Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2021-2**

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

Solucionario Primera Práctica Calificada

---

1. a) (Falso) De la fórmula $2(\beta-1)\beta^{t-1}(U-L+1)$ tenemos $t=3$.

b) (Falso) Se tiene 52 bits para la mantisa y 11 bits para el exponente

c) (Verdadero) $-0{,}5 < x-\hat{x} < 0.5$, de donde $x \in \langle 3212, 3213\rangle$.

d) (Verdadero) Sabemos que existen δ_1, δ_2 y δ_3 tales que $fl(y)=y(1+\delta_1)$, $fl(x)=x(1+\delta_2)$ y $fl(x(fl(y)fl(z))) = x(fl(y)fl(z))(1+\delta_3)$, tal que $|\delta_i| \leq 2^{-24}$ para cada $i=1,2,3$, luego

$$\begin{aligned} fl(x(fl(y)fl(z))) &= x(yz)(1+\delta_1)(1+\delta_2)(1+\delta_3) \\ &= x(yz)(1+\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_1\delta_2+\delta_1\delta_3+\delta_2\delta_3+\delta_1\delta_2\delta_3) \\ &\approx x(yz)(1+\delta_1+\delta_2+\delta_3) \\ &= x(yz)(1+\delta) \end{aligned}$$

donde $|\delta| = |\delta_1+\delta_2+\delta_3| \leq |\delta_1|+|\delta_2|+|\delta_3| \leq 3\times 2^{-24}$.

2. a) Sean $X=\mathbb{R}^2$ y $Y=\mathbb{R}$ con

x_1: el valor del helados.

x_2: el valor del dulce.

Donde

$$\begin{array}{rccl} \tilde{f}: & X & \to & Y \\ & (x_1,x_2) & \rightsquigarrow & \tilde{f}(x_1,x_2) = fl(x_1)-fl(x_2). \end{array}$$

b) Como $x_1=\pi$ y $x_2=\frac{\sqrt{22}}{7}$.

$$fl(x_1) = 3{,}14159... = 3{,}142 \ \wedge \ fl(x_2) = 0{,}6700593... = 6{,}701\times 10^{-1}$$

Por (a): $fl(x_1)-fl(x_2) = 3{,}142 - 6{,}701\times 10^{-1} = 2{,}4719$.

Por (b): $fl(x_1)\ominus fl(x_2) = 2{,}472$

Tomando, como $\tilde{x}_1 = 3{,}142$ y $\tilde{x}_2 = 0{,}670$ entonces $\tilde{x}_1-\tilde{x}_2 = 2{,}472$.

c) El error relativo es:

$$ER = \frac{|(fl(x_1)-fl(x_2)) - (fl(x_1)\ominus fl(x_2))|}{fl(x_1)-fl(x_2)} = \frac{|2{,}4719-2{,}472|}{2{,}4719} = 0{,}000040455 = 0{,}4046\times 10^{-4} \ \boxdot$$

3. *a*) [1 *pto.*] Los dos métodos son:

$$f(a,b) = a^2 - b^2 \;\wedge\; f(a,b) = (a+b)(a-b).$$

b) [1 *pto.*]

Método 1 : $f = 0{,}3237^2 - 0{,}3134^2 = 0{,}1048 - 0{,}9822 \times 10^{-1} = 0{,}6580 \times 10^{-2}$.

Método 2 : $f = (0{,}6371)(0{,}1030 \times 10^{-1}) = 0{,}6562 \times 10^{-2}$.

c) [1 *pto.*] La solución exacta es:

$$f(0{,}3237, 0{,}3134) = 0{,}1047816 - 0{,}982185 \times 10^{-1} = 0{,}65621 \times 10^{-2}.$$

Los errores relativos son:

$$ER_1 = \frac{|0{,}65621 \times 10^{-2} - 0{,}6580 \times 10^{-2}|}{0{,}65621 \times 10^{-2}} = 0{,}0026211,$$

$$ER_2 = \frac{|0{,}65621 \times 10^{-2} - 0{,}6562 \times 10^{-2}|}{0{,}65621 \times 10^{-2}} = 0{,}0000152.$$

d) [1 *pto.*] La solución correcta es $0{,}6562 \times 10^{-2}$ que corresponde al segundo método.

4. Definamos la siguiente recurrencia:

$$\begin{array}{rclcrcl} S_0 &=& x_0 & \qquad & S_0^* &=& x_0 \\ S_{k+1} &=& S_k + x_{k+1} & & S_{k+1}^* &=& fl(S_k^* + x_{k+1}) \end{array}$$

y además $\rho_k = \dfrac{S_k^* - S_k}{S_k}$, de las condiciones tenemos

$$\begin{aligned} \rho_{k+1} &= \frac{S_{k+1}^* - S_{k+1}}{S_{k+1}} \\ &= \frac{(S_k^* + x_{k+1})(1+\delta_k) - S_{k+1}}{S_{k+1}} \\ &\quad \text{como } S_k^* = S_k(1+\rho_k) \\ &= \frac{((1+\rho_k)S_k + x_{k+1})(1+\delta_k) - S_{k+1}}{S_{k+1}} \\ &= \frac{(\rho_k S_k + (S_k + x_{k+1}))(1+\delta_k) - S_{k+1}}{S_{k+1}} \\ &= \delta_k + \rho_k \left(\frac{S_k}{S_{k+1}}\right)(1+\delta_k) \end{aligned}$$

Desde que $S_k < S_{k+1}$ y $|\delta_k| < \epsilon$, tenemos

$$|\rho_{k+1}| \le \epsilon + |\rho_k|(1+\epsilon),$$

Aplicando recursividad sobre k tendremos:

$$|\rho_n| \le \epsilon + (1+\epsilon)\epsilon + \cdots + (1+\epsilon)^{n-1}\epsilon = \epsilon\left(\frac{(1+\epsilon)^n - 1}{\epsilon}\right) = (1+\epsilon)^n - 1.$$

22 de Setiembre del 2021