Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2023-1

[Análisis y Modelamiento Numérico I - CM4F1]
[Prof: Los Profesores] UNI, 17 de mayo de 2023

Examen Parcial

1. Sea el siguiente sistema $Ax = b$, dado por

$$\begin{bmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

   a) Obtener la solución exacta.

   b) Obtener una solución aproximada con tres cifras significativas por eliminación de Gauss sin pivoteo.

   c) Obtener una solución aproximada con tres cifras significativas por eliminación de Gauss con pivoteo parcial.

   d) Dar una explicación del caso (b) versus el caso (c), utilizando el condicionamiento de una matriz.

[5 ptos]

Solución: Sea $\epsilon = 10^{-4}$.

a) La solución exacta es

$$x_1 = \frac{1}{1-\epsilon} = 1.\widehat{0001} \quad , \quad x_2 = \frac{1-2\epsilon}{1-\epsilon} = 0.\widehat{9998}.$$

b) Usando como pivote $\epsilon = 10^{-4}$ para la eliminación gaussiana

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ 0 & 1-\epsilon^{-1} \end{pmatrix}}_{U} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-\epsilon^{-1} \end{pmatrix}$$

luego, por sustitución regresiva, obtenemos

$$x_2 = \frac{2-\epsilon^{-1}}{1-\epsilon^{-1}} = \frac{9998}{9999} \quad , \quad x_1 = (1-x_2)\epsilon^{-1},$$

redondeando a 3 cifras significativas, obtenemos

$$x_2 = 1 \quad , \quad x_1 = 0.$$

c) Intercambiar filas hasta que el pivote debajo de la diagonal sea el de mayor magnitud en valor absoluto.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1-\epsilon \end{pmatrix}}_{\tilde{U}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-2\epsilon \end{pmatrix}$$

La solución es

$$x_2 = \frac{1-2\epsilon}{1-\epsilon} = 0.\widehat{9998} \quad , \quad x_1 = \frac{1}{1-\epsilon} = 1.\widehat{0001}$$

Redondeando a 3 cifras es $x_2 = 1$ y $x_1 = 1$.

d) El sistema no está mal condicionado, en efecto, dado que

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = 2.$$

y

$$A^{-1} = \frac{1}{\epsilon - 1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \epsilon \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \|A^{-1}\| = \frac{2}{|1-\epsilon|}$$

se tiene que $\text{cond}_1(A) = \|A\|_1\|A^{-1}\|_1 \approx 4$. El problema en la parte (b) es haber utilizado mal el método de Gauss ya los pivotes muy pequeños hacen al método inestable. Es decir,

$$\text{cond}_1(U) = \|U\|_1\|U^{-1}\|_1 = \frac{1}{\epsilon} \times \frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon^2} = 10^8,$$

donde

$$U^{-1} = \frac{1}{\epsilon - 1}\begin{pmatrix} 1-\epsilon^{-1} & -1 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}.$$

Lo que implica que el caso (b) es muy inestable. Sin embargo en la parte (c) la matriz está bien condicionada, en efecto

$$\text{cond}_1(\tilde{U}) = \|\tilde{U}\|_1\|\tilde{U}^{-1}\|_1 = (2-\epsilon) \times \frac{2}{1-\epsilon} \approx 4,$$

donde

$$\tilde{U}^{-1} = \frac{1}{1-\epsilon}\begin{pmatrix} 1-\epsilon & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Sea $AX = b$. Verificar con un ejemplo que si A es una matriz de coeficientes reales de orden $n \times n$, la cual es de diagonal dominante no triangular, entonces el sistema tiene solución con el método de Gauss sin pivotación, y los cálculos son estables respecto al crecimiento de errores por redondeo. [5 ptos]

Solución: Dar una matriz de diagonal dominante, aplicar el método de Gauss y resolver por sustitución regresiva.

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|.$$

En una matriz diagonal dominante, no se requiere pivoteo porque en la diagonal ya se encuentran los elementos de mayor valor absoluto.

3. Dado el siguiente sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 40 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -78 \end{pmatrix}$$

a) Justifique que existe una única descomposición LDL^t. [2 ptos]

b) Aplicar el algoritmo LDL^t para resolver el sistema lineal. [3 ptos]

Solución:

a) Por un teorema hecho en clase es suficiente observar que sus menores principales $\det(A_{11}) = 1$, $\det(A_{22}) = 1$ y $\det(A_{33}) = 6$ son distintos de cero para justificar la unicidad de la descomposición LDL^t.

b) Aplicando el algoritmo se obtiene la descomposición pedida

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolviendo, se obtiene

$$(x, y, z) = (1, -1, -2).$$

4. Dadas las matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Encontrar la matriz A tal que

$$PAP^t = LTL^t$$

y de algunas propiedades de A. [5 ptos]

Solución: Se obtiene multiplicando las matrices del lado derecho

$$PAP^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \\ -1 & -3 & 5 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & 17 \end{pmatrix}.$$

Luego, deshaciendo las permutaciones por columnas y luego las de las filas, obtenemos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & 17 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Otra forma, es usando el hecho que las matrices de permutación son ortogonales, es decir, $PP^t = I = P^tP$. Por tanto, se obtiene

$$A = P^tLTL^tP.$$

Observamos que P es una matriz de permutación, L es una matriz triangular inferior y T es una matriz tridiagonal, por tanto el sistema $PAP^t = LTL^t$ corresponde al método de Parlett-Reid. Por lo cuál deducimos que A es una matriz indefinida simétrica. Opcionalmente, obtenemos aproximadamente sus valores propios

$$\lambda_1 = 0{,}26648 \quad \lambda_2 = -0{,}47781 \quad \lambda_3 = 4{,}87357 \quad \lambda_4 = 19{,}33775.$$