UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA CICLO 2021–II

EXAMEN PARCIAL DE ANÁLISIS Y MODELAMIENTO NUMÉRICO I CM4F1 A/B

---

1. (a) La representación de -10 en complemento a dos en un computador con longitud de palabra de 8 bits es 10001011.

   (b) Se cumple que $e^{-n} = O(1/n^2)$.

   (c) Para x muy pequeños la evaluación de $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 1$ no involucra pérdida de dígitos significativos.

   (d) La función $f(x) = \sqrt{x}$ está bien condicionado.

   (e) Dada una matriz cuadrada A tal que sus menores principales(matrices esquina) tienen determinante distinto de cero. Entonces su factorización LU es única.

   (f) Si $A = \begin{pmatrix} 1+2i & 2 \\ 1-i & 2+i \end{pmatrix}$ entonces $A^* = \begin{pmatrix} 1-2i & 2 \\ 1+i & 2-i \end{pmatrix}$.

   (g) Si ϵ es el error inicial y $\epsilon(n)$ representa el crecimiento del error después de n pasos. Si $|\epsilon(n)| \approx K^n\epsilon$ decimos que el crecimiento es exponencial y un algoritmo de este tipo es considerado inestable.

   (h) El sistema lineal $Ax = b$ donde A es una matriz simétrica se resuelve usando factorización LU de Cholesky.

   (i) En la representación IEEE 754 en precisión doble sólo se deben considerar 52 dígitos en la representación de punto flotante.

   (j) Para el sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 2021 & 2020 \\ 2019 & 2022 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2024 \\ 2025 \end{pmatrix}.$$

   la convergencia del método de Jacobi está garantizada.

   Solución: Las claves son:

   F V F V F V F F F V

2. Determine si es verdadero o falso cada una de las siguientes proposiciones. Justifique adecuadamente sus respuestas.

   (a) Si λ es un autovalor de A y $\mu \in \mathbb{C}$ entonces $\lambda - \mu$ es un autovalor de $A - \mu I$.

(b) La descomposición LU de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Sea A una matriz cuadrada de orden $n \times n$ y el sistema $Ax = b$ tal que el método de Jacobi converge. Luego, en " m " iteraciones del método de Jacobi se realizan $2mn^2$ operaciones de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones.

(d) La descomposición SVD de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

es:

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución:

(a) **Verdadero.**
Si λ es un autovalor de A entonces existe un vector no nulo " v " tal que $Av = \lambda v$. Luego, observe que:

$$(A - \mu I)v = Av - \mu v = \lambda v - \mu v \Rightarrow (A - \mu I)v = (\lambda - \mu)v$$

es decir, $\lambda - \mu$ es un autovalor de la matriz $A - \mu I$.

(b) **Verdadero.**
La forma más fácil es simplemente verificar que se cumple el producto $A = LU$.

(c) **Verdadero.**
El método de Jacobi

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + c$$

consiste simplemente de un producto matriz - vector en donde se realizan " n " veces lo siguiente: (" n " productos y " $n-1$ " sumas) resultando en total " $n(2n-1)$ " operaciones para luego realizar una suma vector-vector, es decir, se realizan " n " operaciones más, por tanto se obtiene en una iteración:

$$n(2n-1) + n = 2n^2$$

y así en " m " iteraciones resulta $2mn^2$ operaciones.

(d) **Falso.**
Es fácil calcular los autovalores de la matriz:

$$AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

los cuales son: $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 1$, por tanto, los valores singulares de A son:

$$\sigma_1 = \sqrt{3},\ \sigma_2 = 1$$

así resulta la siguiente matriz D de la descomposición SVD:

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Muestre que

$$0.1 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(2^{-4i} + 2^{-4i-1}\right)$$

y deduzca que 0,1 tiene representación binaria de 0.1 es $0.000\overline{1100}$.

(b) Muestre que

$$\frac{fl(0.1) - 0.1}{0.1} = -\frac{1}{4}2^{-24}$$

Solución:

(a)

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-4i} = \frac{1/16}{1 - 1/16} = 1/15$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-4i-1} = \frac{1}{2}\frac{1/16}{1 - 1/16} = 1/30$$

$$1/15 + 1/30 = 1/10$$

y

$$0.1 = 0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + \ldots$$

(b) En notación normalizada

$$0.1 = 0.\overline{1100}_{(2)} \times 2^{-3}$$

$$fl(0.1) = 0.110011001100110011001101 \times 2^{-3}$$

luego

$$\frac{fl(0.1) - 0.1}{0.1} = -\frac{1}{4}2^{-24}$$

4. Defina

$$x_k = \int_0^1 \frac{t^k}{t+5}\,dt$$

(a) Muestre que $x_0 = \ln 1.2$ y que $x_k = \frac{1}{k} - 5x_{k-1}$ para $k \geq 1$. 1pt

(b) Muestre que $\frac{1}{6(k+1)} \leq x_k \leq \frac{1}{5(k+1)}$, $k \geq 0$. 1pt

(c) Calcule x_0, x_1,..., x_{20} usando la fórmula en 4a. ¿El valor calculado de x_{20} es aceptable? 1pt

(d) Reemplace $\frac{1}{t+5}$ por un polinomio de Taylor que permita el cálculo de x_{20} con toda la exactitud disponible en la máquina y obtenga los valores de $x_{19}, \ldots, x_1, x_0$ usando la formula de recurrencia mostrada en 4a. 1pt

(e) ¿Que valores x_k son mas confiables, los obtenidos en 4c o en 4d? ¿Por qué? 1pt

Solución :

(a)

$$\int_0^1 \frac{t^{k-1}}{t+5}\,dt = \int_0^1 t^k \frac{1}{t(t+5)}\,dt = \int_0^1 \frac{t^k}{5}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+5}\right)dt = \frac{1}{5k} - \frac{x_k}{5}$$

$$x_0 = \int_0^1 1/(t+5)\,dt = \ln 6 - \ln 5 = \ln 1.2$$

(b) Como $0 \le t \le 1$ entonces $\frac{1}{6} \le \frac{1}{t+5} \le \frac{1}{5}$ y $\frac{1}{6(k+1)} \le x_k \le \frac{1}{5(k+1)}$

(c) Calcule $x_0, x_1, \ldots, x_{20}$ usando esta fórmula y estime el error cometido en el cálculo de x_{20}.

```
k=1, xk=0.088392
k=2, xk=0.058039
k=3, xk=0.043139
k=4, xk=0.034306
k=5, xk=0.028468
k=6, xk=0.024325
k=7, xk=0.021233
k=8, xk=0.018837
k=9, xk=0.016926
k=10, xk=0.015368
k=11, xk=0.014071
k=12, xk=0.012977
k=13, xk=0.012040
k=14, xk=0.011229
k=15, xk=0.010522
k=16, xk=0.009890
k=17, xk=0.009372
k=18, xk=0.008696
k=19, xk=0.009151
k=20, xk=0.004243
```

De acuerdo a 4b

$$7.9365 \times 10^{-3} \le x_{20} \le 9.5238 \times 10^{-3}$$

pero el valor calculador $x_{20} = 0.004243$ no cumple esa desigualdad.

(d) Reemplace $\frac{1}{t+5}$ por un polinomio de Taylor que permita el cálculo de x_{20} con toda la exactitud disponible en la máquina y obtenga los valores de $x_{19}, \ldots, x_1, x_0$ usando la formula de recurrencia mostrada en 4b.

$$\frac{1}{5} - \frac{t}{5^2} + \frac{t^2}{5^3} + \cdots + (-1)^n \frac{t^n}{5^{n+1}} = \frac{1}{t+5} + \frac{(-1)^n}{t+5}\frac{t^{n+1}}{5^{n+1}}$$

luego

$$\frac{t^k}{5} - \frac{t^{k+1}}{5^2} + \frac{t^{k+2}}{5^3} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{n+k}}{5^{n+1}} = \frac{t^k}{t+5} + \frac{(-1)^n}{t+5}\frac{t^{k+n+1}}{5^{n+1}}$$

como $0 \leq t \leq 1$ entonces $\frac{1}{6} \leq \frac{1}{t+5} \leq \frac{1}{5}$ y $\frac{1}{6(k+1)} \leq x_k \leq \frac{1}{5(k+1)}$

$$\left| \int_0^1 \frac{(-1)^n}{t+5} \frac{t^{k+n+1}}{5^{n+1}} \, dt \right| \leq \frac{1}{5^{n+2}} \frac{1}{k+n+2}$$

si definimos el valor aproximado de x_k como

$$\hat{x}_k = \int_0^1 \frac{t^k}{5} - \frac{t^{k+1}}{5^2} + \frac{t^{k+2}}{5^3} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{n+k}}{5^{n+1}} \, dt$$

entonces tenemos las siguientes desigualdades

$$|\frac{x_k - \hat{x}_k}{x_k}| \leq 6(k+1)|x_k - \hat{x}_k| \leq \frac{6}{5^{n+2}} \frac{k+1}{k+n+2}$$

para $k = 20$ queremos que el error relativo sea menor que $\frac{1}{2}2^{-24}$. Basta que

$$\frac{6}{5^{n+2}} \frac{21}{22} \leq \frac{1}{2} 2^{-24} \implies n = 10$$

$$\implies \hat{x}_{20} = \sum_{i=0}^{10} (-1)^i \frac{1}{5^{i+1}(i+21)}$$

```
k=20, xk=0.007998
k=19, xk=0.008400
k=18, xk=0.008846
k=17, xk=0.009342
k=16, xk=0.009896
k=15, xk=0.010521
k=14, xk=0.011229
k=13, xk=0.012040
k=12, xk=0.012977
k=11, xk=0.014071
k=10, xk=0.015368
k=9, xk=0.016926
k=8, xk=0.018837
k=7, xk=0.021233
k=6, xk=0.024325
k=5, xk=0.028468
k=4, xk=0.034306
k=3, xk=0.043139
k=2, xk=0.058039
k=1, xk=0.088392
k=0, xk=0.182322
```

(e) El error en la ecuación usada en en 4d satisface que

$$|e_{k-1}| = \frac{1}{5}|e_k| = \frac{1}{5^{k-19}}|e_{20}| \to 0$$

mientras que el error de la ecuación usada en 4c satisface que

$$|e_k| = 5|e_{k-1}| = 5^k|e_0| \to +\infty$$

por eso los valores obtenidos en 4d son mas confiables.

5. A mining company has three mines. One day of operation at he mines produces the following output:

- Mine 1 produces 25 tons of copper, 600 kg of silver and 15 tons of manganese.
- Mine 2 produces 30 tons of copper, 500 kg of silver and 10 tons of manganese.
- Mine 3 produces 20 tons of copper, 550 kg of silver and 12 tons of manganese.

Suppose the company has orders for 550 tons of copper, 11350 kg of silver and 250 tons of manganese.

(a) Write a system of equations to answer the question: how many days should the company operate each mine to exactly fill the orders? State clearly what the variables in your system represent.

(b) Without iterate, Does the Gauss-Seidel method converge? (You can use a computer for your calculus).

(c) If Gauss-Seidel method converges then you must do a only iteration and you can use a program for aproximate the exact solution, else you must solve the system using Gauss-elimination method.

Solución:
Se define:

x_1: Número de días de operación de la mina 1.
x_2: Número de días de operación de la mina 2.
x_3: Número de días de operación de la mina 3.

De los datos se tiene la siguiente tabla:

	Cobre (Ton)	Plata (Kg)	Manganeso (Ton)
Mina 1	25	600	15
Mina 2	30	500	10
Mina 3	20	550	12

(a) Se tiene el siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned} 25x_1 + 30x_2 + 20x_3 &= 550 \\ 600x_1 + 500x_2 + 550x_3 &= 11350 \\ 15x_1 + 10x_2 + 12x_3 &= 250 \end{aligned}$$

(b) Definiendo la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 30 & 20 \\ 600 & 500 & 550 \\ 15 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

usando la librería numpy de python se calculan los autovalores de la matriz del método de Gauss-Seidel como sigue:

$$D = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -600 & 0 & 0 \\ -15 & -10 & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & -30 & -20 \\ 0 & 0 & -550 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego:

$$M_{GS} = (D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & -1.2 & -0.8 \\ 0 & 1.44 & -0.14 \\ 0 & 0.3 & 1.1167 \end{pmatrix}$$

y sus respectivos autovalores se calculan mediante:

$$\text{MGS} = \text{np.dot(np.linalg.inv(D - L),U)}$$

resultando:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 0\\
\lambda_2 &= 1.27833333 + 0.12595193i\\
\lambda_3 &= 1.27833333 - 0.12595193i
\end{aligned}$$

Se observa que $\rho(M_{GS}) > 1$, por tanto el esquema de Gauss-Seidel no es convergente.

(c) Como el método de Gauss-Seidel no es convergente, entonces procedemos a calcular el sistema usando eliminación gaussiana. La matriz aumentada asociada al sistema es:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 25 & 30 & 20 & 550\\ 600 & 500 & 550 & 11350\\ 15 & 10 & 12 & 250 \end{pmatrix}$$

y realizando las operaciones elementales siguientes:

$$F_{32}(-8/220)F_{31}(-15/25)F_{21}(-600/25)(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 25 & 30 & 20 & 550\\ 0 & -220 & 70 & -1850\\ 0 & 0 & -\frac{28}{11} & -\frac{140}{11} \end{array}\right)$$

ahora se procede a calcular la solución por sustitución regresiva:

$$\begin{aligned}
-\frac{28}{11}x_3 &= -\frac{140}{11} &\Rightarrow\ & x_3 = 5\\
-220x_2 + 70x_3 &= -1850 &\Rightarrow\ & x_2 = 10\\
25x_1 + 30x_2 + 20x_3 &= 550 &\Rightarrow\ & x_1 = 6.
\end{aligned}$$

Los profesores[1]
Lima, 27 de Octubre del 2021.

[1] Hecho en LaTeX