Dados:

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

$b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

infinitas soluciones

$n > \text{rango}(A) = \text{rango}[A|b]$ ← existe solución

Deseamos resolver el sistema $Ax = b$ → x $\qquad \det A \neq 0$

$= n$ tendrá solución única

→ $x = A^{-1} b$

↳ procedimiento muy caro

↓ Triangular superior

Método de Reducción de Gauss - Jordan.

$[A|b]$

matriz aumentada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[E_1]{f_1 + 2f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 11 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[E_2]{f_2 - 5f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 11 & -6 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right)$$

$-1 - \left(\frac{-1}{2}\right) \times 2$

$f_2 - \left(\frac{-1}{2}\right) f_1$

$Ax = b$ $\qquad E_2E_1A \qquad E_2E_1b$

$E_2 E_1 A x = E_2 E_1 b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 + 2f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 - 5f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} = E_2$$

Algoritmo 1: Sustitución Regresiva

Entrada: Ingresar una matriz triangular superior $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

inicio

para $i \leftarrow n$ **a** 1 **hacer**

$$x_i \leftarrow \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j}{u_{ii}}$$

fin para

devolver *Solución del sistema lineal* $x = (x_1, \dots, x_n)$.

fin

$Ax = b \rightsquigarrow Ux = c$

upper

$$\begin{array}{c} j \rightarrow \end{array}$$

$$i \downarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 11 & -6 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right)$$

Sustitución regresiva $\quad x_n$

Final: $n=3$: $-4z = 4 \to z = \frac{4}{-4} = -1$

$n=2$: $5y + 11(-1) = -6 \to y = \frac{-6 - 11(-1)}{5} = 1$

$n=1$: $2x + 1(1) + 3(-1) = 0$

↳ $x = \frac{0 - 1(1) - 3(-1)}{2} = 1$

$$U_i \leftarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}}_{U} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

u_{ii}

Solución $(1, 1, -1)$.

Eliminación Gaussiana

$M = \left[\; A \;\middle|\; b \;\right]$ n filas, $m_{pi} \neq 0$

Entrada:	Número de ecuaciones.
	Matriz aumentada $M = (m_{ij})$ donde $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, n+1$
Salida:	Solución x_i $(i = 1, \ldots, n)$ o mensaje que el sistema no tiene solución.
Paso 1:	Para $i = 1, \ldots, n-1$ hacer los Pasos del 2 al 4.

~~Paso 2: Sea p el menor entero tal que $i \leq p \leq n$ y $m_{pi} \neq 0$.~~ → pivotes

~~Si no puede encontrarse p entonces **PARAR**.~~

~~No existe solución.~~

~~Paso 3: Si $p \neq i$ entonces calcule $F_{ip}M$.~~

Paso 4: Para $j = i+1, \ldots, n$ hacer los Pasos 5 y 6.

anulando los términos debajo de la diagonal

Paso 5: Calcule $f_{ji} = \dfrac{m_{ji}}{m_{ii}}$.

Paso 6: Calcule $F_{ji}(f_{ji})M$ — $F_{ji}(\lambda) = f_j - \lambda f_i$

m_{ii}: $m_{i,i}$, $m_{i+1,i}$, $m_{i+2,i}$, $\vdots$, $m_{n,i}$

Paso 7:	Si $m_{nn} = 0$ entonces **PARAR**.
	No existe solución.
Paso 8:	Calcule $x_n = \dfrac{m_{n,n+1}}{m_{nn}}$ → $\dfrac{b_n}{m_{nn}}$
Paso 9:	Para $i = n-1, \ldots, 1$ calcule:

$$x_i = \frac{m_{i,n+1} - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} m_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

$U = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

Paso 10:	Solución encontrada.
	$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
	PARAR

$Ax = b \;\to\; \underbrace{E_2E_1}A x = \underbrace{E_2E_1} b$

$Ux = L^{-1}b$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

$$E_2E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$L = (E_2E_1)^{-1}$ es triangular inferior → Lower

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}^{-1} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}}^{L}$$

$\overbrace{LU}^{A} x = b$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/5 & -1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Si U es triangular superior unitaria se llamará factorización Crout

Si L es triangular inferior unitaria " " " Doolittle

Algoritmo 1: Factorización LU por el método de Doolitle

Entrada: Ingresar una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Asignar valores no nulos para l_{ii} $(i = 1, \dots, n)$. Caso contrario asumir $l_{ii} = 1$.

```
inicio
    para i ← 1 a n hacer
        para j ← 1 a i − 1 hacer
            l_ij ← (a_ij − Σ_{k=1}^{j−1} l_ik u_kj) / u_jj ;
        fin para
        para j ← i a n hacer
            u_ij ← (a_ij − Σ_{k=1}^{i−1} l_ik u_kj) / l_ii ;
        fin para
    fin para
    devolver Matrices L y U.
fin
```

$A = LU$ $\qquad L_{ii} = 1$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & \ddots & \vdots \\ L_{31} & L_{32} & L_{n} & 0 \\ & & & L_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1n} \\ 0 & U_{22} & & \vdots \\ \vdots & U_{32} & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & U_{nn} \end{bmatrix}$$

$i = 1 \to$ $\boxed{U_{11} = a_{11}}$ $\quad \boxed{U_{12} = a_{12}}$

$U_{1j} = a_{1j} \qquad 1 \le j \le n$

$i > 1 \to$

$j = 1$ $\quad L_{21} U_{11} = a_{21} \to l_{21} = \dfrac{a_{21}}{U_{11}}$

$j = 2$ $\quad L_{21} U_{12} + \overset{L_{22}}{U_{22}} = a_{22}$

$\leftarrow L_{22} U_{22} = a_{22} - L_{21} U_{12}$

$$U_{22} = \frac{a_{22} - L_{21} U_{12}}{L_{22}}$$

$j = 3$ $\quad L_{21} U_{13} + U_{23} = a_{23}$

$U_{23} = a_{23} - L_{21} U_{13}$

$U_{ij} \quad a_{ij} \quad L_{i1} U_{1j}$

$$U_{11} = \frac{a_{21}}{L_{21}}$$

$U_{11}, U_{12} \quad U_{13} \cdots U_{1n}$

$U_{22} \quad U_{23} \cdots U_{2n}$

$U_{33} \cdots U_{3n}$

$i \qquad n$

L_{11}

$L_{21} \quad L_{22}$

$i \quad L_{31} \quad L_{32} \quad L_{33} \cdots$

$j \qquad L_{nn}$

$L_{31} U_{11} = a_{31} \to L_{31} = \dfrac{a_{31}}{U_{11}}$

$L_{31} U_{12} + L_{32} U_{22} = a_{32}$

$$L_{32} = \frac{a_{32} - L_{31} U_{12}}{U_{22}}$$

$L_{31} U_{13} + L_{32} U_{23} + L_{33} U_{33} = a_{33}$

$$U_{33} = a_{3} - \frac{(L_{31} U_{13} + L_{32} U_{23})}{L_{33}}$$

Factorizacion LDL^t

Doolittle, $\exists\ L_1 \ \hat{U}$ tq $\quad A = L_1 \hat{U}$

Crout, $\exists\ \hat{L} \ U_1$ tq $\quad A = \hat{L} U_1$

Matrices diagonalizables

14. Let A be an $n \times n$ nonsingular matrix and $A^{(k)}$ the matrix obtained in the $k-th$ step of Gaussian elimination for A with $A^{(0)} = A$. Let $A^{(k)} = (a_{r,s}^{(k)})$ and $a_k = \max_{r,s} |a_{r,s}^{k}|$. Suppose that partial pivoting is used in the elimination. Show that:

a) $a_k \leq 2^k a_0$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ for arbitrary A, and

b) $a_k \leq 2 - a_0$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ for tridiagonal matrices A.

$a_{i_1 1} = \max_{1 \leq k \leq n} a_{k1}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ \vdots & & \\ a_{i_1 1} & & \end{bmatrix}_{n \times n} \qquad A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{i_1 1}^{(1)} & a_{i_1 2} & \cdots & a_{i_1 n} \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ a_{11}\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \max_{r,s} |a_{rs}^{(1)}| \geq a_{i_2 2}^{(2)}$$

$$a_0 = \max |a_{rs}^{0}| \geq a_{i_1 1}^{(1)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5/2 & 11/2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5/2 & 11/2 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$3 - \frac{2}{5} \times \frac{11}{2} = 3 - \frac{11}{5}$$

$a_0 = \max |a_{ij}| = 4$ $\qquad a_1 = \max |a_{ij}^{(1)}| = \frac{11}{2}$

$a_2 = \max |a_{ij}^{(2)}| = 11/2$

$a_1 \leq 2a_0 \qquad \frac{11}{2} \leq 2 \times 4$

$a_2 \leq 2^2 a_0 \rightarrow \frac{11}{2} \leq 4 \times 4$