Pregunta 1

1. Los números de punto flotante $\mathbb{F}(\beta, t, L, U)$ no están equiespaciados en el intervalo $[0, 1]$.

2. El número $1/10$ tiene un representación binaria periódica.

3. Un problema mal condicionado $f(x)$ tiene un número de condición alto para cualquier valor de x.

4. Si la eliminación gaussiana se realiza sin intercambio de filas para una matriz A entonces $A = LL^T$.

5. Si el método de Richardson converge a la solución de $Ax = b$ entonces el radio espectral de la matriz de iteración $I - A$ es menor que 1.

6. Let A be an $n \times n$ matrix with entries a_{ij}. Then $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

7. Let $\|.\|$ be an matrix norm and I is the $n \times n$ identity, then $\|I\| = 1$.

8. No se puede aplicar el método del gradiente conjugado al sistema $Ax = b$ donde
$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

9. La descomposición SVD sólo de aplica a matrices de cualquier orden pero de entradas todas reales.

10. El número de condición de una matriz invertible A puede ser calculado como $K_2(A) = \dfrac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_n}}$ donde λ_1 y λ_n son los autovalores máximo y mínimo respectivamente de A.

Solución

1. F

2. V

3. F

4. F

5. F
6. V
7. F
8. F
9. F
10. V

Pregunta 2

1. El problema de calcular $f(x) = \text{arcsen}(x)$ esta mal condicionado cuando x es próximo 1.
2. El sistema
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & \alpha x_3 & = & -2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & \alpha x_3 & = & 0 \\ \alpha x_1 & - & x_2 & + & \alpha x_3 & = & 2 \end{array}$$
tiene infinitas soluciones para $\alpha = 0$
3. La matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 4 & 6\alpha & 8 \\ 6 & \alpha & 10 \end{pmatrix}$ admite descomposición LU cuando $\alpha \in \langle 2, 4 \rangle$.
4. Si A es no singular entonces AA^* es definida positiva.

Solución

1. $\kappa = \frac{xf'(x)}{f(x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}\text{arcsen}x}$ tiene a infinito cuando x se aproxima a 1, luego el problema esta mal condicionado.
2. La matriz aumentada
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha & -2 \\ -1 & 2 & -\alpha & 0 \\ \alpha & -1 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$$
es equivalente a
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha(1-\alpha) & 4\alpha \end{pmatrix}$$

por lo tanto si $\alpha = 0$ entonces $r(A) = r([A|b]) \neq 3$ y el sistema tiene infinitas soluciones.

3. En efecto el determinante de las matrices esquina de $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 4 & 6\alpha & 8 \\ 6 & \alpha & 10 \end{pmatrix}$ son

$$det(A_1) = 4, det(A_2) = 4(6\alpha - 1), det(A_3) = 8(18\alpha + 1),$$

   por lo que si $\alpha \in \langle 2, 4\rangle$ entonces estos determinantes son no nulos y la matriz A admite descomposición LU.

4. Sea $x \neq 0$, entonces $x^*AA^*x = \langle A^*x, A^*x\rangle = \|A^*x\|^2 \geq 0$ y si $x^*AA^*x = 0$ entonces $A^*x = 0$ y como A es no singular entonces $x = 0$.

Pregunta 3

Calcule el determinante de la matriz A utilizando una factorización $PA = LU$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución

Intercambiando $F_1 \leftrightarrow F_2$ y luego eliminado la primera columna tenemos $F_4 \leftarrow F_4 - 2F_1$,$F_5 \leftarrow F_5 - F_1$,$F_6 \leftarrow F_6 + F_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & -8 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

luego realizamos $F_2 \leftrightarrow F_3$, $F_3 \leftarrow F_3 - 2F_2$, $F_4 \leftarrow F_4 + F_2$, $F_5 \leftarrow F_5 + F_2$, $F_6 \leftarrow F_6 - F_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

luego realizamos $F_4 \leftarrow F_4 - (-1)F_3$, $F_5 \leftarrow F_5 - 3F_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & -17 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

llegamos a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{468}{187} & \frac{2703}{187} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2717}{748} \end{pmatrix} = U$$

luego sabemos que existe una matriz de permutación P, y L (diagonal unitaria) tal que $PA = LU$, por lo tanto $det(P)det(A) = det(L)det(U)$, pero $det(L) = 1$ y $det(P) = (-1)^m$, con m es el número de permutaciones de filas y $det(U) = (-1)(-11)(-3468/187)(2717/748)$, ademas $m = 2$, entonces

$$det(A) = (-1)(-11)(-3468/187) * (2717/748) = -741$$

Pregunta 4

Use Steepest Descent Method to solve:

$$g(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} g(x)$$

where $g(x) = \dfrac{1}{2}x^t Ax - x^t b$, $n = 3$, and:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Start with $x^0 = (0, 0, 0)^t$ and do three iterations.

Solución

Para $i = 0$:

- $r^0 = b - Ax^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $\alpha^0 = \dfrac{(r^0)^T r^0}{(r^0)^T A r^0} = \dfrac{1}{4}$.
- $x^1 = x^0 + \alpha^0 r^0 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4} \\ 0 \\ \dfrac{1}{4}[0.5cm] \end{pmatrix}$.

Para $i = 1$:

- $r^1 = b - Ax^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $\alpha^1 = \dfrac{(r^1)^T r^1}{(r^1)^T A r^1} = \dfrac{1}{4}$.
- $x^2 = x^1 + \alpha^1 r^1 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Para $i = 2$:

- $r^2 = b - Ax^2 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ 0 \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.
- $\alpha^2 = \dfrac{(r^2)^T r^2}{(r^2)^T A r^2} = \dfrac{1}{4}$.

- $x^3 = x^2 + \alpha^2 r^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$.

Pregunta 5

For the solution of the linear system $Ax = b$ with:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

consider the following iterative method: given $x^0 \in \mathbb{R}^2$, find:

$$x^{k+1} = B(\theta)x^k + g(\theta) \quad \text{for } k \geq 0$$

where θ is a real parameter and:

$$B(\theta) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2\theta^2 + 2\theta + 1 & -2\theta^2 + 2\theta + 1 \\ -2\theta^2 + 2\theta + 1 & 2\theta^2 + 2\theta + 1 \end{bmatrix}, \quad g(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \theta \\ \frac{1}{2} - \theta \end{bmatrix}$$

Address the following points:

1. Check that the method is consistent for all $\theta \in \mathbb{R}$.
2. Determine the values of θ for which the method is convergent.
3. Find the optimal value of θ, i.e., the value of θ for which $\rho(B(\theta))$ is minimum.

Solución

1. Es fácil ver que:

$$(I - B(\theta))A^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{3 - 2\theta^2 - 2\theta}{4} & \frac{2\theta^2 - 2\theta - 1}{4} \\ \frac{2\theta^2 - 2\theta - 1}{4} & \frac{3 - 2\theta^2 - 2\theta}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \theta \\ \frac{1}{2} - \theta \end{bmatrix} = g(\theta)$$

   Por tanto, el método es consistente para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

2. Analizamos los autovalores de la matriz asociada al método $B(\theta)$:

$$det(B(\theta) - \lambda I) = \left(\theta + \frac{1}{2} - \lambda\right)(\theta^2 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \theta + \frac{1}{2},\ \lambda_2 = \theta^2.$$

   Por tanto, el método es convergente si y sólo si $\rho(B(\theta)) < 1$, por tanto, se debe de cumplir:

$$\left|\theta + \frac{1}{2}\right| < 1 \quad \wedge \quad |\theta^2| < 1 \Rightarrow \theta \in \left\langle -1, \frac{1}{2} \right\rangle$$

3. Del item anterior se concluye que el radio espectral es mínimo cuando $\theta = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{2}$.