Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Ciclo 2021-2

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

# Solucionario Práctica Calificada 05

1. **Justificando su respuesta, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:**

   (a) [1 *pto.*] Sea $f : [-3, 0] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$, entonces el número de iteraciones mínimas que se necesitan con una exactitud de $10^{-3}$ es 11.

   (b) [1 *pto.*] Sean $x$ e $y$ vectores no nulos de la misma longitud. Si $w = \dfrac{x-y}{\|x-y\|_2}$ y $c = -\|x-y\|_2$, entonces $w^t\left(x + \dfrac{c}{2}w\right) = 0$.

   (c) [1 *pto.*] Sean $x$ e $y$ vectores no nulos de la misma longitud. Si $y = x + cw$ y $c < 0$, donde $w^t w = 1$, entonces $c = -w^t x$.

   (d) [1 *pto.*] Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, una función continua, entonces si $f(a)f(b) < 0$ y dado cualquier punto inicial $p^0 \in [a, b]$ el método de la bisección genera una secuencia $\{p^k\}$ el cual converge a una única solución $\bar{p}$ de $f$, es decir, $f(\bar{p}) = 0$.

   **Solución**

   (a) (Verdadero) Sabemos que
   $$\frac{3}{2^{n+1}} < 10^{-3},$$
   Por lo que tenemos que $n = 11$.

   (b) (Verdadero)
   $$w^t\left(x + \frac{c}{2}w\right) = \frac{(x^t - y^t)(x+y)}{2\|x-y\|_2} = 0$$
   desde que $\|x\|_2 = \|y\|_2$.

   (c) (Falso) Del acápite anterior tenemos que $w^t\left(x + \dfrac{c}{2}w\right) = 0$, entonces $c = -2(w^t x)$, desde que $w^t w = 1$.

   (d) (Falso) Desde que $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$, el cual posee tres soluciones en el intervalo $[0, 4]$.

2. **Dado el circuito de una red**

**Determine la solución aproximada del circuito, según el siguiente requerimiento.**

**(a) [1 *pto.*] Modele el problema.**

**(b) [1 *pto.*] Determine la solución usando el método de Gram-Schmidt.**

**(c) [1 *pto.*] Determine la solución usando el método de Gram-Schmidt Modificado.**

**(d) [1 *pto.*] Indique que método recomienda.**

**Solución:**

**(a) [1 *pto.*] Sean**

$$\begin{aligned} I_1 &: \text{Intensidad 1.} \\ I_2 &: \text{Intensidad 2.} \\ I_3 &: \text{Intensidad 3.} \end{aligned}$$

**Por la segunda Ley de Kirchhoff:**

$$\begin{array}{rcrcrcl} 300I_1 & & & + & 150I_3 & = & 7.5 \\ & & 1000I_2 & - & 150I_3 & = & 11.5 \end{array}$$

**Por la primera Ley de Kirchhoff:**

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0.$$

**Donde, el sistema es**

$$\begin{array}{rcrcrcl} 300I_1 & & & + & 150I_3 & = & 7.5 \\ & & 1000I_2 & - & 150_3 & = & 11.5 \\ I_1 & - & I_2 & - & I_3 & = & 0 \end{array}$$

**(b) [1 *pto.*] Por el método de Gram-Schmidt, tenemos:**

$$E = \begin{bmatrix} 0.999994444491 & 0.000003333295 & 0.003333313148 \\ 0 & 0.999999500006 & -0.000999993944 \\ 0.003333314815 & -0.000999988389 & -0.999993944499 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 300.001666662 & -0.003333314815 & 149.9958333588 \\ 0 & 1000.000499994 & -149.9984250183 \\ 0 & 0 & 1.649990008424 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 7.499996666569 \\ 11.49999425007 \\ 0.013499994638 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 0.020909090909 \\ 0.012727272727 \\ 0.008181818182 \end{bmatrix}$$

**(c) [1 *pto.*] Por el método de Gram-Schmidt Modificado, tenemos:**

$$E = \begin{bmatrix} 0.999994444491 & 0.000003333295 & 0.003333313148 \\ 0 & 0.999999500006 & -0.000999993944 \\ 0.003333314815 & -0.000999988389 & -0.999993944499 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 300.001666662 & -0.003333314815 & 149.9958333588 \\ 0 & 1000.000499994 & -149.9984250183 \\ 0 & 0 & 1.649990008424 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 7.499996666569 \\ 11.49999425007 \\ 0.013499994638 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 0.020909090909 \\ 0.012727272727 \\ 0.008181818182 \end{bmatrix}$$

(d) [1 *pto.*] Ambos métodos son eficientes para el problema presentado.

3. Un comerciante vende quesos de 3 tipos curado, semicurado y tierno. Los precios de cada uno de ellos son S/ 12, S/ 10 y S/ 9 el kilogramo, respectivamente. Se sabe que el total de kilos vendidos son 44, siendo el importe total de la venta S/ 436 y que el número de kilos vendidos del queso semicurado es el doble que del curado. Ayudale al comerciante ha determinar los kilos de queso que vendió.

   (a) [1 *pto.*] Modele el problema.

   (b) [1 *pto.*] Determine la solución usando el método de Householder.

   (c) [1 *pto.*] Determine la solución usando el método de Givens.

   (d) [1 *pto.*] Indique que método recomienda.

   Solución:

   (a) [1 *pto.*] Sean:

$$\begin{array}{rcl} x & : & \text{Queso tipo curado.} \\ y & : & \text{Queso tipo semicurado.} \\ z & : & \text{Queso tipo terno.} \end{array}$$

   Donde, el sistema ha resolver es:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 44 \\ 12x & + & 10y & + & 9z & = & 436 \\ 2x & - & y & + & 0z & = & 0 \end{array}$$

   (b) [1 *pto.*] [1 *pto.*] Por el método de Householder se obtienen las matrices siguientes:

$$H_1 = \begin{bmatrix} -0.999994444491 & 0 & -0.003333314815 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.003333314815 & 0 & 0.999994444491 \end{bmatrix}$$

   y

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.999999500006 & 0.000999993944 \\ 0 & 0.000999993944 & 0.999999500006 \end{bmatrix}$$

   Luego

$$H_2H_1A = R = \begin{bmatrix} 12.20655561573 & 9.748859854177 & 8.929627933658 \\ 0 & 2.638130312101 & 1.495873311008 \\ 0 & 0 & -0.155267523511 \end{bmatrix}$$

$$
\boldsymbol{H_1H_2 = Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.081923192052} & \mathbf{0.076320066888} & \mathbf{-0.993712150471} \\ \mathbf{0.983078304623} & \mathbf{0.157728138236} & \mathbf{0.093160514107} \\ \mathbf{0.163846384104} & \mathbf{-0.984528862857} & \mathbf{-0.062107009404} \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{Q'b = c} = \begin{bmatrix} \mathbf{432.2267612658} \\ \mathbf{72.12755121377} \\ \mathbf{-3.105350470223} \end{bmatrix}
$$

**Al resolver, se tiene**

$$
\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{8} \\ \mathbf{16} \\ \mathbf{20} \end{bmatrix}
$$

**(c) [1 *pto.*] Por el método de Givens tenemos las matrices siguientes:**

$$
\boldsymbol{G_{21}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.083045479854} & \mathbf{-0.996545758245} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0.996545758245} & \mathbf{0.083045479854} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{G_{31}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.98648586529} & \mathbf{0} & \mathbf{-0.163846384104} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0.163846384104} & \mathbf{0} & \mathbf{0.98648586529} \end{bmatrix}
$$

**y**

$$
\boldsymbol{G_{32}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-0.062957830000} & \mathbf{0.998016188066} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-0.998016188066} & \mathbf{-0.062957830000} \end{bmatrix}
$$

**Luego**

$$
\boldsymbol{G_{32}G_{31}G_{21}A = R} = \begin{bmatrix} \mathbf{12.20655561573} & \mathbf{9.748859854177} & \mathbf{8.929627933658} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2.638130312101} & \mathbf{-1.495873311008} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0.155267523511} \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{G_{21}G_{31}G_{32} = Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.081923192052} & \mathbf{-0.076320066888} & \mathbf{0.993712150471} \\ \mathbf{0.983078304623} & \mathbf{-0.157728138236} & \mathbf{-0.093160514107} \\ \mathbf{0.163846384104} & \mathbf{0.984528862857} & \mathbf{0.062107009404} \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{Q'b = c} = \begin{bmatrix} \mathbf{432.2267612658} \\ \mathbf{-72.12755121377} \\ \mathbf{3.105350470223} \end{bmatrix}.
$$

**Al resolver, se tiene:**

$$
\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{8} \\ \mathbf{16} \\ \mathbf{20} \end{bmatrix}
$$

**(d) [1 *pto.*] Se recomienda el método de Householder para este problema en particular, porque se reduce el número de operaciones.**

4. Dadas la matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 13 & 21 & 31 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 2 & 6 & 16 & 40 & 96 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Determine

(a) [1.5 *pto.*] la descomposición $QR$ de $A$ por transformaciones Householder y el método de Gram-Schmidt.

(b) [1 *pto.*] Halle el determinante de $A$ por los métodos mencionados anteriormente compare sus resultados y realice alguna conclusión.

(c) [1.5 *pto.*] Resolver el sistema de lineal $Ax = b$, con los métodos dichos en acápite (a).

**Solución:**

(a) Por Transformaciones Householder

$$Q = \begin{bmatrix} -0.2294 & -0.4878 & 0.4024 & -0.6538 & -0.3464 \\ -0.4588 & -0.5727 & 0.1282 & 0.6672 & 0.0000 \\ -0.6882 & 0.1485 & -0.6659 & -0.2179 & -0.1155 \\ -0.2294 & -0.0848 & 0.1424 & -0.2580 & 0.9238 \\ -0.4588 & 0.6363 & 0.5983 & 0.1156 & -0.1155 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} -4.3589 & -9.6355 & -19.2709 & -37.1653 & -72.0365 \\ 0 & 2.4815 & 8.9928 & 24.5394 & 60.4046 \\ 0 & 0 & 2.4001 & 12.1289 & 40.2398 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6672 & 3.5671 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2309 \end{bmatrix}$$

Por Gram-Schmidt

$$Q = \begin{bmatrix} 0.2294 & -0.4878 & 0.4024 & -0.6538 & 0.3464 \\ 0.4588 & -0.5727 & 0.1282 & 0.6672 & -0.0000 \\ 0.6882 & 0.1485 & -0.6659 & -0.2179 & 0.1155 \\ 0.2294 & -0.0848 & 0.1424 & -0.2580 & -0.9238 \\ 0.4588 & 0.6363 & 0.5983 & 0.1156 & 0.1155 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 4.3589 & 9.6355 & 19.2709 & 37.1653 & 72.0365 \\ 0 & 2.4815 & 8.9928 & 24.5394 & 60.4046 \\ 0 & 0 & 2.4001 & 12.1289 & 40.2398 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6672 & 3.5671 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2309 \end{bmatrix}$$

(b) Por Householder $det(A) = det(QR) = \det(R) = 4$ y Gram-Schmidt $det(A) = det(QR) = \det(R) = 4$.

(c) **Por ambos métodos se tiene que $QRx = b$, lo que implica que $Rx = Q^t b$, por lo tanto por Householder**

$$Q^t b = (-14.2238, 5.2175, 6.2389, -0.5070, 4.5033)^t \text{ y } x = (-43.000, 154.500, -193.500, -19.500)^t$$

**y Gram-Schmidt**

$$Q^t b = (14.2238, 5.2175, 6.2389, -0.5070, -4.5033) \text{ y } x = (-43.000, 154.500, -193.500, -19.500)^t$$

**5.** [4 *pts.*] **Realizó la exposición en la cuarta práctica dirigida.**

**24 de Noviembre del 2021**