UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA CICLO 2023–I

PRÁCTICA CALIFICADA 1
ANÁLISIS Y MODELAMIENTO NUMÉRICO I
CM4F1 A

---

1. Let A be an $m \times n$ matrix. The $(1,2)-$norm of A is given by:

$$\|A\|_{(1,2)} = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}.$$

Then:

$$\|A\|_{(1,2)} = \max\{\|a_1\|_2, \|a\|_2, \ldots, \|a_n\|_2\}.$$

where a_j $(j = 1, \ldots, n)$ are columns of A. **(4 puntos)**
Solución:
Considere $L = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \{\|a_j\|\}$
Para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ se sabe que:

$$Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n$$

entonces:

$$\|Ax\|_2 = \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j a_j\right\| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \|a_j\|_2 \leq L \sum_{j=1}^{n} |x_j| \Rightarrow \|Ax\|_2 \leq L\|x\|_1$$

Observe que para $x = 0$ se cumple la desigualdad y para cualquier x no nulo resulta:

$$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} \leq L \Rightarrow \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} \leq L \Rightarrow \|A\|_{(1,2)} \leq \max(\|a_1\|_2, \|a\|_2, \ldots, \|a_n\|_2)$$

Por otro lado, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ no nulo se cumple lo siguiente:

$$\|A\|_{(1,2)} \geq \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} \Rightarrow \|x\|_1 \|A\|_{(1,2)} \geq \|Ax\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

Sea el índice $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $L = \|a_k\|$ y se elige el vector $x = e_k$, entonces se obtiene:

$$\|e_k\|_1 \|A\|_{(1,2)} \geq \|Ae_k\|_2 \Rightarrow \|A\|_{(1,2)} \geq \|a_k\|_2 \Rightarrow \|A\|_{(1,2)} \geq \max(\|a_1\|_2, \|a\|_2, \ldots, \|a_n\|_2)$$

Por tanto, se puede concluir que:

$$\|A\|_{(1,2)} = \max\{\|a_1\|_2, \|a\|_2, \ldots, \|a_n\|_2\}.$$

2. Sea un computador $\mathbb{F}(\beta, t, L, U)$ donde $\beta = 2$, $t = 3$, $L = -1$ y $U = 3$. Se pide:

a) Determine los números de máquina positivos que contiene dicho computador e indique el valor decimal del máximo y mínimo. **(2 puntos)**

b) Determine el número total de elementos representables en el computador. **(0.5 punto)**

c) Determine el valor $51/9 + 5/7$ (Considere aproximación por redondeo al 4 decimal). **(1 punto)**

d) Calcule el valor exacto y el respectivo error relativo del item anterior. **(0.5 punto)**

,

Solución:
Los números máquina positivos en el computador se muestran en la siguiente tabla:

-1	0	1	2	3
$0.100 \times 2^{-1} = \frac{1}{4}$	0.100×2^{0}	0.100×2^{1}	0.100×2^{2}	0.100×2^{3}
0.101×2^{-1}	0.101×2^{0}	0.101×2^{1}	0.101×2^{2}	0.101×2^{3}
0.110×2^{-1}	0.110×2^{0}	0.110×2^{1}	0.110×2^{2}	0.110×2^{3}
0.111×2^{-1}	0.111×2^{0}	0.111×2^{1}	0.111×2^{2}	$0.111 \times 2^{3} = 7$

El número total de números máquinas (positivos y negativos) es:

$$2(\beta - 1)\beta^{t-1}(U - L + 1) = 2(2 - 1) \times 2^{3-1}(3 - (-1) + 1) = 40.$$

e incluyendo el cero resulta 41 elementos en total.
Para el cálculo de la suma se procede como sigue:

- Expresamos en base 2 cada uno de los sumandos:

  $$x = \frac{51}{9} = 5.66666... \approx 5.6667 \Rightarrow x = 101.101..._(2) = 0.101101..._(2) \times 2^3 \Rightarrow \text{fl}(x) = 0.110 \times 2^3.$$

  $$y = \frac{5}{7} = 0.714285... \approx 0.71429 \Rightarrow y = 0.1011..._(2) = 0.1011...(2) \times 2^0 \Rightarrow \text{fl}(y) = 0.110 \times 2^0$$

- Se procede a sumar los respectivos números flotantes:

  $$\text{fl}(x) + \text{fl}(y) = 0.110 \times 2^3 + 0.000110 \times 2^3 = 0.110110 \times 2^3.$$

- Se calcula la representación en punto flotante:

  $$\text{fl}(\text{fl}(x)) + \text{fl}(y)) = 0.111 \times 2^3 = 7.$$

El valor exacto es:

$$\frac{51}{9} + \frac{5}{7} = \frac{402}{63} = \frac{134}{21} \approx 6.38095$$

Luego, el error relativo es:

$$ER = \frac{6.3810 - 7}{6.3810} = -0.097006... \approx -0.0970.$$

El profesor[1]
Lima, 12 de Abril del 2023.

[1]Hecho en LaTeX