



EXAMEN FINAL DE ANÁLISIS Y MODELAMIENTO NUMÉRICO I

1.
 - a) Si en un sistema lineal de ecuaciones hay mas ecuaciones que incógnitas entonces no hay solución única.
 - b) Un sistema lineal de ecuaciones donde hay mas incógnitas que ecuaciones siempre tiene solución.
 - c) El método de Newton asegura una convergencia cuadrática a la solución de la ecuación $f(x) = 0$
 - d) El método de bisección asegura solución única si f es continua en $[a, b]$ y $f(a)f(b) < 0$.
 - e) Una matriz real 5×5 tiene por lo menos un valor propio real.
 - f) Si f es un polinomio de grado n y g es su polinomio de Taylor de orden n entonces $f = g$
 - g) El polinomio de interpolación de Hermite es único.
 - h) El polinomio de Newton y el polinomio de Lagrange son equivalentes.
 - i) Utilizar puntos equidistantes en $[a, b]$ para formar el polinomio de Newton genera oscilaciones alrededor de los puntos $x = a$ y $x = b$.
 - j) Una matriz real y simétrica es diagonalizable.

Solución:

Las claves son:

F F F F V V V V V V.

2.
 - a) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & i & 2 \\ -3 & 2+i & 1 \\ 1 & i & 6 \end{pmatrix}$$

muestre, sin calcular los valores propios de A , que $\rho(A) \leq 8$.

- b) Muestre que una iteración de punto fijo converge a la solución de $x^4 - 3x^2 - 3 = 0$ en $[1, 2]$.
 - c) Muestre que si $p(x)$ es un polinomio de grado $\leq n$ que interpola $f(x)$ en x_0, x_1, \dots, x_n entonces

$$f(x) - p(x) = \sum_{i=0}^n (f(x) - f(x_i)) L_i(x)$$

- d) Muestre que al interpolar $f(x) = \cosh(x)$ con un polinomio $p(x)$ de grado 22 con 23 puntos distintos en $[-1, 1]$ nos da un error relativo no mayor a 5×10^{-16} .

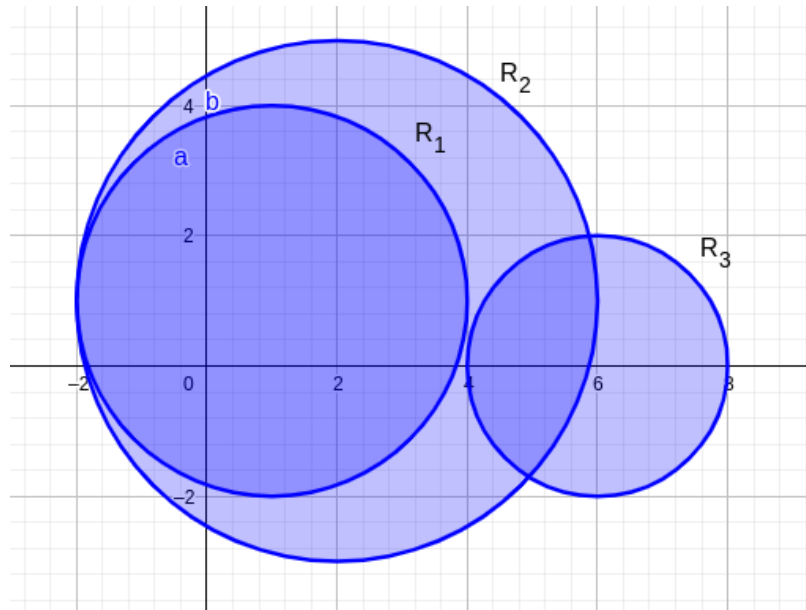
Solución:

- a) Discos de Gershgorin

$$R_1 = \{|z - (1+i)| \leq |i| + |2| = 3\}$$

$$R_2 = \{|z - (2+i)| \leq |-3| + |1| = 4\}$$

$$R_3 = \{|z - 6| \leq |1| + |i| = 2\}$$



Por el teorema de Gershgorin existe $\lambda \in R_3$, luego $|z| \leq |z - 6| + 6 \leq 8$.

b) Si $G(x) = (3 + 3x^2)^{1/4}$ y $x_0 = 1$ definimos la iteración

$$x_{i+1} = G(x_i) \quad , i \geq 0$$

como $G'(x) = \frac{3}{2} \frac{x}{(3 + 3x^2)^{3/4}}$ y $1 \leq x \leq 2$ entonces

$$6^3 \leq (3 + 3x^2)^3 \leq 15^3 \implies \frac{3}{2} \frac{x}{(3 + 3x^2)^{3/4}} \leq \frac{3}{(6)^{3/4}} < 1$$

por lo tanto G es contractiva en $[1, 2]$.

c) Sabemos que $\sum_{i=0}^n L_i(x) = 1$, luego

$$f(x) = f(x) \sum_{i=0}^n L_i(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x)$$

Como el interpolante de un polinomio es el mismo polinomio entonces

$$p(x) = \sum_{i=0}^n p(x_i) L_i(x)$$

como p interpola f entonces $p(x_i) = f(x_i)$ y

$$f(x) - p(x) = \sum_{i=0}^n (L_i(x) f(x) - p(x_i) L_i(x)) = \sum_{i=0}^n (f(x) - f(x_i)) L_i(x)$$

d)

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

Para $n = 22$. $f^{(n+1)}(x) = \sinh(x)$, y $f^{(n+1)}(c) \leq 2$,

$$(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \leq 2^{n+1}$$

y

$$\frac{1}{23!} = \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{5} \dots \frac{1}{22} \frac{1}{23} \leq \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}_{2 \text{ veces}} \underbrace{\frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{4}}_{4 \text{ veces}} \underbrace{\frac{1}{8} \frac{1}{8} \frac{1}{8} \frac{1}{8} \frac{1}{8} \frac{1}{8}}_{8 \text{ veces}} \underbrace{\frac{1}{16} \frac{1}{16} \frac{1}{16} \frac{1}{16}}_{8 \text{ veces}} = 2^{-64}$$

luego

$$f(x) - p(x) \leq 2^{24}2^{-64} = 2^{-42}$$

y como $1 \leq f(x) \leq 2$ con $x \in [-1.1]$ entonces

$$\frac{f(x) - p(x)}{f(x)} \leq 2^{24}2^{-64} = 2^{-42}$$

3. La población de cierta especie de microorganismos decae según el modelo

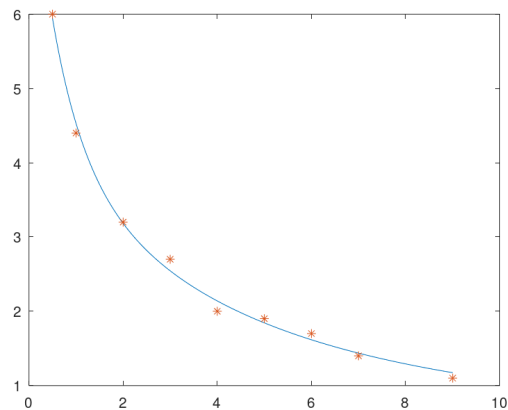
$$p(t) = Ae^{-1.5t} + Be^{-0.3t} + Ce^{-0.05t}$$

Estime A, B, C si

t	0.5	1	2	3	4	5	6	7	9
$p(t)$	6	4.4	3.2	2.7	2	1.9	1.7	1.4	1.1

Solución

```
t=[0.5,1,2,3,4,5,6,7,9]';
A = [ exp(-1.5*t), exp(-0.3*t), exp(-0.05*t)];
b = [6 4.4 3.2 2.7 2 1.9 1.7 1.4 1.1]';
x = A\A\b;
xx = 0.5:0.05:9;
yy = x(1) * exp(-1.5*xx) + x(2) * exp(-0.3*xx) + x(3) * exp(-0.05*xx);
plot(xx,yy,t,b,'*')
```



$$A = 4.1375 \quad B = 2.8959 \quad C = 1.5349$$

4. Use Householder methods to find the least-square solution to the following system of equations

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Whats is the least-square error?

Solución:

Iniciamos con:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \|a_1\| = \sqrt{14}$$

como $a_{11} > 0$ entonces:

$$v_1 = a_1 + \|a_1\|e_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{14} + 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

por tanto:

$$H_1 = I - 2 \frac{v_1 v_1^T}{v_1^T v_1} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2(\sqrt{14}+3)^2}{(\sqrt{14}+3)^2+5} & -\frac{2(\sqrt{14}+3)}{(\sqrt{14}+3)^2+5} & 0 & -\frac{4(\sqrt{14}+3)}{(\sqrt{14}+3)^2+5} \\ -\frac{2(\sqrt{14}+3)}{(\sqrt{14}+3)^2+5} & 1 - \frac{2}{(\sqrt{14}+3)^2+5} & 0 & -\frac{4}{(\sqrt{14}+3)^2+5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4(\sqrt{14}+3)}{(\sqrt{14}+3)^2+5} & -\frac{4}{(\sqrt{14}+3)^2+5} & 0 & 1 - \frac{8}{(\sqrt{14}+3)^2+5} \end{pmatrix}$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} -0.80 & -0.27 & 0.0 & -0.53 \\ -0.27 & 0.96 & 0.0 & -0.08 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ -0.53 & -0.08 & 0.0 & 0.84 \end{pmatrix}$$

luego:

$$A_1 = H_1 A = \begin{pmatrix} -3.74 & 0.53 \\ 0 & -0.77 \\ 0 & 3.0 \\ 0 & 1.46 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -0.772382012940121 \\ 3 \\ 1.455235974119758 \end{pmatrix} \Rightarrow a_2 = \begin{pmatrix} -0.772382012940121 \\ 3 \\ 1.455235974119758 \end{pmatrix} \Rightarrow \|a_2\| = 3.422613871631696$$

como $a_{22} < 0$ entonces:

$$v_2 = a_2 - \|a_2\|e_1 = \begin{pmatrix} -4.194995884571818 \\ 3 \\ 1.455235974119758 \end{pmatrix}$$

por tanto:

$$H_2 = I - 2 \frac{v_2 v_2^T}{v_2^T v_2} = \begin{pmatrix} -0.2256702163635817 & 0.8765230646861664 & 0.4251826319590029 \\ 0.8765230646861664 & 0.3731652505954965 & -0.3040641590539256 \\ 0.4251826319590029 & -0.3040641590539256 & 0.8525049657680851 \end{pmatrix}$$

luego:

$$A_3 = H_2 A_2 = \begin{pmatrix} 3.422613871631697 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

considerando:

$$H_2^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2256702163635817 & 0.8765230646861664 & 0.4251826319590029 \\ 0 & 0.8765230646861664 & 0.3731652505954965 & -0.3040641590539256 \\ 0 & 0.4251826319590029 & -0.3040641590539256 & 0.8525049657680851 \end{pmatrix},$$

$$H_1^* = \begin{pmatrix} -0.8017837257372731 & -0.2672612419124244 & 0.0 & -0.5345224838248488 \\ -0.2672612419124244 & 0.9603567451474546 & 0.0 & -0.07928650970509076 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ -0.5345224838248488 & -0.07928650970509076 & 0.0 & 0.8414269805898185 \end{pmatrix}$$

se calcula $Q = H_2^* H_1^*$, es decir:

$$Q = \begin{pmatrix} -0.8018837257372731 & -0.2672612419124244 & 0.0 & -0.5345224838248488 \\ -0.1669567742259364 & -0.2504351613389047 & 0.8765230646861664 & 0.3756527420083569 \\ -0.07173151329329089 & 0.8658830233464778 & 0.3731652505954965 & -0.3253442417333025 \\ -0.5693179100323309 & 0.3407348652793668 & -0.3040641590539256 & 0.6836094324088129 \end{pmatrix}$$

además $QA = R$, de donde se obtiene:

$$R = \begin{pmatrix} -3.741657386773941 & 0.5345224838248488 \\ 0.0 & 3.422613871631697 \\ 0.0 & 2 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

luego, desde que:

$$Qb = \begin{pmatrix} -2.939873661036668 \\ 0.4591311291213249 \\ 0.684001808199757 \\ 2.162980117752841 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

es decir:

$$c = \begin{pmatrix} -2.939873661036668 \\ 0.4591311291213249 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0.684001808199757 \\ 2.162980117752841 \end{pmatrix},$$

y así, la solución del problema de mínimos cuadrados viene dado por solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} -3.741657386773941 & 0.5345224838248488 \\ 0.0 & 3.422613871631697 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c = \begin{pmatrix} -2.939873661036668 \\ 0.4591311291213249 \end{pmatrix}$$

por sustitución regresiva:

$$x_2 = \frac{c_2}{R_{22}} = 0.1341463414634145,$$

$$x_1 = \frac{c_1 - R_{12}x_2}{R_{11}} = 0.804878048780488.$$

La suma de residuos al cuadrado se calcula a partir de:

$$SCE^2 = \|d\|^2 = 5.146341463414632 \Rightarrow SCE = 2.268554928454374.$$

5. Consider the fixed point iteration:

$$p_{k+1} = (3p_k + 1)^{1/3}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

a) Show that there is a fixed point in $p_0 \in [1, 2]$.

b) Show that above iteration converges for any $p_0 \in [1, 2]$.

Solución:

Del esquema iterativo se deduce que la función de iteración es:

$$g(x) = (3x + 1)^{1/3}.$$

la cual es una función continua y diferenciable en $[1, 2]$.

Desde que $1 \leq x \leq 2$ entonces:

$$4 \leq 3x + 1 \leq 7 \Rightarrow 1 < \sqrt[3]{4} \leq (3x + 1)^{1/3} \leq \sqrt[3]{7} < 2 \Rightarrow g(x) \in [1, 2] \Rightarrow g([1, 2]) \subset [1, 2].$$

además:

$$g'(x) = (3x + 1)^{-2/3} \Rightarrow \frac{1}{49} \leq \frac{1}{(3x + 1)^2} \leq \frac{1}{16} \Rightarrow \left| \frac{1}{(3x + 1)^{(2/3)}} \right| \leq \sqrt[3]{\frac{1}{16}} < 1$$

Por tanto, por el Teorema del Punto Fijo se tiene que existe un único punto fijo \hat{x} para la función g y además el esquema iterativo:

$$p_{k+1} = (3p_k + 1)^{1/3}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

converge al único punto fijo \hat{x} para todo punto inicial $p_0 \in [1, 2]$.

UNI, 22 de diciembre del 2021¹

¹Hecho en L^AT_EX