2018 год. №1. Решить уравнение: $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$.

Решение.
Разложим левую часть уравнения на множители методом группировки.

$$x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x-1) + 4 \cdot (x-1) = 0 \Leftrightarrow (x^2+4) \cdot (x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+4=0, \\ x-1=0. \end{array} \right. \Leftrightarrow$$
$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Ответ: $\{1\}$.

2018 год. №2. Упростить: $\dfrac{a^2-1}{3a^2-4a+1} \cdot \dfrac{3a-1}{a} - \dfrac{1}{a}$.
Решение.
Разложим на множители знаменатель первой дроби, после чего приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{a^2-1}{3a^2-4a+1} \cdot \frac{3a-1}{a} - \frac{1}{a} = \frac{(a+1)(a-1)(3a-1)}{3(a-1)\left(a-\frac{1}{3}\right)a} - \frac{1}{a} = \frac{(a+1)(3a-1)}{(3a-1)a} - \frac{1}{a} = \frac{a+1}{a} - \frac{1}{a} =$$
$$= \frac{a+1-1}{a} = \frac{a}{a} = 1.$$

Ответ: 1.

2018 год. №3. В шахматном турнире принимали участие 15 шахматистов, причем каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий было сыграно в этом турнире?

Решение.
Рассмотрим первого шахматиста. По условию он сыграл одну партию с каждым из участников, тогда всего у него было 14 партий.
Рассмотрим второго шахматиста. Он также сыграл 14 партий, но партию с первым участником мы уже посчитали, тогда надо посчитать ещё 13 партий.
Рассуждая аналогично, понимаем что надо найти $S = \sum\limits_{n=1}^{14} n = 105$.
Ответ: 105 партий.

2018 год. №4. Решить уравнение: $(x^2-2x)^2 - 2x^2 + 4x = 3$.

Решение.
Выделим в левой части полный квадрат:

$$(x^2-2x)^2-2x^2+4x = 3 \Leftrightarrow (x^2-2x)^2-2(x^2-2x) = 3 \Leftrightarrow (x^2-2x)^2-2(x^2-2x)+1 = 4 \Leftrightarrow (x^2-2x-1)^2 =$$
$$= 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-1=2, \\ x^2-2x-1=-2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-3=0, \\ x^2-2x+1=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-3)(x+1)=0, \\ (x-1)^2=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=-1, \\ x=1. \end{array} \right.$$

Ответ: $\{-1; 1; 3\}$.

2018 год. №5. Решить неравенство: $\dfrac{x^2-2x-8}{x-4} \leq 7$.

Решение.
Перенесем все влево и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{x^2-2x-8}{x-4} \leq 7 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x-7x-8+28}{x-4} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-9x+20}{x-4} \leq 0.$$

По теореме Виета найдем корни числителя и разложим его по теореме Безу.

$$x^2-9x+20=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=5. \end{array}\right. \Leftrightarrow (x-4)(x-5)=0$$

Вернёмся к неравенству:

$$\frac{(x-4)(x-5)}{x-4} \leq 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-5 \leq 0, \\ x \neq 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \leq 5, \\ x \neq 4. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;5] \setminus \{4\}$.

2018 год. №6. Решить систему: $\left\{\begin{array}{l} 0.4x+\dfrac{1}{3}y=1.8, \\ \dfrac{1}{5}x+0.27y=1.21. \end{array}\right.$

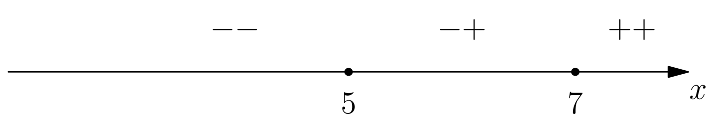
Решение.
Выразим x из второго уравнения и подставим в первое:

$$\left\{\begin{array}{l} 0.4x+\dfrac{1}{3}y=1.8, \\ \dfrac{1}{5}x+0.27y=1.21 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0.4x+\dfrac{1}{3}y=1.8, \\ x=6.05-1.35y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0.4\cdot(6.05-1.35y)+\dfrac{1}{3}y=1.8, \\ x=6.05-1.35y \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{121}{50}-\dfrac{27}{50}y+\dfrac{1}{3}y=\dfrac{9}{5}, \\ x=6.05-1.35y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=3, \\ x=6.05-1.35\cdot 3. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=3, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Ответ: $(x;y) \in \{(2;3)\}$.

2018 год. №7. Решить уравнение $|x-7|+|x-5|=x-4$
Построим на числовой оси знаки раскрытия модулей в зависимости от x



1 случай $x \leqslant 5$

$-x+7-x+5=x-4 \Leftrightarrow -3x=-16 \Leftrightarrow x=\frac{16}{3}$

$\frac{16}{3}>5 \Rightarrow x=\frac{16}{3}$ – не подходит.

2 случай $5<x<7$

$-x+7+x-5=x-4 \Leftrightarrow x=6$

$5<6<7 \Rightarrow x=6$ – походит.

3 случай $x \geqslant 7$

$x-7+x-5=x-4 \Leftrightarrow x=8$

$8 \geqslant 7 \Rightarrow x=8$ – подходит.

Ответ: {6;8}.

2018 год. №8. Вычислить: $(2-\sqrt{5})(\sqrt{9+4\sqrt{5}})$
Решение.
Выделим в подкоренном выражении второго корня полный квадрат:

$$(2-\sqrt{5})(\sqrt{9+4\sqrt{5}}) = (2-\sqrt{5})(\sqrt{5+4\sqrt{5}+4}) = (2-\sqrt{5})\left(\sqrt{(2+\sqrt{5})^2}\right) = (2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5}) =$$
$$= 4-5 = -1$$

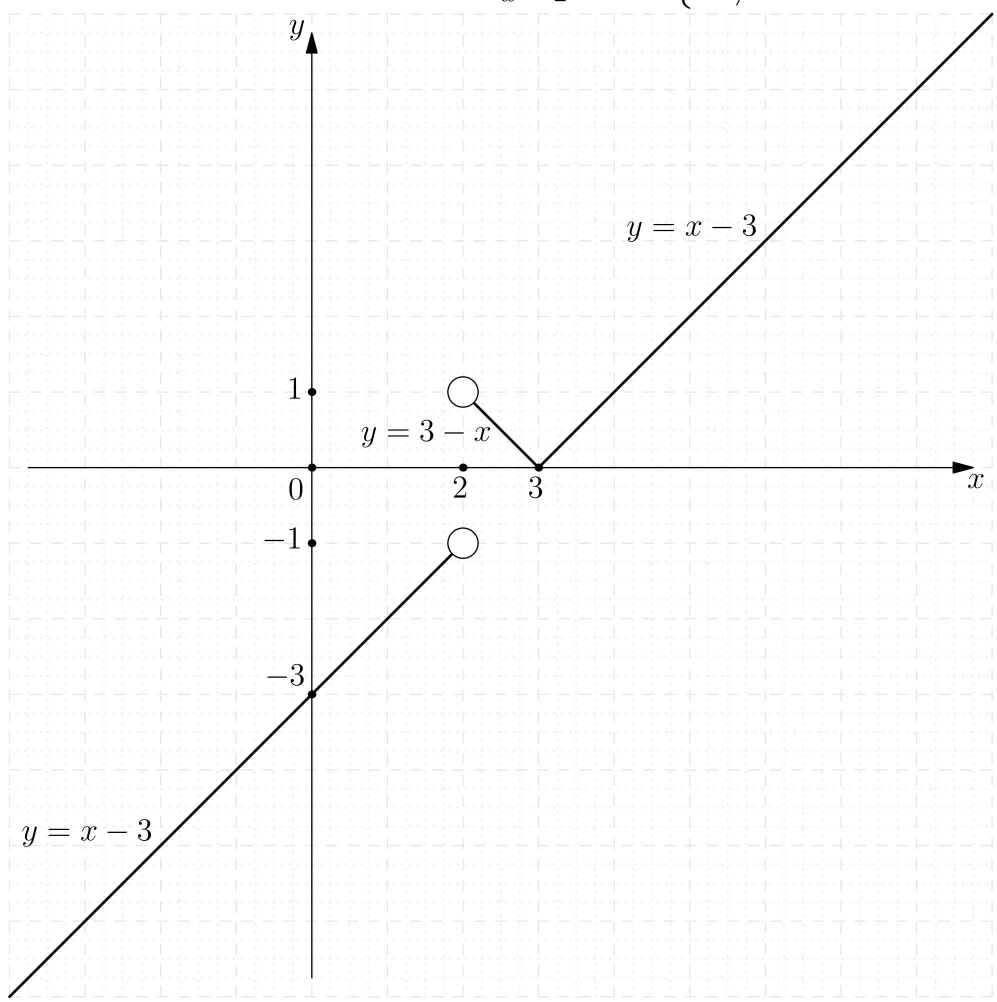
Ответ: -1.

2018 год. №9. Построить график: $y = \dfrac{|x^2-5x+6|}{x-2}$

Разложим числитель на множители по теореме Безу: $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3) \Rightarrow$
При $x \in (-\infty;2) \cup (3;+\infty) : (x-2)(x-3) \geqslant 0$, при $x \in (2;3] : (x-2)(x-3) < 0$

$$1)\text{При } x \in (-\infty;2) \cup (3;+\infty) : y = \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x-3, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

$$2)\text{При } x \in (2;3], y = -\frac{(x-2)(x-3)}{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3-x, \\ x \neq 2. \end{cases}$$



2018 год. №10. Найдите все значения параметра a, при которых сумма корней уравнения $x^2 - \left(a^2 - 5a\right)x + 4a^2 = 0$ будет отрицательной.

Решение.

1. Чтобы уравнение $x^2 - \left(a^2 - 5a\right)x + 4a^2 = 0$ имело корни, сумма которых была бы меньше 0, необходимо и достаточно, чтобы
1) Уравнение имело один корень, который был бы меньше 0.
ИЛИ
2) Имело 2 корня, сумма которых была бы меньше 0.

2. Рассмотрим первый случай. Т.к. уравнение всегда квадратное (старший коэффициент не равен нулю), то надо рассмотреть случай, когда дискриминант равен нулю:

$$(a^2 - 5a)^2 - 4 \cdot 4a^2 = 0 \Leftrightarrow a^4 - 10a^3 + 25a^2 - 16a^2 = 0 \Leftrightarrow a^4 - 10a^3 + 9a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 - 10a + 9 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a = 5 \pm \sqrt{25 - 9} \Leftrightarrow a = 5 \pm \sqrt{16} \Leftrightarrow a = 5 \pm 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1, \\ a = 9. \end{array}\right.$$

Подставим $a = 1$ в изначальное уравнение:

$$x^2 - (1^2 - 5 \cdot 1)x + 4 \cdot 1^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$
$$-2 < 0 \Rightarrow a = 1 - \text{подходит.}$$

Подставим $a = 9$ в изначальное уравнение:

$$x^2 - (9^2 - 5 \cdot 9)x + 4 \cdot 9^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 36x + 324 = 0 \Leftrightarrow (x - 18)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 18.$$
$$18 > 0 \Rightarrow a = 9 - \text{не подходит.}$$

3. Рассмотрим второй случай.
Чтобы было два корня, необходимо, чтобы дискриминант был больше нуля:

$$(a^2 - 5a)^2 - 4 \cdot 4a^2 > 0 \Leftrightarrow a^4 - 10a^3 + 25a^2 - 16a^2 > 0 \Leftrightarrow a^4 - 10a^3 + 9a^2 > 0 \Leftrightarrow a^2 - 10a + 9 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a - 1)(a - 9) > 0.$$

По теореме Виета: $x_1 + x_2 = \dfrac{a^2 - 5a}{1}$, где x_1 и x_2 – корни изначального уравнения.
Тогда, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась система: $\left\{\begin{array}{l} a^2 - 5a < 0, \\ (a - 1)(a - 9) > 0. \end{array}\right.$
Решим её методом интервалов:

$$\left\{\begin{array}{l} a^2 - 5a < 0, \\ (a - 1)(a - 9) > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a(a - 5) < 0, \\ (a - 1)(a - 9) > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a \in (0; 5), \\ a \in (-\infty; 1) \cup (9; +\infty) > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow a \in (0; 1).$$

Объединим оба случая и получим $a \in (0; 1]$.
Ответ: $a \in (0; 1]$.

2018 год. №12. Остаток от деления числа a на 3 равен 1. Найдите отстаток от деления числа a^2 на 3.
Решение.
Если остаток от деления числа a на 3 равен 1, то число a можно записать в виде $a = 3k + 1$, где k – это какое-то целое число.
Тогда $a^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$. Поскольку первое слагаемое делится на 3, то остаток от деления a^2 на 3 будет равен 1.

Ответ: 1.

2018 год. №14. При каких a уравнение $(x-3)(2x-a)=x-3$ имеет ровно один корень?
Решение.
Раскроем скобки и перенесем всё в левую часть:

$$2x^2-ax-6x+3a=x-3.2x^2-x(7+a)+3a+3=0.$$

Т.к уравнение всегда квадратное (старший коэффициент не равен нулю) то, чтобы уравнение имело ровно один корень, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант был равен 0, то есть:

$(7+a)^2-8(3a+3)=0. \Leftrightarrow 49+14a+a^2-24a-24=0. \Leftrightarrow a^2-10a+25=0 \Leftrightarrow (a-5)^2=0 \Leftrightarrow a=5.$

Ответ: $a=5$.