Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática — Ciclo 2022-1

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

Solucionario Primera Práctica Calificada

---

1. Indique y justifique la veracidad (V) o falsedad (F) de cada una de las siguientes afirmaciones:

   a) **[1 *pto.*]** Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase C^2, con $f(0)=0$. Se cumple que la sucesión $\alpha_n = f\left(\frac{1}{n}\right)n$ posee una tasa de convergencia $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

   b) **[1,5 *pts.*]** Dado $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$, se cumple que $\{x\in\mathbb{R}^n \;:\; \|x\|\le 1\}$ es convexo no vacío.

   c) **[1,5 *pts.*]** Dados $a\ge 0$ y $b\le 0$ representables en complemento a dos, usando n bits, entonces la representación, usando n bits, de $a+b$ es la suma en base 2 de las representaciones de a y b.

   Solucionario

   a) (Verdadero) Por taylor se sabe que para $x>0$, existe $\theta\in[0,x]$ tal que
   $$\frac{f(x)}{x} - f'(0) = \frac{f''(\theta)}{2}x$$
   considerando $x=\frac{1}{n}$, se tiene que existen $\theta_n\in\left[0,\frac{1}{n}\right]\subseteq[0,1]$ y por la continuidad de f'', existe $M>0$
   $$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)n - f'(0)\right| \le \frac{|f''(\theta_n)|}{2}\frac{1}{n} \le M\frac{1}{n}.$$

   b) (Verdadero) Sea $S:=\{x\in\mathbb{R}^n \;:\; ||x||\le 1\}$, se cumple que $0\in S$. Además, dado $\lambda\in[0,1]$, $x,y\in S$
   $$||\lambda x + (1-\lambda)y|| \le \lambda||x|| + (1-\lambda)||y|| \le \lambda + 1 - \lambda = 1$$
   entonces $\lambda x + (1-\lambda)y\in S$.

   c) (Falso) Sean $a=1$ y $b=-1$ representables usando 3 bits, como $|0|0|1|$ y $|1|1|1|$, pero la suma de estas representaciones en base 2 es $(001)_2+(111)_2=(1000)_2$ lo cual es distinto a la representación $|0|0|0|$ de $a+b=0$, usando 3 bits.

2. Sea la sucesión definida por:
   $$x_n = \frac{Sen\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}},\ \forall n\ge 1.$$

   a) **[1 *pto.*]** Determine la tabla de los 10 primeras iteraciones usando 10 decimales.

   b) **[1 *pto.*]** Para $f(x)=Sen(x)$, determine su desarrollo usando la fórmula de Taylor en torno de $x=0$ hasta su segundo orden.

   c) **[1 *pto.*]** Determine la rapidez de convergencia de la sucesión usando (b).

   d) **[1 *pto.*]** Usando (c) indique la nueva sucesión a la que equivale su convergencia.

   Solucionario

a) **[1 *pto.*]** La tabla es:

n	1	2	3	4	5
x_n	0,8414709848	0,9588510772	0,9815840904	0,9896158370	0,9933466540
n	6	7	8	9	10
x_n	0,9953767962	0,9966021085	0,9973978671	0,9979436566	0,9983341665

b) **[1 *pto.*]** Aplicando la fórmula de Taylor en torno de $x = 0$ es:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(\xi(x))}{3!}(x-0)^3$$

Reemplazando:

$$Sen(x) = x - Cos(\xi(x))\frac{x^3}{3!},\ \xi(x) \in]0, x[$$

c) **[1 *pto.*]** De ***b)*** al despejar:

$$\frac{Sen(x) - x}{x^3} \leq \frac{Cos(\xi(x))}{6},\ \forall x \in]0, x[;$$

Tomano valor absoluto m.a.m. tenemos:

$$\frac{\left|\frac{Sen(x)}{x} - 1\right|}{x^2} = \frac{|Cos(\xi(x))|}{6} \leq \frac{\max\limits_{[0,x]}|Cos(x)|}{6} \leq \frac{1}{6},\ \forall x \in]0, x[.$$

Haciendo $x = \dfrac{1}{n}$ y asociamos a este último resultado con la definición de rapidez de convergencia, tenemos:

$$\frac{\left|\dfrac{Sen\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}} - 1\right|}{\dfrac{1}{n^2}} \leq \frac{1}{6}.$$

d) **[1 *pto.*]** De ***c)*** concluimos que:

$$\frac{Sen\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Es decir, que la sucesión $\dfrac{sen\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$ tiene una convergencia equivalente a $\dfrac{1}{n^2}$.

3. Al formarse una celda convectiva en la atmósfera, un rollo de aire que gira a medida que el aire celiente sube y el aire frío baja, el sentido de su giro X se puede representar por un valor comprendido entre 0 y 1, de modo que si $X > 0{,}5$ el giro se produce en sentido de las agujas del reloj y si $X < 0{,}5$ el giro se produce en sentido contratio a las agujas del reloj. Suponga que si X_n representa el valor del giro durante la hora n, entonces el valor del giro X_{n+1} en la próxima hora $n+1$ está dada por la siguiente recurrencia.

$$X_{n+1} = 3{,}9 \cdot X_n \cdot (1 - X_n).$$

Usando para los calculos **10** decimales.

a) **[1 *pto.*]** Determine el fenómeno atmosférico para $n = 20$ con $X_0 = 0{,}5$.

b) **[1 *pto.*]** Determine el fenómeno atmosférico para $n = 20$ con $X_0 = 0{,}501$.

c) **[1 *pto.*]** Determine el fenómeno atmosférico para $n = 20$ con $X_0 = 0{,}51$.

d) **[1 *pto.*]** Explique el efecto que ocurre en sus resultados anteriores obtenidos.

Solucionario

a) **[1 *pto.*]** La tabla que se genera es:

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	0,5000000000	0,9750000000	0,0950625000	0,3354999223	0,8694649253	0,4426331091	0,9621652553
n	7	8	9	10	11	12	13
x_n	0,1419727794	0,4750843862	0,9725789275	0,1040097133	0,3634476020	0,9022784261	0,3438710647
n	14	15	16	17	18	19	20
x_n	0,8799326468	0,4120396173	0,9448255872	0,2033077681	0,6316975062	0,9073574907	0,3278335116

b) **[1 pto.]** La tabla que se genera es:

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	0,5010000000	0,9749961000	0,0950769494	0,3355455602	0,8695234752	0,4424643650	0,9620896378
n	7	8	9	10	11	12	13
x_n	0,1422453500	0,4758452807	0,9727245432	0,1034728745	0,3617883310	0,9005003847	0,3494378231
n	14	15	16	17	18	19	20
x_n	0,8865910205	0,3921347932	0,9296238789	0,2551509583	0,7411908925	0,7481251181	0,7348923105

c) **[1 pto.]** La tabla que se genera es:

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	0,5100000000	0,9746100000	0,0965068568	0,3400533053	0,8752271377	0,4258979211	0,9535846394
n	7	8	9	10	11	12	13
x_n	0,1726178020	0,5570014961	0,9623282348	0,1413851528	0,4734420264	0,9722492287	0,1052245972
n	14	15	16	17	18	19	20
x_n	0,3671942873	0,9062143064	0,3314607553	0,8642186397	0,4576446517	0,9680034954	0,1207936402

d) **[1 pto.]** Que al multiplicar los errores se amplifican por los factores involucrados en el producto lo que hay en los fenómenos atmosféricos, conocido como el efecto mariposa.

4. a) **[2 pts.]** Determine la representación de punto flotante, usando una palabra de **12** bits [emplee **4** bits para la representación del exponente y **7** bits para la mantiza] en base **2**, para el número: **5,6875**.

   b) **[2 pts.]** Muestre que si $a \geq 0$ y $b < 0$ son representables en complemento a dos, usando n bits, cumpliendo $a + b < 0$, entonces $a + b$ admite la representación en complemento a dos, usando n bits, siendo igual a la suma en base **2** de las representaciones de a y b.

Solucionario

a) Se tiene que $5 = (101)_2$ y $0{,}6875 = (0{,}1011)_2$, luego $5,6875 = (0{,}1011011)_2 2^3 = (0{,}1011011)_2 2^{(11)_2}$. Entonces la mantiza tiene la represntación $|1|0|1|1|0|1|1|$; la representación del exponencial (considerando el signo) $|0|0|1|1|$. Por tanto se obtiene la representación $|0|0|0|1|1|1|0|1|1|0|1|1|$.

b) Veamos primero que $a + b$ puede representarse, usando n bits, lo que es equibalente a que $a + b \in [-2^{n-1}, 2^{n-1} - 1]$, lo cual se sigue de sumar las desigualdades que cumplen a y b al ser representables $0 \leq a \leq 2^{n-1} - 1$; $-2^{n-1} \leq b \leq 0$. Por tanto al ser $a + b < 0$, se tiene

$$a + b \in [-2^{n-1}, 1] \tag{1}$$

Ahora veamos como es la representación de $a + b$, para ello recordamos que se tiene la siguiente propiedad: Si $c \in [-2^{n-1}, 1]$ entonces su representación, usando n bits, se obtiene de $R_2(2^n + c)$, siendo R_2 el cambio a la base **2**. Entonces de (1) se obtiene la representación de $a + b$ es

$$R_2(2^n + a + b) = R_2(a) + R_2(2^n + b)$$

lo cual muestra que es la suma en base **2** de las representaciones, usando n bits, de a y b.

04 de Mayo del 2022