Tercera Práctica Dirigida Grupo N°4

Análisis y Modelamiento Numérico I CM4F1 B

Profesor Ángel Enrique Ramírez Gutiérrez.

Aldo Luna Bueno | Alejandro Escobar Mejia | Carlos Aznarán Laos

Brian Huaman Garcia | Khalid Izquierdo Ayllon | Carlos Malvaceda Canales

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Ingeniería

5 de mayo del 2023

Lista de N° de pregunta / estudiante

Pregunta N°7	Khalid Zaid Izquierdo Ayllón
Pregunta N°12	Carlos Daniel Malvaceda Canales
Pregunta N°15	Carlos Aznarán Laos
Pregunta N°21	Alejandro Escobar Mejia
Pregunta N°27	Aldo Luna Bueno
Pregunta N°30	Brian Alberto Huamán Garcia

7. Un fabricante de bombillas gana \$$0.3$ por cada bombilla que sale de la fábrica, pero pierde \$$0.4$ por cada una que sale defectuosa. Un día en el que fabricó 2100 bombillas obtuvo un beneficio de \$$484.4$. Determine el número de bombillas buenas y defectuosa según el siguiente requerimiento.

   a) Modele el problema.
   b) Determine la norma matricial de A.
   c) Determine el número de condicionamiento de A.
   d) Resolver usando el método de Factorización LDL^T y Cholesky.

Solución

a) *Modele el problema.*
x_1:*bombillas buenas* x_2:*bombillas defectuosas*

$$x_1 + x_2 = 2100 \qquad \longrightarrow \qquad x_1 + x_2 = 21000.3x_1 - 0.4x_2 = 484.4 \qquad \longrightarrow \qquad 3x_1 + 4x_2 = 4844$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2100 \\ 4844 \end{pmatrix}}_{b}$$

b) *Determine la norma matricial de A.*
$\|A\|_\infty = max\{2; 7\} = 7$

Solución

c) *Determine el número de condicionamiento de* A*.*
Calculamos la inversa de A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$\|A^{-1}\|_\infty = max\{\frac{5}{7}; \frac{4}{7}\} = \frac{5}{7}$
$Cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = 7 \times \frac{5}{7} = 5$

d) *Resolver usando el método de Factorización* LDL^T *y Cholesky.*
Dado que la matriz A no es simétrica, realizaremos una operación para que lo sea.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}}_{A^t} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}}_{A^t} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2100 \\ 4844 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 10 & -11 \\ -11 & 17 \end{pmatrix}}_{A'} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 16632 \\ -17276 \end{pmatrix}}_{b'}$$

Solución

d) *Realizaremos la factorización* LDL^t *mediante el uso de un algoritmo aplicado en python, el cual nos entregará las matrices* L *y* D*.*
Siendo el código:

```python
def LDLt(A, prec = 10):
    M = np.copy(A)
    n = np.shape(M)[0]
    L, D = aux.matIdentidad(n), aux.matIdentidad(n)
    print('L:\n', L, '\nD:\n', D)
    for k in range(0, n):
        D[k, k] = M[k, k] - aux.dot(np.power(L[k, :k], 2), D[:k,:k].diagonal())
        if D[k, k] == 0:
            print("Método no aplicable")
            break
        for i in range(k + 1, n):
            L[i, k] = (M[i, k] - aux.dot(np.multiply(L[i, :k], L[k, :k]), D[:k, :k].diagonal())) / D[k, k]
        D, L= np.round(D, prec), np.round(L, prec)
        print('L:\n', L, '\nD:\n', D)
    return L, D
```

Figura: LDL^t

Solución

d) *Obtendremos las matrices:*

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1.1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 4.9 \end{pmatrix}$$

Luego transformamos $A'x = b' \longrightarrow LDL^t x = b'$.
Y hacemos el siguiente artificio:
$(DL^t) \cdot x = z \qquad \longrightarrow \qquad L \cdot z = b'$
Operamos para obtener la matriz z.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1.1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16632 \\ -17276 \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16632 \\ 1019.2 \end{pmatrix}$$

Realizaremos el siguiente artificio: $L^t \cdot x = s \qquad \longrightarrow \qquad D \cdot s = z$
Operamos para obtener la matriz s.

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 4.9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16632 \\ 1019.2 \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1663.2 \\ 208 \end{pmatrix}$$

Ahora resolveremos $L^t \cdot x = s$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1.1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1663.2 \\ 208 \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1892 \\ 208 \end{pmatrix}$$

Obteniendo así la solución del problema.

Solución

d) *Realizaremos la factorización de Cholesky mediante el uso de un algoritmo aplicado en python, el cual nos entregará la matriz L.*
Siendo el código:

```python
def cholesky(A, prec = 10):
    M = np.copy(A)
    n = np.shape(M)[0]
    L = aux.matIdentidad(n)
    print('L:\n', L)
    for j in range(0, n):
        try:
            L[j, j] = math.sqrt(M[j, j] - np.sum(np.power(L[j, :j], 2)))
        except ValueError:
            print("Método no aplicable: Matriz no es simétrica definida positiva.")
            return
        for i in range(j + 1, n):
            L[i, j] = (M[i, j] - aux.dot(L[i, :j], L[j, :j])) / L[j, j]
        # L = np.around(L, prec)
        print('L:\n', L)
    return L
```

Figura: *Cholesky*

Solución

d) *Obtendremos la matriz:*

$$L = \begin{pmatrix} 3.16227766 & 0 \\ -3.47850543 & 2.21359436 \end{pmatrix}$$

Luego transformamos $A'x = b' \longrightarrow LL^tx = b'$.
Y hacemos el siguiente artificio:
$L^t \cdot x = z \qquad \longrightarrow \qquad L \cdot z = b'$
Operamos para obtener la matriz z.

$$\begin{pmatrix} 3.16227766 & 0 \\ -3.47850543 & 2.21359436 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16632 \\ -17276 \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5259.5002 \\ 460.42763 \end{pmatrix}$$

Ahora resolveremos $L^t \cdot x = z$.

$$\begin{pmatrix} 3.16227766 & -3.47850543 \\ 0 & 2.21359436 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5259.5002 \\ 460.42763 \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1892 \\ 208 \end{pmatrix}$$

Obteniendo así la solución del problema.

12. En una heladería, por 1 helado, 2 zumos y 4 batidos nos cobraron S$/35$. Otro día, por 4 helados, 4 zumos y 1 batido nos cobraron S$/34$. Un tercer día por 2 helados, 3 zumos y 4 batidos S$/42$. Determine el precio de cada uno según el siguiente requerimiento.
   a) Modele el sistema.
   b) Resuelve el sistema usando el método de Parlett-Reid.

Solución

a) *Sean x el precio del helado, y el precio del zumo y z el precio del batido. Entonces, resulta el siguiente sistema lineal*

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 35 \\ 4x + 4y + z = 34 \\ 2x + 3y + 4z = 42 \end{cases}$$

b) *En notación matricial $Ax = b$,*

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 35 \\ 34 \\ 42 \end{bmatrix}}_{b}$$

.

Pero A no es simétrica, por lo que no se puede aplicar la descomposición Parlett-Reid. Así que realizamos el intercambio de filas para que la matriz sea simétrica.

Solución

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 42 \\ 34 \end{bmatrix}.$$

La descomposición Parlett-Reid es de la forma $PAP^T = LTL^T$, lo cual nos llevara $n-2$ pasos.
Ahora, A es simétrica e indefinida porque tiene al menos un autovalor negativo y positivo. Ahora realizaremos las iteraciones:

Etapa $k = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Buscamos el elemento del vector $\begin{bmatrix} a_{21} & a_{31} \end{bmatrix}$ de mayor valor absoluto y se determina una permutación, que representaremos por P_1, tal que:

$$P_1 \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{a}_2 \\ \widehat{a}_3 \end{bmatrix},$$

donde $|\widehat{a_2}| = \max\{|\widehat{a_{21}}|, |\widehat{a_{31}}|\}$.

Solución

b) *Donde* $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\widehat{a_3}}{\widehat{a_2}} \end{bmatrix}$, $P_1 = \begin{bmatrix} e_1 & e_3 & e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. *Entonces*

$$M_1 = I_3 - \alpha_1 e_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{(1)} = M_1 P_1 A P_1^T M_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 7/2 \\ 0 & 7/2 & -3/4 \end{bmatrix} = T.$$

Ya tenemos la matriz tridiagonal, se cumplieron los $n-2$ *pasos. Por lo tanto,*

$$P = P_{n-2} \cdots P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \left(M_1 P_1 P^T \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Mediante la factorización, resolvemos $Ax = b$ en las siguientes etapas:

- $Lz = Pb$.
- $TW = z$. (Las matrices tridiagonales se resuelven por el algoritmo Thomas).
- $L^T y = W$
- $x = P^T y$.

$$z = \begin{bmatrix} 35 & -106 & 0.2666 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 4 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Estos resultados están calculados en el siguiente programa, mediante la resolución de matrices y sustitución para obtener $[x, y, z]$. Finalmente, los precios son:

$$x : \text{precio del helado} = 3$$
$$y : \text{precio del zumo} = 4$$
$$z : \text{precio del batido} = 6$$

```
Parlett -REID


Matriz L:
[[1.  0.  0. ]
 [0.  1.  0. ]
 [0.  0.5 1. ]]

Matriz P:
[[1. 0. 0.]
 [0. 0. 1.]
 [0. 1. 0.]]

Matriz T:
[[ 1.    4.    0.  ]
 [ 4.    1.    3.5 ]
 [ 0.    3.5  -0.75]]

Vector z:
[35.0, -106.0, 0.2666666666666657]

Vector W:
[3.0000000000000107, 7.999999999999997, 3.9999999999999867]

Vector y:
[3.0000000000000107, 6.0000000000000036, 3.9999999999999867]

Solución mediante el método de Parlett-Reid:
[3. 4. 6.]
```

15. Encuentre la descomposición de valores singulares de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & i \\ 0 & i \end{bmatrix}$.

Solución

Buscamos

$$A = U\Sigma V^*.$$

Encontremos los autovalores de

$$B = AA^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & i \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & i \\ 0 & i \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & i \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -i & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces, el polinomio característico de la matriz AA^* es

$$P_{A^*A}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Entonces, tenemos que $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 0$. Los autovectores son

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Solución

Luego, $\sigma_1 = \sqrt{3}$ *y* $\sigma_2 = 1$. *Osea*

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz U *resulta*

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}.$$

Ahora,

$$v_1 = \frac{1}{\sigma_1}.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & i \\ 0 & i \end{bmatrix}^* u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -i & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}i}{2} \end{bmatrix}.$$

$$v_2 = \frac{1}{\sigma_2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & i \\ 0 & i \end{bmatrix}^* u_2 = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -i & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}i}{2} \end{bmatrix}.$$

Solución

Por lo tanto,

$$V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}i}{2} & -\frac{\sqrt{2}i}{2} \end{bmatrix}.$$

Finalmente, hemos conseguido la descomposición de valores singulares de la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & i \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{6}}{6} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \dfrac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \dfrac{\sqrt{6}}{6} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}i}{2} & -\frac{\sqrt{2}i}{2} \end{bmatrix}^{*}.$$

Definición (Definida positiva)

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times}$ una matriz. Decimos que A es definida positiva sii $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : x^T A x > 0$.

Ejemplo

Sea $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ una matriz no simétrica. Entonces, para todo $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ se tiene que

$$x^T M x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (x_1 + x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 > 0.$$

$\therefore M$ es definida positiva.

Teorema

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times}$ una matriz simétrica. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- *A es definida positiva.*
- *Todas las matrices esquina A_k tienen determinante positivo.*
- *A puede ser reducida a su forma triangular superior usando solo las operaciones elementales filas del tipo un múltiplo de una fila es sumada a otra fila y los elementos pivote serán todos positivos.*
- *A tiene una factorización de Cholesky LL^T (donde L es triangular inferior con entradas positivas en su diagonal).*
- *A puede factorizarse como $B^T B$ para alguna matriz B no singular.*

21. Determine si la matriz $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 29 \end{bmatrix}$ es definida positiva.

Solución (Primera forma)

Sea $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. *Entonces,*

$$x^T Bx = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$x^T Bx = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 29x_3^2 + 4x_1 x_2 + 12x_1 x_3 + 10x_2 x_3.$$

$$x^T Bx = 4x_1^2 + x_2^2 + \left\{(5x_3)^2 + 2\,(x_2)\,(5x_3) + (x_2)^2\right\} + 4x_1 x_2 + 12x_1 x_3 + (2x_3)^2 + 9x_1^2 - 9x_1^2.$$

$$x^T Bx = \left\{(3x_1)^2 + 2\,(3x_1)\,(2x_3) + (2x_3)^2\right\} + \left\{(5x_3)^2 + 2\,(x_2)\,(5x_3) + (x_2)^2\right\} + \left\{(2x_1)^2 + 2\,(2x_1)\,(x_2) + (x_2)^2\right\}.$$

$$(\bigstar) \qquad x^T Bx = (3x_1 + 2x_3)^2 - (3x_1)^2 + \underbrace{(x_2 + 5x_3)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(2x_1 + x_2)^2}_{\geq 0}.$$

Para verificar que $(\bigstar)$ *es positivo, supongamos que* $(\bigstar)$ *es cero, es decir,*

$$0 = (3x_1 + 2x_3)^2 - (3x_1)^2 + \underbrace{(x_2 + 5x_3)^2}_{=0} + \underbrace{(2x_1 + x_2)^2}_{=0}$$

Osea,

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{eliminación gaussiana}} \begin{cases} x_1 = 5t \\ x_2 = -10t \\ x_3 = 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Pero,

$$(3x_1 + 2x_3)^2 - (3x_1)^2 = (15t + 4t)^2 - (15t)^2 = 136t^2 > 0.$$

Entonces, $\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$:

$$x^T Bx = (3x_1 + 2x_3)^2 - (3x_1)^2 + (x_2 + 5x_3)^2 + (2x_1 + x_2)^2 > 0$$

$\therefore B$ es definida positiva.

Solución (Segunda forma)

Como $B = B^T$ es simétrica, por el teorema anterior, cada matriz esquina B_1, B_2 y B_3 tienen determinante positivo sii B es definida positiva.

$$\begin{aligned}
|B_1| &= |b_{11}| = |4| = 4 > 0. \\
|B_2| &= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0. \\
|B_3| &= |B| = 64 > 0.
\end{aligned}$$

$\therefore$ B *es definida positiva.*

27. La empresa de robótica Nobot produce tres robots de juguete, modelos Dot, Lea y Liz. Para fabricar cada robot de juguete, la empresa debe utilizar las horas de mano de obra para codificar, el montaje y la pintura. Las cantidades para cada robot se muestran en la siguiente tabla:

	Dot	Lea	Liz
Coding	4	5	1
Assembly	7	9	2
Painting	4	2	1

Hay 165 horas de mano de obra disponibles para la codificación, 295 horas de mano de obra para el montaje y 150 horas de mano de obra disponible para pintar cada día. ¿Cuántos de cada modelo se deben producir en un día, si se utilizan todas las horas de mano de obra? Utilice el método de eliminación gaussiana con pivote parcial mediante la factorización $PA = LU$.

Solución

.

Solución

.

30. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$. Calcule la descomposición de valores singulares de A.

Solución

El polinomio característico de la matriz $A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$ *es*

$$P_{A^T A}(\lambda) = \left| A^T A - \lambda I \right| = \left| \begin{bmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 13-\lambda & 12 & 2 \\ 12 & 13-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-25)(\lambda-9).$$

Las raíces de $P_{A^T A}(\lambda) = 0$ *son los autovalores de* $A^T A$*, a saber,* $\lambda_1 = 25$*,* $\lambda_2 = 9$ *y* $\lambda_3 = 0$*.*
Hallemos una base para los autoespacios de $A^T A$

$$S(\lambda_i) = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid A^T A v = \lambda_i v \right\} \quad \textit{para } i = 1, 2, 3.$$

- Para $\lambda_1 = 25$,

$$P_{A^T A}(\lambda) = \begin{vmatrix} 13-\lambda_1 & 12 & 2 \\ 12 & 13-\lambda_1 & -2 \\ 2 & -2 & 8-\lambda_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12 & 12 & 2 \\ 12 & -12 & -2 \\ 2 & -2 & -17 \end{vmatrix}.$$

Solución

Haciendo operaciones fila reducimos la matriz quedando:

$$P_{A^TA}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ahora hallaremos el espacio nulo mediante la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo obtenemos que el conjunto solución es:

$$x_1 = t, \quad x_2 = t, \quad x_3 = 0.$$

Entonces tenemos que el autovector v_1 *para* $\lambda_1 = 25$*:*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t = v_1 t.$$

- Para $\lambda_2 = 9$,

$$P_{A^TA}(\lambda) = \begin{vmatrix} 13-\lambda_2 & 12 & 2 \\ 12 & 13-\lambda_2 & -2 \\ 2 & -2 & 8-\lambda_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 12 & 2 \\ 12 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Haciendo operaciones fila reducimos la matriz quedando:

$$P_{A^TA}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

.

Ahora hallaremos el espacio nulo mediante la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolviendo obtenemos que el conjunto solución es:

$$x_1 = \frac{t}{4} \quad x_2 = -\frac{t}{4} \quad x_3 = t.$$

Entonces tenemos que el autovector v_2 para $\lambda_2 = 9$ es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t}{4} \\ -\frac{t}{4} \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} t = v_2 t$$

- Para $\lambda_3 = 0$,

$$P_{A^TA}(\lambda) = \begin{vmatrix} 13-\lambda_3 & 12 & 2 \\ 12 & 13-\lambda_3 & -2 \\ 2 & -2 & 8-\lambda_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{vmatrix}.$$

Haciendo operaciones fila reducimos la matriz quedando:

$$P_{A^TA}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ahora hallaremos el espacio nulo mediante la siguiente ecuación:
Resolviendo obtenemos que el conjunto solución es:

$$x_1 = -2t, \quad x_2 = 2t, \quad x_3 = t$$

Entonces tenemos que el autovector v_3 para $\lambda_3 = 0$ es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ 2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} t = v_3 t.$$

Solución

Encontraremos las raíces cuadradas de los autovalores propios distintos de cero: $\sigma_1 = \sqrt{25} = 5$ *y* $\sigma_2 = \sqrt{9} = 3$.
La matriz Σ *es una matriz cero con diagonales* σ_i *diferentes de cero.*

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las columnas de la matriz V*, son los vectores normalizados:*

$$V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Su transpuesta sería

$$V^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Solución

La matriz U está formada por columnas μ cuyos autovalores sean diferentes de cero:

$$\mu_1 = \frac{1}{\sigma_1} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} v_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\sigma_2} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} v_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Entonces tenemos que la matriz U es: $U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

Entonces ya tendríamos la descomposición SVD $A = U\Sigma V^T$:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Referencias

- Libros

Richard L. Burden, J. Douglas Faires y Annette M. Burden. *Análisis Numérico*. 10ª ed. Cengage Learning, 2017. URL: https://latam.cengage.com/libros/analisis-numerico-2.

Günther Hämmerlin y Karl-Heinz Hoffman. *Numerical Mathematics*. Springer New York, 1991. DOI: 10.1007/978-1-4612-4442-4.

David R. Kincaid y E. Ward Cheney. *Numerical Mathematics and Computing*. 7ª ed. Cengage Learning, 2012.

David R. Kincaid et al. *Análisis Numérico: las matemáticas del cálculo científico*. 1ª ed. Addison - Wesley Iberoamericana, 1994.

Rainer Kress. *Numerical Analysis*. Springer New York, 1998. DOI: 10.1007/978-1-4612-0599-9_1.

Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco y Fausto Saleri. *Numerical Mathematics*. Springer Berlin Heidelberg, 2007. DOI: 10.1007/b98885.

- Artículos científicos

David Goldberg. "What Every Computer Scientist Should Know about Floating-Point Arithmetic". En: *ACM Comput. Surv.* 23.1 (mar. de 1991), págs. 5-48. ISSN: 0360-0300. DOI: 10.1145/103162.103163.

- Sitios web

Python Software Foundation. *Python 3.10.7 documentation*. URL: https://docs.python.org/3/library/functions.html#int (visitado 28-09-2022).