Задача 1
Пусть $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ – стандартная нормальная с.в. Случайная величина U имеет следующее распределение: $P(U=1)=1/2$ и $P(U=-1)=1/2$ и не зависит от Z.

1. Докажите, что с.в $X = UZ$ имеет нормальное распределение и найдите параметры этого распределения
2. Покажите, что распределение случайной величины $Y = X + Z$ не является нормальным

Решение

1. Распределение $P(X \le x) = P(UZ \le x)$ можно расписать следующим образом:

$$P(UZ \le x) = P(U=1)P(UZ \le x \mid U=1) + P(U=-1)P(UZ \le x \mid U=-1) =$$
$$\frac{1}{2}P(UZ \le x \mid U=1) + \frac{1}{2}P(UZ \le x \mid U=-1) = \frac{1}{2}(P(Z \le x) + P(Z \ge -x)) =$$
$$\frac{1}{2}(P(Z \le x) + P(Z \le x)) = P(Z \le x) = \Phi(x)$$

   Причем предпоследнее равенство верно в силу симметричности функции плотности нормального распределения. Таким образом $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

2.

$$P(Y \le y) = P(X+Z \le y) = P(UZ + Z \le y) = P[Z(U+1) \le y] =$$
$$P(U=1)P(2Z \le y) + P(U=-1)P(Z*0 \le y) =$$
$$\frac{1}{2}\left(P\left(Z \le \frac{y}{2}\right) + P(Z*0 \le y)\right) = \frac{1}{2}\left(\Phi(y/2) + I_{0 \le y}\right)$$

   Заметим, что в ноле получили разрыв, из-за чего искомая вероятность перестает быть распределением нормальной случайной величины.

Задача 2
Проводится n независимых испытаний. В каждом испытании возможен один из m исходов. Исход j появляется с вероятностью p_j, эти вероятности не зависят от номера испытания. Обозначим через π_j общее число появлений исхода j. Случайный вектор $\pi = [\pi_1, \ldots, \pi_m]'$ называется полиномиальным случайным вектором.

1. Найдите распределение вектора π
2. Вычислите вектор средних значений $E(\pi)$ и ковариационную матрицу $V(\pi)$

Решение

Заметим, что распределение π_j совпадает с распределение суммы бернулливских случайных величин, которые равны единице с вероятностью p_j и нолю с вероятностью $1-p_j$. Обозначим $\xi_i^j \sim Bern(p_j)$, случайную величину появления j-го исхода в i-ом эксперименте. Тогда:

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^j$$

Здусь π_j – j-ая компонента вектора π. Чтобы понять, как выглядит распределение π_j, рассмотрим простейший случай, когда $i = 2$ (далее опустим верхние индексы):

$$P(\pi_j = x) = P(\xi_1 + \xi_2 = x) = P(\xi_2 = 1)P(\xi_1 = x-1) + P(\xi_2 = 0)P(\xi_1 = x)$$

Если $i = 3$, то:

$$\begin{aligned}P(\pi_j = x) = P(\xi_1+\xi_2+\xi_3 = x) = &P(\xi_1 = x)P(\xi_2 = 0, \xi_3 = 0)+\\ &P(\xi_1 = x-1)[P(\xi_2 = 0)P(\xi_3 = 1)+P(\xi_2 = 1)P(\xi_3 = 0)]+\\ &P(\xi_1 = x-2)P(\xi_2 = 1, \xi_3 = 1)\end{aligned}$$

Также заметим, что $P(\xi_i^j = 1) = p_j$. Тогда случаи $i = 2$ и $i = 3$ могут быть упрощены до:

1. $i = 2$:
$$(1-p_j)P(\xi_1 = x)+p_jP(\xi_1 = x-1)$$
2. $i = 3$:
$$(1-p_j)^2P(\xi_1 = x)+P(\xi_1 = x-1)[C_2^1p_j(1-p_j)]+p_j^2P(\xi_1 = x-2)$$

Продолжая рассуждения по индукции получим следующее выражение для $i = n$:

$$\begin{aligned}P(\pi_j = x) = P\left(\sum_{i=1}^n \xi_i = x\right) = &P(\xi_1 = x)(1-p_j)^{n-1}+\\ &P(\xi_1 = x-1)C_{n-1}^1p_j(1-p_j)^{n-2}+\\ &P(\xi_1 = x-2)C_{n-1}^2p_j^2(1-p_j)^{n-3}+\\ &\dots\\ &P(\xi_1 = x-n-1)p_j^{n-1} = Q_j(x)\end{aligned}$$

Таким образом вероятность $P(\pi = x)$ соотвествует вектору функций от x размерностью $j\times 1$, где по строкам – вероятности компонент, полученные в выражении выше или иначе:

$$P(\pi = x) = [Q_1(x),\dots,Q_m(x)]'$$

Теперь посчитаем матожидание случайного вектора $E(\pi)$:

$$E(\pi) = [E(\pi_1),\dots,E(\pi_m)]'$$

Матожидание j-ой компоненты равно соответственно (пользуемся независимостью):

$$E(\pi_j) = E\left(\sum_{i=1}^n \xi_i^j\right) = \sum_{i=1}^n E(\xi_i^j) = \sum_{i=1}^n p_j = np_j$$

Тогда $E(\pi)$ будет равно:

$$E(\pi) = n[p_1\ p_2\ \dots\ p_m]'$$

Дисперсия j-ой компоненты равна соответсвенно (пользуемся независимостью):

$$D(\pi_j) = D\left(\sum_{i=1}^n \xi_i^j\right) = \sum_{i=1}^n D(\xi_i^j) = \sum_{i=1}^n p_j(1-p_j) = np_j(1-p_j)$$

Тогда $Cov(\pi)$ будет диагональная матрица, у которой по диагонали будет вектор (а во всех других элементах – нули):

$$D(\pi) = n[\ p_1(1-p_1)\ \dots\ p_m(1-p_m)\ ]'$$

Задача 3

Доходности акций двух компаний являются случайными величинами X и Y с одинаковыми средними и матрицей ковариаций

$$V = \begin{bmatrix}6 & -3\\ -3 & 9\end{bmatrix}$$

В какой пропорции надо купить акции этих компаний, чтобы дисперсия доходности получившегося портфеля была наименьшей? Доходность портфеля считается по формуле $R = aX + (1-a)Y$

Решение Проведем задачку оптимизации дисперсии доходности, оптимизируя параметр a:

$$\min_{a>0} D(R) = D(aX + (1-a)Y) = a^2 D(X) + 2a(1-a)Cov(X,Y) + (1-a)^2 D(Y) \to \min_a$$

Учитывая, что $D(X) = 6$, $D(Y) = 9$, $Cov(X,Y) = -3$, наша оптимизационная задача превращается в

$$6a^2 - 6a(1-a) + 9(1-a)^2 \to \min_{1\geq a\geq 0} =$$
$$21a^2 - 21a + 9 \to \min_a$$

минимум параболы с ветвями вверх достигается в вершине с координатой $a = 12/21$.

Задача 4
У неправильной монеты вероятность выпадения «орла» равна 0.3. Монета подбрасывается 400 раз. Пусть X – число выпадений «орла». Оцените $P(100 \leq X \leq 140)$

1. Используя неравнство Чебышёва
2. Используя нормальное приближение

Решение

1. По определению неравенства Чебышева:

$$P(|X - E(X)| > \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \quad \varepsilon > 0$$

Легко заметить, что $E(X) = E(400\xi) = 400E(\xi) = 120$ и $D(X) = D(\sum_{i=1}^{400} \xi) = 400 * 0.3 * 0.7 = 84$ где ξ – распределение бернулли с параметром 0.3. Тогда, искомую вероятность можно переписать в ином виде:

$$P(100 \leq X \leq 140) = P(|X - 120| \leq 20) > 1 - \frac{\sigma^2}{20^2} = 0.79$$

Ответ: вероятность того, что сумма очков на подброшенной 400 раз монете будет лежать между 100 и 400 больше 0.79.

2. Используем нормальное приближение:

$$P(100 \leq X \leq 140) = P\left(\frac{100-120}{9.1} \leq Z \leq \frac{100+120}{9.1}\right) = P(-2.19 \leq Z \leq 24) =$$

$$\Phi(24) - \Phi(-2.19) = 1 - 0.01426 = 0.98574$$

Задача 5
Правильный игральный кубик подбрасывается до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превзойдет 300. Оцените вероятность того, что потребуется не менее 80 подбрасываний.

Решение Пусть с.в. X – количество выпавших на кубике очков. Понятно, что X имеет дискретное распределение, причем поскольку кубик правильный, то выпадение каждой из сторон равновероятно и равно $1/6$. По условию требуется найти следующую вероятность:

$$E\left(\sum_{i=1}^{80} X_i\right) = 80E(X) = 80 \times \frac{7}{2} = 280 \qquad D\left(\sum_{i=1}^{80} X_i\right) = \frac{35*80}{12}$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{80} X_i \leq 300\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{80} X_i - 280}{\sqrt{35 \times 80/12}} \leq \frac{300-280}{\sqrt{35 \times 80/12}}\right) = 0.905$$

Задача 6
Пусть U – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0,2\pi]$, а Z – показательная с.в с параметром $\lambda=1$, и величины U,Z – независмы. Пусть $X=\sqrt{2Z}\cos U$, $Y=\sqrt{2Z}\sin U$. Покажите, что $[X,Y]'$ – стандартный нормальный вектор.

Решение Если $[X,Y]'$ – – стандартный нормальный вектор, тогда совместная функция плотности случайных величин X,Y будет иметь следующий вид:

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}$$

Известен следующий факт:

$$f_{X,Y}(x,y)=f_{Z,U}(z,u)|J(z,u)|^{-1}$$

Из независимости случайных величин Z и U следует, что:

$$f_{Z,U}(z,u)=f_Z(z)f_U(u)$$

Рассмотрим преобразования над случайными величнами:

$$tgU=\frac{Y}{X}\implies U=\operatorname{arctg}\frac{Y}{X}\qquad 2Z=X^2+Y^2\implies Z=\frac{X^2+Y^2}{2}$$

$$f_U(x,y)=\frac{1}{2\pi}\qquad f_Z(x,y)=e^{-(x^2+y^2)/2}$$

используя независимость U и Z, получаем, что:

$$f_{Z,U}(z,u)=\frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}|J_g(z,u)|^{-1}$$

осталось убедиться в том, что рассматриваемый якобиан равен единице:

$$|J_g|^{-1}=\frac{\partial g_1}{\partial z}\frac{\partial g_2}{\partial u}-\frac{\partial g_1}{\partial u}\frac{\partial g_2}{\partial z}$$

где $g_1(z,u)=\sqrt{2z}\cos u$, $g_2(z,u)=\sqrt{2z}\sin u$

$$\frac{\partial g_1}{\partial z}\frac{\partial g_2}{\partial u}-\frac{\partial g_1}{\partial u}\frac{\partial g_2}{\partial z}=\frac{\cos u}{\sqrt{2z}}\sqrt{2z}\cos u+\frac{\sin u}{\sqrt{2z}}\sqrt{2z}\sin u=\sin^2 u+\cos^2 u=1$$

Вывод: совместная функция плотности случайных величин X и Y имеет нормальное распределение, а значит и сами X и Y имеют нормальное распределение.