UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA CICLO 2022–II

EXAMEN FINAL DE ANÁLISIS Y MODELAMIENTO NUMÉRICO I CM4F1 A/B

---

1. Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones **(5 puntos)**:

   (a) La matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ tiene rango completo.

   (b) Los autovalores de la matriz:

   $$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   pertenecen al intervalo $[-1, 9]$.

   (c) El método de la secante siempre es convergente.

   (d) La función $g(x) = 4 + \frac{1}{3}sen(2x)$ tiene un punto fijo.

   (e) Si Q es una matriz ortogonal $n \times n$ y x un vector $n-$dimensional entonces $\|Qx\| = \|x\|$.

   (f) Para determinar el polinomio trigonométrico de interpolación aplicando la transformada rápida de Fourier el número de puntos debe ser de la forma 2^n para algún " n " entero positivo.

   (g) No existe una sucesión de polinomios $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ que convergen uniformemente a f definida por:

   $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

   (h) Si $f(x) = cos(x) - x$ y se aplica el método de la bisección en $[0, 1]$ entonces se requieren al menos $n \geq 10$ iteraciones para garantizar que el error sea menor que 10^{-3}.

   (i) Las transformaciones de Givens son más eficientes que las transformaciones de Householder para obtener la solución de mínimos cuadrados de un sistema lineal $Ax = b$.

   (j) Considere la función $f(x) = x$ entonces $B_2(f, x) = x$.

   Solución:

a) F	c) F	e) V	g) V	i) F
b) V	d) V	f) V	h) V	j) V

2. Determine si es verdadero o falso cada una de las siguientes proposiciones. Justifique adecuadamente sus respuestas.

   (a) Let $P_3(x)$ be the interpolating polynomial for the data $(0,0), (0.5, y), (1,3)$ and $(2,2)$. Using Neville's method and $P_3(1.5) = 0$ is obtained that $y = -1$. **(3 puntos)**

   (b) La ecuación $cos(x) = 0.02x^2$ admite más de una solución en el intervalo $[0, \pi]$. **(2 puntos)**

Solución:

(a) **Falso.**
Aplicando el método de Neville se tiene la siguiente tabla:

$$\begin{array}{lllll} x_0 & y_0 & & & \\ x_1 & y_1 & P_{01} & & \\ x_2 & y_2 & P_{12} & P_{012} & \\ x_3 & y_3 & P_{13} & P_{123} & P_{0123} \end{array}$$

donde para $x = 1.5$ se tiene:

$$\begin{aligned} P_{01} &= \frac{(x-x_0)y_1 - (x-x_1)y_0}{x_1 - x_0} = \frac{(1.5-0)y - (1.5-0.5)(0)}{0.5-0} && \Rightarrow\ P_{01} = 3y \\ P_{12} &= \frac{(x-x_1)y_2 - (x-x_2)y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(1.5-0.5)(3) - (1.5-1)(y)}{1-0.5} && \Rightarrow\ P_{12} = 6 - y \\ P_{23} &= \frac{(x-x_2)y_3 - (x-x_3)y_2}{x_3 - x_2} = \frac{(1.5-1)(2) - (1.5-2)(3)}{2-1} && \Rightarrow\ P_{23} = 2.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{012} &= \frac{(x-x_0)P_{12} - (x-x_2)P_{01}}{x_2 - x_0} && \Rightarrow\ P_{012} = 9 - 3y \\ P_{123} &= \frac{(x-x_1)P_{23} - (x-x_3)P_{12}}{x_3 - x_1} && \Rightarrow\ P_{012} = \frac{11-y}{3} \\ P_{0123} &= \frac{(x-x_0)P_{123} - (x-x_3)P_{012}}{x_3 - x_0} && \Rightarrow\ P_{0123} = \frac{1.5(11-y) - (-1.5)(9-3y)}{6} \end{aligned}$$

Por dato:

$$P_{0123} = 0 \Rightarrow 11 - y + 9 - 3y = 0 \Rightarrow y = 5.$$

(b) **Falso.** Se define la siguiente función:

$$f(x) = cos(x) - 0.02x^2, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Observe lo siguiente:

$$f(0) = 1, \quad f(\pi) = cos(\pi) - 0.02\pi^2 = -1 - 0.02\pi^2 \Rightarrow f(0)f(\pi) < 0,$$

por tanto existe al menos una raíz $\hat{x} \in \langle 0, \pi \rangle$ de f. Además:

$$f'(x) = -sen(x) - 0.04x \quad \text{para todo} \quad x \in [0, \pi]$$

entonces la función f es decreciente y así se garantiza la unicidad de la solución.

3. A trough of length L has a cross section in the shape of a semicircle with radius r. (See the accompanying figure). Then filled with water to within a distance h of the top, the volume V of water is:

$$V = L[0.5\pi r^2 - r^2 \arcsin(h/r) - h(r^2 - h^2)^{1/2}].$$

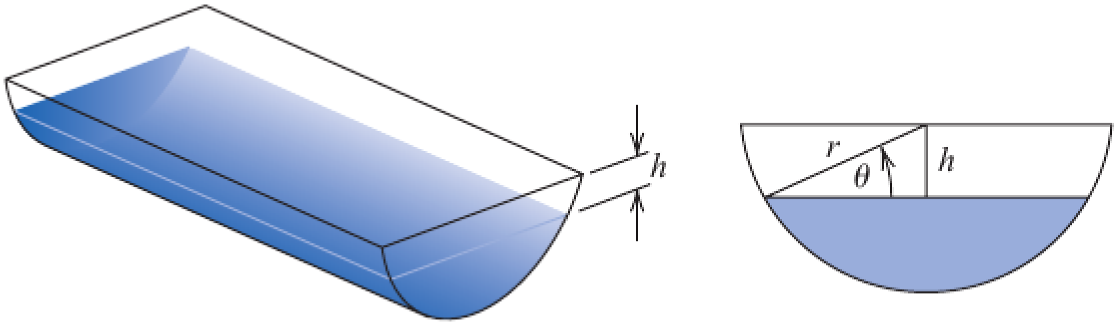

Figure 1: Trough of length L.

Find the depth of water in the trough when $L = 10\,ft, r = 1\,ft$ and $V = 12.4\,ft^3$. Use Newton's method with start point 0.1 and a tolerance 10^{-3}. **(5 puntos)**

Solución:
Para determinar " h " cuando $V = 12.4$, para ello se define la función:

$$f(h) = 12.4 - V(h)$$

donde $V(h) = L[0.5\pi r^2 - r^2 \arcsin(h/r) - h(r^2 - h^2)^{1/2}]$. Además:

$$f'(h) = -V'(h) = 2L(r^2 - h^2)^{1/2}.$$

Por tanto, iniciando en $h_0 = 0.1$, el método de Newton es:

$$h_{k+1} = h_k - \frac{f(h_k)}{f'(h_k)}, \quad \text{para todo} \quad k \geq 0,$$

de donde resulta:

k	h_k	$1 - h_k$
0	0.1	0.9
1	0.1659	0.8341
2	0.1662	0.8338

Por tanto, la profundidad del agua pedida cuando $V(h) = 12.4$ resulta $1 - h_2 = 0.8338\,ft$.

4. Use Gram-Schmidt orthogonalization to determine the least squares solution of $Ax = b$ where: **(5 puntos)**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 9/2 \\ 15/2 \\ -5/2 \end{pmatrix}.$$

Solución:
Se usa el método de Gram-Schmidt modificado, para ello defina:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Para $k = 1$:

$$r_{11} = \|a_1\| = 2$$

$$q_1 = \frac{1}{r_{11}} a_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$j = 2 \quad r_{12} = q_1^T a_2 = 4$$

$$a_2 = a_2 - r_{12} q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$j = 2 \quad r_{13} = q_1^T a_3 = 5$$

$$a_3 = a_3 - r_{13} q_1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Para $k = 2$:

$$r_{22} = \|a_2\| = 2$$

$$q_2 = \frac{1}{r_{22}} a_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$j = 3 \quad r_{23} = q_2^T a_3 = 3$$

$$a_3 = a_3 - r_{23} q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Para $k = 3$:

$$r_{33} = \|a_3\| =$$

$$q_3 = \frac{1}{r_{33}} a_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Por tanto, se tienen las siguientes matrices:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La solución por mínimos cuadrados viene dada por:

$$Rx = Q^T b \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema anterior mediante sustitución regresiva:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{4}{R_{33}} & &\Rightarrow x_3 = 2 \\ x_2 &= \frac{-6 - R_{23}x_3}{R_{22}} & &\Rightarrow x_2 = -6 \\ x_1 &= \frac{6 - R_{12}x_2 - R_{13}x_3}{R_{11}} & &\Rightarrow x_1 = 10 \end{aligned}$$

Así, la solución por mínimos cuadrados es:

$$x_1 = 10, \quad x_2 = -6, \quad x_3 = 2.$$

El profesor[1]
Lima, 11 de Enero del 2023.

[1] Hecho en LaTeX