Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2021-2**

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

Cuarta Práctica Calificada

1. Justificando su respuesta, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

(a) [1 *pto.*] Sea el sistema lineal $Ax = b$, con $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, entonces la secuencia generada por el método de Richarson es converge.

(b) [1 *pto.*] Sea $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, entonces su radio espectral $\rho(B) < 1$.

(c) [1 *pto.*] Dado el sistema lineal:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 10x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & - & 2x_3 & = & 9 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & 8x_3 & = & 51 \end{array}$$

tomando como punto inicial $x = (0.30000, 1.50000, 6.37500)^t$, entonces la segunda iteración dada por el método de Jacobi es $x = (-1.11375, 3.23125, 5.20781)^t$.

(d) [1 *pto.*] Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, entonces $S = \{(1,1,0)^t, (-1,0,1)^t, (2,3,-4)^t\}$ es un conjunto $A-$Ortogonal.

Solución

(a) (Falso) Tomando $\theta = \frac{\pi}{2}$, tenemos que $\|M\|_2 = \frac{3}{2}$, el cual no se puede afirmar que el método converja entonces tomando punto inicial $x^0 = (1,1,2)^t$ y $b = (1,2,2)^t$, tendremos que la iteración $x^{15} = (20.1952, 14.4113, 3.9999)$ y en la iteración $x^{50} = (-0.7402 \cdot 10^3, -1.1292 \cdot 10^3, 0.0040 \cdot 10^3)$ por lo tanto el método de Richarson no converge.

(b) (Verdadero) Aplicando inducción $B^k = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^k} & 0 \\ \frac{k}{2^{k+1}} & \frac{1}{2^k} \end{bmatrix}$, de ellos aplicando límite $\lim\limits_{k\to\infty} B^k = 0$, lo que implica que $\rho(B) < 1$.

Iteración	$x^{(0)}$	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$
$x_1 =$	0.30000	−1.12500	−1.11375
$x_2 =$	1.50000	2.36250	3.23125
$x_3 =$	6.37500	5.88750	5.20781

(c) (Verdadero) Haciendo dos iteraciones tendremos

(d) (Falso) $\langle A(-1,0,1)^t, (1,1,0)^t\rangle = -1$.

2. Un ejercicio realizado en clase consta de 16 preguntas. El profesor suma 5 puntos por cada respuesta correcta y resta 3 puntos por cada pregunta no contestada o mal contestada. Si un alumno ha obtenido 32 puntos en el ejercicio.

   (a) [1 *pto.*] Modele el problema.

   (b) [1 *pto.*] Determine la solución aproximada, usando el método de Jacobi.

   (c) [1 *pto.*] Determine la solución aproximada, usando el método de SOR.

   (d) [1 *pto.*] De (c). Indique cuando converge el método con $w < 1$ o $w > 1$.

Solución:

(a) [1 *pto.*] Sean

$$\begin{aligned} x &: \text{ Número de respuestas correctas.} \\ y &: \text{ Número de respuestas mal contestadas.} \end{aligned}$$

Donde, el sistema correcto es

$$\begin{array}{rcrcr} 5x & - & 3y & = & 32 \\ x & + & y & = & 16 \end{array}$$

(b) [1 *pto.*] Por el método de Jacobi, tenemos:

$$J = I - D^{-1}A = I - \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$c = D^{-1}b = \begin{bmatrix} 6.4 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Donde

$$x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} 6.4 \\ 16 \end{bmatrix}$$

La tabla es:

k	x_k	y_k	$Error$
0	0	0	
1	6.40000000	16.00000000	16.00000000
2	16.00000000	9.60000000	9.60000000
3	12.16000000	0.00000000	9.60000000
4	6.40000000	3.84000000	5.76000000
$\vdots$			
57	9.99999386	5.99999632	0.00000098

(c) [1 *pto.*] Por el método de SOR, tenemos:

$$L = D^{-1}E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \wedge U = D^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con

$$G(w) = \begin{bmatrix} 1-w & 0.6w \\ -w(1-w) & (-0.6w-1)w+1 \end{bmatrix} \wedge c = \begin{bmatrix} 6.4w \\ (16-6.4w)w \end{bmatrix}$$

donde

$$x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 1-w & 0.6w \\ -w(1-w) & (-0.6w-1)w+1 \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} 6.4w \\ (16-6.4w)w \end{bmatrix}$$

Considerando $w = 0.8$, la tabla es:

k	x_k	y_k	$Error$
0	0	0	
1	5.120000000	8.704000000	8.704000000
2	10.321920000	6.283264000	5.201920000
3	10.200350720	5.896372224	0.386891776
4	9.990328812	5.987011396	0.210021908
$\vdots$			
12	10.00000001	5.999999952	0.000000523

(d) [1 *pto.*] Al analizar los valores de w se observa que converge cuando $w = 0.8$.

3. Un barco que se halla en situación de emergencia, efectúa un disparo, en forma vertical, con una pistola de señales. El destello podrá verse desde la base naval más cercana, únicamente mientras se encuentre a una altura no menor de 195 metros sobre el nivel del mar. Los técnicos que integran la tripulación estiman que, de acuerdo con las características de la pistola de señales y con las condiciones en que se dispara la altura máxima del destello lo alcanza a 320 metros sobre el nivel del mar, transcurridos 8 segundos desde el disparo. Ayudale a los de la base naval, enviar la ayuda al barco.

(a) [1 *pto.*] Modele el problema.

(b) [1 *pto.*] Determine la solución usando el método de Descenso Rápido con $x_0 = (-5.05\ \ 80.05\ \ 0)^T$ y $tol = 10^{-5}$.

(c) [1 *pto.*] Determine la solución usando el método de Gradiente Conjugado con $x_0 = (-5.05\ \ 80.05\ \ 0)^T$ y $tol = 10^{-5}$.

(d) [1 *pto.*] Escribe el algoritmo que satisface la condición de los métodos.

Solución:

(a) [1 *pto.*] Sean a, b y c los coeficientes de la ecuación cuadrática general, dado por:

$$f(t) = at^2 + bt + c.$$

Luego

$$\begin{aligned} t = 0 &\ :\ f(0) = a(0)^2 + b(0) + c = 0 \\ t = 8 &\ :\ f(8) = a(8)^2 + b(8) + c = 320 \\ t = 16 &\ :\ f(16) = a(16)^2 + b(16) + c = 0 \end{aligned}$$

El sistema es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 256 & 16 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 320 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) [1 *pto.*] La tabla es:

k	a_k	b_k	c_k	t_k	vx_k	vy_k	vz_k	Error
0	-5.05	80.05	0	0.0000143	0.0531866	-0.7961693	-0.1499104	
1	-5.0035134	80.053066	0.0002116	0.0642703	0.9075006	0.0581312	0.013233	0.0464866
2	-5.0000951	80.001895	-0.0094232	0.0000143	-0.000008	-0.0019375	0.0090598	0.0511709
$\vdots$								
9	-5.0000558	80.001294	-0.0064863					

Donde la ecuación cuadrática es $f(t) = -5.0000558t^2 + 80.001294t - 0.0064863$.

(c) [1 *pto.*] La tabla es:

k	a_k	b_k	c_k	d_k	rx_k	ry_k	rz_k	Error
0	-5.05	80.05	0	0.6592089	3251.2	214.4	14.8	0.0464866
1	-5.0035134	80.053066	0.0002116	0.0000858	0.0531866	-0.7961826	-0.1499114	0.0511844
2	-5.0000812	80.001881	-0.0094259	1.037491	0.0000713	-0.0017096	0.0091048	0.0094259
3	-5	80	0	0	-0.0000493	-0.0000033	-0.0000002	0
4	-5	80	0					

Donde la ecuación cudrática es $f(t) = -5t^2 + 80t$.

(d) [1 *pto.*] Hay que garantizar que la matriz debe ser simétrica, el cual es:

$$\begin{array}{ll}
\textbf{Si} & A == A' \\
\textbf{entonces} & \\
 & B \leftarrow A; \\
 & c \leftarrow b; \\
\textbf{sino} & \\
 & B \leftarrow A' \cdot A; \\
 & c \leftarrow A' \cdot b; \\
\textbf{fin si.} &
\end{array}$$

Se recomienda para este problema el método del Gradiente Conjugado, porque se logra obtener la solución en 4 iteraciones.

4. Sean los vectores residuales r^k de un sistema lineal $Ax = b$, y el conjunto $\{v^1, \ldots, v^k\}$ A-ortogonal v^k, esto es, $\langle v^j, Av^i\rangle = 0$, para todo $j \neq i$. Si $t_k = \dfrac{\langle v^k, r^k\rangle}{\langle v^k, Av^k\rangle}$ y $x^k = x^{k-1} + t_k v^k$.

   (a) [1 *pto.*] Demuestre que $\langle r^1, v^1\rangle = 0$.

   (b) [1 *pto.*] Suponga que $\langle r^k, v^j\rangle = 0$, para cada $k \leq l$ y $j = 1, 2, \ldots, k$, y demuestre que esto implica que $\langle r^{l+1}, v^j\rangle = 0$, para cada $j = 1, 2, \ldots, l$.

   (c) [1 *pto.*] Demuestre que $\langle r^{l+1}, v^{l+1}\rangle = 0$.

   (d) [1 *pto.*] Demuestre que para cada $n \in \mathbb{N}$ y $k = 1, \ldots, n$, se tiene que $\langle r^k, v^j\rangle = 0$, para cada $j = 1, 2, \ldots, k$.

Solución:

(a)

$$\begin{aligned}
\langle r^1, Av^1\rangle &= \langle b - Ax^1, v^1\rangle = \langle b, v^1\rangle - \langle A(x^0 + t_1 Av^1), v^1\rangle \\
&= \langle b - Ax^0, V^1\rangle - t_1\langle Av^1, v^1\rangle = \langle r^0, v^1\rangle - \frac{\langle v^1, r^0\rangle}{\langle v^1, Av^1\rangle}\langle Av^1, v^1\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

(b) Para $j = 1, \ldots, l$,

$$\begin{aligned}
\langle r^{l+1}, v^l\rangle &= \langle b - Ax^{l+1}, v^j\rangle = \langle b - Ax^l - t_{l+1}Av^{l+1}, v^j\rangle \\
&= \langle r^l, v^j\rangle + t^{l+1}\langle Av^{l+1}, v^j\rangle \\
&\quad \text{de la hipótesis inductiva y la A-ortogonalidad} \\
&= 0
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\langle r^{l+1}, v^{l+1}\rangle &= \langle b - Ax^{l+1}, v^{l+1}\rangle + \langle b - Ax^l - t_{l+1}Av^{l+1}, v^{l+1}\rangle \\
&= \langle r^l, v^{l+1}\rangle - \frac{\langle v^{l+1}, r^{l+1}\rangle}{\langle v^{l+1}, Av^{l+1}\rangle}\langle Av^{l+1}, v^{l+1}\rangle = 0
\end{aligned}$$

(d) Se concluye de los tres pasos anteriores.

5. [4 *pts.*] Realizó la exposición en la cuarta práctica dirigida.

10 de noviembre del 2021