Matrices indefinidas.
Método de Parlet-Reid.

CM4F1

Ángel Enrique Ramírez Gutiérrez
aramirezg@uni.edu.pe

Escuela Profesional de Matemática
Universidad Nacional de Ingeniería

19 de octubre de 2022

Contenido

1. Matrices simétricas definidas positivas
1.1. Propiedades

2. Método de Parlett y Reid

Método de los autovalores

Dada una matriz simétrica A, se cumple:

1. A es **definida positiva** si y sólo si todos los autovalores de la matriz A son positivos y no nulos.
2. A es **definida negativa** si y sólo si todos los autovalores de la matriz A son negativos y no nulos.
3. A es **semidefinida positiva** si y sólo si todos los autovalores de la matriz A son positivos y alguno de ellos es nulo.
4. A es **semidefinida negativa** si y sólo si todos los autovalores de la matriz A son negativos y alguno de ellos es nulo.
5. A es **indefinida** si la matriz A posee autovalores positivos y negativos.

Método de los menores principales

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Dada una matriz simétrica A, se cumple:

1. A es **definida positiva** si y sólo si todos los menores principales (matrices esquina) son positivos, es decir, $A_i > 0\,(i = 1, 2, \ldots, n)$.
2. A es **definida negativa** si y sólo si todos los menores principales (matrices esquina) alternan de signo iniciando por negativo, es decir, $A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, ldots$.
3. A es **semidefinida positiva** si todos los menores principales (matrices esquina) son positivos (no nulos) excepto el último que sea cero.
4. A es **semidefinida negativa** si todos los menores principales (matrices esquina) alternan de signo iniciando por negativo (no nulos) excepto el último que sea nulo.
5. A es **indefinida** si el último menor es distinto de cero y la matriz A no es definida (positiva o negativa).
6. A es **indefinida** si el último menor es cero, los demás menores son no nulos y la matriz A no es semidefinida (positiva o negativa).

Matrices simétricas definidas positivas

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es definida positiva si $x^T Ax > 0$ para todo x no nulo en $\mathbb{R}^n$, semidefinida positiva si $x^T Ax \geq 0$ e indefinida si podemos encontrar $x, y \in \mathbb{R}^n$ tal que $(x^T Ax)(y^T Ay) < 0$.

Teorema 1

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es definida positiva y $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$ tiene rango k, entonces $B = X^T AX \in \mathbb{R}^{k\times k}$ también es definida positiva.

Demostración: Si $z \in \mathbb{R}^k$ es tal que $z^T Bz \leq 0$ entonces $(Xz)^T A(Xz) \leq 0$ y por lo tanto $Xz = 0$, como X tiene rango columna k entonces $z = 0$.

Corolario:

Si A es definida positiva entonces todas sus submatrices principales son definidas positivas. En particular los elementos diagonales son positivos.

Matrices simétricas definidas positivas

Demostración: Sea X la matriz formada con las columnas v_1, v_2, ..., v_k de la identidad I_n, X tiene rango columna k por lo tanto X^TAX es definida positiva. X es una submatriz de A y en particular si $k = 1$ tenemos un elemento diagonal.

Teorema:

A es definida positiva si y solo si la matriz $T = \frac{A+A^T}{2}$ tiene todos sus valores propios positivos.

Demostración: Como $x^TAx = x^TTx$ entonces $Tx = \lambda x$ implica $x^TAx = \lambda x^Tx$ y como A es definida positiva entonces λ es positiva. Ahora supongamos que T tiene valores propios positivos, por ser T simétrica la descomposición de Schur se escribe como $Q^TTQ = \mathrm{diag}(\lambda_i)$. Si $x \in \mathbb{R}^n$ y $y = Q^Tx$ entonces

$$x^TAx = x^TTx = y^T(Q^TTQ)y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_k y_k^2 > 0$$

Matrices simétricas definidas positivas

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Teorema:

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica semidefinida positiva, se cumple que

$$|a_{ij}| \leq (a_{ii} + a_{jj})/2 \tag{1}$$

$$|a_{ij}| \leq \sqrt{a_{ii}a_{jj}}, (i \neq j) \tag{2}$$

$$\max_{i,j} |a_{ij}| = \max_{i} a_{ii} \tag{3}$$

$$a_{ii} = 0 \implies a_{ij} = a_{ji} = 0, j = 1, \ldots, n \tag{4}$$

Demostración: Si $x = e_i + e_j$ entonces $0 \leq x^T Ax = a_{ii} + a_{jj} + 2a_{ij}$. Si por otro lado $x = e_i - e_j$, entonces $0 \leq x^T Ax = a_{ii} + a_{jj} - 2a_{ij}$. La desigualdad 1 se deduce de estos dos últimos resultados. La ecuación 3, que expresa el hecho de que el coeficiente de mayor valor absoluto de la matriz está en la diagonal principal, es consecuencia inmediata de la Proposición 1.

Demostración (cont.)

Para demostrar la desigualdad 2, supongamos sin pérdida de generalidad que $i = 1$ y $j = 2$ y consideremos la desigualdad

$$0 \leq [x, y] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2,$$

la cual se cumple dado que A es semidefinida positiva. Para asegurar que esta ecuación cuadrática se cumple, descomponiéndola de la forma

$$a_{11}\left(x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y\right)^2 + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\right)y^2$$

dado que $a_{11} \geq 0$ por ser A semidefinida positiva, basta que $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ sea positivo; es decir, se ha de cumplir que $|a_{12}| \leq \sqrt{a_{11}a_{22}}$.
La afirmación 4 se deduce de 2.

Matrices simétricas indefinidas

Recordemos que una matriz A se dice indefinida si para algun vector $x \neq 0$ la forma cuadrática $x^T Ax$ es positiva y para otros negativa. Aunque una matriz simétrica indefinida puede factorizarse de la forma LDL^T, los elementos de L y D pueden tomar valores arbitrarios.

Sea $A = \begin{bmatrix} \epsilon & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, la factorización LDL^T es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/\epsilon & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & -1/\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/\epsilon & 1 \end{bmatrix}^T$$

si $\epsilon \ll 1$ se producirán error de desbordamiento. Una forma de evitar este problema es utilizar pivotación, pero se destruiría la simetría de la matriz.

En primer lugar busquemos la factorización:

$$PAP^T = LTL^T$$

donde L es una matriz triangular inferior de diagonal unitaria, P representa una permutación tal que $|l_{ij}| \leq 1$ y T es un matriz tridiagonal de la forma

$$T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & \ddots & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}$$

Matrices simétricas indefinidas

Mediante una factorización como esta, la resolución del sistema $Ax = b$ constaría de las siguientes etapas:

1. $Lz = Pb$
2. $Tw = z$
3. $L^T y = w$
4. $x = P^T y$

Para resolver $Tw = z$ se utiliza la eliminación gaussiana en su variante para matrices tridiagonales, proceso que requiere n operaciones de multiplicación/división y suma/resta.

Contenido

1. Matrices simétricas definidas positivas
1.1. Propiedades

2. Método de Parlett y Reid

El método de Parlett y Reid

Este método se basa en la eliminación gaussiana. Para analizar su mecánica, apliquémoslo a una matriz A, 5×5, suponiendo que estamos en la etapa $k = 2$.
Al comienzo de esta etapa, la matriz A tiene la forma

$$A^{(1)} = M_1 P_1 A P_1^T M_1^T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ 0 & v_3 & * & * & * \\ 0 & v_4 & * & * & * \\ 0 & v_5 & * & * & * \end{bmatrix}$$

donde P representa una permutación tal que los módulos de los elementos de la transformación o eliminación de Gauss M_1 están acotados superiormente por la unidad.

El método de Parlett y Reid

En esta etapa $k = 2$ se busca el elemento del vector $[v_3, v_4, v_5]^T$ de mayor valor absoluto y se determina una permutación, que representaremos por $\tilde{P}_2$, tal que

$$\tilde{P}_2 \begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{v}_3 \\ \hat{v}_4 \\ \hat{v}_5 \end{bmatrix}, \text{ donde } |\hat{v}|_3 = \text{máx}\{|\hat{v}_3|, |\hat{v}_4|, |\hat{v}_5|\}$$

Si $\hat{v}_3$ es cero, se hace $M_2 = P_2 = I$ y se pasa a la etapa $k = 3$. Si no, se hace $P_2 = \operatorname{diag}(I_2, \tilde{P}_2)$, es decir una matriz diagonal en dos bloques (el primero I_2 y el segundo $\tilde{P}_2$), y $M_2 = I_5 - \alpha_2 e_3^T$ donde

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{v}_4/\hat{v}_3 \\ \hat{v}_5/\hat{v}_3 \end{bmatrix}$$

El resultado de esta etapa $k = 2$ será una matriz $A^{(2)}$ de la forma

$$A^{(2)} = M_2 P_2 A^{(1)} P_2^T M_2^T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \hat{v}_3 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{v}_3 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{bmatrix}$$

Este proceso se completa en $n - 2$ etapas al final de las cuales se obtiene la matriz tridiagonal que se deseaba:

$$T = A^{(n-2)} = (M_{n-2} P_{n-2} \cdots M_1 P_1) A (M_{n-2} P_{n-2} \cdots M_1 P_1)^T.$$

Si se hace $P = P_{n-2} \cdots P_1$ y $L = (M_{n-2} P_{n-2} \cdots M_1 P_1 P^T)^{-1}$, se puede comprobar que

$$PAP^T = LTL^T$$

La primera columna de L es e_1; las restantes k, $k > 1$ las forman los multiplicadores de M_{k-1}.

El método de Parlett y Reid

Ejemplo:

Aplicar el método de Parlett y Reid a

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución: En la primera etapa se tiene que:

$$P_1 = [e_1, e_4, e_3, e_2]$$

$$M_1 = I_4 - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} [0, 1, 0, 0]$$

$$A^{(1)} = M_1 P_1 A P_1^T M_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 7/9 & 5/9 \\ 0 & 2/3 & 5/9 & 10/9 \end{bmatrix}$$

En la segunda:

$$P_2 = [e_1, e_2, e_4, e_3]$$

$$M_2 = I_4 - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} [0, 0, 1, 0]$$

$$A^{(2)} = M_2 P_2 A^{(1)} P_2^T M_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 10/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Solución (cont.)

En resumen, $PAP^T = TL^T$, donde:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = (M_2 P_2 M_1 P_1 P^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 10/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

El método de Parlett y Reid

Para implementar de forma eficaz este método en ordenador hay que tener cuidado al calcular

$$A^{(k)} = M_k \left(P_k A^{(k-1)} P_k^T \right) M_k^T$$

Para apreciar las operaciones que implica esta fórmula, supongamos que $B = B^T$ es una matriz de orden $n-k$ y que se desea obtener

$$B_+ = \left(I - w e_1^T \right) B \left(I - w e_1^T \right)^T$$

donde $w \in \mathbb{R}^{n-k}$ y e_1 es la primera columna de I_{n-k}. Si se hace

$$u = B e_1 - \frac{b_{11}}{2} w,$$

la matriz simétrica B_+ es igual a $B - w u^T - u w^T$, la cual puede obtenerse realizando $(n-k)^2$ operaciones. Si esto se repite variando k de 1 a $n-2$, como es el caso del método de Parlett y Reid, el número total de operaciones que requiere el método es $O(n^3/3)$ multiplicaciones/divisiones y sumas/restas: dos veces más que las deseadas en principio.

Implementación Parlet-Reid I

```
function [L,T,P] = ParlettReid(A)
% function [L,T,P] = ParlettReid(A)
% Parlett-Reid factorization of a symmetric matrix.
% A is nxn and symmetric.
% L is nxn and unit lower triangular.
% T is nxn and tridiagonal.
% P is nxn and a permutation.
% PAP' = LTL'.
% GVL4: Section 4.4.1
n = length(A);
L = eye(n,n); T = zeros(n,n); P = eye(n,n);
u = zeros(n,1); w = zeros(n,1);
T(1,1) = A(1,1);      % alfa(1)
for k=1:n-2
   rows = k+1:n;
% Pivot computations...
```

Implementación Parlet-Reid II

```
   [tau,p] = max(abs(A(rows,k)));
   kpiv = p+k;
   L([kpiv k+1],2:k) = L([k+1 kpiv],2:k);
   P([kpiv k+1],:)   = P([k+1 kpiv],:);
   A([kpiv k+1],k:n) = A([k+1 kpiv],k:n);
   A(k:n,[kpiv,k+1]) = A(k:n,[k+1 kpiv]);
% Gauss vector computations...
   w(rows) = A(rows,k);
   T(k+1,k+1) = A(k+1,k+1);                          % alpha(k+1)
   T(k+1,k) = w(k+1); T(k,k+1) = w(k+1);             % beta(k)
   if tau>0
     w(k+2:n) = w(k+2:n)/w(k+1); w(k+1) = 0;
     L(k+2:n,k+1) = w(k+2:n);
   end
% The symmetric update...
   u(rows) = A(rows,k+1) - (A(k+1,k+1)/2)*w(rows);
```

Implementación Parlet-Reid III

```
    A(rows,rows) = A(rows,rows)-w(rows)*u(rows)'-u(rows)*w(rows)';
  end
  T(n,n-1) = A(n,n-1); T(n-1,n) = A(n-1,n);        % beta(n-1)
  T(n,n) = A(n,n);                                 % alpha(n)
```

Implementación Parlet-Reid I

```
function ShowParlettReid(A)
% function ShowParlettReid(A)
% Illustrates the Partlett-Reid factorization for a symmetric matrix A.
%A call of the form ShowParlettReid() generates a random 7x7 example.
if nargin==0
  n = 7;
  A = randn(n,n);
  A = A + A';
end
[L,T,P] = ParlettReid(A);
clc
fprintf('Parlett-Reid␣Factorization\n\n')
fprintf('A\n'),disp(A)
fprintf('P\n'),disp(P)
fprintf('L\n'),disp(L)
fprintf('T\n'),disp(T)
```

Implementación Parlet-Reid II

```
fprintf('||PAP'' - LTL'' || = %10.3e\n\n',norm(P*A*P' - L*T*L'))
```

Ejemplo:

Determine la factorización de Parlet-Reid de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 9 & -6 \\ 2 & 5 & -6 & 9 \\ 9 & -6 & 5 & 2 \\ -6 & 9 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Determine la factorización de Parlet-Reid de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 & -6 & 9 \\ 2 & 10 & 2 & -6 & 9 \\ 2 & 2 & 10 & -6 & 9 \\ -6 & -6 & -6 & 26 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & -19 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Determine la factorización de Parlet-Reid de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Referencias

- De la Fuente O'Connor, José Luis, *Técnicas de cálculo para sistemas de ecuaciones, programación lineal y programación entera*. Universidad Politécnica de Madrid.
- Domínguez Jiménez, M. *Matrices: un modelo para las fotografías digitales*. Modelling in Science Education and Learning, 2011.
- Grossman, S., *Álgebra Lineal*, Mc Graw Hill, 2008.
- Burden, R. Faires, Douglas., *Análisis Numérico*. Grupo Editorial Iberoamericana, México, 1985.
- Demmel, J., *Applied Numerical Linear Algebra*. Siam, Philadelphia, , 1997.
- Matrix Computations, 4th Edition. G.H. Golub and C.F. Van Loan.
- Numerical methods for linear control systems. Biswa Datta.
- An introduction to Numerical Analysis. Atkinson, Kendal.

Bibliografía