7.- Un sistema electrónico tiene uno de cada dos tipos diferentes de componentes de operación en operación conjunta. Denote con X y Y las duraciones aleatorias de los componentes del tipo I y tipo II respectivamente. La función de densidad de probabilidad conjunta está dada por

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8} x e^{-(x+y)/2} & x > 0, \quad y > 0 \\ 0 & otros. \end{cases}$$

Las mediciones son en cientos de horas.

a) Encuentre $P(X > 1, Y > 1)$

b) Encuentre la probabilidad de que el componente tipo II tenga una vida útil de más de 200 horas.

a) $P(X>1, \ Y>1)$

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{1}{8} x e^{-(x+y)/2} \, dy dx$$

$$\frac{1}{8} x \int_1^\infty e^{-(x+y)/2} \, dy \quad u = (x+y)/2 \quad du = \frac{1}{2} dy \qquad dy = 2du$$

Se evalua y en u

$$\frac{1}{8} x \int_{(x+1)/2}^\infty e^{-u} \, 2du = \frac{1}{4} x (-e^{-u}) \Big|_{(x+1)/2}^\infty = \frac{1}{4} x \left[0 + e^{-(x+1)/2} \right]$$

b) $\int_1^\infty \frac{1}{4} x e^{-(x+1)/2} \, dx \quad v = (x+1)/2 \quad dv = \frac{1}{2} dx \quad dx = 2dv$

$x = 2v - 1$

$$\int_1^\infty \frac{1}{4} (2v-1) e^{-v} \, 2dv = \int_1^\infty v e^{-v} dv - \frac{1}{2} \int_1^\infty e^{-v} dv$$

$$\left[-ve^{-v} - e^{-v} \right]_1^\infty - \frac{1}{2} \left[-e^{-v} \right]_1^\infty = -\left[-e^{-1} - e^{-1} \right] + \frac{1}{2} [-e]^{-1}$$

$$e^{-\infty} = 0 \qquad = 2e^{-1} - \frac{1}{2} e^{-1} = \frac{3}{2} e^{-1} = \frac{3}{2e} \approx 0.5578$$

8.- Sean X e Y variables aleatorias continuas con función de densidad de probabilidad conjunta

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}(1+xy(x^2-y^2)), & -1\le x\le 1, -1\le y\le 1\\ 0 & otros\end{cases}$$

Determine

a) La función de distribución acumulada.
b) Las funciones de densidad de probabilidad marginal para X e Y.
c) Las funciones de densidad de probabilidad condicional de X e Y.
d) Si las variables aleatorias son independientes.

a) $$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{x}\frac{1}{4}(1+x^3y-xy^3)\,dx\,dy=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}\left[x+\frac{yx^4}{4}-\frac{x^2y^3}{2}\right]dy=\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{16}(x^4y-2x^2y^3+4x+2y^3-y+4)\right]dy=$$

$$\frac{1}{16}\left[\frac{x^4y^2}{2}-\frac{x^2y^4}{2}+4xy+\frac{y^4}{2}-\frac{y^2}{2}+4y\right]\Big|_{-1}^{1}=\frac{x+1}{2}$$

$$\int_{-1}^{y}\int_{-1}^{x}\frac{1}{4}(1+x^3y-xy^3)\,dx\,dy=\int_{-1}^{y}\frac{1}{4}\left[x+\frac{yx^4}{4}-\frac{x^2y^3}{2}\right]\Big|_{-1}^{x}dy=\int_{1}^{y}\left[\frac{1}{16}(x^4y-2x^2y^3+4x+2y^3-y+4)\right]dy=$$

$$\frac{1}{16}\left[\frac{x^4y^2}{2}-\frac{x^2y^4}{2}+4xy+\frac{y^4}{2}-\frac{y^4}{2}+4y\right]\Big|_{-1}^{y}=\frac{1}{32}\left[x^4(y^2-1)-x^2(y^4-1)+8x(y+1)+y^4-y^2+8y+8\right]$$

$$\int_{-1}^{y}\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}(1+x^3y-xy^3)\,dx\,dy=\int_{-1}^{y}\frac{1}{4}\left(x+\frac{yx^4}{4}-\frac{x^2y^3}{2}\right)\Big|_{-1}^{1}dy=\int_{-1}^{y}\frac{1}{2}\,dy=\frac{y}{2}\Big|_{-1}^{y}=\frac{y+1}{2}$$

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & , x<-1, y<-1\\ (x+1)/2 & , -1\le x\le 1, y>1\\ \frac{1}{32}\left[x^4(y^2-1)-x^2(y^4-1)+8x(y+1)+y^4-y^2+8y+8\right] & , -1\le x\le 1, -1\le y\le 1\\ (y+1)/2 & , x>1, -1\le y\le 1\\ 1 & , x>1, y>1\end{cases}$$

b) Marginal X:

$$f_X(x)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}(1+xy(x^2-y^2))\,dy=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}1\,dy+\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}x^3y+xy^3\,dy$$

$$=\frac{y}{4}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

marginal Y:

$$f_Y(y)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}(1+xy(x^2-y^2))\,dx=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}1\,dx+\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}xy(x^2-y^2)\,dx$$

$$=\frac{x}{4}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{2}$$

c) Condicional

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{1}{4}(1+xy(x^2-y^2))}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(1+xy(x^2-y^2))$$

$$F(x)=\begin{cases}1/2 & 0\le x\le 1\\ 0 & otros\end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{1}{4}(1+xy(x^2-y^2))}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(1+xy(x^2-y^2))$$

$$F(y)=\begin{cases}1/2 & 0\le y\le 1\\ 0 & otros\end{cases}$$

d) Independencia

$f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ para todo x,y

$$f_X(x)f_Y(y)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{4}(1+xy(x^2-y^2))$$

NO SON INDEPENDIENTES

9.- La administración en un restaurante de comida rápida está interesada en el comportamiento conjunto de las variables aleatorias X y Y. X, representa el tiempo total entre la llegada de un cliente a la tienda y la salida de la ventanilla de servicio, Y, el tiempo que un cliente espera en la fila antes de llegar a la ventanilla de servicio. Como X incluye el tiempo que un cliente espera en la fila, debemos tener $X \geq Y$. La distribución de valores observados puede ser modelada por la siguiente función de densidad de probabilidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} e^{-x} & 0 \leq y \leq x < \infty \\ 0 & otros. \end{cases}$$

con el tiempo medido en minutos. Encuentre

a) $P(X < 2, Y > 1)$.
b) Las funciones de densidad marginal para X y Y.
c) ¿Cuál es la función de densidad condicional de X dado que $Y = y$?
d) ¿Cuál es la función de densidad condicional de Y dado que $X = x$?
e) ¿La función de densidad condicional que obtuvo en el inciso c es la misma que la función de densidad marginal hallada en el inciso b?
f) ¿Qué implica su respuesta del inciso e?

a) $P(X<2, Y>1)$

$$\int_1^2 \int_y^2 e^{-x}\,dx\,dy = \int_y^2 e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_y^2 = -e^{-2} + e^{-y}$$

$$\int_1^2 -e^{-2} + e^{-y}\,dy = -e^{-2}y + \int_1^2 e^{-y}\,dy = \int_1^2 e^{-y}dy = -e^{-y}\Big|_1^2 = -e^{-2} + e^{-1}$$

$$= -e^{-2}(2-1) + (-e^{-2}+e^{-1}) = -e^{-2} + (-e^{-2}+e^{-1}) = -2e^{-2} + e^{-1} = \underbrace{e^{-1}}_{\approx 0.3679} - 2\underbrace{e^{-2}}_{\approx 0.1353} = 0.3679 - 0.2706 = 0.097$$

b) Marginales:

$$f_{X(x)} = \int_0^x e^{-x}\,dy = e^{-x}\int_0^x dy = e^{-x}x \qquad f_{X(x)} = xe^{-x}, \quad x \geq 0$$

$$f_{Y(y)} = \int_y^\infty e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_y^\infty = 0 + e^{-y} = e^{-y} \qquad f_{Y(y)} = -e^{-y}, \quad y \geq 0$$

c) Condicional de X dado $Y = y$

$$f_{X|Y}(x,y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{e^{-x}}{e^{-y}} = e^{-(x-y)} \qquad f_{X|Y}(x,y) = e^{-(x-y)}, \quad x \geq y$$

d) Condicional de Y dado $X = x$

$$f_{Y|X}(y,x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{e^{-x}}{xe^{-x}} = \frac{1}{x} \qquad f_{Y|X}(y,x) = \frac{1}{x}, \quad 0 \leq y \leq x$$

e) No, ya que: $f_{X|Y}(x|y) = e^{-(x-y)} \neq f_X(x) = xe^{-x}$ $\therefore$ no son independientes.

f) Nos dice que el tiempo total X no es independiente del tiempo de espera en la fila Y. Al conocer el tiempo de espera en la fila mejora la predicción del tiempo total en la tienda