Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática Ciclo 2021-2

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

Sexta Práctica Calificada

---

1. Justificando su respuesta, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

(a) [1 *pto.*] Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$ y $M = I + uv^T$, donde I es la matriz identidad. Si $\lambda = 1$ es un valor propio de M entonces es tiene multiplicidad $n-1$.

(b) [1 *pto.*] Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$ y $M = I + uv^T$, donde I es la matriz identidad. Si $\lambda = 1$ no es un valor propio de M entonces $\lambda = 1 + v^T u$ es un valor propio de M.

(c) [1 *pto.*] Considere el sistema no lineal

$$\begin{aligned} 0 &= f_1(x,y) = x^2 + y^2 - 2 \\ 0 &= f_2(x,y) = xy - 1, \end{aligned}$$

entonces posee solución.

(d) [1 *pto.*] Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden n, y sean

$$R_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| < \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|\}, \text{ para } i = 1, \ldots, n$$

Si $R = \bigcup_{i=1}^{m} R_i$ no contiene al cero, entonces A es no singular.

Solución

(a) (Falso) Desde que $v = 0$ o $u = 0$, $M = I$ y el cual tiene un único valor propio de multiplicidad n.

(b) (Verdadero) Sea λ un valor propio de M, entonces existe un $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tal que $Mx = \lambda x$, luego $(\lambda - 1)x = uv^t x = v^t x u$ lo que implica que x es paralelo a u luego existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $x = \alpha u$, y de ello tenemos que $(\lambda - 1)u = (v^t u)u$, por lo tanto $\lambda = 1 + v^t u$.

(c) (Verdadero) En efecto, $(1,1)$ y $(-1-1)$ son soluciones del sistema no lineal.

(d) (Verdadero) Por el teorema de Gershgorin todo valor propio está contenido en R y desde que el no contiene al cero entonces la determinante de A es diferente de cero, por lo tanto A es no singular.

2. Luis compra un boogie, por el cual paga $\sqrt[7]{17.0859375}$ ayudale en obtener cual es el monto real a pagar:

(a) [1 *pto.*] Modele el problema.

(b) [1 *pto.*] Demuestre que el método de Newton tiene la siguiente iteración.

$$x_{n+1} = \frac{1}{7}\left[6x_n + \frac{17.0859375}{x_n^6}\right]$$

(c) [1 *pto.*] Determine la solución aproximada usando el método de Newton.

(d) [1 *pto.*] Determine el vuelto si paga con 5.00 soles.

Solución:

(a) [1 *pto.*] Sea x : el valor del boogie, donde

$$x = \sqrt[7]{17.0859375} \Rightarrow x^7 = 17.0859375.$$

Luego la función es:

$$f(x) = x^7 - 17.0859375 = 0.$$

(b) [1 *pto.*] Por el método de Newton:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^7 - 17.0859375}{7x_k^6} = \frac{1}{7}\left[6x_k + \frac{17.0859375}{x_k^6}\right].$$

(c) [1 *pto.*] Por el método de Newton:

k	x_k	Error
0	2	
1	1.7524240	0.2475760
2	1.5863540	0.1660670
3	1.5128902	0.0734638
4	1.5003248	0.0125654
5	1.5000002	0.0003246

Entonces

$$x = 1.50$$

(d) [1 *pto.*] El vuelto que recibe Luis es:

$$5.00 - 1.50 = 3.50$$

3. El producto de las edades actuales de dos hermanos es 42 y dentro de 5 años será 132. Ayudale ha saber que edades tienen los hermanos.

(a) [1 *pto.*] Modele el problema.

(b) [1 *pto.*] Determine la matriz Jacobiana.

(c) [1 *pto.*] Determine la matriz Jacobiana inversa.

(d) [1 *pto.*] Determine la solución usando el método de Newton con $x_0 = (3\ \ 4)^T$ y $tol = 10^{-5}$.

Solución:

(a) [1 *pto.*] Sean:

$$\begin{aligned} x &: \text{ Edad del hermano 1.} \\ y &: \text{ Edad del hermano 2.} \end{aligned}$$

Las funciones generadas son:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) = x \cdot y - 42 &= 0 \\ f_2(x,y) = (x+5)\cdot(y+5) - 132 &= 0 \end{aligned}$$

(b) [1 *pto.*] La matriz Jacobiana es:

$$JF(x,y) = \begin{bmatrix} y & x \\ y+5 & x+5 \end{bmatrix}$$

(c) [1 *pto.*] La matriz Jacobiana inversa es:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{y} & 0 \\ -\frac{y+5}{y} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & x \\ y+5 & x+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{x}{y} \\ 0 & \frac{5}{y}(y-x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{x}{5(y-x)} \\ 0 & \frac{y}{5(y-x)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{x}{y} \\ 0 & \frac{5}{y}(y-x) \end{bmatrix} = I.$$

Finalmente

$$JF(x,y)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{x}{5(y-x)} \\ 0 & \frac{y}{5(y-x)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{y} & 0 \\ -\frac{y+5}{y} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5(y-x)} \begin{bmatrix} x+5 & -x \\ -y-5 & y \end{bmatrix}$$

(d) [1 *pto.*] La tabla de método de Newton es:

k	x_k	y_k	Error
0	3	4	
1	15	-2	8
2	10.76470588235294201	2.23529411764705888	3.76470588235294201
$\vdots$			
8	7.00000028345050396	5.99999971654949427	0.00000028345050573

4. **Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y A una matriz de orden n, pruebe que:**

(a) **[2 *pts.*]** $det(I + xy^T) = 1 + y^T x$.

(b) **[1 *pts.*] Si A es no singular, entonces** $det(A + xy^T) = det(A)(1 + y^T A^{-1} x)$.

(c) **[1 *pts.*] Si $-1 \neq y^T A^{-1} x$ y A es no singular se tiene que $A + xy^T$ es invertible cuya inversa es**

$$A^{-1} + \frac{A^{-1} x y^T A^{-1}}{1 + y^T A^{-1} x}.$$

Solución:

(a) **Si $x = 0$ o $y = 0$, entonces $det(I + xy^T) = 1$. Caso contrario sea $M = I + xy^T$, y λ un valor propio con su respectivo vector propio $v \neq 0$. Luego $(I + xy^T)v = \lambda v$, se tiene $(\lambda - 1)v = xy^T v = (y^T v)x$, si $\lambda = 1$ tenemos que $y^T v = 0$ por lo que se tiene que λ es de multiplicidad $n - 1$. Si $\lambda \neq 1$ tenemos que v es paralelo que x por lo que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $v = \alpha x$, y el cual obtenemos $\lambda = 1 + y^T x$. Por lo tanto $det(M) = 1 + y^T x$.**

(b) **$det(A + xy^T) = \det(A + AA^{-1} xy^T) = \det(A) det(I + A^{-1} xy^T) = det(A)(1 + y^T A^{-1} x)$, desde que A es no singular y del acápite anterior.**

(c) **Del acápite anterior tenemos que $A + xy^T$ es invertible, además**

$$\begin{aligned}
\left(A^{-1} - \frac{A^{-1} x y^T A^{-1}}{1 + y^T A^{-1} x} \right) (A + xy^T) &= A^{-1} A - \frac{A^{-1} x y^T A^{-1} A}{1 + y^T A^{-1} x} + A^{-1} x y^T - \frac{A^{-1} x y^T A^{-1} x y^T}{1 + y^T A^{-1} x} \\
&= I - \frac{A^{-1} x y^T}{1 + y^T A^{-1} x} + A^{-1} x y^T - \frac{A^{-1} x y^T A^{-1} x y^T}{1 + y^T A^{-1} x} \\
&= I - \frac{A^{-1} x y^T - A^{-1} x y^T - y^T A^{-1} x A^{-1} x y^t + A^{-1} x y^T A^{-1} x y^T}{1 + y^T A^{-1} x} \\
&= I + \frac{y^T A^{-1} x A^{-1} x y^t - y^t A^{-1} x (A^{-1} x y^T)}{1 + y^T A^{-1} x} = I.
\end{aligned}$$

5. **[4 *pts.*] Realizó la exposición en la sexta práctica dirigida.**

15 de Diciembre del 2021