Задание 1
Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ задана случайная величина ξ, и пусть $f : R \to R$ – непрерывная числовая функция числового аргумента. Докажите, что функция $\eta(\omega) = f(\xi(\omega))$ является случайной величиной.

Решение (По мотивам Теория Вероятностей. Ширяев.)

Функция f будет являться случайной величиной в том случае, если f – измерима. Нетрудно поверить в измеримость f, поскольку измеримость по определению: $\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ $\{\omega : f(\omega) \in B\} \in \mathscr{F}$. По сути, это значит, что какое бы мы подмножество вещественной прямой (порожденное теоретико-множественными операциями над произвольными отрезками) бы ни взяли, то прообраз этого множества будет принадлежать вероятностной сигма-алгебре. А поскольку наша функция является непрерывной, то прообраз любого элемента борелевской сигма-алгебры будет принадлежать вероятностной сигма-алгебре. Аккуратно распишем то, что нам дано:

$$\xi : (\Omega, \mathscr{F}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$$
$$f : (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$$

Рассмотрим $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Для всех таких элементов борелевской сигма алгебры выполняется следующее равенство

$$\{\omega : f(\omega) \in B\} = \{\omega : f(\xi(\omega)) \in B\} = \{\omega : \xi(\omega) \in f^{-1}(B)\} \in \mathscr{F}$$

Последнее утверждение верно, поскольку $f^{-1}(B) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ (поскольку операция взятия прообраза сохраняет теоретико-множественные операции)

Задание 2
Докажите пуассоновское приближение для биномиального распределения: пусть X_n – биномиальная случайная величина с параметрами (n, p_n) и пусть $\lim_{n\to\infty}(np_n) = \lambda, \lambda > 0$. Тогда:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad \forall k = 0, 1 \ldots$$

Решение

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \lim_{n\to\infty} C_n^k p^k q^{n-k} =$$
$$\lim_{n\to\infty} C_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}}_{1}\frac{\lambda^k}{k!}\underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{e^{-\lambda}} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{1} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Задание 3
Последовательно, один за другим, тестируются пять приборов. Каждый последующий прибор тестируется только тогда, когда предыдущий прибор оказался неисправным. Найдите распределение числа протестированных приборов, если каждый прибор независимо от других несправен с вероятностью 0.1.

Решение В задаче описывается последовательность испытаний, которые выполняются поочередно. В случае неудачи, наступающей с вероятностью 0.1 эксперимент продолжается. В случае удачи, с вероятностью 0.9 эксперимент прекращается. Необходимо найти распределение числа испытаний.

Определим случайное событие Y как количество протестированных приборов. Соответсвующие вероятности для каждого из исходов строятся по схеме геометрического распределения:

$$\mathbb{P}(\xi = i) = \begin{cases} q^{i-1}p, & i = 1\dots4 \\ q^{i-1}(q+p), & i = 5 \end{cases}$$

Кратко поясним происхождение этих формул. По условию задачи, вероятности приборов оказаться сломанными и работающими являются независимыми. Кроме этого, последовательность экспериментов имеет четкий порядок. Значит, вероятность того, что будет проведено i испытаний можно найти по формуле $q^{i-1}p$, где q – вероятность неудачи, а p – вероятность удачи. В случае, когда проводится последний 5-ый эксперимент, испытываемый прибор может оказаться как исправным, так и неисправным, но эксперимент в любом случае прекратится, поэтому вероятность того, что всего будет 5 тестирований включает в себя оба случая. Соответсвующее распределение эксперимента в терминах чисел имеет следующий вид:

ξ	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}$	0.9	$0.1 \cdot 0.9$	$0.1^2 \cdot 0.9$	$0.1^3 \cdot 0.9$	$0.1^4 \cdot (0.9+0.1)$

Задание 4

Число x_j (из множества значений случайной величины X) называется модой случайной величины X (модой распределения), если $p_j = \max\{p_i,\ i = 1,2\dots\}$. Иными словами, мода – это значение, принимаемое с максимальной вероятностью. Найдите моду

1. биномиальной случайной величины с параметрами (n,p)
2. пуассоновской случайной величины с параметром λ

Решение

Для биномиального распределения $a_k = \mathbb{P}(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ рассмотрим соотношение

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{n!p^{k+1}q^{n-k-1}}{(n-k-1)!(k+1)!}\frac{(n-k)!k!}{n!p^kq^{n-k}} = \frac{p(n-k)}{q(k+1)}$$
$$\frac{p(n-k)}{q(k+1)} \vee 1$$
$$\frac{p(n-k)-(1-p)(k+1)}{q(k+1)} \vee 0$$

Знаменатель всегда больше ноля, рассмотрим при каких значениях параметров числитель меняет знак.

$$\begin{aligned} p(n-k)-(1-p)(k+1) &\vee 0 \\ p(n-k)-k-1+pk+p &\vee 0 \\ pn-k-1+p &\vee 0 \\ p(n+1)-1 &\vee k \end{aligned}$$

Из рассуждений выше видно, что если правая часть больше левой, то увеличивая k по индукции, биномиальная вероятность уменьшается. Значит, по идее, если правая часть равна левой, то при этом k достигается наибольшее значение вероятности, и как следствие, k отражает моду распределения. Но также сложно поспорить с тем, что $p(n+1)-1$ может оказаться как целым, так и дробным числом. Рассмотрим крайние случаи. Пусть $p(n+1)-1 \in \mathbb{Z}$:

1. Пусть $p=0$. Тогда $p(n+1)-1 = -1 < k,\ \forall k > 0$, из чего следует, что мода распределения достигается при $k=0$.
2. Пусть $p=1$. Тогда мода распределения достигается при $k=n$

Если же $p(n+1)-1 \notin \mathbb{Z}$, то мода достигается при $\lfloor p(n+1) \rfloor$

Теперь рассмотрим распределение пуассона с параметром λ. Пусть $a_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$. Как и в прошлом пункте рассмотрим соотношение $\dfrac{a_k}{a_{k-1}}$:

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\frac{1}{e^{-\lambda}}\frac{(k-1)!}{\lambda^{k-1}} = \frac{\lambda}{k}$$

Проанализируем полученный результат:

1. Если $\forall k,\ k > \lambda$, то вероятности уменьшаются по индукции, а значит мода достигается при $k = 0$.
2. Если $k \notin \mathbb{Z}$ и $k > 1$, то мода распределения совпадает с $\lfloor \lambda \rfloor$

Задание 5
На отрезке $[0,1]$ оси Ox случайным образом выбирается точка. Пусть X – расстояние от этой точки до $(0,1)$. Требуется найти плотность распределения случайной величины X.

Решение

Пусть $Y \sim U[0,1]$, то есть Y равномерно распределенная случайная величина на отрезке $[0,1]$. Эта с.в. характеризует положение случайно выбираемой точки на оси OX. Мы делаем предположение о равномерном распределении Y на основании случайности выбора точки с координатами $(y,0)$. Тогда, можно выразить функцию $F_X(x)$ через $F_Y(x)$.

По определению, $F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \le x)$. В то же время, $F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x)$, причем, поскольку X – расстояние от точки $(0,1)$ до случайно выбираемой точки $(y,0)$, а расстояние подразумевается в смысле евклидовой метрики, то

$$\mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(\sqrt{y^2+1} \le x)$$

где y – координата случайно выбираемой точка на $[0,1]$, с распределением $Y \sim U[0,1]$. Тогда:

$$\mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(\sqrt{y^2+1} \le x) = \mathbb{P}(y^2+1 \le x^2) = \mathbb{P}(y^2 \le x^2-1) = \mathbb{P}(y \le \sqrt{x^2-1}), \quad \forall x \in [1,\sqrt{2}]$$

или в терминах функций распределения:

$$\mathbb{P}(Y \le \sqrt{x^2-1}) = \begin{cases} 0, & \sqrt{x^2-1} \le 0 \\ \sqrt{x^2-1}, & \sqrt{x^2-1} \in (0,1] \\ 1, & \sqrt{x^2-1} > 1 \end{cases}$$

или что то же самое:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(Y \le \sqrt{x^2-1}) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \sqrt{x^2-1}, & x \in \left(1,\sqrt{2}\right] \\ 1, & x > \sqrt{2} \end{cases}$$

Тогда функция плотности $f_X(x) = F'_X(x)$:

$$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ x/\sqrt{x^2-1}, & x \in \left(1,\sqrt{2}\right) \\ 0, & x \ge \sqrt{2} \end{cases}$$

Задание 6
В коробке две батареи. Время работы каждой из них является показательным с параметрами $\lambda_i, i = 1,2$. С вероятностью p_i извлекается i-ая батарея. Известно, что она проработала t часов. Чему равна вероятность того, что она проработает еще s часов?

Решение Пусть $X_i \sim exp(\lambda_i)$ – время работы i-ой батареи. Тогда время работы случайно взятой батареи: $Y = p_1X_1 + p_2X_2$. Искомая вероятность по условию задачи выглядит следующим образом:

$$\mathbb{P}(Y \geq s+t \mid Y \geq t) = \frac{\mathbb{P}(Y \geq s+t \wedge Y \geq t)}{\mathbb{P}(Y \geq t)} = \frac{\mathbb{P}(Y \geq s+t)}{\mathbb{P}(Y \geq t)} = \frac{1-\mathbb{P}(Y < s+t)}{1-\mathbb{P}(Y < t)}$$

Учитывая, что:

$$\mathbb{P}(Y < s+t) = p_1\left(1-e^{-\lambda_1(s+t)}\right) + p_2\left(1-e^{-\lambda_2(s+t)}\right)$$
$$\mathbb{P}(Y < t) = p_1\left(1-e^{-\lambda_1 t}\right) + p_2\left(1-e^{-\lambda_2 t}\right)$$

Тогда

$$\frac{1-\mathbb{P}(Y < s+t)}{1-\mathbb{P}(Y < t)} = \frac{1-\left[p_1\left(1-e^{-\lambda_1(s+t)}\right)+p_2\left(1-e^{-\lambda_2(s+t)}\right)\right]}{1-\left[p_1\left(1-e^{-\lambda_1 t}\right)+p_2\left(1-e^{-\lambda_2 t}\right)\right]} = \frac{e^{-\lambda_1(s+t)}+e^{-\lambda_2(s+t)}}{e^{-\lambda_1 t}+e^{-\lambda_2 t}}$$
$$\frac{1/e^{\lambda_1(s+t)}+1/e^{\lambda_2(s+t)}}{1/e^{\lambda_1 t}+1/e^{\lambda_2 t}} = \frac{e^{\lambda_2(s+t)}+e^{\lambda_1(s+t)}}{e^{\lambda_1(s+t)}e^{\lambda_2(s+t)}} \cdot \frac{e^{\lambda_1 t}e^{\lambda_2 t}}{e^{\lambda_2 t}+e^{\lambda_1 t}} = \frac{e^{\lambda_2(s+t)}+e^{\lambda_1(s+t)}}{e^{(s+t)(\lambda_1+\lambda_2)}}$$

Задание 7
Пусть τ – неотрицательная случайная величина с плотностью $f_\tau(t)$ и функцией распределения $F_\tau(t)$ и пусть $\kappa(t) = \dfrac{f_\tau(t)}{1-F_\tau(t)}$ – коэффициент смертности. Покажите, что коэффициент смертности однозначно определяет распределение случайной величины τ.

Решение Обозначим $G_\tau(t) = 1 - F_\tau(t)$ – функция распределения хвостов. В силу положительности случайной величины τ, очевидно, что $G_\tau(0) = 1$. По определению κ:

$$\kappa(t) = -\frac{G'_\tau(t)}{G_\tau(t)} = -(\ln G_\tau(t))'$$

Тогда:

$$(\ln G_\tau(t))' = -\kappa(t)$$
$$\ln G_\tau(t) = -\int_0^t \kappa(t)$$
$$G_\tau(t) = e^{-\int_0^t \kappa(t)}$$

В силу того, что функция распределения однозначно задает распределение хвостов искомого распределения, значит что она определяет распределение самой случайной величины. Или говоря иначе:

$$F_\tau(t) = 1 - G_\tau(t) = \left[1 - e^{-\int_0^t \kappa(t)}\right]\mathbb{1}_{t \geq 0}$$