Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2022-2**

[Código: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

Solucionario Práctica Calificada 02

---

1. **Dada la matriz**

$$A = \begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix}$$

   (a) **[2 *pts.*] Resuelva el sistema $Ax = b$ cuando $b = [4.1 \;\; 9.7]^T$ y $b = [4.11 \;\; 9.7]^T$.**

   (b) **[1 *pto.*] Justifique si este problema es estable.**

   (c) **[1 *pto.*] Implemente en Python $\kappa(A)$.**

   Solución:

   (a) **Las soluciones son $x = [1 \;\; 0]$ y $x = [0.34 \;\; 0.97]$.**

   (b) **Este problema no es estable porque el condicimiento de la matriz es muy grande $\kappa(A) = 1.623 \times 10^3$.**

   (c) **Se tiene la siguiente función de Python**

```
a = np.matrix([[4.1, 2.8],
[9.7, 6.6]])
print np.linalg.cond(a)
```

2. **Dado $Ax = b$, donde A es una matriz no singular.**

   (a) **[1 *pto.*] Si $A(x + h) = b + d$ entonces**

$$\frac{\|h\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\frac{\|d\|}{\|b\|}$$

   (b) **[1 *pto.*] Sea la matriz E tal que $\|A^{-1}E\| < 1$ entonces**

$$\|(A + E)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}E1\|}$$

$$\left(\text{Sug. Considere que existe } F \text{ tal que } (A + E)^{-1} = (I + F)A^{-1} \quad \wedge \quad \|F\| \leq \frac{\|A^{-1}E\|}{1 - \|A^{-1}E\|}\right)$$

   (c) **[2 *pts.*] Si $(A + E)(x + h) = b$ y $\|A^{-1}E\| < 1$ entonces**

$$\frac{\|h\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \|A^{-1}E\|}\frac{\|E\|}{\|A\|}$$

Solución:

(a) Se deduce de $\|b\| \leq \|A\|\|x\|$ y $\|h\| \leq \|A^{-1}\|\|d\|$ y la definición $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$.

(b) Se tiene de

$$\|I + F\| \leq 1 + \|F\| \leq 1 + \frac{\|A^{-1}E\|}{1 - \|A^{-1}E\|} = \frac{1}{1 - \|A^{-1}E\|}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|(A+E)^{-1}\| &\leq \|I + F\|\|A^{-1}\| \\ &\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}E\|}. \end{aligned}$$

(c) Se deduce que $h = -(A+E)^{-1}Ex$. Se concluye de

$$\begin{aligned} \|h\| &\leq \|(A+E)^{-1}\|\|E\|\|x\| \\ &\leq \frac{\|A^{-1}\|\|A\|}{1 - \|A^{-1}E\|}\frac{\|E\|\|x\|}{\|A\|} \end{aligned}$$

3. Nora y Luis pasearon dos semanas (14 noches) por cuatro ciudades del Perú Arequipa, Cusco, Ayacucho y Puno. Pagaron S/ 120, S/ 200, S/ 80 y S/ 100 por noche de hospedaje en cada ciudad respectivamente, y su gasto total por concepto de hotel fue S/ 2020. El número de noches que pasaron en Cusco fueron los mismos que el total de noches que pasaron en Arequipa y Puno; además estuvo tres veces mas noches en Cusco que en Ayacucho. Determine la solución según el siguiente requerimiento.

(a) [1 *pto.*] Modele el problema.

(b) [1 *pto.*] Indique el número de condición del problema.

(c) [1 *pto.*] Resuelve usando los programas elaborados del método de Gauss y Gauss-Jordan.

(d) [1 *pto.*] Indique que método da un mejor resultado.

Solución:

(a) [1 *pto.*] Sean:

$$\begin{aligned} x &: \text{Número de noches que se hospedo en Areqquipa,} \\ y &: \text{Número de noches que se hospedo en Cusco,} \\ z &: \text{Número de noches que se hospedo en Ayacucho,} \\ w &: \text{Número de noches que see hospedo en Puno.} \end{aligned}$$

El sistema es:

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 14 \\ 120x + 200y + \ 80z + 120w &= 2020 \\ -x + y - w &= 0 \\ y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

(b) [1 *pto.*] Sea

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -7.000000000000002 & 0.050000000000000 & -2.000000000000000 & -1.000000000000000 \\ 0.428571428571429 & 0.000000000000000 & 0.428571428571429 & 0.142857142857143 \\ 0.142857142857143 & 0.000000000000000 & 0.142857142857143 & -0.285714285714286 \\ 7.428571428571431 & -0.500000000000000 & 1.428571428571429 & 1.142857142857143 \end{bmatrix}$$

Donde $\|A\|_\infty = 500$ y $\|A^{-1}\|_\infty = 10.05$ con $Cond(A) = 5025$.

(c) [1 *pto.*] Usando el método de Gauss, tenemos:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -120 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -0.025 & 1 & 0 \\ 0.5 & -0.04375 & 1.25 & 1 \end{bmatrix} \wedge U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 80 & -40 & -20 \\ 0 & 0 & 2 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.875 \end{bmatrix} \wedge c = \begin{bmatrix} 14 \\ 340 \\ 5.5 \\ 2.625 \end{bmatrix}$$

con $[x\ y\ z\ w]^T = [3\ 6\ 2\ 3]^T$.

Usando el método de Gauss-Jordan, tenemos:

$$T = \begin{bmatrix} -7.000000000000002 & 0.050000000000000 & -2.000000000000000 & -1.000000000000000 \\ 0.428571428571429 & 0.000000000000000 & 0.428571428571429 & 0.142857142857143 \\ 0.142857142857143 & 0.000000000000000 & 0.142857142857143 & -0.285714285714286 \\ 7.428571428571431 & -0.500000000000000 & 1.428571428571429 & 1.142857142857143 \end{bmatrix}$$

Donde

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6.000000000000001 \\ 1.999999999999999 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(d) [1 *pto.*] Para el método de Gauss, tenemos $\|R\|_\infty = 0$, $\|b\|_\infty = 2020$ y

$$0 = \frac{\|R\|_\infty}{\|b\|_\infty} \frac{1}{Cond(A)} \leq \text{Error Relativo} \leq Cond(A) \frac{\|R\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 0.$$

Para el método de Gauss-Jordan, tenemos $\|R\|_\infty = 0.000000000000001$ y $\|b\|_\infty = 2020$ y

$$0 = \frac{\|R\|_\infty}{\|b\|_\infty} \frac{1}{Cond(A)} \leq \text{Error Relativo} \leq Cond(A) \frac{\|R\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 0.000000000000011.$$

El método de Gauss resulta el mejor para el problema.

4. [4 *pts.*] Determine las soluciones usando una base $\beta = 10$ y una aritmética $t = 4$ dígitos para:

$$\frac{1}{3}x^2 - \frac{123}{4}x + \frac{1}{6} = 0.$$

Solución: Las raíces exactas son:

$$x_1 = 92.24457963 \wedge x_2 = 5.420372688 \times 10^{-3}$$

Trabajando con $\beta = 10$ y una aritmética de $t = 4$ dígitos, tenemos:

$$0.3333x^2 - 0.3075 \times 10^2 x + 0.1667 = 0$$

La solución es:

$$x_{1,2} = \frac{0.3075 \times 10^2 \pm \sqrt{(0.3075 \times 10^2)^2 - 4(0.3333)0.1667}}{2 \times 0.3333}$$

Entonces

$$\begin{aligned} fl(x_1) &= fl\left(\frac{0.3075 \times 10^2 + 0.3075 \times 10^2}{2 \times 0.3333}\right) = 92.26 \\ fl(x_2) &= fl\left(\frac{0.3075 \times 10^2 - 0.3075 \times 10^2}{2 \times 0.3333}\right) = 0, \end{aligned}$$

lo que lleva a una respuesta incorrecta para la raíz x_2. La corrección es:

$$x_2 = \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}\right) = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Luego

$$fl(x_2) = fl\left(\frac{2(0.1667)}{61.5}\right) = 5.421 \times 10^{-3}$$

5. [4 *pts.*] Participó de la exposición en la segunda práctica dirigida.

19 de Octubre del 2022