Polinomios de Berstein, Bezier y algoritmo de Casteljou.

Aproximación

CM4F1

Ángel Enrique Ramírez Gutiérrez
aramirezg@uni.edu.pe

Escuela Profesional de Matemática
Universidad Nacional de Ingeniería

14 de julio de 2022

Contenido

Polinomios de Bernstein

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Definición

Los polinomios:

$$B_{k,n}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

, son llamados **funciones base de Bernstein** de grado n en $[0, 1]$.

En $[a, b]$ se tienen las funciones base de Bernstein generalizadas de grado n dadas por:

$$B_{k,n}(a, b, t) = B_{k,n}\left(\frac{t-a}{b-a}\right) = \binom{n}{k} \frac{(t-a)^k (b-t)^{n-k}}{(b-a)^n}$$

para todo $k = 0, \ldots, n$.

Propiedades

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Proposición

Se cumple $B_{k,n}(t) > 0$ para todo $0 < t < 1$ y para $k = 0, \ldots, n$.

Esto es claro desde que $t > 0$ y $1 - t > 0$ para todo $t \in \langle 0, 1\rangle$.

Una propiedad crucial de los polinomios de Bernstein de grado n es el hecho que ellas forman una partición de la unidad.

Proposición

Se cumple:

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = 1$$

para todo $t \in [0, 1]$.

Propiedades

Demostración:
Por el Teorema Binomial de Newton, se cumple:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

escogiendo $a = t$ y $b = 1 - t$ resulta:

$$1 = [t + (1-t)]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

Propiedades

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

El siguiente resultado nos da una relación entre las derivadas de los polinomios de Bernstein.

Proposición

Se cumple:

$$B'_{k,n}(t) = n[B_{k-1,n-1}(t) - B_{k,n-1}(t)]$$

para $k = 0, \ldots, n$; donde por convención $B_{-1,n-1} \equiv 0$ y $B_{n,n-1} \equiv 0$.

Demostración:

Para $k \neq 0, n$ se tiene:

$$B'_{k,n}(t) = \binom{n}{k}\left[kt^{k-1}(1-t)^{n-k} - (n-k)t^k(1-t)^{n-k-1}\right]$$

a partir de:

$$\binom{n}{k}k = n\binom{n-1}{k-1}, \quad \binom{n}{k}(n-k) = n\binom{n-1}{k}$$

se sigue que:

$$B'_{k,n}(t) = n\left[\binom{n-1}{k-1}t^{k-1}(1-t)^{n-1-(k-1)} - \binom{n-1}{k}t^k(1-t)^{n-1-k}\right]$$

Para $k = 0$ y $k = n$ se procede a calcular directamente las derivadas, resultando:

$$B'_{0,n}(t) = -nB_{0,n-1}(t), \quad B'_{n,n}(t) = nB_{n-1,n-1}(t).$$

Propiedades

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Los polinomios de Bernstein son **unimodales**, es decir, asumen exactamente un máximo en el intervalo $[0, 1]$.

$B_{k,n}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$

Proposición

El máximo valor de $B_{k,n}(t)$ es alcanzado en $t = k/n$, donde:

$$B_{k/n} = \binom{n}{k} \frac{k^k (n-k)^{n-k}}{n^n}$$

Demostración: Del teorema anterior se tiene:

$$\begin{aligned} B'_{k,n}(t) &= \binom{n}{k} \left[k t^{k-1} (1-t)^{n-k} - (n-k) t^k (1-t)^{n-k-1} \right] \\ &= \binom{n}{k} t^{k-1} (1-t)^{n-k-1} [k(1-t) - (n-k)t] \\ &= \binom{n}{k} t^{k-1} (1-t)^{n-k-1} [k - nt] \end{aligned}$$

de modo que $B'_{k,n} = 0$ para $t = 0, 1, k/n$.

Demostración (cont.)

$B_{k,n}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$

$B_{\frac{k}{n}} := B_{k,n}\left(\frac{k}{n}\right) = \binom{n}{k}\left(\frac{k}{n}\right)^k\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-k}$

Para $k \neq 0$ se tiene $B_{k,n} = B_{k,n}(1) = 0$ y como las funciones base de Bernstein son positivas en el interior del intervalo $[0,1]$, se sigue que $t = k/n$ es un punto de máximo global para $B_{k,n}$ en $[0,1]$. Como $B_{0,n}(t) = (1-t)^n$ y $B_{n,n}(t) = t^n$, se observa que 0 y 1 son puntos de máximo global respectivamente para estas dos funciones. Por último:

$$B_{k/n}\left(\frac{k}{n}\right) = \binom{n}{k}\left(\frac{k}{n}\right)^k\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\frac{k^k(n-k)^{n-k}}{n^n}.$$

Proposición

Las funciones base de Bernstein de grado n forman una base para el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a n.

$\mathbb{P}_n = \{$ Polinomios de grado $\leq n \}$
$\dim(\mathbb{P}_n) = n+1$ $\quad \mathbb{B} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$

Como la dimensión de este espacio vectorial es $n+1$, para demostrar el resultado, basta probar que las $n+1$ funciones base de Bernstein de grado n son linealmente independientes. Para ello, suponga que:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} c_k B_{k,n}(t) = 0}$$

Mostraremos que $c_k = 0$ para todo k. En efecto:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} c_k B_{k,n}(t) &= \sum_{k=0}^{n} c_k \binom{n}{k} t^k \boxed{(1-t)^{n-k}} \quad \text{Binomio de Newton} \\
&= \sum_{k=0}^{n} c_k \binom{n}{k} \cancel{t^k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^{n-k-j} t^{n-\cancel{k}-j} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^{n-k-j} t^{n-j} \quad c_k
\end{aligned}$$

Demostración:(cont.)

$$\sum_{k=0}^{n} c_k B_{k,n}(t) = \sum_{j=0}^{n} t^{n-j} \sum_{k=0}^{n-j} c_k \binom{n}{k}\binom{n-k}{j}(-1)^{n-k-j}$$

definiendo:

$$a_{k,j} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{j}(-1)^{n-k-j}$$

observando que los coeficientes a_{kj} ~~son positivos~~ no nulos. Resulta:

$$\sum_{j=0}^{n} (a_{kj} c_k)\, t^{n-j} = 0$$

como $1, t, \ldots, t^n$ son linealmente independientes, se sigue que:

$$\sum_{k=0}^{n-j} a_{kj} c_k = 0$$

Demostración (cont.)

para $j = 0, 1, \ldots, n$. Es decir, resulta un sistema triangular con coeficientes a_{kj} positivos (haciendo $j = n, n-1, \ldots, 0$):

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
a_{0n}c_0 & = & 0 \\
\cancel{a_{01}c_0} + \cancel{a_{11}c_1} & = & 0 \\
\cancel{a_{02}c_0} + \cancel{a_{12}c_1} + a_{22}c_2 & = & 0 \\
 & \vdots & \\
\cancel{a_{0n}c_0} + \cancel{a_{1n}c_1} + \ldots + a_{n-1,n}c_{n-1} + a_{n,n}c_n & = & 0
\end{array}
\right.
$$

Resolviendo por sustitución progresiva resulta que $c_k = 0$ para todo k.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Los polinomios de Bernstein también cumplen las siguientes propiedades:

1. Simetría, es decir:

$B_{i,n}$

$$B_i^n(x) = B_{n-i}^n(1-x)$$

$= B_{n-i,n}$

para todo $x \in [0,1]$ y todo $i = 0, \dots, n$.

2. Fórmula de recurrencia:

$$B_i^n(x) = \begin{cases} (1-x)B_i^{n-1}(x), & i = 0 \\ (1-x)B_i^{n-1}(x) + xB_{i-1}^{n-1}(x), & \forall\, i = 1, \dots, n-1; \forall x \in [0,1] \\ xB_{i-1}^{n-1}(x), & i = n \end{cases}$$

$$\boxed{B_{i,n}(x) = (1-x)B_{i,n-1} + xB_{i-1,n-1}(x)}$$

Considerando: $B_{-1,n-1}(x) = 0$, $B_{n,n-1}(x) = 0$

Aproximación polinomial de Bernstein

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Definición

Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua. El polinomio $n-$ésimo de Bernstein $B(n, f, x)$ de la función f se define como:

$$B(n, f, x) = B_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Contenido

Resultados previos

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Definición:

Sea $f \in C[a,b]$. La **norma uniforme** o **norma del supremo** de f se define como sigue:

$$\|f\| := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

Observe que por el teorema de Weierstrass se cumple que $\|f\| < \infty$.

Definición:

Se dice que la sucesión de funciones $\{f_n\} \subseteq C[a,b]$ **converge uniformemente** hacia una función f si y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple $\|f_n - f\| < \varepsilon$.

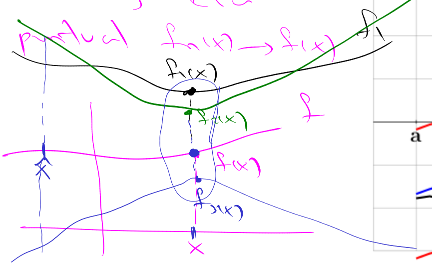
Observación:

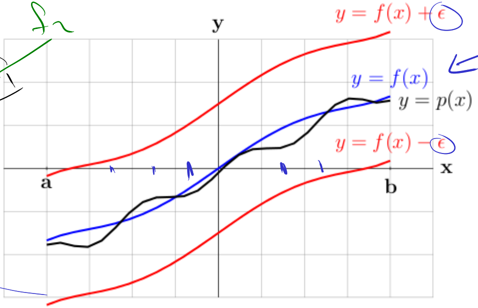
Una forma equivalente de convergencia uniforme: para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in [a,b]$.

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe una sucesión de polinomios $\{p_n\}$ que converge uniformemente a f en $[a, b]$.

Convergencia puntual $f_n(x) \to f(x)$





Convergencia uniforme

Figura: Interpretación geométrica T. de Weierstrass

A pesar que el Teorema de aproximación de Weierstrass afirma la existencia de polinomios que convergen uniformemente a una función continua, no es trivial encontrar dichos polinomios. Una demostración alternativa y de las más conocidas puede darse utilizando los polinomios de Bernstein y dado por el siguiente resultado:

Teorema

Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua. La sucesión de polinomios de Bernstein $\{B_n(f)\}$ converge uniformemente a f en $[0, 1]$.

Teorema de Aproximación Weierstrass

Para demostrar el teorema de aproximación de Weierstrass en cualquier intervalo $[a, b]$, es suficiente demostrarlo para el intervalo $[0, 1]$. La razón es que cualquier función f en el intervalo $[a, b]$ puede mapearse al intervalo $[0, 1]$ haciendo $x = \dfrac{a-y}{a-b}$ y cualquier función $g(y)$ en el intervalo $[0, 1]$ puede mapearse de regreso al intervalo $[a, b]$ haciendo $y = (b-a)x + a$. Además, si g es continua en $[a, b]$ entonces $f(x) = g((b-a)x + a)$ es continua en $[0, 1]$. Con lo cual, si un polinomio $P(x)$ de grado n aproxima a una función $f(x)$ en $[0, 1]$ entonces:

$$\hat{P}(y) = P\left(\frac{a-y}{a-b}\right)$$

de grado n aproxima a la función $g(y) = f\left(\dfrac{a-y}{a-b}\right)$ en $[a, b]$.

Primero damos algunos resultados preliminares. Sean $p, q \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Por el teorema del binomio:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n \tag{1}$$

Derivando respecto a " p ":

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k p^{k-1} q^{n-k} = n(p+q)^{n-1}$$

implicando:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} k p^k q^{n-k} = p(p+q)^{n-1} \tag{2}$$

Derivando nuevamente:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = p^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) (p+q)^{n-2} + \frac{p}{n}(p+q)^{n-1} \tag{3}$$

Sea $x \in [0,1]$ y sean $p = x$ y $q = 1 - x$, entonces por (1):

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1. \tag{4}$$

De (2) se obtiene:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x. \tag{5}$$

Por (3) resulta:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{x}{n}. \tag{6}$$

Siendo $p = x^k$, $q = (1-x)^{n-k}$ y $z = \binom{n}{k}pq$, los resultados anteriores permiten simplificar la siguiente expresión:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 z &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k^2}{n^2}-2x\frac{k}{n}+x^2\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - 2x\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}x^k(1-x)^{n-k} + x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&= x^2\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{x}{n}-2xx+x^2(1) \\
&= x\left(\frac{1-x}{n}\right)
\end{aligned}
$$

por tanto:

$$
\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = x\left(\frac{1-x}{n}\right) \quad \text{para todo} \quad x\in[0,1].
$$

Como f es continua en $[0,1]$ y este intervalo es compacto, entonces se cumple:

- El conjunto $f([0,1])$ es compacto. Entonces existe un número real $M > 0$ tal que:

$$|f(x)| < M \quad \text{para todo} \quad x \in [0,1].$$

- Se tiene que f es **uniformemente continua**, es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ para todo $x, y \in [0,1]$.

Dado x fijo pero arbitrario en $[0,1]$, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
|f(x) - B_n(f)(x)| &= \left| f(x) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \underbrace{\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}} \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \left[\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\right]
\end{aligned}
$$

Si:

$$\left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta \Rightarrow \left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Si:

$$\left|x-\frac{k}{n}\right|\geq \delta \Rightarrow \left(x-\frac{k}{n}\right)^2\geq \delta^2 \Rightarrow \frac{\left(x-\frac{k}{n}\right)^2}{\delta^2}\geq 1:$$

por tanto:

$|f(x)| \leq M$

$$\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leq 2M \leq 2M\frac{\left(x-\frac{k}{n}\right)^2}{\delta^2}$$

De las desigualdades anteriores se obtiene:

$$
\begin{aligned}
|f(x) - B_n(f)(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{2} + 2M \frac{\left(x - \frac{k}{n}\right)^2}{\delta^2} \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2} \frac{x(1-x)}{n} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2 n}
\end{aligned}
$$

porque $x(1-x) < 1$.

Demostración del Teorema de aproximación de Weierstrass

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

principio arquimedeano

Ahora, podemos elegir $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que:

$$n \geq \frac{4M}{\delta^2 \varepsilon}.$$

Finalmente resulta:

$$|f(x) - B_n(f)(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Contenido

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

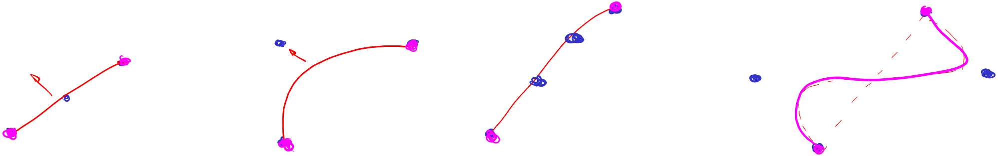
t-student

Curva de Bézier

Las curvas de Bézier [1] nacen en Francia a finales de los años ' 50, a raíz de un problema de diseño dentro de la industria automovilística. Por entonces ya eran conocidas algunas técnicas matemáticas que podrían implementarse informáticamente para la reproducción de curvas en el plano, como los splines cúbicos o los polinomios de aproximación de Lagrange. El problema de los splines es que hay que ir reproduciendo la curva a tramos pequeños. El problema de los polinomios de Lagrange, que si pueden reproducir un tramo largo de curva, es que en para obtener una buena aproximación hay que elevar el grado del polinomio, a veces demasiado, complicando así su representación gráfica, pero lo peor es que una pequeña modificación de los puntos de interpolación, es muy probable que ya no nos sirve el mismo polinomio y es necesario calcularlo de nuevo.

Curva de Bézier (cont.)

El matemático Paul de F. de Casteljau y el ingeniero Pierre E. Bézier, desarrollaron en forma paralela la teoria que permite obtener una curva que pase por determinados puntos o lo más aproximadamente posible, de manera que la curva resultante tenga un aspecto parecido al de la figura que se forma si unimos los puntos mediante segmentos. Por ejemplo, si los puntos son colineales, que la curva obtenida sea una recta y a medida que los puntos se van alejando de esta recta la curva tenga un comportamiento similar en los alrededores de los puntos que se alejan. Esta propiedad es lo que algunos autores llaman control pseudo-local o pseudo-control local.



Curva de Bézier

$C(t) = \sum_{k=0}^{n} P_k B_{k,n}(t)$ Curva de Bezier

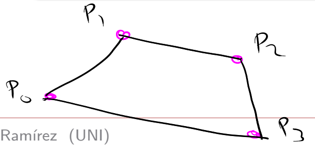
Dados $n+1$ puntos en el plano $P_0, \ldots, P_n$, la hoy llamada **curva de Bézier** definida por ellos está dada por el algoritmo recursivo siguiente:

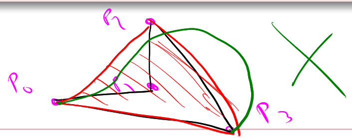
Definición (Algoritmo de Casteljau)

Para $r = 1, \ldots, n$ e $i = 0, \ldots, n-r$ definamos $P_i^0(t) = P_i$ y:

$$P_i^r(t) = (1-t)P_i^{r-1}(t) + tP_{i+1}^{r-1}(t), \quad t \in [0,1]$$

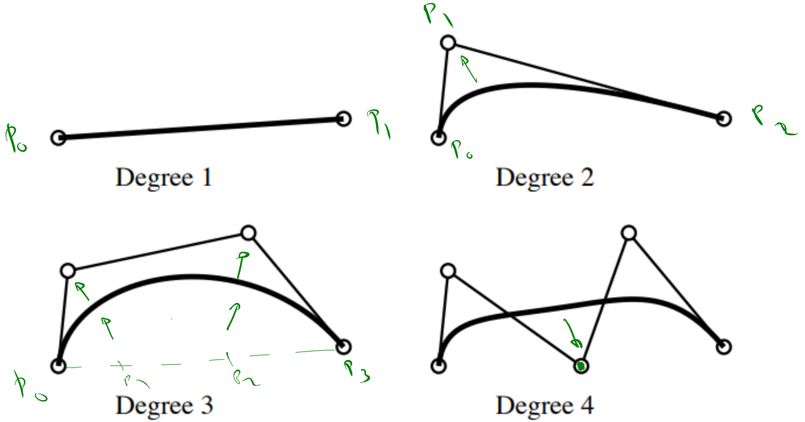
Entonces, la curva de Bézier asociada es $\alpha(t) = P_0(t)$, $t \in [0,1]$.
Los puntos P_i se llaman puntos o vértices de control y el polígono determinado por ellos se llama el **polígono de control** de la curva de Bézier.





Interpretación geométrica

La curva P_i^r es una curva polinomial de grado r. Los puntos de control se identifican, en el primer paso, con curvas de grado cero: el algoritmo de DeCasteljau construye en forma recursiva curvas de grado cada vez mayor, hasta llegar a curvas polinomiales de grado n



Ejemplo

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Si $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (0,2)$, $P_2 = (8,2)$, $P_3 = (4,0)$ son los puntos de control y evaluamos en la curva de grado 3 para $t = 1/2$

$$
\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \xrightarrow{1-t}
\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} \xrightarrow{t} \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \qquad
\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} \xrightarrow{1-t} \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}8\\2\end{bmatrix} \xrightarrow{t} \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}, \qquad
\begin{bmatrix}8\\2\end{bmatrix} \xrightarrow{1-t} \begin{bmatrix}6\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix} \xrightarrow{t} \begin{bmatrix}6\\1\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}2\\3/\cancel{4}\,2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}5\\3/2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}7/2\\3/2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\3/2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}5\\3/2\end{pmatrix}
$$

$$
C\left(\tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix}7/2\\3/2\end{pmatrix}
$$

Ejemplo

$C(t) = \sum_{k=0}^{2} P_k B_{k,n}(t)$ $\times$

$\boxed{\text{Algoritmo de Casteljau}}$ ✓

Considere los puntos de control P_0, P_1 y P_2, luego el algoritmo de DeCasteljau forma los siguientes polinomios

$$P_0^1(t) = (1-t)P_0 + tP_1 \qquad P_1^1(t) = (1-t)P_1 + tP_2$$

estos representan los segmentos que une P_0 con P_1 y P_1 con P_2, luego

$$\alpha(t) = (1-t)P_0^1 + tP_1^1 = (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2 P_2$$

es la curva de Bezier de grado 2.

$r=0$ $\qquad$ $r=1$ $\qquad$ $r=2$

P_0

$(1-t)P_0 + tP_1$

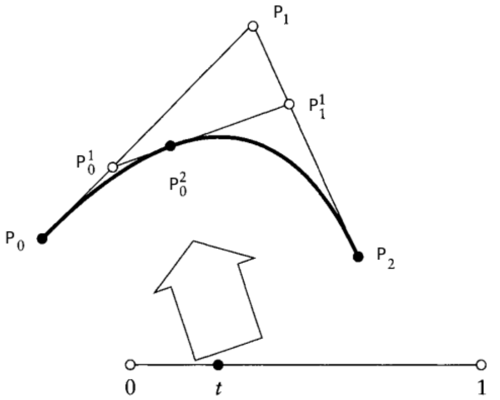
P_1 $\qquad$ $(1-t)\left[(1-t)P_0 + tP_1\right] + t\left[(1-t)P_1 + tP_2\right] = C(t)$

$(1-t)P_1 + tP_2$

P_2

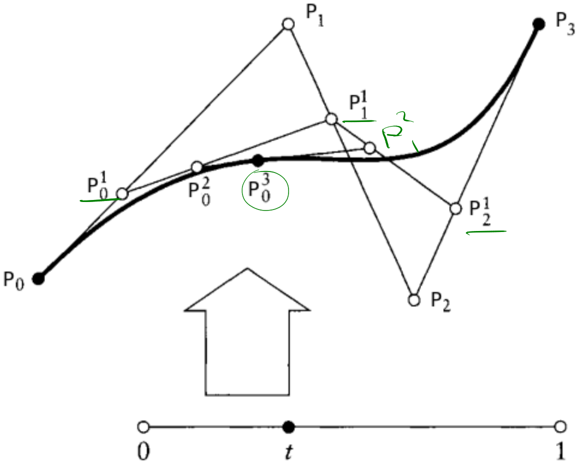
Interpretación geométrica

Vemos que se forma interpolando linealmente las curvas de grado 1.



Interpretación geométrica

De igual manera con 4 puntos obtenemos una curva cúbica



Propiedades

Proposición

Las curvas intermedias en el algoritmo de De Casteljau satisfacen

$$P_i^r(t) = \sum_{j=0}^{r} B_j^r(t) P_{i+j}$$

En particular, la curva de Bezier asociada al polígono de control $P_0, \ldots, P_n$ está dada por

$$\boxed{\alpha(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i}$$

Propiedades de las curvas de Bézier

- Invarianza bajo transformaciones afines

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)P_i = \sum_{i=0}^{n} B_i^n\left(\frac{u-a}{b-a}\right)P_i$$

- La curva de Bézier esta contenida en la cápsula convexa de los puntos de control (formado por todas las combinaciones convexas de los puntos de control).
- Interpolación de los puntos terminales

$$B_i^n(0) = \delta_{i,0} \qquad B_i^n(1) = \delta_{i,n}$$

- Simetría. La curva de Bezier no varia si se invierte el orden de los puntos de control

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)P_i = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(1-t)P_{n-i}$$

Propiedades de las curvas de Bézier

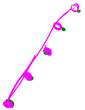
- Invarianza bajo combinaciones baricéntricas. Si $\alpha + \beta = 1$

$$\sum_{i=0}^{n} (\alpha b_j + \beta c_j) B_i^n(t) = \alpha \sum_{i=0}^{n} b_i B_i^n(1-t) + \beta \sum_{i=0}^{n} c_i B_i^n(t)$$

  es decir podemos construir el promedio ponderado de dos curvas de Bézier calculando el promedio ponderado de los respectivo puntos de control

- Precisión lineal. Si los puntos de control P_i están uniformemente distribuidos en un segmento recto que extremos p y q:

$$P_i = (1 - \frac{i}{n})p + \frac{i}{n}q, i = 0, \dots, n$$



  entonces la curva de Bézier generada es el segmento recto que une p y q.

Propiedades de las curvas de Bézier

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

- Seudocontrol local. El polinomio de Berstein B_i^n tiene un máximo en $t = i/n$, si movemos solo uno de los puntos de control, P_i entonces la curva se verá mas afectada alrededor del valor $t = i/n$ y no afecta la curva completa.
- Las ventajas del algoritmo de De Casteljau son su sencillez y el hecho que involucra tan sólo sumas, ya que todos los términos son positivos, lo cual confiere robustez a la hora de realizar cálculos con aritmética de coma flotante.
- Entre más puntos tenga el polígono de control más posibilidades hay para manipular las curvas de Bézier. Sin embargo, mientras mayor sea el grado, mayor será el coste computacional.

Propiedades de las curvas de Bézier

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Derivada de la curva de Bezier

La derivada de una curva de Bezier de grado n se puede escribir como una curva de Bezier de grado $n-1$

$$\alpha'(t) = n\sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t)(P_{i+1} - P_i)$$

Como consecuencia la tangente a la curva de Bézier en los extremos es paralela a los lados inicial y final del polígono de control:

$$\alpha'(0) = n(P_1 - P_0) \qquad \alpha'(1) = n(P_n - P_{n-1})$$

Ejemplo

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Si $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (0,2)$, $P_2 = (8,2)$, $P_3 = (4,0)$ son los puntos de control calculamos las diferencias de los puntos de control y evaluamos en la curva de grado 2 para $t = 1/2$

$$
\begin{array}{lccc}
P_1 - P_0 = & \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} & & \\
P_2 - P_1 & \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} & \\
P_3 - P_2 & \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$1-t$, t

$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

el resultado necesita ser multiplicado por 3.

Material interactivo

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

- Curvas de Bézier. https://www.geogebra.org/m/uh5sssaj
- Construcción de la curva. https://www.geogebra.org/m/WPHQ9rUt
- Curva definida por interpolación de Lagrange. https://www.geogebra.org/m/Ejp2KmAp

Bibliografía

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

G. E. Farin and G. Farin, *Curves and surfaces for CAGD: a practical guide*.
Morgan Kaufmann, 2002.

Diseño Geométrico