Задача 1.

1. Случайная величина X имеет гамма распределение с параметром $a > 0$. Случайные величины X и Y независимы и имеют гамма распределение с параметрами a и b, соответственно. Докажите, что случайная величина $X + Y$ имеет гамма распределение, и найти параметр этого распределения
2. Пусть $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Докажите, что случайная величина $X = Z^2/2$ имеет гамма-распределение с параметром $1/2$.

Решение:

1. $X \perp\!\!\!\perp Y \implies$ используем формулу свертки для нахождения распределения с. в. $Z = X + Y$:
$$f_Z(z) = \int_0^z f_X(x) f_Y(z-x)dx = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^z x^{a-1}e^{-x}(z-x)^{b-1}e^{-(z-x)}dx = \frac{e^{-z}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^z x^{a-1}(z-x)^{b-1}dx$$
$$\text{пусть x = zt} \implies dx = zdt, \quad t \in [0,1]$$
$$\frac{e^{-z}z^{a+b-1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt = e^{-z}z^{a+b-1}\int_0^1 \frac{t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt}{\Gamma(a)\Gamma(b)} = \frac{1}{\Gamma(a+b)}z^{a+b-1}e^{-z} \implies Z \sim \Gamma(a+b)$$
2. $$P(X \le x) = P(Z^2/2 \le x) = P(Z^2 \le 2x) = P(-\sqrt{2x} \le Z \le \sqrt{2x}) = \Phi(\sqrt{2x}) - \Phi(-\sqrt{2x})$$
тогда
$$\Phi(\sqrt{2x})' = \phi(\sqrt{2x})\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-x}$$
принимая свойство гамма распределения, что $\Gamma(1/2) = \sqrt{2/\pi}$, получаем, что $Z \sim \Gamma(1/2)$

Задача 2.
Докажите равенство $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}(Y)$

1. – двумерный дискретный случайный вектор с распределением
2. – двумерный непрерывный случайный вектор с плотностью распределения

Решение:

1. Дискретный случай.
По определению:
$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{j=1}^m y_j P(Y = y_j) \qquad \mathbb{E}(Y|X) = \phi(x) = \sum_{j=1}^m y_j P(Y = y_j|X = x)$$
С другой стороны, матожидание от функции от случайной величины по теореме равно:
$$\mathbb{E}(\phi(X)) = \sum_{i=1}^n \phi(x_i)P(X = x_i)$$
Подытоживая:
$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \sum_{i=1}^n \phi(x_i)P(X = x_i) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m y_j P(Y = y_j|X = x_i)P(X = x_i) = \sum_{j=1}^m y_j \sum_{i=1}^n P(Y = y_j|X = x_i)P(X = x_i)$$
$$= \sum_{j=1}^m y_j P(Y = y_j) = \mathbb{E}(Y)$$

2. Непрерывный случай.

   По определению:

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y) dy \qquad \mathbb{E}(Y|X) = \phi(x) = \int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X}(y|x) dy$$

   С другой стороны, матожидание от функции от случайной величины по теореме равно:

$$\mathbb{E}(\phi(X)) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) f_X(x) dx$$

   Подставляя, получаем:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) \left(\int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X}(y|x) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} y \left(\int_{\mathbb{R}} f_{Y|X}(y|x) f_X dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y) dy = \mathbb{E}(Y)$$

Задача 3.
Проводится схема Бернулли длины $m+n$. Пусть X – общее число успехов в первых m испытаниях, Y – в последних n испытаниях. Являются ли величины X и Y независимыми?

$$P(X=k) = C_m^k p^k q^{m-k} \quad P(Y=z) = C_n^z p^z q^{n-z}$$
$$Y \perp\!\!\!\perp X \iff P(YX) = P(Y)P(X)$$
$$P(Y)P(X) = C_m^k C_n^z p^{k+z} q^{n+m-z-k}$$

Решение:

Осталось понять, как выглядит $P(XY)$. В силу того, что X, Y – дискретные с.в., их совместное распределение задается таблично. В ячейке p_{ij} будет находиться вероятность того, что в первых m экспериментах было ровно i удач и в последних n – ровно j удач. Каждую ячейку этой таблицы порождает только стечение одного благоприятного исхода, к примеру:

$$p_{ij} = P(X=i, Y=j) = P(X=i)P(Y=j)$$

Это значит, что событие, при котором $X=i$, а $Y=j$ наступает только в случае если $X=i$ и $Y=j$, а значит события независимые.

Задача 4.
Точка наугад брошена на полуинтервал $[0,1)$. Найдите совместное распределение величин ξ_1, ξ_2. Являются ли эти величины независимыми?

Решение:

Заметим, что ξ_i - дискретные с.в., принимающие равновероятные значения в промежутке $D = \{0, ..., 9\}$. Таким образом $P(\xi_i = d) = 0.1, \ \forall d \in D$. Совместное распределение двух дискретных случайных величин задается таблицей: В ячейке p_{ij} написано значение вероятности $p_{ij} = P(\xi_1 = i, \xi_2 = j)$. Исходя из определения независимости случайных величин, должно соблюдаться следующее равенство:

$$P(\xi_1 = x, \xi_2 = y) = P(\xi_1 = x)P(\xi_2 = y)$$

Из таблицы можно видеть, что какой бы $d \in D$ не выбрали, всё равно $P(\xi_i = d) = 0.1$ и:

$$P(\xi_1, \xi_2) = P(\xi_1)P(\xi_2)$$

Значит величины независимы.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Margin
0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.1
1	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.1
2	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.1
3	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.1
4	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.1
5	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.1
6	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.1
7	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.1
8	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.1
9	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.1
Margin	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	1

Задача 5.
Двумерный случайный вектор $[X,Y]'$ равномерно распределен на множестве $M = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x+2y \leq 2\}$. Найдите функцию регрессии $\phi(x) = \mathbb{E}(Y|X=x)$ и $\psi(y) = \mathbb{E}(X|Y=y)$.

Решение:
Заметим, что множество M – компактное, с площадью 1. Легко заметить, что $f_{X,Y}(x,y) = 1$, если $(x,y) \in M$ и $f_{X,Y}(x,y) = 0$ в остальных точках. Тогда по определению

$$\phi(x) = \mathbb{E}(Y|X) = \int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X}(y|x) dy$$

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_0^{1-x/2} dy = \frac{2-x}{2} \quad \Longrightarrow \quad f_{Y|X}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{2}{2-x},\ x \in M$$

$$\mathbb{E}(Y|X) = \frac{2}{2-x} \int_0^1 y dy = \frac{1}{2-x},\ x \in M \text{ и } 0 \text{ всюду кроме } M.$$

Проведем аналогичные рассуждения для $\psi(y) = \mathbb{E}(X|Y=y)$:

$$\psi(y) = \mathbb{E}(X|Y) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x|y) dx$$

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dx = \int_0^{2-2y} dx = 2-2y \quad \Longrightarrow \quad f_{Y|X}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{2-2y},\ x \in M$$

$$\mathbb{E}(X|Y) = \frac{1}{2-2y} \int_0^2 x dx = \frac{1}{1-y},\ y \in M \text{ и } 0 \text{ всюду кроме } M.$$

Задача 6.
На отрезке $[0,1]$ случайно выбирается точка X. Затем на отрезке $[0,X]$ случайно выбирается точка Y.

1. Найдите совместное распределение случайных величин X и Y
2. Найдите $\mathbb{E}(Y)$

Решение:

Очевидно, что возможное пространство исходов положений точки (x,y) (где первая координата – реализация случаной величины X, а вторая – с.в Y) – это множество M, такое что:

$$M = \{(x,y) : 1 \geq x \geq 0, y \geq 0, y \leq x\}$$

Множество M - треугольник с площадью 1/2. Тогда $f_{X,Y}(x,y) = 2$, если $(x,y) \in M$ и 0 всюду кроме M. По определению:

$$\mathbb{E}(Y) = \int_R y f_Y(y) dy \quad f_Y(y) = \int_R f_{Y|X}(y) f_X(x) dx \quad f_{Y|X}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = 2,\ (x,y) \in M$$

$$f_Y(y) = \int_y^1 2dx = 2(1-y) \implies 2\int_0^1 y(1-y)dy = 2(y^2/2 - y^3/3)|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Задача 7.

Плотность совместного распределения случайных величин X и Y есть

$$f(x,y) = \frac{e^{-y/x} e^{-x}}{x}$$

найти $\mathbb{E}(Y|X=x)$

Решение:

По определению:

$$\mathbb{E}(Y|X) = \phi(x) = \int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X}(y|x) dy \quad f_{Y|X}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \quad f_X(x) = \int_R f_{X,Y}(x,y) dy$$

$$f_X(x) = \frac{e^{-x}}{x} \int_R e^{-y/x} dy = -\frac{e^{-x}}{x} \left(x e^{-y/x} \right) = e^{-x}, x \geq 0 \quad f_{Y|X}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{e^{-y/x}}{x}$$

$$\mathbb{E}(Y|X) = \int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X}(y|x) dy = \frac{1}{x} \int_0^{\infty} y e^{-y/x} dy = x, \quad x \geq 0$$