Representación de números en el computador

CM4F1

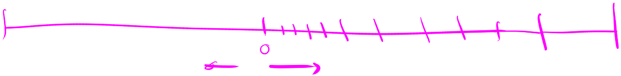
Ángel Enrique Ramírez Gutiérrez
`aramirezg@uni.edu.pe`

Escuela Profesional de Matemática
Universidad Nacional de Ingeniería

26 de abril de 2022

Contenido

Épsilon de la máquina



Los números en punto flotante no están uniformemente distribuidos sobre la recta real, sino que están más próximos cerca del origen y más separados a medida que nos alejamos de él.
Con mayor precisión, en un intervalo fijo $[\beta^e, \beta^{e+1}]$ los números de punto flotante presentes están igualmente espaciados con una separación igual a β^{e-t}.
Conforme e se incrementa, el espaciado entre los mismos crece también. Una medida de este espaciamento es dado por el llamado **epsilon de la máquina**

$$\boxed{\varepsilon_M = \beta^{1-t}} \tag{1}$$

el cual representa la distancia entre el número 1 y el número de punto flotante siguiente más próximo, es decir, es el número más pequeño en $\mathbb{F}(\beta, t, L, U)$ tal que $1 + \varepsilon_M > 1$, [1].

Contenido

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

$\mathbb{Z}$ complemento a 2

$\mathbb{R}$ punto fijo

Punto flotante

IEEE 754

Sea β un natural fijo tal que $\beta \geq 2$ y sea x un número real con un número finito de dígitos x_k con $0 \leq x_k < \beta$ para $k = -m, \ldots, n$. La notación:

$$x_\beta = (-1)^s (x_n x_{n-1} \ldots x_1 x_0 \,.\, x_{-1} x_{-2} \ldots x_{-m}), \quad x_n \neq 0$$

es llamada **representación posicional** de x con respecto a la base β.

Luego, cualquier número real puede ser aproximado por números que tienen una representación finita, es decir, fija una base β, se cumple:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \forall x_\beta \in \mathbb{R}, \exists y_\beta \in \mathbb{R} \text{ tal que } |y_\beta - x_\beta| < \varepsilon, \tag{2}$$

donde y_β tiene representación posicional finita, [1].

Representación de números reales II

En efecto, dado el número real $x_\beta = x_n x_{n-1} \dots x_0 . x_{-1} \dots x_{-m} \dots$ con un número de dígitos (que puede ser finito o infinito), para cualquier $r \geq 1$ se puede construir:

$$x_\beta^l = \sum_{k=0}^{r-1} x_{n-k} \beta^{n-k}, \quad x_\beta^u = x_\beta^l + \beta^{n-r+1}$$

que tienen r dígitos, tal que $x_\beta^l < x_\beta < x_\beta^u$ y $x_\beta^u - x_\beta^l = \beta^{n-r+1}$. Si elegimos r tal que $\boxed{\beta^{n-r+1} < \varepsilon}$, entonces tomando y_β igual a x_β^l o x_β^u se obtiene la desigualdad (2).

Esto justifica la representación de números reales en un computador.

Representación de números reales III

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

El hecho que sólo un subconjunto $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}$ es representado en un computador trae severos problemas prácticos, en principio, la representación de cualquier número real $r \in \mathbb{R}$ mediante un elemento de $\mathbb{F}$. Además, observe que si $x, y \in \mathbb{R}$, luego, si operamos con ellos, el resultado puede no ser un elemento de $\mathbb{F}$, esto motiva definir una **arimética** sobre $\mathbb{F}$.
El modo más simple de resolver el primer problema es **redondear** $x \in \mathbb{R}$ de modo que el número redondeado pertenezca a $\mathbb{F}$. Una forma de hacerlo es como sigue: Dado $x \in \mathbb{R}$ en la notación científica, reemplazamos el valor de x por el valor $fl(x) \in \mathbb{F}$ definido como sigue:

$$fl(x) = (-1)^s (0.a_1 a_2 \ldots a_{t-1} \tilde{a}_t) \cdot \beta^e, \quad \tilde{a}_t = \begin{cases} a_t, & \text{si} \quad a_{t+1} < \beta/2, \\ a_t + 1, & \text{si} \quad a_{t+1} \geq \beta/2 \end{cases} \tag{3}$$

Representación de números reales IV

Observe que $fl(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{F}$. Más aún, $fl(x) \leq fl(y)$ siempre que $x \leq y$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Si $x \in \mathbb{R}$ y $fl(x)$ su respectiva aproximación en punto flotante, entonces el error relativo es:

$$\delta(x) = \frac{fl(x) - x}{x}, \quad x \neq 0$$

luego:

$$fl(x) = x(1 + \delta(x))$$

¿ Es posible dar una cota para $\delta(x)$ que sea independiente de x ?

Representación de números reales V

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Dentro del sistema de punto flotante el número cuyo valor absoluto es el más pequeño, es:

$$+(0.\underbrace{1000000...0}_{t\ \text{dígitos}})_\beta \cdot \beta^L = \beta^{L-1}$$

para obtener el sucesor inmediato de β^{m-1}, debemos sumar:

$$+(0.\underbrace{0.00\ldots01)_\beta}_{t\ \text{dígitos}}\beta^L = \beta^{L-t}$$

de lo anterior se observa que la distancia entre dos números consecutivos en el intervalo $[\beta^{L-1}, \beta^L]$ resulta igual a β^{L-t}.

Representación de números reales VI

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Análogamente en el intervalo $[\beta^j, \beta^{j+1}]$ donde $L-1 \leq j \leq U-1$, la distancia entre dos números consecutivos **es siempre igual** a

$$\beta^{j+1-t}.$$

Luego, si la computadora representa a los números **por redondero** el error introducido es a lo más:

$$\frac{1}{2}\beta^{j+1-t},$$

y si representa **por truncamiento** el error introducido es a lo más:

$$\beta^{j+1-t},$$

obteniéndose de esta forma una medida para el error absoluto. Dado ~~que~~:

$$\beta^j \leq |x| \Rightarrow \frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{\beta^j}$$

al realizar el cociente entre β^j se obtiene que el error relativo resulta:

Representación de números reales VII

- Por redondeo: $|\delta(x)| \leq \dfrac{1}{2}\beta^{1-n}$.
- Por truncamiento: $|\delta(x)| \leq \beta^{1-n}$.

donde $\varepsilon_M = \beta^{1-n}$ es el epsilon de la máquina.

Representación de números reales VIII

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Sea $\oplus$ la suma en el sistema de punto flotante $\mathbb{F}(\beta, t, L, U)$ y así resulta $1 \oplus \varepsilon_M = 1 + \beta^{1-n} > 1$. Sin embargo, si $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_M$ se obtiene:

$$1 \oplus \varepsilon_1 = 1$$

Proposición:

Si $x \in \mathbb{R}$ es tal que $x_{min} \leq |x| \leq x_{max}$, entonces:

$$fl(x) = x(1 + \delta) \quad \text{tal que} \quad |\delta| \leq u$$

donde

$$u = \frac{1}{2}\beta^{1-t} = \frac{1}{2}\varepsilon_M$$

llamado **error de redondeo unitario**.

Representación de números reales IX

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

De la Proposición anterior tenemos la siguiente cota para el error relativo:

$$ER(x) = \frac{|x - fl(x)|}{|x|} \leq u$$

y para el error absoluto se tiene:

$$EA(x) = |x - fl(x)| \leq \beta^{e-t} |(a_1 \ldots a_t . a_{t+1} \ldots) - (a_1 \ldots \tilde{a}_t)|$$

de (3) resulta:

$$|(a_1 \ldots a_t . a_{t+1} \ldots) - (a_1 \ldots \tilde{a}_t)| \leq \beta^{-1} \frac{\beta}{2}$$

y así se obtiene:

$$EA(x) \leq \frac{1}{2} \beta^{e-t}.$$

Para más detalles revisar [1, 2].

Aritmética en punto flotante I

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Usaremos el símbolo $\Box$ para denotar una se las siguientes operaciones aritméticas: $+, -, \times, \div$. Si $x, y \in \mathbb{F}$, es decir, números en punto flotante con t dígitos en la mantisa, entonces, en general, $x \Box y \in \mathbb{F}$.

Por ejemplo, en $\mathbb{F}(10, 3, -5, 5)$ considere $x = 0.123 \times 10^4$ e $y = 0.456 \times 10^{-3}$, luego:

$$x + y = 1230 + 0.000456 = 1230.000456 \Rightarrow x + y = 0.1230000456 \times 10^4 \notin \mathbb{F}(10, 3, -5, 5)$$

Por tanto, en general, después de realizar una operación aritmética elemental $\Box$ será necesario redondear el resultado. Esto puede resumirse en dos pasos:

- Calcular $x \Box y$ con la mayor precisión posible.
- Redondear el resultado a t dígitos.

Este resultado es denotado por $\boxed{fl(x \Box y)}$.

Aritmética en punto flotante II

Para $x, y \in \mathbb{R}$, las operaciones de suma, resta, multiplicación y división en el sistema de punto flotante $\mathbb{F}$, se definen:

1. $x + y := fl(fl(x) + fl(y))$.
2. $x - y := fl(fl(x) - fl(y))$.
3. $x \times y := fl(fl(x) \times fl(y))$.
4. $x/y := fl(fl(x) \div fl(y))$, $fl(y) \neq 0$, $y \neq 0$.

Suma/Resta en punto flotante

Sean $x, y \in \mathbb{F}(\beta, t, L, U)$. Luego $x \pm y$ se calcula como sigue:

1. **Alinear mantisas.** Tomar el número con menor exponente y desplazar su mantisa a la derecha hasta igualar los exponentes.
2. Sumar/Restar mantisas.
3. Normalizar el resultado si fuera necesario.
4. Redondear la mantisa al número de dígitos apropiado.
5. Normalizar si fuera preciso.

Ejemplo:

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Considere $\mathbb{F}(10, 3, -5, 5)$ y sean $x = 0.433 \times 10^2 \in \mathbb{F}$ e $y = 0.745 \times 10^0$. Luego:

- Alineamos mantisas: $x = 0.433 \times 10^2$ e $y = 0.00745 \times 10^2$.
- Sumamos mantisas: $x + y = 0.44045 \times 10^2$
- No es necesario normalizar.
- Redondeamos a 3 dígitos: $x + y = 0.440 \times 10^2$.
- No es necesario normalizar.

Por tanto: $x + y = 0.440 \times 10^2$. $\in \mathbb{F}$

Ejemplo:

Cuando x e y son números reales se calcula $fl(x), fl(y)$ y se procede como el caso anterior. Por ejemplo, calcule en $\mathbb{F}(10, 3, -5, 5)$ la suma de $3\pi + 0.006589$. Veamos:

- $x = 3\pi = 3 \times (3.141592653...) = 9.424777959... = 0.9424777959 \times 10^1$ e $y = 0.00658 = 0.6589 \times 10^{-2}$.
- $fl(x) = 0.942 \times 10^1$ e $fl(y) = 0.659 \times 10^{-2}$.
- $fl(x) = 0.942 \times 10^1$ e $fl(y) = 0.000659 \times 10^1$.
- $fl(x) + fl(y) = 0.942659 \times 10^1$
- $fl(x) + fl(y) = 0.943 \times 10^1$
- $fl(fl(x) + fl(y)) = 0.943 \times 10^1$.

Así la suma $x + y$ en la máquina $\mathbb{F}(10, 3, -5, 5)$ resulta igual a $0.943 \times 10^1 = 9.43$.

Multiplicación/División en punto flotante

Sean $x, y \in \mathbb{F}(\beta, t, L, U)$. Luego $x \pm y$ se calcula como sigue:

1. Sumar/restar los exponentes.
2. Multiplicar/dividir mantisas.
3. Normalizar el resultado.
4. Redondear la mantisa al número de dígitos apropiado.
5. Normalizar si es preciso.
6. Determinar el signo del resultado.

Ejemplo:

Calcule en $\mathbb{F}(10, 3, -5, 5)$ el siguiente producto 0.003483×3.159. Veamos:

- $x = 0.3483 \times 10^{-2}$ e $y = 0.3159 \times 10^{1}$.
- $fl(x) = 0.348 \times 10^{-2}$ e $fl(y) = 0.316 \times 10^{1}$.
- $fl(x)fl(y) = 0.109968 \times 10^{-1}$
- $fl(fl(x)fl(y)) = 0.110 \times 10^{-1}$.

Así el producto xy en la máquina $\mathbb{F}(10, 3, -5, 5)$ resulta igual a $0.110 \times 10^{-1} = 0.0110$.
Si $*$ denota cualquier operación en $\mathbb{R}$, sea $\circledast$ la correspondiente operación en $\mathbb{F}(\beta, t, L, U)$. De la Proposición 5 resulta que existe δ tal que:

$$fl(x \circledast y) = (x * y)(1 + \delta), \quad \text{y} \quad |\delta| \leq u$$

Ejemplo:

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Si x, y, z son números en un computador con longitud de palabra de 32 bits y $\beta = 2$, estime la cota superior que puede ser obtenida para el error relativo al calcular $z(x+y)$.

Solución:

Primero se calcular $x+y$. Esta operación aritmética da como resultado $fl(x+y)$, el cual difiere de $x+y$ por el redondeo. Por el axioma dado, se tiene que existe δ_1 tal que:

$$fl(x+y) = (x+y)(1+\delta_1), \quad |\delta_1| \leq 2^{-24}.$$

Como z es un número máquina, cuando se multiplica por el número máquina $fl(x+y)$, el resultado es el número máquina $fl(zfl(x+y))$. Estos números se diferencian del valor exacto por un δ_2 tal que:

$$fl(zfl(x+y)) = zfl(x+y)(1+\delta_2) \quad \text{donde} \quad |\delta_2| \leq 2^{-24}.$$

Ejemplo(Cont.)

De las dos ecuaciones anteriores resulta:

$$\begin{aligned} fl(zfl(x+y)) &= z(x+y)(1+\delta_1)(1+\delta_2) \\ &= z(x+y)(1+\delta_1+\delta_2+\cancel{\delta_1\delta_2}) \\ &\approx z(x+y)(1+\delta_1+\delta_2) \\ &= z(x+y)(1+\delta) \end{aligned}$$

donde el término $\delta_1\delta_2$ es ignorado, dado que $|\delta_1\delta_2| \leq 2^{-48}$ y $\delta = \delta_1 + \delta_2$. Observe que:

$$|\delta| \leq |\delta_1| + |\delta_2| \leq 2^{-24} + 2^{-24} = 2^{-23},$$

entonces la cota superior que se espera para el error relativo es 2^{-23}.

$\mathbb{F}(10, 3, -5, 5)$

Sean $x = 1928.342$

$y = 0.92157$

$x + y = ¿?$

$x = 0.1928342 \times 10^{4}$

$y = 0.92157 \times 10^{0}$

$y = 0.000092157 \times 10^{4}$

$fl(x) = 0.193 \times 10^{4}$

$fl(y) = 0.000 \times 10^{4}$

$fl(x) + fl(y) = 0.193 \times 10^{4}$

$= 1930$

Redondeo

Precisión simple

$\rightarrow \mathbb{F}(10, 4, -5, 6)$

$x = 843214.123$

$y = 0.000089982$

$x = 0.843214123 \times 10^{6}$

$y = 0.89982 \times 10^{-4}$

$y = 0.0000000000089982 \times 10^{6}$

$fl(x) = 0.8432 \times 10^{6}$

$fl(y) = 0.0000 \times 10^{6}$

$fl(fl(x) + fl(y)) = 0.8432 \times 10^{6}$

$= 843200$

Representación IEEE 754

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

La precisión t de un sistema de números de punto flotante en una computadora estará limitada por la longitud de la palabra N disponible para representar un número. Con el fin de evitar una gran diversidad de sistemas de punto flotante incompatibles entre sí, a fines de la década de 1980 se desarrolló la norma o **stándard IEEE-754**, la cual es implementada en todas las computadoras actuales y aplicado también a otros sistemas. Esta norma define dos formatos básicos de punto flotante con base $\beta = 2$. La distribución de los N bits son en el siguiente orden:

Formato Precisión	Bits			
	Palabra (N)	Signo (s)	Exponente sesgado (E)	Mantisa (m)
Simple	32	1	8	23
Doble	64	1	11	52
Cuádruple	128	1	14	113

Hardware → Simple, Doble

Software → Cuádruple

Académico (PA) 16 1 5 10

Sesgo: $n = 5 \Rightarrow 2^{n-1} - 1 = 2^4 - 1 = 15$

Precisión simple - IEEE 754

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Considera el sistema de punto flotante $\mathbb{F}(2, 24, -126, 127)$ y una longitud de palabra igual a $N = 32$ bits. Dado $x \in \mathbb{R}$ en **notación científica normalizada** de la forma siguiente:

$$x = (-1)^s (d_1.d_2 \ldots d_{23} d_{24} d_{25} \ldots)_2 \times 2^e, \quad d_1 \neq 0$$

su respectiva notación en punto flotante es:

$$fl(x) = (-1)^s (d_1.d_2 \ldots d_{23} \tilde{d}_{24}) \times 2^e$$

Como en base 2 se cumple que $d_1 = 1$ siempre, entonces su representación en el computador es como sigue:

- Si tenemos n bits para el exponente, calculamos el sesgo como sigue $\boxed{2^{n-1} - 1}$. Para $n = 8$ el sesgo es $2^7 - 1 = 127$.
- Expresamos el exponente sesgado: $E = e + 127$ en base 2.
- Colocamos los dígitos $d_2, d_3, \ldots d_{24}$ en los bits asignados a la mantisa.
- El dígito d_1 es llamado **bit escondido**.

Ejemplo:

Representar -31.125 en precisión simple IEEE-754.

Solución:

- Número negativo: $s = 1$.
- Se tiene que $31 = 11111_2$ y $0.125 = 0.001_2$ entonces $31.125 = 11111.001_2$.
- Notación científica normalizada: $31.125 = 1.1111001_2 \times 2^4$.
- El exponentes es $e = 4$. Entonces el exponente sesgado es $E = e + 127 = 131 = 10000011_2$.
- La representación pedida es:

signo	exponente	mantisa
1	10000011	0000000000000001111001

$N = -31.42$

PA IEEE 754

$31 \,|\, 2$ … (1) $15 \,|\, 2$ … (1) $7 \,|\, 2$ … 1 $3 \,|\, 2$ … 1 1

$31 = 11111_2$

0.42

$2(0.42) = 0.84 \to d_1 = 0$

$2(0.84) = 1.68 \Rightarrow d_2 = 1$

$2(0.68) = 1.36 \Rightarrow d_3 = 1$

$2(0.36) = 0.72 \Rightarrow d_4 = 0$

$2(0.72) = 1.44 \Rightarrow d_5 = 1$

$2(0.44) = 0.88 \Rightarrow d_6 = 0$

$2(0.88) = 1.76 \Rightarrow d_7 = 1$

$2(0.76) = 1.52 \Rightarrow d_8 = 1$

$2(0.52) = 1.04 \Rightarrow d_9 = 1$

$2(0.04) = 0.08 \Rightarrow d_{10} = 0$

$2(0.08) = 0.16 \Rightarrow d_{11} = 0$

$2(0.16) = 0.32 \Rightarrow d_{12} = 0$

$N = -11111.011010111000\ldots_{(2)}$

bit escondido

$N = -1.1111011010111000\ldots_{(2)} \times 2^4$

$e = 4$ 1.1111011011 redondeo

$E = 4 + 15 = 19 \,|\, 2$ … (1) $9 \,|\, 2$ … (1) $4 \,|\, 2$ … (0) $2 \,|\, 2$ … (0) 1

$E = 10011_{(2)}$

signo E mantisa

1	10011	1111011011

PA

$N = 501.01$

$N = 111110101.000000101000\ldots_{(2)}$

bit escondido

$N = 1.11110101000000101000\ldots_{(2)} \times 2^8$

$e = 8$

$E = 8 + 15 = 23 \,|\, 2$ … (1) $11 \,|\, 2$ … (1) $5 \,|\, 2$ … (1) $2 \,|\, 2$ … 0 1

$E = 10111_{(2)}$

signo

0	10111	1111010100

Observación Precisión Simple IEEE-754

La representación usada para el exponente se conoce como **sesgada**, porque se calcula un nuevo exponente al sumar 127 al exponente original: $E = e + 127$. De esta forma, el exponente sesgado varía en el rango $1 \leq E \leq 254$ que pueden ser representados por un binario entero de 8 bits. Más aún, podemos incluir los valores del exponente para $L - 1 = -127(E = 0)$ y $U + 1 = 128(E = 255)$, ya que todos los enteros en el rango $0 \leq E \leq 255$ pueden ser representados como un binario entero sin signo de 8 bits. En efecto, con 8 bits tenemos $2^8 = 256$ combinaciones distintas, una para cada uno de los 256 números enteros del intervalo $[0, 255]$. El límite inferior, el " 0 ", corresponde a todos los bits igual a cero, mientras que el límite superior, el 255, corresponde a todos los dígitos igual a 1. Estos dos valores del exponente no representan números en punto flotante del sistema, pero serán usados para almacenar números especiales, como veremos a continuación.

Números especiales IEEE-754

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

- El **cero** es representado con ceros para el exponente y la mantisa.

0	00000000	0000000 00000000 00000000

- Los valores $+\infty$ y $-\infty$ son representados por:

0	11111111	0000000 00000000 00000000
1	11111111	0000000 00000000 00000000

- Si la secuencia de bits para el exponente está compuesta por todos los dígitos iguales a uno y la mantisa es no nula, es decir:

1	11111111	$xxxxxxx\ xxxxxxxx\ xxxxxxxx$

se tiene la ocurrencia de **NaN** (Not a Number) que representan expresiones inválidas como:

$$0 * \infty, \quad 0/0, \quad \infty/\infty, \quad \infty - \infty$$

Precisión doble - IEEE 754

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Considera el sistema de punto flotante $\mathbb{F}(2, 53, -1022, 1023)$ y una longitud de palabra igual a $N = 64$ bits. Dado $x \in \mathbb{R}$ en **notación científica normalizada** de la forma siguiente:

$$x = (-1)^s(d_1.d_2\dots d_{63}d_{64}d_{65}\dots)_2 \times 2^e, \quad d_1 \neq 0$$

su respectiva notación en punto flotante es:

$$fl(x) = (-1)^s(d_1.d_2\dots d_{63}\tilde{d}_{64}) \times 2^e$$

Como en base 2 se cumple que $d_1 = 1$ siempre, entonces su representación en el computador es como sigue:

- Si tenemos n bits para el exponente, calculamos el sesgo como sigue $2^{n-1} - 1$. Para $n = 11$ el sesgo es $2^{10} - 1 = 1023$.
- Expresamos el exponente sesgado: $E = e + 1023$ en base 2.
- Colocamos los dígitos $d_2, d_3, \dots d_{64}$ en los bits asignados a la mantisa.
- El dígito d_1 es llamado **bit escondido**.

Contenido

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Errores

Error Absoluto

Sea x^* una aproximación de x. El **Error Absoluto** se define por:

$$EA(x) = |x - x^*|$$

Error Relativo

Sea x^* una aproximación de $x \neq 0$. El **Error Relativo** se define por:

$$\boxed{E\cancel{A}R(x) = \frac{|x - x^*|}{|x|}}$$

Propagación de errores absolutos

Sea $\tilde{x}$ una aproximación para x e $\tilde{y}$ una aproximación para y. Luego, los errores absolutos son:

$$EA(x) = x - \tilde{x}, \quad EA(y) = y - \tilde{y}.$$

Por tanto resulta:

$$x + y = EA(x) + \tilde{x} + EA(y) + \tilde{y} \Rightarrow x + y = \tilde{x} + \tilde{y} + (EA(x) + EA(y))$$

así tenemos:

$$EA(x + y) = EA(x) + EA(y)$$

De forma análoga se obtiene:

$$EA(x - y) = EA(x) - EA(y)$$

Demuestre que:

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

$$EA(xy) = \tilde{x}EA(y) + \tilde{y}EA(x)$$

$$EA(x/y) = \frac{EA(x)}{\tilde{y}} - \frac{\tilde{x}EA(y)}{\tilde{y}^2}$$

Propagación de errores relativos

Para la suma y sustracción:

$$ER(x \pm y) = \frac{EA(x) \pm EA(y)}{\tilde{x} \pm \tilde{y}} = \frac{EA(x)}{\tilde{x} \pm \tilde{y}} \pm \frac{EA(y)}{\tilde{x} \pm \tilde{y}} = \frac{\tilde{x}}{\tilde{x} \pm \tilde{y}} ER(x) \pm \frac{\tilde{y}}{\tilde{x} \pm \tilde{y}} ER(y)$$

Propagación de errores relativos

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Observe que para la multiplicación:

$$xy = (\tilde{x} + EA(x))(\tilde{y} + EA(y)) = \tilde{x}\tilde{y} + \tilde{x}EA(x) + \tilde{y}EA(y) + \cancel{EA(x)EA(y)}$$

por tanto, si $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ son mayores que 1 (en valor absoluto), los términos $\tilde{x}EA(x)$ e $\tilde{y}EA(y)$ indican que hay una posibilidad de que los errores originales $EA(x)$ y $EA(y)$ sean magnificados. Sin embargo, si analizamos los errores relativos se tiene una percepción más clara, pues al reordenar los términos:

$$xy - \tilde{x}\tilde{y} = \tilde{x}EA(x) + \tilde{y}EA(y) + EA(x)EA(y)$$

si x e y son no nulos, entonces podemos divir entre xy, así resulta:

$$ER(xy) = \frac{EA(xy)}{xy} = \frac{\tilde{x}EA(y) + \tilde{y}EA(x) + EA(x)EA(y)}{xy} = ER(x) + ER(y)$$

siempre que $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ sean buenas aproximaciones de x e y (por tanto $\tilde{x}/x \approx 1$, $\tilde{y}/y \approx 1$ y $(EA(x)/x)(EA(y)/y) \approx 0$).

Ejemplo:

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Determine el valor absoluto cuando p es aproximado por p^*, donde:

1. $p = 0.3000 \times 10^1$ y $p^* = 0.3100 \times 10^1$.
2. $p = 0.3000 \times 10^{-3}$ y $p^* = 0.3100 \times 10^{-3}$.
3. $p = 0.3000 \times 10^4$ y $p^* = 0.3100 \times 10^4$.

Solución:

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

1. $EA(p) = 0.1$ y $ER(p) = 0.333\overline{3} \times 10^{-1}$.
2. $EA(p) = 0.1 \times 10^{-4}$ y $ER(p) = 0.333\overline{3} \times 10^{-1}$.
3. $EA(p) = 0.1 \times 10^{3}$ y $ER(p) = 0.333\overline{3} \times 10^{-1}$.

Ejemplo:

Suponga que usted recibe una calculadora super moderna como regalo de cumpleaños, capaz de almacenar 4 dígitos en la mantisa utilizando redondeo. Ansioso por usar la nueva calculadora, consideró $x = 17534$ e $y = 21178$.

1. Determine los errores relativos de x, y.
2. Después de calcular $x + y$ e xy, calcule el respectivo error relativo.

$e =$

e^2 $\quad \hat{e}^2$ $\in \mathbb{R}$

e^2

$\hat{e} \times \hat{e} =$

Solución:

Debido a que se usa 4 dígitos en la mantisa y redondeo, resulta:

$$x = 0.17534 \times 10^5 \Rightarrow x \approx 0.1753 \times 10^5 \Rightarrow \tilde{x} = 17530$$

$$y = 0.21178 \times 10^5 \Rightarrow y \approx 0.2118 \times 10^5 \Rightarrow \tilde{y} = 21180$$

1. Calculamos los errores absolutos:

$$EA(x) = x - \tilde{x} = 17534 - 17530 = 4, \quad EA(y) = 21178 - 21180 = -2.$$

   Los errores relativos son:

$$ER(x) = 4/17530 = 2.281 \times 10^{-4}, \quad ER(y) = -\frac{2}{21180} = 9.442 \times 10^{-5}.$$

2. Ejercicio.

Bibliografía

- A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri, *Numerical mathematics*, vol. 37. Springer Science & Business Media, 2010.
- G. Hämmerlin and K.-H. Hoffmann, *Numerical mathematics*. Springer Science & Business Media, 2012.

Otras referencias

- Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing, Third Edition David Kincaid: University of Texas at Austin, Austin, TX, Ward Cheney.
- Numerical Methods Using Matlab, 4th Edition John H. Mathews, California State University, Fullerton, Kurtis K. Fink, Northwest Missouri State University
- Numerical Lineal Algebra. Lloyd N. Trefethen and David Bau, III xii+361 pages. SIAM, 1997
- Elementary Numerical Analysis, 3rd Edition Kendall Atkinson, Weimin Han