Title page subtitle

THIS IS A RATHER LONG BUT NICE LOOKING TITLE EXAMPLE

8 мая 2020 г.

John F. Doe
Imaginary University of Examples
Made up department of Randomness
your@email.com

0.1 2015 год

0.1.1 I вариант

0.1.2 II вариант

0.2 2016 год

0.2.1 I вариант

0.2.2 II вариант

0.3 2017 год

0.3.1 I вариант

0.3.2 II вариант

0.4 2018 год

0.4.1 I вариант

2018 год. №1. Решить уравнение: $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$.

Решение.
Разложим левую часть уравнения на множители методом группировки.

$$x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x-1) + 4 \cdot (x-1) = 0 \Leftrightarrow (x^2+4) \cdot (x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 4 = 0, \\ x - 1 = 0. \end{array} \right. \Leftrightarrow$$
$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Ответ: $\{1\}$.

2018 год. №2. Упростить: $\dfrac{a^2-1}{3a^2-4a+1} \cdot \dfrac{3a-1}{a} - \dfrac{1}{a}$.
Решение.
Разложим на множители знаменатель первой дроби, после чего приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{a^2-1}{3a^2-4a+1} \cdot \frac{3a-1}{a} - \frac{1}{a} = \frac{(a+1)(a-1)(3a-1)}{3(a-1)\left(a-\frac{1}{3}\right)a} - \frac{1}{a} = \frac{(a+1)(3a-1)}{(3a-1)a} - \frac{1}{a} = \frac{a+1}{a} - \frac{1}{a} =$$
$$= \frac{a+1-1}{a} = \frac{a}{a} = 1.$$

Ответ: 1.

2018 год. №3. В шахматном турнире принимали участие 15 шахматистов, причем каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий было сыграно в этом турнире?

Решение.
Рассмотрим первого шахматиста. По условию он сыграл одну партию с каждым из участников, тогда всего у него было 14 партий.

Рассмотрим второго шахматиста. Он также сыграл 14 партий, но партию с первым участником мы уже посчитали, тогда надо посчитать ещё 13 партий.

Рассуждая аналогично, понимаем что надо найти $S = \sum\limits_{n=1}^{14} n = 105$.

Ответ: 105 партий.

2018 год. №4. Решить уравнение: $(x^2 - 2x)^2 - 2x^2 + 4x = 3$.

Решение.
Выделим в левой части полный квадрат:

$$(x^2-2x)^2-2x^2+4x = 3 \Leftrightarrow (x^2-2x)^2-2(x^2-2x) = 3 \Leftrightarrow (x^2-2x)^2-2(x^2-2x)+1 = 4 \Leftrightarrow (x^2-2x-1)^2 =$$
$$= 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-1=2, \\ x^2-2x-1=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-3=0, \\ x^2-2x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-3)(x+1)=0, \\ (x-1)^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=-1, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-1; 1; 3\}$.

2018 год. №5. Решить неравенство: $\dfrac{x^2-2x-8}{x-4} \leq 7$.

Решение.
Перенесем все влево и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{x^2-2x-8}{x-4} \leq 7 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x-7x-8+28}{x-4} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-9x+20}{x-4} \leq 0.$$

По теореме Виета найдем корни числителя и разложим его по теореме Безу.

$$x^2-9x+20=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=5. \end{array}\right. \Leftrightarrow (x-4)(x-5)=0$$

Вернёмся к неравенству:

$$\frac{(x-4)(x-5)}{x-4} \leq 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-5 \leq 0, \\ x \neq 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \leq 5, \\ x \neq 4. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty; 5] \setminus \{4\}$.

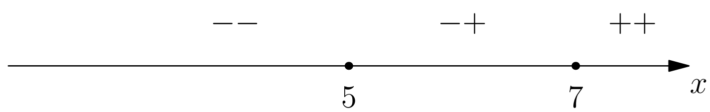
2018 год. №6. Решить систему: $\left\{\begin{array}{l} 0.4x + \dfrac{1}{3}y = 1.8, \\ \dfrac{1}{5}x + 0.27y = 1.21. \end{array}\right.$

Решение.
Выразим x из второго уравнения и подставим в первое:

$$\left\{\begin{array}{l} 0.4x + \dfrac{1}{3}y = 1.8, \\ \dfrac{1}{5}x + 0.27y = 1.21 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0.4x + \dfrac{1}{3}y = 1.8, \\ x = 6.05 - 1.35y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0.4 \cdot (6.05 - 1.35y) + \dfrac{1}{3}y = 1.8, \\ x = 6.05 - 1.35y \end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{121}{50} - \dfrac{27}{50}y + \dfrac{1}{3}y = \dfrac{9}{5}, \\ x = 6.05 - 1.35y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 3, \\ x = 6.05 - 1.35 \cdot 3. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 3, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Ответ: $(x; y) \in \{(2; 3)\}$.

2018 год. №7. Решить уравнение $|x-7| + |x-5| = x-4$
Построим на числовой оси знаки раскрытия модулей в зависимости от x



Разберем три случая.
1) Пусть $x \leqslant 5$. Тогда уравнение принимает вид:

$$-x + 7 - x + 5 = x - 4 \Leftrightarrow -3x = -16 \Leftrightarrow x = \frac{16}{3}.$$

Так как $\frac{16}{3} > 5$, то найденный корень $x = \frac{16}{3}$ – не подходит под условие случая.

2) $5 < x < 7$
$-x + 7 + x - 5 = x - 4 \Leftrightarrow x = 6$
$5 < 6 < 7 \Rightarrow x = 6$ – подходит.

3) $x \geqslant 7$
$x - 7 + x - 5 = x - 4 \Leftrightarrow x = 8$
$8 \geqslant 7 \Rightarrow x = 8$ – подходит.

Ответ: {6;8}.

2018 год. №8. Вычислить: $(2-\sqrt{5})(\sqrt{9+4\sqrt{5}})$
Решение.
Выделим в подкоренном выражении второго корня полный квадрат:

$$(2-\sqrt{5})(\sqrt{9+4\sqrt{5}}) = (2-\sqrt{5})(\sqrt{5+4\sqrt{5}+4}) = (2-\sqrt{5})\left(\sqrt{(2+\sqrt{5})^2}\right) = (2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5}) = \\ = 4 - 5 = -1$$

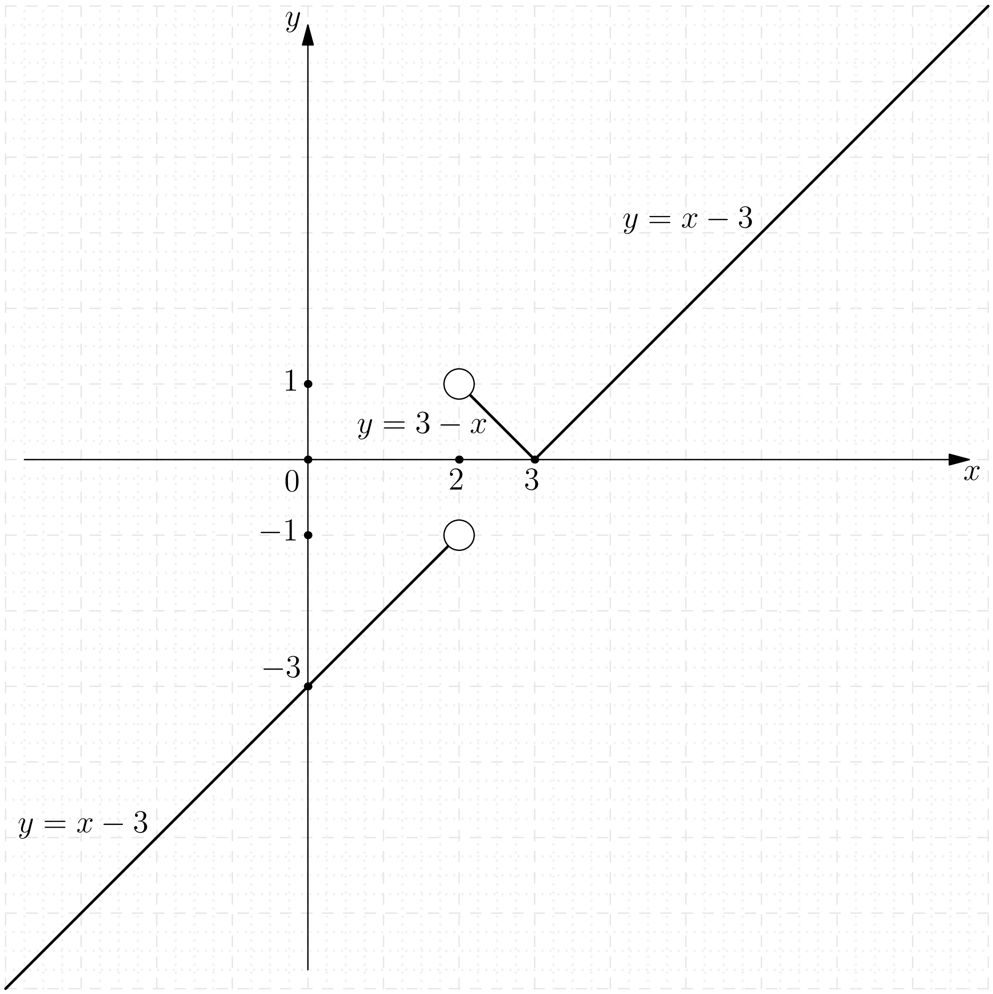
Ответ: -1.

2018 год. №9. Построить график: $y = \dfrac{|x^2 - 5x + 6|}{x-2}$

Разложим числитель на множители по теореме Безу: $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) \Rightarrow$
При $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty) : (x-2)(x-3) \geqslant 0$, при $x \in (2; 3] : (x-2)(x-3) < 0$

$$1)\text{При } x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty) : y = \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

$$2)\text{При } x \in (2; 3], y = -\frac{(x-2)(x-3)}{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x, \\ x \neq 2. \end{cases}$$



2018 год. №10. Найдите все значения параметра a, при которых сумма корней уравнения $x^2 - \left(a^2 - 5a\right) x + 4a^2 = 0$ будет отрицательной.

Решение.

1. Чтобы уравнение $x^2 - \left(a^2 - 5a\right) x + 4a^2 = 0$ имело корни, сумма которых была бы меньше 0, необходимо и достаточно, чтобы
1) Уравнение имело один корень, который был бы меньше 0.
ИЛИ
2) Имело 2 корня, сумма которых была бы меньше 0.

2. Рассмотрим первый случай. Т.к. уравнение всегда квадратное (старший коэффициент не равен нулю), то надо рассмотреть случай, когда дискриминант равен нулю:

$$(a^2 - 5a)^2 - 4 \cdot 4a^2 = 0 \Leftrightarrow a^4 - 10a^3 + 25a^2 - 16a^2 = 0 \Leftrightarrow a^4 - 10a^3 + 9a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 - 10a + 9 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a = 5 \pm \sqrt{25 - 9} \Leftrightarrow a = 5 \pm \sqrt{16} \Leftrightarrow a = 5 \pm 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1, \\ a = 9. \end{array}\right.$$

Подставим $a = 1$ в изначальное уравнение:

$$x^2-(1^2-5\cdot 1)x+4\cdot 1^2=0 \Leftrightarrow x^2+4x+4=0 \Leftrightarrow (x+2)^2=0 \Leftrightarrow x=-2.$$
$$-2<0 \Rightarrow a=1 - \text{подходит.}$$

Подставим $a=9$ в изначальное уравнение:

$$x^2-(9^2-5\cdot 9)x+4\cdot 9^2=0 \Leftrightarrow x^2-36x+324=0 \Leftrightarrow (x-18)^2=0 \Leftrightarrow x=18.$$
$$18>0 \Rightarrow a=9 - \text{не подходит.}$$

3. Рассмотрим второй случай.
Чтобы было два корня, необходимо, чтобы дискриминант был больше нуля:

$$(a^2-5a)^2-4\cdot 4a^2>0 \Leftrightarrow a^4-10a^3+25a^2-16a^2>0 \Leftrightarrow a^4-10a^3+9a^2>0 \Leftrightarrow a^2-10a+9>0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a-1)(a-9)>0.$$

По теореме Виета: $x_1+x_2=\dfrac{a^2-5a}{1}$, где x_1 и x_2 – корни изначального уравнения.
Тогда, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась система: $\begin{cases} a^2-5a<0, \\ (a-1)(a-9)>0. \end{cases}$
Решим её методом интервалов:

$$\begin{cases} a^2-5a<0, \\ (a-1)(a-9)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a-5)<0, \\ (a-1)(a-9)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in(0;5), \\ a\in(-\infty;1)\cup(9;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow a\in(0;1)\,.$$

Объединим оба случая и получим $a\in(0;1]$.
Ответ: $a\in(0;1]$.

2018 год. №11. Конференция длится три дня. В первый и второй день выступают по 15 докладчиков, в третий день – 20. Какова вероятность того, что доклад профессора М. выпадет на третий день, если порядок докладов определяется жеребьевкой?

Решение.
Всего выступают $15+15+20=50$ докладчиков. Тогда вероятность, что профессор М. выступит в третий день равна $P=\dfrac{20}{50}=0,4$
Ответ: 0,4.

2018 год. №12. Остаток от деления числа a на 3 равен 1. Найдите отстаток от деления числа a^2 на 3.
Решение.
Если остаток от деления числа a на 3 равен 1, то число a можно записать в виде $a=3k+1$, где k – это какое-то целое число.
Тогда $a^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$. Поскольку первое слагаемое делится на 3, то остаток от деления a^2 на 3 будет равен 1.
Ответ: 1.

2018 год. №14. При каких a уравнение $(x-3)(2x-a)=x-3$ имеет ровно один корень?
Решение.
Раскроем скобки и перенесем всё в левую часть:

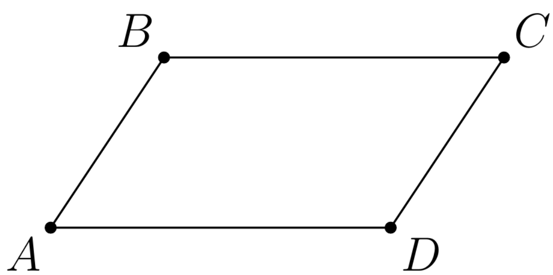
$$2x^2-ax-6x+3a=x-3.2x^2-x(7+a)+3a+3=0.$$

Т.к уравнение всегда квадратное (старший коэффициент не равен нулю) то, чтобы уравнение имело ровно один корень, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант был равен 0, то есть:

$(7+a)^2-8(3a+3)=0. \Leftrightarrow 49+14a+a^2-24a-24=0. \Leftrightarrow a^2-10a+25=0 \Leftrightarrow (a-5)^2=0 \Leftrightarrow a=5.$

Ответ: $a=5$.

2018 год. №15. Разность углов, прилегающих к одной стороне параллелограмма равна 48°. Найдите больший угол параллелограмма.

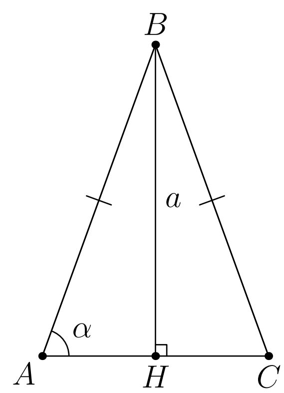


Решение.
По свойству у параллелограмма сумма градусных мер углов, прилежащих к одной стороне равна 180°. Значит больший угол параллелограмма равен

$$\frac{180^\circ+48^\circ}{2}=114^\circ$$

Ответ: 114°.

2018 год. №18. Высота равнобедренного треугольника ABC, опущенная из вершины В на основание AC равна a? угол А равен α. Найдите площадь треугольника.



Решение.
В $\triangle ABH$: $\operatorname{tg}\angle A=\dfrac{BH}{AH}$. Следовательно: $AH=\dfrac{BH}{\operatorname{tg}\angle A}=\dfrac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$ По свойству высоты в равнобедренном треугольнике, высота является медианой. Тогда:

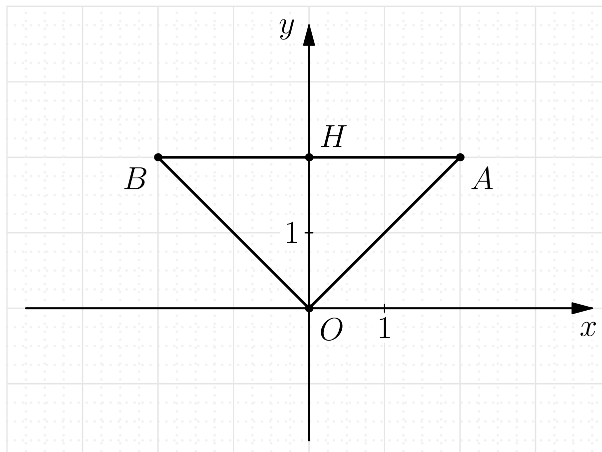
$$AH=HC=\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}\to AC=AH+HC=\frac{2a}{\operatorname{tg}\alpha}$$

По формуле площади для треугольника получаем:

$$S(ABC) = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{\operatorname{tg}\alpha} \cdot a = \frac{a^2}{\operatorname{tg}\alpha} = a^2 \cdot \operatorname{ctg}\alpha$$

Ответ: $a^2 \cdot \operatorname{ctg}\alpha$.

2018 год. №15. Дан $\triangle OAB$. $O(0;0)$, $A(2;2)$, $B(x;2)$. Найдите координаты точки B, если площадь треугольника $OAB = 4$.



Решение.
Поставим на координатной плоскости точки O и A и точку B с ординатой 2.
Высота OH, проведенная к стороне OB – фиксированная и равна двум клеткам, тогда площадь $\triangle OAB$ равна

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |x-2| = 4 \Leftrightarrow |x-2| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=6. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-2;2),(6;2)$.

2018 год. №20. Найдите большую высоту треугольника со сторонами $3\sqrt{3}$, $\sqrt{11}$ и 4.
Решение.
Найдем площадь треугольника по формуле Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$
$$= \sqrt{\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{11}+4}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{11}+4}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{11}-4}{2} \cdot \frac{-3\sqrt{3}+\sqrt{11}+4}{2}} =$$
$$= \sqrt{\frac{(3\sqrt{3}+4)^2-(\sqrt{11})^2}{4} \cdot \frac{(\sqrt{11})^2-(4-3\sqrt{3})^2}{4}} = \sqrt{\frac{43+24\sqrt{3}-11}{4} \cdot \frac{11-43+24\sqrt{3}}{4}} =$$
$$= \sqrt{\frac{24\sqrt{3}+32}{4} \cdot \frac{24\sqrt{3}-32}{4}} = \sqrt{\frac{1728-1024}{16}} = \frac{8\sqrt{11}}{4}.$$

Большая высота проведена к меньшей стороне, то есть к стороне, равной $3\sqrt{3}$. Найдем эту высоту из соотношения $h = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot \frac{8\sqrt{11}}{4}}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{11}}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{33}}{27}$.

Ответ: $\frac{4\sqrt{33}}{27}$.

0.4.2 II вариант

0.5 2019 год

0.5.1 I вариант

0.5.2 II вариант