Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2021-1**

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

Solucionario Tercera Práctica Calificada

1. **Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:**

   (a) **[1 *pto.*] Dado un vector en $\mathbb{R}^2$. El número máximo de transformaciones de Householder para anular la primera componente es 2.**

   (b) **[1 *pto.*] La matriz $A^TA + \lambda I$ con $\lambda > 0$ es invertible.**

   (c) **[1 *pto.*] Si H es una transformación de Householder entonces $||Hx|| = ||x||$.**

   (d) **[1 *pto.*] Mencione alguna aplicación del proceso de deflación de una matriz.**

   Solución:

   (a) **(Verdadero) El número máximo es 2, como se muestra en la gráfica del slide 23 Semana 5.**

   (b) **(Verdadero) Siendo una matriz definida positiva entonces es invertible.**

   (c) **(Verdadero) Siendo ortogonal tenemos que la igualdad se satisface.**

   (d) **Ver el ejemplo 1: Slide 12 Semana 4, determine A^{50}.**

2. **[4 *pts.*] El profesor de Análisis y Modelamiento Numérico I, mando un mensaje cifrado de Hill que agrupa de 3 en 3 el cual dice:**

$$YLBFLBDMUWOQ.$$

El mesaje asocia cada letra del alfabeto con un número dado por:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	

Se trabajan todas las operaciones con los números enteros módulo 27 y también se utiliza la matriz siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Determine el mensaje real, usando el método de Gauss-Jordan, donde el denominador de la matriz inversa es 22.

Solución: **De $YLBFLBDMUWOQ$, se representa numericamente y agrupados de 3 en 3 por**

$$(25;11;1),(5;11;1),(3;12;21),(23;15;17)$$

Luego, la inversa de la matriz A usando Gauss-Jordan es:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1.0909091 & -0.5454545 & -0.0909091 \\ 0.2272727 & 0.1363636 & -0.2272727 \\ -0.1818182 & 0.0909091 & 0.1818182 \end{bmatrix}$$

Como el denominador de la inversa es 22 busquemos su inversa, es decir:

$$22*a=1(\text{módulo } 27)\Rightarrow a=16.$$

Donde $22*16=352$ el cual en módulo 27 es 1. Luego

$$352*\begin{bmatrix} 1.0909091 & -0.5454545 & -0.0909091 \\ 0.2272727 & 0.1363636 & -0.2272727 \\ -0.1818182 & 0.0909091 & 0.1818182 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 384 & -192 & -32 \\ 80 & 48 & -80 \\ -64 & 32 & 64 \end{bmatrix}$$

Multiplicando este último resultado con los vectores iniciales, tenemos:

$$\begin{bmatrix} 384 & -192 & -32 \\ 80 & 48 & -80 \\ -64 & 32 & 64 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 25 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7456 \\ 2448 \\ -1184 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 384 & -192 & -32 \\ 80 & 48 & -80 \\ -64 & 32 & 64 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -224 \\ 848 \\ 96 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 19 \\ 11 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 384 & -192 & -32 \\ 80 & 48 & -80 \\ -64 & 32 & 64 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 21 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1824 \\ -864 \\ 1536 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 24 \end{bmatrix}$$

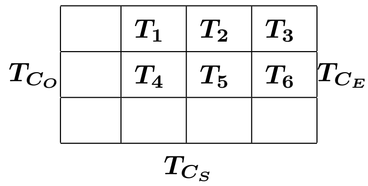
$$\begin{bmatrix} 384 & -192 & -32 \\ 80 & 48 & -80 \\ -64 & 32 & 64 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 23 \\ 15 \\ 17 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5408 \\ 1200 \\ 96 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Finalmente de $(4;18;4),(19;11;15),(12;0;24),(8;12;15)$ el mensaje enviado por el profesor es $ERESLOMAXIMO$, es decir

$$ERES\ LO\ MAXIMO.$$

3. **La Transferencia de Calor es determinado por la temperatura en estado estable de una placa delgada cuando se conoce la temperatura alrededor de la placa. Suponga que la placa de la siguiente figura representa una sección trasversal perpendicular a la placa**

$$T_{C_N}$$



Sean T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 y T_6 las temperaturas interiores de los nodos de la red. La temperatura en un nodo es aproximadamente igual al promedio de las temperaturas de los cuatro nodos más cercanos arriba, abajo, a la derecha y a la izquierda. Así por ejemplo $T_1 = \dfrac{T_{C_N} + T_2 + T_4 + T_{C_O}}{4}$.

(a) [1 *pto.*] Plantee el sistema de las temperaturas sabiendo que $T_{C_N} = 25^o$, $T_{C_E} = 37^o$, $T_{C_S} = 10^o$ y $T_{C_O} = 31^o$.

(b) [1 *pto.*] Determine el número de condición del problema.

(c) [1 *pto.*] Determine la solución usando la Factorización QR.

(d) [1 *pto.*] ¿Qué puede decir de la calidad de la solución aproximada obtenida?

Solución:

(a) El sistema es:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56 \\ 25 \\ 62 \\ 41 \\ 10 \\ 47 \end{bmatrix}$$

(b) Sea $\|A\|_\infty = 7$.

Luego, su inversa es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2948240 & 0.0931677 & 0.0281573 & 0.0861284 & 0.0496894 & 0.0194617 \\ 0.0931677 & 0.3229814 & 0.0931677 & 0.0496894 & 0.1055901 & 0.0496894 \\ 0.0281573 & 0.0931677 & 0.2948240 & 0.0194617 & 0.0496894 & 0.0861284 \\ 0.0861284 & 0.0496894 & 0.0194617 & 0.2948240 & 0.0931677 & 0.0281573 \\ 0.0496894 & 0.1055901 & 0.0496894 & 0.0931677 & 0.3229814 & 0.0931677 \\ 0.0194617 & 0.0496894 & 0.0861284 & 0.0281573 & 0.0931677 & 0.2948240 \end{bmatrix}$$

con $\|A^{-1}\|_\infty = 0.7142857$, donde el número de condición es:

$$Cond_\infty(A) = 4.9999999$$

(c) Por la transformación QR, se tiene

$$Q = \begin{bmatrix} 0.9428090 & -0.2357023 & 0 & -0.2357023 & 0 & 0 \\ 0.1979108 & 0.9047349 & -0.2544567 & -0.1130919 & -0.2544567 & 0 \\ 0.0419303 & 0.2106044 & 0.9300901 & -0.0428833 & -0.1296027 & -0.2649232 \\ 0.2274767 & -0.0181714 & -0.0060126 & 0.9280783 & -0.2941498 & -0.0058790 \\ 0.1220146 & 0.2409693 & -0.0244797 & 0.2470892 & 0.8663422 & -0.3388880 \\ -0.0595909 & -0.1521469 & -0.2637212 & -0.0862166 & -0.2852754 & -0.9027381 \end{bmatrix}$$

y

$$R = \begin{bmatrix} 4.2426407 & -1.8856181 & 0.2357023 & -1.8856181 & 0.4714045 & 0 \\ 0 & 3.9299420 & -1.9225616 & -0.3958215 & -1.8094697 & 0.5089134 \\ 0 & 0 & 3.7746790 & -0.0838606 & -0.4212088 & -1.8601801 \\ 0 & 0 & 0 & 3.7789863 & -2.0806270 & 0.2766464 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.3161983 & -2.1974147 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.0619557 \end{bmatrix}$$

La solución aproximada es:

$$x = \begin{bmatrix} 25.527950 \\ 24.496894 \\ 27.527950 \\ 21.614907 \\ 19.931677 \\ 23.614907 \end{bmatrix}$$

(d) Se cumple:

$$\frac{3 \times 10^{-6}}{62} \times \frac{1}{4.9999999} \leq \frac{\|E\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 4.9999999 \times \frac{3 \times 10^{-6}}{62}$$

$$\Longrightarrow \frac{\|E\|_\infty}{\|x\|_\infty} \approx 0$$

Para este problema el métodos resulta ser bueno, dado que la condición es un valor pequeño.

4. [4 *pts.*] Determine todas las transformaciones de Householder en $\mathbb{R}^3$ que eliminen, la primera componente, la segunda componente o la tercera componente.

Solución: Denotemos al vector a en $\mathbb{R}^3$, entonces para anular la primera componente relativo al vector unitario en la dirección respectica denotada por e_1 es:

(a) $H = I - 2vv^T$ donde $v = w/||w||$ con $w = a - ||a||e_1$,

(b) $H = I - 2vv^T$ donde $v = w/||w||$ con $w = a + ||a||e_1$,

De forma similar, para anular la segunda componente:

(a) $H = I - 2vv^T$ donde $v = w/||w||$ con $w = a - ||a||e_2$,

(b) $H = I - 2vv^T$ donde $v = w/||w||$ con $w = a + ||a||e_2$,

De forma análoga, para anular la tercera componente:

(a) $H = I - 2vv^T$ donde $v = w/||w||$ con $w = a - ||a||e_3$,

(b) $H = I - 2vv^T$ donde $v = w/||w||$ con $w = a + ||a||e_3$,

5. [4 *pts.*] Identifique su grupo de exposición y la sección donde esta matriculado.

26 de Mayo del 2021