Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2021-2**

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

Solucionario Práctica Calificada 03

1. **Justifique su respuesta, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:**

   (a) **[1 *pto.*] Si A posee una descomposición LU, simétrica e invertible, entonces existe un D tal que $A = LDL^T$.**

   (b) **[1 *pto.*] Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, entonces A admite una descomposición LU, donde L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y U es una matriz triangular superior.**

   (c) **[1 *pto.*] Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, entonces A admite una descomposición UL, donde L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y U es una matriz triangular superior.**

   (d) **[1 *pto.*] Sea A es una matriz triangular superior de orden 5×5 e invertible, entonces su inversa es también es una triangular superior.**

   (a) **(V). Desde que la matriz es simétrica e invertible tenemos**

$$U^T L^T = A^T = A = LU \quad \Rightarrow \quad U(L^T)^{-1} = L^{-1}U^T.$$

   Definiendo $D = U(L^T)^{-1}$, tenemos $A = LU(L^T)^{-1}(L^T) = LDL^T$.

   (b) **(F). Supongamos que $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}$, obtenemos que $u_{11} = 0$ y $l_{21}u_{11} = 1$, lo cual es absurdo.**

   (c) **(V). Tome $U = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.**

(d) (V). Sea $U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} & u_{35} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} & u_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{55} \end{bmatrix}$, desde que ella es invertible tenemos $U^{-1}U = I$,

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} & u_{35} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} & u_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de la anterior obtenemos $u_{ii} \neq 0$, para todo $i = 1, 2, 3, 4, 5$ y de ello tenemos que $m_{i1}u_{11} = 0$, para $i = 1, \ldots, 5$ y lo que implica que $m_{i1} = 0$, para $i = 1, \ldots, 5$ procediendo de la misma para las columnas de $j = 2, 3, 4, 5$ de U, obtenemos que $m_{ij} = 0$, para $i > j$.

2. Hay tres tipos de cereal, de los cuales tres fardos del primero, dos del segundo, y uno del tercero hacen 39 medidas. Dos del primero, tres del segundo y uno del tercero hacen 34 medidas. Y uno del primero, dos del segundo y tres del tercero hacen 26 medidas. Determine la medida de cereal que contiene un fardo de cada tipo, según el siguiente requerimiento.

   (a) [1 *pto.*] Modele el problema.

   (b) [1 *pto.*] Determine el número de condición del problema.

   (c) [1 *pto.*] Determine la solución aproximada, usando el método de Gauss.

   (d) [1 *pto.*] Determine el vector residual.

   Solución:

   (a) [1 *pto.*] Sean

$$\begin{aligned} x &: \text{ Cantidad de fardos del cereal 1.} \\ y &: \text{ Cantidad de fardos del cereal 2.} \\ z &: \text{ Cantidad de fardos del cereal 3.} \end{aligned}$$

   Donde

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & + & z & = & 39 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 34 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 26 \end{array}$$

   (b) [1 *pto.*] Por el método de Gauss-Jordan tenemos:

$$T = T_3 * T_2 * T_1 = \begin{bmatrix} 0.5833333 & -0.3333333 & -0.0833333 \\ -0.4166667 & 0.6666667 & -0.0833333 \\ 0.0833333 & -0.3333333 & 0.4166667 \end{bmatrix} \wedge U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El número de condición del problema es:

$$Cond_{\infty}(A) = \left\| \begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \right\|_{\infty} \left\| \begin{matrix} 0.5833333 & -0.3333333 & -0.0833333 \\ -0.4166667 & 0.6666667 & -0.0833333 \\ 0.0833333 & -0.3333333 & 0.4166667 \end{matrix} \right\|_{\infty} = 6(1.1666667) = 7$$

(c) [1 *pto.*] Por el método de Gauss:

$$L = L_2 * L_1 = \begin{bmatrix} 1.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 \\ -0.6666667 & 1.0000000 & 0.0000000 \\ 0.2000001 & -0.8000000 & 1.0000000 \end{bmatrix}$$

y

$$U = \begin{bmatrix} 3.0000000 & 2.0000000 & 1.0000000 \\ 0.0000000 & 1.6666667 & 0.3333333 \\ 0.0000000 & 0.0000000 & 2.4000000 \end{bmatrix}$$

Resolviendo, se tiene:

$$\widetilde{x} = \begin{bmatrix} 9.25 \\ 4.25 \\ 2.75 \end{bmatrix}.$$

(d) [1 *pto.*] El vector residual es:

$$R = A \cdot \widetilde{x} - b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Dado tres números, la diferencia entre el mediano y el menor equivale al mayor disminuído en 13, la suma de tres números es 37; el menor disminuído en 1 equivale a $\frac{1}{3}$ de la suma del mayor y el mediano. Determine los números según el siguiente requerimiento.

(a) [1 *pto.*] Modele el problema.

(b) [1 *pto.*] Determine el número de condición del problema.

(c) [1 *pto.*] Determine la solución aproximada, usando el método de Gauss-Jordan.

(d) [1 *pto.*] Determine el vector residual.

Solución:

(a) [1 *pto.*] Sean

$$\begin{aligned} x &: \text{ El número mayor.} \\ y &: \text{ El número mediano.} \\ z &: \text{ El número menor.} \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 13 \\ x & + & y & + & z & = & 37 \\ -x & - & y & + & 3z & = & 3 \end{array}$$

(b) [1 *pto.*] Usando (c). El número de condición del problema es:

$$Cond_{\infty}(A) = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{matrix} \right\|_{\infty} \left\| \begin{matrix} 0.50 & 0.25 & -0.25 \\ -0.50 & 0.50 & 0.00 \\ 0.00 & 0.25 & 0.25 \end{matrix} \right\|_{\infty} = 5(1) = 5$$

(c) [1 *pto.*] Por el método de Gauss-Jordan:

$$T = T_3 * T_2 * T_1 = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.25 & -0.25 \\ -0.50 & 0.50 & 0.00 \\ 0.00 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \wedge U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo, se tiene:

$$\widetilde{x} = \begin{bmatrix} 15 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

(d) [1 *pto.*] El vector residual es:

$$R = A \cdot \widetilde{x} - b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. Suponga que $A = P^T LU$, donde P es la matriz de permutación, L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y U es una matriz triangular superior.

(a) [1 *pto.*] Demuestre que, si P contiene k intercambios de reglones, entonces

$$det(P) = det(P^T) = (-1)^k.$$

(b) Si

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

i. [2 *ptos.*] Determine las matrices P, L y U.

ii. [1 *pto.*] Calcule el determinante de la matriz A

Solución:

(a) Desde que P es obtenida de la matriz identidad I por intercambio de fila se tiene que $det(P) = det(P^T) = (-1)^k det(I) = (-1)^k$.

(b) i. Obtenemos las matrices

ii. $$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

iii. $\boldsymbol{det(A) = 9.}$

5. [4 $\boldsymbol{pts.}$**] Realizó la exposición en la práctica dirigida.**

20 de Octubre del 2021