Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2021-2**

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

Segunda Práctica Calificada

1. **Justificando su respuesta, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:**

   (a) [1 *pto.*] Si x_n no es $O(z_n)$, entonces x_n no es $O(y_n)$ o y_n no es $O(z_n)$.

   (b) [1 *pto.*] Considerando la sucesión $x_0 = 2$, $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{5}{6}x_n - \frac{1}{6}x_{n-1}$, $\forall n \geq 1$. Si $\epsilon_0 = \epsilon_1 = \epsilon$ son las perturbaciones iniciales, entonces el algoritmo es inestable.

   (c) [1 *pto.*] Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} \delta & 1 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$, entonces para todo $\delta > 0$ y usando la norma infinito ($\|\cdot\|_\infty$) la matriz A está bien condicionado.

   Solución

   (a) (Verdadero) Supongamos que x_n es $O(y_n)$ y y_n es $O(z_n)$, entonces existe c_1, c_2 y $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que

   $$|x_n| \leq c_1|y_n| \;\text{ y }\; |y_n| \leq c_2|z_n|, \quad \forall n \geq n_1, n_2$$

   tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ y $c = c_1c_2$, obtenemos $|x_n| \leq c|z_n|$, $\forall n \geq n_0$.

   (b) (Falso) De las condiciones se tiene que el error es dado $\epsilon_n = \epsilon\left(-\frac{1}{3^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}}\right)$. Luego, para $n \to +\infty$ se tiene que $\epsilon_n \to 0$, lo cual implica la estabilidad del algoritmo.

   (c) (Falso) Tenemos que $k(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)^2$ y tomando $\delta \to 0^+$ se obtiene un mal condicionamiento.

2. **Al formarse una celda convectiva en la atmósfera, un rollo de aire que gira a medida que el aire caliente sube y el aire frío baja, el sentido de su giro X se puede representar por un valor comprendido entre 0 y 1, de modo que si $X > 0.5$ el giro se produce en sentido de las agujas del reloj y si $X < 0.5$ el giro se produce en sentido contrario a las agujas del reloj. Supongamos que si X_n representa el valor de giro durante la hora n, entonces el valor del giro X_{n+1} en la próximo hora $n+1$ está dado por la siguiente recurrencia:**

   $$X_{n+1} = 3.9X_n(1 - X_n).$$

   (a) [1 *pto.*] Determine el fenómeno atmosférico para $X_0 = 0.5$.

(b) **[1 *pto.*] Determine el fenómeno atmosférico para $X_0 = 0.501$.**

(c) **[1 *pto.*] Determine el fenómeno atmosférico para $X_0 = 0.51$.**

(d) **[1 *pto.*] Qué puede decir de las soluciones encontradas.**

Solución:

(a) **Evaluando en $X_0 = 0.5$ tenemos:**

n	X_n		n	X_n		n	X_n
0	0.5		7	0.1419727794		14	0.8799326468
1	0.975		8	0.4750843862		15	0.4120396173
2	0.0950625		9	0.9725789275		16	0.9448255872
3	0.3354999223		10	0.1040097133		17	0.2033077681
4	0.8694649253		11	0.363447602		18	0.6316975062
5	0.4426331091		12	0.9022784261		19	0.9073574907
6	0.9621652553		13	0.3438710647		20	0.3278335116

(b) **Evaluando en $X_0 = 0.501$ tenemos:**

n	X_n		n	X_n		n	X_n
0	0.501		7	0.14224535		14	0.8865910205
1	0.9749961		8	0.4758452807		15	0.3921347932
2	0.0950769494		9	0.9727245432		16	0.9296238789
3	0.3355455602		10	0.1034728745		17	0.2551509583
4	0.8695234752		11	0.361788331		18	0.7411908925
5	0.442464365		12	0.9005003847		19	0.7481251181
6	0.9620896378		13	0.3494378231		20	0.7348923105

(c) **Evaluando en $X_0 = 0.51$ tenemos:**

n	X_n		n	X_n		n	X_n
0	0.51		7	0.172617802		14	0.3671942873
1	0.97461		8	0.5570014961		15	0.9062143064
2	0.0965068568		9	0.9623282348		16	0.3314607553
3	0.3400538053		10	0.1413851528		17	0.8642186397
4	0.8752271377		11	0.4734420264		18	0.4576446517
5	0.4258979211		12	0.9722492287		19	0.9680034954
6	0.9535846394		13	0.1052245972		20	0.1207936402

(d) **La propagación de errores se debe al multiplicar los errores se amplifican por los factores involucrados en el producto.**

3. Se tiene tres lingotes compuestos del siguiente modo: El primero de 20 g de oro, 30 g de plata y 40 g de cobre, el segundo de 30 g de oro, 40 g de plata y 50 g de cobre y el tercero de 40 g de oro, 50 g de plata y 90 g de cobre. Se pide que peso habrá de tomarse de cada uno de los lingotes para formar un nuevo lingote de 34 g de oro, 46 g de plata y 67 g de cobre.

(a) [1 *pto.*] Indique las variables.

(b) [1 *pto.*] Modele el sistema.

(c) [1 *pto.*] Determine el número de condición.

(d) [1 *pto.*] Determine el vector error residual usando

$$\widetilde{x} = \begin{bmatrix} 45 \\ 48 \\ 54 \end{bmatrix}.$$

Solución:

(a) Las variables son:

$$\begin{aligned} x &: \text{ Peso del 1er lingote.} \\ y &: \text{ Peso del 2do lingote.} \\ z &: \text{ Peso del 3er lingote.} \end{aligned}$$

(b) Analizando la ley del oro:

$$\begin{aligned} \text{En el 1er lingote} &: \frac{20}{90} = \frac{2}{9}. \\ \text{En el 2do lingote} &: \frac{30}{120} = \frac{1}{4}. \\ \text{En el 3er lingote} &: \frac{40}{180} = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{2}{9}x + \frac{1}{4}y + \frac{2}{9}z = 34.$$

Analizando la ley de la plata:

$$\begin{aligned} \text{En el 1er lingote} &: \frac{30}{90} = \frac{1}{3}. \\ \text{En el 2do lingote} &: \frac{40}{120} = \frac{1}{3}. \\ \text{En el 3er lingote} &: \frac{50}{180} = \frac{5}{18}. \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{5}{18}z = 46.$$

Analizando la ley del cobre:

$$\begin{aligned}\text{En el 1er lingote} &: \frac{40}{90} = \frac{4}{9}.\\ \text{En el 2do lingote} &: \frac{50}{120} = \frac{5}{12}.\\ \text{En el 3er lingote} &: \frac{90}{180} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Luego

$$\frac{4}{9}x + \frac{5}{12}y + \frac{1}{2}z = 67.$$

(c) El número de condición es:

$$k_\infty = \left\| \begin{matrix} 0.2222222 & 0.2500000 & 0.2222222 \\ 0.3333333 & 0.3333333 & 0.2777778 \\ 0.4444444 & 0.4166667 & 0.5000000 \end{matrix} \right\|_\infty \left\| \begin{matrix} -33 & 21 & 3 \\ 28 & -8 & -8 \\ 6 & -12 & 6 \end{matrix} \right\|_\infty = 77.583333$$

(d) El vector de error residual es:

$$R = A\widetilde{x} - b \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ un matriz singular y su perturbación $\delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\|A^{-1}\|\|\delta A\| < 1$. Si $x \in \mathbb{R}^n$ es la solución de $Ax = b$ con $b \in \mathbb{R}^n$ $(b \neq 0)$ y su perturbación $\delta x \in \mathbb{R}^n$ satisface

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$$

para $\delta b \in \mathbb{R}^n$, pruebe que

(a) [1 *pto.*] $(A^{-1}\delta A)^n$ converge a cero (considere $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$).

(b) [1 *pto.*] $I - A^{-1}\delta A$ es invertible.

(c) [1 *pto.*] $\|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\|}$.

(d) [2 *pts.*] concluya que

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{K(A)}{1 - K(A)\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right).$$

Solución:

(a) Desde que $\|B\| < 1$, tenemos que $\|B\|^n \to 0$ y como $\|B^n\| \leq \|B\|^n$, se tiene que $B^n \to 0$ y de ello $(A^{-1}\delta)^n$ converge a cero.

(b) Sabemos que $(I - B)(I + B + \cdots + B^{n-1}) = I + B^n$, y si $\|B\| < 1$ se tiene que $(I - B)\sum_{k=1}^{\infty} B^k = I$, por lo tanto $I - B$ es invertible lo que implica que $I + A^{-1}\delta A$ sea invertible.

(c) De la condición anterior tenemos que

$$\|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\| = \|\sum_{k=1}^{\infty}(-A^{-1}\delta A)^k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\|A^{-1}\delta A\|^n = \frac{1}{1 - \|A^{-1}\delta A\|} \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\|}$$

(d) **Por otro lado, de la condición**

$$(\boldsymbol{A} + \delta \boldsymbol{A})(\boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} + \delta \boldsymbol{b}$$

tenemos

$$\delta \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}^{-1}\delta \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}(\delta \boldsymbol{b} - \delta \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}),$$

Tomando norma y usando la condición anterior obtenemos

$$\|\delta \boldsymbol{x}\| \leq \frac{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|}{1 - \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\delta \boldsymbol{A}\|}(\|\delta \boldsymbol{b}\| + \|\delta \boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x}\|).$$

finalmente como $\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{A}\| \geq \|\boldsymbol{b}\|$ **y dividiendo entre** $\|\boldsymbol{x}\|$ **la expresión anterior tenemos lo pedido.**

5. [4 ***pts.***] **Realizó la exposición en la práctica dirigida.**

06 de Octubre del 2021