Interpolación polinomial

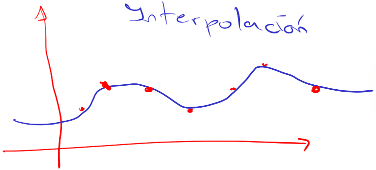
CM4F1

Ángel Enrique Ramírez Gutiérrez
aramirezg@uni.edu.pe

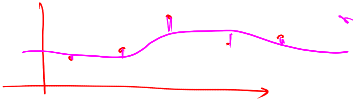
Escuela Profesional de Matemática
Universidad Nacional de Ingeniería

19 de julio de 2022

Interpolación



mínimos cuadrados



Contenido

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

técnicas que permiten calcular el polinomio interpolador de Lagrange.

Polinomio de Taylor

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f : I \to \mathbb{R}$ una función tal que existen f', f'', ..., $f^{(n)}$ para algún entero positivo n. Definimos el **polinomio de Taylor** de la función f alrededor del punto $x_0 \in I$ del modo siguiente:

$$\begin{aligned} P_{n,x_0}(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i \\ P_{n,x_0}(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \end{aligned} \tag{1}$$

Dados $x, x_0 \in I$, existe s entre x y x_0 tal que

$$f(t) = P_{n,x_0}(t) + \boxed{R_{n+1,x_0}(t)} \tag{2}$$

Polinomio de Taylor (cont.)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Teorema

Sea I un intervalo, $x_0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ y dado $n \in \mathbb{N}$ existen $f, f', f'', \ldots, f^{(n)}, f^{(n+1)}$ en I°. Entonces, para cualquier $x \in I$ con $x \neq x_0$ existe un punto c en el intervalo abierto de extremos x_0 y x tal que:

$$f(x) - P_{n,x_0}(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

La expresión:

$$R_{n+1,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{3}$$

es conocido como **Resto en la forma de Lagrange**.

Demostración

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Sean $x_0, x \in I$ valores fijos y tal que $x_0 \neq x$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x_0 < x$. Consideremos el intervalo $J = [x_0, x]$, por tanto $J \subset I$. Sobre J definamos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} \varphi : J &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \varphi(t) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \psi : J &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \psi(t) := -(x-t)^{n+1} \end{aligned} \tag{5}$$

Demostración (cont.)

$f, f', \ldots, f^{(n)}, f^{(n+1)}$ $\qquad \psi(t) = -(x-t)^{n+1}$

Desde que $f^{(k)}$ $(0 \leq k \leq n)$ es continua y $(x-t)^k$ es una función polinómica (y por tanto continua e infinitamente derivables), podemos garantizar que φ es continua en J. Además, como $f^{(k)}$ $(k = 0, \ldots, n)$ son derivables en I° entonces también son derivables en J°. Por otro lado, podemos observar que ψ es una función infinitamente derivable en J.
De lo anterior, tenemos que φ y ψ son funciones continuas en J y derivables en J°, así, podemos aplicar el Teorema del Valor Medio Generalizado, esto es, existe $c \in \langle x_0, x\rangle$ tal que:

$$\psi'(c)(\varphi(x) - \varphi(x_0)) = \varphi'(c)(\psi(x) - \psi(x_0)) \qquad (6)$$

Demostración (cont.)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k,$$

$$\psi(t) = -(x-t)^{n+1}$$

A partir de 4 y 5 calculemos cada expresión:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= f(x) \\
\varphi(x_0) &= P_{n,x_0}(x) \\
\varphi'(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \\
\psi(x) &= 0 \\
\psi(x_0) &= -(x-x_0)^{n+1} \\
\psi'(t) &= (n+1)(x-t)^n
\end{aligned}$$

Polinomio de Taylor (cont.)

Reemplazando estos resultados en 6 se obtiene:

$$(n+1)\cancel{(x-c)}^n\underbrace{(f(x)-P_{n,x_0}(x))} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\cancel{(x-c)}^n(x-x_0)^{n+1}$$

de lo anterior resulta:

$$R_{n+1,x_0}(x) = f(x) - P_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \underline{c \in \langle x_0, x}\rangle.$$

Polinomio de Taylor (cont.)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Ejemplo

Construir la fórmula de Taylor para el polinomio de grado 4 de $f(x) = \sqrt{3+x}$ alrededor del punto 1 y obtener una cota del error cometido al aproximar el valor $\sqrt{5}$.

Resolución:

La fórmula de Taylor para el polinomio de grado 4 alrededor del punto 1 viene dado por:

$$P_2(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$$

$$P_4(x) = \sum_{i=0}^{4} \frac{f^{(i)}(1)}{i!}(x-1)^i$$

$\sqrt{5} = \sqrt{3+2} = f(2)$ Por tanto: $P_2(2) \approx \sqrt{5}$

Resolución (cont.)

Calculamos las derivadas:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{3+x} & \Rightarrow\quad & f(1) = 2 \\
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{3+x}} & \Rightarrow\quad & f'(1) = \frac{1}{4} \\
f''(x) &= -\frac{1}{4\sqrt{(3+x)^3}} & \Rightarrow\quad & f''(1) = -\frac{1}{32} \\
f'''(x) &= \frac{3}{8\sqrt{(3+x)^5}} & \Rightarrow\quad & f'''(1) = \frac{3}{256} \\
f^{(iv)}(x) &= -\frac{15}{16\sqrt{(3+x)^7}} & \Rightarrow\quad & f^{(iv)}(1) = -\frac{15}{2048} \\
f^{(v)}(x) &= \frac{105}{32\sqrt{(3+x)^9}} & \Rightarrow\quad & f^{(v)}(1) = \frac{105}{16384}.
\end{aligned}
$$

Resolución (cont.)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

$$\Rightarrow P_2(X) = 2 + \frac{1}{4}(X-1) - \frac{1}{64}(X-1)^2 ,$$

Evaluar: $P_2(2) \approx f(2) = \sqrt{5}$

Por tanto:

$$P_4(x) = 2 + \frac{x-1}{4} - \frac{(x-1)^2}{64} + \frac{(x-1)^3}{512} - \frac{5\,(x-1)^4}{16384}$$

luego

$$P_4(\cancel{5}\,2) = \frac{179}{64} = 2.79688,$$

encuanto el valor exacto es

$$\sqrt{5} = 2.23607.$$

¿Cómo determinar una cota? $\quad \underline{x_0 = 1}, \quad \underline{n = 2}$

$$R_{3,x_0}(x) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-x_0)^3 = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-1)^3$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{(x+3)^5}}$$

Sea $\quad 1 \leq x \leq 2$

$$4 \leq x+3 \leq 5$$

$$2 \leq \sqrt{x+3} \leq 5^{1/2}$$

$$32 \leq \sqrt{(x+3)^5} \leq 5^{5/2}$$

$$2^8 \leq 8\sqrt{(x+3)^5} \leq 8 \times 5^{5/2}$$

$$\frac{3}{8 \times 5^{5/2}} \leq \underbrace{\frac{3}{8\sqrt{(x+3)^5}}}_{f'''(x)} \leq \frac{3}{2^8}$$

$$\Rightarrow |f'''(c)| \leq \frac{3}{2^8}$$

luego:

$$|R_{3,x_0}(x)| \leq \frac{3}{2^8 \times 3!}|x-x_0|^3$$

$x = 2, \quad x_0 = 1$

$$\Rightarrow |R_{3,x_0}(2)| \leq \underbrace{\frac{3}{6 \times 2^8}|2-1|^3}_{\text{COTA DE ERROR.}}$$

Polinomio de Taylor (cont.)

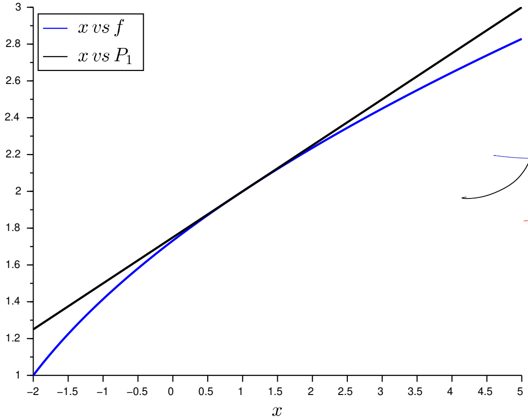
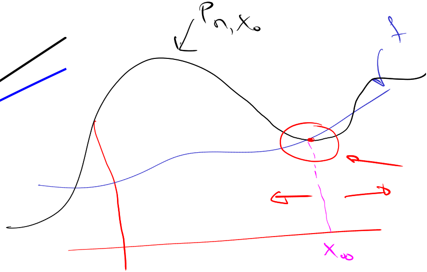


Figura: Polinomio de Taylor de orden 1



Polinomio de Lagrange

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Considere un conjunto de $n+1$ puntos de la forma (x_i, y_i) para $i = 0, 1, \ldots, n$. El objetivo de este capítulo es encontrar un polinomio P_n de grado menor o igual a n tal que cumpla la siguiente **condición de interpolación**:

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, ..., n. \tag{7}$$

El primer paso es garantizar la existencia del polinomio P_n, el cual, en forma general tiene la forma:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n. \tag{8}$$

Como P_n debe de satisfacer (7), entonces:

$$a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_n x_i^n = y_i, \quad i = 0, 1, 2, ..., n. \tag{9}$$

Interpolación polinomial (cont.)

El conjunto de ecuaciones dado por (9) al ser escrito de forma matricial queda como sigue:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ & & & & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}} \tag{10}$$

donde observamos que la matriz asociada al sistema lineal (10) es conocida como **matriz de Vandermonde** de orden $n+1$.

Interpolación polinomial (cont.)

El determinante de la matriz de Vandermonde se calcula como:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ & & & & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{1\leq i\leq j\leq n+1} (x_j - x_i), \tag{11}$$

podemos observar que para garantizar la existencia y unicidad del polinomio P_n es necesario y suficiente que los $n+1$ puntos x_i $(i = 0, 1, 2, ..., n)$ sean **todos distintos**, lo cual será considerado de ahora en adelante salvo se mencione explícitamente lo contrario.

Una vez garantizada la existencia y unicidad del polinomio P_n, ahora llamado **Polinomio de interpolación**, procedemos a estudiar algunos métodos que nos permiten calcularlo.

$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ Polinomio de interpolación de Lagrange

Método de coeficientes indeterminados

Del análisis realizado en la sección anterior, ya es posible calcular los coeficientes del polinomio de interpolación P_n resolviendo el sistema lineal (10). Esta forma de calcular los coeficientes del polinomio P_n es llamado **método de coeficientes indeterminados**.

Ejemplo

Dados los puntos $(-1, 2), (0, 1), (-2, 3), (1, 0)$. *Calcule el polinomio de interpolación.*

Resolución:

Dados los 4 puntos (esto es, $n=3$), procedemos a calcular los coeficientes $a_i(i=0,1,2,3)$ del polinomio de interpolación P_3 resolviendo el sistema lineal (10) dado por:

$$\begin{pmatrix} 1 & (-1) & (-1)^2 & (-1)^3 \\ 1 & 0 & 0^2 & 0^3 \\ 1 & -2 & (-2)^2 & (-2)^3 \\ 1 & (1) & (1)^2 & (1)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

resolviendo el sistema anterior se obtiene:

$$a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = 0, a_3 = 0,$$

entonces, el polinomio de interpolación P_3 es:

$$P_3(x) = 1 - x.$$

La Figura 2 muestra los puntos dados con el polinomio de interpolación P_3.

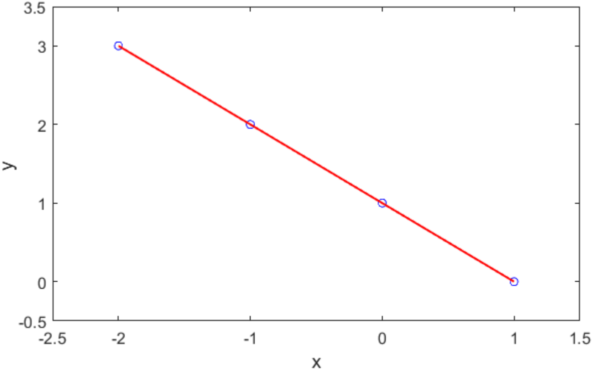


Figura: $P_3(x)$ vs (x_i, y_i)

Método de Lagrange

Este método fue desarrollado por Joseph Louis Lagrange (Francia, 1813-1736), el cual consiste primero en definir los llamados polinomios de Lagrange dados por:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \tag{13}$$

es fácil observar que todas las L_i $(i = 0, 1, ..., n)$ cumplen las siguientes propiedades:

- Cada L_i es un polinomio de grado n.
- $L_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

$\{L_0, L_1, \ldots, L_n\}$ base de polinomio $\leq n$

Calculadas todas las L_i, definimos:

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + \cdots + y_n L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x). \tag{14}$$

Método de Lagrange

De la forma como es construido el polinomio P_n dado en (14), puede observarse que satisface la condición de interpolación dado en (7). Por tanto, P_n es el polinomio de interpolación dado en la forma de Lagrange.

Ejemplo

Dados los puntos $(-1, 1), (2, -1), (0, -1)$. *Calcule el polinomio de interpolación en la forma de Lagrange.*

Resolución

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Dados los 3 puntos, procedemos a calcular L_0, L_1 y L_2 según (13):

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-0)}{(-1-2)(-1-0)} = \frac{(x-2)x}{3}$$

$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-0)}{(2+1)(2-0)} = \frac{(x+1)x}{6}$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)} = -\frac{(x+1)(x-2)}{2}$$

Resolución (cont.)

luego, el polinomio de interpolación en la forma de Lagrange (14) viene dado por:

$$P_2(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x)$$

$$P_2(x) = L_0(x) - L_1(x) - L_2(x)$$

$$P_2(x) = \frac{(x-2)x}{3} - \frac{(x+1)x}{6} + \frac{(x+1)(x-2)}{2}$$

Resolución (cont.)

La Figura 3 muestra los puntos dados con el polinomio de interpolación $P_2(x)$.

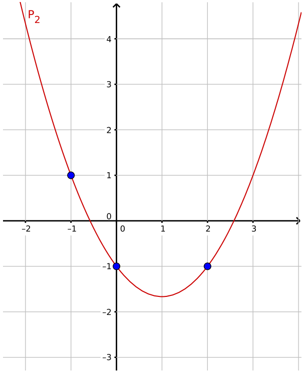
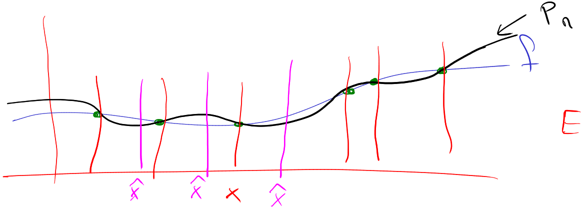


Figura: $P_2(x)$ vs (x_i, y_i) $(i = 0, 1, 2)$

Observación:

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Dados los puntos $\overbrace{(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)}^{P_n}$ es relativamente fácil calcular P_n en la forma de Lagrange, pero, ¿qué sucede si agregamos a los puntos iniciales el punto (x_{n+1}, y_{n+1})?. Ante esta situación, los métodos vistos de coeficientes indeterminados y el método de Lagrange no son muy útiles, porque tenemos que rehacer todos los cálculos para obtener el polinomio P_{n+1}, es decir, no aprovechan el trabajo de haber calculado P_n. El método de Newton resuelve este problema.



$\text{Error}(x) = f(x) - P_n(x)$

Análisis de error

Dados los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), vamos a suponer que los valores y_i $(i = 0, ..., n)$ son imágenes de cada x_i para alguna función continua f, es decir:

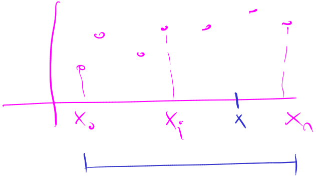
$$y_i = f(x_i) \quad \text{para todo} \quad i = 0, 1, ..., n.$$

Por los puntos dados, podemos construir un polinomio de interpolación P_n que satisface:

$$P_n(x_i) = y_i.$$

Ahora, dado un punto x tal que $\boxed{x \neq x_i}$ para todo $i = 0, 1, ..., n$ y:

$$a := \min_{i=1,\ldots,n} \{x_i\} \leq x \leq \max_{i=1,\ldots,n} \{x_i\} =: b$$



y al aproximar el valor $f(x)$ usando P_n es lógico que se comete un error.

Análisis de error (cont.)

La pregunta es, se puede saber que tan buena es la aproximación? es decir, qué se puede decir del error:

$$E(x) = \underline{f(x)} - \underline{P_n(x)} \tag{15}$$

Para responder esta pregunta, fijando $\underline{x}$ definamos $\underline{g} : [a, b] \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$\underline{g(t)} = \cancel{f(t)} - \cancel{P_n(t)} - \frac{\theta_{n+1}(t)}{\theta_{n+1}(x)} \underbrace{[\cancel{f(x)} - \cancel{P_n(x)}]}_{Error(x)} \tag{16}$$

donde

$$\theta_{n+1}(t) = (t - x_0)(t - x_1)...(t - x_{n-1})(t - x_n).$$

$$g(x_i) = \underbrace{f(x_i) - P_n(x_i)}_{=0} - \left[\frac{\cancelto{0}{\theta_{n+1}(x_i)}}{\theta_{n+1}(x)}\left[f(x) - P_n(x)\right]\right]$$

Análisis de error (cont.)

Observemos que si $t = x_i$ $(i = 0, 1, 2, ..., n)$ en (16), entonces $g(x_i) = 0$. Así mismo, si $t = x$, también implica $\boxed{g(x) = 0}$. Es decir, $\{x_0, ..., x_n, x\}$ son $n + 2$ raíces de la función g. Luego, exigiendo que f sea $n + 1$ veces derivable, podemos aplicar el Teorema de Rolle continuamente y obtenemos que existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$g^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Así, a partir de (16) se tiene:

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \frac{(n+1)!}{\theta_{n+1}(x)} E(x)$$

Por tanto:

$$g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)!}{\theta_{n+1}(x)} E(x) = 0$$

Análisis de error (cont.)

esto último implica:

$$\boxed{E(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\theta_{n+1}(x)} \tag{17}$$

La relación dada en (17) nos da una expresión para el error que se comete en algún punto $x \in (a, b)$. Observar que $E(x_i) = 0$ para todo $i = 0, 1, ..., n$.

Ejemplo

Sea $f(x) = \dfrac{x^8}{84} - \dfrac{3cos(2x)}{8}$. *Calcule una cota del error cuando se aproxima* $f(0.65)$ *cuando se considera 5 puntos uniformemente espaciados en* $[0, 1]$.

Resolución

Consideremos la partición uniforme:

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0.25,\ x_2 = 0.5,\ x_3 = 0.75,\ x_4 = 1.$$

Es decir, $n = 4$, luego, el error (17) viene dado por:

$$E(x) = \frac{f^{(v)}(\xi)}{5!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

para algún $\xi \in (0, 1)$.
Calculando $f^{(v)}$ se obtiene:

$$f^{(v)}(x) = 12sen(2x) + 80x^3, \quad \text{para todo} \quad x \in [0, 1].$$

Luego:

$$|f^{(v)}(x)| \leq 92,$$

Resolución (cont.)

por tanto:

$x = 0.65$

$$
\begin{aligned}
|E(x)| &= \left|\frac{f^{(v)}(\xi)}{5!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\right| \\
|E(0.65)| &\leq \frac{92}{120}|(0.65)(0.40)(0.15)(-0.15)(-0.35)| = 0.0016.
\end{aligned}
$$

Sólo con fines educativos, se puede calcular P_4 así podemos calcular el valor exacto $P_4(0.65) = -0.1002010$. Por otro lado, también se tiene el valor exacto $f(0.65) = -0.0999327$, por tanto, es posible calcular el error exacto:

$$|E(0.65)| = |f(0.65) - P_4(0.65)| = 0.0002683 \; < \; 0.0016.$$

Resolución (cont.)

La Figura 4 compara los valores de f y P_4 para los puntos de la partición considerada.

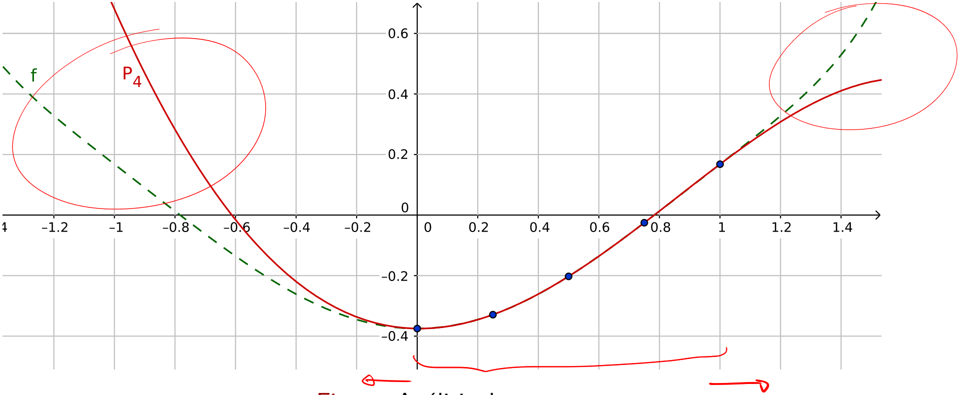


Figura: Análisis de error.

Fenómeno Runge

En la Figura 4 podemos observar la buena aproximación de P_4 en relación a f dentro del intervalo de interpolación $[0,1]$ y tal vez nos hace suponer que la aproximación mejorará conforme aumentemos el número de puntos en la partición. En la siguiente sección mostramos un ejemplo en el cual observaremos que nuestra suposición está errada.

Consideremos la función siguiente:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \quad \text{para todo} \quad x \in [-1,1].} \tag{18}$$

Fenómeno Runge

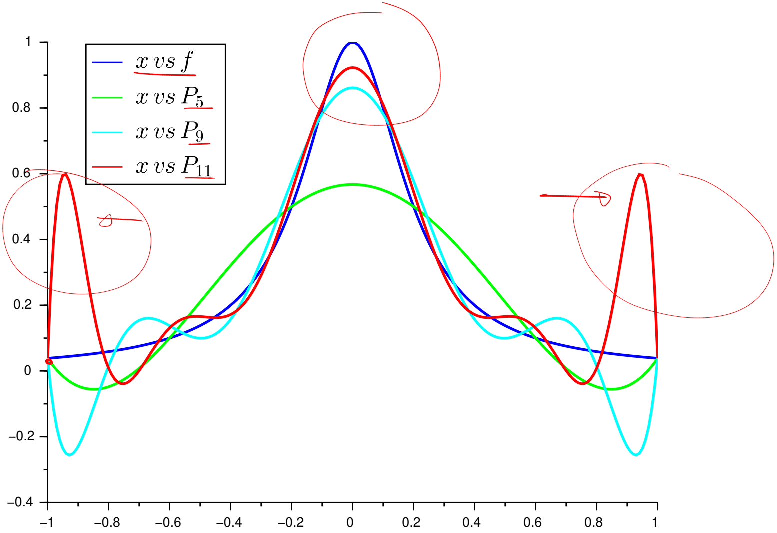
Consideremos también una partición regular en el intervalo $[-1, 1]$

$$-1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1 \quad (n \quad \text{es impar}). \tag{19}$$

La Figura **??** muestra la gráfica de la función f comparándola con los polinomios de interpolación P_5, P_9 y P_{11}. Podemos observar que la aproximación en los extremos del intervalo cada vez empeora conforme aumenta el valor del grado del polinomio de interpolación. En general, se prueba que:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\max_{-1\le x\le 1} |f(x) - P_n(x)| \right) = \infty. \tag{20}$$

Fenómeno Runge



Contenido

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Polinomio de Newton

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Sea f una función cuyos valores son conocidos en un conjunto $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, de nodos distintos entre si no necesariamente ordenados.
Sabemos que existe un único polinomio p,que interpola f en n+1 nodos

$$p(x_i) = f(x)_i, \forall i = 0, \ldots, n$$

Teorema

Los polinomios q_i forman una base para el espacio de polinomio de grado $\leq n$ donde

$$q_0(x) = 1$$

$$q_i(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{i-1}), 0 < i \leq n$$

En efecto si $a_0q_0(x) + a_1q_1(x) + a_2q_2(x) + \ldots + a_nq_n(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ entonces para $x = x_i$

$$\boxed{a_0 = a_1 = \ldots a_n = 0}$$

luego tenemos la forma de Newton

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j q_j(x)$$

resta por determinar los coeficientes c_0, c_1, ..., c_n , por ejemplo si

$$p_2(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1)$$

obtenemos el sistema triangular inferior

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & (x_1 - x_0) & 0 \\ 1 & (x_2 - x_0) & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \end{bmatrix}$$

sustitución progresiva

Tenemos los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n) \rightsquigarrow P_n$ ✓

Agregar un punto:

$$[(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)], \underbrace{(x_{n+1}, y_{n+1})} \rightsquigarrow P_{n+1} = ?$$

$\downarrow$ Interpola a todos los puntos

¿Cómo determinar P_{n+1} a partir de P_n?

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + Q_{n+1}(x)$$

Evaluar en $x = x_i$ $(i = 0, \ldots, n)$: $(n+1$ valores$)$

$$\underbrace{P_{n+1}(x_i)}_{y_i} = \underbrace{P_n(x_i)}_{y_i} + Q_{n+1}(x_i) \Longrightarrow Q_{n+1}(x_i) = 0$$

$$\Rightarrow Q_{n+1}(x) = a_{n+1} \underbrace{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)}_{q_{n+1}(x)} \Rightarrow Q_{n+1}(x) = a_{n+1} q_{n+1}(x)$$

Resta calcular a_{n+1}:

Evaluemos en $x = x_{n+1}$:

$$\underbrace{P_{n+1}(x_{n+1})}_{y_{n+1}} = P_n(x_{n+1}) + a_{n+1} q_{n+1}(x_{n+1})$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{n+1} = \frac{y_{n+1} - P_n(x_{n+1})}{q_{n+1}(x_{n+1})}}$$

Diferencia dividida

$(2, -1), (1, 2), (0, -2), (-1, 0)$
$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3$

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-0)}{(2-1)(2-0)} \frac{(x+1)}{(2+1)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-0)}{(1-2)(1-0)} \frac{(x+1)}{(1+1)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-1)}{(0-2)(0-1)} \frac{(x+1)}{(0+1)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-2)(x-1)(x-0)}{(-1-2)(-1-1)(-1-0)}$$

$$P_3(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x)$$

Por el método de Newton:

$$P_0(x) = y_0 = -1$$

$$a_1 = \frac{y_1 - P_0(x_1)}{q_1(x_1)}$$

$$q_1(x) = (x - x_0) = (x - 2)$$

$$q_1(x_1) = q_1(1) = -1$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{2 - (-1)}{-1} = -3$$

$$\Rightarrow Q_1(x) = a_1 q_1(x) = -3(x-2)$$

$$\Rightarrow P_1(x) = P_0(x) + Q_1(x)$$

$$P_1(x) = -1 - 3(x-2)$$

$$a_2 = \frac{y_2 - P_1(x_2)}{q_2(x_2)}$$

$$q_2(x) = (x - x_0)(x - x_1) = (x-2)(x-1)$$

$$\Rightarrow q_2(0) = 2$$

$$P_1(0) = -1 - 3(-2) = 5$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{-2-5}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow P_2(x) = -1 - 3(x-2) - \frac{7}{2}(x-2)(x-1) \longrightarrow P_2(0) = -1 + 6 - 7 = -2$$

$$
\begin{aligned}
c_0 &= f(x_0)\\
c_1 &= \frac{f(x_1)-c_0}{x_1-x_0} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\\
c_2 &= \frac{\frac{f(x_2)-c_0}{x_2-x_1} - c_1\frac{x_2-x_0}{x_2-x1}}{x_2-x_0} = \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_2-x_1}\left(1-\frac{x_2-x_0}{x_1-x_0}\right)}{x_2-x_0}\\
&= \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}
\end{aligned}
$$

Los coeficientes c_i que acompañan a q_i cuando $\sum_{i=0}^{n} c_i q_i$ interpola a f en x_0, x_1, ...x_n toman el nombre de diferencias divididas y se escriben como

$$c_i = f[x_0, x_1, \ldots, x_i]$$

de inmediato vemos que

$$f[x_0] = f(x_0); \quad f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}; \quad f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2]-f[x_0, x_1]}{x_2-x_0}$$

Contenido

Así el polinomio de interpolación de Newton es

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, \ldots x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_i)$$

Teorema

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

Demostración.

Sea $q(x)$ el polinomio de grado $n-1$ que interpola a f en x_1, x_2, ...x_n entonces

$$p(x) = q(x) + \frac{x - x_n}{x_n - x_0}[q(x) - p_{n-1}(x)]$$

interpola a f en x_0, x_1, x_2, ...x_n. Igualamos los coeficientes del termino x^n

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

$\square$

Se acostumbra construir un cuadro sinóptico para el cálculo de las diferencias divididas

$$
\begin{array}{cc|ccc}
x_0 & f[x_0] & f[x_0,x_1] & f[x_0,x_1,x_2] & f[x_0,x_1,x_2,x_3] \\
x_1 & f[x_1] & f[x_1,x_2] & f[x_1,x_2,x_3] & \\
x_2 & f[x_2] & f[x_2,x_3] & & \\
x_3 & f[x_3] & & &
\end{array}
$$

Los coeficientes que resultan en la primera fila son los que forman el polinomio de interpolación de Newton

Ejemplo

Encuentre el polinomio que interpola los siguientes valores

x	3	1	5	6
$f(x)$	1	-3	2	4

A partir del cálculo de diferencias divididas obtenemos lo siguiente

$$\begin{array}{cc|ccc}
3 & 1 & 2 & -3/8 & 7/40 \\
1 & -3 & 5/4 & 3/20 & \\
5 & 2 & 2 & & \\
6 & 4 & & &
\end{array}$$

luego el polinomio de interpolante de Newton es

$$p(x) = 1 + 2(x-3) - 3/8(x-3)(x-1) + 7/40(x-3)(x-1)(x-5)$$

Teorema

La diferencia dividida es una función simétrica de sus argumentos. Es decir si $(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ *es una permutación de* $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *entonces*

$$f[z_0, z_1, \ldots, z_n] = f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

Demostración.

$f[z_0, z_1, \ldots, z_n]$ es el coeficiente de x^n en el polinomio que interpola f en $\{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$, y $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ es el coeficiente de x^n en el polinomio que interpola f en $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, como dicho polinomio es único entonces esas cantidades son iguales. □

Teorema

Sea p el polinomio interpolante de f en $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Si t es distinto de los nodos entonces

$$f(t) - p(t) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, t] \prod_{j=0}^{n} (t - x_j)$$

Demostración.

Sea q el polinomio interpolante de f en $\{x_0, x_1, \ldots, x_n, t\}$ entonces

$$q(x) = p(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, t] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

si $x = t$, $f(t) = q(t)$, luego

$$f(t) = p(t) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, t] \prod_{j=0}^{n} (t - x_j)$$

$\square$

Teorema

Si f es n veces derivable y $f^{(n)}$ es continua en $[a,b]$ entonces existe c en $\langle a,b\rangle$ tal que

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)$$

Demostración.

Sea p el polinomio interpolante de f en $\{x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}\}$ entonces el error cometido en la interpolación es

$$f(x_n)-p(x_n)=\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)\prod_{j=0}^{n-1}(x_n-x_j)$$

por el teorema anterior

$$f(x_n)-p(x_n)=f[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n]\prod_{j=0}^{n-1}(x_n-x_j)$$

□

Si suponemos que los nodos igualmente espaciados, $h = x_{i+1} - x_i$ y usamos la notación Δ para diferencia progresiva $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ entonces

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1}{h}\Delta f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \left.\frac{\Delta f(x_1)}{h} - \frac{\Delta f(x_0)}{h}\right/ 2h = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 f(x_0)$$

y en general

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k] = \frac{1}{k^\circ h^k}\Delta^k f(x_0)$$

para $x = x_0 + sh$ el polinomio interpolante tiene la forma

$$\begin{aligned} p(x) = p(x_0 + sh) &= f[x_0] + shf[x_0, x_1] + s(s-1)h^2 f[x_0, x_1, x_2] \\ &+ \ldots + s(s-1)\cdots(s-n+1)h^n f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} s(s-1)\cdots(s-k+1)h^k f[x_0, x_1, \ldots, x_k] \\
&= f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} \binom{s}{k} k! h^k f[x_0, x_1, \ldots, x_k]
\end{aligned}
$$

Fórmula de Newton progresiva

$$
p(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0)
$$

Diferencias regresivas

Podemos escribir el polinomio de interpolación como

$$
\begin{aligned}
p(x) =& f[x_n] + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x - x_n)(x - x_{n-1}) \\
&+ \cdots + f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0](x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_1)
\end{aligned}
$$

Si $x = x_n + sh = x_i + (s+n-i)h$ entonces

$$p(x) = p(x_n + sh) = f[x_n] + shf[x_n, x_{n-1}] + s(s+1)h^2 f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}]$$
$$+ \ldots + s(s+1)\cdots(s+n-1)h^n f[x_n \ldots, x_0]$$

Definición

Definimos $\nabla p_n = p_n - p_{n-1}$, $n \geq 1$, *y*

$$\nabla^k p_n = \nabla(\nabla^{k-1} p_n), k \geq 2$$

por lo tanto

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}] = \frac{1}{k! h^k} \nabla^k f(x_n)$$

y

$$p(x) = f[x_n] + \sum_{k=1}^{n} \frac{s(s+1)\cdots(s+k+1)h^k}{k!} \nabla^k f(x_n)$$

Si extendemos la notación del coeficiente binomial para $s \in \mathbb{R}$

$$\binom{-s}{k} = \frac{-s(-s-1)\ldots(-s-k+1)}{k!}$$

entonces

Fórmula de Newton regresiva

$$p(x) = f[x_n] + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(x_n)$$

Ejemplo

Considere la tabla

1.0000	1.0000	2.0000	3.0000	4.0000	5.0000
1.3000	1.6000	3.8000	6.6000	10.0000	0
1.6000	2.7400	7.7600	15.6000	0	0
1.9000	5.0680	17.1200	0	0	0
2.2000	10.2040	0	0	0	0

Aproxime el valor de polinomios interpolantes de grado 1, 2, 3, y 4 en $x = 2.0$. En este caso utilizamos la fórmula de Newton regresiva con los coeficientes en la diagonal del esquema

$$p(x) = 10.204{+}17.12(0.3)s{+}15.6(0.3)^2 s(s{+}1){+}10.0(0.3)^3 s(s{+}1)(s{+}2){+}5.0(0.3)^4 s(s{+}1)(s{+}2)(s{+}3)$$

donde $x = x_n + sh = 2.2 + 0.3s$, luego para $x = 2.0$ tenemos $s = 2/3$, $p(2) = 6.3600$

Bibliografía

Ex Final Semana 16 03/08/2022

Sustitutorio 17 10/08/2022

Miércoles 10:00 – 12:00

Referencias I

- J. L. DE LA FUENTE
  Técnicas de calculo para sistemas de ecuaciones, programación lineal y programación entera.
- G.H. Golub and C.F. Van Loan.
  Matrix Computations, 4th Edition
- Biswa Datta
  Numerical methods for linear control systems.
- Dennis, J. E. and Schnabel, Robert B.
  Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations
- Varga, Richard S.
  Geršgorin and His Circles.