Dirigida 2
CM4F1 - Análisis y Modelamiento Numérico
Pregunta 1,3,17,19

Malvaceda Canales Carlos Daniel[1] Huanca Contreras Henry[19]
Catalino Morales Breiner[17] Cipriano Arroyo Bruno[3]

15 de Octubre del 2022

Pregunta 1

Obtenga los números de condición relativos de las siguientes funciones :

$$\begin{aligned} &a)\ f(x) = x^p \\ &b)\ f(x) = log(x) \\ &c)\ f(x) = cos(x) \\ &d)\ f(x) = e^x \end{aligned} \tag{1}$$

Solución

Definición

El número de condición relativo $\kappa = \kappa(x)$ del problema f en x es

$$\kappa = \lim_{\delta \to 0} \sup_{|h| < \delta} \left| \frac{\frac{df(x;h)}{f(x)}}{\frac{h}{x}} \right|$$

Si f es diferenciable $\kappa = \left| \frac{xf'(x)}{f(x)} \right|$

Para $f(x) = x^p$ calculamos el número de condición relativo

$$f(x) = x^p$$

$$f'(x) = px^{p-1}$$

$$\kappa = \left| \frac{xf'(x)}{f(x)} \right| = \left| \frac{x.p.x^{p-1}}{x^p} \right| = |p| < 1$$

$$\Rightarrow -1 < p < 1$$

Por lo tanto para valores de $p \in \langle -1, 1 \rangle$, el problema estará bien condicionado.

Para $f(x) = \log(x)$ calculamos el número de condición relativo

$$\kappa = \left| \frac{x}{(x \ln 10) \log x} \right|$$

$$\kappa = \left| \frac{1}{\ln 10 \log x} \right| < 1$$

$$-1 < \frac{1}{\ln 10 \log x} < 1$$

$$-1 < \frac{1}{\ln 10 \log x}$$

$$\Rightarrow (0 < x < \frac{1}{10^{\frac{1}{\ln(10)}}}) \vee (x > 1)$$

$$\frac{1}{\ln 10 \log x} < 1$$

$$\frac{1}{\ln 10} < \log x$$

$$\Rightarrow (0 < x < 1) \vee (x > 10^{\frac{1}{\ln(10)}})$$

Por lo tanto para valores de x

$$((0 < x < \frac{1}{10^{\frac{1}{\ln(10)}}}) \vee (x > 1)) \wedge ((0 < x < 1) \vee (x > 10^{\frac{1}{\ln(10)}}))$$

$$\Rightarrow x \in \langle 0, \frac{1}{10^{\frac{1}{\ln(10)}}} \rangle \cup \langle 10^{\frac{1}{\ln(10)}}, \infty \rangle$$

el problema estará bien condicionado.

Para $f(x) = \cos x$ calculamos el número de condición relativo

$$\kappa = \left| \frac{x(-\sin x)}{\cos x} \right|$$

$$\kappa = |-x \tan x| = |x \tan x| < 1$$

Usando la aproximación de Maclaurin-Taylor alrededor del $x = 0$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15^2}x^5 + \ldots$$

Utilizando esos 3 valores como referencia

$$\kappa = \left|(-x)(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15^2}x^5)\right|$$

$$\kappa = \left| x(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15^2}x^5) \right|$$

$$\kappa = \left| x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{15^2}x^6 \right| < 1$$

$$x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{15^2}x^6 < 1$$

Por lo tanto para valores de x , tal que

$$x \in \langle -0.888, 0.888 \rangle$$

el problema estará bien condicionado.

Para $f(x) = e^x$ calculamos el número de condición relativo

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

$$\kappa = \left| \frac{x.e^x}{e^x} \right| < 1$$

$$-1 < x < 1$$

Por lo tanto para valores de x , tal que $x \in \langle -1, 1 \rangle$ el problema estará bien condicionado.

Pregunta 3

Obtenga los números de condición relativos de las siguientes funciones :

$$\begin{aligned} &a)\ f(x) = \sqrt{x+5} \\ &b)\ f(x) = cos(2\pi x) \\ &c)\ f(x) = e^{-x^2} \end{aligned} \tag{2}$$

Solución

Para $f(x) = \sqrt{x+5}$ calculamos el número de condición relativo

$$f(x) = \sqrt{x+5}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}$$

$$\kappa = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{x.\frac{1}{2\sqrt{x+5}}}{\sqrt{x+5}}\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{5}{2(x+5)}\right| < 1$$

$$\frac{-1}{2} < \frac{5}{2(x+5)} < \frac{3}{2}$$

$$\frac{-1}{2} < \frac{5}{2(x+5)} \wedge \frac{5}{2(x+5)} < \frac{3}{2}$$

$$-10 < x \wedge \frac{-10}{3} < x$$

Por lo tanto para valores de $x \in \langle\frac{-10}{3}, \infty\rangle$, el problema estará bien condicionado.

Solución

Para $f(x) = cos(2\pi x)$ calculamos el número de condición relativo

$$f(x) = cos(2\pi x)$$

$$f'(x) = -2\pi sen(2\pi x)$$

$$\kappa = \left|\frac{-2x\pi sen(2\pi x)}{cos(2\pi x)}\right| = \left|-2\pi x tan(2\pi x)\right| < 1$$

$$\Rightarrow \frac{arctan(\frac{-1}{2\pi})}{2\pi} < x < \frac{arctan(\frac{1}{2\pi})}{2\pi}$$

Por lo tanto para valores de $x \in \langle -1.4392478714108, 1.4392478714108\rangle$, el problema estará bien condicionado.

Solución

Para $f(x) = e^{-x^2}$ calculamos el número de condición relativo

$$f(x) = e^{-x^2}$$

$$f'(x) = -2e^{-x^2}$$

$$\kappa = \left| \frac{-2x^2 e^{-x^2}}{e^{-x^2}} \right| = |-2x^2| = |2x^2| < 1$$

$$\Rightarrow 0 < x < \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Por lo tanto para valores de $x \in \langle 0, \sqrt{\frac{1}{2}} \rangle$, el problema estará bien condicionado.

Pregunta 17

El perímetro de un rectángulo es 64 cm y la diferencia entre las medidas de la base y la altura es 6 cm. Determine las dimensiones de dicho rectángulo.

a) Modele el problema.
sean los lados:
a:altura
b:base

Ecuaciones
$2b+2a=64$
$b-a=6$

Ordenando las ecuaciones
$b+a=32$
$b-a=6$

Matriz A

A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Matriz aumentada

$$A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 32 \\ 1 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

b) Determine la norma matricial de A y A^{-1}
Primero calculamos la inversa de A

$$A^{-1} = \frac{adj(A^t)}{|A|}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad adj(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad |A| = -2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Las normas se calculan de la siguiente manera

$\|A\|_p = max_{x\neq 0}\, \frac{\|AX\|_p}{\|X\|_p}$
$\|A\|_1 = max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$
$\|A\|_\infty = max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

Para la matriz A
Fila 1:$|1| + |1| = 2$
Fila 2:$|1| + |-1| = 2$
Columna 1:$|1| + |1| = 2$
Columna 2:$|1| + |-1| = 2$
$\|A\|_1 = \max(2, 2) = 2 \quad \|A\|_\infty = \max(2, 2) = 2$

Para la matriz A^{-1}
Fila 1:$\left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{1}{2}\right| = 1$
Fila 2:$\left|\frac{1}{2}\right| + \left|-\frac{1}{2}\right| = 1$
Columna 1:$\left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{1}{2}\right| = 1$
Columna 2:$\left|\frac{1}{2}\right| + \left|-\frac{1}{2}\right| = 1$
$\left\|A^{-1}\right\|_1 = \max(1,1) = 1 \quad \left\|A^{-1}\right\|_\infty = \max(1,1) = 1$

c) Determine la solución usando los métodos de Gauss y Gauss-Jordan.

ordenando con pivoteo parcial

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 32 \\ 1 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

1) metodó de gauss

$$\xrightarrow{F_2=F_2-F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 32 \\ 0 & -2 & -26 \end{array}\right)$$

entonces:

-2a=-26, a=13

b+a=32, b=19

la base b=19

la altura a=13

```python
def EliminacionGaussiana(A,b):
    x = [0] * len(b)
    M = A.copy()
    for i in range(len(b)):
        M[i].insert(len(b) + 1, b[i][0])

    print("Matriz Aumentada:")
    print('\n'.join([''.join(['{:4}'.format(item) for item in row])for row in M]))

    i = 0
    aux=False
    while (i < len(A)):
        if (M[i][i] == 0):
            aux=True
            break
        else:
            for k in range(i + 1, len(A)):
                num = -M[k][i]
                for j in range(len(b) + 1):
                    M[k][j] = M[k][j] + num * (M[i][j] / M[i][i])
        i = i + 1

    print("\nMatriz Triangular:")
    print('\n'.join([''.join(['{:4}'.format(item) for item in row])for row in M]))
```

```python

for i in range(len(A)):
    for j in range(len(A[0])):
        A[i][j]=M[i][j]
for i in range(len(b)):
    b[i][0]=M[i][len(b)]

if aux:
    print("No hay solucion")
else:
    SustitucionRegresiva(A, b)
```

```python
def SustitucionRegresiva(U,b):
    x = [0] * len(b)
    i = len(b) - 1
    num = 0
    while (i >= 0):
        j = i + 1
        sum = 0
        if j != len(U):
            while (j < len(U)):
                sum = sum + x[j] * U[i][j]
                j = j + 1

        num = (b[i][0] - sum) / U[i][i]
        x[i] = num
        i = i - 1
    print("\nSolucion:")


#MAIN
A = [[2,2],
     [1,-1],]
b = [[64],
     [6],]
print("Eliminacion Gaussiana")
EliminacionGaussiana(A,b)
```

```
Eliminacion Gaussiana
Matriz Aumentada:
   2   2  64
   1  -1   6

Matriz Triangular:
   2   2  64
 0.0-2.0-26.0

Solucion:
[19.0, 13.0]

Process finished with exit code 0
```

2) metodó de gauss-jordan

$$\xrightarrow{F_2=F_2-F_1}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 32 \\ 0 & -2 & -26 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2=\frac{F_2}{-2}}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 32 \\ 0 & 1 & 13 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1=F_1-F_2}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 13 \end{array}\right)$$

entonces:

b =19

a =13

la base b=19

la altura a=13

```
import numpy as np
import sys

def Gauss_Jordan(A,b):
    M = A.copy()
    n=len(b)
    x = np.zeros(n)

# Eliminacion Gauss-Jordan
    for i in range(len(b)):
        M[i].insert(len(b) + 1, b[i][0])

    print("Matriz Aumentada:")
    print('\n'.join([''.join(['{:4}'.format(item) for item in row]) for row in M]))

    for i in range(n):
        if M[i][i] == 0.0:
            sys.exit('Division por 0 detectada')

        for j in range(n):
            if i != j:
                ratio = M[j][i] / M[i][i]

                for k in range(n + 1):
                    M[j][k] = M[j][k] - ratio * M[i][k]
    print("\nMatriz despues de Aplicar la eliminacion:")
    print('\n'.join([''.join(['{:4}'.format(item) for item in row]) for row in M]))
```

```python
#Solucion
    for i in range(n):
        x[i] = M[i][n] / M[i][i]

    print('\nMatriz Solucion: ')
    for i in range(n):
        print('X%d = %0.2f' % (i, x[i]), end='\t')

#MAIN
A = [[2,2],
     [1,-1],]
b = [[64],
     [6],]
print("Eliminacion Gaussiana")
Gauss_Jordan(A,b)
```

```
Eliminacion Gaussiana
Matriz Aumentada:
   2   2  64
   1  -1   6

Matriz despues de Aplicar la eliminacion:
   2.0   0.0  38.0
   0.0  -2.0 -26.0

Matriz Solucion:
X0 = 19.00  X1 = 13.00
Process finished with exit code 0
```

Pregunta 19

Se juntan 30 personas entre hombres, mujeres y niños. Se sabe que entre los hombres y las mujeres duplican al número de niños. También se sabe que entre los hombres y el triple de las mujeres exceden en 20 al doble de niños.

a) Modele el problema.
x:hombres
y:mujeres
z:niños

Ecuaciones
$x+y+z=30$
$x+y=2z$
$x+3y=2z+20$

ordenando las ecuaciones
$x+y+z=30$
$x+y-2z=0$
$x+3y-2z=20$

Matriz A

$$A= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Matriz aumentada

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 20 \end{array}\right)$$

b) Determine la norma matricial de A y A^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & 5/6 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 0 \end{array}\right) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 5/6 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\|A\|_p = max_{x\neq 0}\ \frac{\|AX\|_p}{\|X\|_p}$
$\|A\|_1 = max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$
$\|A\|_\infty = max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$
para la matriz A
$\|A\|_1 = (3, 5, 5) = 5$
$\|A\|_\infty = (3, 0, 2) = 3$
para la matriz A^{-1}
$\left\|A^{-1}\right\|_1 = (1, 0, 0) = 1$
$\left\|A^{-1}\right\|_\infty = (1, 0, 0) = 1$

c) Determine la solución usando los métodos de Gauss y Gauss-Jordan.

ordenando con pivoteo parcial

$$\left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 1 & 3 & -2 & 20 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

1) metodó de gauss

$$\xrightarrow{F_2=F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 2 & -3 & -10 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \qquad \xrightarrow{F_3=F_3-F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 2 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

-3z=-30 , z=10
2y-3(10)=-10 , y=10
x+10+10=30 , x=10
Asistieron 10 hombre,10 mujeres y 10 niños

```python
import numpy as np
# INGRESO
A = np.array([[1,1,1,30],
              [1,1,-2,0],
              [1,3,-2,20]])
print('Matriz aumentada')
print(A)

# PROCEDIMIENTO
casicero = 1e-15 # Considerar como 0

# Evitar truncamiento en operaciones
A = np.array(A,dtype=float)

```

```python
# Pivoteo parcial por filas
tamano = np.shape(A)
n = tamano[0]
m = tamano[1]

# Para cada fila en A
for i in range(0,n-1,1):
    # columna desde diagonal i en adelante
    columna  = abs(A[i:,i])
    dondemax = np.argmax(columna)

    # dondemax no está en diagonal
    if (dondemax !=0):
        # intercambia filas
        temporal = np.copy(A[i,:])
        A[i,:] = A[dondemax+i,:]
        A[dondemax+i,:] = temporal
```

```
# eliminación hacia adelante
for i in range(0,n-1,1):
    pivote    = A[i,i]
    adelante = i + 1
    for k in range(adelante,n,1):
        factor  = A[k,i]/pivote
        A[k,:] = A[k,:] - A[i,:]*factor

# sustitución hacia atrás
ultfila = n-1
ultcolumna = m-1
X = np.zeros(n,dtype=float)

```

Pregunta 19

```python
for i in range(ultfila,0-1,-1):
    suma = 0
    for j in range(i+1,ultcolumna,1):
        suma = suma + A[i,j]*X[j]
    b = A[i,ultcolumna]
    X[i] = (b-suma)/A[i,i]

X = np.transpose([X])
# SALIDA
print('Pivoteo parcial por filas')
print(AB1)
print('eliminación hacia adelante')
print(A)
print('solución: ')
print(X)
```

```
Matriz aumentada
[[ 1  1  1 30]
 [ 1  1 -2  0]
 [ 1  3 -2 20]]
Pivoteo parcial por filas
[[ 1.  1.  1. 30.]
 [ 1.  3. -2. 20.]
 [ 1.  1. -2.  0.]]
eliminación hacia adelante
[[  1.   1.   1.  30.]
 [  0.   2.  -3. -10.]
 [  0.   0.  -3. -30.]]
solución:
[[10.]
 [10.]
 [10.]]
PS C:\Users\hen12\Desktop\micarpeta\python>
```

2) metodó de gauss-jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 2 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & -3 & -30 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3=-F_3/3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 2 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2=F_2+3F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 2 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1=F_1-F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 2 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2=F_2/2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1=F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

x=10

y=10

z=10

Asistieron 10 hombres, 10 mujeres, 10 niños

```python
import numpy as np
# INGRESO
A = np.array([[1,1,1,30],
              [1,1,-2,0],
              [1,3,-2,20]])
print('Matriz aumentada')
print(A)
# PROCEDIMIENTO
casicero = 1e-15 # Considerar como 0

# Evitar truncamiento en operaciones
A = np.array(A,dtype=float)
# Pivoteo parcial por filas
tamano = np.shape(A)
n = tamano[0]
m = tamano[1]
```

```
# Para cada fila en A
for i in range(0,n-1,1):
    # columna desde diagonal i en adelante
    columna = abs(A[i:,i])
    dondemax = np.argmax(columna)

    # dondemax no está en diagonal
    if (dondemax !=0):
        # intercambia filas
        temporal = np.copy(A[i,:])
        A[i,:] = A[dondemax+i,:]
        A[dondemax+i,:] = temporal

AB1 = np.copy(A)
```

```python
# eliminacion hacia adelante
for i in range(0,n-1,1):
    pivote = A[i,i]
    adelante = i + 1
    for k in range(adelante,n,1):
        factor = A[k,i]/pivote
        A[k,:] = A[k,:] - A[i,:]*factor
AB2 = np.copy(A)

# elimina hacia atras
ultfila = n-1
ultcolumna = m-1
for i in range(ultfila,0-1,-1):
    pivote = A[i,i]
    atras = i-1
```

```python
    for k in range(atras,0-1,-1):
        factor = A[k,i]/pivote
        A[k,:] = A[k,:] - A[i,:]*factor
    # diagonal a unos
    A[i,:] = A[i,:]/A[i,i]
X = np.copy(A[:,ultcolumna])
X = np.transpose([X])
# SALIDA
print('Pivoteo parcial por filas')
print(AB1)
print('eliminacion hacia adelante')
print(AB2)
print('eliminación hacia atrás')
print(A)
print('solución de X: ')
print(X)
```

```
Matriz aumentada
[[ 1  1  1 30]
 [ 1  1 -2  0]
 [ 1  3 -2 20]]
Pivoteo parcial por filas
[[ 1.  1.  1. 30.]
 [ 1.  3. -2. 20.]
 [ 1.  1. -2.  0.]]
eliminacion hacia adelante
[[  1.    1.    1.   30.]
 [  0.    2.   -3.  -10.]
 [  0.    0.   -3.  -30.]]
eliminación hacia atrás
[[ 1.  0.  0. 10.]
 [ 0.  1.  0. 10.]
 [-0. -0.  1. 10.]]
solución de X:
[[10.]
 [10.]
 [10.]]
PS C:\Users\hen12\Desktop\micarpeta\python>
```