Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2021-1**

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

Solucionario Cuarta Práctica Calificada

1. **Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justificar, en caso sea verdadero enuncie el resultado realizado en clase o su demostración breve como consecuencia de lo realizado en clase. De otro lado, en caso sea falso dar un contraejemplo:**

   (a) [1 *pto.*] Dada la ecuación $Ax = b$. El método de Jacobi Richardson converge cuando A es estrictamente diagonal dominante.
   Solución:
   Verdadero Una condición necesaria para que exista convergencia es que la matriz sea estrictamente diagonal dominante como sea mencionado y demostrado en clases.

   (b) [1 *pto.*] Des caso anterior. Si A no es estrictamente diagonal dominante entonces el método de Jacobi(Jacobi-Richardson) no es convergente.
   Solución:
   Falso Existen matrices que no son estrictamente diagonal dominante y convergen con el método de Jacobi, mejor dicho es una condición necesaria pero no suficiente. El contraejemplo es $Ax = b$ donde
   $$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$
   En este caso, incluso si $||M||_2 = 2$, incluso si la matriz no es dominante, tenemos que el esquema de Jacobi converge.

   (c) [1 *pto.*] La convergencia de los métodos de Richardson, Jacobi y Gauss-Seidel depende de la norma elegida.
   Solución:
   Falso No depende de la norma elegida, ya hemos visto que es una condición necesaria pero no es suficiente. De hecho, de acuerdo a un resultado del curso una condición necesaria y suficiente es que $\rho(M) < 1$.

   (d) [1 *pto.*] Dada la ecuación $Ax = b$. Si $\rho(A) < 1$ entonces el método de Jacobi converge.
   Solución:
   Falso La condición es sobre la matriz M asociada al esquema iterativo de Jacobi.

2. Un barco que se halla en situación de emergencia, efectúa un disparo, en forma vertical, con una pistola de señales. El destello podrá verse desde la base naval más cercana, únicamente mientras se encuentre a una altura no menor de 195 metros sobre el nivel del mar. Los técnicos que integran la tripulación estiman que, de acuerdo con las características de la pistola de señales y con las condiciones en que se dispara la altura máxima del destello lo alcanza a 320 metros sobre el nivel del mar, transcurridos 8 segundos desde el disparo. Ayudale a los de la base naval, enviar la ayuda al barco.

   (a) [1 *pto.*] Modele el problema.

   (b) [1 *pto.*] Determine la solución usando el método de Descenso Rápido con $x_0 = (-5.05\ \ 80.05\ \ 0)^T$ y $tol = 10^{-5}$.

   (c) [1 *pto.*] Determine la solución usando el método de Gradiente Conjugado con $x_0 = (-5.05\ \ 80.05\ \ 0)^T$ y $tol = 10^{-5}$.

   (d) [1 *pto.*] Escribe el algoritmo que satisface la condición de los métodos.

Solución:

(a) [1 *pto.*] Sean a, b y c los coeficientes de la ecuación cuadrática general, dado por:

$$f(t) = at^2 + bt + c.$$

Luego

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &: \quad f(0) = a(0)^2 + b(0) + c = 0 \\ t = 8 \quad &: \quad f(8) = a(8)^2 + b(8) + c = 320 \\ t = 16 \quad &: \quad f(16) = a(16)^2 + b(16) + c = 0 \end{aligned}$$

El sistema es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 256 & 16 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 320 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) [1 *pto.*] La tabla es:

k	a_k	b_k	c_k	t_k	vx_k	vy_k	vz_k	Error
0	-5.05	80.05	0	0.0000143	0.0531866	-0.7961693	-0.1499104	
1	-5.0035134	80.053066	0.0002116	0.0642703	0.9075006	0.0581312	0.013233	0.0464866
2	-5.0000951	80.001895	-0.0094232	0.0000143	-0.000008	-0.0019375	0.0090598	0.0511709
$\vdots$								
9	-5.0000558	80.001294	-0.0064863					

Donde la ecuación cuadrática es $f(t) = -5.0000558t^2 + 80.001294t - 0.0064863$.

(c) [1 *pto.*] La tabla es:

k	a_k	b_k	c_k	d_k	rx_k	ry_k	rz_k	Error
0	-5.05	80.05	0	0.6592089	3251.2	214.4	14.8	0.0464866
1	-5.0035134	80.053066	0.0002116	0.0000858	0.0531866	-0.7961826	-0.1499114	0.0511844
2	-5.0000812	80.001881	-0.0094259	1.037491	0.0000713	-0.0017096	0.0091048	0.0094259
3	-5	80	0	0	-0.0000493	-0.0000033	-0.0000002	0
4	-5	80	0					

Donde la ecuación cudrática es $f(t) = -5t^2 + 80t$.

(d) [1 *pto.*] Hay que garantizar que la matriz debe ser simétrica, el cual es:

Si $A == A'$

entonces

$B \leftarrow A;$

$c \leftarrow b;$

sino

$B \leftarrow A' \cdot A;$

$c \leftarrow A' \cdot b;$

fin si.

Se recomienda para este problema el método del Gradiente Conjugado, porque se logra obtener la solución en 4 iteraciones.

3. Miguel compra una bolsa de caramelos que contiene diez unidades, por el cual paga $\sqrt{7}$ ayudale en lo siguiente:

(a) [1 *pto.*] Modele el problema.

(b) [1 *pto.*] Indique la cantidad de iteraciones que se requiere.

(c) [1 *pto.*] Determine la solución aproximad usando el método de bisección.

(d) [1 *pto.*] Determine el vuelto si paga con 5.00 soles.

Solución:

(a) [1 *pto.*] Sea x : el valor de la bolsa de los 10 caramelos. Donde

$$x = \sqrt{7} \;\Rightarrow\; x^2 = 7.$$

Luego la función es:

$$f(x) = x^2 - 7 = 0.$$

(b) [1 *pto.*] Sabemos que:

$$\sqrt{7} = 2.645751311 \;\wedge\; \varepsilon = 10^{-2}.$$

Donde $a = 2$ y $b = 3$.

Luego

$$n + 1 > \frac{ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{ln(2)} = 6.64385619 \;\Rightarrow\; n = 6.$$

(c) [1 *pto.*] Por el método de Bisección:

n	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	Error
0	2	3	2.5	-3	2	-0.75	2.5
1	2.5	3	2.75	-0.75	2	0.5625	0.25
2	2.5	2.75	2.625	-0.75	0.5625	-0.109375	0.125
3	2.625	2.75	2.6875	-0.109375	0.5625	0.2226562	0.0625
4	2.625	2.6875	2.65625	-0.109375	0.2226562	0.0556641	0.03125
5	2.625	2.65625	2.640625	-0.109375	0.0556641	-0.0270996	0.015625
6	2.640625	2.65625	2.6484375	-0.2070996	0.0556641	0.0142212	0.0078125

Entonces

$$x = 2.64$$

(d) [1 *pto.*] El vuelto que recibe Miguel es:

$$5.00 - 2.64 = 2.36$$

4. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + ay &= 1 \\ x + y + z &= 1 \\ by + z &= 1 \end{aligned}$$

(a) [1 *pto.*] Determine los valores de a y b para que el sistema tenga solución única.

(b) [1 *pto.*] Determine los valores de a y b para asegurar la convergencia del método de Jacobi.

(c) [2 *pts.*] Determine los valores de a y b para asegurar la convergencia del método de Gauss-Seidel.

Solución:

(a) El sistema tiene solución única si y solamente si $|A| \neq 0$ esto sucede cuando $a + b \neq 1$.

(b) Recordamos que la condición necesaria y suficiente para la convergencia es $\rho(M) < 1$ donde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

Luego tenemos que los valores propios satisfacen $|M - \lambda I| = 0$ entonces $\lambda = 0$, y $\lambda = \pm\sqrt{a+b}$, de esta forma la convergencia del método necesita que $a + b < 1$.

(c) De manera similar en el caso de Gauss-Seidel tenemos que :

$$M = (D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ 0 & -a & -1 \\ 0 & -ab & b \end{pmatrix}$$

en este caso tenemos que $\rho(M) = |a + b|$ asi para asegurar la convergencia se necesita que $|a + b| < 1$.

5. [4 *pts.*] **Identifique su grupo de exposición y la sección donde esta matriculado.**

16 de Junio del 2021