Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Ciclo 2021-1

[Curso: CM4F1 A Análisis y Modelamiento Numérico I ]

Examen Sustitutorio

---

1. Conteste Verdadero o Falso en cada caso. Justifique adecuadamente.

   *a*) Al evaluar $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$ en $x = 0{,}1$ con redondeo y usando aritmética de 3 dígitos se obtiene $f(0{,}1) = 2{,}05$.

   *b*) La función $f(x) = sen(\pi x)$ tiene ceros en cada entero. Una raíz está en $[a, b]$, si $-1 < a < 0$, $2 < b < 3$ y también $a + b > 2$ entonces el método de la bisección converge a 1.

   *c*) Si se tienen los datos de interpolación $s(0) = 2, s'(0) = -1, s(1) = 1, s'(1) = -3$, entonces el coeficiente del término $x^3$ es -2.

   *d*) With the values of the coefficients $a, b, c, d$ and $e$ the following $s(x)$ is not a natural cubic spline on $[0, 2]$:

$$s(x) = \begin{cases} 1 + x - ax^2 + bx^3, & x \in [0,1] \\ c + d(x-1) + e(x-2)^2 + (x-2)^3, & x \in [1,2] \end{cases}$$

   where $a = 0, b = -1, c = 2, d = -5$ and $e = 0$.

   Resolución:

   *a*) (Verdadero) Se tiene:

$$f(0{,}1) = \frac{e^{0{,}1} - e^{-0{,}1}}{0{,}1} = \frac{1{,}11 - 0{,}905}{0{,}1} = 2{,}05$$

   *b*) (Falso). De los datos se tiene que:

$$\frac{1}{2} < \frac{a+b}{2} < \frac{3}{2}.$$

   Observe que:

   - $f(x) < 0$ para $-1 < x < 0 \cup 1 < x < 2$.
   - $f(x) > 0$ para $0 < x < 1 \cup 2 < x < 3$.

   Por tanto, iniciando en $a_1 = a$ y $b_1 = b$ se tiene $f(a_1) < 0$ y $f(b_1) > 0$. Como $a + b > 2$ resulta que:

$$x_1 = \frac{a+b}{2} \Rightarrow 1 < \frac{a+b}{2} < \frac{3}{2} \Rightarrow 1 < x_1 < \frac{3}{2}$$

   luego $f(x_1) < 0$, así se obtiene $a_2 = x_1$ y $b_2 = b_1 = b$. Por tanto, el único cero en $[a_2, b_2]$ es $\eta = 2$, así la convergencia es hacia $\eta = 2$.

c) (Verdadero) Como el coeficiente de $x^3$ es dado por $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$ se forma las diferencias divididas que se muestran en el cuadro adjunto. Asimismo usando el hecho que $f[x_0, x_1] = f'(\alpha)$ y similarmente $f[x_2, x_3] = f'(\alpha_1)$ obteniéndose que el coeficiente de $x_3$ es $f[0, 0, 1, 1] = -2$.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 2 & & & \\ 0 & 2 & -1 & & \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \\ 1 & 1 & -3 & -2 & -2 \end{array}$$

d) (Falso) Es fácil verificar que la función $s$ es un spline cúbico natural para los valores dados de $a, b, c, d$ y $e$.

2. Dada una matriz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

y un vector $b \in \mathbb{R}^3$, se quiere resolver el sistema $Ax = b$. Para ello, se propone el método iterativo siguiente:

$$x^{(k+1)} = -\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} x^{(k)} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} b$$

a) Demostrar que el método propuesto resulta convergente cuando se aplica a las matriz $A$ y al vector $b$ siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -3 \\ -3 & 9 & 4 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -20 \\ 62 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Use que $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/26 & -1/39 & 0 \\ 1/26 & 4/39 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{pmatrix}$.

b) Considere el vector $x^{(0)} = (0\,0\,0)^T$. Encuentre el número mínimo de iteraciones necesarias $k \in \mathbb{N}$, de modo de tener una precisión $||x^{(k)} - \hat{x}||_\infty \leq 10^{-4}$.

Resolución:

a) Un esquema iterativo de la forma:

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + d$$

es convergente si y sólo si $\rho(M) < 1$.
Para el esquema dado se tiene:

$$M = -\begin{pmatrix} \frac{3}{26} & -\frac{1}{39} & 0 \\ \frac{1}{26} & \frac{4}{39} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{35}{78} \\ 0 & 0 & -\frac{23}{78} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora los autovalores de la matriz $M$:

$$det(M - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \frac{35}{78} \\ 0 & -\lambda & -\frac{23}{78} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & -\lambda \end{pmatrix} \right| = -\frac{273\lambda^3 + 64\lambda}{273}$$

luego:

$$det(M - \lambda I) = 0 \Rightarrow -\lambda\left(\lambda^2 + \frac{64}{273}\right) = 0$$

por tanto, los autovalores son:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{64}{273}}i \approx 0{,}484i, \quad \lambda_3 = -\sqrt{\frac{64}{273}}i = -0{,}484i$$

así resulta $\rho(M) = 0{,}484 < 1$, por tanto el esquema dado es convergente.

*b*) Para el esquema iterativo se cumple en la iteración $k$ lo siguiente:

$$k > \frac{\log\left(\dfrac{10^{-4}(1-\rho(M))}{\|x_1 - x_0\|}\right)}{\log(\rho(M))}$$

Iniciando en $x^0$ se obtiene:

$$x^{(1)} = Mx^{(0)} + d = d = \begin{pmatrix} \frac{3}{26} & -\frac{1}{39} & 0 \\ \frac{1}{26} & \frac{4}{39} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -20 \\ 62 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{152}{39} \\ \frac{218}{39} \\ 0 \end{pmatrix}$$

por tanto:

$$\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = \frac{218}{39} \approx 5{,}590$$

Ahora al reemplazar se estima el número de iteraciones:

$$k \geq 15{,}9$$

resultando que el número mínimo de iteraciones para obtener la tolerancia pedida es de 16 iteraciones.

3. En el análisis de sistemas de control, se desarrollan funciones de transferencia que relacionan en forma matemática la dinámica de la entrada de un sistema con su salida. La función de transferencia para un sistema de posicionamiento robotizado está dada por:

$$G(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}{s^4 + 5s^3 + 77s^2 + 153s + 90}$$

donde $G(s)$ = ganancia del sistema, $C(s)$ = salida del sistema, $N(s)$ = entrada del sistema y $s$ = frecuencia compleja de la transformada de Laplace. Utilice una técnica numérica para obtener las raíces del numerador y el denominador, y factorícelas en la forma siguiente:

$$G(s) = \frac{(s+a_1)(s+a_2)(s+a_3)}{(s+b_1)(s+b_2)(s+b_3)(s+b_4)}$$

donde $a_i$ y $b_i$ = las raíces del numerador y el denominador, respectivamente. Resolución:

Aplicamos repetidamente el método de Newton utilizando aritmética compleja, esto no cambia el algoritmo, solo hay que escribir los coeficientes del polinomio como $a + bj$. Una vez hallada una raíz de $p(x)$, dividimos entres $x - r$ y continuamos con el proceso como se observa en el notebook adjunto.

4. El espesor de la retina cambia durante ciertas enfermedades oculares. Una forma de medir dicho espesor es proyectar un láser de energía muy baja hacia la retina y grabar las reflexiones en una película. Debido a las propiedades ópticas del ojo, las reflexiones de la superficie frontal y trasera de la retina aparecerán en la película como dos líneas separadas por cierta distancia. Esta distancia es proporcional al espesor de la retina. Los datos siguientes se tomaron de una película grabada. Ajuste a los datos dos curvas con forma gaussiana de altura y ubicación arbitrarias, y determine la distancia entre los centros de los dos picos. Una curva gaussiana tiene la forma

$$f(x) = \frac{ke^{-k^2(x-a)^2}}{\sqrt{\pi}}$$

donde $k$ y $a$ son constantes que relacionan la altura con el centro del pico, respectivamente.

| Posición | Intensidad de luz | Posición | Intensidad de luz |
|---|---|---|---|
| 0.17 | 5.10 | 0.31 | 25.31 |
| 0.18 | 5.10 | 0.32 | 25.79 |
| 0.19 | 5.20 | 0.33 | 18.44 |
| 0.20 | 5.87 | 0.34 | 12.45 |
| 0.21 | 8.72 | 0.35 | 8.22 |
| 0.22 | 16.04 | 0.36 | 6.12 |
| 0.23 | 26.35 | 0.37 | 5.35 |
| 0.24 | 31.63 | 0.38 | 5.15 |
| 0.25 | 26.51 | 0.39 | 5.10 |
| 0.26 | 16.68 | 0.40 | 5.10 |
| 0.27 | 10.80 | 0.41 | 5.09 |
| 0.28 | 11.26 | 0.42 | 5.09 |
| 0.29 | 16.05 | 0.43 | 5.09 |
| 0.30 | 21.96 | 0.44 | 5.09 |

Resolución

Definimos la función para el ajuste de mínimos cuadrados

$$f(x) = 5 + \frac{ke^{-k^2(x-a)^2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{te^{-t^2(x-b)^2}}{\sqrt{\pi}}$$

Aplicamos el ajuste de mínimos cuadrados para $x_i$, $y_i$ dados:

$$\min \sum_{i=1}^{n} (y_i - 5 - \frac{ke^{-k^2(x_i-a)^2}}{\sqrt{\pi}} - \frac{te^{-t^2(x_i-b)^2}}{\sqrt{\pi}})^2$$

donde el objetivo es determinar $k$, $a$, $t$ y $b$.

Derivamos parcialmente la suma de cuadrados e igualamos a cero

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - 5 - \frac{ke^{-k^2(x_i-a)^2}}{\sqrt{\pi}} - \frac{te^{-t^2(x_i-b)^2}}{\sqrt{\pi}})((2k^2(x_i-a)^2 - 1)e^{-k^2(x_i-a)^2}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - 5 - \frac{ke^{-k^2(x_i-a)^2}}{\sqrt{\pi}} - \frac{te^{-t^2(x_i-b)^2}}{\sqrt{\pi}})((2t^2(x_i-b)^2 - 1)e^{-t^2(x_i-b)^2}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - 5 - \frac{ke^{-k^2(x_i-a)^2}}{\sqrt{\pi}} - \frac{te^{-t^2(x_i-b)^2}}{\sqrt{\pi}})(2k^3(x_i-a)e^{-k^2(x_i-a)^2}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - 5 - \frac{ke^{-k^2(x_i-a)^2}}{\sqrt{\pi}} - \frac{te^{-t^2(x_i-b)^2}}{\sqrt{\pi}})(2t^3(x_i-b)e^{-t^2(x_i-b)^2}) = 0$$

**Con estos valores iniciales aplicamos el método de Broyden en el notebook adjunto. esto forma un sistema de ecuaciones no lineales de 4 ecuaciones y 4 incógnitas, que podemos resolver con el método de Newton o el método de Broyden. El vector de inicio seria $a = 0{,}24$, $b = 0{,}32$, para k y t suponemos que para algún $x_i \approx a$, luego**

$$y_i = 5 + \frac{k + te^{-t^2(a-b)^2}}{\sqrt{\pi}} \approx 5 + \frac{k}{\sqrt{\pi}} \implies k = \sqrt{\pi}(y_i - 5)$$

**para algún $x_j \approx b$, luego**

$$y_j = 5 + \frac{t + ke^{-kt^2(a-b)^2}}{\sqrt{\pi}} \approx 5 + \frac{t}{\sqrt{\pi}} \implies t = \sqrt{\pi}(y_j - 5)$$

**Uni, 4 de agosto de 2021**[1]

[1]Hecho en LaTeX