Задача 1.

Пусть на пространстве элементарных исходов Ω с сигма-алгеброй событий $\mathscr{F}$ задана конечно аддитивная вероятность P, т.е. вместо аксиомы счетной аддитивности выполнена аксиома конечной аддитивности: если $A_1 \dots A_n \in \mathscr{F}$ и $A_1 A_j = \varnothing, i \neq j$ то $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$. Докажите, что если P непрерывна в нуле (см. лекцию 3), то она счетно аддитивна

Решение:
Требуется доказать, что выполняется следующее равенство:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

По условию имеем, что $\{A_n\}$ – последовательность событий с пустым пересечением, а значит можно переписать бесконечное объединение событий последовательности в следующем виде:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right)$$

применяя сигма-аддитивность, и рассматривая бесконечное объединение событий от $n+1$ как отдельное множество, получим:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \lim_{n\to\infty}\left\{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) - \underbrace{P\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right)}_{\to 0}\right\} = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Поясним переходы выше. Заметим, что $B_n = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i$ – последовательность непересекающихся, вложенных событий. Из этого следует по аксиоме о непрерывности, что $P(B_n)$ стремится к нолю, при $n \to \infty$.

Задача 2.
В коробке 40 конфет M&M's, 12 красного цвета, 8 желтого цвета, 9 коричневого цвета и 11 зеленого цвета. Случайным образом (неупорядоченно и без возвращения) выбираются 9 конфет. Найдите вероятность того, что в выборке будет

1. три красных конфеты
2. две красных, три желтых, четыре зеленых конфеты

Решение:

1. A – событие, при котором в выборке ровно 3 красных конфеты
   C_{40}^{9} – количество способов взять 9 конфет (неупорядоченно и без возвращения)
   C_{12}^{3} – количество способов выбрать 3 красных конфеты из 12 возможных
   C_{28}^{6} – количество способов взять 6 НЕ красных конфет

$$P(A) = \frac{C_{12}^{3} C_{28}^{6}}{C_{40}^{9}} \sim 0.303$$

2. B – событие, при котором в выборке ровно 2 красных, 3 желтых, 4 зеленых конфеты
   C_{40}^{9} – количество способов взять 9 конфет (неупорядоченно и без возвращения)
   C_{12}^{2} – количество способов взять 2 красных конфеты
   C_{8}^{3} – количество способов взять 3 желтых конфеты
   C_{11}^{4} – количество способов взять 4 зеленых конфеты

$$P(B) = \frac{C_{12}^{2} C_{8}^{3} C_{11}^{4}}{C_{40}^{9}} \sim 0.004$$

Задача 3.
Есть три специальных игральных кубика: с числами 1,4,4,4,4,4 на гранях, с числами 2,2,2,5,5,5 на гранях с числами 3,3,3,3,3,6 на гранях. Два игрока, A и B, играют в следующую игру: B выбирает один кубик из трех, A выбирает один кубик из двух оставшихся; затем игроки подбрасывают свои кубики, и выигрывает тот, у кого выпало больше очков. Игроки выбирают кубики не случайно, а с целью повысить вероятность выигрыша.

1. Кто из игроков имеет больший шанс выиграть?
2. Найдите вероятность того, что выиграет B.

Решение:
Чтобы понять, как именно игроки будут выбирать кубики и есть ли у них доминирующие выигрышные стратегии, необходимо просчитать вероятность победы второго игрока в зависимости от выбранного кубика в ответ на выбор кубика первым игроком. Обозначим событием W_i^A – победные исходы, которые приносит выбор i-го кубика игроку A. Кроме того: A_i – номер кубика, выбранный игроком A и B_i – номер кубика, выбранный игроком B. Посчитаем вероятности победы второго игрока в ответ на выбор каждого из кубиков первым игроком.

Для начала, подчеркнем очевидные вещи. Если первый игрок взял i-ый кубик, то этот кубик становится недоступным для выбора второму игроку. Рассмотрим поочередно ситуации, в которых первый игрок берет каждый из кубиков.

1. Случай B_I (первый игрок взял кубик типа I). В ответ на эту стратегию второй игрок может выбрать либо второй кубик, либо третий. Вероятность победы игрока A для каждой из стратегий соответственно равны:

$$P\left(W_{II}^A|B_I\right) = \frac{1}{6}\frac{6}{6} + \frac{5}{6}\frac{3}{6} = \frac{21}{36}$$
$$P\left(W_{III}^A|B_I\right) = \frac{1}{6}\frac{6}{6} + \frac{5}{6}\frac{1}{6} = \frac{11}{36}$$

Кратко поясню, откуда берутся эти числа. Рассмотрим случай $P\left(W_{II}^A|B_I\right)$. У игрока B при бросании кубика I возможны выпадения двух чисел: либо 1, либо 4. Если выпала единица (что происходит с вероятностью $1/6$), то игрок A выиграет, при условии, что на кубике II выпало число большее, чем единица (что происходит с вероятностью 1).
Кроме единицы у B могла выпасть 4 (с вероятностью $5/6$), победить которую игроку A при помощи второго кубика можно было в 3-х из 6-х исходов.

2. Случай B_{II} (первый игрок взял кубик типа II). В ответ на эту стратегию второй игрок может выбрать либо первый кубик, либо третий. Вероятность победы игрока A для каждой из стратегий соответственно равны:

$$P\left(W_I^A|B_{II}\right) = \frac{3}{6}\frac{5}{6} = \frac{15}{36}$$
$$P\left(W_{III}^A|B_{II}\right) = \frac{3}{6}\frac{6}{6} + \frac{3}{6}\frac{1}{6} = \frac{21}{36}$$

3. И наконец рассмотрим финальный случай B_{III} (первый игрок взял кубик типа III). В ответ на эту стратегию второй игрок может выбрать либо первый кубик, либо второй. Вероятность победы игрока A для каждой из стратегий соответственно равны:

$$P\left(W_I^A|B_{III}\right) = \frac{5}{6}\frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$
$$P\left(W_{II}^A|B_{III}\right) = \frac{5}{6}\frac{3}{6} = \frac{15}{36}$$

	A		
B	I	II	III
I	x	21/36	11/36
II	15/36	x	21/36
III	25/36	15/36	x

Таблица 1: Вероятности выиграть игроку A в зависимости от выбранного кубика

Аггрегируя полученные результаты, сделаем таблицу с различными вероятностями на победу игрока A в зависимости от выбора кубика игроком B:

Проанализируем полученные результаты из таблицы 1. В первую очередь, заметим, что игра с кубиками – это игра с нулевой суммой, а значит вероятности победить первому игроку могли быть получены из таблицы выше, вычитанием из единицы этих результатов. Поскольку игра последовательная, то равновесные исходы определяет второй игрок A. Розовым цветом я выделил все возможные исходы игры, исходя из предпосылки, что агенты выбирают кубики, максимизируя вероятность собственной победы. Игрок B точно не выберет в свой ход кубик III, потому что в таком случае игрок A точно выберет первый кубик. Таким образом, кубики будут выбираться либо в последовательности $I \to II$, либо $II \to I$. В любом из случаев, чаще побеждать будет второй игрок с вероятностью $21/36$. Игрок B будет выигрывать с вероятностью $1 - 21/36 = 15/36$.

Задача 4.
Вероятность того, что письмо находится в письменном столе, равна p, причем с равной вероятностью оно может находиться в любом из восьми ящиков стола. Было просмотрено 7 ящиков и в них письмо не было обнаружено. Чему равна вероятность того, что письмо находится в восьмом ящике?

Решение:
Пусть событие A - письмо находится в столе, событие B_i – письмо находится в i-ом ящике, и событие $\bar{B_i}$ – письмо не находится в i-ом ящике. Понятно, что если письмо не находится в столе, то вероятность его нахождения в любом из ящиков равна нолю. С другой стороны, если письмо находится в столе, то вероятность его нахождения в i-ом ящике составляет $1/8$. Таким образом, искомая вероятность вычисляется следующим образом:

$$P\left(B_8|\bar{B}_1\dots\bar{B}_7\right) = 1 - P\left(\bar{B}_8|\bar{B}_1\dots\bar{B}_7\right) = 1 - \frac{P(\bar{B}_1\dots\bar{B}_8)}{P(\bar{B}_1\dots\bar{B}_7)}$$
$$1 - \frac{1-p}{p/8+1-p} = \frac{p/8+1-p-1+p}{p/8+1-p} = \frac{p}{8-7p}$$

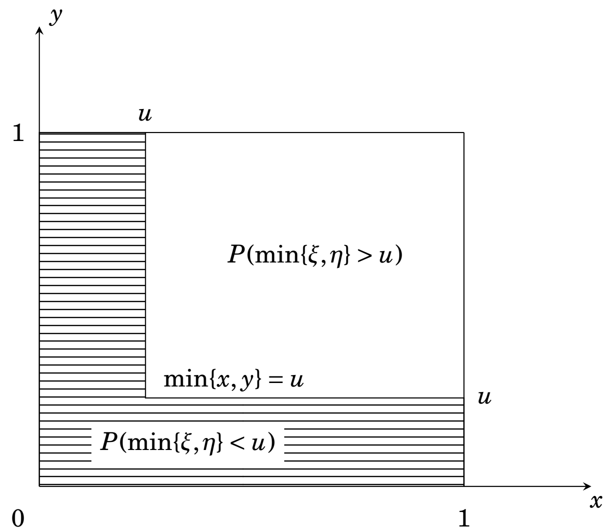
Задача 5.
В квадрате $Q = \{(x,y): 0 \le x, y \le 1\}$ случайно выбирается точка с координатами (ξ, η). Для каждого вещественного числа u найдите вероятности $P(G(\xi,\eta) \le u)$, если:

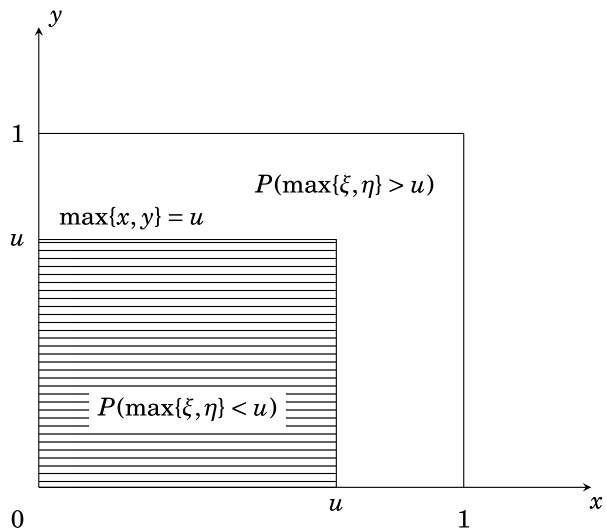
1. $G(\xi,\eta) = \min\{\xi,\eta\}$
2. $G(\xi,\eta) = \max\{\xi,\eta\}$
3. $G(\xi,\eta) = \xi + \eta$

Решение:

Случай первый, $G(\xi,\eta)=\min\{\xi,\eta\}$. В задаче просят посчитать вероятность $P(\min\{\xi,\eta\}\le u)$. Геометрически, функция $G(\xi,\eta)=u$ представляет собой множество точек, разделяющее области, соответсвующие рисунку справа. Таким образом, искомая вероятность может быть вычислена как отношени площади заштрихованной области к площади единичного квадрата, или:

$$P(\min\{\xi,\eta\}\le u)=1-P(\min\{\xi,\eta\}>u)=1-(1-u)^2$$
$$u(2-u)=2u-u^2$$





Случай второй, $G(\xi,\eta)=\max\{\xi,\eta\}$. Аналогичным образом определяем искомую вероятность, как площадь образуемую множеством точек $\{(x,y)|\max\{\xi,\eta\}\le u\}$ (площадь заштрихованного квадрата)

$$P(\max\{\xi,\eta\}\le u)=u^2$$

Случай третий, $G(\xi,\eta)=\xi+\eta$. Для начала немного преобразуем искомую вероятность:

$$P(\xi+\eta\le u)=P(\eta\le u-\xi)$$

Из полученного преобразования становится понятным, что искомая вероятность – площадь под функцией $u-\xi$ (рисунок справа). Аналитически её можно представить в следующем виде:

$$P(\xi+\eta\le u)=\begin{cases}u^2/2, & u\le 1\\ 1-(2-u)^2/2, & u>1\end{cases}$$

Вероятность получилась кусочно-заданной, потому что при $u\le 1$ мы рассматриваем площадь треугольника, а при $u>1$ – площадь фигуры, напоминающей трапецию.