Polinomio de Hermite

CM4F1

Ángel Enrique Ramírez Gutiérrez
aramirezg@uni.edu.pe

Escuela Profesional de Matemática
Universidad Nacional de Ingeniería

21 de julio de 2022

Contenido

Polinomio de Hermite

La interpolación de Hermite consiste en encontrar un polinomio que coincide con una función en algunos nodos y con la derivada de f en otros.

Ejemplo

Dados x_0 y x_1 distintos encuentre el polinomio de menor grado que satisface

$$p(x_i) = f(x_i), \quad p'(x_i) = f'(x_i), \quad i = 0, 1$$

como hay 4 condiciones, buscamos un polinomio de grado 3:

$$p(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + d(x - x_0)^2(x - x_1)$$

luego

$$p'(x) = b + 2c(x - x_0) + 2d(x - x_0)(x - x_1) + d(x - x_0)^2$$

nos conduce a las ecuaciones

$$f(x_0) = a$$
$$f'(x_0) = b$$
$$f(x_1) = a + bh + ch^2 a$$
$$f'(x_1) = b + 2ch + dh^2$$

con $h = x_1 - x_0$, lo cual determina de manera única los coeficientes del polinomio de interpolación

Ejemplo

Encuentre un polinomio p que tome los siguientes valores: $p(0) = 0$, $p(1) = 1$, $p'(1/2) = 2$.
Si consideramos polinomio cuadrático tendrá la forma

$$p(x) = a + bx + cx^2$$

y conduce a las ecuaciones

$$\begin{array}{llllll} 0 & = p(0) & = a & +0b & +0c \\ 1 & = p(1) & = a & +b & +c \\ 2 & = p'(1/2) & = 0a & +b & +c \end{array}$$

que son inconsistentes.
Si consideramos un polinomio cúbico tendrá la forma

$$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

y conduce a las ecuaciones

$$\begin{array}{lllllll} 0 & = p(0) & = a & +0b & +0c & +0d \\ 1 & = p(1) & = a & +b & +c & +d \\ 2 & = p'(1/2) & = 0a & +b & +c & +\frac{3}{2}d \end{array}$$

de donde $a = 0$, $d = -4$, $b + c = 5$.
Vemos que es preciso definir el tipo de interpolación que hay que exigir a los valores de x_i para asegurar la existencia y unicidad del polinomio interpolante.

Teorema

Dados los nodos distintos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *existe un único polinomio* p *que satisface las condiciones de interpolación de Hermite:*

$$p^{(j)}(x_i) = c_{ij}, \quad 0 \leq j \leq k_i - 1, \quad 0 \leq j \leq n$$

Demostración.

Sea $m+1$ el número total de condiciones sobre p

$$m + 1 = k_0 + k_1 + \ldots + k_n$$

y p un polinomio de grado m, si p es el polinomio interpolante de Hermite entonces necesitamos resolver un sistema de $m+1$ ecuaciones y $m+1$ incógnitas.
Probaremos que el sistema homogéneo admite solo la solución trivial. En efecto si

$$p^{(j)}(x_i) = 0, \quad 0 \leq j \leq k_i - 1, \quad 0 \leq j \leq n$$

□

entonces $p(x) = (x - x_i)q_1(x)$ y $p'(x) = (x - x_i)q_1'(x) + q_1(x)$,
$p'(x_i) = 0 = q_1(x_i) \implies q_1(x) = (x - x_i)q_2(x) \implies p(x) = (x - x_i)^2 q_2(x)$,

$$p(x) = (x - x_i)^{k_i} q(x)$$

luego

$$p(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^{k_i} q(x)$$

vemos que p tiene de grado mínimo $m + 1 = \sum_{i=0}^{n} k_i$, sin embargo hemos supuesto que p es a lo mas de grado m, por lo tanto $q = p = 0$.

Observe que la interpolación de Hermite cuando solo hay un nodo $\{x_0\}$ donde $p^{(j)}(x_0) = c_{0j} \quad 0 \leq j \leq k$ es equivalente a encontrar el polinomio de Taylor de orden k

$$p(x) = c_{00} + c_{01}(x - x_0) + \frac{c_{02}}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{c_{0k}}{k!}(x - x_0)^k$$

Veamos la relación entre el método de diferencias divididas de Newton con la interpolación de Hermite, consideramos como ejemplo el problema de interpolación con las siguientes condiciones

$$p(x_0) = c_{00}, \quad p'(x_0) = c_{01}, \quad p(x_1) = c_{10},$$

y presentamos la siguiente tabla de diferencias divididas donde se han puesto los valores conocidos c_{ij}, y x_0 aparece dos veces porque se han impuesto dos condiciones en x_0

$$\begin{array}{cc|cc} x_0 & c_{00} & c_{01} & \square \\ x_0 & c_{00} & \square & \\ x_1 & c_{10} & & \end{array}$$

el valor c_{01} esta colocado donde debería de estar $f[x_0, x_0]$, esto esta justificado por

$$\lim_{x \to x_0} f[x_0, x] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

así que definimos $f[x_0, x_0] = f'(x_0)$

completar la tabla nos lleva a

$$\begin{array}{cc|cc} x_0 & c_{00} & c_{01} & p[x_0,x_0,x_1] \\ x_0 & c_{00} & p[x_0,x_1] & \\ x_1 & c_{10} & & \end{array}$$

el polinomio de interpolación se escribe

$$p(x) = p(x_0) + p[x_0,x_0](x-x_0) + p[x_0,x_0,x_1](x-x_0)^2$$

En general como $f[x_0,x_1,\ldots,x_n] = \frac{1}{k!}f^{(k)}(c)$ donde $\min\{x_i\} < c < \max\{x_i\}$, en el limite

$$f[\underbrace{x_0,x_0,\ldots,x_0}_{\text{K veces}}] = \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)$$

Ejemplo

Encuentre el polinomio que interpola

$$p(1)=2, \quad p'(1)=3, \quad p(2)=6, \quad p'(2)=7, \quad p''(2)=8,$$

Escribimos la tabla inicial

$$
\begin{array}{cc|cccc}
1 & 2 & 3 & \square & \square & \square \\
1 & 2 & \square & \square & \square & \\
2 & 6 & 7 & 4 & & \\
2 & 6 & & & & \\
2 & 6 & & & &
\end{array}
$$

y tenemos el resultado de las operaciones

$$
\begin{array}{cc|cccc}
1 & 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \\
1 & 2 & 4 & 3 & 1 & \\
2 & 6 & 7 & 4 & & \\
2 & 6 & & & & \\
2 & 6 & & & &
\end{array}
$$

luego

$$p(x) = 2 + 3(x-1) + (x-1)^2 + 2(x-1)^2(x-2) - (x-1)^2(x-2)^2$$

Fórmula de Newton generalizada

Un algoritmo análogo al de Newton, nos proporcionará un método alternativo a la fórmula de Lagrange del polinomio de interpolación de Hermite. Para ello, previamente tenemos que extender el concepto de diferencias divididas al caso en el que los argumentos se repitan.

Para motivar la definición, iniciamos con las diferencias divididas de grado cero. Supongamos que la función f es derivable en un entorno del punto x_0. Las diferencias divididas de f en x_0, x_0, $f[x_0, x_0]$ se interpretan como el valor del siguiente límite:

$$f[x_0, x_0] = \lim_{x \to x_0} f[x_0, x] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Fórmula de Newton generalizada

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

En general, si f es derivable hasta el orden k en un entorno de x_0, se definen las diferencias divididas de grado k de f en x_0 (el argumento repetido $k+1$ veces) como:

$$f[\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{k+1 \text{ veces}}] = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Esta definición extiende el concepto de diferencias divididas al caso de argumentos repetidos, quedando la siguiente fórmula recursiva:

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \begin{cases} \dfrac{f[x_0, \ldots, x_{k-1}] - f[x_1, \ldots, x_k]}{x_0 - x_k}, & \text{si} \quad x_0 \neq x_k \\[2ex] \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, & \text{si} \quad x_0 = \ldots = x_k \end{cases}$$

Extensión diferencias divididas

Suponga que se tienen los puntos $x_0, x_0, x_0, x_1, x_1, x_2$; por tanto se tiene la tabla siguiente:

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
x_0	f_0		
		$f[x_0, x_0] = f_0'$	
x_0	f_0		$f[x_0, x_0, x_0] = \dfrac{f_0''}{2}$
		$f[x_0, x_0] = f_0'$	
			$f[x_0, x_0, x_1] = \dfrac{f[x_0, x_1] - f_0'}{x_1 - x_0}$
x_0	f_0		
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$	
			$f[x_0, x_1, x_1] = \dfrac{f_1' - f[x_0, x_1]}{x_1 - x_0}$
x_1	f_1		
		$f[x_1, x_1] = f_1'$	
			$f[x_1, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f_1'}{x_2 - x_1}$
x_1	f_1		
		$f[x_2, x_1] = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$	
x_2	f_2		

Ejemplo:

Determine el polinomio de grado 3 que pasa por los puntos $(0,0),(1,15),(2,5)$ y con tangente 1 en $x=0$.

Solución:

Sea $p(x)$ el polinomio buscado tal que:

$$p(0)=f(0)=10, p(1)=f(1)=15, p(2)=f(2)=5, p'(0)=f'(0)=1$$

se debe tener un polinomio de grado 3.

Solución (cont.)

Con los datos datos resulta la siguiente tabla:

$x_0 = 0$	$f(0) = 10$	$f[0,0] = f'(0) = 1$	$f[0,0,1] = 4$	$f[0,0,1,2] = -23/4$
$x_0 = 0$	$f(0) = 10$	$f[0,1] = 5$	$f[0,1,2] = -15/2$	
$x_1 = 1$	$f(1) = 15$	$f[1,2] = -10$		
$x_2 = 2$	$f(2) = 5$			

Por tanto, utilizando la fórmula de Newton generalizada resulta:

$$p(x) = f(0) + f[0,0]x + f[0,0,1]x^2 + f[0,0,1,2]x^2(x-1)$$

$$p(x) = 10 + x + 4x^2 - \frac{23}{4}x^2(x-1).$$

Teorema (Error en la interpolación de Hermite)

Sean $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *nodos distintos en [a,b] y sea* $f \in C^{2n+2}([a,b])$*. Si* p *es el polinomio de a lo mas grado* $2n+1$ *tal que*

$$p(x_i) = f(x_i) \quad p'(x_i) = f'(x_i) \quad 0 \leq i \leq n$$

entonces para cada x *en* $[a,b]$ *existe* $c \in [a,b]$ *tal que:*

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2$$

Si x es un nodo el resultado es inmediato. Supongamos que x es diferente de cualquier nodo. Si

$$w(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)^2 \quad g(t) = f(t) - p(t) - Kw(t)$$

donde K es tal que $g(x) = 0$.

Notamos que $x, x_0, \ldots x_n$ son ceros g por lo tanto aplicando el teorema de Rolle repetidamente:

$$g^{(2n+2)}(c) = 0 = f^{(2n+2)}(c) - p^{(2n+2)}(c) - Kw^{(2n+2)}(c)$$

como p es a lo más de grado $2n+1$ entonces $p^{(2n+2)}(t) = 0$, w es de grado $2n+2$ por lo tanto $w^{(2n+2)}(c) = (2n+2)!$, luego

$$0 = f^{(2n+2)}(c) - K(2n+2)! = f^{(2n+2)}(c) - \frac{f(x)-p(x)}{w(x)}(2n+2)!$$

□

Definición (Diferencias divididas con repeticiones)

f interpola 0 en $x_0, x_1, \ldots, x_n$ si $f^{(k-1)}(t) = 0$ para cada t que aparece k o mas veces en la lista $x_0, x_1, \ldots, x_n$

Por ejemplo si f interpola 0 en 1, 3, 8, 1, 13, 8 entonces

$$f(1) = f(3) = f(8) = f'(1) = f(13) = f'(8) = 0$$

Decimos que f interpola g en $x_0, x_1, \ldots, x_n$ si $f - g$ interpola 0 en $x_0, x_1, \ldots, x_n$.
Definimos la diferencia divida $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ como el coeficiente de x^n en el polinomio que interpola f en $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Teorema

Si f es suficientemente diferenciable entonces el polinomio

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_j] \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_j)$$

interpola f en $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Considere $\prod_{i=0}^{-1}(x - x_j) = 1$.

Por inducción sobre n. Para $n=0$, $f[x_0]$ es el polinomio que interpola a f en x_0.
Suponemos válido que

$$q(x) = \sum_{j=0}^{n-1} f[x_0, x_1, \ldots, x_j] \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_j)$$

interpola f en $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Sea p el polinomio que interpola a f en $x_0, x_1, \ldots, x_n$, entonces el coeficiente de x^n en p es $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ por lo tanto

$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$

$$p(x) - f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_j)$$

es un polinomio de a lo mas grado $n-1$ que interpola f en $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Por la unicidad de q,

$$p(x) - f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_j) = q(x)$$

$$p(x) = q(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_j) = \sum_{j=0}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_j] \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_j)$$

$\square$

Contenido

Polinomio de Neville

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Sean $x_0, \ldots, x_n$ nodos, $y_0, \ldots, y_n$ números reales con $y_i = f(x_i)$, denotemos por $P_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$ al polinomio interpolante asociado a los nodos $x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_k}$.

(x_1, x_2, x_4)
$= 2 \quad = 3 \quad = 6$

Ejemplo

Si $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 6$ *y* $f(x) = e^x$, *determine* $P_{1,2,4}(x)$ *y aproxime* $f(5)$
El polinomio de Lagrange que interpola f *en* x_1, x_2, x_4 *es*

$$P_{1,2,4}(x) = \frac{(x-3)(x-6)}{(2-3)(2-6)}e^2 + \frac{(x-2)(x-6)}{(3-2)(3-6)}e^3 + \frac{(x-2)(x-3)}{(6-2)(6-3)}e^6$$

si evaluamos en $x = 5$, *tenemos* $f(5) \approx p(5) = 218.105$.

$P_{0,3,4} \longrightarrow$ interpola (x_0, x_3, x_4)
$= 1 \quad = 4 \quad = 6$

$$P_{0,3,4}(x) = \frac{(x-4)(x-6)}{(1-4)(1-6)} e^1 + \frac{(x-1)(x-6)}{(4-1)(4-6)} e^4 + \frac{(x-1)(x-4)}{(6-1)(6-4)} e^6$$

El método de Neville para la evaluación del polinomio interpolante consiste en la siguiente evaluación recursiva.

Teorema

El k-ésimo polinomio de Lagrange que interpola f en $x_0, x_1, \ldots x_k$ es

$$P(x) = \frac{(x - x_j)P_{0,1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}(x) - (x - x_i)P_{0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}(x)}{(x_i - x_j)}$$

Prueba

Los polinomio $Q_i = P_{0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}$, $Q_j = P_{0,1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}$, son de grado menor o igual a $k-1$, $P(x)$ es de grado menor o igual a k.

$$P(x_i) = \frac{(x_i - x_j)Q_j(x_i) - (x_i - x_i)Q_i(x_i)}{(x_i - x_j)} = \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} f(x_i) = f(x_i)$$

de igual manera $P(x_j) = f(x_j)$.

Si $0 \leq r \leq k$ y $r \neq i$, $r \neq j$, $Q_j(x_r) = Q_i(x_r) = f(x_r)$, entonces

$$P(x_r) = \frac{(x_r - x_j)Q_j(x_r) - (x_r - x_i)Q_i(x_r)}{(x_i - x_j)} = \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} f(x_r) = f(x_r)$$

pero por definición $P_{0,1,\ldots,k}(x)$ es el único polinomio de grado $\leq k$ que interpola f en $x_0, x_1, \ldots x_k$, luego $P = P_{0,1,\ldots,k}$. $\square$

Por ejemplo podemos generar los polinomios

$$P_{0,1} = \frac{1}{x_1 - x_0}[(x - x_0)P_1 \cancel{+} (x - x_1)P_0], \quad P_{1,2} = \frac{1}{x_2 - x_1}[(x - x_1)P_2 \cancel{+} (x - x_2)P_1]$$

$$P_{0,1,2} = \frac{1}{x_2 - x_0}[(x - x_0)P_{1,2} \cancel{+} (x - x_2)P_{0,1}]$$

y localizarlos en una tabla

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & P_0 & & & & \\
x_1 & P_1 & P_{0,1} & & & \\
x_2 & P_2 & P_{1,2} & P_{0,1,2} & & \\
x_3 & P_3 & P_{2,3} & P_{1,2,3} & P_{0,1,2,3} & \\
x_4 & P_4 & P_{3,4} & P_{2,3,4} & P_{1,2,3,4} & P_{0,1,2,3,4}
\end{array}$$

Ejemplo

Si tenemos la siguiente información

x	1	1.3	1.6	1.9	2.2
$f(x)$	0.76	0.62	0.45	0.28	0.11

aproxime $f(1.5)$
Formamos la siguiente la siguiente tabla

1.0	0.7651977				
1.3	0.6200860	0.5233449			
1.6	0.4554022	0.5102968	0.5124715		
1.9	0.2818186	0.5132634	0.5112857	0.5118127	
2.2	0.1103623	0.5104270	0.5137361	0.5118302	0.5118200

Aquí tenemos diferentes aproximaciones de $f(1.5)$*, la celda sombreada en rojo nos da una aproximación lineal, la celda sombreada en azul nos da un aproximación cuadrática*

Ejemplo

Aplique el método de Neville pata encontrar el polinomio $P(x)$, tal que

$$P(-1) = 15 \quad P(4) = 5 \quad P(5) = 9$$

Formamos la siguiente la siguiente tabla

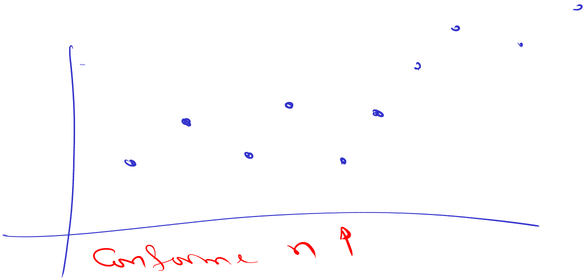
-1	15		
4	5	$-2x + 13$	
5	9	$4x - 11$	$x^2 - 5x + 9$

el polinomio buscado es $x^2 - 5x + 9$.

$$P_{0,1}(x) = \frac{1}{x_1 - x_0}\left[(x - x_0)P_1 - (x - x_1)P_0\right] = \frac{1}{5}\left[(x+1)(5) - (x-4)(15)\right] = -2x + 13$$

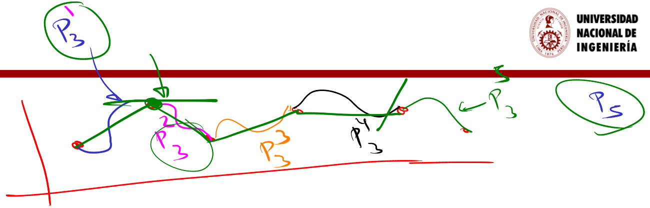
$$P_{1,2}(x) = \frac{1}{x_2 - x_1}\left[(x - x_1)P_2 - (x - x_2)P_1\right] = \frac{1}{1}\left[(x-4)(9) - (x-5)(5)\right] = 4x - 11$$

Contenido



Conforme $n \uparrow$ también el grado del polinomio interpolador de Lagrange.

Interpolación por splines



Muy frecuentemente se dispone de una gran cantidad de datos relativos a una función, conocida o no, que se desea aproximar. Las técnicas de interpolación polinómica dan lugar en general a interpolantes que presentan grandes oscilaciones. La interpolación spline desempeña un papel fundamental en el tratamiento de este tipo de problemas. En lo que sigue, nos centraremos principalmente en la interpolación spline cúbica, aunque trataremos primero brevemente la lineal y la cuadrática.

Interpolación por splines (cont.)

Como hemos indicado, los polinomios de grado elevado pueden presentar grandes oscilaciones. Ello hace que un polinomio pueda coincidir con una función en muchos puntos y que, aunque dos de ellos estén muy próximos, en puntos entre estos dos el valor del polinomio diste mucho del de la función. Incluso es posible que la distancia tienda a infinito cuando el grado del polinomio crece (el ejemplo de Runge es una buena ilustración).

Interpolación por splines (cont.)

Considérese una partición de puntos:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Decimos que una función $s(x)$ es una **función spline** de orden $m \geq 1$ si verifica las siguientes propiedades:

1. $s(x)$ es un polinomio de grado $\leq m$ en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ para $i = 0, 1, \ldots, n-1$.
2. $s^{(r)}(x) \in C[a, b]$ para todo $r = 0, 1, \ldots, m-1$, o lo que es lo mismo $s(x) \in C^{m-1}[a, b]$.

Además, se dice que es un **spline interpolador** de una función $f(x)$ en $[a, b]$ si y sólo si:

$$\boxed{s(x_i) = f(x_i), \quad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n.}$$

Splines cúbicos

Definición

Dada una función f definida sobre $[a, b]$ y un conjunto de nodos

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

un **interpolante de spline cúbico** S *para* f *es una función que satisface las siguientes condiciones:*

a) $S(x)$ *es un polinomio cúbico, denotado por* $S_j(x)$, *sobre el subintervalo* $[x_j, x_{j+1}]$ *para cada* $j = 0, 1, \ldots, n-1$;

b) $S_j(x_j) = f(x_j)$ *y* $S_{j+1} = f(x_{j+1})$ *para cada* $j = 0, 1, \ldots, n-1$;

c) $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ *para cada* $j = 0, 1, \ldots, n-2$;

d) $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ *para cada* $j = 0, 1, \ldots, n-2$;

e) $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ *para cada* $j = 0, 1, \ldots, n-2$;

Spline cúbico

f) En la definición anterior una de las siguientes **condiciones de frontera** es satisfecha:

f.1) $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ **Condición de frontera natural o libre**.

f.2) $S'(x_0) = f'(x_0)$ y $S'(x_n) = f'(x_n)$ **Condición de frontera sujetada**. (clamped)

f.3) $s'(a) = s'(b), s''(a) = s''(b)$ **Condición periódica**.

Los splines cúbicos pueden ser definidos con otros tipos de condiciones de frontera, sin embargo las mencionadas son las más usuales.

Observaciones

Cuando se aplica las condiciones de frontera natural, el spline es llamado **spline natural** y su gráfica aproxima la forma que un cable flexible asumiría si fuerzas son aplicadas en los puntos $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$.

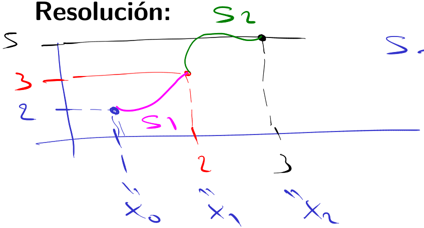
En general, las condiciones de frontera sujetas conducen a aproximaciones más exactas debido a que incluyen mayor información sobre la función. Sin embargo, para este tipo de condiciones de frontera es necesario conocer los valores de la derivada en los extremos o una aproximación a esos valores.

Ejemplo

Construya una spline cúbico natural que pasa a través de los puntos $(1, 2), (2, 3)$ *y* $(3, 5)$.

$$\left.\begin{array}{l} S_1(x) = a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3 \\ S_2(x) = a_2 + b_2 x + c_2 x^2 + d_2 x^3 \end{array}\right\}$$

Resolución:



Resolución (cont.):

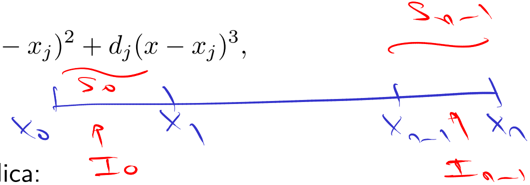
$$\left.\begin{array}{l} S_1(x) = a_1 + b_1(x-x_0) + c_1(x-x_0)^2 + d_1(x-x_0)^3 \\ S_2(x) = a_2 + b_2(x-x_1) + c_2(x-x_1)^2 + d_2(x-x_1)^3 \end{array}\right\}$$

Construcción de un spline cúbico

Un spline definido sobre un intervalo que es dividido en n subintervalos requerirán determinar $4n$ constantes. Para construir el spline cúbico interpolador para una función f, las condiciones en la definición son aplicadas a los polinomios cúbicos:

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3,$$

para cada $j = 0, 1, \ldots, n-1$.



Desde que $S_j(x_j) = a_j = f(x_j)$, la condición (c) implica:

$$a_{j+1} = S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1}) = a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3,$$

para cada $j = 0, 1, \ldots, n-2$.

Los términos $x_{j+1} - x_j$ son usados repetidamente en este desarrollo, es conveniente usar la siguiente notación:

$$\boxed{h_j = x_{j+1} - x_j}$$

para cada $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Si además se define $a_n = f(x_n)$, entonces se cumple la siguiente ecuación:

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 \tag{1}$$

para cada $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Construcción de un spline cúbico (cont.)

de forma análoga se define $b_n = S'(x_n)$ y a partir de:

$$S_j'(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2$$

resulta $S'(x_j) = b_j$ para cada $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Aplicando la condición (d) se obtiene:

$$b_{j+1} = b_j + 2c_jh_j + 3d_jh_j^2 \tag{2}$$

para cada $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Construcción de un spline cúbico (cont.)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Otra relación entre los coeficientes de S_j se obtiene definiendo $c_n = S''(x_n)/2$ y aplicamos la condición (e). Entonces, para cada $j = 0, 1, \ldots, n-1$ se tiene:

$$c_{j+1} = c_j + 3d_jh_j \rightarrow d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j} \tag{3}$$

Despejando d_j en (3) y reemplazando en (1) y (2) resulta para cada $j = 0, 1, \ldots, n-1$ se obtiene:

$$a_{j+1} = a_j + b_jh_j + \frac{h_j^2}{3}(2c_j + c_{j+1}) \tag{4}$$

y

$$b_{j+1} = b_j + h_j(c_j + c_{j+1}). \tag{5}$$

Construcción de un spline cúbico (cont.)

La relación final involucrando los coeficientes se obtiene resolviendo la ecuación apropiada en (4), primero para b_j:

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}) \tag{6}$$

y luego, reduciendo el índice, para b_{j-1}. Así resulta:

$$b_{j-1} = \frac{1}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) - \frac{h_{j-1}}{3}(2c_{j-1} + c_j).$$

Construcción de un spline cúbico (cont.)

Sustituyendo estos valores en (5), con el índice reducido en uno, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_j c_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) \tag{7}$$

para cada $j = 1, 2, \ldots, n-1$.

Este sistema tiene como variables a $\{c_j\}_{j=0}^{n}$. Los valores de $\{h_j\}_{j=0}^{n-1}$ y $\{a_j\}_{j=0}^{n}$ son dados por el espaciamiento de los nodos $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ y el valor de f en los nodos respectivamente.

Construcción de un spline cúbico (cont.)

Una vez calculados los valores de $\{c_j\}_{j=0}^{n}$, es más simple calcular las constantes $\{b_j\}_{j=0}^{n-1}$ a partir de (6) y los valores $\{d_j\}_{j=0}^{n-1}$ a partir de (3). Luego podemos construir los polinomios cúbicos $\{S_j(x)\}_{j=0}^{n-1}$.

La pregunta natural es si los valores $\{c_j\}_{j=0}^{n}$ pueden ser determinados usando el sistema (7) y si estos valores son únicos. Los siguientes teoremas indican que esto es posible cuando las condiciones de frontera dadas en (33) son impuestas.

Spline natural

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Teorema

Si f está definida en $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, entonces f tiene un único interpolador spline cúbico natural S en los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n$; es decir, un spline cúbico que satisface las condiciones de frontera naturales $S''(a) = 0$ y $S''(b) = 0$.

Demostración:

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Las condiciones de frontera en este caso implica que:

$$c_n = S''(x_n)/2 = 0 \quad \text{y} \quad 0 = S''(x_0) = 2c_0 + 6d_0(x_0 - x_0),$$

de donde resulta $c_0 = 0$. Por tanto se tiene $c_0 = 0$ y $c_n = 0$. Reemplazando en (7) se obtiene un sistema lineal $Ax = b$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & & \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$$

Demostración (cont.)

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \dfrac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \dfrac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \dfrac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad x = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

La matriz A es diagonal dominante y por tanto el sistema lineal $Ax = b$ tiene solución única $c_0, c_1, \ldots, c_n$.

Spline sujeto

Teorema

Si f *está definida en* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ *y diferenciable en* a *y* b*, entonces* f *tiene un único interpolador spline cúbico sujeto* S *en los nodos* $x_0, x_1, \ldots, x_n$*; es decir, un spline cúbico que satisface las condiciones de frontera sujetas a las condiciones* $S'(a) = f'(a)$ *y* $S'(b) = f'(b)$*.*

Demostración

Desde que $f'(a) = S'(a) = S'(x_0) = b_0$, en la ecuación (6) con $j = 0$ se tiene:

$$f'(a) = \frac{1}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1)$$

por tanto

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a)$$

Análogamente

$$f'(b) = b_n = b_{n-1} + h_{n-1}(c_{n-1} + c_n),$$

reemplazando en (6) con $j = n - 1$ se obtiene:

Demostración (cont.)

$$
\begin{aligned}
f'(b) &= \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{3}(2c_{n-1} + c_n) + h_{n-1}(c_{n-1} + c_n) \\
&= \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} + \frac{h_{n-1}}{3}(c_{n-1} + 2c_n)
\end{aligned}
$$

entonces:

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}.)$$

De (7) y las ecuaciones:

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a) \quad \text{y} \quad h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1})$$

Demostración (cont.)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

se obtiene el siguiente sistema lineal $Ax = b$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{pmatrix}$$

Observe nuevamente que A es una matriz diagonal dominante y así es inversible. Por tanto, el sistema $Ax = b$ tiene solución única para $c_0, c_1, \dots, c_n$, donde:

Demostración (cont.)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

$$b = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a) \\[2ex] \dfrac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \dfrac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\[2ex] \vdots \\[2ex] \dfrac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \dfrac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\[2ex] 3f'(b) - \dfrac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Teorema

Sea $f \in C^4[a,b]$ *tal que* $\max\limits_{a\leq x\leq b} |f^{(4)}(x)| = M$. *Si* S *es el único interpolador spline cúbico a* f *con respecto a los nodos* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, *entonces para todo* $x \in [a,b]$ *se cumple:*

$$|f(x) - S(x)| \leq \underbrace{\frac{5M}{384} \max_{0\leq j\leq n-1} (x_{j+1} - x_j)^4}_{\text{Cota para el error}}.$$

Referencias I

- J. L. DE LA FUENTE
  Técnicas de calculo para sistemas de ecuaciones, programación lineal y programación entera.
- G.H. Golub and C.F. Van Loan.
  Matrix Computations, 4th Edition
- Biswa Datta
  Numerical methods for linear control systems.
- Dennis, J. E. and Schnabel, Robert B.
  Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations
- Varga, Richard S.
  Geršgorin and His Circles.