Práctica Dirigida 1 - Ejercicios (2,8,12,18)

Cipriano Arroyo Bruno
Catalino Morales Breiner
Huanca Contreras Henry
Malvaceda Canales Carlos Daniel

Universidad Nacional de Ingeniería

Septiembre 28, 2022

Outline

Tabla de Contenido

Parte I

Sea la sucesión definida por:

$$\mathrm{a}_1 = \sqrt{2} \wedge \qquad a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$$

demuestre que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
es convergente y determine su límite.
Demostración por inducción
1) para n=1, $a_1 = \sqrt{2}$ para n=2, $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$ de donde
$\sqrt{2} < \sqrt{2\sqrt{2}} \Longrightarrow a_1 < a_2$
2) Hipotesis inductiva para n=k; $a_k < a_{k+1}$ por demostrar que n=k+1; osea $a_{k+1} < a_{k+2}$ en efecto:
como $a_k < a_{k+1} \Longrightarrow 2\mathrm{a}_k < 2a_{k+1} \Longrightarrow \sqrt{2a_k} < \sqrt{2a_{k+1}}$ por lo tanto $a_{k+1} < a_{k+2}$
es una sucesión monotona.

Parte II

Demostraremos que es acotada donde $a_n < 2 \; \forall n$ por inducción
1) para n=1, $a_1 = \sqrt{2} < 2$
2) Hipotesis inductiva para n=k; $a_k < 2$ por demostrar para n=k+1, osea $a_{k+1} < 2$, como a$_k < 2 \Longrightarrow 2a_k < 4 \Longrightarrow \sqrt{2a_k} < 2$ por lo tanto $a_{k+1} < 2$ la sucesion es acotada.
Entonces aplicando el teorema de weierstrass al ser la sucesión monotona y acotada podemos decir que la sucesion converge.

Parte III

$\lim_{n\to\infty}(a_n) = L$ y como $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$ elevando al cuadrado se tiene $a_n^2 = 2a_{n-1}$ tomando limites podemos escribir $\lim_{n\to\infty}(a_n^2) = \lim_{n\to\infty}(2a_{n-1})$ osea $\mathsf{L}^2 = 2L \Longrightarrow \mathsf{L}_1 = 0$ o $L_2 = 2$ como $a_n > 0$ entonces $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 2$

Tabla de Contenido

Pregunta 8

Sea la sucesión $\{x_n\}$ *definida por:*

$$x_n = 0,25e^{-n}, x_0 = 0,1$$

Determine los valores usando el método Δ^2 *de Aitkenn.*

El método de Aitken Δ^2 está basado en la hipótesis que la sucesión $\{\widehat{p}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por :

$$\widehat{p}_n = p_n - \frac{(p_{n+1} - p_n)^2}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n} \tag{1}$$

converge mas rápido a p que la sucesión original $\{p\}_{\in\mathbb{N}}$.

Calculando el valor de convergencia de la sucesión $\{x_n\} = 0,25e^{-n}, x_0 = 0,1$

$$\lim_{n\to\infty} \{x_n\} = 0,25e^{-n} = 0 \tag{2}$$

Hallando los primeros valores de la sucesion

Título del bloque

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Integer lectus nisl, ultricies in feugiat rutrum, porttitor sit amet augue.

$$x_0 = 0,1 \tag{3}$$

$$x_1 = 0,25e^{-1} \tag{4}$$

$$x_2 = 0,25e^{-2} \tag{5}$$

$$\widehat{x}_0 = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} \tag{6}$$

```python
import numpy as np
e = np.e
# Método Δ^2 de Aitken
p_sombrero = lambda x0, x1, x2: x0 - (pow(x1-x0,2))/(x2 -2*x1 +x0)

# x_n : sucesion
def metodo_Aitken(x_n, p, n):
    init_values = [0] * (n+2)
    #Se aumenta 2 terminos a la cantidad deseada para el metodo Δ^2 de Aitken
    for i in range(n+2):
        init_values[i] = x_n(p)
        p += 1

    for i in range(n+2):
        print(f'X{i}:\t{init_values[i]:.12f}')
    print('-------------------')
    for i in range(n):
        resultado_aitken = p_sombrero(init_values[i], init_values[i+1], init_values[i+2])
        print(f'P^{i}:\t{resultado_aitken:.12f}')

if __name__ == '__main__':
    x_n = lambda n: 0.1 if n==0 else 0.25*pow(e,-n)
    metodo_Aitken(x_n, 0, 5)
```

n	x_n	$\widehat{p}_n$
0	0.100000000000	0.101286937147
1	0.091969860293	0.000000000000
2	0.033833820809	0.000000000000
3	0.012446767092	0.000000000000
4	0.004578909722	0.000000000000
5	0.001684486750	0.000000000000
6	0.000619688044	0.000000000000

Table: Sucesión generada por el método Δ^2 de Aitken

Tabla de Contenido

Implemente un programa en Python para convertir los siguientes números decimales a binarios con signo de 8 bits:

a) 56	b) 85
c) 127	d) 27

```python
#Creamos la funcion para convertir de decimal a binario con 8 bits
def bin(Num):
    N_0=Num
    N=''
    while N_0≠0:
        if N_0 % 2 ≠0 :
            ak=1
        else :
            ak=0

        N_0=(N_0-ak)/2
        N=N+str(ak) #concateno el ak que obtengo en cada iteracion

    while len(N)<8: #concateno los 0 restantes para completar la longitud de 8 bits
        N+=str(0)
    N=N[::-1]#como empiezo del ultimo al primero, invierto la cadena
    print(N)

bin(56)
bin(85)
bin(127)
bin(27)
```

Lista de Conversión	
Número	Conversion a 8 bits
56	00111000
85	01010101
127	01111111
27	00011011

Table: Numeros decimales y sus equivalentes en binario (8 bits)

Tabla de Contenido

Parte I

Determinar el mayor, menor elemento positivo, número de elementos del conjunto $\mathbb{F}$(10,6,-9,9), asi como las siguientes operaciones x+y,x-y,xy,x/y, donde $x = \pi = 3.141592653589...$ e $y = \epsilon = 2.7182818284590...$

De $\mathbb{F}$(10,6,-9,9) sabemos que B=10, t=6, L=-9, U=9

Además el conjunto $\mathbb{F}$ esta acotado de la forma:

$$\text{x}_{min} = B^{L-1} \leq |x| \leq B^{U}(1 - B^{-t}) = x_{max} \forall x \in \mathbb{F}$$

Por lo tanto el menor y mayor elemento positivo que puede tomar $\mathbb{F}$ seran:

$$x_{min} = B^{L-1} = 10^{-9-1} = 10^{-10}$$

$$x_{max} = B^{U}(1 - B^{-t} = 10^{9}(1 - 10^{-6} = 10^{9} - 10^{3} = 999999000$$

El número de elementos de $\mathbb{F}$ esta dado por: 2(B-1)B$^{t-1}(U - L + 1) + 1$

$$\implies \#elem = 2(10-1)10^{6-1}(9-(-9)+1)+1$$

$$=2(9)*10^{5} * 19 + 1$$

$$=342*10^{5} + 1 = 34200001$$

Parte II

$$x = 3.141592653589$$
$$y = 2.7182818284590$$
$$fl(x) = 0.314159 * 10$$
$$fl(y) = 0.271828 * 10$$

$$i) x + y$$
$$fl(x) + fl(y) = 0.585987 * 10$$
$$fl(fl(x) + fl(y)) = 0.585987 * 10$$

$$ii) x - y$$
$$fl(x) - fl(y) = 0.042331 * 10$$
$$fl(fl(x) - fl(y)) = 0.042331 * 10$$

$$iii) x.y$$
$$fl(x).fl(y) = 0.085397212652 * 10^2$$
$$fl(fl(x).fl(y)) = 0.085397 * 10^2$$

$$iv) x/y$$
$$fl(x)/fl(y) = 1.15572715... * 10$$
$$fl(fl(x)/fl(y)) = 0.115572 * 10$$