UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA   CICLO 2022–I

EXAMEN PARCIAL DE ANÁLISIS Y MODELAMIENTO NUMÉRICO I CM4F1 A/B

---

1. Establezca el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

   (a) Los números de punto flotante $\mathbb{F}(\beta, t, L, U)$ no están equiespaciados en el intervalo $[0, 1]$.

   (b) El número $1/10$ tiene un representación binaria periódica.

   (c) Un problema mal condicionado $f(x)$ tiene un número de condición alto para cualquier valor de x.

   (d) Si la eliminación gaussiana se realiza sin intercambio de filas para una matriz A entonces $A = LL^T$.

   (e) Si el método de Richardson converge a la solución de $Ax = b$ entonces el radio espectral de la matriz de iteración $I - A$ es menor que 1.

   (f) Let A be an $n \times n$ matrix with entries a_{ij}. Then $\|A\|_1 = \max\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

   (g) Let $\|.\|$ be an matrix norm and I is the $n \times n$ identity, then $\|I\| = 1$.

   (h) No se puede aplicar el método del gradiente conjugado al sistema $Ax = b$ donde

   $$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   (i) La descomposición SVD sólo de aplica a matrices de cualquier orden pero de entradas todas reales.

   (j) El número de condición de una matriz invertible A puede ser calculado como $K_2(A) = \dfrac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_n}}$ donde λ_1 y λ_n son los autovalores máximo y mínimo respectivamente de A.

2. Justifique adecuadamente el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

   (a) El problema de calcular $f(x) = \operatorname{arcsen}(x)$ esta mal condicionado cuando x es próximo 1.

   (b) El sistema

   $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & \alpha x_3 & = & -2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & \alpha x_3 & = & 0 \\ \alpha x_1 & - & x_2 & + & \alpha x_3 & = & 2 \end{array}$$

   tiene infinitas soluciones para $\alpha = 0$

(c) La matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 4 & 6\alpha & 8 \\ 6 & \alpha & 10 \end{pmatrix}$ admite descomposición LU cuando $\alpha \in \langle 2, 4\rangle$.

(d) Si A es no singular entonces AA^* es definida positiva.

3. Calcule el determinante de la matriz A utilizando una factorización $PA = LU$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Use Steepest Descent Method to solve:

$$g(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} g(x)$$

where $g(x) = \dfrac{1}{2}x^t Ax - x^t b$, $n = 3$, and:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Start with $x^0 = (0, 0, 0)^t$ and do three iterations.

5. For the solution of the linear system $Ax = b$ with:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

consider the following iterative method: given $x^0 \in \mathbb{R}^2$, find:

$$x^{k+1} = B(\theta)x^k + g(\theta) \quad \text{for } k \geq 0$$

where θ is a real parameter and:

$$B(\theta) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2\theta^2 + 2\theta + 1 & -2\theta^2 + 2\theta + 1 \\ -2\theta^2 + 2\theta + 1 & 2\theta^2 + 2\theta + 1 \end{bmatrix}, \quad g(\theta) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} - \theta \\ \dfrac{1}{2} - \theta \end{bmatrix}$$

Address the following points:

(a) Check that the method is consistent for all $\theta \in \mathbb{R}$.

(b) Determine the values of θ for which the method is convergent.

(c) Find the optimal value of θ, i.e., the value of θ for which $\rho(B(\theta))$ is minimum.

Los profesores[1]
Lima, 08 de Junio del 2022.

[1] Hecho en LaTeX