Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática Ciclo 2022–I

EXAMEN FINAL DE
ANÁLISIS Y MODELAMIENTO NUMÉRICO I
CM4F1 A/B

---

1. Responda Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda a cada proposición.

   a) Si A es inversible entonces la solución de $Ax = b$ en el sentido de mínimos cuadrados es $x = A^{-1}b$.

   b) La ecuación $x^5 - 4x^3 + 1$ tiene al menos una solución en $\langle 0, 1\rangle$.

   c) El método del punto fijo se puede usar para resolver la ecuación $f(x) = 0$.

   d) Si A es inversible entonces A y A^{-1} tienen los mismos vectores propios.

   e) El polinomio de interpolación de Hermite necesita que se especifique el mismo orden de diferenciación en todos lo nodos.

   f) Para un vector unitario w se cumple que la matriz $H = I - 2ww^T$ es ortogonal.

   g) Una matriz A de orden $m \times n$ es llamada de rango completo cuando sus filas y columnas son linealmente independientes.

   h) Para resolver el sistema lineal $Ax = b$ es más conveniente usar el método de Givens cuando la matriz es densa.

   i) El método de regla falsa siempre converge porque el intervalo decrece en cada iteración.

   j) La función G en el método de homotopía con parámetro λ provee una familia de funciones que conducen desde un valor conocido $x(0)$ a la solución $x(1)$ el cual es solución del sistema no lineal $F(x)$.

   Solución:

   a) V

   b) V

   c) V

   d) V

   e) F

   f) V

   g) F

   h) F

   i) F

   j) V

2. En el diseño de vehículos todo terreno, es necesario considerar las fallas del vehículo al intentar sortear dos tipos de obstáculos. Un tipo de falla se llama falla de suspensión y ocurre cuando el vehículo intenta cruzar un obstáculo que hace que la parte inferior del vehículo toque el suelo. los otro tipo de falla se denomina falla de morro y ocurre cuando el vehículo desciende a una zanja y su nariz toca el suelo.

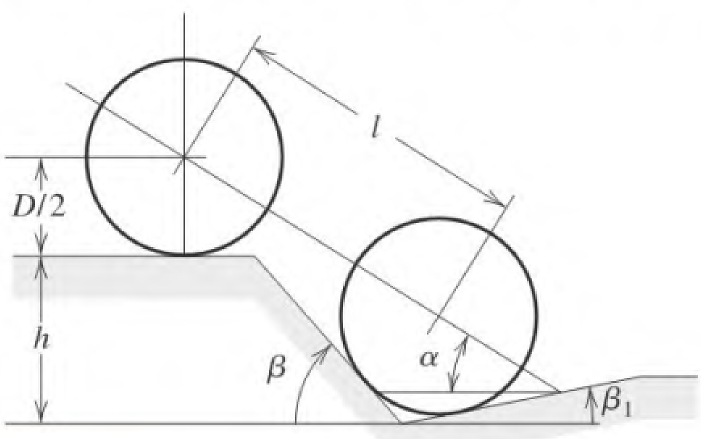
   La figura adjunta, muestra los componentes asociados con la falla en el morro de un vehículo. En esa referencia, se muestra que el ángulo máximo α a que se puede manejar un vehículo cuando β es el ángulo máximo en el que se produce la falla de suspensión, satisface la ecuación

$$A \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + B \operatorname{sen}^2 \alpha - C \cos \alpha - E \operatorname{sen} \alpha = 0,$$

   donde

$$A = l \operatorname{sen} \beta_1, \quad B = l \cos \beta_1, \quad C = (h + 0.5D) \operatorname{sen} \beta_1 - 0.5D \tan \beta_1,$$
$$E = (h + 0.5D) \cos \beta_1 - 0.5D.$$

   Encuentre α cuando $l = 2.2m$, $h = 1.2m$, $D = 75cm$, $\beta_1 = 11.5°$



Solución:
Definimos

$$f(x) = A \operatorname{sen} x \cos x + B \operatorname{sen}^2 x - C \cos x - E \operatorname{sen} x,$$
$$f'(x) = -A \operatorname{sen}^2 x + A \cos^2 x + 2B \operatorname{sen} x \cos x + C \operatorname{sen} x - E \cos x,$$

y aplicamos el método de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k \geq 0$$

con $x_0 = 1$. Las iteraciones terminan cuando $h = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = 0$.

A=	0.43860946		l=	2.2	
B=	2.15583435		h=	1.2	
C=	0.23770988		D=	0.75	
E=	1.16838141		beta1=	0.20071286	
x	**sen x**	**cos x**	**f(x)**	**df(x)**	**h**
1	0.84147098	0.54030231	0.61430797	1.34651549	-0.4562205
0.54378	0.51737402	0.85575938	-0.03665448	1.23591197	0.02965784
0.57344	0.54252276	0.8400411	0.00086167	1.2928974	-0.00066647
0.57277	0.54196278	0.84040249	4.0182E-07	1.29169102	-3.1108E-07
0.57277	0.54196252	0.84040266	8.7708E-14	1.29169045	-6.7901E-14
0.57277	0.54196252	0.84040266	0	1.29169045	0

finalmente

$$\alpha = 32,81^\circ$$

3. Suponga que f tiene derivada de orden m continua y que p es un cero de multiplicidad m de f. Pruebe que $g'(p) = 0$ donde

$$g(x) = x - \frac{mf(x)}{f'(x)}$$

Solución:
Si utilizamos la formula de Taylor con resto de Lagrange para f y para f' tenemos:

$$f(x) = f(p) + f(p)(x-p) + \cdots + \frac{f^{(m-1)}(p)}{(m-1)!}(x-p)^{m-1} + \frac{f^{(m)}(c_1)}{m!}(x-p)^m,$$

donde $0 < |x - c_1| < |x - p|$, y

$$f'(x) = f'(p) + f''(p)(x-p) + \cdots + \frac{f^{(m-1)}(p)}{(m-2)!}(x-p)^{m-2} + \frac{f^{(m)}(c_2)}{(m-1)!}(x-p)^{m-1},$$

donde $0 < |x - c_2| < |x - p|$, por lo tanto

$$g(x) = x - m\frac{f(x)}{f'(x)} = x - m\frac{\frac{f^{(m)}(c_1)}{m!}(x-p)^m}{\frac{f^{(m)}(c_2)}{(m-1)!}(x-p)^{m-1}} = x - (x-p)\frac{f^{(m)}(c_1)}{f^{(m)}(c_2)}$$

como $f^{(m)}$ es continua y $f^{(m)}(p) \neq 0$ entonces $c_1 \to p$, $c_2 \to p$, y

$$\lim_{x\to p} g(x) = g(p) = p$$

Asi p es punto fijo de g y

$$\lim_{x\to p} \frac{g(x) - g(p)}{x - p} = \lim_{x\to p}\left(1 - \frac{f^{(m)}(c_1)}{f^{(m)}(c_2)}\right) = 1 - \frac{f^{(m)}(p)}{f^{(m)}(p)} = 0$$

es decir $g'(p) = 0$.

4. Justifique adecuadamente cada proposición.

   a) Si $0 \leq x \leq 0.5$ entonces la aproximación $(1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ tiene como cota superior de error a $\frac{1}{128}$.

   b) Asuma la función $g(x) = (x-7)^{4/3} + 7$ asociada a un método de punto fijo, entonces el error e_k en la etapa $n+1$ viene dado por $e_{n+1} = e_n^{4/3}$.

   c) En el método de Newton, si la sucesión converge a la raíz entonces la sucesión $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ no necesariamente converge a cero.

   d) Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Al aplicar la transformación de Givens para anular el valor en la posición $(2, 1)$ de la matriz A, resulta la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{10} & \frac{3\sqrt{10}}{5} & \frac{\sqrt{10}}{10} \\ 0 & \frac{3\sqrt{10}}{5} & -\frac{3\sqrt{10}}{10} \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) **Verdadero.**
Desarrollo por serie de Taylor alrededor de $x = 0$ para la función $f(x) = (1 + x)^{1/2}$, luego:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}, f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}, f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}$$

entonces:

$$f(0) = 1, f'(0) = \frac{1}{2}, f''(0) = -\frac{1}{4}, f'''(0) = \frac{3}{8}$$

por tanto:

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{3}{8 \times 3!}x^3 + \dots$$

de donde se observa que el término principal del error es:

$$e \approx \frac{1}{16}(0.5)^3 = \frac{1}{128}.$$

b) **Verdadero.**
De $g(x) = (x - 7)^{4/3} + 7$ es evidente que el punto fijo es $x = 7$, por tanto, el método iterativo asociado es:

$$x_{n+1} = (x_n - 7)^{4/3} + 7$$

por tanto:

$$x_{n+1} - 7 = (x_n - 7)^{4/3}$$

que es equivalente a:

$$e_{n+1} = e_n^{4/3}.$$

c) **Falso.**
Sea η la raíz de f, luego, si el método de Newton converge a la raíz, entonces $f(x_n) \to f(\eta) = 0$ y como siempre se requiere que $f'(x_n) \neq 0$, por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = 0.$$

d) **Falso.**
La matriz de Givens pedida es:

$$G(2,1) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{3\sqrt{10}}{10} & 0 \\ -\frac{3\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{10}}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por tanto:

$$G(2,1)A = \begin{pmatrix} 2\sqrt{10} & \dfrac{3\sqrt{10}}{5} & \dfrac{\sqrt{10}}{10} \\ 0 & \dfrac{3\sqrt{10}}{5} & -\dfrac{3\sqrt{10}}{10} \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Determine el polinomio de interpolación en la forma de Lagrange para una función $f(x)$ en los puntos siguientes:

$$(-2,32); (-1,5); (0,1); (1,1); (2,11); (3,61)$$

(Deje indicado, no simplificar). Use el polinomio calculado para deducir el polinomio de interpolación para una función $g(x)$ en los puntos siguientes:

$$(-2,32); (-1,5); (0,1); (1,1); (2,11); (3,30)$$

Solución:
Los polinomios de Lagrange son:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= -\frac{(x+1)x(x-1)(x-2)(x-3)}{120} \\ L_1(x) &= \frac{(x+2)x(x-1)(x-2)(x-3)}{24} \\ L_2(x) &= -\frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)}{12} \\ L_3(x) &= \frac{(x+2)(x+1)x(x-2)(x-3)}{12} \\ L_4(x) &= -\frac{(x+2)(x+1)x(x-1)(x-3)}{24} \\ L_5(x) &= \frac{(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)}{120} \end{aligned}$$

y el polinomio interpolador de Lagrange es:

$$P_5(x) = 32L_0(x) + 5L_1(x) + L_2(x) + L_3(x) + 11L_4(x) + 61L_5(x).$$

De los puntos de interpolación para las funciones f y g, se puede deducir que el polinomio de interpolación pedido para la función g tiene la forma siguiente:

$$Q_5(x) = P_5(x) + A(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2),$$

donde A es una constante a calcular.
De la expresión para Q_5 se puede concluir que:

$$Q_5(-2) = P_5(-2) = 32, \quad Q_5(-1) = P_5(-1) = 5, \quad Q_5(0) = P_5(0) = 1, \quad Q_5(2) = P_5(2) = 11.$$

Ahora se impone la condición de interpolación $Q_5(3) = 30$, por tanto:

$$Q_5(3) = P_5(3) + A(5)(4)(3)(2)(1) \Rightarrow A = -\frac{31}{120}.$$

Luego, el polinomio de interpolación pedido es:

$$Q_5(x) = P_5(x) - \frac{31}{120}(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2).$$

Los profesores[1]
Lima, 03 de Agosto del 2022.

[1] Hecho en LaTeX