# Factorización de Matrices. $LDL^T$. Cholesky.

CM4F1

CLASE 2

Semana 4

**Ángel Enrique Ramírez Gutiérrez**
aramirezg@uni.edu.pe

Escuela Profesional de Matemática
Universidad Nacional de Ingeniería

16 de octubre de 2022

# Contenido



$$\rightarrow A = LU$$

$$\underbrace{F_k \cdots F_2 F_1}_{\text{no intercambian filas}} A = U$$

# Factorización $PA = LU$

En ocasiones no es posible factorizar una matriz en la forma $LU$, lo que se aplica es la factorización $PA = LU$, donde $P$ es una matriz de permutación. Las **matrices de permutación** se obtienen de la matriz identidad intercambiando filas. Análogamente a la factorización $LU$ se obtiene la factorización $PA = LU$, pero se lleva un registro de las filas que se intercambian y se efectúan los intercambios en una matriz que registra los inversos de las operaciones de eliminación.

$P = F_{pq} I$

**Ejemplo:**
Determine una factorización de la forma:

$$\boxed{PA = LU}$$

donde:

$$\rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

# Solución:



Observe:

$$F_{13}A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F_{21}(1/3)F_{13}A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 0 & 7 & 1/3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = U$$

Por tanto:

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 0 & 7 & 1/3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = F_{13}I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y se cumple: $PA = LU$.

# Factorización $LDL^T$



LDU

$A = LU$

unitaria

$DU^*$

diagonal unitaria

Se tiene el siguiente resultado:

**Proposición:**

Si todas las submatrices principales de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son regulares, entonces existen dos matrices triangulares inferiores únicas, $L$ y $M$, y otra matriz diagonal única $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$ tales que $A = LDM^T$.

**Demostración:** De los Teoremas **??** y **??** se tiene que $A = LU$. Definamos $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$ donde $d_i = u_{ii}$, $i = 1, \ldots, n$. De esta forma se tiene que $D$ es no singular. Definiendo $M^T = D^{-1}U$ resulta ser una matriz triangular superior unitaria. Luego:

$$A = LU = (LD)(D^{-1}U) = LDM^T$$

La unicidad de $L, M$ y $D$ se deduce de la factorización $LU$ (Ejercicio).

# Factorización $LDL^T$ (cont.)

$A = LDM^T \rightarrow M^{-1}AM^{-T} = M^{-1}LD$

**Teorema**

Si $A$ admite factorización $LDM^T$ y es simétrica, entonces $L = M$.

**Demostración:**

La matriz $M^{-1}AM^{-T} = M^{-1}LD$ es simétrica y triangular inferior, por tanto es diagonal. Como $D$ es regular se tiene que $M^{-1}L$ es también diagonal. Luego, $M^{-1}L$ es triangular inferior unitaria entonces $M^{-1}L = I$.

La factorización $LDL^T$ es de gran utilidad cuando la matriz es simétrica pero no se sabe con seguridad si es definida positiva o no. Para obtener un algoritmo se procede de forma análoga al método de Crout resultando que requiere $O(n^3/6)$ operaciones de multiplicación/división y suma/resta.

# Algoritmo $LDL^T : O(n^3/6)$

Entrada: $n$: Orden de la matriz $A$.
Matriz $A = (a_{ij})$ donde $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, n$

Salida: Matriz Triangular Inferior unitaria $L$ y Matriz diagonal $D$.

Paso 1: Para $k = 1, \ldots, n$ hacer los Pasos del 2 al 4.

Paso 2: $d_k = a_{kk} - \sum_{p=1}^{k-1} a_{kp}^2 d_p$.

Paso 3: Si $d_k = 0$ entonces **PARAR**.

Paso 4: Para $i = k+1, \ldots, n$ hacer el Paso 5.

Paso 5: $a_{ik} = \dfrac{\left(a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} a_{ip} a_{kp} d_p\right)}{d_k}$

Paso 5: Matrices encontradas
$L$: Matriz Triangular inferior unitaria.
$D$: Matriz diagonal.
**PARAR** .

# Método de Cholesky

Los métodos expuestos hasta ahora están expuestos a fallos a no ser que se realicen pivotaciones parciales o totales, esto debido a la presencia de elementos pivote muy pequeños o a la acumulación de errores de redondeo importantes. Existe una clase muy importante de matrices para las cuales no es necesario efectuar estas operaciones al ser factorizadas en forma triangular, éstas son las **matrices simétricas definidas positivas** definidas a continuación.

**Definición**

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es llamada **Definida Positiva** si y sólo si para cualquier $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ se cumple que

$$x^T A x > 0.$$

# Método de Cholesky (cont.)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

**Lema**

Las submatrices principales de una matriz definida positiva son definidas positivas.

**Teorema**

Si $A$ es una matriz **definida positiva** de orden $n$ entonces tiene una descomposición $LDL^T$ tal que los elementos de la matriz diagonal $D$ son positivos.

**Teorema**

Si $A$ es una matriz simétrica definida positiva de orden $n$ entonces existe una única matriz triangular inferior $L$ con sus elementos diagonales positivos tal que $A = LL^T$.

Factorización de Cholesky

# Algoritmo de Cholesky $O(n^3/6)$

Entrada: $n$: Orden de la matriz $A$.
Matriz simétrica definida positiva $A = (a_{ij})$ donde $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, n$

Salida: Matriz Triangular Inferior $L$.

Paso 1: Para $j = 1, \ldots, n$ hacer los Pasos del 2 y 3.

Paso 2: $l_{jj} = \left( a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2 \right)^{1/2}$.

Paso 3: Para $i = j + 1, \ldots, n$ hacer el Paso 4.

Paso 4: $l_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}}$

Paso 5: Matrices Triangular inferior encontrada $L$

**PARAR**

# Número de operaciones

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

En el algoritmo de Cholesky se realizan un total de operaciones dado por:

$$\sum_{j=1}^{n}\left((j-1)+\sum_{i=j+1}^{n} j\right) \approx \frac{n^3}{6}$$

Para sistemas lineales $Ax = b$ donde $A = LL^T$ se realizan una sustitución progresiva $Lz = b$ y luego una sustitución regresiva $L^T x = z$. El número total de operaciones es $O(n^2)$, el cual es despreciable comparado con $n^3/6$ cuando $n$ es grande.
El método de Cholesky es aproximadamente dos veces más rápido que el método de eliminación gaussiana para matrices simétricas definidas positivas.

# Ejemplo 8: Método de Cholesky

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Ejemplo:

Considerar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Sin calcular, demostrar que existe la descomposicion de Cholesky de A.
2. Determinar la descomposicion de Cholesky de A.

**Resolución:**

# Bibliografía

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}}_{L^T}$$

$$4 = l_{11}^2 \rightarrow l_{11} = 2$$

$$-1 = l_{11} l_{21}$$

$$-1 = l_{11} l_{31}$$

$$4 = l_{22}^2 \rightarrow l_{22} = 2$$

$$1 = l_{22} l_{32}$$

$$4 = l_{33}^2 \rightarrow l_{33} = 2$$