Factorización de Matrices.
LU. Crout. Doolitle.

CM4F1

Ángel Enrique Ramírez Gutiérrez
aramirezg@uni.edu.pe

Escuela Profesional de Matemática
Universidad Nacional de Ingeniería

10 de mayo de 2022

$Ax = b$

$A = LU$

$\Rightarrow (LU)x = b$

$z = Ux$

$\Rightarrow Lz = b$ sustitución progresiva: z ✓

conocido z ahora se resuelve.

$Ux = z$ sustitución regresiva: x

Contenido

Factorización LU

sustitución regresiva

Hemos visto que del Algoritmo **??** lo fácil que es resolver un sistema lineal de la forma $Ux = b$ donde U es una matriz triangular superior, pues se resuelve usando **sustitución regresiva**.
Es claro que esta simplicidad es análoga cuando se tiene un sistema de la forma $Lx = b$ donde L es una matriz triangular inferior, en este caso se resuelve usando la **sustitución progresiva**.
Hemos visto que el total de operaciones (multiplicación/división y sumas/restas) es proporcional a $n^2/2$ para la sustitución regresiva. Esto mismo se cumple para la sustitución progresiva.

Factorización LU (cont.)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Por tanto, si se tiene el sistema $Ax = b$ tal que es posible factorizar la matriz A en la forma $A = LU$ donde L es una matriz triangular inferior y U una matriz triangular superior, podemos resolver el sistema de la forma siguiente:

$$Ax = b \Rightarrow (LU)x = b \Rightarrow L(Ux) = b$$

Si hacemos $Ux = z$, entonces primero debemos resolver el sistema:

$$\boxed{Lz = b}$$

usando **sustitución progresiva** para calcular " z " y luego resolver el sistema:

$$Ux = z$$

usando **sustitución regresiva** obteniendo así " x " solución del sistema original.

Método de Eliminación Gaussiana

Teorema

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ puede llevarse a una forma escalonada $U \in \cancel{\mathbb{R}m \times n}$ $\mathbb{R}^{n\times n}$ sin intercambiar filas, entonces existe una matriz triangular inferior $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $l_{ii} = 1$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ tal que $A = LU$. Si además A es invertible, entonces las matrices L y U son únicas.

Ejemplo: Determine la factorización LU de la matriz asociada el sistema y determine la solución:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{pmatrix}}_{A} x = \begin{pmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = F_{41}(1)\,F_{31}\left(-\tfrac{1}{2}\right)F_{21}(-2)\,A =$$

A1:rowop(A1,4,1,−1);

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -2 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & -12 & 8 & 1 & 21 \\ 0 & 2 & 3 & -14 & -26 \end{array}\right)$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}$$

Actualizamos L:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & * & 1 & 0 \\ -1 & * & * & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = F_{42}\left(+\tfrac{1}{2}\right) F_{32}(-3)\,A_1 =$$

A2:rowop(A2,4,2,−1/2);

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -2 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & -13 & -21 \end{array}\right)$$

Actualizamos L:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1/2 & * & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_{43}^{(-2)} A_2 =$$

A3:rowop(A2,4,3,2);

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -2 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

Actualizamos L:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1/2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{F_{43}(-2)\,F_{42}\left(\tfrac{1}{2}\right)F_{32}(-3)\,F_{41}(1)\,F_{31}\left(-\tfrac{1}{2}\right)F_{21}(-2)}_{\text{No se han realizado intercambio de filas}}\,A = U = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1/2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ y se cumple: $A = LU$

Resta calcular z a partir de:

$$Lz = b$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1/2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

sustitución progresiva:

$$z_1 = 12$$

$$z_2 = 10 - 2z_1 = 10 - 2(12) = -14$$

$$z_3 = -9 - \tfrac{1}{2}z_1 - 3z_2 = -9 - \tfrac{1}{2}(12) - 3(-14) = 27$$

$$z_4 = -3 + z_1 + \tfrac{1}{2}z_2 - 2z_3 = -3 + 12 + \tfrac{1}{2}(-14) - 2(27) =$$

conocido z se resuelve ahora:

$$Ux = z$$

sustitución regresiva: x

Factorización LU (cont.)

Hasta ahora nuestra hipótesis es que el sistema tiene solución única, es decir, $det(A) \neq 0$. ¿Esto es suficiente para garantizar la existencia de L y U tal que $A = LU$?

Factorización LU (cont.)

Consideremos la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

observamos que $det(A) = 4 \neq 0$. Deseamos calcular L y U tal que $A = LU$, es decir

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Factorización LU (cont.)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

De (2) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$0 = l_{11}u_{11}, \quad 10 = l_{11}u_{12}, \quad 4 = l_{11}u_{13} \tag{3}$$

De (3) podemos observar que $l_{11} \neq 0$ y así $u_{11} = 0$.
Otra vez, a partir de (3) se observa que:

$$\boxed{\begin{aligned} 0 &= l_{21}u_{11} \\ 2 &= l_{31}u_{11} \end{aligned}} \tag{4}$$

Como $u_{11} = 0$ se puede observar que se contradice la segunda ecuación de (4). Por tanto, la matriz A no admite descomposición LU a pesar que A es una matriz no singular.

Factorización LU (cont.)

Los ejemplos anteriores nos motiva a establecer condiciones sobre una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que pueda existir la factorización LU. Con este fin, damos primero las siguientes definiciones.

Definición

Dada la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, definimos las **matrices esquina** A_k como aquellas submatrices de A formadas como sigue:

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Es decir, cada matriz A_k es la submatriz principal de la matriz A obtenida con sus primeras k filas y columnas.

Factorización LU (cont.)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Teorema (Existencia de descomposición LU)

La matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ admite una factorización LU si y sólo si todas las matrices esquina A_k satisfacen:

$$det(A_k) \neq 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

La demostración puede ser realizada por inducción y se deja como ejercicio de investigación al estudiante, [1].

Factorización LU (cont.)

El Teorema 10 garantiza cuando una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no singular admite descomposición LU tal que $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz triangular inferior y $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz triangular superior. Observe que si consideramos cualquier matriz $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonal y no singular, se tiene que:

$$A = LU = L(DD^{-1})U = (LD)(D^{-1}U) = L^*U^*,$$

donde $L^* \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sigue siendo una matriz triangular inferior y $U^* \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz triangular superior, esto indica que en general la factorización LU no es única. Sin embargo, el teorema siguiente da las condiciones para el cual la factorización LU es única.

Factorización LU (cont.)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Teorema

Si una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es no singular y admite factorización LU tal que los elementos de la diagonal de la matriz $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son iguales a 1, entonces esta factorización es única.

Demostración: Supongamos que A admite dos factorizaciones LU, es decir:

$$A = L_1U_1 = L_2U_2$$

tal que los elementos de la diagonal de L_1 y L_2 son iguales a 1. Observe que L_1^{-1} y L_2^{-1} son matrices triangulares inferiores. De modo análogo para las matrices triangulares superiores. Por tanto $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$.
El producto de matrices triangulares inferiores con unos en la diagonal resulta otra matriz triangular inferior con unos en la diagonal. De forma análoga, para las matrices triangulares superiores. Esto implica que $U_2U_1^{-1} = I_n$ y por tanto $U_1 = U_2$, así también $L_1 = L_2$.

Factorización LU (cont.)

De manera análoga se tiene el siguiente resultado.

Teorema

Si una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es no singular y admite factorización LU tal que los elementos de la diagonal de la matriz $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son iguales a 1, entonces esta factorización es única.

La demostración del Teorema 13 es análoga a la del Teorema 12.

Hasta ahora está garantizada la existencia y unicidad de matrices L y U tal que $A = LU$. Ahora la pregunta natural es: ¿Cómo calcular estas matrices?

Método de Doolitle I

Consideramos una matriz A que satisface las condiciones del Teorema 12. Formamos un sistema de ecuaciones de la forma $A = LU$ y manteniendo la fila " i " constante y variamos todas las columnas j, así obtenemos:
Fila $i = 1$ columna $j = 1, 2, \ldots, n$:

$$a_{1j} = l_{11}u_{1j} \Rightarrow u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}},$$

Fila $i = 2, 3, \ldots, n$, tenemos dos casos:

- Columna $j = 1, 2, \ldots, i - 1$:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik}u_{kj} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj} + l_{ij}u_{jj} \Rightarrow l_{ij} = \frac{a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}}{u_{jj}}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}}_{U}$$

Método de Doolittle

Recorro A fila por fila

Fila 1 l_{11}

C1: $a_{11} = l_{11} u_{11}$

C2: $a_{12} = l_{11} u_{12}$

C3: $a_{13} = l_{11} u_{13}$

C4: $a_{14} = l_{11} u_{14}$

Fila 2:

C1: $a_{21} = \boxed{l_{21}} u_{11}$

C2: $a_{22} = l_{21} u_{12} + l_{22} u_{22}$

C3: $a_{23} = l_{21} u_{13} + l_{22} u_{23}$

C4: $a_{24} = l_{21} u_{14} + l_{22} u_{24}$

Fila 3:

C1: $a_{31} = \boxed{l_{31}} u_{11}$

C2: $a_{32} = l_{31} u_{12} + l_{32} u_{22}$

C3: $a_{33} = l_{31} u_{13} + l_{32} u_{23} + l_{33} u_{33}$

C4: $a_{34} = l_{31} u_{14} + l_{32} u_{24} + l_{33} u_{34}$

Fila 4:

C1: $a_{41} = \boxed{l_{41}} u_{11}$

C2: $a_{42} = l_{41} u_{12} + l_{42} u_{22}$

C3: $a_{43} = l_{41} u_{13} + l_{42} u_{23} + l_{43} u_{33}$

C4: $a_{44} = l_{41} u_{14} + l_{42} u_{24} + l_{43} u_{34} + l_{44} u_{44}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}}_{U}$$

Método de Crout

Columna 1:

F1: $a_{11} = l_{11} u_{11}$

F2: $a_{21} = l_{21} u_{11}$

F3: $a_{31} = l_{31} u_{11}$

F4: $a_{41} = l_{41} u_{11}$

Columna 2

F1: $a_{12} = l_{11} \boxed{u_{12}}$

F2: $a_{22} = l_{21} u_{12} + l_{22} u_{22}$

F3: $a_{32} = l_{31} u_{12} + l_{32} u_{22}$

F4: $a_{42} = l_{41} u_{12} + l_{42} u_{22}$

Columna 3:

F1: $a_{13} = l_{11} \boxed{u_{13}}$

F2: $a_{23} = l_{21} u_{13} + l_{22} u_{23}$

F3: $a_{33} = l_{31} u_{13} + l_{32} u_{23} + l_{33} u_{33}$

F4: $a_{43} = l_{41} u_{13} + l_{42} u_{23} + l_{43} u_{33}$

Columna 4:

F1: $a_{14} =$

F2: $a_{24} =$

F3: $a_{34} =$

F4: $a_{44} =$

Método de Doolitle II

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

- Columna $j = i, i+1, \ldots, n$:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik} u_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} + l_{ii} u_{ij} \Rightarrow \boxed{u_{ij} = \frac{a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}}{l_{ii}}.}$$

El razonamiento anterior es llamado **método de Doolitle** y desde que consideramos A una matriz no singular, entonces l_{ii} $(i = 1, \ldots, n)$ son todos no nulos. Este método es mostrado en el Algoritmo 1.

Algoritmo LU por el método de Doolitle

Algoritmo 1: Factorización LU por el método de Doolitle

Entrada: Ingresar una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Asignar valores no nulos para l_{ii} $(i = 1, \ldots, n)$. Caso contrario asumir $l_{ii} = 1$.

inicio
  para $i \leftarrow 1$ **a** n **hacer**
    para $j \leftarrow 1$ **a** $i-1$ **hacer**
$$l_{ij} \leftarrow \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}}{u_{jj}};$$
    fin para
    para $j \leftarrow i$ **a** n **hacer**
$$u_{ij} \leftarrow \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}}{l_{ii}};$$
    fin para
  fin para
  devolver *Matrices* L *y* U.
fin

Ejemplo 6: Método de Doolitle

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Encuentre la factorización LU por el método de Doolittle de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 2 & 11 & 5 \end{pmatrix}$$

Resolución:

Método de Crout I

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Al igual que para el método de Doolitele, sea una matriz A que satisface las condiciones del Teorema 12. A partir del sistema $A = LU$, el razonamiento es como sigue, formamos un sistema de ecuaciones manteniendo la columna " j " constante y variamos todas las filas i, así obtenemos:
Columna $j = 1$, fila $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$a_{i1} = l_{i1}u_{11} \Rightarrow l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}},$$

Columna $j = 2, 3, \ldots, n$, tenemos dos casos:

- Fila $i = 1, 2, \ldots, j-1$:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik}u_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} + l_{ii}u_{ij} \Rightarrow \boxed{u_{ij} = \frac{a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}}{l_{ii}}.}$$

Método de Crout II

- Fila $i = j, j+1, \ldots, n$:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik}u_{kj} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj} + l_{ij}u_{jj} \Rightarrow l_{ij} = \frac{a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}}{u_{jj}}.$$

El razonamiento anterior es llamado **método de Crout** y desde que consideramos A una matriz no singular, entonces u_{ii} $(i = 1, \ldots, n)$ son todos no nulos. Este método es mostrado en el Algoritmo 2.

Algoritmo LU por el método de Crout

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Algoritmo 2: Factorización LU por el método de Crout

Entrada: Ingresar una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Asignar valores no nulos para u_{ii} $(i = 1, \ldots, n)$. Caso contrario asumir $u_{ii} = 1$.

```
inicio
    para j ← 1 a n hacer
        para i ← 1 a j − 1 hacer
            u_ij ← (a_ij − Σ_{k=1}^{i−1} l_ik u_kj) / l_ii ;
        fin para
        para i ← j a n hacer
            l_ij ← (a_ij − Σ_{k=1}^{j−1} l_ik u_kj) / u_jj ;
        fin para
    fin para
    devolver Matrices L y U.
fin
```

$$u_{ij} \leftarrow \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}}{l_{ii}};$$

$$l_{ij} \leftarrow \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}}{u_{jj}};$$

Ejemplo 7: Método de Crout

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Encuentre la factorización LU por el método de Crout de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Resolución:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Col 1: $u_{11} = 1$

F1: $-1 = \underset{-1}{l_{11}}\, u_{11}$

F2: $0 = \underset{0}{l_{21}}\, u_{11}$

F3: $1 = \underset{1}{l_{31}}\, u_{11}$

Col 2: $u_{22} = 1$

F1: $1 = \underset{-1}{l_{11}}\, \underset{-1}{u_{12}}$

F2: $2 = \underset{0}{l_{21}}\, \underbrace{u_{12}}_{(-1)} + \underbrace{l_{22}}_{2}\, \underset{1}{u_{22}}$

F3: $0 = \underset{1}{l_{31}}\, \underbrace{u_{12}}_{(-1)} + \underbrace{l_{32}}_{1}\, \underset{1}{u_{22}}$

Col 3:

$F_1: \; -1 = \underbrace{l_{11}}_{(-1)} \underbrace{u_{13}}_{(1)}$

$F_2: \; 1 = \underbrace{l_{21}}_{(0)} \underbrace{u_{13}}_{(1)} + \underbrace{l_{22}}_{(2)} \underbrace{u_{23}}_{=1/2}$

$F_3: \; -1 = \underbrace{l_{31}}_{(1)} \underbrace{u_{13}}_{(1)} + \underbrace{l_{32}}_{(1)} \underbrace{u_{23}}_{1/2} + \underbrace{l_{33}}_{= -\frac{5}{2}} \underbrace{u_{33}}_{=1}$

$u_{33} = 1$

$\Rightarrow$ La descomposición LU de Crout es:

$$L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -5/2 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}}_{} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=}$$

$$= L^* \qquad U^*$$

Descomposición LU para matrices rectangulares

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Teorema

Sea A una matriz rectangular $m \times n$ que se puede reducir a una forma escalonada efectuando únicamente operaciones elementales de eliminación (operaciones del tipo $\alpha F_i + F_j$ con $i < j$). Entonces existe una matriz $m \times m$ inferior L con unos en la diagonal principal y una matriz $m \times n$, U con $u_{ij} = 0$ si $i > j$ tales que:

$$A = LU$$

Ejemplo:

Determine la descomposición LU para la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & -1 \\ 3 & 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

Solución:

Iniciamos con la matriz L de la forma:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Y procedemos a escalonar la matriz aplicando operaciones elementales:

$$F_{31}(\underline{-3})F_{21}(\underline{-2})A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & -5 \\ 0 & -6 & -9 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & * & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:(cont.)

Forma escalonada

$$F_{32}(-2)F_{31}(-3)F_{21}(-2)A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}}_{U} \Rightarrow L = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{L}$$

Por tanto se tienen:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \text{ y } \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y se cumple:

$$A = LU$$

Bibliografía

J. De la Fuente, "Técnicas de cálculo para sistemas de ecuaciones, programación lineal y programación entera," *Editorial Reverté, SA, Barcelona*, 1998.