Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2022-2**

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

Solucionario Práctica Calificada 04

---

1. **Dado el sistema $Ax = b$ donde A es simétrica y definida positiva. Si para su solución usamos el siguiente método de Richardson:**

$$x^{(k+1)} = (I - \alpha A)x^{(k)} + \alpha b, \quad \text{donde } \alpha \in \mathbb{R}.$$

   (a) **[1 *pt.*] Demostrar que**

$$\|x - x^{(k)}\| \leq \rho^k \|x - x^0\|, \ k = 0, 1, 2, \cdots$$

   donde ρ es el radio espectral de $I - \alpha A$.

   (b) **[1 *pt.*] Demostrar que**

$$\rho = \rho(\alpha) = \max\{|1 - \alpha\lambda_{\min}|, |1 - \alpha\lambda_{\max}|\},$$

   donde $\lambda_{\min}$ y $\lambda_{\max}$ son los valores propios mínimo y máximo de A.

   (c) **[1 *pt.*] Demostrar que el método de Richarson converge si y solo si $0 < \alpha < \dfrac{2}{\lambda_{\max}}$.**

   (d) **[1 *pt.*] Demostrar que $\rho = \rho(\alpha)$ alcanza su valor óptimo cuando**

$$\alpha = \alpha_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}},$$

   y cuyo valor óptimo es

$$\rho = \rho_{\text{opt}} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1},$$

   donde $\kappa = \dfrac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$ es el número de condición de A.

Solución:

   (a) **Como la solución debe ser un punto fijo se tiene que $x = (I - \alpha A)x + \alpha b$ y restando con la iteración obtenemos**

$$x - x^{(k+1)} = (I - \alpha A)(x - x^{(k)}.$$

   Luego, se deduce

$$(x - x^{(k)}) = (I - \alpha A)^k (x - x^0).$$

   Dado que A es simétrico se deduce que $I - \alpha A$ es simétrico y por tanto $\rho = \|I - \alpha A\|$ donde $\|\cdot\|$ representa la norma euclidiana matricial. La conclusión se sigue de tomar norma.

(b) Ordenamos los valores propios de A

$$0 < \lambda_{\min} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n = \lambda_{\max}.$$

Luego, los valores propios de $I - \alpha A$ son $v_i = 1 - \alpha\lambda_i$ para $i = 1, \cdots, n$. Si $\alpha > 0$ los valores propios v_i se pueden ordenar como

$$1 > v_1 \geq v_2 \geq \cdots \geq v_n.$$

Por tanto, se deduce que

$$\rho = \max\{|v_1|, |v_n|\}.$$

(c) Además para exista convergencia necesariamente $\rho < 1$, lo cuál implica que

$$v_n = 1 - \alpha\lambda_{\max} > -1 \Longrightarrow \frac{2}{\lambda_{\max}} > \alpha.$$

(d) Para α pequeño se tiene $|v_1| \geq |v_n|$ y para α grande $|v_n| \geq |v_1|$ luego el óptimo se encontrará en la intersección es decir

$$|v_1| = |v_n| \Longrightarrow v_1 = -v_n.$$

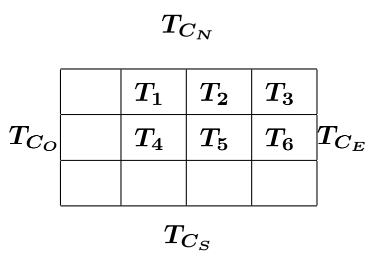
Así, se obtiene la ecuación

$$1 - \alpha\lambda_{\min} = \alpha\lambda_{\max} - 1 \Longrightarrow \alpha_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}.$$

Por tanto,

$$\rho_{\text{opt}} = 1 - \alpha_{\text{opt}}\lambda_{\min} = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}.$$

2. La Transferencia de Calor es determinado por la temperatura en estado estable de una placa delgada cuando se conoce la temperatura alrededor de la placa. Suponga que la placa de la siguiente figura representa una sección trasversal perpendicular a la placa



Sean T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 y T_6 las temperaturas interiores de los nodos de la red. La temperatura en un nodo es aproximadamente igual al promedio de las temperaturas de los cuatro nodos más cercanos arriba, abajo, a la derecha y a la izquierda. Así por ejemplo $T_1 = \dfrac{T_{C_N} + T_2 + T_4 + T_{C_O}}{4}$.

(a) [1 *pto.*] Modele el sistema de las temperaturas sabiendo que $T_{C_N} = 25^o$, $T_{C_E} = 37^o$, $T_{C_S} = 10^o$ y $T_{C_O} = 31^o$.

(b) [1 *pto.*] Determine la solución usando el programa del método de Jacobi.

(c) [1 *pto.*] Determine la solución usando el programa del método de Gauss-Seidel.

(d) [1 *pto.*] ¿Qué puede decir de la calidad de las soluciones aproximadas obtenidas?

Solución:

(a) [1 *pto.*] El sistema es:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56 \\ 25 \\ 62 \\ 41 \\ 10 \\ 47 \end{bmatrix}$$

(b) [1 *pto.*] Por el método de Jacobi, se tiene

N°	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	*Error*
0	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	
1	14.00000000	6.25000000	15.50000000	10.25000000	2.50000000	11.75000000	1.00000000
2	18.12500000	14.25000000	20.00000000	14.37500000	9.56250000	16.25000000	0.40000000
3	21.15625000	18.17187500	23.12500000	17.17187500	13.71875000	19.14062500	0.17972973
⋮							
33	25.52794836	24.49689169	27.52794836	21.61490491	19.93167426	23.61490491	0.00000007

(c) [1 *pto.*] Por el método de Gauss-Seidel, se tiene

N°	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	*Error*
0	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	
1	14.00000000	9.75000000	17.93750000	13.75000000	8.37500000	18.32812500	1.00000000
2	19.87500000	17.79687500	24.53125000	17.31250000	15.85937500	21.84765625	0.32802548
3	22.77734375	22.04199219	26.47241211	19.90917969	18.44970703	22.98052979	0.16036005
⋮							
18	25.52794955	24.49689376	27.52795003	21.61490637	19.93167663	23.61490667	0.00000005

(d) [1 *pto.*] Para ambos métodos, se cumple:

$$\frac{3\times 10^{-6}}{62} \times \frac{1}{4.9999999} \leq \frac{\|E\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 4.9999999 \times \frac{3\times 10^{-6}}{62}$$

$$\Longrightarrow \frac{\|E\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 0.$$

Para este problema el métodos de Gauss-Seidel resulta ser bueno, dado que en menor número de iterciones obtiene la solución.

3. [4 *pts.*] Resuelva el siguiente sistema lineal $AX = b$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \wedge \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -7 \end{bmatrix},$$

usando el método de SOR (succesive over-relaxation) con punto inicial $(x,y,z)^T = (0,0,0)^T$ y factor de relajación $\omega = 1.25$.

Solución:

(a) Como A es simétrica definida positiva podemos usar el método de SOR.

(b) Primero, escribimos las ecuaciones para el método de Gauss-Seidel:

$$x^{(k+1)} = \frac{-1 + y^{(k)} - z^{(k)}}{3}$$
$$y^{(k+1)} = \frac{7 + x^{(k+1)} + z^{(k)}}{3}$$
$$z^{(k+1)} = \frac{-7 - x^{(k+1)} + y^{(k+1)}}{3}.$$

(c) Ahora, multiplicamos el lado derecho de cada ecuación anterior por el parámetro ω y agréguele el vector de la iteración anterior multiplicado por el factor de $(1-\omega)$:

$$x^{(k+1)} = (1-\omega)x^{(k)} + \omega\left[\frac{-1 + y^{(k)} - z^{(k)}}{3}\right]$$
$$y^{(k+1)} = (1-\omega)y^{(k)} + \omega\left[\frac{7 + x^{(k+1)} + z^{(k)}}{3}\right]$$
$$z^{(k+1)} = (1-\omega)z^{(k)} + \omega\left[\frac{-7 - x^{(k+1)} + y^{(k+1)}}{3}\right].$$

(d) Realizamos las iteraciones con el punto inicial y factor de relajación:

iter	x	y	z
1	-0.41667	2.74306	-1.60012
2	1.49715	2.18800	-2.22878
3	1.04937	1.87824	-2.01411
4	0.9428	2.00073	-1.97234
5	1.00308	2.01263	-2.00294
6	1.00572	1.998	-2.00248
7	0.99877	1.99895	-1.9993
8	0.99958	2.00038	-1.99984
9	1.0002	2.00005	-2.0001

La solución exacta es igual a $(1, 2, -2)^t$.

4. Un barco que se halla en situación de emergencia, efectúa un disparo, en forma vertical, con una pistola de señales. El destello podrá verse desde la base naval más cercana, únicamente mientras se encuentre a una altura no menor de 195 metros sobre el nivel del mar. Los técnicos que integran la tripulación estiman que, de acuerdo con las características de la pistola de señales y con las condiciones en que se dispara la altura máxima del destello lo alcanza a 320 metros sobre el nivel del mar, transcurridos 8 segundos desde el disparo. Ayudale a los de la base naval, enviar la ayuda al barco.

   (a) [1 *pto.*] Modele el problema.

   (b) [1 *pto.*] Determine la solución usando el programa del método de Descenso Rápido con $x_0 = (-5.05\ \ 80.05\ \ 0)^T$ y $tol = 10^{-5}$.

(c) [1 *pto.*] **Determine la solución usando el programa del método de Gradiente Conjugado con** $x_0 = (-5.05\ \ 80.05\ \ 0)^T$ **y** $tol = 10^{-5}$.

(d) [1 *pto.*] **Escribe el algoritmo que satisface la condición de los métodos.**

Solución:

(a) [1 *pto.*] **Sean** a, b **y** c **los coeficientes de la ecuación cuadrática general, dado por:**

$$f(t) = at^2 + bt + c.$$

Luego

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &: \quad f(0) = a(0)^2 + b(0) + c = 0 \\ t = 8 \quad &: \quad f(8) = a(8)^2 + b(8) + c = 320 \\ t = 16 \quad &: \quad f(16) = a(16)^2 + b(16) + c = 0 \end{aligned}$$

El sistema es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 256 & 16 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 320 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) [1 *pto.*] **La tabla es:**

k	a_k	b_k	c_k	t_k	vx_k	vy_k	vz_k	Error
0	-5.05	80.05	0	0.0000143	0.0531866	-0.7961693	-0.1499104	
1	-5.0035134	80.053066	0.0002116	0.0642703	0.9075006	0.0581312	0.013233	0.0464866
2	-5.0000951	80.001895	-0.0094232	0.0000143	-0.000008	-0.0019375	0.0090598	0.0511709
$\vdots$								
9	-5.0000558	80.001294	-0.0064863					

Donde la ecuación cuadrática es $f(t) = -5.0000558t^2 + 80.001294t - 0.0064863$.

(c) [1 *pto.*] **La tabla es:**

k	a_k	b_k	c_k	d_k	rx_k	ry_k	rz_k	Error
0	-5.05	80.05	0	0.6592089	3251.2	214.4	14.8	0.0464866
1	-5.0035134	80.053066	0.0002116	0.0000858	0.0531866	-0.7961826	-0.1499114	0.0511844
2	-5.0000812	80.001881	-0.0094259	1.037491	0.0000713	-0.0017096	0.0091048	0.0094259
3	-5	80	0	0	-0.0000493	-0.0000033	-0.0000002	0
4	-5	80	0					

Donde la ecuación cudrática es $f(t) = -5t^2 + 80t$.

(d) [1 *pto.*] **Hay que garantizar que la matriz debe ser simétrica, el cual es:**

Si $A == A'$
entonces
$B \leftarrow A;$
$c \leftarrow b;$
sino
$B \leftarrow A' \cdot A;$
$c \leftarrow A' \cdot b;$
fin si.

Se recomienda para este problema el método del Gradiente Conjugado, porque se logra obtener la solución en 4 iteraciones.

30 de Noviembre del 2022