Sistema de ecuaciones lineales

CM4F1

Ángel Enrique Ramírez Gutiérrez
aramirezg@uni.edu.pe

Escuela Profesional de Matemática
Universidad Nacional de Ingeniería

3 de mayo de 2022

$Ax = b$

A invertible

* $x = A^{-1}b$ ×

* Cramer ×

Contenido

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

$Ax = b$

- M. Directos
  - $x = A^{-1}b$ ✗
  - Cramer ✗
  - EG
    - Sin pivoteo ✓
    - pivoteo parcial
    - pivoteo total
  - Factorizaciones
    - LU
      - EG
      - Crout
      - Doolittle
      - Cholesky
    - QR
- M. Indirectos
  - M. Jacobi
  - M. Gauss-Seidel
  - M. Relajación

x_0

$\downarrow$

$x_1, x_2, \dots, x_k \dots$

$\|x_k - \hat{x}\| < tol$

Sistema de ecuaciones lineales

n incógnitas

Tiene la forma:

m ecuaciones

$$
\left\{
\begin{array}{lrcl}
E_1: & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
E_2: & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & \\
E_m: & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{m,n-1}x_{n-1} + a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
\right.
$$

donde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$.

Sistemas de ecuaciones lineales

El sistema lineal puede ser escrito en forma matricial como sigue:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ & & \ddots & & \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{m-1} \\ b_m \end{pmatrix}$$

Definiendo $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b = (b_i) \in \mathbb{R}^m$ resulta:

$$Ax = b \tag{1}$$

Definición

Dado el sistema lineal (1)*, definimos la matriz aumentada* M *asociada al sistema lineal de la forma siguiente:*

$$\boxed{M = (A\,|\,b)} \tag{2}$$

Teorema del rango

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

n : Número de variables

O también conocido como **Teorema de Frobenius**. Este Teorema garantiza la existencia y unicidad de solución de un sistema de ecuaciones lineales.

1. Si $rango(A) = rango(M)$ entonces el sistema tiene solución. Se subdividen en dos casos:
   1.1 Si $rango(A) = rango(M) < n$ entonces el sistema tiene infinitas soluciones.
   1.2 Si $rango(A) = rango(M) = n$ entonces el sistema tiene única solución.
2. Si $rango(A) \neq rango(M)$ entonces el sistema no tiene solución.

En esta primera parte nos centraremos en sistemas que tienen única solución, es decir: $\boxed{rango(A) = rango(M) = n.}$

Contenido

Métodos directos

Estamos interesados en resolver el sistema $Ax = b$, donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b \in \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Además el sistema tiene solución única, es decir: $det(A) \neq 0$.
Para determinar la solución exacta del sistema haremos uso de las operaciones elementales fila:

Definición

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, definimos como **operaciones elementales fila** *para la matriz A a cualquiera de las siguientes operaciones:*

1. *Intercambiar la fila i con la fila j, denotado por F_{ij}.*
2. *Asignar a la fila i la misma fila i pero multiplicada por un número no nulo λ. Esto es denotado por $F_i(\lambda)$.*
3. *Asignar a la fila i la misma fila i y sumándole λ veces la fila j donde $\lambda \neq 0$. Esto es denotado por $F_{ij}(\lambda)$.*

Métodos directos (cont.)

Observe que un sistema lineal es fácil de resolver cuando es de la forma:

$$\boxed{Ux = b} \tag{3}$$

donde U es una matriz triangular superior cuyos elementos $u_{ii} \neq 0\,(i = 1, \ldots, n)$. Para calcular la solución x se usa el Algoritmo 1 descrito a continuación.

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad u_{nn} x_n = b_n \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_n = \frac{b_n}{u_{nn}}}$$

Se conoce como método de sustitución regresiva.

$$u_{n-1,n-1} x_{n-1} + u_{n-1,n} x_n = b_{n-1} \Rightarrow x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - u_{n-1,n} x_n}{u_{n-1,n-1}}$$

$$\vdots$$

$$u_{i,i} x_i + u_{i,i+1} x_{i+1} + \cdots + u_{i,n} x_n = b_i \Rightarrow x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j}{u_{ii}}$$

$$\vdots$$

$$u_{11} x_1 + u_{12} x_2 + \cdots + u_{1n} x_n = b_1 \Rightarrow x_1 = \frac{b_1 - \sum_{j=2}^{n} u_{1j} x_j}{u_{11}}$$

Algoritmo 1: Sustitución Regresiva

Entrada: Ingresar una matriz triangular superior $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

inicio

  para $i \leftarrow n$ **a** 1 **hacer**

$$x_i \leftarrow \frac{b_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j}{u_{ii}}$$

  fin para

  devolver *Solución del sistema lineal* $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

fin

Es claro que de forma análoga se puede aplicar a un sistema $LX = b$ donde L es una matriz triangular inferior

Eliminación de Gauss

Dado el sistema lineal $\boxed{Ax = b,}$ el método consiste en aplicar operaciones elementales fila a la matriz aumentada M asociada al sistema lineal de forma tal que la matriz A sea transformada a una matriz triangular superior.

Ejemplo

Resuelva el sistema lineal siguiente mediante eliminación gaussiana.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Resolución:

Entrada: Número de ecuaciones.
Matriz aumentada $M = (m_{ij})$ donde $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, n+1$

Salida: Solución x_i $(i = 1, \ldots, n)$ o mensaje que el sistema no tiene solución.

Paso 1: Para $i = 1, \ldots, n-1$ hacer los Pasos del 2 al 4.

- Paso 2: Sea p el menor entero tal que $i \leq p \leq n$ y $m_{pi} \neq 0$.
  Si no puede encontrarse p entonces **PARAR**.
  No existe solución.
- Paso 3: Si $p \neq i$ entonces calcule $F_{ip}M$.
- Paso 4: Para $j = i+1, \ldots, n$ hacer los Pasos 5 y 6.
  - Paso 5: Calcule $\boxed{f_{ji} = \dfrac{m_{ji}}{m_{ii}}}$.
  - Paso 6: Calcule $F_{ji}(f_{ji})M$

Paso 7: Si $m_{nn} = 0$ entonces **PARAR**.
No existe solución.

Paso 8: Calcule $x_n = \dfrac{m_{n,n+1}}{m_{nn}}$

Paso 9: Para $i = n-1, \ldots, 1$ calcule:

$$x_i = \frac{m_{i,n+1} - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} m_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

Sustitución regresiva

Paso 10: Solución encontrada.
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
PARAR

Aplique el algoritmo de eliminación Gaussiana al sgte. sistema:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b}$$

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ es no singular $\qquad n=3$

$$M = (A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

1) Para $i = 1, 2$

$i=1$

Paso 2 $\begin{cases} p=1 & m_{11} = 0 \\ p=2 & m_{21} = 1 \neq 0 \\ p = 2 \neq 1 = i \end{cases}$

Paso 3 $\left\{ \text{Aplicar } \underbrace{F_{12} M}_{M_1} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \right.$

Paso 4 $\{ j = 2, 3$

$j=2$ $\begin{cases} \text{Paso 5} & f_{21} = \dfrac{m_{21}}{m_{11}} = \dfrac{0}{1} = 0 \\ \text{Paso 6} & F_{21}(0) M_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{cases}$

$j=3$ $\begin{cases} \text{Paso 5} & f_{31} = \dfrac{m_{31}}{m_{11}} = \dfrac{2}{1} = 2 \\ \text{Paso 6} & \underbrace{F_{31}(-f_{31}) F_{21}(0) M_1}_{M_2} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -5 & -8 \end{array}\right) \end{cases}$

$i=2$

Paso 2: $p = 2$

Paso 3: $p = 2 = i$ No se hace nada

Paso 4: $j = 3$

$j=3$ $\begin{cases} \text{Paso 5:} & f_{32} = \dfrac{m_{32}}{m_{22}} = -\dfrac{4}{1} = -4 \\ \text{Paso 6:} & \underbrace{F_{32}(4) M_2}_{M_3} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{cases}$

m_{11}, m_{22}, m_{33}

Paso 7: ¿$m_{33} = 0$?

No

Paso 8: (Sustitución regresiva)

$$x_3 = \frac{m_{34}}{m_{33}} = \frac{0}{-1} = 0$$

Paso 9:

$$x_2 = \frac{m_{24} - \sum_{j=3}^{3} m_{2j} x_j}{m_{22}} = \frac{2 - (1)(0)}{1} = 2$$

$$x_1 = \frac{m_{14} - \sum_{j=2}^{3} m_{1j} x_j}{m_{11}} = \frac{4 - 2(2) - 3(0)}{1} = 0$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Análisis del algoritmo:

Siguiendo [1], las operaciones aritméticas aparecen en los pasos 5 y 6.
En el Paso 5 se realizan $n - i$ divisiones.
En el Paso 6, para realizar la operación elemental $F_{ji}(f_{ji})$ se requiere que f_{ji} multiplique a cada elemento de E_i, lo que requiere de $(n - i)(n - i + 1)$ multiplicaciones. Posteriormente, restamos el valor resultante del correspondiente término de la fila E_j. Esto requiere de $(n - i)(n - i + 1)$ sustracciones. Para obtener el total, se suma los valores correspondientes para cada $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. Es decir:

1. Total de multiplicaciones/divisiones:

$$(n - i) + (n - i)(n - i + 1) = (n - i)(n - i + 2)$$

2. Total de sumas/restas:

$$(n - i)(n - i + 1)$$

Algoritmo de Eliminación Gaussiana IV

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

El total de operaciones para los pasos 5 y 6 se obtiene al sumar para todo i, resultando para el total de multiplicaciones/divisiones:

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(n-i+2) = \frac{2n^3+3n^2-5n}{6}$$

y el total de sumas/restas es:

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(n-i+1) = \frac{n^3-n}{3}.$$

Nos falta agregar las multiplicaciones/divisiones y sumas/restas que ocurren en los pasos 8 y 9(que corresponde a la sustitución regresiva). En el Paso 8 se realiza una división. En el Paso 9 se realiza $(n-i)$ multiplicaciones y $(n-i-1)$ sumas para término de la sumatoria, además de una sustracción y una división. Por tanto, el número total de operaciones que se realizan en los pasos 8 y 9 son:

Algoritmo de Eliminación Gaussiana V

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

1. Multiplicaciones/divisiones:

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1}((n-i)+1) = \frac{n^2+n}{2}.$$

2. Sumas/restas:

$$\sum_{i=1}^{n-1}((n-i-1)+1) = \frac{n^2-n}{2}.$$

Ahora sumamos el número de multiplicaciones/divisiones y sumas/restas obtenidos para los pasos 5, 6, 8 y 9, resultando para las multiplicaciones/divisiones:

$$\frac{2n^3+3n^2-5n}{6} + \frac{n^2+n}{2} = \frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3},$$

y para las sumas/restas se obtiene:

$$\frac{n^3-n}{3}+\frac{n^2-n}{2}=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{5n}{6}.$$

observando así que para n grande se tiene que el número total de multiplicaciones/divisiones y sumas/restas es aproximadamente $\frac{n^3}{3}$.

Algoritmo de Eliminación Gaussiana VII

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Así, la cantidad de cálculo y tiempo requerido crece según el valor de n proporcional a n^3 según se muestra en la siguiente Tabla.

n	multiplicaciones/divisiones	sumas/restas
3	17	11
10	430	375
50	44 150	42 875
100	343 300	338 250

flops

Para $n = 25$, realizando 10^6 operaciones por segundo se tardaría:

- Por Gauss: $\frac{4\times 25^3+9\times 25^2-7\times 25}{6} = 11325$ operaciones. Por tanto: $\frac{11325}{10^6} = 0.011325$ segundos.
- Por Cramer: 1.00822×10^{28} operaciones. Luego sería en años: $\frac{1.00822\times 10^{22}}{36\times 24\times 60\times 60} = 3.197 \times 10^{14}$ años.

Algunos costes del método de Cramer

n	Coste del Método de Cramer	Tiempo (10^6 oper/s)
5	≈ 3600	3,6 milisegundos
10	$\approx 4 \times 10^8$	6 minutos 39 segundos
20	$\approx 1{,}02 \times 10^{21}$	32,4 millones de años

Ejemplo

¿Es posible usar el método de eliminación Gaussiana para el siguiente sistema lineal?

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 8 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \\ 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Resolución

Ejemplo

Considere el sistema lineal siguiente:

$$\begin{aligned} 10^{-4}x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}$$

cuya solución exacta es $x = 2.00020002\ldots$ *e* $y = 0.99979997\ldots$. *Halle la solución del sistema en un computador donde la aritmética en punto flotante usa 3 dígitos en la mantisa y redondeo.*

Resolución:
La matriz aumentada del sistema viene dado por:

$$M = \left(\begin{array}{cc|c} 0.100 \times 10^{-3} & 0.100 \times 10^{1} & 0.100 \times 10^{1} \\ 0.100 \times 10^{1} & 0.100 \times 10^{1} & 0.300 \times 10^{1} \end{array} \right)$$

Realizamos la operación elemental:

$$F_2 \leftarrow F_2 - \left(\frac{1}{0.1 \times 10^{-3}} \right) F_1$$

es decir:

$$
\begin{aligned}
m_{21} &= 0.1\times 10^1 + \left(-\frac{0.1\times 10^{-3}}{0.1\times 10^{-3}}\right) && = 0.1\times 10^1 - 1 = 0 \\
m_{22} &= 0.1\times 10^1 + \left(-\frac{0.1\times 10^{1}}{0.1\times 10^{-3}}\right) && = 0.1\times 10^1 - 10^4 \\
&= 0.1\times 10^1 - 0.1\times 10^5 && \textbf{(expresando en punto flotante)} \\
&= 0.00001\times 10^5 - 0.1\times 10^5 && \textbf{(igualando exponentes)} \\
&= (0.00001 - 0.1)\times 10^5 && \textbf{(restando mantisas)} \\
&= = -0.09999\times 10^5 = -0.9999\times 10^4 && \textbf{(expresando en punto flotante)} \\
&= -1.000\times 10^4 && \textbf{(redondeo al tercer dígito)} \\
m_{23} &= 0.3\times 10^1 + \left(-\frac{0.1\times 10^{1}}{0.1\times 10^{-3}}\right) && = 0.3\times 10^1 - 10^4 \\
&= 0.3\times 10^1 - 0.1\times 10^5 && \textbf{(expresando en punto flotante)} \\
&= 0.00003\times 10^5 - 0.1\times 10^5 && \textbf{(igualando exponentes)} \\
&= (0.00003 - 0.1)\times 10^5 && \textbf{(restando mantisas)}
\end{aligned}
$$

Por lo que la matriz aumentada M queda de la forma siguiente:

$$M = \left(\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 1 \\ 0 & -10^4 & -10^4 \end{array}\right)$$

Por tanto, el sistema resultante es:

$$\begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 0 & -10^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10^4 \end{pmatrix}$$

aplicamos ahora el Algoritmo 1 al sistema anterior, resulta:

$$i = 2: \quad x_2 = \frac{b_2}{u_{22}} = \frac{-10^4}{-10^4} = 1$$

$$i = 1: \quad x_1 = \frac{b_1 - \sum_{j=2}^{2} u_{2j} x_j}{u_{11}} = \frac{1-1}{10^{-4}} = 0$$

obteniendo la solución $\boxed{x = (0, 1).}$

Este método se describe como sigue: Use la $i-$ésima ecuación para eliminar no eliminar únicamente x_i de las ecuaciones $E_{i+1}, E_{i+2}, \ldots, E_n$ como fue realizado en la eliminación gaussiana, sino también de las ecuaciones $E_1, E_2, \ldots, E_{i-1}$. De esta forma resulta una matriz de la forma siguiente:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} m_{11}^{(1)} & 0 & \ldots & 0 & m_{1,n+1} \\ 0 & m_{22}^{(2)} & \ddots & \vdots & m_{2,n+1}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & m_{nn}^{(n)} & m_{n,n+1}^{(n)} \end{array}\right)$$

así la solución del sistema se obtiene como:

$$x_i = \frac{m_{i,n+1}^{(i)}}{a_{ii}^{(i)}}.$$

Pivoteo parcial

Los inconvenientes observados en el Ejemplo 2 y Ejemplo 3 pueden ser superados si consideramos la siguiente variación al método de eliminación gaussiana.
Dada la matriz aumentada M del sistema lineal $Ax = b$, definimos la matriz $M^{(1)} = M$ y los elementos de $M^{(1)}$ son denotados por $m_{ij}^{(1)}$. Ahora se localiza la fila i_1 tal que en $m_{i_1 1}^{(1)}$ se obtiene $\max_{1\leq i\leq n} |m_{i1}|$. Realizamos operaciones elementales para obtener una matriz de la forma:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} m_{i_1 1}^{(1)} & m_{i_1 2}^{(1)} & \dots & m_{i_1 n}^{(1)} \\ \hline 0_{n-1,1} & & M^{(2)} & \end{array}\right)$$

donde $0_{n-1,1} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times 1}$ y $M^{(2)} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$.

Pivoteo parcial (cont.)

Repetimos el proceso, es decir, se localiza la fila i_2 tal que en $m_{i_2 1}^{(2)}$ se obtiene $\max_{1\leq i\leq n-1} |m_{i1}^{(2)}|$.
Realizamos operaciones elementales para obtener una matriz de la forma:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} m_{i_1 1}^{(1)} & m_{i_1 2}^{(1)} & \dots & m_{i_1 n}^{(1)} \\ 0 & m_{i_2 2}^{(2)} & \dots & m_{i_2 n}^{(2)} \\ \hline 0_{n-2,1} & 0_{n-2,1} & \multicolumn{2}{c}{M^{(3)}} \end{array}\right)$$

donde $0_{n-2,1} \in \mathbb{R}^{(n-2)\times 1}$ y $M^{(3)} \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$.
Se repite este proceso hasta que se obtiene una matriz triangular superior y se procede a resolver usando sustitución regresiva.

Se explica este método usando el Ejemplo 2 cuya matriz aumentada es:

$$M = (A \,|\, b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -1 & 3 & -1 & -9 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 1 & 11 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & 5 \\ -1 & 8 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 2 & 7 \end{array}\right)$$

El máximo en valor absoluto de la primera columna de M es $m_{51} = 3$. Por tanto, realizamos la operación elemental F_{15}:

Pivot

$$M = \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 1 & -3 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 1 & 11 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & 5 \\ -1 & 8 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 & -9 \end{array}\right)$$

Ejemplo 1 (cont.)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Con las operaciones elementales: $F_{21}(-2/3), F_{31}(-1/3), F_{41}(1/3), F_{51}(-2/3)$ resulta:

Pivot

$$M = \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 1 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{7}{3} & -2 & -\frac{1}{3} & \frac{19}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & \frac{22}{3} & -\frac{5}{3} & 2 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{5}{3} & 5 & -\frac{7}{3} & -\frac{41}{3} \end{array}\right)$$

Ejemplo 1 (cont.)

El máximo en valor absoluto de la primera columna de $M^{(2)}$ es $m_{42} = \dfrac{22}{3}$. Con las operaciones elementales: $F_{24}, F_{32}(1/22), F_{42}(-10/22), F_{52}(-10/22)$ resulta:

Pivot

$$M = \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 1 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & \frac{22}{3} & -\frac{5}{3} & 2 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{13}{22} & -\frac{10}{11} & \frac{7}{22} & \frac{61}{22} \\ 0 & 0 & \frac{34}{11} & -\frac{32}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{58}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{10}{11} & \frac{45}{11} & -\frac{24}{11} & -\frac{162}{11} \end{array}\right)$$

Ejemplo 1 (cont.)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

El máximo en valor absoluto de la primera columna de $M^{(3)}$ es $m_{43} = \dfrac{34}{11}$. Con las operaciones elementales: $F_{34}, F_{43}(-13/68), F_{53}(10/34)$ resulta:

Pivot

$$M = \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 1 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & \frac{22}{3} & -\frac{5}{3} & 2 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{34}{11} & -\frac{32}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{58}{11} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{17} & \frac{6}{17} & \frac{30}{17} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{55}{17} & -\frac{38}{17} & -\frac{224}{17} \end{array}\right)$$

Ejemplo 1 (cont.)

El máximo en valor absoluto de la primera columna de $M^{(4)}$ es $m_{54} = \dfrac{55}{17}$. Con las operaciones elementales $F_{45}, F_{54}(6/55)$ resulta:

$$
M = \left(\begin{array}{ccccc|c}
3 & -2 & 1 & -3 & 2 & 7 \\
0 & \dfrac{22}{3} & -\dfrac{5}{3} & 2 & -\dfrac{1}{3} & \dfrac{7}{3} \\
0 & 0 & \dfrac{34}{11} & -\dfrac{32}{11} & -\dfrac{2}{11} & \dfrac{58}{11} \\
0 & 0 & 0 & \overset{\text{Pivot}}{\dfrac{55}{17}} & -\dfrac{38}{17} & -\dfrac{224}{17} \\
0 & 0 & 0 & \boxed{0} & \dfrac{6}{55} & \dfrac{18}{55}
\end{array}\right)
$$

Ejemplo 1 (cont.)

aplicamos ahora el Algoritmo 1 al sistema anterior, resulta:

$$i = 5: \quad x_5 = \frac{b_5}{u_{55}} = 3$$

$$i = 4: \quad x_4 = \frac{b_4 - \sum_{j=5}^{5} u_{4j} x_j}{u_{44}} = -2$$

$$i = 3: \quad x_3 = \frac{b_3 - \sum_{j=4}^{5} u_{3j} x_j}{u_{33}} = 0$$

Ejemplo 1 (cont.)

$$i = 2: \quad x_2 = \frac{b_2 - \displaystyle\sum_{j=3}^{5} u_{2j} x_j}{u_{22}} \quad = 1$$

$$i = 1: \quad x_1 = \frac{b_1 - \displaystyle\sum_{j=2}^{5} u_{1j} x_j}{u_{11}} \quad = -1$$

obteniendo la solución $x = (-1, 1, 0, -2, 3)$.

Algoritmo 2: Proceso de pivoteo parcial

Entrada: Ingresar una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

inicio
    para $j \leftarrow 1$ **a** n **hacer**
        $maxc \leftarrow |A_{jj}|$;
        para $i \leftarrow j+1$ **a** n **hacer**
            si $|A_{ij}| > maxc$ **entonces**
                $maxc \leftarrow |A_{ij}|$;
                $p \leftarrow i$
        fin para
        Intercambiar las filas j ***y*** p;
        para $i \leftarrow j+1$ **a** n **hacer**
            Haciendo ceros los elementos de cada fila i ***en la columna*** j **para** $k \leftarrow 1$ **a** n **hacer**

$$A_{ik} \leftarrow A_{ik} - A_{ij}\left(\frac{A_{jk}}{A_{jj}}\right)$$

            fin para
        fin para
    fin para
    devolver *Matriz triangular superior* U *y vector* b
fin

Pivoteo total

Definición

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, definimos como **operaciones elementales columna** *para la matriz A a cualquiera de las siguientes operaciones:*

1. *Intercambiar la columna i con la columna j, denotado por C_{ij}.*
2. *Asignar a la columna i la misma columna i pero multiplicada por un número no nulo λ. Esto es denotado por $C_i(\lambda)$.*
3. *Asignar a la columna i la misma columna i y sumándole λ veces la columna j donde $\lambda \neq 0$. Esto es denotado por $C_{ij}(\lambda)$.*

Ejemplo

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. *Sobre la matriz original* A *realice las siguientes operaciones elementales:* $C_1 \leftrightarrow C_3$, $C_2 \leftarrow -5C_2$ *y* $C_4 \leftarrow C_4 + 2C_1$.

Resolución

Pivoteo total (cont.)

Dada la matriz aumentada M del sistema lineal $Ax = b$, definimos la matriz $M^{(1)} = M$ y los elementos de $M^{(1)}$ son denotados por $m_{ij}^{(1)}$. Ahora se localiza la fila i_1 y columna j_1 tal que en $m_{i_1 j_1}^{(1)}$ se obtiene $\max_{1\leq i,j\leq n} |m_{ij}|$. Realizamos operaciones elementales filas y columnas para obtener una matriz de la forma:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} m_{i_1 j_1}^{(1)} & * & \dots & * \\ \hline 0_{n-1,1} & & M^{(2)} & \end{array}\right)$$

donde $0_{n-1,1} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times 1}$ y $M^{(2)} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$.

Pivoteo total (cont.)

Repetimos el proceso, es decir, se localiza la fila i_2 y columna j_2 tal que en $m^{(2)}_{i_2 j_2}$ se obtiene $\max_{1\leq i,j\leq n-1} |m^{(2)}_{ij}|$. Realizamos operaciones elementales para obtener una matriz de la forma:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} m^{(1)}_{i_1 j_1} & * & \dots & * \\ 0 & m^{(2)}_{i_2 j_2} & \dots & * \\ \hline 0_{n-2,1} & 0_{n-2,1} & M^{(3)} & \end{array}\right)$$

donde $0_{n-2,1} \in \mathbb{R}^{(n-2)\times 1}$ y $M^{(3)} \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$.
Se repite este proceso hasta que se obtiene una matriz triangular superior y se procede a resolver usando sustitución regresiva.

Ejemplo 2

Consideremos el sistema del Ejemplo 2 cuya matriz aumentada es dada por:

$$M = (A \,|\, b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -1 & 3 & -1 & -9 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 1 & 11 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & 5 \\ -1 & 8 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 2 & 7 \end{array}\right)$$

Resolución:

Primero, denotemos por Ind el vector de índices de las variables x_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, es decir:

$$Ind = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2 (cont.)

Tener en cuenta, cuando realizamos una operación elemental columna, entonces cambia el orden de los elementos del vector Ind.

El máximo elemento de A_1 en valor absoluto es dado por $m_{42} = 8$. Por tanto, realizamos las operaciones elementales:

$$F_1 \leftrightarrow F_4, \quad C_1 \leftrightarrow C_2,$$

luego:

$$Ind = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$M = \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{8} & -1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 1 & 11 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 & -9 \\ -2 & 3 & 1 & -3 & 2 & 7 \end{array}\right)$$

Ejemplo 2 (cont.)

Ahora hacemos cero los elementos m_{i1} $(i = 2, 3, 4, 5)$ mediante las operaciones elementales:

$$F_2 \leftarrow F_2 + \left(-\frac{2}{8}\right) F_1,$$

$$F_3 \leftarrow F_3 + \left(\frac{1}{8}\right) F_1,$$

$$F_4 \leftarrow F_4 + \left(-\frac{2}{8}\right) F_1,$$

$$F_5 \leftarrow F_5 + \left(\frac{2}{8}\right) F_1,$$

Ejemplo 2 (cont.)

resultando:

$$M = \left(\begin{array}{ccccc|c} 8 & -1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{9}{4} & \frac{7}{2} & -\frac{19}{4} & \frac{5}{4} & 11 \\ 0 & \frac{7}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{13}{8} & \frac{7}{8} & 5 \\ 0 & \frac{9}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{9}{4} & -\frac{3}{4} & -9 \\ 0 & \frac{11}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{9}{4} & \frac{7}{4} & 7 \end{array}\right)$$

Ejemplo 2 (cont.)

El máximo elemento de A_2 en valor absoluto es dado por $m_{24} = -\dfrac{19}{4}$. Por tanto, realizamos las operaciones elementales: $C_2 \leftrightarrow C_4$, luego:

$$Ind = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$M = \left(\begin{array}{ccccc|c} 8 & 3 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{19}{4} & \dfrac{7}{2} & \dfrac{9}{4} & \dfrac{5}{4} & 11 \\ 0 & -\dfrac{13}{8} & \dfrac{3}{4} & \dfrac{7}{8} & \dfrac{7}{8} & 5 \\ 0 & \dfrac{9}{4} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{9}{4} & -\dfrac{3}{4} & -9 \\ 0 & -\dfrac{9}{4} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{11}{4} & \dfrac{7}{4} & 7 \end{array}\right)$$

Ejemplo 2 (cont.)

Ahora hacemos cero los elementos $m_{i2}\,(i = 3, 4, 5)$ mediante las operaciones elementales:

$$F_3 \leftarrow F_3 + \left(-\frac{13}{38}\right) F_2,$$

$$F_4 \leftarrow F_4 + \left(\frac{9}{19}\right) F_2,$$

$$F_5 \leftarrow F_5 + \left(-\frac{9}{19}\right) F_2,$$

resultando:

$$M = \left(\begin{array}{ccccc|c} 8 & 3 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{19}{4} & \frac{7}{2} & \frac{9}{4} & \frac{5}{4} & 11 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{38} & \frac{2}{19} & \frac{17}{38} & \frac{47}{38} \\ 0 & 0 & \frac{22}{19} & \frac{63}{19} & -\frac{3}{19} & -\frac{72}{19} \\ 0 & 0 & -\frac{22}{19} & \frac{32}{19} & \frac{22}{19} & \frac{34}{19} \end{array}\right)$$

El máximo elemento de A_3 en valor absoluto es dado por $m_{44} = \frac{63}{19}$.

Por tanto, realizamos las operaciones elementales: $F_3 \leftrightarrow F_4, \quad C_3 \leftrightarrow C_4$, luego:

$$Ind = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$M = \left(\begin{array}{ccccc|c} 8 & 3 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{19}{4} & \frac{9}{4} & \frac{7}{2} & \frac{5}{4} & 11 \\ 0 & 0 & \frac{63}{19} & \frac{22}{19} & -\frac{3}{19} & -\frac{72}{19} \\ 0 & 0 & \frac{2}{19} & -\frac{17}{38} & \frac{17}{38} & \frac{47}{38} \\ 0 & 0 & \frac{32}{19} & -\frac{22}{19} & \frac{22}{19} & \frac{34}{19} \end{array}\right)$$

Ejemplo 2 (cont.)

Ahora hacemos cero los elementos $m_{i3}\,(i = 4, 5)$ mediante las operaciones elementales:

$$F_4 \leftarrow F_4 + \left(-\frac{2}{63}\right) F_3,$$

$$F_5 \leftarrow F_5 + \left(-\frac{32}{63}\right) F_3,$$

Ejemplo 2 (cont.)

resultando:

$$M = \left(\begin{array}{ccccc|c} 8 & 3 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{19}{4} & \dfrac{9}{4} & \dfrac{7}{2} & \dfrac{5}{4} & 11 \\ 0 & 0 & \dfrac{63}{19} & \dfrac{22}{19} & -\dfrac{3}{19} & -\dfrac{72}{19} \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{61}{126} & \dfrac{19}{42} & \dfrac{19}{14} \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{110}{63} & \dfrac{26}{21} & \dfrac{26}{7} \end{array}\right)$$

El máximo elemento de A_4 en valor absoluto es dado por $m_{54} = -\dfrac{110}{63}$.

Ejemplo 2 (cont.)

Por tanto, realizamos las operaciones elementales:

$$F_4 \leftrightarrow F_5,$$

luego:

$$M = \left(\begin{array}{ccccc|c} 8 & 3 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{19}{4} & \dfrac{9}{4} & \dfrac{7}{2} & \dfrac{5}{4} & 11 \\ 0 & 0 & \dfrac{63}{19} & \dfrac{22}{19} & -\dfrac{3}{19} & -\dfrac{72}{19} \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{110}{63} & \dfrac{26}{21} & \dfrac{26}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{61}{126} & \dfrac{19}{42} & \dfrac{19}{14} \end{array}\right)$$

Ejemplo 2 (cont.)

Ahora hacemos cero los elementos m_{i4} $(i = 5)$ mediante las operaciones elementales:

$$F_5 \leftarrow F_5 + \left(-\frac{61}{220}\right) F_4,$$

resultando el vector de índices de las variables:

$$Ind = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

Ejemplo 2 (cont.)

y la matriz aumentada queda:

$$M = \left(\begin{array}{ccccc|c} 8 & 3 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{19}{4} & \dfrac{9}{4} & \dfrac{7}{2} & \dfrac{5}{4} & 11 \\ 0 & 0 & \dfrac{63}{19} & \dfrac{22}{19} & -\dfrac{3}{19} & -\dfrac{72}{19} \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{110}{63} & \dfrac{26}{21} & \dfrac{26}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{6}{55} & \dfrac{18}{55} \end{array}\right)$$

Ejemplo 2 (cont.)

aplicamos ahora el Algoritmo 1 al sistema anterior, resulta:

$$i = 5: \quad x_{Ind(5)} = \frac{b_5}{u_{55}} = 3 \quad \Rightarrow \quad x_5 = 3$$

$$i = 4: \quad x_{Ind(4)} = \frac{b_4 - \displaystyle\sum_{j=5}^{5} u_{4j} x_{Ind(j)}}{u_{44}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 0$$

$$i = 3: \quad x_{Ind(3)} = \frac{b_3 - \displaystyle\sum_{j=4}^{5} u_{3j} x_{Ind(j)}}{u_{33}} = -1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1$$

Ejemplo 2 (cont.)

$$i = 2: \quad x_{Ind(2)} = \frac{b_2 - \displaystyle\sum_{j=3}^{5} u_{2j} x_{Ind(j)}}{u_{22}} \quad = -2 \quad \Rightarrow \quad x_4 = -2$$

$$i = 1: \quad x_{Ind(1)} = \frac{b_1 - \displaystyle\sum_{j=2}^{5} u_{1j} x_{Ind(j)}}{u_{11}} \quad = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1$$

obteniendo la solución $x = (-1, 1, 0, -2, 3)$.

Bibliografía

R. L. Burden, J. D. Faires, R. Iriarte Balderrama, *et al.*, *Análisis numérico*.
1996.

Otras referencias

- Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing, Third Edition David Kincaid: University of Texas at Austin, Austin, TX, Ward Cheney.
- Numerical Methods Using Matlab, 4th Edition John H. Mathews, California State University, Fullerton, Kurtis K. Fink, Northwest Missouri State University
- Numerical Lineal Algebra. Lloyd N. Trefethen and David Bau, III xii+361 pages. SIAM, 1997
- Elementary Numerical Analysis, 3rd Edition Kendall Atkinson, Weimin Han