

Teorema de Gershgorin. Método de la potencia. Método de la potencia desplazada.

CM4F1

Ángel Enrique Ramírez Gutiérrez

aramirezg@uni.edu.pe

Escuela Profesional de Matemática
Universidad Nacional de Ingeniería

12 de julio de 2022

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$

$\lambda \in \mathbb{K}$ es llamado AUTOVALOR (valor propio) eigenvalue

de $A \Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$

$t_A: Av = \lambda v$ autovector
vector propio
eigen vector

$$\Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0$$

$$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

Si se define: $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ llamado Polinomio Característico



1. Cálculo de autovalores y autovectores

1.1. Propiedades

1.2. Localización de valores propios: Teorema de Gershgorin

2. Aproximación de autovalores

2.1. Método de la potencia

2.2. Método de la potencia escalado

2.3. Método de la potencia con desplazamiento

2.4. Método de la potencia inversa

2.5. Algoritmo QR de Francis

Recordemos que λ es autovalor de la matriz A si existe $v \neq 0$:

$$\underline{Av = \lambda v}$$

el vector v se conoce como el ~~autovalor~~ asociado a λ .
autovector

Propiedades

Si λ es un ~~autovalor~~ *autovector* de A entonces

- $A - \lambda I$ es no invertible.
- $\det(A - \lambda I) = 0$
- Si $p(x) = \det(A - xI)$ entonces $p(\lambda) = 0$
- Si $A = P^{-1}BP$ entonces A y B tiene los mismos autovalores.
- Una matriz A tiene exactamente n autovalores complejos contando multiplicidades.
- Los valores propios de una matriz triangular se localizan en la diagonal.

A es Hermitiana $\Leftrightarrow A = A^*$

Propiedades

- Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son autovalores de A y v_1, v_2 respectivos autovectores asociados, entonces v_1 y v_2 son linealmente independientes.
- Si A es hermitiana entonces sus autovalores son reales.
- Si A es hermitiana entonces autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales.
- Si A es simétrica definida positiva entonces todos sus autovalores son reales positivos.
- Si A es unitaria entonces todos sus autovalores tiene módulo 1.

Ejemplo:

Muestre que los autovectores de A forman una base de \mathbb{R}^3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 3 : (A - \lambda I) v = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Solución:

$$\begin{aligned} -v_2 + v_3 &= 0 \Rightarrow v_2 = v_3 \\ -v_1 &= 0 \Rightarrow v_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 2)^2$$

Para $\lambda_1 = 3$ tenemos $x_1 = (0, 1, 1)^T$, para $\lambda_2 = 2$ tenemos $x_2 = (0, 2, 1)^T$ y $x_3 = (-2, 0, 1)^T$
luego

$$a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

implica que $a = b = c = 0$.

Para $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 1 & -1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow v_1 - v_2 + 2v_3 = 0$$

$$v = \begin{pmatrix} v_2 - 2v_3 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$= v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



A es diagonalizable $\Leftrightarrow \exists P$ matriz invertible, D matriz diagonal t.q.:

$$P^{-1}AP = D$$

No siempre pasa que si A tiene n autovalores reales entonces tenga n autovectores linealmente independientes, por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

aquí $p(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 2)^2$, para $\lambda_1 = 3$ tenemos $v_1 = (0, 0, 1)^T$, para $\lambda_2 = 2$ tenemos que los autovectores forman un subespacio de dimensión 1, es decir su multiplicidad algebraica es diferente de su multiplicidad geométrica y como consecuencia no podemos encontrar tres autovectores linealmente independientes, como conclusión A no es diagonalizable.

Círculo de Gershgorin

Sea A una matriz $n \times n$ y R_i el círculo en el plano complejo con centro a_{ii} y radio $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$:

$$R_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right\}$$

Los autovalores de A están contenidos en la unión de los círculos, $R = \bigcup_{i=1}^n R_i$. Además la unión de k círculos no interseca los restantes $n - k$ y contiene exactamente k autovalores contando multiplicidades.

Suponga que λ es un autovalor de A asociado al autovector x con $\|x\|_\infty = 1$. Como $Ax = \lambda x$ entonces

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \lambda x_i, \quad i = 1, \dots, n$$

si $|x_k| = 1 = \|x\|_\infty$ para $i = k$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj} x_j = \lambda x_k - a_{kk} x_k$$

$$|\lambda - a_{kk}| = |\lambda - a_{kk}| \underbrace{|x_k|}_{=1} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \underbrace{|x_j|}_{\leq 1} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}|$$

por lo tanto $\lambda \in R_k$

Ejemplo:

Encuentre cotas para el radio espectral de A

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\rho(A) = \max |\lambda|$$

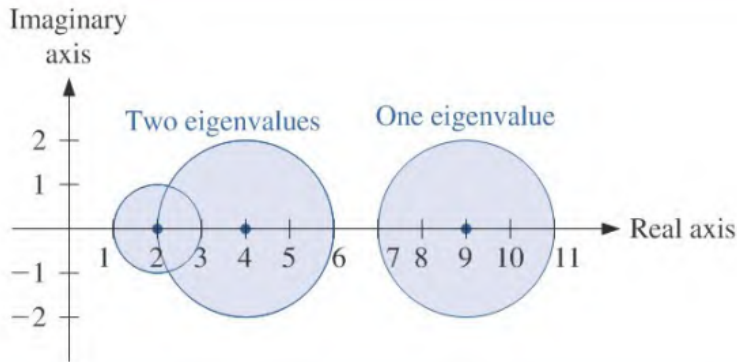
Solución

$$R_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 4| \leq 1 + 1\}$$

$$R_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq 0 + 1\}$$

$$R_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 9| \leq 2 + 1\}$$

Como R_1 y R_2 son disjuntos de R_3 entonces hay dos autovalores en $R_1 \cup R_2$ y solo uno en R_3 , además si $\rho(A) = \max \{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\}$ entonces $7 \leq \rho(A) \leq 11$.



Teorema

Si una matriz A se diagonaliza por semejanza: $P^{-1}AP = D$ y B es matriz arbitraria entonces los autovalores de $A + B$ se encuentran en la unión de discos

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_i| \leq \kappa_{\infty}(P)\|B\|_{\infty}\}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son los autovalores de A y $\kappa_{\infty}(P)$ es el número de condición de P .

Si λ es un autovalor de $A + B$ entonces lo también será de $\underline{P^{-1}(A+B)P} = D + C$ con $C = \underline{P^{-1}BP}$, por lo tanto λ pertenece a la unión de círculos de Gershgorin de $\underline{D + C}$,

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_i - c_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |d_{ij} + c_{ij}| \right\}$$

como $\underline{d_{ij} = 0}$ para $\underline{i \neq j}$

$$|z - \lambda_i| \leq |z - \lambda_i - c_{ii}| + |c_{ii}| \leq \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |c_{ij}| + |c_{ii}|}_{\leq \|C\|_{\infty}} \leq \|C\|_{\infty}$$

finalmente $\underline{\|C\|_{\infty}} \leq \|P^{-1}\|_{\infty} \|B\|_{\infty} \|P\|_{\infty} = \underline{\kappa_{\infty}(P)} \|B\|_{\infty}$

Localice los autovalores de $A + B$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} i & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1 & 1/4 & 1/3 \end{bmatrix},$$

Solución

A tiene autovalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = i$, además $\|B\|_\infty = 11/6$ y los autovectores de A son

$$v_1 = [1, 0, 0]^T; v_2 = [1 + i, 1, 0]^T; v_3 = [1 - i, -3/2, 1]^T$$

\mathcal{I} \mathfrak{I}

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 1-i \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1-i & -5/2-i/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\|P\|_{\infty} = 2\sqrt{2} + 1; \|P^{-1}\|_{\infty} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{26}/2$$

luego

$$\longrightarrow \kappa_{\infty}(P) \|B\|_{\infty} = \frac{11}{6} (2\sqrt{2} + 1) (1 + \sqrt{2} + \sqrt{26}/2)$$

1. Cálculo de autovalores y autovectores

1.1. Propiedades

1.2. Localización de valores propios: Teorema de Gershgorin

2. Aproximación de autovalores

- ✓ 2.1. Método de la potencia
- ✓ 2.2. Método de la potencia escalado
- ✓ 2.3. Método de la potencia con desplazamiento
- ✓ 2.4. Método de la potencia inversa
- ✓ 2.5. Algoritmo QR de Francis

λ autovalor de A
 $\Rightarrow \exists v \neq 0$ tal q $Av = \lambda v$
 $A^k v = \lambda^k v \quad \forall k \in \mathbb{N}$
 λ^k es autovalor de A^k

El método de potencias es un método numérico iterativo de aproximaciones sucesivas que permite encontrar el valor propio de máximo valor absoluto de una matriz dada, y un vector propio correspondiente al valor propio encontrado.

Es decir, que nos permite encontrar λ y un vector no nulo x que satisface la siguiente ecuación:

$$Ax = \lambda x$$

Es conocido que los autovalores de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ pueden ser calculados como las raíces del polinomio característico:

$$\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + c_0 = 0.$$

Sin embargo, para valores grandes de n , el cálculo de las raíces del polinomio anterior es bastante difícil. Más aún, técnicas numéricas para aproximar las raíces de polinomios de grado alto son sensibles a errores de redondeo.

Definición

Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. λ_1 es llamado **autovalor dominante** de A si:

$$|\lambda_1| > |\lambda_i|, \quad i = 2, \dots, n.$$

Los **autovectores** correspondientes a λ_1 son llamados **autovectores dominantes** de A .

Asuma que la matriz A tiene un autovalor dominante con su respectivo autovector dominante. Luego elija una aproximación inicial x_0 de un autovector dominante de A . La aproximación inicial debe ser un vector no nulo. Finalmente realizamos la siguiente sucesión de pasos:

$$\begin{aligned}x_1 &= Ax_0 \\x_2 &= Ax_1 = A(Ax_0) = A^2x_0 \\x_3 &= Ax_2 = A(A^2x_0) = A^3x_0 \\&\vdots \\&\rightarrow x_k = Ax_{k-1} = A(A^{k-1}x_0) = A^kx_0\end{aligned}$$

Para valores grandes de k y un escalamiento apropiado observaremos que se obtiene una buena aproximación del autovector dominante.

Realice 6 iteraciones del método de la potencia para aproximar un autovector dominante de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución:

Iniciamos con $\underline{x_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, luego:

$$x_1 = \underline{Ax_0} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \underline{2} \end{pmatrix} \Rightarrow 2 \begin{pmatrix} 1.50 \\ 1.00 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = Ax_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ \underline{10} \end{pmatrix} \Rightarrow 10 \begin{pmatrix} 1.10 \\ 1.00 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = Ax_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 \\ \underline{42} \end{pmatrix} \Rightarrow 42 \begin{pmatrix} 1.02381 \\ 1.00000 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = Ax_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 43 \\ 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 171 \\ 170 \end{pmatrix} \Rightarrow 170 \begin{pmatrix} 1.00588 \\ 1.00000 \end{pmatrix}$$

$$x_5 = Ax_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 171 \\ 170 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 683 \\ 682 \end{pmatrix} \Rightarrow 682 \begin{pmatrix} 1.00147 \\ 1.00000 \end{pmatrix}$$

$$x_6 = Ax_5 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 683 \\ 682 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2731 \\ 2730 \end{pmatrix} \Rightarrow 2730 \begin{pmatrix} 1.00037 \\ 1.00000 \end{pmatrix}$$

Observe que en el ejemplo anterior aparecen múltiplos del vector $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es fácil verificar que el vector x es un autovector dominante de la matriz A correspondiente al autovalor dominante $\lambda = 4$.

Del ejemplo anterior se observa que el método de la potencia nos permite aproximar un autovector dominante de la matriz A . Para este ejemplo, es fácil verificar que el autovalor $\lambda = 4$ es el autovector dominante de la matriz A . El siguiente teorema da una forma de poder determinar el autovalor correspondiente a un autovector dado.

Teorema

Si x es un autovector de una matriz A , entonces su correspondiente autovalor es dado por:

$$\lambda = \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle}.$$

Este cociente es llamado Cociente de Rayleigh.

Demostración:

Desde que x es un autovector entonces $Ax = \lambda x$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$. Luego:

$$\frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \frac{\langle \lambda x, x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \lambda \frac{\langle \cancel{x}, \cancel{x} \rangle}{\langle \cancel{x}, \cancel{x} \rangle} = \underline{\lambda}.$$

Para el ejemplo anterior, el autovector encontrado es:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

por tanto, del Teorema anterior se puede calcular el autovalor dominante correspondiente es:

$$\lambda = \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \approx \underline{4.00018}.$$

Recordando que el método de la potencia es usado para determinar el **autovalor dominante** y su correspondiente autovector. Por tanto, sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ autovalores de la matriz A tal que:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|,$$

es decir, λ_1 es el autovalor dominante de A y sea v_1 su correspondiente autovector.

Sea $\max(g)$ el valor de máximo módulo del vector g .

→ Asuma que A es una matriz diagonalizable.

En [?] se tiene el siguiente algoritmo.

$\exists P$ invertible, D diagonal tq
 $P^{-1}AP = D$

$\max(\lambda) = \max(g) \quad \forall \lambda$ autovalor de A .

Algoritmo 1: Método de la potencia escalada

Entrada: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, Tol .

Salida: x

1 **inicio**

2 $k \leftarrow 0$;

3 **mientras** *condición de parada no es satisfecha* **hacer**

4 $k \leftarrow k + 1$;

5 Calcule x_k como sigue:

$$\hat{x}_k \leftarrow Ax_{k-1}$$

$$x_k \leftarrow \hat{x}_k / \max(\hat{x}_k)$$

6 **fin mientras**

7 **devolver** x_k ;

8 **fin**

Teorema

Cuando $\underline{k \rightarrow \infty}$, se cumple que:

$$\{\underline{\text{máx}(\hat{x}_k)}\} \rightarrow \underline{\lambda_1}$$

y

$$\{\underline{x_k}\} \rightarrow \underline{w_1}$$

donde w_1 es un múltiplo de $\underline{v_1}$.

Desde que A es diagonalizable, los autovectores v_1, v_2, \dots, v_n asociados a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son linealmente independientes. Luego, podemos existir escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tal que:

$$\underline{x_0} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

luego:

$$\begin{aligned} A^k x_0 &= \alpha_1 \underline{A^k v_1} + \alpha_2 \underline{A^k v_2} + \dots + \alpha_n \underline{A^k v_n} \\ &= \alpha_1 \lambda_1^k v_1 + \alpha_2 \lambda_2^k v_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n^k v_n \\ &= \lambda_1^k \left[\alpha_1 v_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k v_2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k v_n \right] \end{aligned}$$

como λ_1 es el autovalor dominante, entonces:

$$\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \underline{k \rightarrow \infty}, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Por tanto:

$$x_k = \frac{A^k x_0}{\text{máx}(A^k x_0)} \rightarrow \underline{cv_1}$$

donde c es una constante y además:

$$\{\underline{\text{máx}(\hat{x}_k)}\} \rightarrow \lambda_1.$$

La tasa de convergencia del método de la potencia es determinado por la razón $|\lambda_2/\lambda_1|$, el cual es deducido a partir de:

$$\begin{aligned}\|x_k - \alpha_1 v_1\| &= \left\| \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k v_2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k v_n \right\| \\ &\leq |\alpha_2| \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k \|v_2\| + \dots + |\alpha_n| \left| \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right|^k \|v_n\| \\ &\leq \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k (|\alpha_2| \|v_2\| + \dots + |\alpha_n| \|v_n\|)\end{aligned}$$

porque $\left| \lambda_i/\lambda_1 \right| \leq \left| \lambda_2/\lambda_1 \right|$, $i = 3, 4, \dots, n$. Por tanto se obtiene:

$$\|x_k - \alpha_1 v_1\| \leq \alpha \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

donde: $\alpha = (|\alpha_2| \|v_2\| + \dots + |\alpha_n| \|v_n\|)$.

Lo anterior muestra que la tasa en la cual x_k aproxima $\alpha_1 v_1$ depende de cuán rápido $|\lambda_2/\lambda_1|^k$ tiende a cero. El valor absoluto del error en cada paso decrece según la razón $|\lambda_2/\lambda_1|$, es decir, si λ_2 está cerca a λ_1 , entonces la convergencia será muy lenta, caso contrario, la convergencia será rápida.

Considere la matriz

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

cuyos autovalores son:

$$\lambda_1 = 4 > \lambda_2 = 3 \geq \lambda_3 = 1,$$

y el correspondiente autovector dominante normalizado es:

$$\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.70711 \\ 0 \\ 0.70711 \end{pmatrix}.$$

Iniciando en: $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, aplicamos el método de la potencia escalado.

En la iteración k se tiene:

$$\underline{\hat{x}_k} = \underline{Ax_{k-1}}, \underline{\text{máx}(\hat{x}_k)} \Rightarrow \underline{x_k} = \frac{\hat{x}_k}{\text{máx}(\hat{x}_k)}.$$

Luego:

$$k = 1 : \hat{x}_1 = Ax_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\text{máx}(\hat{x}_1)} = 2 \Rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 1.00000 \\ 0.50000 \\ 0.50000 \end{pmatrix}$$

$$\underline{k=2}: \hat{x}_2 = Ax_1 = \begin{pmatrix} 3.00000 \\ 0.50000 \\ 2.50000 \end{pmatrix}, \quad \underline{\max(\hat{x}_2)} = 3 \Rightarrow \underline{x_2} = \begin{pmatrix} 1.00000 \\ 0.16667 \\ 0.83333 \end{pmatrix}$$

$$\underline{k=3}: \hat{x}_3 = Ax_2 = \begin{pmatrix} 3.66666 \\ 0.16667 \\ 3.49999 \end{pmatrix}, \quad \underline{\max(\hat{x}_3)} = 3.66666 \Rightarrow \underline{x_3} = \begin{pmatrix} 1.00000 \\ 0.04546 \\ 0.95454 \end{pmatrix}$$

$$\underline{k=4}: \hat{x}_4 = Ax_3 = \begin{pmatrix} 3.90908 \\ 0.04366 \\ 3.86272 \end{pmatrix}, \quad \underline{\max(\hat{x}_4)} = 3.90908 \Rightarrow \underline{x_4} = \begin{pmatrix} 1.00000 \\ 0.01117 \\ 0.98814 \end{pmatrix}$$

$$\underline{k = 5} : \hat{x}_5 = Ax_4 = \begin{pmatrix} 3.97628 \\ 0.01048 \\ 3.96373 \end{pmatrix}, \quad \max(\underline{\hat{x}_5}) = 3.97628 \Rightarrow \underline{x_5} = \begin{pmatrix} 1.00000 \\ 0.00264 \\ 0.99684 \end{pmatrix}$$

$$\underline{k = 6} : \hat{x}_6 = Ax_5 = \begin{pmatrix} 3.99368 \\ 0.00212 \\ 3.99000 \end{pmatrix}, \quad \max(\underline{\hat{x}_6}) = 3.99368 \Rightarrow \underline{x_6} = \begin{pmatrix} 1.00000 \\ 0.00053 \\ 0.99908 \end{pmatrix}$$

$$\underline{k = 7} : \hat{x}_7 = Ax_6 = \begin{pmatrix} 3.99816 \\ 0.00013 \\ 3.99685 \end{pmatrix}, \quad \max(\underline{\hat{x}_7}) = 3.99816 \Rightarrow \underline{x_7} = \begin{pmatrix} 1.00000 \\ 0.00004 \\ 0.99967 \end{pmatrix}$$

$$k = 8 : \hat{x}_8 = Ax_7 = \begin{pmatrix} 3.99934 \\ -0.00025 \\ 3.99872 \end{pmatrix}, \quad \max(\hat{x}_8) = \underline{3.99934} \Rightarrow x_8 = \begin{pmatrix} 1.00000 \\ -0.00006 \\ 0.99984 \end{pmatrix}$$

de los cálculos realizados y del Teorema 27 podemos concluir que el autovalor dominante es $\lambda_1 \approx 4$ y su respectivo autovector es:

$$x_8 = \begin{pmatrix} 1.00000 \\ -0.00006 \\ 0.99984 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz diagonalizable y sea $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ la matriz de sus autovectores x_i para $i = 1, \dots, n$. Suponga que los autovectores de A son ordenados como sigue:

autovalores

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|, \quad (1)$$

es decir, λ_1 es el autovalor dominante.

Dado un vector inicial arbitrario $q^0 \in \mathbb{C}^n$ de norma euclideana unitaria, el método de la potencia en la iteración k viene dado por:

$$z^{(k)} = Aq^{(k-1)}$$

$$q^{(k)} = \frac{z^{(k)}}{\|z^{(k)}\|_2}$$

$$\underline{\nu}^{(k)} = (q^{(k)})^H A q^{(k)}, \quad (q^{(k)})^H \text{ es la matriz adjunta de } q^{(k)}$$

- Cuando A es una matriz diagonalizable entonces los autovectores x_i forman una base de \mathbb{C}^n y así es posible representar $q^{(0)}$ de la forma siguiente:

$$q^{(0)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \dots, n$$

desde que $Ax_i = \lambda_i x_i$ resulta:

$$A^k q^{(0)} = \alpha_1 \lambda_1^k \left(x_1 + \sum_{i=2}^n \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k x_i \right), \quad k = 1, 2, \dots$$

como $|\lambda_i/\lambda_1| < 1$ para $i = 2, \dots, n$ cuando $k \rightarrow \infty$, el vector $A^k q^{(0)}$ (y también el vector $q^{(k)}$) tienen un incremento significativo en la componente de la dirección del autovector x_1 mientras que en las otras direcciones decrece. Por tanto el vector $q^{(k)}$ se va ubicando en la dirección del autovector x_1 conforme $k \rightarrow \infty$.

El siguiente teorema da una estimación para el error en la iteración k .

Teorema

Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz diagonalizable cuyos autovalores satisfacen (1). Asuma que $\alpha_1 \neq 0$. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que:

$$\|\tilde{q}^{(k)} - x_1\|_2 \leq C \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k, \quad k \geq 1 \quad (2)$$

donde:

$$\tilde{q}^{(k)} = \frac{q^{(k)} \|A^k q^{(0)}\|_2}{\alpha_1 \lambda_1^k} = x_1 + \sum_{i=2}^n \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k x_i, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Método de la potencia con desplazamiento



En algunos casos, la convergencia puede ser mejorada significativamente usando un desplazamiento adecuado. Por tanto, si σ es un desplazamiento adecuado tal que $\lambda_1 - \sigma$ es el autovalor dominante de $A - \sigma I$ y si aplicamos el método de la potencia a la matriz $A - \sigma I$, entonces la tasa de convergencia es determinada por la razón:

$$\left| \frac{\lambda_2 - \sigma}{\lambda_1 - \sigma} \right|$$

en vez de

$$\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|$$

Recuerde que el desplazamiento de la matriz A por σ los autovalores son desplazados por σ pero los autovectores no se alteran

Teorema:
 λ es autovalor de $A \rightarrow \lambda + c$ es autovalor de $A + cI$ con autovector sin autovector  

Es un método efectivo para aproximar un autovector cuando se conoce una buna aproximación a un autovalor.

Sea σ una aproximación a un autovalor real λ_1 tal que $|\lambda_1 - \sigma| \ll |\lambda_i - \sigma| (i \neq 1)$, es decir, σ está mucho más cerca de λ_1 que los otros autovalores.

Algoritmo 2: Método de la potencia inversa

Entrada: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, Tol .

Salida: x

```
1 inicio
2    $k \leftarrow 0$ ;
3   mientras condición de parada no es satisfecha hacer
4      $k \leftarrow k + 1$ ;
5     Determine  $\hat{x}_k$  resolviendo:  $(A - \sigma I)\hat{x}_k = x_{k-1}$ .
6     Calcule  $x_k$  como sigue:
           
$$x_k \leftarrow \hat{x}_k / \max(\hat{x}_k)$$

           Parar si  $\|(A - \sigma I)x_k\|_\infty \leq c\mu\|A\|_\infty$  donde  $c$  y  $\mu$  son constantes.
7   fin mientras
8   devolver  $x_k$ ;
9 fin
```

Teorema

La sucesión $\{x_k\}$ del algoritmo de la potencia inversa converge a la dirección del correspondiente autovector a λ_1 .

Demostración:

Los autovalores de $(A - \sigma I)^{-1}$ son $(\lambda_1 - \sigma)^{-1}$, $(\lambda_2 - \sigma)^{-1}$, ..., $(\lambda_n - \sigma)^{-1}$ y los autovectores v_1, v_2, \dots, v_n son los mismos que A. Por tanto, del método de la potencia resulta:

$$\begin{aligned}\hat{x}_k &= \frac{c_1}{(\lambda_1 - \sigma)^k} v_1 + \frac{c_2 v_2}{(\lambda_2 - \sigma)^k} + \dots + \frac{c_n v_n}{(\lambda_n - \sigma)^k} \\ &= \frac{1}{(\lambda_1 - \sigma)^k} \left[c_1 v_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_1 - \sigma}{\lambda_2 - \sigma} \right)^k v_2 + \dots + c_n \left(\frac{\lambda_1 - \sigma}{\lambda_n - \sigma} \right)^k v_n \right]\end{aligned}$$

Desde que λ_1 está más cerca de σ que otro autovalor, el primer término del lado derecho es el dominante y así, $\{x_k\}$ converge en la dirección de v_1 , el cual es la dirección que queremos calcular.

$$Q^{\dagger} = \overline{Q^T}$$

El algoritmo QR de Francis está basado en el siguiente resultado:

Teorema

Sea una matriz $\underline{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ entonces A puede descomponerse como:

$$\underline{A} = \underline{QUQ^*}$$

donde Q es una matriz unitaria, $\underline{Q^*}$ es la transpuesta conjugada de Q y U es una matriz triangular superior cuyas entradas en la diagonal son exactamente los autovalores de A .

Dada una matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, se pretende encontrar una sucesión de matrices $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a la matriz triangular de Schur (en cuya diagonal aparecen los autovalores de la matriz A).

La construcción de dicha sucesión se hace de la manera siguiente: $A_0 = A$.

Supuesta encontrada A_n , se realiza la factorización $A_n = Q_n R_n$ mediante matrices de Householder y $A_{n+1} = R_n Q_n$. Es decir:

$$\begin{aligned} A_0 &= A = Q_0 R_0 \\ A_1 &= R_0 Q_0 \Rightarrow A_1 = Q_1 R_1 \\ A_2 &= R_1 Q_1 \Rightarrow A_2 = Q_2 R_2 \\ &\vdots \\ A_n &= R_{n-1} Q_{n-1} \Rightarrow A_{n+1} = Q_{n+1} R_{n+1} \end{aligned}$$

De lo anterior, se observa lo siguiente:

$$\begin{aligned} \hookrightarrow A &= Q_0 R_0 & \Rightarrow A_1 &= R_0 Q_0 = Q_0^* A Q_0 \\ R_0 Q_0 &= \underline{Q_1} R_1 & \Rightarrow A_2 &= R_1 Q_1 = Q_1^* R_0 Q_0 Q_1 = Q_1^* Q_0^* A Q_0 Q_1 = (Q_0 Q_1)^* A (Q_0 Q_1) \\ & & \vdots & \\ \underline{R_{n-1} Q_{n-1}} &= \underline{Q_n} R_n & \Rightarrow \underline{A_n} &= R_n Q_n = (Q_0 Q_1 \dots Q_{n-1})^* A (Q_0 Q_1 \dots Q_{n-1}) \end{aligned}$$

En resumen, a partir de A se calcula Q₀ y con ella A₁ = Q₀^{*}AQ₀. Con A₁ se calcula Q₁ y a continuación Q₀Q₁, lo cual nos permite calcular A₂ = (Q₀Q₁)^{*}A(Q₀Q₁). Con A₂ se calcula Q₂ y a continuación Q₀Q₁Q₂ (observe que Q₀Q₁ está almacenada en la memoria) por tanto se calcula A₃ = (Q₀Q₁Q₂)^{*}A(Q₀Q₁Q₂) y así sucesivamente.

1. Los elementos de la diagonal de la matriz A_n son los autovalores buscados.
2. El proceso termina cuando el mayor valor absoluto de la matriz A_n (abajo de la diagonal principal) es menor que una precisión dada.
3. En general, si la matriz A tiene autovalores de igual módulo, la sucesión converge a una matriz triangular por cajas, en la que cada caja contiene a los autovalores del mismo módulo.

Determine los autovalores de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 A_0 = A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} & A_1 &= \begin{pmatrix} 7 & -1'9415 & 0'6671 \\ -1'9415 & -0'5385 & 0'1850 \\ 0'6671 & 0'1850 & -0'4615 \end{pmatrix} \\
 A_2 &= \begin{pmatrix} 7'5034 & 0'3365 & 0'0344 \\ 0'3365 & -1'1474 & -0'1174 \\ 0'0344 & -0'1174 & -0'3554 \end{pmatrix} & A_3 &= \begin{pmatrix} 7'5162 & -0'0530 & 0'0016 \\ -0'0530 & -1'1758 & 0'0348 \\ 0'0016 & 0'0348 & -0'3404 \end{pmatrix} \\
 A_4 &= \begin{pmatrix} 7'5165 & 0'0083 & 0'0001 \\ 0'0083 & -1'1775 & -0'0100 \\ 0'0001 & -0'0100 & -0'3390 \end{pmatrix} & A_5 &= \begin{pmatrix} 7'5165 & -0'0013 & 0'0000 \\ -0'0013 & -1'1776 & 0'0029 \\ 0'0000 & 0'0029 & -0'3389 \end{pmatrix} \\
 A_6 &= \begin{pmatrix} 7'5165 & 0'0002 & 0 \\ 0'0002 & -1'1776 & -0'0008 \\ 0 & -0'0008 & -0'3389 \end{pmatrix} & A_7 &= \begin{pmatrix} 7'5165 & 0 & 0 \\ 0 & -1'1776 & 0 \\ 0 & 0 & -0'3389 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Por lo que los autovalores de la matriz A son:

$$-1'1776 \quad -0'3389 \quad \text{y} \quad 7'5165$$






□

Observación:

Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son los autovalores de la matriz tales que:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0$$

entonces el algoritmo converge.

-  G.H. Golub and C.F. Van Loan.
Matrix Computations, 4th Edition
-  Biswa Datta
Numerical methods for linear control systems.
-  J. L. DE LA FUENTE
Técnicas de calculo para sistemas de ecuaciones, programación lineal y programación entera.
-  Dennis, J. E. and Schnabel, Robert B.
Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations
-  Varga, Richard S.
Geršgorin and His Circles.