мы не оцениваем такие модели. Мы строим более общие модели, а затем проводим тесты на ограничения параметров. К примеру мы пытаемся понять, насколько цена акции изменится за период, если известна цена акции на предыдущий период:

$$\Delta y_{t+1} = \alpha_0 + \alpha_1 y_t + \varepsilon_{t+1}$$

Если изменение стоимости бумаги за сутки - это случайная величина, тогда описываемая модель будет являться случайным блужданием. Для того, чтобы проверить, является ли наш пример случайным блужданием, достаточно провести тесты на наличие следующих ограничений:

$$\alpha_0 = \alpha_1 = 0$$

Гипотеза несмещенной форвардной ставки (UFR)

Пусть оценивается зависимость между стоимостями товаров на фьючерсном рынке. В любой сделке есть две цены: форвардная стоимость f_t - то, сколько товар будет стоить в следующем периоде (стороны договариваются о ней в момент совершения сделки) и спотовая стоимость s_{t+1} - рыночная цена товара в момент $t+1$. Пусть мы собрали данные по торгам за продолжительный период и хотим понять, есть ли зависимость между спотовой и форвардной ценой товара. Существует гипотеза несмещенной форвардной ставки, которая гласит, что связь между форвардной и спотовой ценой описывается следующим уравнением:

$$s_{t+1} = f_t + \varepsilon_{t+1}$$

То есть, фактически, мы говорим, что на момент заключения сделки по производным финансовым инструментам, будущая цена актива будет в среднем совпадать с его форвардной стоимостью на момент заключения сделки. Опять же, чтобы проверить гипотезу, оценивается более общая модель

$$s_{t+1} = \alpha_0 + \alpha_1 f_t + \varepsilon_{t+1}$$

Чтобы проверить эту гипотезу, проведем тесты на наличие ограничений на параметры, а именно: убедимся, что выполнены следующие условия, при которых форвардная цена действительно в среднем совпадает со спотовой:

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 1, \quad \mathbb{E}(\varepsilon) = 0$$

Говорят, что спотовый и форвардный рынки находятся в *долгосрочном равновесии*, если форвардная и спотовая цена в следующем периоде совпадут:

$$s_{t+1} = f_t \implies \varepsilon_{t+1} = 0$$

Если форвардная цена не совпадает с будущей спотовой, то появляется возможность для арбитража, а значит они должны сближаться друг к другу в последующих периодах. Рассмотрим процесс корректировки будущих спотовых и форвардных цен (предположим, что $s_{t+1} > f_t$):

$$\begin{aligned} s_{t+2} &= s_{t+1} - a[s_{t+1} - f_t] + \varepsilon_{s_{t+2}}, \quad a > 0 \\ f_{t+1} &= f_t + b[s_{t+1} - f_t] + \varepsilon_{f_{t+1}}, \quad b > 0 \end{aligned}$$

Параметры этого процесса также можно оценивать, чтобы прогнозировать стоимость котировок в зависимости от величины отклонений будущих спотовых цен от форвардных.

Мы можем представлять временные ряды, как объединение трех компонент: **тренд**, **цикл**, **шум**. Считается, что тренд постоянен, цикличность - предсказуемое временное отклонение от тренда, а шум - непредсказуем.

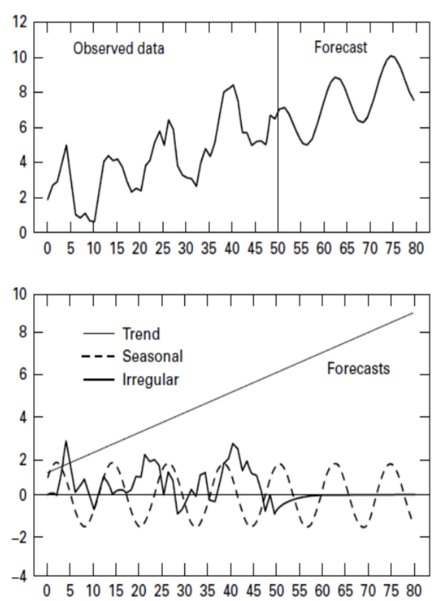

FIGURE 1.1 Hypothetical Time Series

Дифференциальные уравнения и их решения

Эконометрика временных рядов занимается изучением оценивания разностных уравнений со случайной составляющей. Далее мы опишем виды разностных уравнений, а также то, что называется решением разностного уравнения.

Общий вид ряда

В общем случае, ряд будет задаваться разностным уравнением следующей формы (линейным процессом n-го порядка):

$$y_t = \alpha_0 + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{t-i}}_{\text{beforeseen y}} + \underbrace{x_t}_{\text{random f(t)}}$$

Поясним формулу, описанную выше: мы говорим, что зависимая переменная выражается через

1. n своих прошедших значений, умноженных на какое-то число
2. Какую-то функцию от времени x_t. Она может быть выражена в лаговых значениях каких-либо других факторов, случайными возмущениями (как на слупах).

Что называется решением ряда?

Решение разностного уравнения (ряда) выражает значения y_t в зависимости от времени t, последовательности x_t и от начальных значений:

$$y^*(t) = f(y_0, x_t, t)$$

Решение разностного уравнения должно переводить в тождество разностное уравнение в каждый период времени.

Способы решить разностное уравнение

Рассмотрим два способа найти функцию, полностью описывающую зависимую переменную:

1. Решение итерациями
2. Альтернативная методология

Решение итерациями. Поход от $t = 0$ до $t = t$. Предположим, у нас есть разностное уравнение, задающееся случайным процессом первого рода:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Пусть мы так же знаем начальное значение ряда, то есть y_0, что позволяет решить уравнение, начиная с начального момента времени ($t = 0$):

$$y_1 = \alpha_0 + \alpha_1 y_0 + \varepsilon_1$$

В то же время:

$$y_2 = \alpha_0 + \alpha_1 y_1 = \alpha_0 + \alpha_1\alpha_0 + \alpha_1^2 y_0 + \alpha_1\varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

Продолжая для следующего момента времени, получим:

$$\begin{aligned} y_3 = \alpha_0 + \alpha_1 y_2 &= \alpha_0 + \alpha_1(\alpha_0 + \alpha_1\alpha_0 + \alpha_1^2 y_0 + \alpha_1\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1\alpha_0 + \alpha_1^2\alpha_0 + \alpha_1^3 y_0 + \alpha_1^2\varepsilon_1 + \alpha_1\varepsilon_2 \end{aligned}$$

Продолжая эту процедуру для каждого периода времени до t, получим решение этого разностного уравнения:

$$y_t = \alpha_0 \sum_{i=1}^{t} \alpha_1^{t-i} + \alpha_1^t y_0 + \sum_{i=1}^{t} \alpha_1^{t-i} \varepsilon_i$$

Если предположить, что $|\alpha_1| < 1$, то общий вид решения разностного уравнения первого порядка будет иметь вид:

$$\lim_{t \to \infty} y_t = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \sum_{i=1}^{t} \alpha_1^{t-i} \varepsilon_i$$

Решение итерациями. Поход от $t = t$ до $t = 0$.

$$\begin{aligned}
y_t &= \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \alpha_0 + \alpha_1(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\
&= \alpha_0 + \alpha_1 \alpha_0 + \alpha_1^2 y_{t-2} + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \alpha_0 + \alpha_1 \alpha_0 + \alpha_1^2(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t
\end{aligned}$$

$$\lim_{t \to \infty} y_t = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \sum_{i=1}^{t} \alpha_1^{t-i} \varepsilon_i, \quad |\alpha_1| < 1$$

Примеры разностных уравнений и их решений

Рассмотрим простое разностное уравнение:

$$\begin{aligned}
\Delta y_t &= 2 \\
y_t &= y_{t-1} + 2 \\
y_t &= y_{t-2} + 2 * 2 \\
y_t &= y_{t-3} + 2 * 3 \\
y_t &= y_0 + 2t
\end{aligned}$$

Поскольку начальное состояние y_0 может быть любым, то искомое решение ряда имеет бесконечно много решений, отличающихся друг от друга на константу.

Пример 2.

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Сначала рассмотри однородную (homogeneous) часть исходного разностного уравнения:

$$y_t = homogeneous + particular$$

$$\begin{aligned}
y_t &= \alpha_1 y_{t-1} \\
y_t &= (\alpha_1)^t y_0
\end{aligned}$$

Теперь всё зависит от значения α_1:

$$convergence = \begin{cases} direct, & if \quad 0 < \alpha_1 < 1 \\ oscillatory, & if \quad -1 < \alpha_1 < 0 \end{cases}$$

$$divergence = \begin{cases} \text{diverges as t} \to \infty, & if \quad \alpha_1 > 1 \\ \text{explosively osc}, & if \quad \alpha_1 < -1 \end{cases}$$

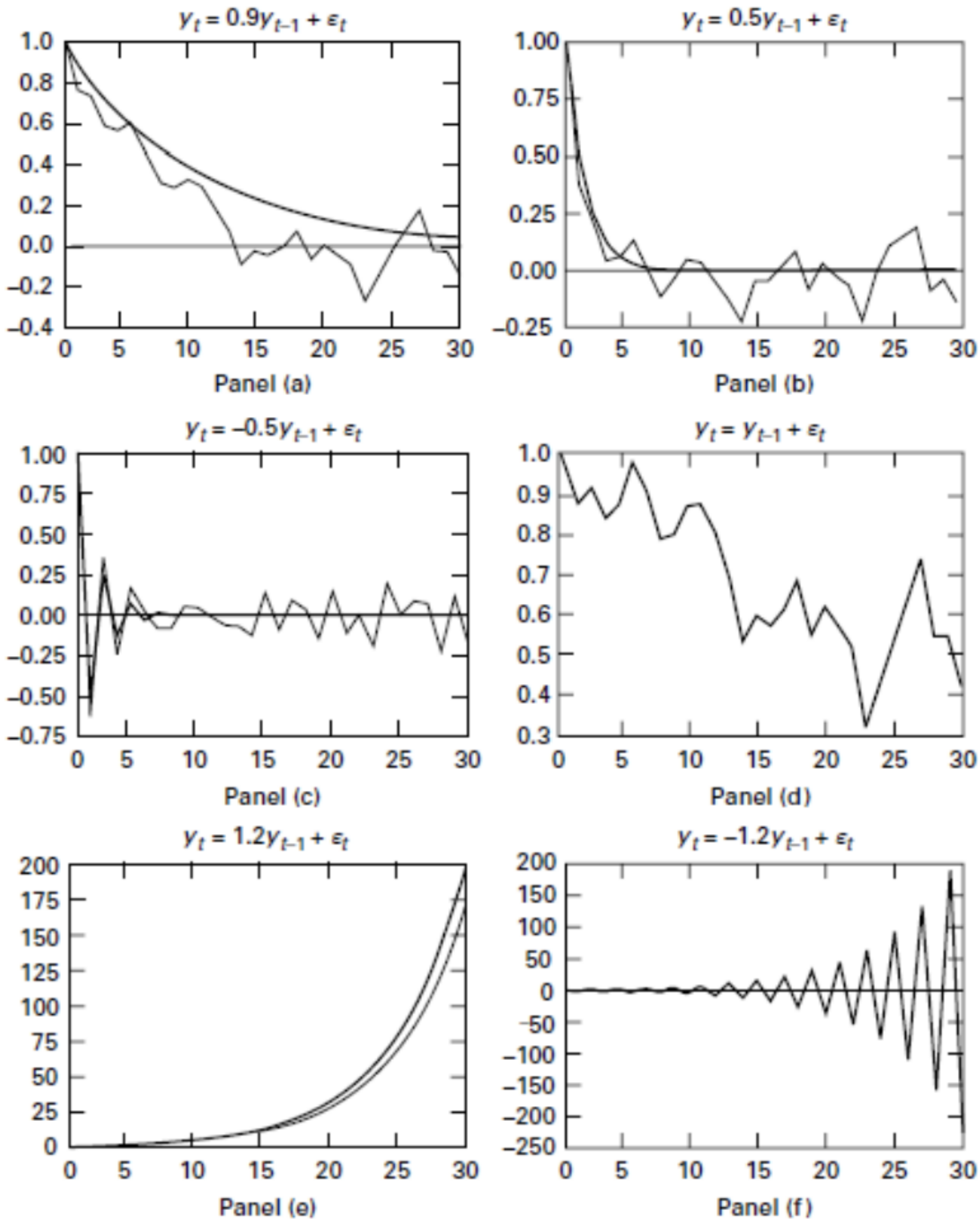

FIGURE 1.2 Convergent and Nonconvergent Sequences