Estabilidad de los algoritmos

CM4F1

Ángel Enrique Ramírez Gutiérrez
aramirezg@uni.edu.pe

Escuela Profesional de Matemática
Universidad Nacional de Ingeniería

3 de mayo de 2022

Contenido

Estabilidad de los algoritmos

Denotemos por $\tilde{f}$ a un algoritmo que resuelve el problema f, si x es un valor de entrada, decimos que $\tilde{f}(x)$ es *preciso* si

$$\frac{\|\tilde{f}(x) - f(x)\|}{\|f(x)\|} = O(\epsilon_{\text{máquina}})$$

Sin embargo x necesita aproximarse y para evitar que los errores de redondeo crezcan al propagarse buscamos que el algoritmo sea *estable*:

$$\frac{\|\tilde{f}(x) - f(\tilde{x})\|}{\|f(\tilde{x})\|} = O(\epsilon_{\text{máquina}})$$

$x = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = y$

$\bar{x} = 0{,}333$

para algún $\tilde{x}$, tal que

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} = O(\epsilon_{\text{máquina}})$$

"Un algoritmo estable da resultados cercanos a la solución del problema a pesar del redondeo en los valores de entrada"

Estabilidad regresiva

Diremos que un algoritmo $\tilde{f}$ para una problema f es estable regresivo si para cada $x \in X$

$$\tilde{f}(x) = f(\tilde{x}) \text{ para algun } \tilde{x} \text{ tal que } \frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} = O(\epsilon_{\text{máquina}})$$

"Un algoritmo estable regresivo da el resultado exacto de la solución del problema a pesar del redondeo en los valores de entrada"

Ejemplo

Considere el algoritmo de eliminación gaussiana $\hat{f}$ *aplicado a matrices cuadradas* A, 2×2 *usando cálculos con mantisa de cuatro decimales.*

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *entonces el algoritmo opera con redondeo:*

Paso 1: $m_{21} = \mathrm{fl}(\frac{a_{21}}{a_{11}}) \implies m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}(1+\epsilon_{21})$

Paso 2: $\begin{array}{l} a_{22}^{(1)} = \mathrm{fl}(a_{22} - m_{21}a_{12}) \implies a_{22}^{(1)} = (a_{22} - m_{21}a_{12})(1+\epsilon_{22}) \\ a_{21}^{(1)} = \mathrm{fl}(a_{21} - m_{21}a_{11}) \implies a_{21}^{(1)} = (a_{21} - m_{21}a_{11})(1+\epsilon_{21}) \end{array}$

es decir

$$\hat{f}(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} \end{pmatrix}$$

Ahora buscamos una matriz $\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} \end{pmatrix}$ tal que $\hat{f}(A) = f(\hat{A})$, donde f denota el algoritmo que opera con valores iniciales perturbados.

$$f(\hat{A}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & \hat{a}_{22} - \frac{\hat{a}_{21}}{a_{11}} a_{12} \end{pmatrix} = \hat{f}(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$a_{22}^{(1)} = \hat{a}_{22} - \frac{\hat{a}_{21}}{a_{11}} a_{12}$$

y

$$a_{21}^{(1)} = 0$$

$$a_{22}^{(1)} = \hat{a}_{22} - \frac{\hat{a}_{21}}{a_{11}} a_{12}$$

$$\implies \hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \hat{a}_{21} & a_{22}^{(1)} + \frac{\hat{a}_{21}}{a_{11}} a_{12} \end{pmatrix}$$

Para que el algoritmo sea estable regresivo se debe cumplir que.

$$\frac{\|A-\hat{A}\|}{\|A\|} = O(\epsilon)$$

si utilizamos la norma del máximo entonces

$$A - \hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hat{a}_{21} - a_{21} & a_{22}^{(1)} - a_{22} + \frac{\hat{a}_{21}}{a_{11}} a_{12} \end{pmatrix}$$

como $\hat{a}_{21} - a_{21} = O(\epsilon)$:

$$\begin{aligned} a_{22}^{(1)} - a_{22} + \frac{\hat{a}_{21}}{a_{11}} a_{12} &= -\frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}\epsilon_{21} + (a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12})\epsilon_{22} + \frac{\hat{a}_{21}}{a_{11}} a_{12} \\ &= O(\epsilon) - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}(\epsilon_{21} + \epsilon_{22}) + a_{22}\epsilon_{22} = O(\epsilon) \end{aligned}$$

luego $\frac{\|A-\hat{A}\|}{\|A\|} = O(\epsilon)$

Ejemplo

Considere la sucesión

$$\begin{cases} x_0 = 1 \quad x_1 = 1/3 \\ x_{n+1} = \frac{13}{3}x_n - \frac{4}{3}x_{n-1} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Ecuación en diferencias

genera la sucesión $\boxed{x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n}$. *si perturbamos* x_n *por* $\hat{x}_n = x_n + \epsilon_n$ *entonces*

$$\cancel{x_{n+1}} + \varepsilon_{n+1} = \hat{x}_{n+1} = \frac{13}{3}(\cancel{x_n} + \epsilon_n) - \frac{4}{3}(\cancel{x_{n-1}} + \epsilon_{n-1})$$

$$\epsilon_{n+1} = \frac{13}{3}\epsilon_n - \frac{4}{3}\epsilon_{n-1}, \quad \epsilon_0 = \epsilon_1 = \epsilon$$

Es decir la perturbación se da en los valores iniciales y asumimos que no producen errores de redondeo.

$$x_{n+1} = \frac{13}{3}x_n - \frac{4}{3}x_{n-1}$$

$$x_{n+2} = \frac{13}{3}x_{n+1} - \frac{4}{3}x_n$$

$$x_n = r^n$$

$$\Rightarrow r^{n+2} = \frac{13}{3}r^{n+1} - \frac{4}{3}r^n$$

$$r^2 = \frac{13}{3}r - \frac{4}{3}$$

$$3r^2 = 13r - 4$$

$$3r^2 - 13r + 4 = 0$$

$$\begin{array}{ll} 3r & -1 \\ r & -4 \end{array} \Rightarrow r = \frac{1}{3} \qquad r = 4$$

$$\Rightarrow x_n = A\left(\frac{1}{3}\right)^n + B(4)^n$$

$$x_0 = A + B = 1 \Rightarrow A + B = 1$$

$$x_1 = \frac{A}{3} + 4B = 1/3 \Rightarrow A + 12B = 1$$

$$11B = 0$$

$$B = 0$$

$$\Rightarrow A = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

Para resolver la ecuación en diferencias asumimos que $\epsilon_n = r^n$ entonces $r^2 - \frac{13}{3}r + \frac{4}{3} = 0$

$$\epsilon_n = A(4)^n + B(\frac{1}{3})^n, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

o

$$\epsilon_n = \frac{2\epsilon}{11}(4)^n + \frac{9\epsilon}{11}(\frac{1}{3})^n, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

En una maquina de 32 bits el error inicial es cercano 2^{-24} si despreciamos el segundo término entonces $\epsilon_n \approx \frac{(2)^{2n-23}}{11}$, así para $n = 12$ la distorsión seria evidente, como veremos en la siguiente tabla.

n	$x_n = (1/3)^n$	$\hat{x}_n$	$x_n - \hat{x}_n$
0	1.00000000	1.00000000	0.00000000
1	0.33333333	0.33333331	0.00000002
2	0.11111111	0.11111102	0.00000009
3	0.03703704	0.03703668	0.00000036
4	0.01234568	0.01234425	0.00000143
5	0.00411523	0.00410950	0.00000572
6	0.00137174	0.00134885	0.00002289
7	0.00045725	0.00036569	0.00009156
8	0.00015242	-0.00021381	0.00036622
9	0.00005081	-0.00141408	0.00146489
10	0.00001694	-0.00584262	0.00585956
11	0.00000565	-0.02343259	0.02343824
12	0.00000188	-0.09375107	0.09375295
13	0.00000063	-0.37501118	0.37501180
14	0.00000021	-1.50004697	1.50004718

Ejemplo

Considere la sucesión

$$\begin{cases} x_0 = 1 \quad x_1 = 1/3 \\ x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n - \frac{1}{3}x_{n-1} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

que genera la sucesión $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. *Si como en el ejemplo anterior consideramos las perturbaciones iniciales, tenemos que*

$$\epsilon_{n+1} = \frac{4}{3}\epsilon_n - \frac{1}{3}\epsilon_{n-1}, \quad \epsilon_0 = \epsilon_1 = \epsilon$$

y $\epsilon_n = A(\frac{1}{3})^n + B(1)^n$, *como* $\epsilon_0 = \epsilon_1 = \epsilon$,

$$\epsilon_n = \epsilon$$

n	$x_n = (1/3)^n$	$\hat{x}_n$	$x_n - \hat{x}_n$
0	1.00000000	1.00000000	0.00000000
1	0.33333333	0.33333331	0.00000002
2	0.11111111	0.11111108	0.00000003
3	0.03703704	0.03703700	0.00000003
4	0.01234568	0.01234564	0.00000003
5	0.00411523	0.00411519	0.00000003
6	0.00137174	0.00137171	0.00000003
7	0.00045725	0.00045721	0.00000003
8	0.00015242	0.00015238	0.00000003
9	0.00005081	0.00005077	0.00000003
10	0.00001694	0.00001690	0.00000003
11	0.00000565	0.00000561	0.00000003
12	0.00000188	0.00000185	0.00000003
13	0.00000063	0.00000059	0.00000003
14	0.00000021	0.00000017	0.00000003

Ejemplo

Considere ahora la sucesión

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n \quad n \geq 1 \end{cases}$$

que genera la sucesión $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. *Si como en el ejemplo anterior consideramos las perturbaciones iniciales, tenemos que*

$$\epsilon_{n+1} = \frac{1}{3}\epsilon_n, \quad \epsilon_0 = \epsilon$$

luego

$$\epsilon_n = \epsilon 3^{-n}$$

n	$x_n = (1/3)^n$	$\hat{x}_n$	$x_n - \hat{x}_n$
0	1.00000000	1.00000000	0.00000000
1	0.33333333	0.33333331	0.00000002
2	0.11111111	0.11111110	0.00000001
3	0.03703704	0.03703703	0.00000000
4	0.01234568	0.01234568	0.00000000
5	0.00411523	0.00411523	0.00000000

Definición

Si ϵ es el error inicial y $\epsilon(n)$ representa el crecimiento del error después de n pasos. Si $|\epsilon(n)| \approx n\epsilon$, el crecimiento se dice lineal. Si $|\epsilon(n)| \approx K^n\epsilon$, el crecimiento se dice exponencial. Si $K > 1$ el error crece exponencialmente cuando $n \to \infty$, $0 < K < 1$, el error tiende a cero exponencialmente cuando $n \to \infty$.

- El ejemplo 2 muestra un algoritmo inestable con error exponencialmente creciente.
- El ejemplo 3 muestra un algoritmo estable con error estacionario.
- El ejemplo 4 muestra un algoritmo estable con error exponencialmente decreciente.

Ejemplo

Considere $y_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx, \quad n \geq 0$, *si integramos por partes*

$$\boxed{y_{n+1} = e - (n+1)y_n}$$

Si ϵ *es la perturbación inicial y* ϵ_n *es el error asociado a* y_n *entonces*

$$\hat{y}_{n+1} = e - (n+1)(y_n + \epsilon_n) = y_{n+1} - (n+1)\epsilon_n$$

luego $\epsilon_{n+1} = -(n+1)\epsilon_n = (n+1)n\epsilon_{n-1} = (-1)^{n+1} n! \epsilon.$

$$\epsilon_n \to +\infty, \text{ cuando } n \to +\infty$$

Vemos que el algoritmo es inestable.

Bibliografía

Otras referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

- Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing, Third Edition David Kincaid: University of Texas at Austin, Austin, TX, Ward Cheney.
- Numerical Methods Using Matlab, 4th Edition John H. Mathews, California State University, Fullerton, Kurtis K. Fink, Northwest Missouri State University
- Numerical Lineal Algebra. Lloyd N. Trefethen and David Bau, III xii+361 pages. SIAM, 1997
- Elementary Numerical Analysis, 3rd Edition Kendall Atkinson, Weimin Han