Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática — Ciclo 2021-1

[Curso: CM4F1 A Análisis y Modelamiento Numérico I]

Solucionario del Examen Final

1.
   a) (0.4 ptos) FALSO Sea f diferenciable con $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a,b]$. Si $f(x) = 0$ tiene solución en $[a,b]$ entonces el método de Newton converge para $x_0 \in [a,b]$.

   b) (0.4 ptos) FALSO Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f'(x) < 1, \forall x \in \mathbb{R}$ entonces la ecuación $f(x) = x$ tiene solución.

   c) (0.4 ptos) VERDADERO Si L_k denota a los polinomio de Lagrange entonces $\sum_{k=0}^{n} L'_k(x) = 0$

   d) (0.4 ptos) VERDADERO Los métodos iterativos $x_{k+1} = Ax_k + c$ convergen si para alguna norma matricial $\|A\| < 1$.

   e) (0.4 ptos) FALSO Si el método de Newton converge entonces lo hace cuadráticamente.

   f) (0.4 ptos) FALSO Si f es dos veces derivable en x_0 entonces $f[x_0, x_0, x_0] = f''(x_0)$

   g) (0.4 ptos) VERDADERO El polinomio interpolante de Hermite en un solo nodo x_0 coincide con un polinomio de Taylor alrededor de x_0.

   h) (0.4 ptos) VERDADERO Un método iterativo para sistemas lineales podría obtener la solución exacta en un número finito de pasos.

   i) (0.4 ptos) VERDADERO Si agregamos un nuevo nodo x_{n+1} entonces la forma de Newton del polinomio de interpolación se obtiene en base al polinomio de Newton en $x_0, x_1, \ldots x_n$

   j) (0.4 ptos) FALSO Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no siempre existe un polinomio p tal que $p(0) = f(1/2)$, $p(1) = f(0)$, $p(2) = f(1)$.

2. Decida si la proposición es verdadera o falsa. Justifique adecuadamente su respuesta.

   a) (1 pto) La ecuación $x - 3 = 4/x^2$ tiene solo una solución en $[3,4]$.

   b) (1 pto) Si $f(x) = (x-r)^2(x^6+1)$ entonces el método de Newton converge cuadráticamente a la solución de $f(x) = 0$.

   c) (1 pto) Si A es inversible entonces todos su valores propios son no nulos.

   d) (1 pto) Si $g(x) = x + x^3$ y $0 < x_0 < 1$ entonces la iteración $x_{i+1} = g(x_i)$ satisface que $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$.

   Solucion

   a) (1 pto) VERDADERO. La ecuación $x - 3 = 4/x^2$ es equivalente a $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4 = 0$ en $[3,4]$. Como $f(3) < 0$ y $f(4) > 0$ entonces existe un c en $[3,4]$ tal que $f(c) = 0$. Ademas $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) > 0$ en $[3,4]$, por lo tanto en ese intervalo f es creciente y tiene solo una raíz.

b) (1 pto) FALSO. La ecuación $f(x) = (x-r)^2(x^6+1) = 0$ tiene como única solución $x = r$, ademas $f'(r) = 0$, por lo que el método de Newton converge linealmente, no cuadráticamente, a la solución de $f(x) = 0$.

c) (1 pto) VERDADERO. Si A es inversible entonces todos su valores propios son no nulos. Como $Av = \lambda v$ para $v \neq 0$, entonces si $\lambda = 0$ y A inversible, entonces $Av = 0$ y $v = 0$, lo cual es una contradicción.

d) (1 pto) VERDADERO. Si $g(x) = x + x^3$ y $0 < x_0 < 1$ entonces $x_{i+1} = g(x_i) = x_i + x_i^3$, por inducción matemática, $x_0 > 0$ y si $x_i > 0$ entonces $x_{i+1} = x_i + x_i^3 > 0$, por lo tanto $x_i > 0, \forall i \geq 0$. Ahora veremos el termino $x_{i+1} - x_i$, en efecto $x_{i+1} - x_i = x_i^3 > 0$, por lo tanto $x_{i+1} > x_i$.

3. (4 ptos) La probabilidad de una falsa alarma en detección de señales esta dada por

$$P_{FA} = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(p/2)2^{p/2}} t^{p/2-1} e^{-t/2}\, dt$$

donde x es llamado umbral de detección. Si p es par, se puede demostrar que

$$P_{FA} = e^{-x/2} \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} \frac{1}{k!} (x/2)^k$$

Para el diseño de detectores de señales es importante que $P_{FA} \approx 0$. Elija entre el método de bisección, el método de Newton, método de secante y el método de falsa posición para encontrar valores de x con un error máximo de 10^{-5}, para $p = 8$ tal que

a) $P_{FA} = 0{,}005$

b) $P_{FA} = 0{,}05$

c) $P_{FA} = 0{,}1$

Solución

Sea *prob* la probabilidad que nos dan por ejemplo 0.1, vemos que $P_{FA}(0) = 1$ y que tiende a cero cuando $x \to +\infty$ así que la función $f(x) = P_{FA}(x) - prob$ necesita intervalos cada vez mas grandes para cambiar de signo por lo que el método de bisección seria ineficiente. Por otro lado la derivada de P_{FA} parece complicada pero se escribe en forma simple:

$$\frac{d}{dx} P_{FA} = \frac{1}{2} e^{-x/2} \sum_{k=1}^{\frac{p}{2}-1} \frac{1}{(k-1)!} (x/2)^{k-1} - \frac{1}{2} e^{-x/2} \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} \frac{1}{k!} (x/2)^k$$

$$\frac{d}{dx} P_{FA} = \frac{1}{2} e^{-x/2} \left(\sum_{k=1}^{\frac{p}{2}-1} \frac{1}{(k-1)!} (x/2)^{k-1} - \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} \frac{1}{k!} (x/2)^k \right)$$

$$\frac{d}{dx} P_{FA} = \frac{1}{2} e^{-x/2} \left(\sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-2} \frac{1}{k!} (x/2)^k - \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} \frac{1}{k!} (x/2)^k \right) = -\frac{1}{2} e^{-x/2} \frac{1}{(\frac{p}{2}-1)!} (x/2)^{\frac{p}{2}-1}$$

```python
def PFA(x,p=8):
    import numpy as np
    z = np.exp(-0.5*x)
    s = 1
    t = 1
    for k in range(1,int(p/2)):
        t = 0.5*x*t/k
        s = s + t
    z = z*s
    return z
def dPFA(x,p=8):
    import numpy as np
    z = -0.5*np.exp(-0.5*x)
    t = 1
    for k in range(1,int(p/2)):
        t = 0.5*x*t/k
    z=z*t
    return z
```

```python
def newton(f,df,x0,tolError=1E-5):
    x = x0
    maxIter =100
    h = np.inf
    k=0
    print(f"{'k':^3s}{'x':^7s}{'h':^7s}")
    while( abs(h)>tolError) and k<maxIter:
        h = -f(x)/df(x)
        x = x + h
        k = k+1
        print(f"{k:3d}{x:7.3f}{h:7.3f}")
    if h>tolError:
        print(f"Metodo no converge")
    else:
        print(f"Metodo converge en {k} iteraciones, c={x:8.5f}")
    return x
```

```
prob = [0.1,0.05,0.005]
newton(lambda x:PFA(x)-prob[0],dPFA,4)
newton(lambda x:PFA(x)-prob[1],dPFA,4)
newton(lambda x:PFA(x)-prob[2],dPFA,4)
```

```
 k    x      h
  1 12.392  8.392
  2 13.247  0.856
  3 13.360  0.112
  4 13.362  0.002
  5 13.362  0.000
Metodo converge en 5 iteraciones, c=13.36157
 k    x      h
  1 12.946  8.946
  2 14.771  1.825
  3 15.432  0.660
  4 15.506  0.075
  5 15.507  0.001
  6 15.507  0.000
Metodo converge en 6 iteraciones, c=15.50731
 k    x      h
  1 13.445  9.445
  2 16.478  3.034
  3 18.998  2.520
  4 20.843  1.844
  5 21.760  0.917
  6 21.948  0.188
  7 21.955  0.007
  8 21.955  0.000
Metodo converge en 8 iteraciones, c=21.95495
```

También es posible utilizar el método de la secante.

4. **(3 ptos) Enuncie el teorema del círculo de Gersgorin y úselo para determinar cotas para los autovalores y el radio espectral de la siguiente matriz**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Solucion

Teorema 1 (Circulo de Gershgorin) *Sea A una matriz $n \times n$ y R_i el círculo en el plano complejo con centro a_{ii} y radio $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$:*

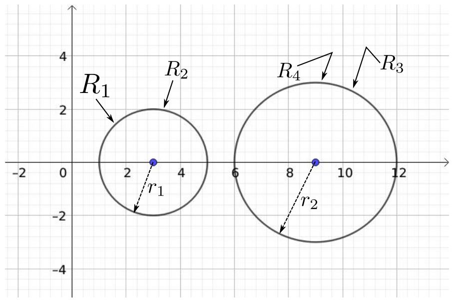
$$R_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

Los autovalores de A esta contenido en la unión de los círculos, $R = \cup_{i=1}^{n} R_i$. Ademas la unión de k círculos no intersecta los restantes $n - k$ y contiene exactamente k autovalores contando multiplicidades.

Luego, los círculos de Gersgorin son:

$$\begin{array}{lllll} R_1 & = & \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z-3| \leq 2\} & = & \{z = a+bi \in \mathbb{C} \,/\, (a-3)^2 + b^2 \leq 2^2,\ a, b \in \Re\} \\ R_2 & = & \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z-3| \leq 2\} & = & \{z = a+bi \in \mathbb{C} \,/\, (a-3)^2 + b^2 \leq 2^2,\ a, b \in \Re\} \\ R_3 & = & \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z-9| \leq 3\} & = & \{z = a+bi \in \mathbb{C} \,/\, (a-9)^2 + b^2 \leq 3^2,\ a, b \in \Re\} \\ R_4 & = & \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z-9| \leq 3\} & = & \{z = a+bi \in \mathbb{C} \,/\, (a-9)^2 + b^2 \leq 3^2,\ a, b \in \Re\} \end{array}$$

Graficamos los círculos:



De la figura anterior se puede concluir que todo autovalor λ de la matriz A satisface:

$$1 \leq |\lambda| \leq 12$$

y así se tiene que:

$$6 \leq \rho(A) \leq 12.$$

5. (5 ptos) A car traveling along a straight road is colcked at a number points. The data from the observations are given in the following table, where the time is in seconds, the distance is in feet, and the speed is in feet per second.

Time	0	3	5	8	13
Distance	0	225	383	623	993
Speed	75	77	80	74	72

a) **Use a clamped cubic spline to predict the position of the car and its speed when $t = 10$ s.**

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3 \implies S_j(x_j) = a_j = f(x_j)$$

$$S_j'(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2 \implies S_j'(x_j) = b_j$$

b) **Use the derivative of the spline to determine whether the car ever exceeds a 55 mi/h speed limit on the road, if so, what is the first time the car exceeds this speed? (Hint: 1mi = 5280feet.)**

c) **What is the predicted maximum speed for the car?**

d) **Show the corresponding figure.**

Resolución:
Para $n = 4$ se tienen los puntos (x_i, y_i) para $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Así resulta los splines cúbicos:

$$s_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3, \quad j = 0, 1, 2, 3. \tag{1}$$

a) **Clamped cubic spline is when $s'(x_0) = f'(x_0)$ and $s_3'(x_n) = f'(x_n)$, thus is:**

$$s'(x_0) = s'(0) = 75, \quad s_3'(x_n) = s_3'(13) = 72$$

The coeficientes using program in Python are: Then position when $t = 10$ occurs in:

$$s_3(10) = 774{,}838$$

Cuadro 1: Coeficients of clamped cubic splines

j	a_j	b_j	c_j	d_j
0	0	75	-0.659	0.22
1	225	76.978	1.319	-0.154
2	383	80.407	0.396	-0.177
3	623	77.998	-1.199	0.08

b) **The velocity in the interval $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, 1, 2, 3$ is given by:**

$$V_j(x) = s_j'(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2 \tag{2}$$

The maximun of velocity at interior of $[x_j, x_{j+1}]$ is in the point $\hat{x}_j$ such that:

$$V_j(\hat{x}_j) = 0 \Rightarrow \hat{x}_j = x_j - \frac{c_j}{3d_j} \tag{3}$$

Cuadro 2: Velocities in $[x_j, x_{j+1}]$ feet per second

j	$V_j(x_j)$	$V_j(\hat{x}_j)$	$V_j(x_{j+1})$
0	75	74.341	76.978
1	76.978	80.747	80.407
2	80.407	80.702	77.998
3	77.998	72	72

Cuadro 3: Velocities in $[x_j, x_{j+1}]$ mi/h

j	$V_j(x_j)$	$V_j(\hat{x}_j)$	$V_j(x_{j+1})$
0	51.136	50.687	52.485
1	52.485	55.055	54.823
2	54.823	55.024	53.18
3	53.18	49.091	49.091

The first time the car exceeds 55 mi/h is in $\hat{x}_1$:

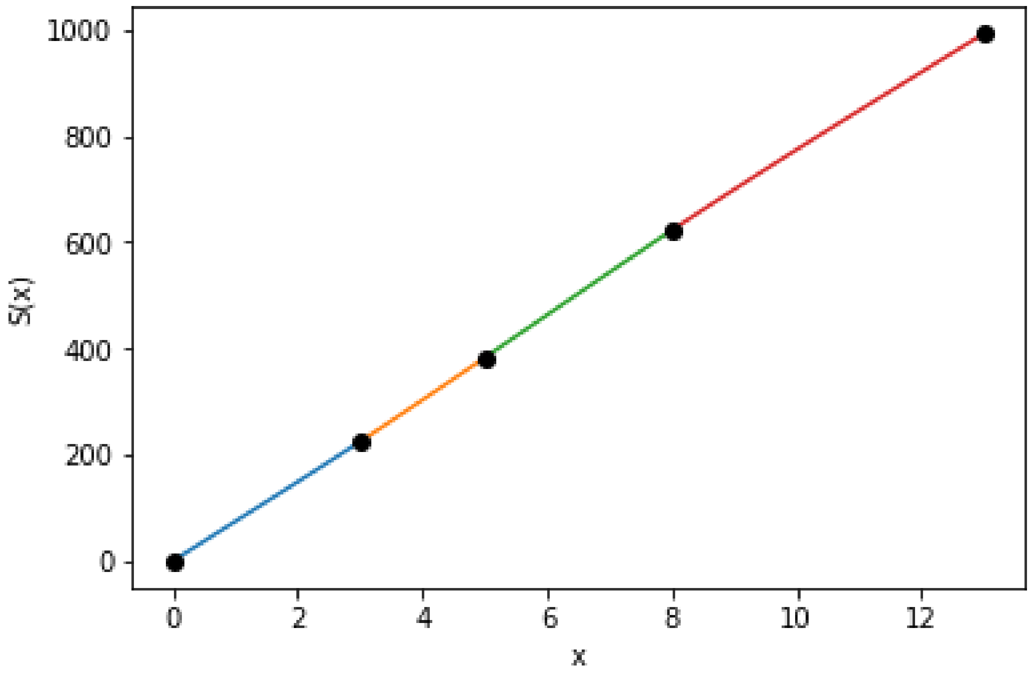
$$\hat{x}_1 = x_1 - \frac{c_1}{3d_1} = 5{,}859$$

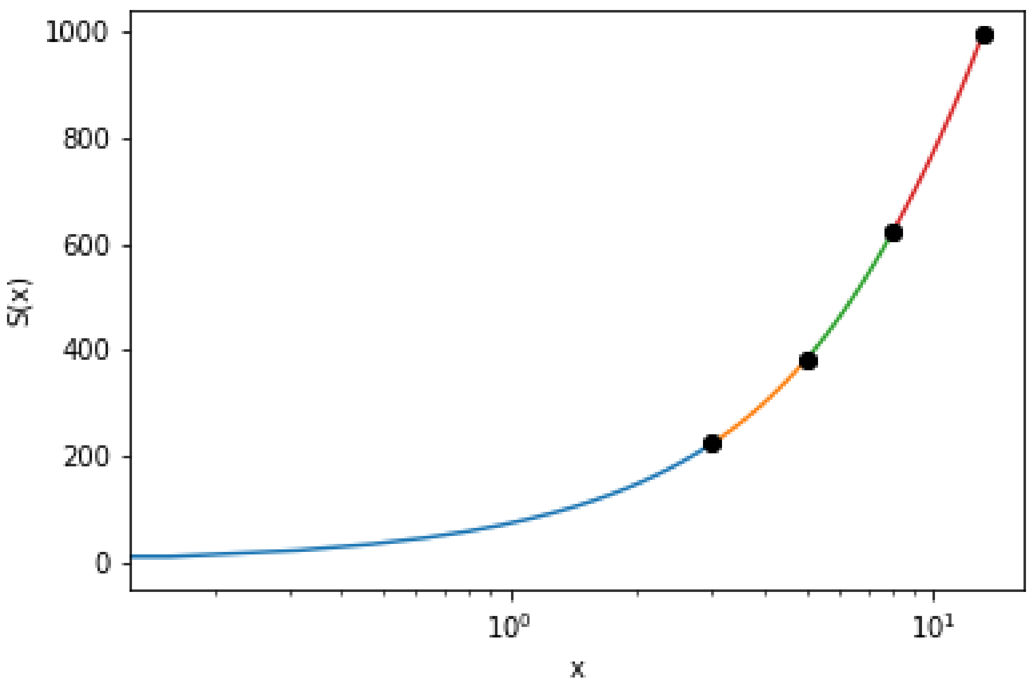
c) **The predicted maximum speed for the car is 55.055 mi/h.**

d) **The corresponding figure is:**
The corresponding figure in semilog in axes "x "scale is:

Uni, 4 de agosto de 2021[1]

[1]Hecho en LaTeX


1000
800
600
400
200
0
S(x)
0
2
4
6
8
10
12
x


1000
800
600
400
200
0
S(x)
10^0
10^1
x